République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'hidi Oum-El-Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de Nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatique

N°d'ordre : M………/2014.

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Théorèmes de point fixe pour les fonctions multivoques et applications

Présenté par : SELMA MERABET

Sous la direction de : ALIOUCHE Abdelkrim

Jury :

- **Président : BOUZIT** Mohamed MCA. Université Oum-El Bouaghi
- **Encadreur : ALIOUCHE** Abdelkrim MCA. Université Oum-El Bouaghi
- **Examinateurs : BRAGHDI** Mabrouk MCB. Université Oum-El Bouaghi

Soutenu le : 03/06/2014

2013/2014

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire, Monsieur **ALIOUCHE Abdelkrim**, M.C.A. à l'université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi pour tout le support qu'elle m'a apporté tout au long de la conception et la rédaction de ce mémoire. Il a su me diriger d'une façon exemplaire. Sans ses idées et son expertise, la réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible.

Je remercie profondément Monsieur **BOUZIT Mohamed**, M.C.A. à l'université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi, pour avoir accepté de présider mon jury.

Mes grands remerciements sont adressés aussi à messieurs : **BRAGHDI Mabrouk**, M. C. B à l'université Larbi Ben M'Hidi, M.A.A. à l'université Larbi Ben M'Hidi d'être membres de jury et ayant un grand honneur de présenter ma mémoire devant eux.

Je tiens aussi à remercier mes amis et mes collègues et grands remerciements à tous les membres de ma famille.

Introduction

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe x_0 tel que $f(x_0) = x_0$. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématique, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielle. Le théorème de point fixe de **Banach** ou le principe de contraction de **Banach** qui a été énoncé par **Banach** en **1922,** donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

Ce rapport est une tentative de donner un présentation systématique des résultats et des méthodes qui concernent la théorème de point fixe d'une application multivoque et certaines de ses applications dans le choix des méthodes topologique en théorie du point fixe d'une application multivoque et ces applications principalement pour inclusion différentielle.

Une fonction multivaluée (aussi appelée fonction multiforme, fonction multivoque ou simplement multifonction) est une relation qui à un élément d'un ensemble associe un ou plusieurs éléments d'un second ensemble. On peut donc voir une multifonction comme une fonction classique prenant ses valeurs dans l'ensemble des parties du second ensemble, même si ce n'est pas nécessairement le point de vue le plus fructueux. Par contraste, si l'image de chaque point est un singleton, on dit que l'application est univoque.

Un exemple simple de fonction multivoque est la fonction réciproque d'une application non injective : à tout point dans son image on fait correspondre l'image réciproque formée des antécédents de ce point. Les fonctions multivaluées apparaissent en analyse complexe où l'on peut en considérer des déterminations, c'est-à-dire des restrictions sur ces relations qui en font des fonctions et qui permettent de calculer certaines intégrales réelles par le biais du théorème des résidus comme ce sera illustré plus bas ; l'utilisation en est cependant malaisée et a été remplacée par la considération plus abstraite de fonctions (univaluées) sur des surfaces de Riemann.

L'objet de l'Analyse multivoque est l'étude des propriétés des applications multivoques, le besoin de l'Analyse multivoque s'est révélé pour résoudre des problèmes émergents d'autres domaines : la théorie du contrôle, l'économie et la gestion, la biologie et les sciences des systèmes, l'intelligence artificielle etc. ... Les fonctions multivaluées servent aussi en combinatoire, théorie des graphes, théorie des jeux ....

Le présent travail est composé d'une introduction et de quatre chapitres. Le premier chapitre de ce mémoire contient les éléments indispensables dont on aura besoin pour les chapitres suivants. Nous allons détailler les articles publiés dans [3], [6], [7],[24] et [23] qui généralisent le théorème de point fixe pour les fonctions univoques définies sur un espace métrique complet et à valeur dans lui-même. Dans ce chapitre nous allons rappeler le théorème de **Banach**, et

– les théorèmes de **Ciric** : contraction généralisée et quasi-contraction.

– le théorème de **Caristi**.

