MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LARECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

CONTRÔLABILITE ET OBSERVABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Brahim desktopSous la direction de :
ChenoukiMeriemPrAyadiAbdelhamid

Jury :

- **Président :**Mr RezougImad Univ. Oum El Bouaghi
- **Rapporteur :** Pr Ayadi Abdelhamid Univ. Oum El Bouaghi
- **Examinateurs :** Mlle Sendal Saida Univ.khanchla
  Mlle LaourChafia Univ. khanchla

Soutenu le : 08/06/2015

Année Universitaire : 2014 - 2015

Table des matières

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens d'abord à remercier infiniment **Mr AYADI Abdelhamid** *d'une part pour le choix de ce mémoire et pour son aide inestimable et les conseils précieux qu'il m'a apportés de l'autre part. Je reste et je resterai très reconnaissant.*

Je remercie **Mr Rezoug Imad**, *qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

Je remercie **Mlle Sendal Saida** et **Mlle Laouar Chafia** *d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce jury.*

Un grande merci à mes parents pour leur dévouement pour mon bonheur.Je tiens aussi a exprimer ma profonde gratitude a mes chers fréres et mes soeurs.

Je voudrais adresser un merci particulier à mon fiancé ***Djallal Khelifi***.

Je tiens également à remercier mes amies.J e remercie aussi à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire on a présenté la contrôlabilité et l'observabilité des systèmes dynamiques, l'objectif est étudié des certains concepts importants permettaient d'analyser des systèmes dynamiques, parmi ces concepts la notion de contrôlabilité et observabilité. À travers les caractérisations des systèmes dynamiques intéressants.

Mots-clés : Contrôlabilité, semi-groupe, opérateur, observabilité.

Notations

H, U, O	Espace de Hilbert
e^A	L'exponentielle d'un matrice A
$L(H)$	L'espace vectoriel des applications linéaires de H
$\mathcal{L}(H)$	L'espace vectoriel des applications linéaires continues de H
A, B, C	Opérateur
$D(A)$	L'ensemble de définition de A
$\operatorname{Im} A$	L'image de A
$KerA$	Le noyau de A
A^{-1}	Opérateur inverse de A
$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$	La norme de A
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de A
$R(.;A)$	La résolvante de A
A^*	Opérateur adjoint de A
$\{G(t)\}_{t \geq 0}$	Une famille d'opérateurs linéaires bornés sur H
$L^2([0,T];H)$	L'espace de Lebesgue

Introduction

La contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un sujet en plein développement. Son histoire a commencé avec le cas de la dimension finie, avec les systèmes différentiels dont nous ne présenterons que le cas linéaire. Son extension à la dimension infinie a connu plusieurs temps. Le premier a concerné la notion de contrôlabilité approchée, en particulier dans le cas parabolique, qui revient essentiellement à démontrer des résultats d'unicité de type " Holmgren". Les théories de la contrôlabilité exacte et de la contrôlabilité aux trajectoires se sont ensuite développées, dans les années 70', en particulier autour des systèmes hyperboliques conservatifs pour la première et des problèmes paraboliques pour la seconde.

Les notions d'exacte et de faible observabilité ont été explorées, de façon identique, par dualité. L'observabilité consiste à reconstruire, en temps fini, l'état du système à partir de la donnée de la dynamique du système et de la fonction de sortie. Ceci se traduit mathématiquement par nombreuses caractérisations et résultats ont été établis pour l'observabilité des systèmes.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre qui traité la contrôlabilité et l'observabilité en dimension fini.

Le deuxième chapitre on fait un rappel sur les opérateurs, les C_0-Semi-groupes.

Le troisième chapitre qui traité la contrôlabilité et l'observabilité en dimension infinie.

Chapitre 1

Contrôlabilité et observabilité en dimension finie

Dans cette partie on s'intéresse à regarder la contrôlabilité en dimension fini. Pour bien mettre en évidence cette notion on donne :

1.1 Exemple : La commande d'un four électrique

La modélisation :

$$\begin{cases} c_1 \dot{T_1}(t) = -a_1 r_1 (T_1 - T_2)(t) - a_2 r_2 (T_2 - T_0)(t) + u(t), \\ c_2 \dot{T_2}(t) = a_1 r_1 (T_1 - T_2)(t). \end{cases}$$

Où T_0, T_1, T_2 sont respectivement la température extérieure, la température dans la "jacket" du four, la température de l'intérieur du four, u est l' intensité de la chaleur produite par la bobine, les a_i sont les aires, les c_i sont les capacités de chaleur et les r_i sont les coefficients de radiation.

Le problème du four : Peut-on "s'arranger" pour que quelque soit la température du four à l'instant initial, $t = 0$, la température intérieure du four soit égale, à l'instant $t = t_0$ donné, à une valeur désirée $T_2(t_0) = \overline{T_2}$?

Leproblème mathématique: Peut-on trouver, pour toutes les valeurs de $(T_1(0), T_2(0))$, u pour que la solution du systéme d'équations différentielles ci-dessus satisfasse $T_2(t_0) = \overline{T_2}$?

La réponse mathématique : Oui, on peut. Il y a même plusieurs choix possibles. L'un d'entre eux est le "meilleur" (en un certain sens). On sait le calculer et on connait la dépendance du "coût" du contrôle pour des petites valeurs de $t_0 \sim t_0^{\frac{-3}{2}}$ .La suite va nous permettre de démontrer cette affirmation. On peut commencer par remarquer qu'on peut écrire le systéme d'équations sous forme d'un systéme différentiel. Pour cela, faisons un changement de variables

$$\begin{aligned} y_1 &= T_1 - T_0, \\ y_2 &= T_2 - T_0. \end{aligned}$$

Comme les coefficients c_i sont non nuls, on peut définir les matrices A et B par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-a_1 r_1 + a_2 r_2}{c_1} & r_1 a_1 \\ \frac{r_1 a_1}{c_2} & \frac{-r_1 a_1}{c_2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le systéme s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}, \ \forall t \in \left]0, T\right[, \ y(t) \in \mathbb{R}^n$$

Cette exemple permet d'introduire la notion de contrôlabilité.

1.2 Contrôlabilité

Contrôlabilité : Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, due à Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Description du système : soit $T > 0$ consédérons un systéme différentielle ordinaire définie sur $[0, T]$ par :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \ \forall t \in \left]0, T\right[\ , y \ (t) \ \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

Où $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), f(t) \in \mathbb{R}^n$.

Si la matrice A ne dépend pas de y on dit que le systéme (1.1) est linéaire et notée Ay.

