



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Thème

**Etude des comportements complexes de système
modélisé par des transformations polynomiales
bidimensionnelles**

Présenté par : **Maroua Louaar**

Devant le Jury :

- | | | |
|-----------------------------|----------------------|-------------|
| • Dr.Billal Gheraibia | Univ. Oum El Bouaghi | Président |
| • Dr.Yamina Soula | Univ. Oum El Bouaghi | Rapporteuse |
| • Dr. Abd El Hamid Gouasmia | Univ. Oum El Bouaghi | Examineur |
| • Dr. Salim Rouar | Univ. Oum El Bouaghi | Examineur |

Soutenu le: 29/06/2022

2021/2022

Remerciements

Je remercie mon Dieu Allah le tout puissant pour m'avoir aidé aujourd'hui à rédiger ce mémoire.

Mes vives remerciements au Dr. Soula Yamina pour le choix du sujet de ce mémoire, Ses suggestions, Ses conseils et ses corrections des erreurs afin d'améliorer mon mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Il est important pour moi de remercier ma famille : mes parents, mes frères et mes sœurs, qui ont toujours été une source d'encouragement pour moi.

Un grand merci à mes amies et mes collègues. Merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Dédicace

Avant tous propos, je tiens à rendre grâce à **Allah** qui m'a guidé sur la bonne voie.

Je dédie ce modeste travail:

♣ A mes très chers parents ma mère "**Louaar S.**" et mon père "**Louaar R.**" qui m'ont bien élevés, aidés soutenus et encouragés durant toutes ces années d'étude qu'Allah les protège.

♣ Mes sœurs et frères: **Aya, Tayf, Zouhdi, Abd el bassit, et Nisreen.**

♣ Toute mes amies surtout: **Sigha R., Bensmaine M., Nayli S. et Bakhouche R.**

♣ Tous mes collègues de ma promotion de Master 2 Mathématiques 2022.

♣ Tous mes professeurs sont à l'Institut de Mathématiques, Université Oum El Bouaghi.

Louaar Maroua.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la récurrence ou transformation ponctuelle T du seconde ordre, dans le plan paramétrique, D'abord chercher les points fixes, et étudier la stabilité de ces points, en suite nous présentons les courbes de bifurcations analytiquement et numériquement. De plus, nous déterminons quelques propriétés des "Lignes critiques" pour la même récurrence T à inverse non unique. Enfin, nous étudions les bifurcations du bassin d'attraction et leur évolution.

Abstract

In this work, we study the transformation T of the second order, in the parametric plan. First we calculate the fixed points, and study their stability, and then we present the bifurcations curves analytically and numerically. Moreover, we determine some properties of the "Critical Lines" for the same non-invertible T . Finally, we study the bifurcations of the basin of attraction and their evolution.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة التحويل من الدرجة الثانية في المعلم العددي اولا نبحت عن النقاط الثابتة و دراسة استقرارها ثم نقدم منحنيات التشعب تحليليا و عدديا

علاوة على ذلك نحدد بعض خصائص المستقيمات الحرجة لنفس التحويل السابق والذي يقبل تحويل عكسي ليس وحيدا واخبرا ندرس تشعبات حوض الجذب و تطورها

Table des matières

Table des figures	iv
1 Généralités sur les transformations ponctuelles bidimensionnelle	7
1.1 Introduction	8
1.2 Singularités	8
1.3 Stabilité des singularités	9
1.4 Chaos	11
1.5 Ensemble attractent et attracteur :	12
1.6 Courbes invariantes	12
1.7 Bassin d'attraction	13
1.8 Bifurcations	13
1.9 Types des bifurcations	14
1.10 Lignes critiques	19
1.10.1 Feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles bidimensionnelles	20
1.11 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins . . .	21
2 Etude des cycles et bifurcation d'une transformation ponctuelle de di- mension deux	26
2.1 Introduction	27
2.2 Etude du système de dimension deux	27
2.2.1 Définition du système	27
2.3 Etude analytique	27
2.3.1 Les points fixes	27
2.3.2 La stabilité des points fixes	29
2.4 Equations des courbes de bifurcations pour T	33
2.4.1 Bifurcation flip ou doublement de période $S = -1$	34
2.4.2 Bifurcation fold ou nœud-col $S = +1$	34
2.5 Points nœuds paramétriques avec multiplicateurs $S_1 = -S_2 = 1$	35
2.6 Equations des courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre $k = 1$ dans les plan des paramètres (a, d) , (b, d) et (c, d)	37
2.7 Etude numérique	39

2.7.1	Evolution de la structure de bifurcation	39
2.8	Cycle d'ordre 2 pour T	47
3	Espace de phase d'une transformation ponctuelle	48
3.1	Introduction	49
3.2	Les propriétés de non inversible T dans le plan (x, y)	49
3.2.1	Détermination des lignes critiques de T	50
3.2.2	Feuilletage du plan (x, y) pour la transformation T	52
3.3	Bifurcations d'un bassin d'attraction	56
3.3.1	La structure non fractale	56
	Bibliographie	62

Table des figures

1.1	Courbes invariantes au voisinage d'un point fixe X^*	13
1.2	Bifurcation fold ou nœud-col (Pli) de points fixes, (-) : stable, (- -) : instable.	15
1.3	Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) : stable, (- -) : instable.	16
1.4	Bifurcations fourche supercritique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (- -) : instable.	17
1.5	Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous-critique (à droite).	18
1.6	(a), (b)- Plan de phase d'une TNI de type $(Z_0 - Z_2)$	21
1.7	Bifurcation d'un bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe.	23
1.8	Bifurcation d'un bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiplement connexe $\lambda = \lambda_{3b}$	23
1.9	Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.	25
2.1	(a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (a, d) avec $c = -b = -0.2$, pour la transformation T . (b) : Les courbes de bifurcation de type flip Λ_1^j , $j = \overline{1, 3}$ ainsi que les courbes de bifurcations de type transcritique $\Lambda_{(1)_0}^1$, et de type fold $\Lambda_{(1)_0}^2$ des points fixes de la transformation T dans le plan (a, d) pour $c = -b = -0.2$. (c) : Zoom de (a), et (d) : Zoom de (b). La figure montre la situation de singularité dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_1	41
2.2	Zoom de la figure 2.1 (d) Les courbes de bifurcation transcritique, bifurcation fold et bifurcation flip pour les points fixes O, P, Q dans le plan (a, d) , avec $c = -b = -0.2$	42
2.3	(a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (a, d) avec $c = 0$ et $b = 0.4$, pour la transformation T . (b) : Les courbes de bifurcations correspondat à (a), c'est-à-dire, les courbes de bifurcations de type flip Λ_1 , $j = 1, 4$ ainsi que la courbe de bifurcation de type fold $\Lambda_{(1)_0}^1$ des points fixes. (c) : Domaines de stabilité pour $b = 0$ et $c = 0.4$ et (d) : Domaines de stabilité pour $b = c = 0$, dans ce dernier cas, le système 2.1 devient chaotique.	44

2.4	(a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (b, d) avec $a = c = 1$, pour T . (b) : Les courbes de bifurcation correspondant à (a) de type flip $\Lambda_1^{j'}$, $j' = \overline{5, 7}$ ainsi que les courbes de bifurcations de type transcritique après perturbation du système (2.1) $\Lambda_{(1)0}^3$ et $\Lambda_{(1)0}^4$ des points fixes. la figure montre la situation des singularités dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_2 et NP_3 .	45
2.5	(a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (c, d) avec $a = 0.5$ et $b = -2$ pour la transformation T . (b) : Les courbes de bifurcation correspondant à (a) de type flip $\Lambda_1^{j'}$, $j' = 8, 9, 10$ ainsi que la courbe de bifurcation de type fold $\Lambda_{(1)0}^5$ du système 2.1 pour les points fixes. la figure montre la situation de singularité dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_4 .	46
3.1	Lignes critiques $LC = L \cup L'$, et préimages de Lignes critiques LC_{-1} , avec Z_i , $i = 1, 3$ de T dans le plan de phase (x, y) , pour $a = c = 1$, $d = 0$ et $b = -2.4$.	53
3.2	(a), (b) et (c)– Plan de phase d'une TNI de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$.	55
3.3	Bassin d'attraction de point fixe stable Q , qui est simplement connexe (région blue).	57
3.4	Création des trous dans le bassin d'après la bifurcation de contact	58
3.5	Suite des préimages à l'intérieur du bassin.	59
3.6	Le bassin devient non-connexe.	59
3.7	La poursuite de la bifurcation de contact entraîne la disparition du bassin.	60

Principales notations utilisées

I : matrice identité.

$\det J$: déterminant d'une matrice jacobienne J .

$\text{tr} J$: trace de J .

S_i , ($i = 1, 2$) : valeurs propres.

(k, j) : un cycle d'ordre k , j caractérise l'ordre d'échange des k points du cycle.

$\Lambda_{(k)_0}^j$: une courbe de bifurcation "noeud-col" ou "fold" ou "pli".

Λ_k^j : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".

C_k^j : point cuspidal.

NP_i ($i > 0$) : points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).

N_S^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud stable.

N_I^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud instable.

C^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type col.

TNI : transformations non inversibles.

LC_{-1} : le lieu des points pour lequel le $\det J$ de T s'annule.

$LC = LC_0$: lignes critiques de rang 1 des courbes LC_{-1} .

LC_i , ($i = \overline{1, n}$) : itérations, les images des courbes LC_{-1} .

Z_i : zones, (i entier naturel).

$B(A)$ ou (D) : bassin (domaine) d'attraction de l'attracteur A .

Introduction générale

Pour comprendre le comportement des systèmes dynamiques, il faut d'abord étudier les systèmes mathématiques qui les modélisent. Contrairement à ce qu'on pensait pendant longtemps, ces modèles peuvent être très simples. Par exemple, il existe des systèmes dynamiques modélisés par des itérations (ou transformations ponctuelles).

Autrement dit, les trajectoires de ces systèmes convergent vers un cycle d'ordre k , ($k \geq 1$), ou vers attracteur chaotique ou convergent par exemple vers un ensemble de Cantor.

Dans ce cas, deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène sensibilité aux conditions initiales, et il caractérise le chaos.

Nous considérons une transformation de la forme suivante

$$X_{n+1} = T(X_n); \quad X = (x; y) \in \mathbb{R}^2; \quad \Lambda = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad (0.1)$$

Pour comprendre l'évolution de la dynamique de la transformation (0.1), nous étudions les cycles de période k de T , c'est-à-dire k points X_1, \dots, X_k vérifiant $T(X_i) = X_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, $T(X_k) = X_1$, $X_i = T^k(X_i)$, $X_i \neq T^l(X_i)$, $i = 1, \dots, k$, $1 \leq l < k$, l, k entiers.

Dans le cas d'une transformation unidimensionnel différentiable et de classe C^1 , un cycle possède ce qu'on appelle un multiplicateur S , qui est défini comme le produit des dérivées du transformation à chaque point du cycle. Le cycle est dit stable si $|S| < 1$, et instable si $|S| > 1$.

Dans le cas d'une transformation bidimensionnel différentiable et de classe C^1 , un cycle a deux multiplicateurs S_1 et S_2 , qui sont les valeurs propres de la matrice jacobienne $DT^k(X)$ de l'application T^k à un point du cycle. Le calcul de S_1 et S_2 est utilisé pour trouver la stabilité du cycle.

Dans ce travail, nous ne considérons pas le cas où valeurs propres sont complexes.

Lorsque $S_1 = +1$ ou $S_2 = +1$, une bifurcation fold (pli) ou transcritique ou fourche peut se produire.

Lorsque $S_1 = -1$ ou $S_2 = -1$, une bifurcation flip (doublement de période) se produit.

Nous considérons également le type de singularité de codimension deux suivant :

Points tangents (points nœuds paramétriques) d'une courbe de bifurcation flip et une courbe fold ($S_1 = -S_2 = +1$) notés NP_i , i est le numéro du point (voir [23]).

Et a partir des années quatre vingt dix, les systèmes dynamiques modélisés par des transformations ponctuelles non inversibles, ou endomorphismes, sont devenus un sujet de recherche important pour leurs propriétés spécifiques, par rapport aux transformations inversibles. En effet, les transformations non inversibles interviennent, en tant que modèles de systèmes dynamiques, dans plusieurs domaines d'applications, comme l'économie, la biologie, les systèmes non linéaires en électronique, la théorie du signal.

Pour la compréhension des propriétés relatives aux transformations bidimensionnelles non inversibles (TNI), dans ce cas il existe des zones notées Z_i , ($i \geq 0$) dans le plan de phase [19], [20], [13], [12], [15], [16], [17]. L'existence des régions Z_i dans le plan de phase pour lesquelles, un point peut posséder zéro un ou plusieurs antécédents de premier rang. Ce nombre d'antécédents est constant pour une région déterminée et égale à i . Ces différentes

régions sont séparées par des singularités appelées "Lignes Critiques" notées *LC*.

Lignes critiques ont été introduites en 1964 par Mira [20], c'est une généralisation de la notion de points critiques (extremums locaux) dans le cas unidimensionnel.

Notion de feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles (*TNI*) bi-dimensionnelles est fondamentale, c'est-à-dire, on peut considérer le plan de phase, comme étant feuilleté, où chaque feuillet est associé à une détermination inverse T^{-1} de la transformation non inversible. Les lignes critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent.

Parmi les bifurcations où les lignes critiques interviennent, on citera les travaux de [4], [2], [3], [1], [6], [7], [8], pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe" , les bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe" ; ainsi que les bifurcations du type "bassin multiplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe".

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Chapitre 1

Nous introduisons les outils de base pour la suite, nous donnons les plus importants des résultats de la théorie de l'itération des transformations ponctuelles utilisons dans ce travail. Quelques définitions et propositions sont données dans ce chapitre, car elles sont nécessaires pour le reste de ce travail.

Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre, nous considérons une famille des systèmes dynamiques discrets modélisés par la transformation $T : (x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$ définie sur \mathbb{R}^2 dans

\mathbb{R}^2 par deux polynômes, un linéaire et un cubique, ce modèle a été proposé dans [4] :

$$T(x_n, y_n) : \begin{cases} x' = x_{n+1} = F(x_n, y_n) = x_n + y_n, \\ y' = y_{n+1} = G(x_n, y_n) = ax_n + bx_n^2 + cx_n^3 + dy_n, \end{cases} \quad (0.2)$$

Cette famille de transformations dépend des paramètres $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Nous étudions la transformation (0.2) dans le plan des paramètres. Un problème fondamental qui se pose est l'étude des bifurcations classiques (flip, fold et transcritique) analytiquement et numériquement dans les trois plans de paramètres (a, d) , (b, d) et (c, d) .

Chapitre 3

Nous étudions les propriétés liées aux bifurcations de bassins d'attraction pour la récurrence non inversible (0.2) dans le plan (x, y) . Ces bifurcations pour le cas d'un endomorphisme de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$, qui est un cas d'endomorphismes plus compliqués. Nous montrons que les points de contact entre la frontière de bassin d'attraction avec les courbes critiques (bifurcation de contact).

Chapitre 1

Généralités sur les transformations ponctuelles bidimensionnelle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons quelques généralités sur l'étude des transformations ponctuelles. Nous nous intéressons aux transformations ponctuelles (ou récurrences) de type autonome [13], [19] et [20], définies par :

$$X_{n+1} = T_{\Lambda}(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad X \in \mathbb{R}^P, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^q, \quad p, q \in \mathbb{N}^* \quad (1.1)$$

telle que $F \in C^k$, $k \geq 1$ par rapport à la variable réelle X et au paramètre Λ .

X_{n+1} est le conséquent de rang 1 de X_n .

X_n est l'antécédent de rang 1 de X_{n+1} .

$F^{-n}(X)$ est l'ensemble des antécédents de rang n de X . La dimension de l'équation (1.1) est p , et \mathbb{R}^P est appelé espace de phase de (1.1). Une solution de (1.1) est formée par suite de points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ où X_0 est appelée condition initiale, les points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ forment la trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

1.2 Singularités

On a deux types de singularités de dimension 0 pour la transformation T , les points fixes et les cycles appelés encore orbites périodiques.

1) Les points fixes

Un point fixe X^* est un point de l'espace de phase vérifiant :

$$T(X^*) = X^* \quad (1.2)$$

2) Les cycles d'ordre k

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la récurrence obtenue après k applications de T notée T^k (k entier), $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$, k fois. Les k points X_i^* , $i = 1, 2, \dots, k$ avec $k > 1$, appartenant à un cycle d'ordre k vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} X_i^* = T^k(X_i^*) \\ X_i^* \neq T^j(X_i^*), \quad 1 \leq j < k \quad (j \text{ et } k \text{ entiers}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Un cycle d'ordre $k = 1$ est un point fixe.

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre k est appelé point périodique d'ordre k .

Il peut également apparaître des singularités dites de dimension 1. Ce sont des courbes invariantes par l'application de la transformation T ou T^k .

1.3 Stabilité des singularités

La notion de multiplicateur permet de caractériser la stabilité de ces singularités (points fixes et cycles d'ordre k). Les multiplicateurs sont définis lorsque T est différentiable aux points X_i^* , $i = \overline{1, k}$.

- a) Lorsque la dimension de la récurrence $p = 1$, c'est-à-dire $X \in \mathbb{R}$, le multiplicateur S d'un point fixe $X = X_i^* = X^*$ est :

$$S = T'(X^*) = \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=x^*}$$

et le multiplicateur S d'un cycle d'ordre k ($X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$) est :

$$S = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*) = \prod_{i=1}^k \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{x=x_i^*}$$

Un point fixe ou un cycle d'ordre k est dit attractif si $|S| < 1$, et répulsif si $|S| > 1$.

- b) Lorsque $p > 1$, les multiplicateurs d'un point fixe X^* ou d'un cycle d'ordre k ($X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$) sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $T(X^*)$ ou de $T^k(X_i^*)$, $i = 1, \dots, k$.
Lorsque $p = 2$, on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs S_i ($i = 1, 2$) qui sont les valeurs propres de la matrice jacobienne ou matrice des dérivées partielles de $T^{(k)}$, ($k \geq 1$).

On distingue les singularités suivantes :

- 1) **Col** : $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$, $|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$.

Un col est un point instable :

- de type 1 si $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$.
- de type 2 si $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$ (ou $S_1 < 0$ et $S_2 > 0$).
- de type 3 si $S_1 < 0$ et $S_2 < 0$.

- 2) **Nœud** : $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$,

- stable si $|S_i| < 1$ ($i = 1, 2$).
- instable si $|S_i| > 1$ ($i = 1, 2$).

- 3) **Foyer** : $S_1, S_2 \in \mathbb{C}$, $S_1 = \rho e^{i\theta}$, $S_2 = \rho e^{-i\theta}$, $\rho = |S_i|$, $i = 1, 2$.

- stable si $\rho < 1$,
- instable si $\rho > 1$.

1.4 Chaos

Il n'existe pas de définition précise du chaos, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période est trop grande pour être mise en évidence le chaos englobe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

- Existence de cycles attractifs d'ordre infini.
- Coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

Et dans la transformation que nous allons voir, les mouvements chaotiques sont généralement associés à l'existence d'une infinité de cycles instables, qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique.

On distingue deux types du chaos :

1) Le chaos stable ou attracteur étrange

Le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir, les caractéristiques de cet attracteur sont :

- La dimension de l'attracteur est fractale (non entière).
- Sensibilité aux conditions initiales.

2) Le chaos instable ou répulsif étrange

On parle de chaos instable lorsqu'il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables, et le système évolue d'une manière similaire, mais diverge après un certain nombre d'itérations.

1.5 Ensemble attractent et attracteur :

Definition 1 *Un ensemble fermé invariant A est attractant s'il existe un voisinage U de A tel que $T(U) \subset U$ et $T^k(x) \rightarrow A$, quand $k \rightarrow \infty$, pour tout $x \in U$.*

Definition 2 *Un attracteur est un ensemble attractant topologiquement transitif, si seulement si quels que soient les ouverts $U, V \subset A$, il existe un entier positif k tel que : $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

1.6 Courbes invariantes

Il peut également apparaître des singularités dites de dimension un. Ce sont les courbes invariantes par la l'application de la transformation T ou T^k . Ces courbes décrites dans le plan de phase par $Q(X) = \text{constante}$ satisfont l'équation fonctionnelle.

$$Q(X_{n+1}) = Q(X_n)$$

Dans le cas d'un point fixe (ou d'un cycle d'ordre k) de type col, on note W_s les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et W_u les branches associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

La figure 1.1 donne une représentation des courbes invariantes au voisinage d'un point fixe X^* .

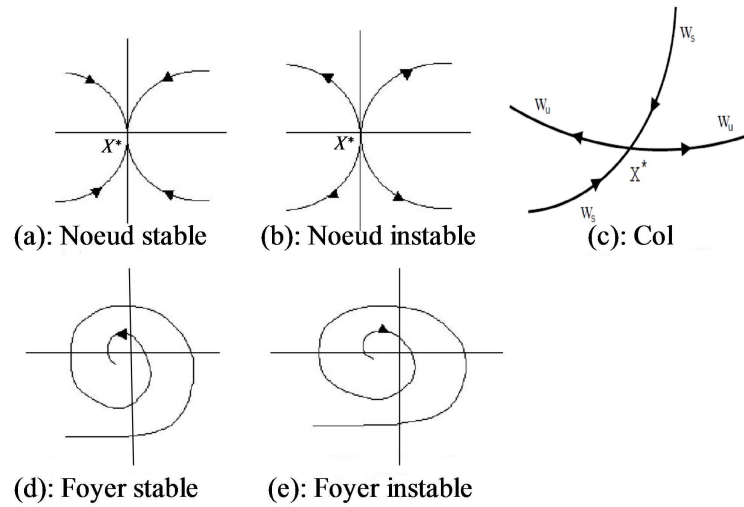


FIG. 1.1: Courbes invariantes au voisinage d'un point fixe X^* .

1.7 Bassin d'attraction

Definition 3 *Le bassin d'attraction $B(A)$ d'un ensemble attractant est l'ensemble ouvert constitué de tous les points x tels que $T^n(x) \rightarrow A$, quand $n \rightarrow \infty$, [12], [14], [15], [16], [17].*

1.8 Bifurcations

En dynamique, on dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un changement qualitatif ou quantitatif des solutions, se produit à l'occasion de la variation d'un paramètre Λ . Autrement dit, n'importe quelle variation même très petite d'un paramètre Λ entraîne une modification qualitative des solutions et changement de stabilité d'une singularité [10].

La structure des singularités d'une récurrence est différente pour les valeurs du paramètre Λ alors ces dernières sont appelées valeurs de bifurcation.

1.9 Types des bifurcations

On expose dans ce paragraphe quelques bifurcations fondamentales concernant les singularités énumérées ci-dessus.

1) Bifurcation fold ou nœud-col (Pli)

Elle correspond à l'apparition de deux points fixes ou cycles d'ordre k l'un stable et l'autre instable, les deux cycles sont confondus, et possèdent un multiplicateur $S = +1$.

- Pour la transformation d'ordre 1, le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\phi \underset{S=+1}{\leftrightarrow} A^k + R^k$$

Où

ϕ : signifie l'absence de cycles.

A^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k attractif.

R^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k répulsif.

- Pour la transformation d'ordre 2, la bifurcation fold donne un cycle nœud (stable ou instable), et un cycle col (figure 1.2).

le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\phi \underset{S=+1}{\leftrightarrow} N_S^k(\text{resp. } N_I^k) + C^k$$

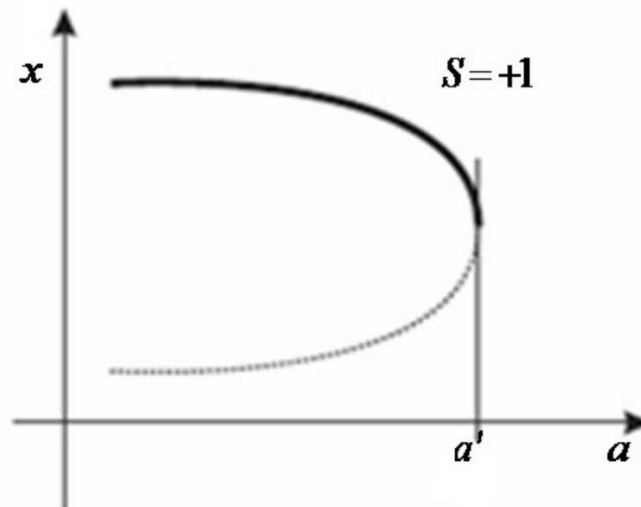


FIG. 1.2: Bifurcation fold ou nœud-col (Pli) de points fixes, (-) : stable, (- -) : instable.

N_S^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k de type nœud stable.

N_I^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k de type nœud instable.

C^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k de type col.

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\Lambda_{(k)_0}^j$ où k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange de ces points, deux cycles différents peuvent comporter le même nombre de points, mais leur échange est différent.

Cas particuliers de la bifurcation fold

a) Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux collecteurs différents points fixes se croisent. Au

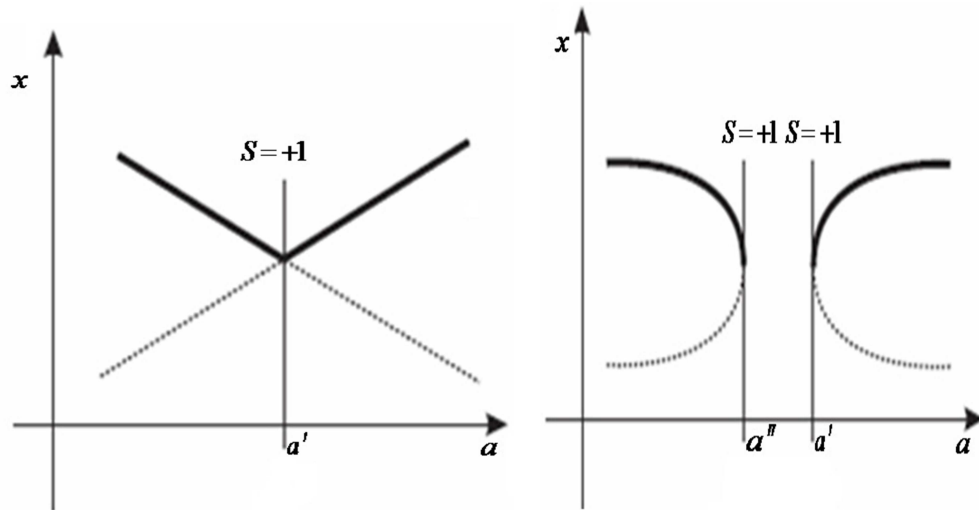


FIG. 1.3: Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) : stable, (- -) : instable.

point de passage de l'échange des points fixes il y a la propriété de stabilité. Le point fixe instable devient stable et vice versa. Notez qu'au-delà du point de bifurcation, le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation nœud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation nœud-col, sa représentation dans la figure 1.3.

b) Bifurcation pitchfork ou fourche

Lorsqu'un des multiplicateurs associé au cycle d'ordre k traverse la valeur $+1$ ($S_1 = +1$, $|S_2| \neq 1$), un autre type de bifurcation appelée bifurcation fourche, peut se produire, dans le cas le plus simple, en dimension deux, cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\begin{cases} N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) \xleftrightarrow{S=+1} 2N_S^k \text{ (resp. } 2N_I^k) + C^k \text{ (resp. } C^k) \\ C^k \xleftrightarrow{S=+1} 2C^k + N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) \end{cases}$$

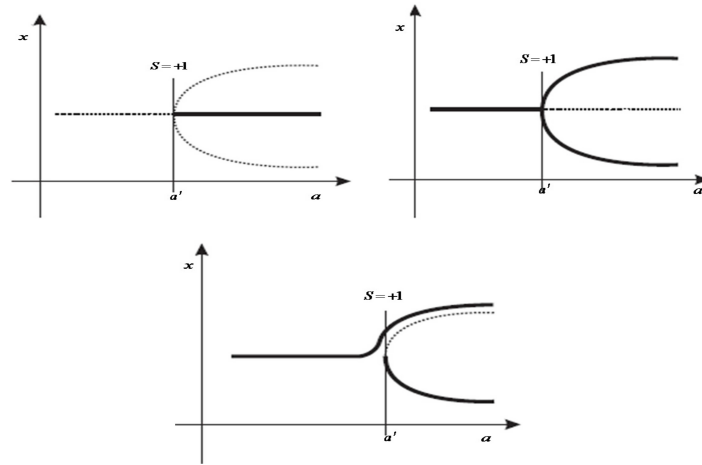


FIG. 1.4: Bifurcations fourche supercritique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (- -) : instable.