–le théorème de **Brouwer.**

Le deuxième chapitre est dédié aux fonctions multivoques. Nous introduirons le théorème du point fixe de **Kakutani** publié en **1941** qui généralise le théorème de **Brouwer**. Ce chapitre concerne la généralisation du théorème de point fixe pour une seule fonction multivoque définie sur un sous-ensemble d'un espace métrique complet muni de la distance de **Hausdorff** H induite par la métrique d, a été généralisé aux contractions multivoques par **Nadler** en **1969**. De plus, en **1998**, **Mizoguchi** et **Takahashi** ont obtenu un version multivoque du théorème de **Caristi,** nous donnons les preuves de ces théorèmes, nous montrons aussi deux théorèmes de point fixe pour une fonction définie sur un sous-ensemble d'un espace métrique et à valeur dans l'espace métrique menu de la distance δ énoncer par **Fisher**.

Le troisième chapitre de ce mémoire est consacré aux théorèmes de point fixe pour deux fonctions multivoques sous certaines conditions pour garantir l'existence d'un point fixe.

Enfin, dans le dernier chapitre on va donner une application au théorème du point fixe de Kakutani dans la théorie des jeux.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, quelques théorèmes de point fixe pour des fonctions univoques définies sur un espace métrique et à valeur dans lui-même seront énoncés. Nous allons énoncés le théorème de point fixe de **Brouwer,** qui est un cas particulier du théorème de **Kakutani .**

1.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom du théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver et possède de nombreuses applications, qui incluent les théorèmes d'existences pour les équations différentielles, les équations intégrales et convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton pour la résolution d'équations non linéaires.

Définition 1.1 *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application. f est dite Lipchitzienne s'il existe un nombre réel $\theta \geq 0$, tel que pour tout $x, y \in X$, on a*

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y)$$

f est une application contractante s'il existe $\theta \in [0, 1[$, tel que pour tout $x, y \in X$ on a

$$d(fx, fy) \leq \theta d(x, y) \tag{1.1.1}$$

Elle est non expansive si $\theta = 1$. Enfin, f est dite contractive si pour tout $x, y \in X$ et $x \neq y$, on a

$$d(fx, fy) < d(x, y)$$

Notons que contraction $\Longrightarrow$contractive $\Longrightarrow$ non expansive $\Longrightarrow$Lipchitzienne, et que toutes ces fonctions sont uniformément continues.

Théorème 1.1 ***(Banach 1922)*** *Soient (X, d) un espace métrique complet (ou bien un espace de Banach si X possède une norme) et $f : X \to X$ une contraction. Alors f admet un point fixe unique dans X, c-à-d $\exists! u \in X$ tel que $fu = u$. En outre ce point peut-être obtenu comme limite de toute suite engendrée par l'itération*

$$x_{n+1} = fx_n \ , \ n \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \text{ élément arbitraire de } X \ . \tag{1.1.2}$$

Démonstration. Voir [3] ■

Corollaire 1.1 *Sous les mêmes hypothèses du théorème de Banach, si u est l'unique point fixe de f, alors*

$$d(u, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, x_1)$$

Cette inégalité donne l'estimation de l'erreur lorsque n croit. Puisque on choisi x_0 arbitrairement, en remplaçant n par zéros dans l'inégalité ci-dessus on peut obtenir une autre estimation de l'erreur suivante

$$d(u, x) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x, fx)$$

Corollaire 1.2 *Si S est un sous-ensemble fermé d'un espace métrique X et $f : S \to S$ une application contractante sur S, alors f possède un point fixe unique dans S.*

Corollaire 1.3 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. Si T^n est une contraction pour un certain entier n, alors T admet un point fixe unique dans X.*

Théorème 1.2 *Soient (X, d) un espace métrique , $T : X \to X$ est un application contractive et $x_0 \in X$ tel que la suite $\{T^n x_0\}$ admet une sous suite convergente vers un points $u \in X$. Alors u est un point fixe pour T.*

Démonstration. voir [3] ■

1.2 Théorème du point fixe de Caristi

Définition 1.2 *Une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement si, pour tout $x \in X$*

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x)$$

ou, de façon équivalente, si l'ensemble $\{x \in X : \ \varphi(x) \leq a\}$ est fermé pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Elle est semi-continue supérieurement si $(-\varphi)$ est semi continue inférieurement.