Si la matrice A dépend de y on dit que le systéme (1.1) est non linéaire et notée $A(y)$.

ce systéme admet une unique solution pour $f \in L^2(0, T, \mathbb{R}^n), y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

cette solution est donneé par :

$$y(t) = e^{-At}y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2.1 *1) Si $f = 0$ alors $y(t) = e^{-At}y_0$ est dite solution homogéne.*

2) Si $y_0 = 0$ alors $y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds$ est dite solution non homogéne.

Maintenant on introduire une modification sur le systéme en choissser

$$f(t) = Bu(t).$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}, \ \forall t \in \left]0, T\right[\ , y(t) \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

Où l'état $y(t)$ et la condition initiale y_0 sont dans $H = \mathbb{R}^n$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $u(t) \in U$ $(U := \mathbb{R}^m)$.

La fonction $u \in L^2((0,T), \mathbb{R}^m)$ est appelleé contrôle.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.2 *La solution de systéme différentielle* (1.3) *dèpend de la donné initiale et de second membre et pour simplifie l'écriture on pose $S(t) = e^{-At}$, la solution s'écrit*

$$y(t, y_0, u) = y(t) = S(t)\, y_0 + \int_0^t S(t-s)\, Bu(s)\, ds \qquad \forall t \in [0, T]$$

Où S la matrice résolvante du systéme

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = AS(t), \\ S(0) = I. \end{cases} \quad tq\ I \quad \text{la matrice unité}$$

Définition 1.2.3 *On dira que le systéme*(1.3) *est contrôlable au temps $T > 0$, si pour tout $a \in H$et tout $b \in H$, il existe une fonction de contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ telle que :*

$$y(T; a, u) = b.$$

On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.

Comme la donnée initiale n'intervient pas dans la notion de contrôlabilité alors pour simplifie le calcul on pose $y_0 = 0$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in]0, T[\ , y \ (t) \ \in \mathbb{R}^n$$

La solution s'écrit

$$y(t, u) = \int_0^t S(t-s) Bu(s) ds.$$

On note

$$L_t u = \int_0^t S(t-s) Bu(s) ds.$$

où L_t est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t : \begin{cases} L^2(0, T; U) \to H \\ u \to \int_0^t S(t-s) Bu(s) ds. \end{cases}$$

Proposition 1.2.4 *Le systéme(1.3) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif.*

1.2.2 Caractérisations

Le Gramien de contrôlabilité

L'opérateur adjoint de L_T : L'opérateur L_T est défini de l'espace de Hilbert $L^2(0, T; U)$ dans l'espace de Hilbert H. C'est un opérateur borné. On a

$$L_T^* \begin{cases} H \to L^2(0, T; U) \\ x \to L_T^* x = v. \end{cases}$$

où v définit par

$$\langle L_T^* x, u \rangle = (x, L_t u), \forall u \in L^2(0, T; U), \forall x \in H$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0, T; U)$ et $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans H. Or

$$
\begin{aligned}
(x, L_t u) &= \left(x, \int_0^T S(T-s) Bu(s)\, ds\right) \\
&= \int_0^T (x, S(T-s) Bu(s)\, ds) \\
&= \int_0^T (B^* S^*(T-s) x, u(s))\, ds \\
&= \langle B^* S^*(T-.) x, u \rangle ;
\end{aligned}
$$

où B^* (resp$S^*(T-s).$) est la matrice adjointe de B(resp. $S(t-s)$). Donc :

$$
L_T^* = B^* S^*(T-.) .
$$

Remarque 1.2.5 *L'opérateur L_T sera surjectif si et seulement si son adjoint est injectif.*

Matrice de contrôlabilité - Gramien de contrôlabilité

Posons

$$
Q_T = L_T L_T^* = \int_0^T S(T-s) BB^* S^*(T-s)\, ds;
$$

L'opérateur Q_T est dans $\mathcal{L}(R^n)$ et

$$
\langle Q_T x, x \rangle = \int_0^T |B^* S^*(T-s) x|^2\, ds = \|L_T^* x\|^2 \geq 0, \ \forall x \in R^n.
$$

Définition 1.2.6 $Q_T = L_T L_T^*$ *s'appelle matrice de contrôlabilité ou Gramien de contrôlabilité.*

Théorème 1.2.7 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$,

(ii) L'opérateur L_T est surjectif,

(iii) L'opérateur L_T^* est injectif,

(iv) L'opérateur Q_T est inversibe.

1.2.3 Le critére de Kalman

Le Théorème (1.2.7) n'est pas toujours commode à appliquer. Dans ce cas il existe une caractèrisation algébrique de la contrôlabilité d'un systéme linéaire, en génèral, facilement applicable. On suppose que $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont des matrices constantes sur$(0;T)$ et on note $[AB] := [B; AB; ...; A^{n-1}B]$ la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B; AB; ..., A^{n-1}B$.

Théorème 1.2.8 (Critére de Kalman) *Le systéme linéaire(1.3) est contrôlable si et seulement si ;la matrice de contrôlabilité(ou de commondabilité) de Kalaman*

$$[B; AB; :::; A^{n-1}B]$$

est de rang n (C.-à-d. il existe n colonne linéairement indépendant).

Remarque 1.2.9 *Si $rgB = j$ alors peut être remplacée, dans l'énoncé du théoréme, par*

$$rg[B; AB; ...; A^{n-j}B] = n.$$

Exemple 1.2.10 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} y'' - ay' + cy = u \\ y\left(0\right) = y_0 \\ y'\left(0\right) = y_1. \end{cases}$$

Premier étape : ramener le problème au cas classique

On pose $w = y'$ donc on a

$$w' - aw + cy = u$$

on a le systéme suivant

$$\begin{cases} y' = w \\ w' = aw - cy + u \end{cases};$$

soit

$$z\left(t\right) = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$$

Alors

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ aw - cy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

On peut définir les matrices A et B par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le systéme s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = Az + Bu \\ z\left(0\right) = z_0, \end{cases} \quad \text{telle que } z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

Deuxième étape : On applique le critère de Kalman et on obtient

$$rg \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} = 2, \forall a \in \mathbb{R}.$$

D'où le systéme et contrôlable.

Exemple 1.2.11 *Soit le systéme siuvant*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

telle que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Alors d'aprés le critére de Kalman on a

$$rg \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2.$$

ce qui signifie que le système n'est pas contrôlable.

1.2.4 Caractérisation d'un contrôle optimal

Dans le cas où la paire (A, B) est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de pouvoir en construire un qui *" consomme le moins d'énergie"*. La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|_U^2 \, ds, \; u \in U.$$

On notera

$$U_{ad}(a, b) = \{u \in U, y(T; a, u) = b\}.$$

Le théoréme suivant définit l'unique $u \in U_{ad}(a, b)$ qui minimise la fonctionnelle J sur $U_{ad}(a, b)$.