On distingue deux types de bifurcation : bifurcation fourche super-critique (stable) et bifurcation fourche sous-critique (instable) (voir figure 1.4).

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\Lambda_{(k)\bar{0}}^j$.

2) Bifurcation flip ou doublement de période

Si le multiplicateur prend la valeur $S = -1$, un point fixe (cycle) d'ordre k change de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre deux (cycle d'ordre $2k$) de même stabilité que le cycle d'origine.

- Pour la transformation d'ordre 1, cette bifurcation est notée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^k \xleftrightarrow{S=-1} R^k + A^{2k} \\ \text{Ou} \\ R^k \xleftrightarrow{S=-1} A^k + R^{2k} \end{array} \right.$$

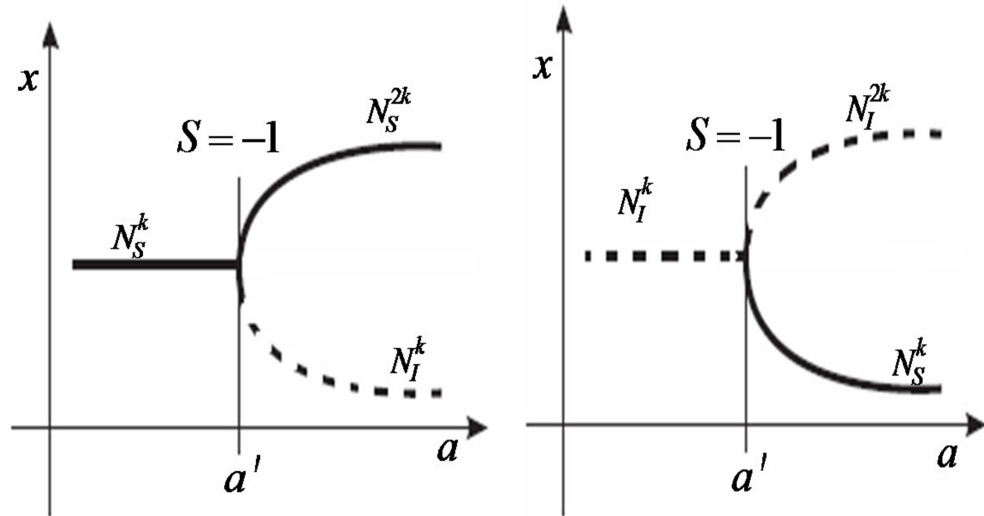


FIG. 1.5: Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous-critique (à droite).

- Pour la transformation d'ordre 2, elle est notée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) \xleftrightarrow{S=-1} N_S^{2k} \text{ (resp. } N_I^{2k}) + N_I^k \text{ (resp. } N_S^k) \\ C^k \xleftrightarrow{S=-1} N_S^k \text{ (resp. } N_I^k) + C^{2k} \end{array} \right.$$

N_I^k (resp. N_S^k) désigne un point fixe ou cycle d'ordre k instable (resp. stable) voir figure 1.5.

Les deux cycles résultant sont confondus pour la valeur de la bifurcation $S = -1$, la courbe ou a lieu une bifurcation flip est notée : Λ_k^j .

Remarques 1.1

- Un point cuspidal sur une courbe de bifurcation fold du plan des paramètres (a, b) est appelé point de codimension 2 fold [9].
- Le point de tangence d'une courbe de bifurcation flip et d'une courbe de bifur-

cation fold d'ordre double est appelé point de codimension 2 flip.

- Points singuliers avec deux multiplicateurs $S_1 = -S_2 = +1$.

Ce genre de points sont des points de bifurcation de codimension 2 correspondant à la tangente d'une courbe de bifurcation fold et une courbe de bifurcation flip associés à un même cycle (k, j) (voir [5]).

1.10 Lignes critiques

Dans le cas où T est différentiable, et $X \in \mathbb{R}$, les points critiques sont les conséquents de rang 1, définis par :

$$\frac{dT}{dX}(X) = 0.$$

Pour $X \in \mathbb{R}^2$, les lignes critiques LC sont les courbes conséquentes de rang 1 des courbes LC_{-1} définies par le lieu des points pour lequel le déterminant $J(X)$ du jacobien de T s'annule.

Par conséquent, les courbes critiques de rang k ($k \geq 0$) sont conséquentes du rang k de LC_{-1} notés :

$$LC_{k-1} = T^k(LC_{-1}) = T^{k-1}(LC) \text{ et } LC_0 = LC.$$

Et donc, une courbe LC_{-1} est l'ensemble suivant :

$$\{ X \in \mathbb{R}^2, \det(J(X)) = 0 \}$$

Dans le cas où T est non différentiable, une courbe LC_{-1} est l'ensemble :

$$\{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\}$$

1.10.1 Feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles bidimensionnelles

Notion de feuilletage du plan de phases est fondamentale pour la compréhension des propriétés relatives aux transformations non inversibles (TNI), dans ce cas les courbes critiques divisent le plan de phase en régions Z_i , ($i \geq 0$) [19], [20], [13], [12].

Classification des TNI

Elles sont classées dans un ordre de complexité croissant, on distingue les types suivants :

- **Transformations : de type $(Z_0 - Z_2)$**

Pour une récurrence dont les points admettent 2 ou 0 antécédents suivant leur position dans le plan (x, y) , une structure possible des feuillets est représentée sur la figure 1.6 (a), on a une seule ligne critique LC qui sépare le plan \mathbb{R}^2 en deux régions, une région Z_0 (pas d'antécédents), une région Z_2 (deux antécédents de rang1),

Pour T^{-1} , un point \overline{M} doit être considéré comme la superposition de deux points M, M' (Figure 1.6 (a)),

De la même manière, il est possible de définir des TNI de complexité supérieure de type $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$, $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$, $(Z_1 - Z_2 - Z_4)$, $(Z_1 < Z_3)$, $(Z_1 < Z_3 >)$, $(Z_0 - Z_2 << Z_4)$,

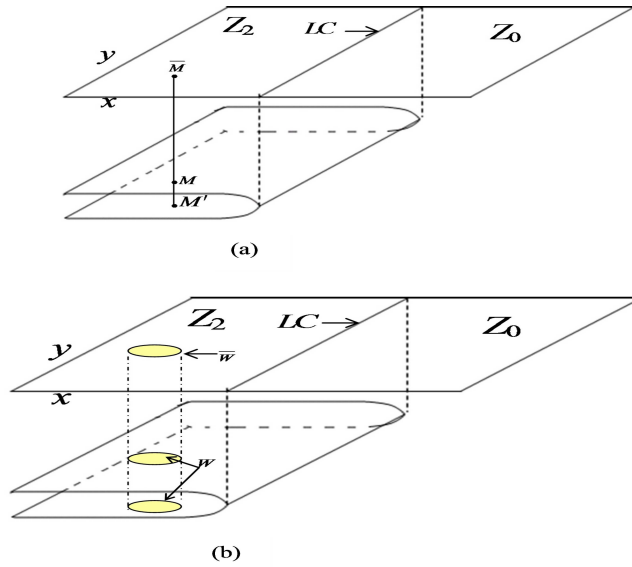


FIG. 1.6: (a), (b)- Plan de phase d'une *TNI* de type $(Z_0 - Z_2)$.

$(Z_0 - Z_2 < Z_4 >)$, $(Z_1 - Z_3 < Z_5 - Z_3 > Z_1)$, ...etc.

De même pour une récurrence d'ordre 1, on a un seul point critique C_1 qui sépare le plan \mathbb{R} en deux régions Z_0, Z_2 .

1.11 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine D , situé dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur A . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de D avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible (*TNI*). On notera ∂D la frontière de D , D_0 le bassin immédiat de l'attracteur A et ∂D_0 sa frontière.

Proposition 1.1 : Soit T une TNI de type $(Z_0 - Z_2)$ dépendant d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_b , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :

- 1) bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).
- 2) bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiplement connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).
- 3) augmentation ou diminution du nombre d'îlots de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
- 4) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.
- 5) transition lacs \longleftrightarrow baie.
- 6) transition frontière externe faiblement fractale \longleftrightarrow frontière externe fortement fractale.

La partie (1) de cette proposition est illustrée par la figure 1.7, sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation $\lambda = \lambda_{1b}$, correspond à un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \cong c$. $\{T^{-n}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, est une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour $\lambda < \lambda_{1b}$, devient non connexe pour $\lambda > \lambda_{1b}$. La seconde bifurcation $\lambda = \lambda_{2b}$, correspond à un contact tangentiel entre ∂D_0 et LC au point $a \cong b$, donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre ∂D_0 et la frontière ∂D_1 de l'îlot D_1 . Après cette dernière bifurcation D redevient connexe.

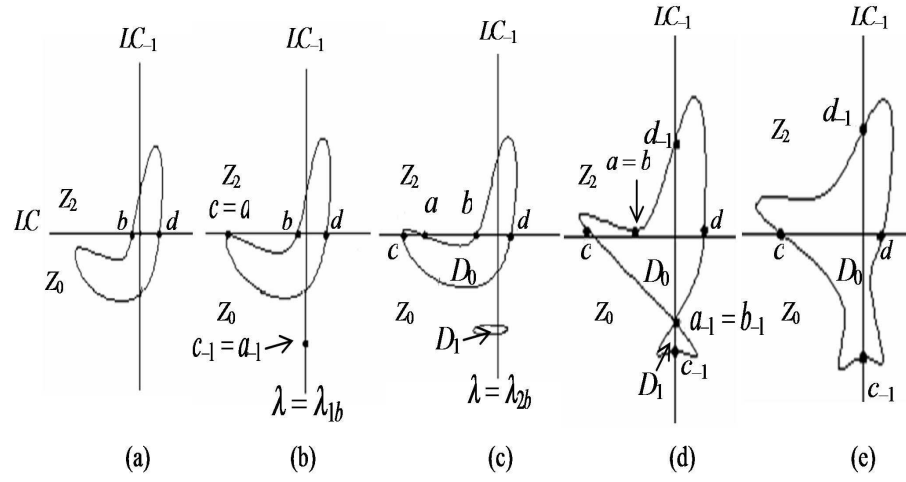


FIG. 1.7: Bifurcation d'un bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe.

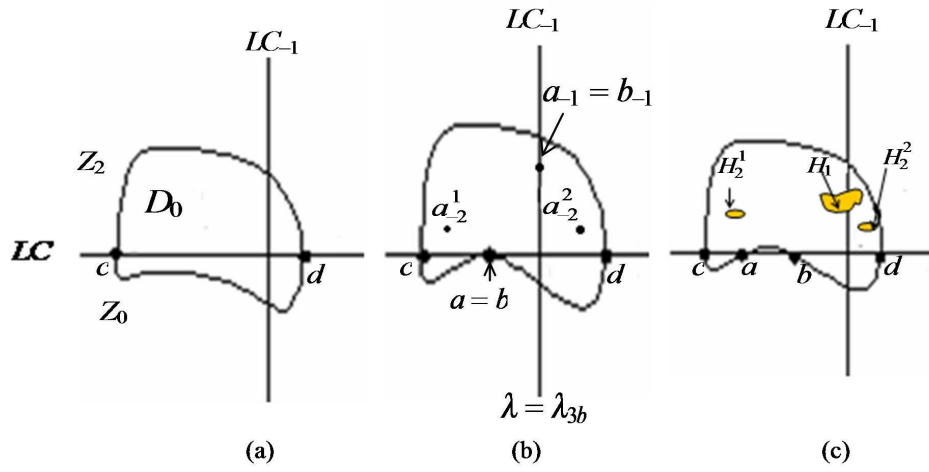


FIG. 1.8: Bifurcation d'un bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiplement connexe $\lambda = \lambda_{3b}$.

La partie (2) de cette proposition est illustrée par la figure 1.8, sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur $\lambda = \lambda_{3b}$ a lieu un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \cong b$. Les antécédents de tout rang $T^{-n}(a)$ du point a , forment une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N lacs.

La partie (3) de la proposition (1.1) est illustrée par la figure 1.9, sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur $\lambda = \lambda_{4b}$ (figure 1.9 (a)) et qui correspond à un contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\alpha = D_i \cap LC$. Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_{4b}$, l'îlot D_i était à l'intérieur de la région Z_0 ($D_i \cap Z_2 = \emptyset$). A la bifurcation, les antécédents de tout rang $T^{-n}(\alpha)$ de α ($T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$) constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots D_{i+n} , $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \emptyset$. En continuant à faire varier le paramètre λ de manière continue, l'îlot D_i progresse dans la région Z_2 (figure 1.9 (b)). La seconde valeur de bifurcation $\lambda = \lambda_{5b}$ (figure 1.9 (c)), correspond à un nouveau contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\beta = D_i \cap LC$ ($D_i \subset \overline{Z_2}$). Ceci implique que le point $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$ est un point d'intersection limite entre D_{i+1} et LC_{-1} , avant que ce dernier se divise en deux îlots $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$, lorsque la valeur de λ dépasse la seconde valeur de bifurcation (figure 1.9 (d)).