Théorème 1.3 ***(Caristi 1976) .*** *Soient (X, d) un espace métrique complet (un Banach par exemple) et $T : X \to X$ une application continue. On suppose qu'il existe $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement telle que pour tout $x \in X$ on a*

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \tag{1.2.1}$$

Alors T admet ou moins un point fixe $u \in X$.

Démonstration. Voir [6]

Remarque 1.1 *Encore, le théorème (1.1) est un cas particulier du théorème (1.3) il suffit de prendre*

$$\varphi(x) = \frac{d(x, fx)}{1 - \theta}$$

■

1.3 Théorème du point fixe de Ćirić

1.3.1 Contraction généralisée

Définition 1.3 *On dit que $T : X \to X$ est une contraction généralisée s'il existe des fonctions positives q, s, r et t vérifiant*

$$\sup_{x,y \in X} (q(x, y) + s(x, y) + r(x, y) + 2t(x, y)) \leq 1$$

telles que pour tout $x, y \in X$ on a

$$d(Tx, Ty) \leq q(x, y) d(x, y) + r(x, y) d(x, y) + s(x, y) d(x, y) + t(x, y) [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{1.3.1}$$

Remarque 1.2 *Pour simplicité, on suppose que les fonctions q, r, s et t sont des constantes si T satisfait la condition (1.1.1), alors T est un contraction généralisée, mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

Théorème 1.4 ***(Ćirić 1974)*** *Soit T une contraction généralisée d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. Alors*

(i) T admet un point fixe unique $u \in X$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$ et

(iii) pour tout $x \in X$ on a

$$d\left(T^n x, u\right) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d\left(x, Tx\right) \text{ , pour } \lambda \in [0, 1]$$

Démonstration. Voir [7] [17] ■

Théorème 1.5 *Soient (X, d) une espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfont la condition suivante : pour tout $x, y \in X$, on a :*

$$d\left(Tx, Ty\right) \leq q \max\left\{d\left(x, y\right), d\left(x, Tx\right), d\left(y, Ty\right), \frac{d\left(x, Ty\right) + d\left(y, Tx\right)}{2}\right\} \qquad , 0 < q < 1 \tag{1.3.2}$$

Alors T admet un point fixe unique $u \in X$.

Démonstration. Voir [24] ■

Remarque 1.3 *[19] Il est claire que la la condition (**??**) est équivalente à la condition (1.3.2) .*

1.3.2 Quasi-contradiction

Soient T une application définie sur un espace métrique (X, d) dans lui-même et $A \in X$. On note $\delta(A)$ le diamètre de A définie par

$$\delta(A) = \sup\left\{d\left(a, b\right), \quad a, b \in A\right\}$$

Définition 1.4 *Soient $T : X \to X$, un orbite de T à x_0 est une suite définie par $\{x_n : x_n \in Tx_{n-1}, \quad n =$*

$$\bigcirc(x;n) = \{x,\ Tx,\ ...,\ T^n x\} \quad n = 1, 2, ...$$
$$\bigcirc(x;\infty) = \{x,\ Tx,\ ...,\ T^n x, ...\}$$

Définition 1.5 *Soit T une application d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. T est dite une* ***quasi-contadiction*** *s'il existe un nombre réel $q \in [0, 1[$, tel que pour tout $x, y \in X$, on a*

$$d(Tx, Ty) \leq q \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{1.3.3}$$

Remarque 1.4 *Si T Satisfait la condition (1.3.2) alors T est une quasi-contradiction, mais la réciproque n'est pas vraie en général .*

Remarque 1.5 *Il est claire que ([?]) implique à (1.3.3).*

Lemme 1.1 *Soient T une quasi-contraction sur X, et n un nombre entier positif. Alors pour tout $x \in X$ et tous entiers positifs i, j tels que $i, j \in \{1, 2, ...n\}$ on a*

$$d\left(T^i x, T^j x\right) \leq q\delta\left[\bigcirc(x;n)\right]$$

Démonstration. *Voir [8].* ■

Lemme 1.2 *Si T est une quasi-contraction sur X alors :*

$$\delta\left[\bigcirc(x;\infty)\right] \leq \left(\frac{1}{1-q}\right) d(x, Tx) \quad , \textit{pour tout } x \in X$$