Théorème 1.2.12 *Si la paire (A, B) est contrôlable, l'application P_T qui à $(a, b) \in H \times H$ associe.*

$$P_T(a, b) = -L_T^* Q_T^{-1} (S(T, 0) a - b),$$

vérifie

$$y(T;a,P_T)=b.$$

De plus

$$\int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2\,ds=\min J(u)=\left\|Q_T^{-\frac{1}{2}}\left(S(T,0)a-b\right)\right\|^2.$$

Démonstration. Comme $U_{ad}(a,b)$ est un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert réel $L^2(0,T;U)$, tout point w de $L^2(0,T;U)$ admet,une unique projection u sur $U_{ad}(a,b)$.

Elle réalise la distance de x à $U_{ad}(a,b)$: $d(w,u)=d(w,U_{ad}(a,b))=\min_{v\in U_{ad}(a,b)}\|u-v\|_{L^2(0,T;U)}$.

Elle est caractérisée par $\langle w-u,u-v\rangle_{L^2(0,T;U)}\geq 0,\forall v\in U_{ad}(a,b)$. En particulier si $w=0$, il existe un unique $\bar{u}\in L^2(0,T;U)$ tel que $J(\bar{u})=\min_{v\in U_{ad}(a,b)}J(u)$. Notons $\bar{u}=P_T(a,b)$.

(i) Montrons que $P_T(a,b)\in U_{ad}(a,b)$. Calculons $y(T,a,P_T(a,b))$.

$$\begin{aligned}
y(T,a,P_T(a,b)) &= S(T,0)a-L_TL_T^*Q_T^{-1}(S(T,0)a-b)\\
&= S(T,0)a-Q_TQ_T^{-1}(S(T,0)a-b)\\
&= b.
\end{aligned}$$

(ii) Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2\,ds &= \int_0^T\left(L_T^*Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),L_T^*Q_T^{-1}(S(T,0)a-b)\right)_U\\
&= \left(Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),Q_TQ_T^{-1}(S(T,0)a-b)\right)\\
&= \left(Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),S(T,0)a-b\right)\\
&= \left\|Q_T^{-\frac{1}{2}}(S(T,0)a-b)\right\|^2.
\end{aligned}$$

(iii) Montrons maintenant l'optimalité. Il suffit de montrer que

$$\langle 0-P_T(a,b),P_T(a,b)-v\rangle_{L^2(0,T;U)}\geq 0,\forall v\in U_{ad}(a,b),$$

c'est-à-dire que

$$\int_0^T(P_T(a,b)(s),v(s))_U-\int_0^T\|P_T(a,b)(s)\|_U^2\,ds\geq 0,\forall v\in U_{ad}(a,b)$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T(P_T(a,b)(s),v(s))_U &= -\int_0^T\left(L_T^*Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),v(s)\right)_U ds\\
&= -\left(Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),L_Tv\right)\\
&= \left(Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),S(T,0)a-b\right)\\
&= \left\|Q_T^{-\frac{1}{2}}(S(T,0)a-b)\right\|^2\\
&= \int_0^T\|P_T(a,b)(s)\|_U^2\,ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(s)\|_U^2\, ds &= \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2\, ds + \int_0^T \|u(s) - P_T(a,b)(s)\|_U^2\, ds \\ &\geq \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2\, ds.\end{aligned}$$

l'inégalité étant stricte si $u \neq P_T(a,b)$. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

1.3 observabilité en dimension finie

Dans cette section on s'intéresse à regarder la notion d'observabilité en dimension finie. On note dans ce paragraphe $O = \mathbb{R}^k$.

Définition 1.3.1 *Le systéme défini dans* $(0,T)$ *par*

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = a, \\ z = Cy \end{cases}$$

où $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$,$C \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ *est dit observable au temps* $T > 0$ *si pour tout* $a \in H, a \neq 0$, *il existe* $t \in (0,T)$ *tel que*

$$z(t) = Cy(t,a) = Ce^{-At}a \neq 0,$$

ou, de maniére équivalente,

$$Cy(t,a) = 0, \forall t \in (0,T) \Rightarrow a = 0.$$

S'il existe $T > 0$ tel que pour tout $a \in H \backslash \{0\}$, il existe $t \in [0,T]$ tel que $z(t) = Cy(t,a) \neq 0$, alors le systéme est dit observable au temps $T > 0$. On dit aussi que la paire (A,C) est *observable* au temps $T > 0$.

On définit *la matrice d'observabilité* par

$$R_T = \int_0^T S^*(s)\, C^* C S(s)\, ds.$$

On peut définir l'application

$$K_t : \begin{cases} H \to L^2([0,T], O) \\ a \to Cy(t,a) = Ce^{-At} \end{cases}.$$

L'observabilité revient à l'injectivité de K_T et donc à l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$|a|^2 \leq c \int_0^T \|CS(t)\|_O^2 \, ds.$$

Ceci revient à

$$|y(0)|^2 \leq c \int_0^T \|CS(t)\|_O^2 \, ds \text{ où } y \text{ est solution de } y^{'} = Ay.$$

C'est *"l'inégalité d'observabilité"*. Ainsi :

Proposition 1.3.2 . *La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si il existe $c > 0$ telle que pour toute solution y du systéme $y^{'} = -A^* y$, on a*

$$|y(0)|^2 \leq c \int_0^T \|B^* y(t)\|_U^2 \, ds$$

Remarque 1.3.3 *Cette inégalité d'observabilité s'écrit aussi*

$$|a|^2 \leq c \, \|L_T^* a\|_{L^2([0,T],U)}^2 \quad \forall a \in H.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur $K_T : H \to L^2([0,T]; O)$. Par le théoréme du rang, K_T est injectif implique que $\dim R(K_T) = dim H$.

On peut donc définir K_T^{-1} de $R(K_T)$ sur H. C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie, c'est donc un opérateur continu, donc il existe $c > 0$ tel que

$$\left|K_T^{-1}(y)\right|^2 \leq c \, \|y\|_{L^2([0,T],U)}^2, \forall y \in R(K_T).$$

Ce qui revient à

$$|a|^2 \leq c \, \|K_T(a)\|_{L^2([0,T],U)}^2 \quad \forall a \in H.$$

■

Théorème 1.3.4 (critére de Kalman) *Le systéme linéaire(1.3) est observable si et seulement si ;la matrice d'observabilité de Kalaman*

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang n.

Exemple 1.3.5 *Soit le systéme suivant*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + y = 5u \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ z = (y' - 2y), \end{cases}$$

Premier étape : ramener le probléme au cas classique.