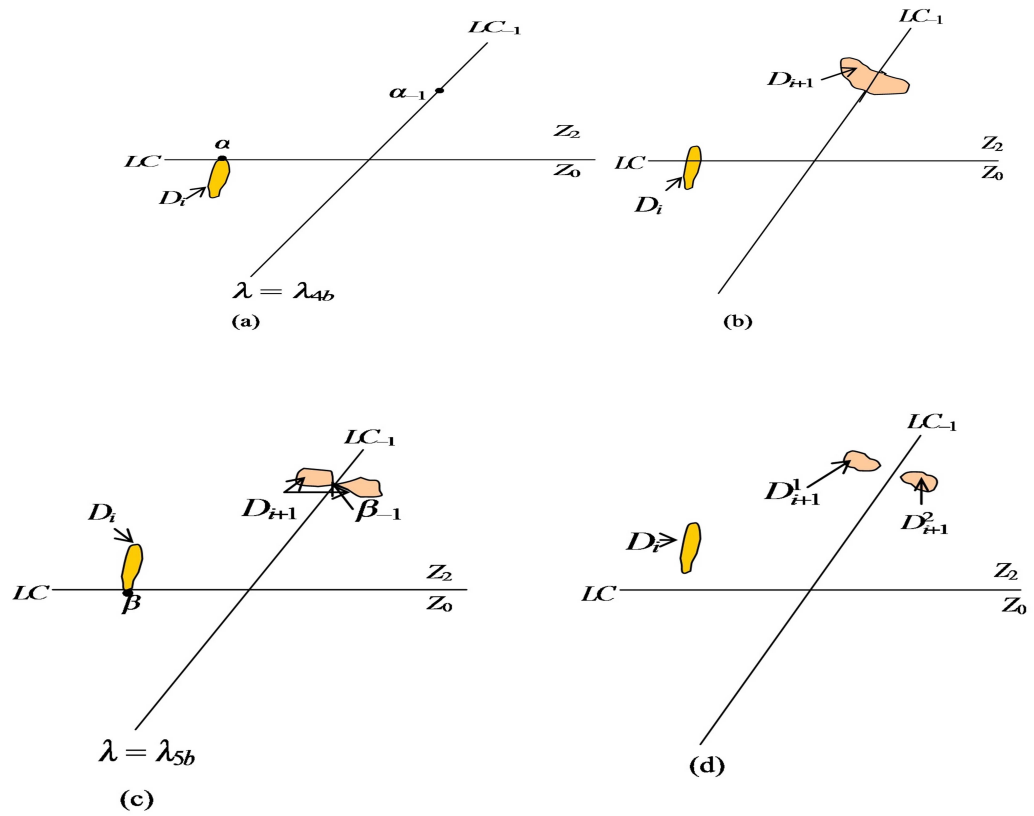


FIG. 1.9: Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

Chapitre 2

Etude des cycles et bifurcation d'une transformation ponctuelle de dimension deux

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le système en dimension deux en plan paramétrique, D'abord chercher les points fixes, et étudier la stabilité de ces points, en suite nous présentons les courbes de bifurcations analytiquement et numériquement.

2.2 Etude du système de dimension deux

2.2.1 Définition du système

Considérons une famille des systèmes dynamiques discrets modélisés par la transformation $T : (x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$ définie par deux polynômes, un linéaire et un cubique, ce modèle a été proposé dans [4] :

$$T(x_n, y_n) : \begin{cases} x' = x_{n+1} = F(x_n, y_n) = x_n + y_n, \\ y' = y_{n+1} = G(x_n, y_n) = ax_n + bx_n^2 + cx_n^3 + dy_n, \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette famille de transformations dépend des paramètres $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

2.3 Etude analytique

2.3.1 Les points fixes

Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un point du plan de phase. Notons $J(X)$, la matrice jacobienne de T au point X :

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a + 2bx + 3cx^2 & d \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Si $X^* = (x^*, y^*)$ est un point fixe, nous nous intéressons aux valeurs propres de la jacobienne $J(x^*, y^*)$, et si (x^*, y^*) est un point d'un cycle d'ordre k , nous nous intéressons aux valeurs propres de :

$$J^k(x^*, y^*) = J(x^*, y^*) \cdot J(T(x^*, y^*)) \cdot \dots \cdot J(T^{k-1}(x^*, y^*)) \quad (2.3)$$

Le calcul des valeurs propres S_i , $i = 1, 2$, de (2.2), respectivement (2.3), permet de connaître la stabilité du point fixe, respectivement du cycle considéré.

Les points fixes de la transformation T , sont des racines du système suivant :

$$\begin{cases} x_n + y_n - x_n = 0 \\ ax_n + bx_n^2 + cx_n^3 + dy_n - y_n = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons trois de points fixes dont les coordonnées sont données par l'équation suivante :

$$O = (0, 0), P = (x_p, y_p), Q = (x_q, y_q)$$

Où

$$\begin{cases} x_p = \frac{1}{2} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ca}}{c}, \\ x_q = -\frac{1}{2} \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ca}}{c}, \\ y_p = y_q = 0. \end{cases}$$

Le point fixe O existe toujours quelque soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, c'est-à-dire il est indépendant de a, b, c et d . Mais P et Q sont dépendants de a, b , et c .

2.3.2 La stabilité des points fixes

La stabilité de ces points fixes est fixée par les valeurs propres obtenues en résolvant l'équation $\det(J(x, y) - SI) = 0$, où I est la matrice identité et $J(x, y)$ est la jacobienne de la récurrence donnée par la relation (2.1).

Alors les valeurs propres de (2.1) sont :

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}[1 + d + \sqrt{E}] \\ \text{et} \\ S_2 = \frac{1}{2}[1 + d - \sqrt{E}] \end{cases}$$

avec :

$$E = 1 - 2d + d^2 + 8bx + 12cx^2 + 4a$$

(1) Pour le point fixe $O = (0, 0)$, les valeurs propres S_i , $i = \overline{1, 2}$ de $DT(O) = \det(J(O) - SI)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2}[1 + d + \sqrt{1 - 2d + d^2 + 4a}] \\ \text{et} \\ S_2 = \frac{1}{2}[1 + d - \sqrt{1 - 2d + d^2 + 4a}] \end{array} \right.$$

(2) Pour les points fixes $P = (x_p, y_p)$ et $Q = (x_q, y_q)$, les valeurs propres $S_i, i = \overline{1,2}$ de $DT(P) = \det(J(P) - SI)$ et de $DT(Q) = \det(J(Q) - SI)$ respectivement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2}[1 + d + \frac{1}{c}\sqrt{M_1}] \\ \text{et} \\ S_2 = \frac{1}{2}[1 + d - \frac{1}{c}\sqrt{M_1}] \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2}[1 + d + \frac{1}{c}\sqrt{M_2}] \\ \text{et} \\ S_2 = \frac{1}{2}[1 + d - \frac{1}{c}\sqrt{M_2}] \end{array} \right.$$

avec :

$$M_1 = N - 2cb\sqrt{b^2 - 4ca}, \text{ et } M_2 = N + 2cb\sqrt{b^2 - 4ca}$$

et

$$N = c^2 - 2dc^2 + c^2d^2 + 2cb^2 - 8ac^2$$

Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement aux cas suivants :

- 1) Simulations du plan des paramètres (a, d) , c'est-à-dire b et c fixés.
- 2) Simulations du plan des paramètres (b, d) , c'est-à-dire a et c fixés.
- 3) Simulations du plan des paramètres (c, d) , c'est-à-dire a et b fixés.

Le tableau ci-dessous donne la stabilité des points fixes dans le plan (a, d) , (b, d) et (c, d) , (N_S signifie Nœud Stable, N_I Nœud Instable, C signifie Col, NF_S Nœud-Foyer Stable, NF_I Nœud-Foyer Instable et CF Col-Foyer) :

• **Dans le plan (a, d)**

Points fixes	Stabilité dans (a, d) pour $b = c = 0$	Stabilité dans (a, d) pour $b = -c = 0.2$
O	$N_I, \forall a, d$	N_S , pour $-0.05 < a < 0$ N_I , pour $a > 0$ Voir la zone blue (figure 2.1 (a))
P	tend vers ∞	N_S , pour $-0.05 < a < 0$ NF_S , pour $a > 0$ Voir la zone blue (figure 2.1 (a))
Q	tend vers ∞	C de type 2, pour $-0.05 < a < 0$ N_S , pour $a > 0$ Voir la zone blue (figure 2.1 (a))

• Dans le plan (b, d)

Points fixes	Stabilité dans (b, d) pour $a = c = 1$
O	C (Col de type 2) dans $b > 2$ et $d > -0.5$ NI dans $b < 2$ et $\forall d$ et de même NI dans $b > 2$ et $d < -0.5$ Voir la zone blue (figure 2.4 (a))
P	NI dans $b < 2$ et $\forall d$ NS dans $b > 2$ et $\forall d$ Voir la zone blue (figure 2.4 (a))
Q	NI dans $b > 2$ et $\forall d$ NS dans $b < 2$ et $\forall d$ Voir la zone blue (figure 2.4 (a))

• Dans le plan (c, d)

Points fixes	Stabilité dans (c, d) pour $a = 0.5, b = -2$
O	$NI, \forall c$ et $\forall d$ Voir la zone blue (figure 2.5 (a))
P	$NI, \forall c$ et $\forall d$ Voir la zone blue (figure 2.5 (a))
Q	$NS, \forall c$ et $\forall d$ Voir la zone blue (figure 2.5 (a))

2.4 Equations des courbes de bifurcations pour T

En utilisant les méthodes développées dans [2], le système d'équations donnant les courbes de bifurcations d'un cycle d'ordre k de T est :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^k(x, y) - x = 0 \\ G^k(x, y, a, b, c, d) - y = 0 \\ G = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F^k}{\partial x} - S & \frac{\partial F^k}{\partial y} \\ \frac{\partial G^k}{\partial x} & \frac{\partial G^k}{\partial y} - S \end{bmatrix} = 0 \\ S = \pm 1 \end{array} \right.$$

Pour la récurrence (2.1), le système d'équations qui permet de construire les courbes de bifurcations des points fixes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ ax + bx^2 + cx^3 + (d - 1)y = 0 \\ G = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} - S & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} - S \end{bmatrix} = 0 \\ S = \pm 1 \end{array} \right.$$

Résolvant ce système d'équations nous obtenons les courbes des bifurcations. Les courbes correspondant à une bifurcation doublement de période ou bien flip ($S = -1$, notée Λ_1^j , j : le numéro de la courbe) et celles correspondant à une bifurcation nœud-col ou bien fold ($S = +1$, notée $\Lambda_{(1)0}^j$, j : le numéro de la courbe).

2.4.1 Bifurcation flip ou doublement de période $S = -1$

L'équation d'une courbe de bifurcation Λ_1^j est :

$$\Lambda_1^j : -2d + 2bx + 3cx^2 + a - 2 = 0$$

Les équations des courbes de bifurcations de type flip ($S = -1$) pour les points fixes O , P et Q sont :

$$Flip : \begin{cases} \Lambda_1^1 : d = \frac{1}{2}a - 1, (x, y) = O, \\ \Lambda_1^2 : d = -1 - a + \frac{b^2 - b\sqrt{b^2 - 4ca}}{c}, (x, y) = P, \\ \Lambda_1^3 : d = -1 - a + \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ca}}{4c}, (x, y) = Q. \end{cases}$$

2.4.2 Bifurcation fold ou nœud-col $S = +1$

L'équation d'une courbe de bifurcation $\Lambda_{(1)_0}^j$ est :

$$\Lambda_{(1)_0}^j : -a - 2bx - 3cx^2 = 0$$

Pour la transformation T , les équations des courbes de bifurcations de type fold ($S = +1$) $\Lambda_{(1)_0}^j$, pour les points fixes sont :

$$Fold : \begin{cases} \Lambda_{(1)_0}^1 : a = 0, \forall b \text{ et } \forall c, (x, y) = O, (x, y) = P, \text{ et } (x, y) = Q \\ \Lambda_{(1)_0}^2 : a = \frac{b^2}{4c}, \forall b \text{ et } \forall c \neq 0, (x, y) = P, \text{ et } (x, y) = Q \end{cases}$$

2.5 Points nœuds paramétriques avec multiplicateurs $S_1 =$

$$-S_2 = 1$$

Un point nœud paramétrique pour les points fixes vérifie le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y) - x = 0 \\ G(x, y, a, b, c, d) - y = 0 \\ D = \det(J(x, y)) + 1 = 0 \\ tr(J) = 0 \end{array} \right.$$

Où D est le déterminant de la matrice jacobienne et $tr(J)$ sa trace.