Démonstration. Voir [8] ■

Théorème 1.6 ***(Ćirić 1974)*** *Soit T une quasi-contraction d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même. Alors*

(i) T admet un point fixe unique $u \in X$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u$ et

(iii) $d(T^n x, u) \leq \dfrac{q^n}{1-q} d(x, Tx)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. Voir [24] ■

1.4 Théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 1.7 ***(Brouwer 1910)*** *Soient X une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to X$ une fonction continue. Alors, il existe $x^* \in X$ tel que $f(x^*) = x^*$.*

Démonstration. voir [23] ■

Chapitre 2

Théorème du point fixe pour une seule fonction multivoque

Ce chapitre est construit de la même manière que le chapitre précédent, mais pour des contractions multivoques. D'abord, quelques théorèmes de point fixe pour une fonction multivoque qui définie uniquement sur un sous-ensemble d'un espace métrique et à valeurs dans l'espace métrique entier. De plus, nous introduirons les notions de fonction multivoque, les sous-ensembles, les distances et quelques lemmes pour pouvoir énoncer et démontrer ces théorèmes.

Définition 2.1 *Une fonction multivoque $T : X \to Y$ est une application qui à chaque $x \in X$ associe $T(x)$, $T(x)$ est un ensemble nom vide de Y.*

On note l'application multivoque par $T : X \to 2^Y$.

Définition 2.2 *Un point $x_0 \in X$ est dit un point fixe de T si $x_0 \in Tx_0$.*

Exemple 2.1 *Toute application univoque est une image d'une application multivoque.*

Soit $f : X \to Y$ une application univoque. On définit $T : X \to 2^Y$ par $Tx = \{f(x)\}$.

Définition 2.3 *Soit (X, d) un espace métrique.*

On note $CB(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles fermées et bornées dans X.

$B(X)$ l'ensemble des sous-ensembles bornées dans X.

$C(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compact dans X.

Pour tout $x \in X$ et $A \subseteq X$; on définit la fonction $D : X \times CB(X) \to [0, +\infty[$ par

$$D(x, A) = \inf_{y \in A} d(y, x)$$

qui est la distance entre x et A.

Pour tout A et $B \in B(X)$; on définit la fonction $D : B(X) \times B(X) \to [0, +\infty[$ par

$$D(A, B) = \inf \{d(a, b) ; a \in A, b \in B\}$$

Pour tout A et $B \in B(X)$; on définit la fonction $\delta : B(X) \times B(X) \to [0, +\infty[$ par

$$\delta(A, B) = \sup \{d(a, b) ; a \in A, b \in B\}$$

- Si $A = \{a\}$ alors $\delta(A, B) = \delta(a, B)$
- Si $B = \{b\}$ alors $\delta(A, B) = \delta(A, b)$

Pour tout $A, B, C \in B(X)$; on aux les propriétés suivants

$$\begin{aligned} \delta(A, B) &= \delta(B, A) \geq 0 \\ \delta(A, B) &\leq \delta(A, C) + \delta(C, B) \\ \delta(A, B) &= 0 \Rightarrow A = B = \{0\} \\ \delta(A, A) &= \delta(A) = diam A \end{aligned}$$

Pour deux partie A et $B \in CB(X)$ on définit la fonction : $H : CB(X) \times CB(X) \to [0, +\infty[$ par

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} D(x, B), \sup_{y \in B} D(y, A) \right\}$$

H est appelée la distance de Hausdorff induite par la métrique d.