On pose $w = y'$ *donc on a*

$$w' - 3w + y = 5u$$

on a le systéme suivant

$$\begin{cases} y' = w \\ w' = 3w - y + 5u \end{cases} ;$$

soit

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$$

Alors

$$\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 3w - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} u,$$

et

$$z = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}.$$

On peut définir les matrices A *et* B,C *par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix},$$

et le systéme s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = AY + Bu \\ Y(0) = 0 \\ z = CY \end{cases}$$

Deuxième étape : On applique le critère de Kalman et on obtient

$$rg \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

D'où le systéme et observable.

Exemple 1.3.6 *Soit le systéme siuvant*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = 0 \\ z(t) = Cy(t) \end{cases},$$

telle que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors d'aprés le critére de Kalman on a

$$rg \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 < 2.$$

ce qui signifie que le systéme n'est pas observable.

Chapitre 2

Semi-groupe

2.1 Un peu d'analyse spectrale

2.1.1 Quelques définitions

Dans la suite, nous noterons par H un espace de Hilbert sur le corps des nombres réel $\mathbb{R}$, ou complexes $\mathbb{C}$ muni de la norme $x \to |x|$, et $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de H, $\mathcal{L}(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continue de H muni de la norme $\|A\| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax|$,et $D(A) = \{x \in H, \|Ax\| < \infty\}$ le domaine de définition de A.

Définition 2.1.1 *Un opérateur linéaire non borné dans H est une application $A : D(A) \subset H \to H$ définie sur un domaine $D(A)$, sous-espace vectoriel de H. Son image est*

$$\operatorname{Im}(A) = \{y \in H; \exists x \in D(A), y = Ax\}.$$

et le noyau de A

$$Ker(A) = \{x \in D(A), Ax = 0\}.$$

L'opérateur A :$D(A) \subset H \to \operatorname{Im} A$ est *surjectif.*

Si $Ker A = \{0\}$; alors A est *injectif.*

Pour un opérateur bijectif on peut définir l'opérateur inverse : $A^{-1} : D(A^{-1}) \subset H \to H.$

Lemme 2.1.2 *Si $A \in L(H)$ et $\|A\| < 1$, alors $(I-A)$ est inversible et $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Définition 2.1.3 (Opérateur compact) *Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. On dit que T est* compact *si pour tout sous-ensemble borné M de X l'image $T(M)$ est relativement compact i.e : $\overline{T(M)}$ est compact.*

Ensembles résolvant et opérateurs résolvants. Spectre de A

Définition 2.1.4 *l'ensemble* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A)$ *est bijectif de* $D(A)$ *sur* $H\}$ *s'appelle l'ensemble résolvant de* $A \in L(H)$.

Définition 2.1.5 *l'application :*

$$\begin{aligned} R(.;A) &: \rho(A) \to L(H) \\ R(\lambda;A) &= (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

S'appelle la résolvante de A.

c'est un opérateur borné de H *dans* H*.*

on dit que la résolvante est compact si elle est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Définition 2.1.6 (Spectre d'un opérateur) *Le complémentaire de l'énsemble résolvant noté par* $\sigma(A)$ *est appelé* le spectre *de l'opérateur A.*

Définition 2.1.7 $(A, D(A))$ *est dit fermé si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\},$$

est fermé dans la topologie produit de $H \times H$*.*

Lorsque $(A, D(A))$ *est fermé,* $D(A)$ *muni de la norme du graphe* $\|x\|_{D(A)} = |x| + |Ax|$ *est un espace de Banach et* $A : \left(D(A) \|.\|_{D(A)}\right) \to (H, |.|)$ *est* un opérateur borné.

Définition 2.1.8 (Opérateur adjoint) *Soit* $A : D(A) \subset H \to H$ *avec* $D(A)$ *dense dans* H*. L'opérateur adjoint* A^* *de* A *est défini par :*

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{y \in H, \exists c \geq 0, |\langle y, Ax \rangle| \leq c|x| \forall x \in D(A)\} \\ \langle y, Ax \rangle &= \langle A^* y, x \rangle, \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*). \end{aligned}$$

Définition 2.1.9 *Soit* $A : D(A) \subset H \to H$*. A est dit* ***auto-adjoint*** *si* $D(A^*) = D(A)$ *et* $A^* = A$ *.*

A est ***symétrique*** *si*

$$\langle y, Ax \rangle = \langle Ay, x \rangle, \forall x, y \in D(A).$$

Si

$$A^* = -A$$

*on dit que A est **anti-adjoint**.*

On remarquera que puisque $D(A)$ est dense dans H, on a

$$\langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle, \forall x, y \in D(A) \Rightarrow A^*x = Ax \qquad \forall x \in D(A).$$

De plus, si $x, y \in D(A)$ on aura

$$|\langle y, Ax\rangle| = |\langle Ay, x\rangle| \leq c\,|x|,$$

*donc $y \in D(A^*)$. Ainsi si A **est symétrique**, alors $D(A) \subset D(A^*)$.*

Donc si A est symétrique, il coincide avec A^* sur son domaine.

Théorème 2.1.10 (du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire fermé. Si $D(A)$ est fermé dans E alors, T est borné.*

2.2 Les opérateurs maximaux et dissipatifs

Soit $(H, |.|)$ un espace de hilbert.

Définition 2.2.1 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire dans H. On dit que*

(i) A est dissipatif si

$$(Ax, x) \leq 0, \forall x \in D(A). \tag{2.1}$$

(ii) A est maximal si $R(I - A) = H$.

Lorsque A vrifie (2.1), on dit aussi souvent que $-A$ est monotone. Les opérateurs maximaux et dissipatifs jouissent de propriétés remarquables que nous allons rappeler.

Théorème 2.2.2 *$(A, D(A))$ est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert H alors :*

(i) A est fermé.

(ii) $\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H et $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ avec $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

(iii) $D(A)$ est dense dans H.

2.3 Définition et propriétes de semi-groupes

Définition 2.3.1 *Une application $G : [0, +\infty[\to \mathcal{L}(H)\,(rsp\ \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H))$ est appelée* semi-groupe fortement continu *(resp. groupe) dans H si elle satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $G(0) = Id$.