Pour la transformation T , les points nœuds paramétriques sont des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ ax + bx^2 + cx^3 + (d - 1)y = 0 \\ D = \det(J(x, y)) + 1 = 0 \\ tr(J) = 0 \end{array} \right.$$

avec :

$$D = -3cx^2 - 2bx + d - a + 1 \quad \text{et} \quad tr(J) = 1 + d$$

Les coordonnées des points nœuds paramétriques sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} NP_1 : a = 0, d = -1, \text{ pour } (0, 0) = O, \quad \forall b, c \in \mathbb{R}, \\ NP_2 : a = cx_p^2, d = -1, \text{ pour } (x_p, 0) = P, \text{ with } b = -2cx_p, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \\ NP_3 : a = cx_q^2, b = -1, \text{ pour } (x_q, 0) = Q, \text{ with } b = -2cx_q, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Alors les coordonnées des points nœuds paramétriques dans les plan des paramètres

(a, d) , (b, d) et (c, d) sont :

- **Dans le plan (a, d)**

$$NP_1 = (0, -1), \text{ pour } (0, 0) = O, \quad \forall b, c \in \mathbb{R}.$$

- **Dans le plan (b, d)**

$$\left\{ \begin{array}{l} NP_2 = (-2, -1), \text{ pour le point fixe } (1, 0), \quad \forall a, c \in \mathbb{R}. \\ NP_3 = (2, -1), \text{ pour le point fixe } (-1, 0), \quad \forall a, c \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

- **Dans le plan (c, d)**

$$NP_4 = (2, -1), \text{ pour le point fixe } \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2.6 Equations des courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre

$k = 1$ dans les plan des paramètres (a, d) , (b, d) et (c, d)

D'après la section précédente, et comme nous avons déjà fait pour l'étude des courbes de bifurcations de la transformation T , maintenant on va étudier les courbes de bifurcations du système dans les plan des paramètres (a, d) , (b, d) et (c, d) . Les tableaux ci-dessous donnent les équations des courbes de bifurcation de type fold ($S = +1$) $\Lambda_{(1)0}^j$ et de type flip ($S = -1$) $\Lambda_1^{j'}$ des cycles d'ordre 1 dans les plan des paramètres (a, d) , (b, d) et (c, d) .

• Dans le plan (a, d)

Points fixes	$\Lambda_{(1)0}^j$ et $\Lambda_1^{j'}$, $j = \overline{1,2}$ $j' = \overline{1,2}$, $j' = \overline{1,3}$ dans (a, d) , avec $c = -b = -0.2$
O	$\Lambda_{(1)0}^1 : a = 0$ $\Lambda_1^1 : d = \frac{1}{2}a - 1$
P	$\Lambda_{(1)0}^2 : a = -0.05$ $\Lambda_1^2 : d = -1.05 - a - 0.05\sqrt{1 + 20a}$
Q	$\Lambda_{(1)0}^1 : a = 0$ $\Lambda_{(1)0}^2 : a = -0.05$ $\Lambda_1^3 : d = -1.05 - a + 0.05\sqrt{1 + 20a}$

• Dans le plan (b, d)

Points fixes	$\Lambda_{(1)_0}^j$ et $\Lambda_1^{j'}$, $j = \overline{3,4}$ $j = \overline{1,2}$, $j' = \overline{5,7}$ dans (b, d) , avec $a = c = 1$
O	$\Lambda_1^5 : d = -\frac{1}{2}$
P	$\Lambda_{(1)_0}^3 : b = -2$ $\Lambda_{(1)_0}^4 : b = 2$ $\Lambda_1^6 : d = -2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b\sqrt{b^2 - 4}$
Q	$\Lambda_{(1)_0}^3 : b = -2$ $\Lambda_{(1)_0}^4 : b = 2$ $\Lambda_1^7 : d = -2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b\sqrt{b^2 - 4}$

• Dans le plan (c, d)

Points fixes	$\Lambda_{(1)_0}^j$ et $\Lambda_1^{j'}$, $j = 5$ $j = \overline{1,2}$, $j' = \overline{8,10}$ dans (c, d) , avec $a = 0.5$ et $b = -2$
O	$\Lambda_1^8 : d = -0.75$
P	$\Lambda_{(1)_0}^5 : c = 2$ $\Lambda_1^9 : d = \frac{0.5(-3c+2+\sqrt{4-2c})}{c}$
Q	$\Lambda_{(1)_0}^5 : c = 2$ $\Lambda_1^{10} : d = -\frac{0.5(3c-2+\sqrt{4-2c})}{c}$

2.7 Etude numérique

2.7.1 Evolution de la structure de bifurcation

Dans cette section, nous présentons l'étude des courbes de bifurcations et leur évolution de la structure de bifurcation pour les trois cas suivants, dans le plan paramétrique (a, d) , dans le plan (b, d) , et dans le plan (c, d) .

Simulations du plan des paramètres

Les domaines de stabilité pour la récurrence T peuvent être construits numériquement, en utilisant une méthode de balayage au système (2.1).

Pour la récurrence (2.1), le résultat du programme de balayage est représenté sur les figures (2.1 (a) et 2.3(a), (c) et (d)) dans le plan paramétrique (a, d) . Sur la figure 2.4 (a) dans le plan paramétrique (b, d) . Et sur la figure 2.5 (a) dans le plan paramétrique (c, d) , nous donnons ici l'existence des cycles attractifs de la transformation T . Nous remarquons des courbes de bifurcations dans les plan paramétriques (a, d) , (b, d) et (c, d) le programme trace les domaines d'existence de cycles d'ordre k ; $k = 1, 2, \dots, 10$. Chaque couleur est attribuée à un attracteur d'un certain ordre, quelques attracteurs apparaissent pour $S = +1$, et les autres par doublement de période $S = -1$.

Il existe un grand nombre de courbes de bifurcations pour les points fixes, la frontière entre deux domaines de différentes couleurs représente une courbe de bifurcation.

Dans les figures (2.1 (a), 2.3(a), (c), (d), 2.4(a) et 2.5(a)) nous avons le code des couleurs :

- Les zones bleues représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe

un point fixe attractif;

- Les zones verts représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 2;
- Les zones rouges représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 3;
- Les zones jaunes représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 4, ainsi de suite pour les cycles jusqu'à l'ordre $k = 10$;
- Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètres (a, d) , (b, d) , et (c, d) pour lesquelles il existe des phénomènes chaotiques ou des divergences.

Nous remarquons par exemple, dans le plan paramétrique (a, d) , et pour $c = -b = -0.2$ le résultat du programme de balayage est représenté sur la figure 2.1 (a), le passage d'une zone bleue à une zone verte, ce qui traduit l'apparition d'un cycle d'ordre 2 instable, avec la courbe de bifurcation de type flip instable Λ_1^3 (voir figure 2.2), ainsi que la courbe de bifurcation de type fold $\Lambda_{(1)0}^2$ et la courbe de bifurcation de transcritique $\Lambda_{(1)0}^1$ pour les points fixes de la transformation T .

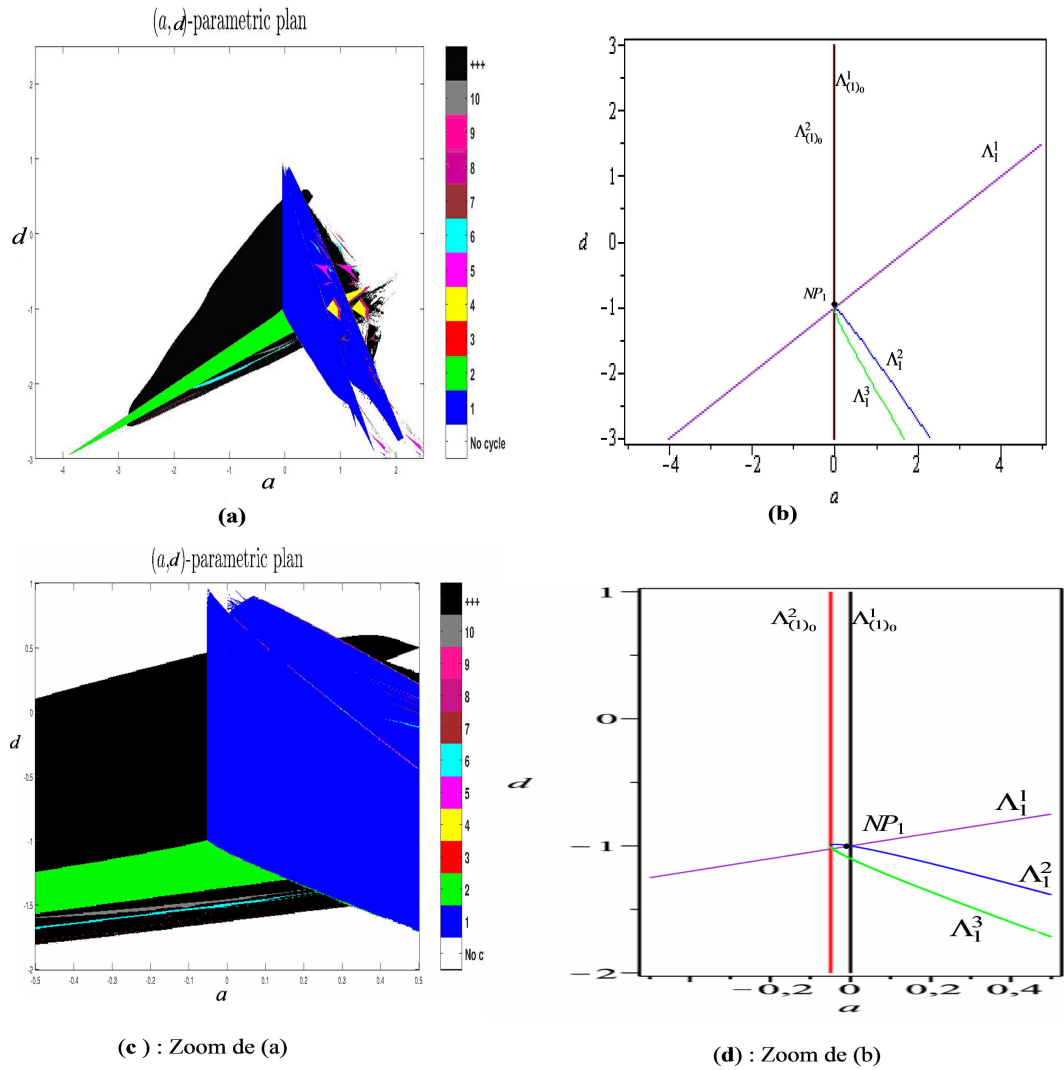


FIG. 2.1: (a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (a, d) avec $c = -b = -0.2$, pour la transformation T . (b) : Les courbes de bifurcation de type flip Λ_1^j , $j = \overline{1, 3}$ ainsi que les courbes de bifurcations de type transcritique $\Lambda_{(1)0}^1$, et de type fold $\Lambda_{(1)0}^2$ des points fixes de la transformation T dans le plan (a, d) pour $c = -b = -0.2$. (c) : Zoom de (a), et (d) : Zoom de (b). La figure montre la situation de singularité dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_1 .

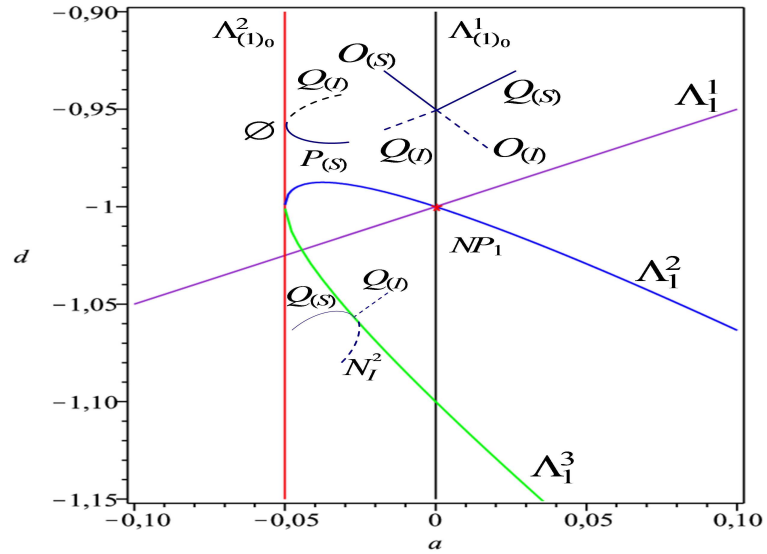


FIG. 2.2: Zoom de la figure 2.1 (d) Les courbes de bifurcation transcritique, bifurcation fold et bifurcation flip pour les points fixes O , P , Q dans le plan (a, d) , avec $c = -b = -0.2$.

Et nous avons aussi dans la figure 2.2 (Zoom de la figure 2.1 (d)), les bifurcations suivantes :

- Bifurcation transcritique entre $O \longleftrightarrow Q$ au passage de $\Lambda_{(1)0}^1$.
- Bifurcation fold pour P et Q au passage de $\Lambda_{(1)0}^2$.
- Bifurcation flip pour Q au passage de Λ_1^3

Cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} O(N_S^1) \text{ (resp. } Q(N_I^1)) \xleftrightarrow[\Lambda_{(1)0}^1]{S=+1} O(N_I^1) \text{ (resp. } Q(N_S^1)) \\ \emptyset \xleftrightarrow[\Lambda_{(1)0}^2]{S=+1} P(N_S^1) + Q(N_I^1) \\ Q(N_I^1) \xleftrightarrow[\Lambda_1^3]{S=-1} N_I^2 + Q(N_S^1) \end{array} \right.$$

Une étude du plan paramétrique (a, d) de la récurrence (2.1) est effectuée pour différentes valeurs de b et c . La figure 2.3 présente domaines de stabilité ou le diagramme de

bifurcation dans le plan des paramètres (a, d) , nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Pour $b = 0.4, c = 0$, les points fixes existe (région blue sur la figure), de même il existe des cycles d'ordre 3, 4, 5, 6, 8, et des phénomènes chaotiques (région noir sur la figure).
- Contrairement, pour $b = 0, c = 0.4$, l'absence des points fixes, mais il existe des cycles d'ordre 3, 4, 5, 6, 8, et des phénomènes chaotiques.
- Pour $b = c = 0$, l'absence des cycles k ($k \leq 1$), et il existe seulement des phénomènes chaotiques.

Et le résultat du programme de balayage dans le plan paramétrique (b, d) pour $a = c = 1$, est représenté sur la figure 2.4, avec les courbes de bifurcation de type flip $\Lambda_1^{j'}$, $j' = \overline{5.7}$ ainsi que les courbes de bifurcations de type fold $\Lambda_{(1)0}^3$ et $\Lambda_{(1)0}^4$ des points fixes de la transformation T .