Remarque 2.1 $(CB(X), H)$ *est un espace métrique complet si* (X, d) *est un espace métrique complet.*

Définition 2.4 *Soit* (X, d) *un espace métrique . On dit que* $T : X \to CB(X)$ *est une contraction, s'il existe* $0 \leq \lambda < 1$ *telle que*

$$H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{2.0.1}$$

pour tout $x, y \in X$ *.*

Lemme 2.1 *[1] [22] Soit* (X, d) *un espace métrique .*

Soient $A, B \in CB(X)$*. Pour tout* $a \in A$ *et* $b \in B$ *on a* $D(a, b) \leq H(A, B)$ *.*

Lemme 2.2 *[22] [1] Soient* (X, d) *un espace métrique,* $A, B \in CB(X)$ *et* $a \in A$*. Alors* $\forall$ $\varepsilon \succ 0$, $\exists$ $b \in B$ *tel que* $d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon +$ *.*

2.1 Théorème du point fixe de Kakutani

Le théorème du point fixe de **Kakutani** est un théorème de point fixe qui généralise celui de **Brouwer** à des fonctions à valeurs ensemblistes. Il fournit une condition suffisante pour qu'une telle fonction, définie sur un compact convexe d'un espace euclidien, possède un point fixe.

Théorème 2.1 ***(Kakutani 1941)***[15] *Soient X une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et F une application de X dans l'ensemble 2^X des parties de X vérifiant*

(i) pour tout $x \in X$, on a $F(x) \neq \varnothing$,

(ii) l'ensemble $F(x)$ est convexe

(iii) le graphe $\{(x, y) ; y \in F(x)\} \subset X \times X$ est fermé.

Alors, il existe un point $x^* \in X$ tel que $x^* \in F(x^*)$.

Démonstration. *On reprend l'idée de la démonstration du théorème de Brouwer. On suppose que X est un simplexe avec des sommets $v_0, v_1, \ldots, v_n$.*

Formons le $k^{ième}$ subdivision simpliciale de X et définissons $f^{(k)}$ comme suit :

Si $x \in \{v_0, v_1, \ldots v_n\}$, soit $f^{(k)}(x) = y$ où $y \in F(x)$.

Si x est un autre point de la cellule, on définit $f^{(k)}(x)$ par interpolation des valeurs de $f^{(k)}(x)$ aux sommets. En d'autres termes si

$$x = \sum_{j=0}^{n} \theta_j v_j$$

Alors

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j f^k(v_j)$$

On remarque que si un point se trouve sur une face commune des deux cellules, les définition sont consistantes.

Comme $f^{(k)} : X \to X$ est continue, d'après théorème de Brouwer, chaque $f^{(k)}$ admet un point fixe qu'on appelle $x^{(k)}$. Maintenant, on suppose que $x^{(k)}$ est dans la cellule de la $k^{ième}$ subdivision $\langle v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)} \rangle$ et soient $\theta_0^{(k)}, \theta_1^{(k)}, \ldots, \theta_n^{(k)}$ les coordonnées barycentres par rapport à la cellule. Alors le fait que $x^{(k)} = f^{(k)}\left(x^{(k)}\right)$ implique que

$$x^{(k)} = f^{(k)}\left(x^{(k)}\right) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j^{(k)} y_j^{(k)}, \text{ où } y_j^{(k)} \in F\left(x^{(k)}\right), \; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Puisque X est compact (fermée et bornée) alors les suites $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{\theta_j^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ et $\left\{y_j^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $j=0,1,\ldots,n$ convergent vers des points x^*,θ_j , et y_j , $j=0,1,\ldots,n$ respectivement.

Comme dans le preuve du théorème de Brouwer, puisque le diamètre des cellules des subdivisions successives tend vers zéro lorsque $k\to\infty$, alors tous les sommets $v_j^{(k)}\to x^*$ comme $k\to\infty$. D'où

$$x^{(k)}=f^{(k)}\left(x^{(k)}\right)=\sum_{j=0}^{n}\theta_j^{(k)}y_j^{(k)},$$

implique que $x^*=\sum_{j=0}^{n}\theta_j y_j$.

Finalement, puisque la fonction multivoque F est à graphe fermé alors $y_j\in F(x^*)$, $j=0,1,\ldots,n$. Comme F prend des valeurs convexes, $F(x^*)$ est convexe et ainsi x^*,étant une combinaison convexe des $y_j\in F(x^*)$, c-à-d $x^*\in F(x^*)$. Donc x^*est le point fixe cherché. ■

Exemple 2.2 *[16] L'application F définie par $F(x)=[1-x\backslash 2,1-x\backslash 4]$ vérifie les hypothèses du théorème, donc doit posséder des points fixes. On peut le vérifier par résolution directe : $1-x/2\leq x\leq 1-x/4$ équivaut à $2/3\leq x\leq 4/5$.*