(ii) $G(t+s) = G(t)G(s), \forall t, s \geq 0$ *(resp.*$\forall t, s \in \mathbb{R}$*).*

(iii) Pour tout $x \in H$*, l'application* $G(.)x$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *(resp.* $\mathbb{R}$*).*

Dans la suite, nous les appellerons plus simplement C_0*-semi-groupes.*

Remarque 2.3.2 *Comme* $t+s = s+t$*, on a* $G(t+s) = G(s+t) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$*. Donc les opérateurs d'un semi-groupe sont* commutents*.*

Définition 2.3.3 *Un* C_0*-semi-groupe*$(G(t))_{t>0}$ *sur* H *est dit* ***uniformément continu*** *si*

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(H)} = 0.$$

Proposition 2.3.4 *Si* $(G(t))_{t>0}$ *est un* C_0*-semi-groupe dans* H*, alors l'opérateur adjoint* $\{G^*(t)\}_{t>0}$ *est aussi* C_0*-semi-groupe dans* H*.*

Définition 2.3.5 *Le générateur infinitésimal* A *d'un* C_0*-semi-groupe* $\{G(t)\}_{t>0}$ *dans* H *est défini par*

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ x \in H, \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [G(h)x - x] \ \text{ existe} \right\} \\ Ax &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [G(h)x - x]. \end{aligned}$$

Le générateur infinitésimal de $\{G^*(t)\}_{t>0}$ *est* $(A^*, D(A^*))$*.*

Théorème 2.3.6 *Soit* G *un* C_0 *semi-groupe sur* H *de générateur infinitésimal* A*. Alors :*

(1) $D(A)$ *est dense dans* H*.*

(2) A *est fermé.*

(3) $\forall x \in D(A),\ G(.)x \in C^1([0, \infty[\,; H) \cap C([0, \infty[\,; D(A))$ *et on a*

$$\frac{d}{ds} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax, \ \forall t \geq 0.$$

(4) $G(t)x - x = \int_0^t G(s) Axds, \forall t \geq 0.$

Définition 2.3.7 *On dit que le* C_0*-Semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est* uniformément borné *s'il existe* $M \geq 1$*,tel que*

$$\|G(t)\| \leq M; \forall t \geq 0.$$

Théorème 2.3.8 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe pour lequel* $t > 0$ *il existe* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$ *tel que :*

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Alors la famille $\{G(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$ *;oú :*

$$S(t) = e^{-\omega t}G(t) : \forall t \geq 0$$

est un C_0*-Semi-groupe, ayant la propriété :*

$$\|S(t)\| \leq M, \forall t \geq 0.$$

Définition 2.3.9 *Un* C_0*-semi-groupe*$\{G(t)\}_{t>0}$ *sur* H *est dit de contractions si*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall t \geq 1.$$

Corollaire 2.3.10 *Soit* G *un* C_0*-semi-groupe sur* H *de générateur infinitésimal* $(A, D(A))$*. Alors : pour tout* $x \in D(A)$ *le systéme*

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = x \end{cases}, \tag{2.2}$$

a une unique solution $y \in C^1([0, \infty[\,; H) \cap C([0, \infty[\,; D(A))$ *donnée par*

$$y(t) = G(t)x.$$

On s'intéresse à présent à la réciproque du résultat précédent : étant donné un opérateur $(A, D(A))$*, à quelles conditions est-il générateur d'un* C_0*-semi-groupe sur* H *? La réponse compléte est donnée par le théorème de Hille-Yosida.*

Théorème 2.3.11 (Hille-Yosida) *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur sur* H*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.$D(A)$ *est dense dans* H *et il existe* $\omega \in \mathbb{R}, M \geq 1$ *tel que pour tout* $\lambda > \omega$*, l'opérateur* $(\lambda I - A)$ *est inversible (d'inverse borné) et que*

$$\|R_\lambda^m(A)\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^m}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall \lambda > \omega;$$

2. $(A, D(A))$ *est générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(G(t))_{t\geq 0}$ *vérifiant*

$$\exists \omega \in R, \exists M \geq 1, \|G(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Un résultat trés utilisé en pratique est le suivant :

Théorème 2.3.12 (Lumer-Phillips) *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire. Les propriétes suivantes sont equivalentes :*

1. *$(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de* ***contractions*** *sur H.*
2. *A est maximal dissipatif.*
3. *A^* est maximal dissipatif.*

Théorème 2.3.13 ***Cas auto-adjoint.*** *Soit $(A, D(A))$ un opérateur maximal dissipatif et symétrique sur un espace de Hilbert H. Alors :*

1. *A est aut-oadjoint.*
2. *Pour tout $x \in H$, il existe une unique fonction*

$y \in C\left([0, \infty[\,; H\right) \cap C\left([0, \infty[\,; D\left(A\right)\right) \cap C^1\left([0, \infty[\,; H\right)$, solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{'} = Ay \\ y\left(., 0\right) = x \end{array} \right. . \tag{2.3}$$

De plus, $y \in C^{\infty}\left([0, \infty[\,; D\left(A^j\right)\right), \forall j \in \mathbb{N}$.

Noter ici que par définition : $D(A^j) = \{y \in D(A^{j-1}); Ay \in D(A^{j-1})\}$ pour tout $j \geq 2$ avec $D(A^1) = D(A)$.

Chapitre 3

Contrôlabilité et observabilité en dimension infinie

3.1 Quelques résultats utiles

Racine carrée d'un opérateur borné

Proposition 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur* ***positif*** *et* ***auto-adjoint****. Il existe un unique opérateur* ***positif*** *et* ***auto-adjoint*** *$B \in \mathcal{L}(H)$ tel que*

$$B^2 = A. \textit{On note } B = \sqrt{A}.$$

3.1.1 Opérateurs surjectifs

Voici à présent un résultat qui est la base de la notion de contrôlabilité en dimension infinie.

Soient X, Y et Z des espaces de Banach et X', Y' et Z' leurs espaces duaux. On considère les opérateur $F \in \mathcal{L}(X, Z)$ et $G \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On désigne par $F^* : Z' \to X'$ et $G^* : Z' \to Y'$ les opérateurs adjoints de F et de G.

Théorème 3.1.2 *Si Y est un espace de Hilbert séparable alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i). $Im(F) \subset Im(G)$;

ii). $\exists c \succ 0 \; \|F^*z\|_{Z'} \leq c \, \|G^*z\|_{Y'}$; pour tout $z \in Z'$.

Théorème 3.1.3 *Soient X, Y, Z trois espaces de Hilbert. Soient $F \in \mathcal{L}(X, Z)$ et $G \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On a*

$$\operatorname{Im}(F) \subset \operatorname{Im}(G) \Leftrightarrow \exists c \succ 0 \, \|F^* z\|_{Z'} \leq c \, \|G^* z\|_{Y'}, \forall z \in Z'.$$

où $\operatorname{Im}(F)$ *et* $\operatorname{Im}(G)$ *désignent les images de F et G.*

3.2 Contrôlabilité en dimension infinie

Dans cette partie on s'intéresse à regarder la notion de la contrôlabilité en utilisant la théorie de semi-groupe.On va introduire les notations et les espaces de contrôle et d'état, alors on suppose que :

1. H un espace de Hilbert et $|.|$ désigne sa norme associée au produit scalaire$(.,.)$.
2. $(U, (.,.))$ un espace de Hilbert.
3. $L^2([a, b]; U)$ un espace de Hilbert et on note par $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2([a,b];U)} = \int_a^b (u(s), v(s))_U \, ds; u(.), v(.) \in L^2([a, b]; U).$$

4. $B \in L(U, H)$ est un opérateur de contrôle.