Dans la figure 2.4, après perturbation du système 2.1, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Bifurcation transcritique entre Q (stable) et P (instable) au passage de $\Lambda_{(1)0}^3$.
- Bifurcation transcritique entre Q (instable) et P (stable) au passage de $\Lambda_{(1)0}^4$.

On a le schéma de bifurcation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \xrightleftharpoons[\Lambda_{(1)0}^3]{S_{\leftarrow}+1} P(N_I^1) + Q(N_S^1) \\ \emptyset \xrightleftharpoons[\Lambda_{(1)0}^4]{S_{\leftarrow}+1} P(N_S^1) + Q(N_I^1) \end{array} \right.$$

Maintenant le résultat du programme de balayage dans le plan paramétrique (c, d) pour $a = 0.5$ et $b = -2$, est représenté sur la figure 2.5, avec les courbes de bifurcation

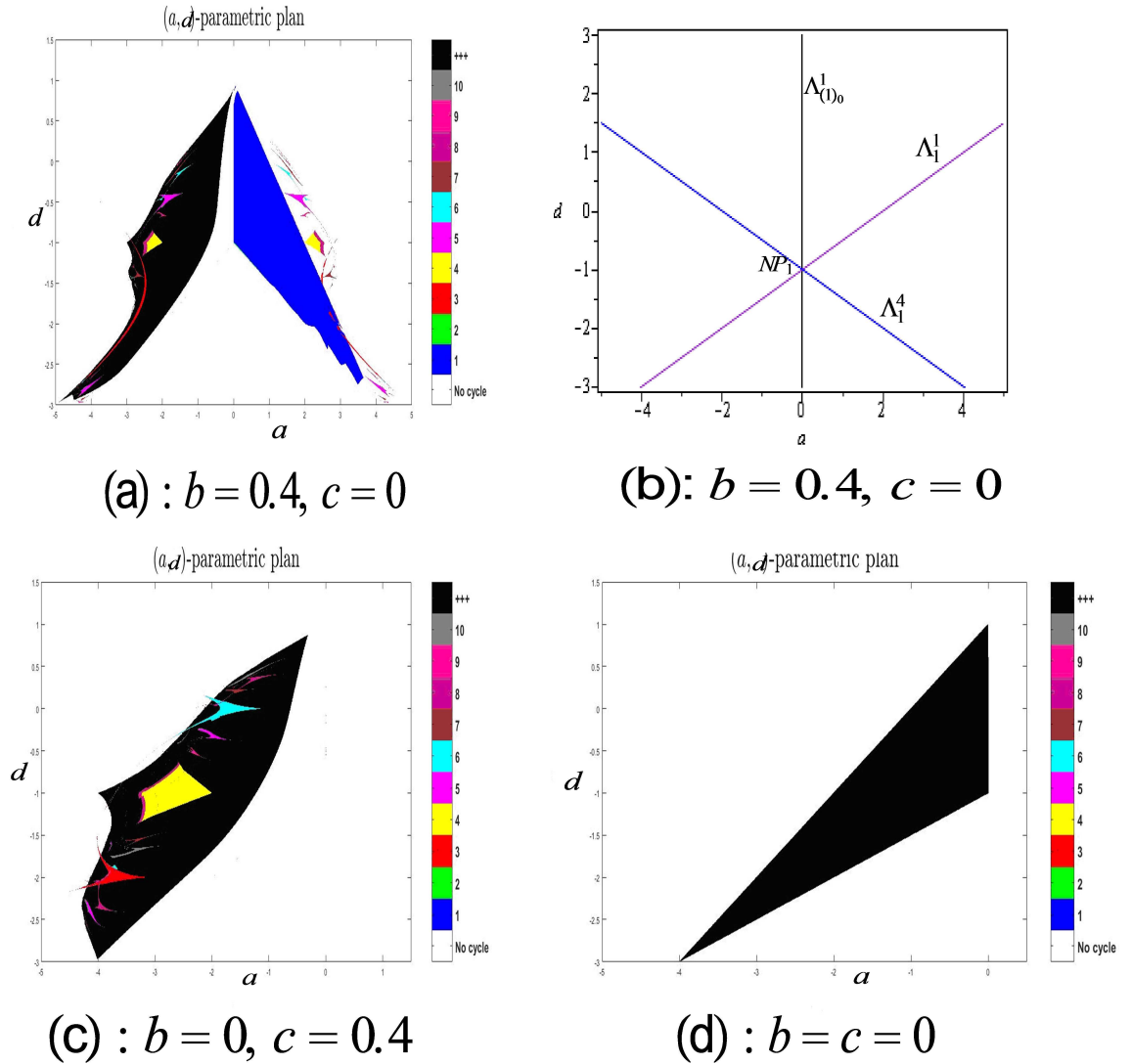


FIG. 2.3: (a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (a, d) avec $c = 0$ et $b = 0.4$, pour la transformation T . (b) : Les courbes de bifurcations correspondant à (a), c'est-à-dire, les courbes de bifurcations de type flip Λ_1^j , $j = 1, 4$ ainsi que la courbe de bifurcation de type fold $\Lambda_{(1)_0}^1$ des points fixes. (c) : Domaines de stabilité pour $b = 0$ et $c = 0.4$ et (d) : Domaines de stabilité pour $b = c = 0$, dans ce dernier cas, le système 2.1 devient chaotique.

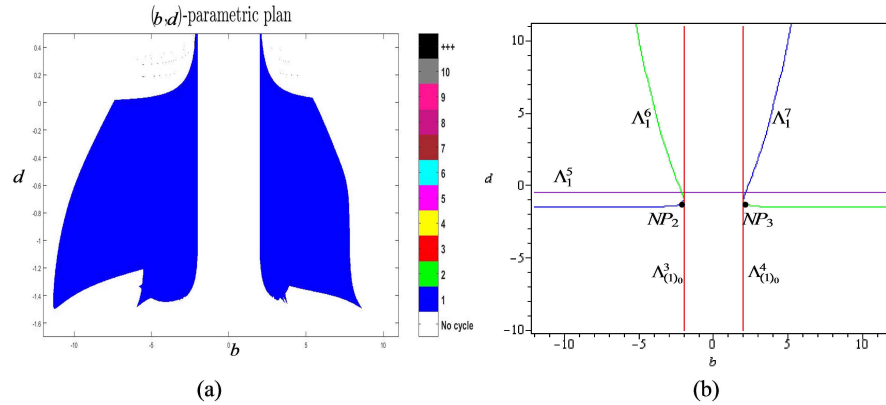


FIG. 2.4: (a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (b, d) avec $a = c = 1$, pour T . (b) : Les courbes de bifurcation correspondant à (a) de type flip $\Lambda_1^{j'}$, $j' = \overline{5, 7}$ ainsi que les courbes de bifurcations de type transcritique après perturbation du système (2.1) $\Lambda_{(1)0}^3$ et $\Lambda_{(1)0}^4$ des points fixes. la figure montre la situation des singularités dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_2 et NP_3 .

de type flip $\Lambda_1^{j'}$, $j' = \overline{8, 10}$ ainsi que les courbes de bifurcations de type fold $\Lambda_{(1)0}^5$ des points fixes de la transformation T .

La figure 2.5 fait apparaître clairement l'existence des bifurcations suivantes :

- Bifurcation fold pour P (instable) et Q (stable) au passage de $\Lambda_{(1)0}^5$.
- Bifurcation flip pour O au passage de Λ_1^8
- Bifurcation flip pour P au passage de Λ_1^9
- Bifurcation flip pour Q au passage de Λ_1^{10}

On a le schéma de bifurcation suivant pour la figure 2.5 :

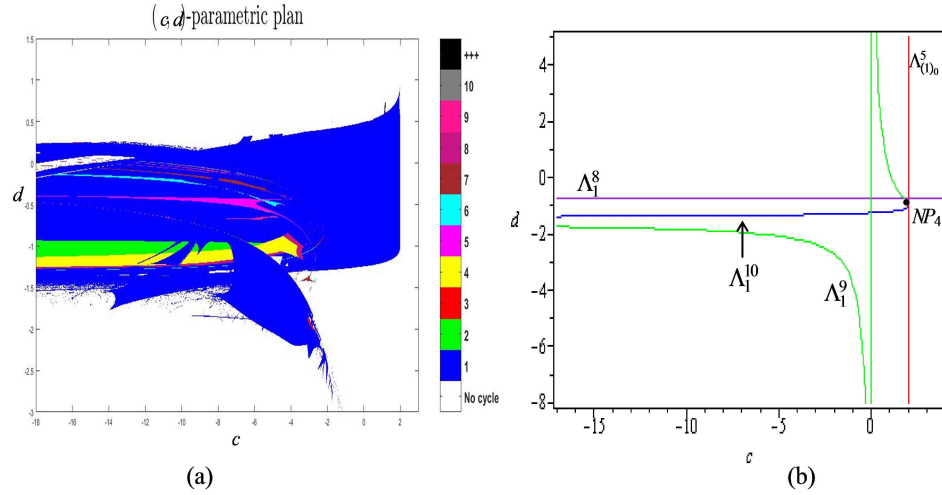


FIG. 2.5: (a) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres (c, d) avec $a = 0.5$ et $b = -2$ pour la transformation T . (b) : Les courbes de bifurcation correspondant à (a) de type flip $\Lambda_1^{j'}$, $j' = 8, 9, 10$ ainsi que la courbe de bifurcation de type fold $\Lambda_{(1)_0}^5$ du système 2.1 pour les points fixes. la figure montre la situation de singularité dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_4 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \xleftrightarrow[\Lambda_{(1)_0}^5]{S=+1} P(N_I^1) + Q(N_S^1) \\ O(N_I^1) \xleftrightarrow[\Lambda_1^8]{S=-1} O(N_S^1) + N_I^2 \\ P(N_I^1) \xleftrightarrow[\Lambda_1^9]{S=-1} P(N_S^1) + N_I^2 \\ Q(N_S^1) \xleftrightarrow[\Lambda_1^{10}]{S=-1} Q(N_I^1) + N_S^2 \end{array} \right.$$

De même, les figures (2.1(b), 2.4(b) et 2.5(b)) montrent les différentes situations des singularités dont les multiplicateurs des points fixes vérifient $S_1 = -S_2 = 1$ au point NP_i , $i = \overline{1,4}$.

2.8 Cycle d'ordre 2 pour T

D'après les rappels du chapitre 1, et comme nous l'avons déjà fait pour l'étude des cycles d'ordre 1, il est intéressant de l'étude des cycles d'ordre 2.

En itérant la transformation T une seconde fois, nous obtenons la récurrence donnant les cycles d'ordre 2 :

$$T^2 : \begin{cases} x'' = x_{n+2} = x_n + y_n + ax_n + bx_n^2 + cx_n^3 + dy_n \\ y'' = y_{n+2} = a(x_n + y_n) + b(x_n + y_n)^2 + c(x_n + y_n)^3 + d(ax_n + bx_n^2 + cx_n^3 + dy_n) \end{cases}$$

Le système d'équations donnant les bifurcations d'un cycle d'ordre 2 est :

$$\begin{cases} x + y + ax + bx^2 + cx^3 + dy - x = 0 \\ a(x + y) + b(x + y)^2 + c(x + y)^3 + d(ax + bx^2 + cx^3 + dy) - y = 0 \\ S = \pm 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Il est difficile de résoudre ce système (2.4) analytiquement et numériquement, même pour quelques valeurs fixées de paramètres a , b , c et d .

Par exemple, pour $d = 0$, l'application T^2 obtenue après deux itérations, se transforme en une application à variables séparées $(x, x + y) = (x, u)$

$$T^2 : \begin{cases} x'' = u + ax + bx^2 + cx^3 \\ u'' = au + bu^2 + cu^3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Chapitre 3

Espace de phase d'une transformation ponctuelle

3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre le plan de phase (x, y) de la récurrence non inversible T qui nous avons déjà fait pour l'étude dans le plan des paramètres en deuxième chapitre). Nous présentons les lignes critiques et le feuilletage du plan (x, y) . Enfin, nous étudions les bifurcations du bassin d'attraction et leur évolution.

3.2 Les propriétés de non inversible T dans le plan (x, y)

Nous essaierons de comprendre deux sources de complexité, l'une liée aux ensembles attractifs complexes et aux types de bifurcations qui provoquent la création d'attracteurs de plus en plus complexes, et l'autre liée aux bassins complexes, c'est-à-dire aux bassins séparés par des frontières compliquées, et la sorte de bifurcations qui provoquent des changements qualitatifs dans la structure topologique des bassins. Les propriétés géométriques d'une récurrence bidimensionnelle linéaire et non linéaire donnent une visualisation intuitive de la relation entre le lieu des points où le déterminant jacobien ($\det DT(x, y)$) s'annule et les propriétés de pliage d'une récurrence bidimensionnelle non inversible. En fait, alors que les récurrences inversibles sont généralement caractérisées par le fait que le signe de $\det DT(x, y)$ ne change pas dans tout le plan de phase (x, y) , le concept des ensembles critiques d'une récurrence non inversible à deux dimensions est un outil mathématique important utilisé pour étudier les bifurcations du bassin.

3.2.1 Détermination des lignes critiques de T

La récurrence 2.1 est non inversible. En fait, étant donné x' et y' , si nous essayons de résoudre le système algébrique (3.1) par rapport aux inconnues x et y nous obtenons trois solutions T_1^{-1} , T_2^{-1} et T_3^{-1} sont des inverses de T . Et donc :

$$T^{-1} = T_1^{-1} \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$$

$$\begin{cases} cx^3 + bx^2 + (a-d)x + dx' - y' = 0 \\ y = x' - x \end{cases} \quad (3.1)$$

Puisque la récurrence est non inversible, il faut parler de lignes critiques. ils ont été introduites en 1964 par Mira (voir [20], [14] et [12] pour plus de détails). La courbe critique LC définie comme le lieu des points ayant au moins deux préimages de rang 1 coïncidentes, situées sur l'ensemble des préimages fusionnées notées LC_{-1} , $LC = T(LC_{-1})$.