Exemple 2.3 *[16]* ***(Contre-exemple sur le cas non convexe)***

L'hypothèse que les $F(x)$ sont convexes est essentielle dans ce théorème : soit F définie par

$$F(x)=\left\{\begin{array}{cc}\{3/4\} & si\ 0\leq x\leq 1/2\\ \{\{3/4\},\{1/4\}\} & si\ x=1/2\\ \{1/4\} & si\ \ 1/2\leq x\leq 1.\end{array}\right\}$$

Cette fonction n'a aucun point fixe. Elle vérifie toutes les hypothèses du théorème, sauf la convexité de $F(1/2)$.

Exemple 2.4 *[16]**(Contre-exemple sur le cas non fermé)***

L'application F définie par $F(x)=[x/3,2x/3]$ si $x>0$ et $F(0)=]0,1]$ n'a pas de point fixe. Elle est hémi continue supérieurement (si pour tout ouvert W de Y, l'ensemble des points x pour lesquels $F(x)$ est inclus dans W est un ouvert de X.) et à valeurs convexes non vides mais son graphe n'est pas fermé car $F(0)$ ne l'est pas.

2.2 Théorème du point fixe de Nadler

Le théorème de **Nadler** est une généralisation du principe de contraction de **Banach** pour les contractions multivoques.

Théorème 2.2 *[22] **(Nadler 1969) :** Soit (X, d) un espace métrique complet .*

Si $T : X \to CB(X)$ une application multivoque contractante, alors T a un point fixe.

.

Démonstration. Soient $0 < \alpha < 1$ la constante de lipchitz de T et $x_0 \in X$. On choisit $x_1 \in Tx_0$.

Puisque $Tx_0, Tx_1 \in CB(X)$ et $x_1 \in Tx_0$, d'après le lemme (2.2), il existe un point $x_2 \in Tx_1$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_{0,}Tx_1) + \alpha$$

Maintenant, lorsque $T(x_1), T(x_2) \in CB(X)$, il existe un point $x_3 \in Tx_2$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + \alpha^2.$$

On continuant par cette manière, on obtient une suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de points de X telle que $x_{i+1} \in Tx_i$ et

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq H(Tx_{i-1,}Tx_i) + \alpha^i \qquad \text{pour tout } i \geq 1.$$

On remarque que[2]

$$\begin{aligned}
d(x_i, x_{i+1}) &\leq H(Tx_{i-1}, Tx_i) + \alpha^i \\
&\leq \alpha d(x_{i-1}, x_i) + \alpha^i \\
&\leq \alpha\left[H(Tx_{i-2}, Tx_{i-1}) + \alpha^{i-1}\right] + \alpha^i \\
&\leq \alpha^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) + 2\alpha^i \\
&\leq \cdots \\
&\leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i.\alpha^i
\end{aligned}$$

pour tout $i \geq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
d(x_i, x_{i+j}) &\leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \cdots + d(x_{i+j\acute{e}\&-1}, x_{i+j}) \\
&\leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i \cdot \alpha^i + \alpha^{i+1} d(x_0, x_1) + (i+1) \cdot \alpha^{i+1} + \cdots + \alpha^{i+j-1} d(x_0, x_1) + (i+j-1) \\
&= \sum_{n=i}^{i+j-1} d(x_0, x_1) + \sum_{n=i}^{i+j-1} n \cdot \alpha^n \qquad , \text{pour tout } i, j \geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\{x_i\}$ est une suite de Cauchy et comme (X, d) complet alors $\{x_i\}$ est convergente vers un point $u \in X$.

D'où, la suite $\{Tx_i\}$ converge vers Tu , et comme $x_{i+1} \in Tx_i$ pour tout i , alors $u \in Tu$. ■

2.2.1 Généralisation du théorème de Nadler

Théorème 2.3 *[9] Soient (X, d) un espace métrique et T une application multivoque de X dans $CB(X)$ satisfaisant la condition suivante :*

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta [D(x, Tx) + D(y, Ty)] + \gamma [D(x, Ty) + D(y, Ty)]$$

pour tout $x, y \in X$, où α , $\beta, \gamma \geq 0$ et $\alpha + \beta + 2\gamma < 1$. Alors T a un point fixe.