3.2.1 Problémes d'évolution non homogénes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{G(t)\}_{t>0}$ sur un espace de Hilbert H. On veut résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t) = Ay(t) + f(t) \\ \qquad y(0) = x \end{cases} \quad \forall t \in (0, T). \tag{3.1}$$

où $f : [0, T] \to H$.

Définition 3.2.1 *Soit $f \in L^1((0, T); H)$ et $x \in H$. On appelle solution faible de (3.1) la fonction $y \in C([0, T]; H)$ donnée par*

$$y(t) = G(t)x + \int_0^t G(t - s) f(s) \, ds, \; \forall t \in [0, T] \tag{3.2}$$

On appelle solution classique de (3.1) *toute fonction $y \in C([0, T]; H) \cap C^1((0, T); H)$ telle que $y(t) \in D(A)$ pour tout $t \in (0, T)$ et vérifiant (3.1) dans $[0, T]$.*

Remarque 3.2.2 *Par définition, le probléme (3.1) admet toujours une unique solution faible.*

Théorème 3.2.3 *Soit $f \in L^1(0,T;H)$ et $x \in H$. Le probléme (3.1) admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule (3.2).*

Démonstration. Il suffit de démontrer que toute solution classique est donnée par la formule (3.2). Soit y une solution classique.

Pour tout $t \in (0,T]$, on considére la fonction $z : (0,t) \to H$ définie par

$$z(s) = G(t-s)y(s), s \in (0,t).$$

Puisque $y(s) \in D(A)$, la fonction $\tau \to G(\tau)y(s)$ est dérivable pour tout $\tau > 0$. Par conséquent, z est dérivable sur $(0,t)$ et on a

$$\begin{aligned} z'(s) &= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)y'(s) \\ &= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)Ay(s) + G(t-s)f(s) \\ &= G(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(0,T;H)$, on en déduit que $z' \in L^1((0,t)\,;H)$ et en l'intégrant entre 0 et t, on obtient

$$z(t) = z(0) + \int_0^t G(t-s)\, f(s)\, ds$$

c'est-à-dire

$$y(t) = G(t)\, x + \int_0^t G(t-s)\, f(s)\, ds,$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.2.4 *Si $f \in C^1(0,T;H)$ et $x \in H$. Le probléme (3.1) admet une solution classique.*

Démonstration. La solution faible s'écrit

$$y(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)\, f(s)\, ds, \forall t \in [0,T]$$

On sait déjà par le corollaire.(2.3.10) que la fonction $t \to G(t)x$ est dans $C^1([0,T);H)$ dés que $x \in D(A)$. Posons

$$z(t) = \int_0^t G(t-s) f(s)\, ds, \, \forall t \in [0,T]$$

Comme $f \in C^1([0,T];H)$, il est clair que $z \in C^1([0,T];H)$ et que sa dérivée est donnée par (puisque $\int_0^t G(t-s) f(s)\, ds = \int_0^t G(s) f(t-s)\, ds$)

$$z'(t) = T(t) f(0) + \int_0^t G(t-s) f'(s)\, ds, \, \forall t \in [0,T]$$

D'où la conclusion. ■

3.2.2 L'opérateur de contrôlabilité L_T

Soit H un espace de Hilbert et $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ dans H. Soit U un espace de Hilbert et $B \in \mathcal{L}(U,H)$. Pour chaque $u \in L^2([0,T];U)$, le probléme d'évolution :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t) = Ay + Bu \\ y(0) = x \end{cases} . \tag{3.3}$$

admet pour tout $x \in H$ une unique solution $y \in L^2((0,T);H)$. De plus $y \in C([0,T];H)$ et est donnée par :

$$y(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s) Bu(s)\, ds.$$

On peut donc, comme en dimension finie, introduire l'opérateur

$$L_t : \begin{cases} L^2(0,T;U) \rightarrow H \\ u \rightarrow \int_0^t G(t-s) Bu(s)\, ds. \end{cases}$$

On remarquera que L_t peut aussi être défini comme $L_t u = y(t;0,u)$, c'est-à-dire comme la solution, à l'instant t, du probléme correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (contrôle) Bu.

Proposition 3.2.5 *$L_T \in \mathcal{L}(L^2([0,T];U), H)$ et*

$$\|L_T\| \leq \sqrt{T} \|G\|_{C([0,T],H)} \|B\|_{L(U,H)} .$$

On considère l'ensemble $R_T(a)$ qui représente l'ensemble des états atteignables au temps T à partir de a.

On a :

$$R_T(a) = G(T)a + \operatorname{Im}(L_T). \tag{3.4}$$

On introduit l'opérateur de contrôlabilité :

$$Q_T x = \int_0^T G(r)BB^*G^*(r)xdr, x \in H, T > 0.$$

C'est un opérateur borné pour tout $r \in [0;T]$, donc il existe $c > 0$ tel que

$$|Q_T x| \leq c\,|x|\,, x \in H.$$

Q_T est aussi auto-adjoint et semi-définit positif car :

1. $\forall x; y \in H$

$$\begin{aligned}
(Q_T x, y) &= \left(\int_0^T G(r)BB^*G^*(r)xdr, y\right) \\
&= \int_0^T (G(r)BB^*G^*(r)x, y)\,dr \\
&= \int_0^T (x, G(r)BB^*G^*(r)y)\,dr \\
&= \left(x, \int_0^T G(r)BB^*G^*(r)ydr\right) \\
&= (x, Q_T y)
\end{aligned}$$

donc $Q_T^* = Q_T$ c'est-à-dire Q_T est auto-adjoint.

2. $\forall x \in H$

$$\begin{aligned}
(Q_T x, x) &= \left(\int_0^T G(r)BB^*G^*(r)xdr, x\right) \\
&= \int_0^T (G(r)BB^*G^*(r)x, x)\,dr \\
&= \int_0^T (B^*G^*(r)x, B^*G^*(r)x)\,dr \\
&= \int_0^T |B^*G^*(r)x|^2\,dr,
\end{aligned}$$

et comme $\int_0^T |B^*G^*(r)x|^2\,dr \geq 0$ alors, Q_T est semi-définie positif.