Pour l'application T qui est continûment différentiable, l'ensemble LC_{-1} est inclus dans l'ensemble $J_0 \subset \mathbb{R}^2$ des points dans lesquels le déterminant jacobien de T est égal à zéro et change de signe.

$$\begin{aligned}
LC_{-1} &\subset J_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det(DT(x, y)) = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3cx^2 - 2b - a + d = 0\} \\
&= \{(x_1, y), (x_2, y)\} \\
&= \{(x_1, y)\} \cup \{(x_2, y)\} \\
&= L_{-1} \cup L'_{-1}
\end{aligned}$$

avec

$$x_1 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{-3c(2b+a-d)}}{c} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{-3c(2b+a-d)}}{c}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} L_{-1} : x_1 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{-3c(2b+a-d)}}{c} \\ L'_{-1} : x_2 = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{-3c(2b+a-d)}}{c} \end{cases} \quad (3.2)$$

La courbe critique de rang-0, LC_{-1} est formé de deux branches L_{-1} et L'_{-1} (voir la figure 3.1).

La courbe critique de rang-1, LC est l'image par T de LC_{-1} , alors :

$$LC = T(LC_{-1}) = T(L_{-1} \cup L'_{-1}) = T(L_{-1}) \cup T(L'_{-1}) = L \cup L'$$

Donc nous avons deux droites parallèles L et L' sont des branches de la courbe critique de rang-1 LC (voir la figure 3.1).

Les extra-préimages $\overline{L_{-1}}$ et $\overline{L'_{-1}}$ sont définies à partir de (3.1) en tenant compte de (3.2).

Nous mattons :

$$f(x) = cx^3 + bx^2 + ax$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} L : y_1 = f(x_1) + d(x - x_1) \\ L' : y_2 = f(x_2) + d(x - x_2) \end{array} \right.$$

La récurrence 2.1 est de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$, LC sépare les régions Z_1 , Z_3 et Z_1 . Le feuilletage de Riemann [4] pour la récurrence $Z_1 - Z_3 - Z_1$ (voir subsection 21.2). L'action des inverses, $T^{-1} = T_1^{-1} \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$, provoque un dépliage des feuilles en ouvrant ces feuilles à côtés opposés par rapport à la ligne LC_{-1} . Autrement dit, étant donné un point $(x, y) \in Z_3$ les pré-images $T_1^{-1}(x, y)$, $T_2^{-1}(x, y)$ et $T_3^{-1}(x, y)$ sont situées à droite et à gauche de $LC_{-1} = L_{-1} \cup L'_{-1}$ respectivement.

3.2.2 Feuilletage du plan (x, y) pour la transformation T

Transformation T est de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$

La figure 3.2 (a), est représentée une structure des feuillets dans le cas de zones à 3 ou 1 antécédents, la courbe LC est discontinue, formée de deux branches distinctes L et L' séparant le plan \mathbb{R}^2 en trois régions, L et L' séparant respectivement les régions Z_1 avec Z_3 et Z_1 avec Z_3 .

Pour T^{-1} , un point \overline{M} doit être considéré comme la superposition de trois points M, M', M'' (figure 3.2 (a)), antécédents de rang-1 de \overline{M} sont alors les images de $M, M',$

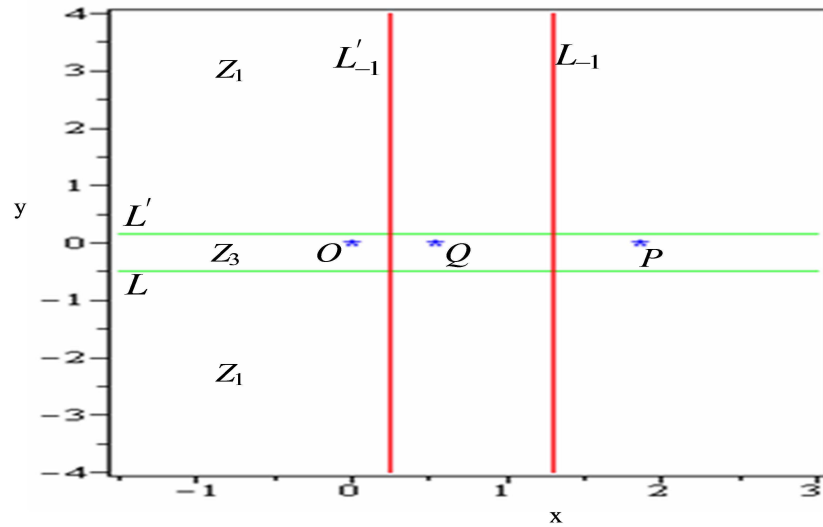


FIG. 3.1: Lignes critiques $LC = L \cup L'$, et préimages de Lignes critiques LC_{-1} , avec Z_i , $i = 1, 3$ de T dans le plan de phase (x, y) , pour $a = c = 1$, $d = 0$ et $b = -2.4$.

ou M , M' , M'' [22], [20] et [21].

Grâce à cette structure en feuillets du plan (x, y) , il est possible d'analyser qualitativement la configuration obtenue lorsque l'on recherche, par la récurrence T^{-1} , les antécédents réels du premier rang d'un ensemble quelconque de points du plan (x, y) . En effet, du point de vue de la recherche de ces antécédents, nous venons de voir que, dans certaines zones, le plan (x, y) doit être considéré comme replié un certain nombre de fois sur lui-même, les lignes de pliage correspondant aux lignes critiques LC .

Donc pour étudier qualitativement la structure des antécédents d'un ensemble de point (\overline{W}) , formant un domaine simplement connexe, et en particulier pour connaître leurs positions relatives, il faut considérer que cet ensemble est tracé non pas sur le plan (x, y) mais sur les divers feuillets qui existent dans la région du plan (x, y) où est situé (\overline{W}) . Si en recherchant par T^{-1} les antécédents de rang un de (\overline{W}) , ou d'une partie de (\overline{W}) , on obtient

plusieurs domaines sans connexion entre eux, (\overline{W}) sur le plan replié est la superposition de domaines non connexion situés sur des feuillets différents.

Sur la figure 3.2 (b), l'ensemble (\overline{W}) est situé en partie dans la zone à 1 antécédent et en partie dans la zone à 3 antécédents.

Sur le plan replié, on obtient un ensemble (W) sur un feuillet associé à l'une des déterminations de T^{-1} , tandis que la portion de (\overline{W}) située dans la zone à 3 antécédents donne l'ensemble (W') situé sur les deux autres feuillets associés aux 2 autres déterminations restantes et qui se "raccordent" le long de la ligne de pliage des 2 feuillets.

Le domaine (W) sur le plan replié peut être d'un seul tenant. Il en est ainsi, dans le cas de la figure 3.2 (b), quand (\overline{W}) est entièrement situé dans une région à un seul antécédent. C'est le cas aussi de la figure 3.2 (c) où (\overline{W}) traverse les deux lignes critiques. On obtient alors sur le plan replié un seul ensemble (W) . En effet, dans la zone à 3 antécédents, puisque les déterminations se rejoignent 2 à 2 sur les lignes de pliage, les antécédents de (\overline{W}) forment sur le plan replié un ensemble continu qui permet de passer du feuillet supérieur au feuillet inférieur sans discontinuité.

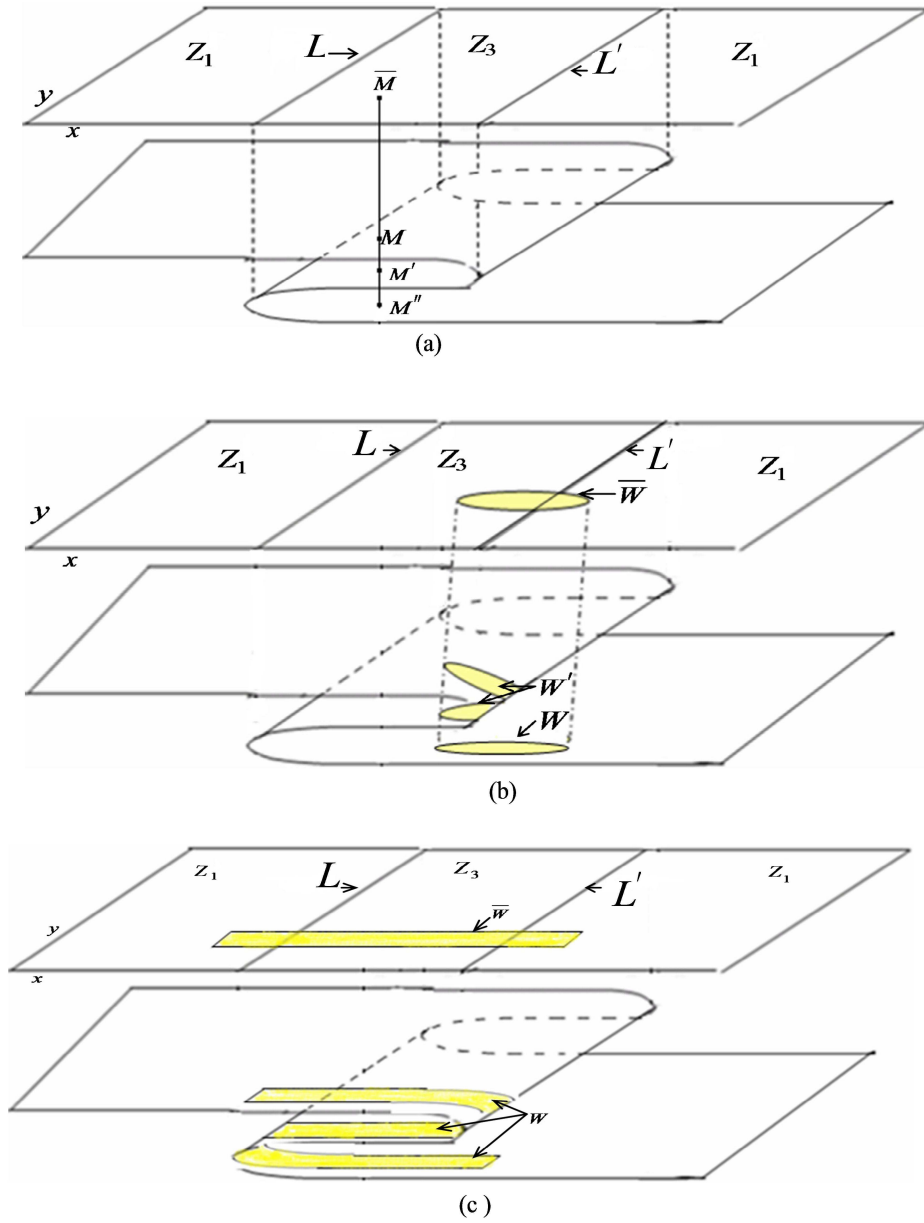


FIG. 3.2: (a), (b) et (c)– Plan de phase d'une TNI de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$.

3.3 Bifurcations d'un bassin d'attraction

3.3.1 La structure non fractale

Le bassin B d'un attracteur A est défini comme l'ensemble de toutes les conditions initiales qui convergent vers un attracteur A à distance finie lorsque le nombre d'itérations de T tend vers l'infini, noté $B(A)$.

L'ensemble $B(A)$ vérifié :

$$T^{-1}(B(A)) = B(A) \quad \text{et} \quad T(B(A)) \subseteq B(A)$$

On appelle bassin immédiat la plus grande partie connexe d'un bassin contenant l'ensemble attractif. Dans cette section, nous étudions l'évolution du bassin d'attraction lorsque le paramètre b est modifié. Les situations sont représentés sur les figures (3.3) à (3.7). En utilisant la terminologie et les résultats de [18], [3], [4], [6], [7], [8], [14].

Les figures (3.3) à (3.7), montrent les courbes critiques et le bassin d'attraction (régions blues) pour la récurrence (2.1) obtenus par $a = c = 1$, $d = 0$ et faisant varier b entre -2.4 et -2.7 , dans cette situation les limites du bassin d'attraction ne sont pas fractales. Nous examinons quelques bifurcations globales, typiques des transformations non inversibles, liées aux contacts des courbes critiques avec les limites des bassins. Les bifurcations de contact qui provoquent des changements qualitatifs de la structure du bassin seront expliquées en utilisant le rôle des courbes critiques, pour différents choix des paramètres. Notre objectif est d'expliquer comment les bassins deviennent non connexes ou multi connexes.

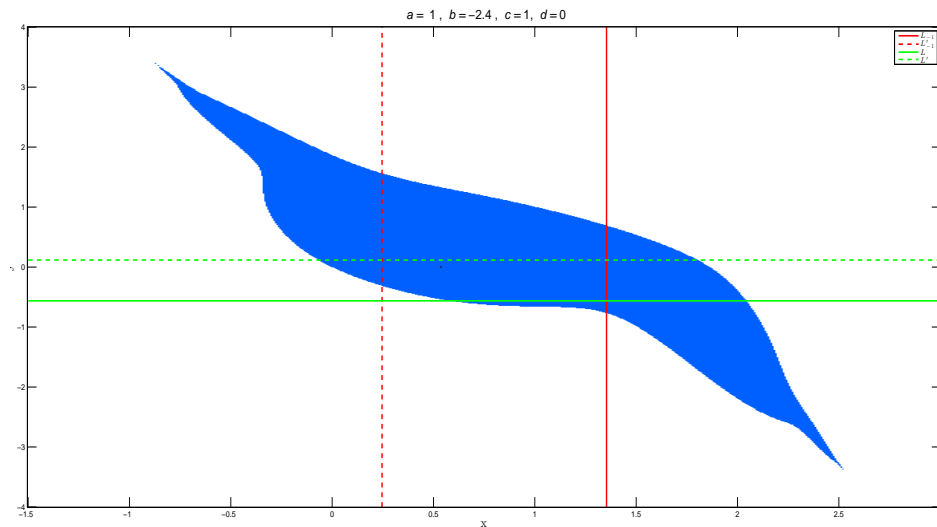


FIG. 3.3: Bassin d'attraction de point fixe stable Q , qui est simplement connexe (région blue).