Proposition 3.2.6

$$\operatorname{Im}(L_T) = \operatorname{Im}\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right).$$

Démonstration. Soient $x \in H$ et $u\,(.) \in L^2\,([0,T]\,,U)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\langle u\,(.)\,, L_T^*\,(.)\rangle_{L^2([0,T],U)} &= (L_T u, x)_H = \left(\int_0^T G\,(T-r)\,Bu\,(r)\,dr, x\right) \\
&= \int_0^T (G\,(T-r)\,Bu\,(r)\,, x)\,dr \\
&= \int_0^T (u\,(r)\,, B^*G^*\,(T-r)\,x)_U\,dr,
\end{aligned}$$

et par définition du produit scalaire de l'espace $L^2([0,T],U)$ on trouve que

$$L_T^*x(r) = B^*G^*(T-r)x; \text{pour } r \in [0;T].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|L_T^*x\|^2 &= \langle L_T^*x(.), L_T^*x(.)\rangle = \int_0^T (L_T^*x(r), L_T^*x(r))\, dr \\
&= \int_0^T (B^*G^*(T-r)x, B^*G^*(T-r)x)\, dr \\
&= \int_0^T |B^*G^*(T-r)x|^2\, dr
\end{aligned}$$

et par le chengement de variable ($\tau = T - r$) et comme Q_T est auto-adjoint positif d'aprés la proposition (3.3.1)on peut définir $Q_T^{\frac{1}{2}}$ on trouve que

$$\|L_T^*x\|^2 = \int_0^T |B^*G^*(\tau)x|^2\, d\tau = (Q_Tx, x) = \left(Q_T^{\frac{1}{2}}Q_T^{\frac{1}{2}}x, x\right)$$

et comme $Q_T^{\frac{1}{2}}$ est auto-adjoint alors

$$\left(Q_T^{\frac{1}{2}}Q_T^{\frac{1}{2}}x, x\right) = \left(Q_T^{\frac{1}{2}}x, Q_T^{\frac{1}{2}}x\right) = \left|Q_T^{\frac{1}{2}}x\right|^2, \forall x \in H$$

donc

$$\|L_T^*x\|^2 = \left|Q_T^{\frac{1}{2}}x\right|^2, \forall x \in H$$

i.e

$$\|L_T^*x\| = \left|Q_T^{\frac{1}{2}}x\right|, \forall x \in H$$

Donc d'aprés le théorème (3.1.2) on obtient

$$\operatorname{Im}(L_T) = \operatorname{Im}\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right).$$

■

3.2.3 Type de Contrôlabilité

Contrôlabilité exacte

Définition et caractérisation

Définition 3.2.7 *On dira que le systéme (3.3) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $a, b \in H$ il existe $u \in L^2([0,T];U)$ tel que*

$$y\,(T; a, u) = b,$$

ou, de maniére équivalente, si un état arbitraire $b \in H$ peut être atteint au temps T, à partir de n'importe quel état $a \in H$.

De façon équivalente, le systéme (3.1) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $a \in H$

$$R_T(a) = H.$$

Théorème 3.2.8 *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Le systéme (3.3) est exactement contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in H$*
$$\int_0^T |B^* G^*(t)x|^2\, dt \geq c\,|x|^2\,.$$
3. $\operatorname{Im}\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right) = H.$
4. $x \to \left|\sqrt{Q_T}x\right|$ *définit sur H une norme équivalente à la norme de H.*

Démonstration. 1.$\Leftrightarrow$ 2. Si le système est contrôlable à partir de n'importe quel $a \in H$, il est contrôlable à partir de $a = 0$. Mais la contrôlabilité à partir de $a = 0$ revient à

$$\forall b \in H,\ \exists u \in L^2\left([0,T], U\right) : b = L_T u \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(L_T\right) = H$$

On démontre cette équivalence en appliquant le Théorème(3.1.3) aux opérateurs

$$\begin{aligned} G &= L_T \in \mathcal{L}(L^2([0,T];U), H) \\ F &= Id \in \mathcal{L}\left(H\right). \end{aligned}$$

1.$\Leftrightarrow$ 3. Résulte de $\operatorname{Im}(L_T) = \operatorname{Im}\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right)$.

2.$\Leftrightarrow$ 4. Comme Q_T est un opérateur borné sur H, sa racine est aussi un opérateur borné sur H et donc $\left|\sqrt{Q_T}\right|$ définit sur H une norme équivalente à la norme de H si est seulement si il existe $c > 0$, tel que

$$c\,|x|^2 \leq \left|\sqrt{Q_T}x\right|^2, \forall x \in H.$$

Or, on a vu que $\left|\sqrt{Q_T}x\right|^2 = \|L_T^* x\|^2$. D'où l'équivalence. ■

Optimalité du contrôle exact

Revenons au cadre général d'un systéme

$$\begin{cases} y_t = Ay + Bu, \\ y(0) = x. \end{cases}$$

pose dans un espace de Hilbert $H.(A, D(A))$ est générateur d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, B est un opérateur borné d'un espace de hilbert U dans H et $u \in L^2((0,T);U)$.

Théorème 3.2.9 *Si la paire (A, B) est exactement contrôlable au temps $T > 0$, l'application P_T qui à $(a, b) \in H \times H$ associe*

$$\begin{aligned} P_T(a,b) &= -B^*G^*(T-.)Q_T^{-1}(G(T)a-b) \\ &= -L_T^*Q_T^{-1}(G(T)a-b), \end{aligned}$$

vérifie

$$y(T; a, P_T(a,b)) = b.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds &= \min\left\{\int_0^T \|u(s)\|_U^2 \, ds; y(T;a;u) = b\right\} \\ &= \left(Q_T^{-1}(G(T)a-b), Q_T^{-1}(G(T)a-b)\right) \\ &= \left|Q_T^{-1}(G(T)a-b)\right|^2. \end{aligned}$$

Contrôlabilité approchée

Définition et caractérisation Avec les mêmes notations que ci-dessus, on définit :

Définition 3.2.10 *La paire (A, B) est Approchement contrôlable au temps $T > 0$ si*

$$\overline{\mathrm{Im}(L_T)} = H.$$

Théorème 3.2.11 (Caractérisation) *Les propopriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) (A, B) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$,

(ii) ker(L_T^*) $=\{0\}$,

(iii) $B^*G^*(t)x = 0$, p.p. $t \in (0,T) \Rightarrow x = 0$,

(iv) $\sqrt{(Q_T x, x)}$est une norme sur H.