• **Bassin simplement connexe \leftrightarrow Bassin multiplement connexe**

Nous partons d'une situation dans laquelle le bassin d'un point fixe stable Q est simplement connexe figure 3.3, deux points fixes O et P font partie de la limite du bassin. La figure 3.4 montre la première modification du bassin avec la création des trous qui sont situées à l'intérieur du bassin.

Nous observons que la bifurcation de contact (c'est-à-dire le contact entre les branches des lignes critiques LC et la frontières du bassin) modifie radicalement la structure topologique du bassin d'attraction d'un ensemble simplement connexe à un ensemble multiplement connexe (comparer les figures 3.3 pour $b = -2.41$ et 3.4 pour $b = -2.43$).

• **Bassin multiplement connexe \leftrightarrow Bassin non connexe**

La deuxième modification consiste en une bifurcation bassin multiplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe, des trous sont créés (figures 3.5-3.6-3.7) après la bifurcation de contact, l'espace d'état et traverse la courbe critique L pour pénétrer à l'intérieur de la zone

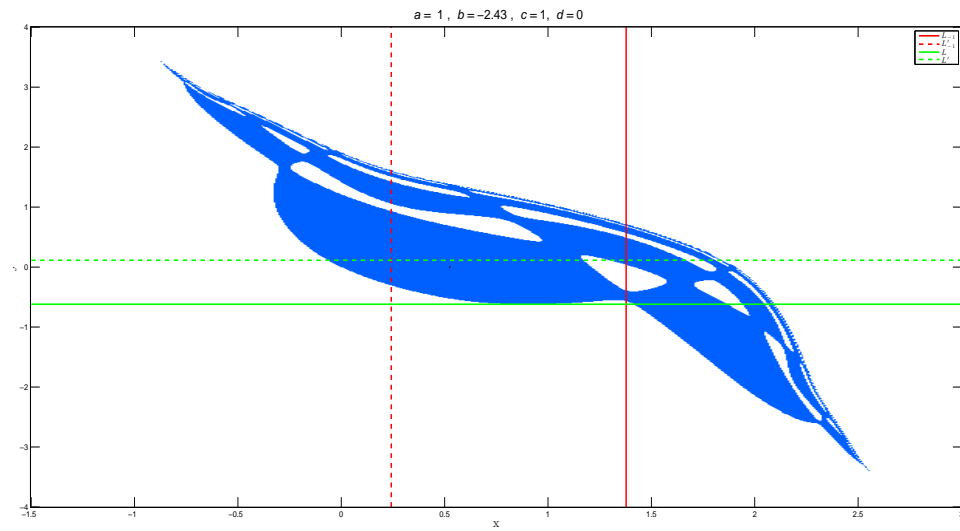


FIG. 3.4: Création des trous dans le bassin d'après la bifurcation de contact

Z_3 , qui est située au-dessus de L ; elle donne lieu à une suite des préimages de tout rang de cette partie de l'espace (x, y) , ce sont des trous, le bassin devient non-connexe.

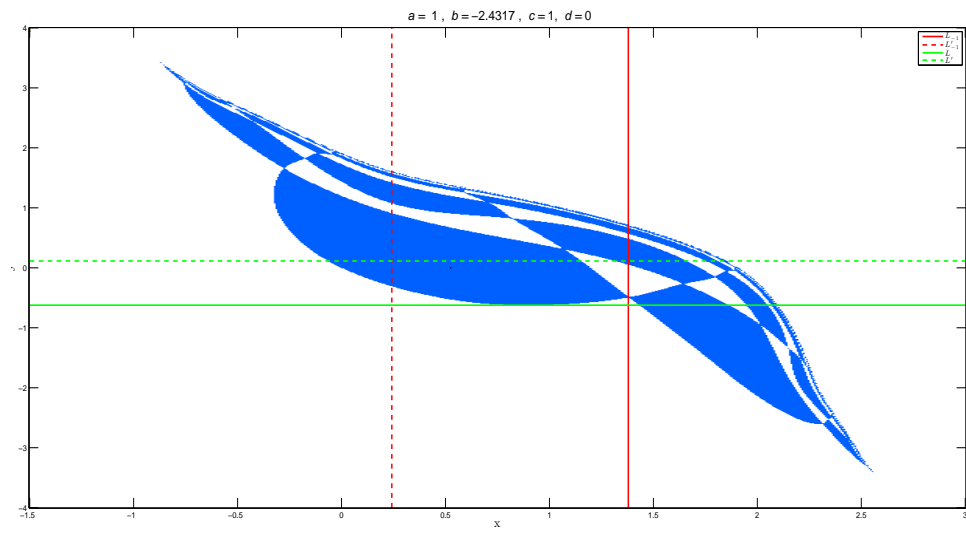


FIG. 3.5: Suite des préimages à l'intérieur du bassin.

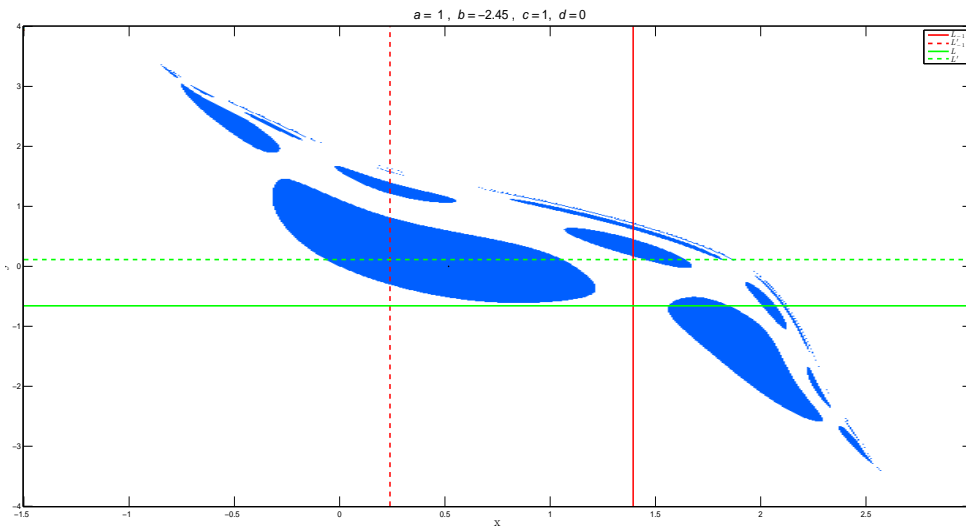


FIG. 3.6: Le bassin devient non-connexe.

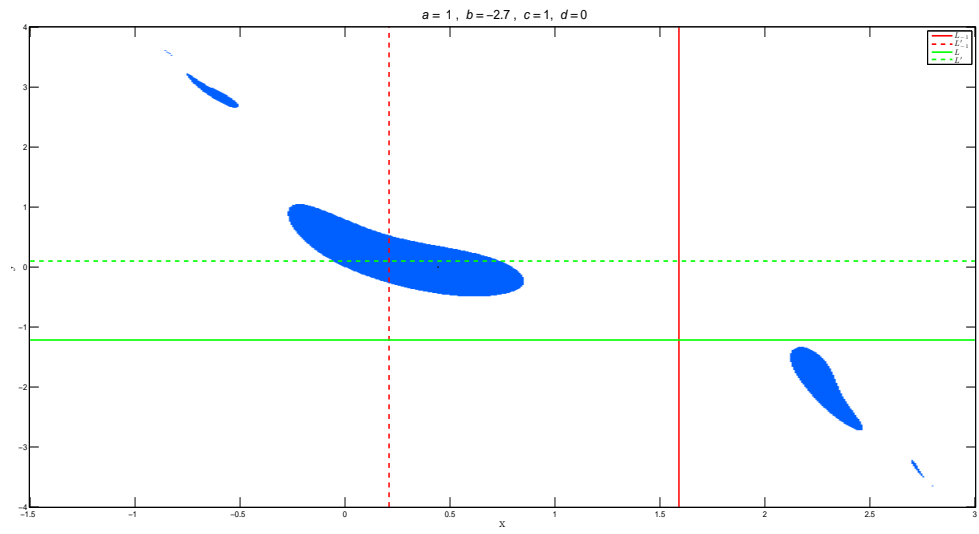


FIG. 3.7: La poursuite de la bifurcation de contact entraîne la disparition du bassin.

Conclusion générale

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire concerne l'étude d'un système dynamique discrets modélisé par des transformations ponctuelles de dimensions deux. Dans le cas particulier où nous considérons un modèle définie par deux polynômes, un linéaire et un cubique. Nous avons étudié les types de bifurcation locale (flip, fold et transcritique) analytiquement et numériquement dans le plan de paramètres

Dans le cas de récurrences bidimensionnelles non inversibles, une analyse qualitative basée sur des propriétés géométriques nous permissions d'obtenir des informations sur les bifurcations qui provoquent un changement qualitatif de la structure des bassins.

Bibliographie

- [1] Barugola A., Cathala J.C. and Mira C., "Annular chaotic areas, Nonlinear Analysis", T.M. & A. 10(11), 1223 – 1236, (1986).
- [2] Barugola A., "Quelques propriétés des lignes critiques d'une récurrence du second ordre a inverse non unique. Détermination d'une zone absorbante", R.A.I.R.O. Numerical Analysis 18(2), 137 – 151, (1984).
- [3] Barugola A., "Sur certains zones absorbantes et zones chaotiques d'un endomorphisme bidimensionnel", Int. J. Non-Linear Mechanics 21(2), 165 – 168, (1986).
- [4] Bischi G. , Gardini L. and Mira C., "Basin fractalizations generated by a two-dimensional family of $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ maps", International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, No. 3(2006)647 – 669 c World Scientific Publishing Company (2006).
- [5] Cathala J.C. Kawakami H. Mira C. , "Singular points with two multipliers $S_1 = -S_2 = +1$ in the bifurcation curves of maps", Int. J. Bifurcation and chaos, Vol. 2, No. 4, 1001 – 1004 (1992).
- [6] Cathala J.C., "Absorptive area and chaotic area in two-dimensional endomorphisms, Nonlinear Analysis", T.M. & A. 7(2), 147 – 160 (1983).

- [7] Cathala J.C., "On the bifurcation between a chaotic area of T^K and a chaotic area of T ", in Liedl R. , Reich L. and Targonski G. , eds., "Iteration Theory and its Functional Equations" (Proceedings of the Symposium held in Austria, Sept. 1984), Springer Verlag, New York, (1985).
- [8] Cathala J.C., "Bifurcations occurring in absorptive and chaotic areas", *Int. J. of Systems Sci.* 18(2), 339 – 349, (1987).
- [9] Cracasses J.P., "Sur quelques structures complexes de bifurcations de systèmes dynamiques". thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, (1990).
- [10] Dinar S. "Étude des bifurcations d'une équation non autonome de Duffing Rayleigh et d'un modulateur MICDIF". PhD Thèse, Université Paul Sabatier de Toulouse, n01673, février (1994).
- [11] Djellit I. and Soula Y., "On riddled sets and bifurcations of chaotic attractors", *Mathematics Subject Classification* : 37E05, 37D45, 37B25 (2006).
- [12] Fournier-Prunaret D. and Lopez-Ruiz R. "Basin bifurcations in a two-dimensional logistic map", *arXiv.nlin /0304059v1 [nlin.CD]* 29 Apr (2003).
- [13] Gumowski I. and Mira C. "Dynamique Chaotique, transformations ponctuelles, transition ordre désordre" (Ed. Cépadues, Toulouse), (1980).
- [14] Hamri N.E. and Soula Y., "Basins and Critical Curves Generated by A Family of Two-Dimensional Sine Maps", *Electronic Journal of Theoretical Physics*, EJTP 7, No. 24(2010)139 – 150, (2010).
- [15] Lopez-Ruiz, R., Perez-Garcia, C., "Dynamics of maps with a global multiplicative coupling", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.1, 6(1991), 511 – 528 (1991).

- [16] Lopez-Ruiz, R., Perez-Garcia, C., "Dynamics of two logistic maps with a global multiplicative coupling", *Int. J. Bif. Chaos*, vol. 2, 2(1992), 421 – 425 (1992).
- [17] Lopez-Ruiz, R., Fournier-Prunaret, D., Complex patterns on the plane : different types of basin fractalizations in a $2D$ mapping, *Int. J. Bif. Chaos*, vol.13, 2(2003), 281 – 310, (2003)
- [18] Millerioux. G, "Modèles par transformation non inversibles et application à la sécurité des communications synchronisation du chaos", thèse de doctorat de l'Insa Toulouse (1997).
- [19] Mira C., " Chaotic dynamics", Word scientific Publishing. Co. Pte. Ltd (1987).
- [20] Mira C. Gardini L. Barugola A. and Catala J.C., "Chaotic Dynamics in Two Dimensional Noninvertible Maps", World Scientific Publishing, Singapore, series A, vol. 4, (1996)
- [21] Mira, C., Fournier-Prunaret, D., Gardini, L., Kawakami, H., Cathala, J.C., "Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps. Fractalization of basins", *Int. J. Bif. Chaos*, vol. 4, 2, 343 – 381. (1994)
- [22] Roubellat F., "Contribution à l'étude des solutions des récurrences nonlinéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées". Thèse de doctorat ès Sciences Physiques. Toulouse. 26 sept. (1969)
- [23] Soula Y. , Taha A. K., Fournier-Prunaret D., Hamri N.E., "Bifurcations and dynamical behavior of $2D$ coupled chaotic sine maps", *Applied and Computational Mathematics*. Vol. 11, *No.1*, 2022, *pp.18 – 30*. doi : 10.11648/j.acm (2022).