Contrôlabilité aux trajectoires

Définition et caractérisation

Définition 3.2.12 *Soit b une "trajectoire" au temps $T > 0$: il existe $c \in H, v \in L^2((0,T);U)$ tels que*

$$y(T,c,v) = b = G(T)c + L_T v.$$

Le systéme est dit contrôlable au temps $T > 0$ aux trajectoires si pour tout $a, c \in H, v \in L^2((0,T);U)$, il existe $u \in L^2((0,T);U)$ tel que

$$G(T)a + L_T u = G(T)c + L_T v.$$

Contrôlabilité à zéro

Définition et caractérisation

Définition 3.2.13 *(A,B) est dite contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si tout état $a \in H$ peut être transféré à 0 au temps T :*

$$\forall a \in H, \exists u \in L^2\left((0,T);U\right); G\left(T\right)a + L_T u = 0.$$

Remarque 3.2.14 *La contrôlabilité exacte revient à pouvoir résoudre en u, $G(T)a + L_T u = b$. Si $G(.)$ est un groupe, alors*

$$\begin{aligned} G(T)a + L_T u &= b \Leftrightarrow G(T)a + L_T u = G(T)G(-T)b \\ &\Leftrightarrow G(T)\left(a - G(-T)b\right) + L_T u = 0 \end{aligned}$$

Et donc la contrôlabilité exacte est, dans ce cas, équivalente à la contrôlabilité à 0.

Proposition 3.2.15 *La contrôlabilité aux trajectoires est équivalente à la contrôlabilité à zéro.*

Démonstration. Cela vient de l'équivalence immédiate :

$$G(T)a + L_T u = b \Leftrightarrow G(T)\left(a - c\right) + L_T\left(u - v\right) = 0.$$

■

Théorème 3.2.16 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) La paire (A, B) *est contrôlable à zéro au temps* $T > 0$,

(ii) Il existe $c_T > 0$, *tel que pour tout* $x \in H$

$$\|G^*(T)x\|^2 \leq c_T \int_0^T \|B^*G^*(t)x\|^2 \, dt$$

(iii) $\operatorname{Im}(G(T)) \subset \operatorname{Im}\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right)$.

3.2.4 Comparaison des différentes notions

Proposition 3.2.17 *On a :*

(i) La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité approchée mais la réciproque est fausse.

(ii) La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité aux trajectoires mais la réciproque est fausse.

(iii) Il n' y a aucune relation entre contrôlabilité approchée et contrôlabilité aux trajectoires.

3.3 Observabilité en dimension infinie

L'observabilité de certains systèmes de dimension infinie est une propriété jouant un rôle essentiel dans des questions d'identification et de contrôle optimal des équations aux dérivées partielles, avec de nombreuses applications aux sciences physiques. La théorie de l'observabilité pour des systèmes de dimension infinie est un domaine de prédilection pour une forte interaction de l'analyse fonctionnelle.

Soit X un espace de Hilbert de dimension infinie et A un opérateur, défini sur un sous-espace dense $D(A) \subset X$, non borné dans X. On suppose que A engendre un C_0-Semigroupe d'opérateurs linéaires et bornés agissant sur X, étant donné un second espace de Hilbert Y et un opérateur d'observaion $C \in L(D(A), Y)$, saisfaisant une conditions d'admissibilié,on s'intéresse aux systèmes de dimension infinie de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = Ay + Bu \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$z = Cy \tag{3.6}$$

Considérons le système(3.5) augmenté de la sortie (3.6)

Il s'agit donc de déterminer y_0, solution de l'équation

$$z(t) = CG(t)y_0 = K(t)y_0, t \in [0;T]$$

On introduire l'opérateur linéaire suivant :

$$K : \begin{cases} X \to L^2([0,T], Y) \\ y \to Ky = CG(.)\,y, \end{cases}.$$

et l'opérateur adjoint K^* de K

Où $K = CG(.)$ est un opérateur linéaire borné. L'opérateur adjoint K^* est donné par :

$$K^* : \begin{cases} L^2([0,T], Y^*) \to X^* \\ z^* \to K^* z^*, \end{cases}.$$

donné par

$$K^* = \int_0^T G^*(t)\, C^* z(t) dt$$

3.3.1 Type d'observabilité

Observabilité exacte

Définition 3.3.1 (exacte observabilité) *Le système (3.5) augmenté de la sortie (3.6) est dit exactement observable sur* $[0;T]$ *si*

$$X^* \subset \operatorname{Im} K^*.$$

Proposition 3.3.2 *Le système (3.5) augmenté de l'équation de sortie (3.6) est exactement observable sur* $[0,T]$ *si et seulement si il existe* $\gamma > 0$, *tel que*

$$\gamma \|y_0\| \leq \|Ky_0\|_{L^2([0;T];Y)}, \forall y_0 \in X.$$

Observabilité faible

Définition 3.3.3 (faible observabilité) *Le système (3.4) augmenté de l'équation de sortie (3.5) est dit faiblement observable sur* $[0,T]$ *si :*

$$Ker(K) = \{0\}$$

Cette nouvelle définition traduit l'injectivié de l'opérateur K, *c'est à dire encore que deux états distincts conduisent à deux mesures distinctes.*

Proposition 3.3.4 *Il y a équivalence entre*

1. *(3.4)-(3.5) est faiblememt observable.*
2. $\overline{ImK^*} = Z^*$.
3. $\overline{ImK^*K} = Z^*$.

3.3.2 Dualité

On considère les deux systèmes suivants :

le système controlé

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ \quad y(0) = y_0, \end{cases} ,0 < t < T \tag{3.7}$$

le systéme observé

$$\begin{cases} \acute{y} = \tilde{A} y(t) \\ y(0) = y_0 \qquad ,0 < t < T \\ z(t) = Cy(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

Définition 3.3.5 *On dit que les deux systèmes (3.7) et (3.8) sont duaux si :*

$$\tilde{A} = A^* \text{ et } B^* = C.$$

Proposition 3.3.6 *Si les systèmes (3.7) et (3.8) sont duaux alors,*

1. le système (3.7) est exactement contrôlable si et seulement si le système (3.8) est exactement observable.

2. Le systeme (3.7) est faiblement controlable si et seulement si le système (3.8) est faiblement observable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité les notions de la contrôlabilité et l'observabilité des systèmes dynamiques en dimension finie et infinie. Pour les systèmes de contrôle en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité et l'observabilité, due à Kalman. Pour les systèmes en dimension infinie on utilisant la théorie de semi-groupe. Ces notions nous ont permis d'étudier certains problèmes réels dans divers domaines.

Bibliographie

[1] R. E. Kalman, Y. C. Ho et K. S. Narendra . *Controllability of linear dynamical systems.Contributions to Differential Equations,* 1 :189 213, 1963.

[2] S.BARNETT,R.G.CAMERON, *Introduction to mathematical conrol Theory*, Second edition calendon press, OXFORD, 1984.

[3] J.Zabczyk, *Mathematical Control Theory* : An Introduction. Birkhäuser, Boston , Basel , Berlin, 1995.

[4] F.Ammar Khodja, A. Benabdallah, *Une introduction à la théorie du contrôle* Univ de France,13453 Marseille Cedex 13, 2005.

[5] M.Tucsnak G Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups.*Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin.2009.

[6] T.BENHAMOUD, *Observation d'un systéme bidimensionnel gouverné par des équations aux dérivées partielles,*2010.