Démonstration. Soit x_0 arbitraire dans X, $x_1 \in Tx_0$. On définit une suite $\{x_n\}$ dans X par $x_{n+1} \in Tx_n$. Posons $r = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - (\beta - \gamma)}$.

Si $r = 0$, la preuve est claire.

Maintenant, Supposons $r > 0$. D'après le lemme (2.2) on a

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists x_2 \in Tx_1 \ : \ d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + r \\ \exists x_3 \in Tx_2 \ : \ d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + r^2 \\ \cdots \\ \exists x_{n+1} \in Tx_n \ : \ d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + r^n \end{array} \right\}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1,}Tx_n) + r^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta [D(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + D(x_n, Tx_n)] + \gamma [D(x_{n-1}, Tx_n) + D(x_n, Tx_{n-1})] \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] + \gamma [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] + r^n \end{aligned}$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha + \beta + \gamma) d(x_{n-1}, x_n) + (\beta + \gamma) d(x_n, x_{n+1}) + r^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - (\beta + \gamma)} d(x_{n-1}, x_n) + \frac{r^n}{1 - (\beta + \gamma)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut conclure que

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq r^n d\left(x_0, x_1\right) + \frac{n\, r^n}{1-(\beta-\gamma)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, puisque $r < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) < \infty$. Par conséquent, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X et d'après la complétude de X, il existe $x^* \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. On va montrer que x^* est un point fixe de T. Nous avons

$$\begin{aligned}
D\left(x^*, Tx^*\right) &\leq D\left(x^*, x_{n+1}\right) + D\left(x_{n+1}, Tx^*\right) \\
&\leq d\left(x^*, x_{n+1}\right) + H\left(Tx_n, Tx^*\right) \\
&\leq d\left(x^*, x_{n+1}\right) + \alpha d\left(x_{n+1}, Tx^*\right) + \beta\left[D(x_n, Tx_n) + D\left(x^*, Tx^*\right)\right] + \gamma\left[D\left(x_n, Tx^*\right) + D\left(x^*,\right.\right.
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$D\left(x^*, Tx^*\right) \leq d\left(x^*, x_{n+1}\right) + \alpha d\left(x_n, x^*\right) + \beta\left[d\left(x_n, x_{n+1}\right) + D\left(x^*, Tx^*\right)\right] + \gamma\left[D\left(x_n, Tx^*\right) + d\left(x_{n+1}, x^*\right)\right]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à limite $n \to \infty$, on obtient

$$D\left(x^*, Tx^*\right) \leq (\beta+\gamma)\ D\left(x^*, Tx^*\right)$$

Comme $\beta + \gamma < 1$, alors $D\left(x^*, Tx^*\right) = 0$ et d'où $x^* \in Tx^*$. ■

Remarque 2.2 *Si $\beta = \gamma = 0$ dans le théorème (2.3), on obtient le théorème de Nadler.*

Corollaire 2.1 *[14]Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application tel que*

$$d\left(Tx, Ty\right) \leq \alpha d\left(x, y\right) + \beta[d\left(x, Tx\right) + d\left(y, Ty\right)] + \gamma[D\left(x, Ty\right) + d\left(y, Tx\right)]$$

pour tout $x, y \in X$, où $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ et $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$. Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.2 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : (X, d) \to (CB\left(X\right), H)$ une application satisfaisant la condition suivante*

$$H\left(Tx, Ty\right) \leq a_1 d\left(x, y\right) + a_2 D\left(x, Tx\right) + a_3 D\left(y, Ty\right) + a_4 D\left(x, Ty\right) + a_5 D\left(y, Tx\right)$$

pour tout $x, y \in X$, où $a_i \geq 0$ pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots 5\}$ et $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$. Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.3 *[26] Soient (X,d) un espace métrique et $T:(X,d)\to(CB(X),H)$ une application vérifiant*

$$H(Tx,Ty)\leq\beta[D(x,Tx)+D(y,Ty)]$$

pour tout $x,y\in X$, où $\beta\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$. Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.4 *Soient (X,d) un espace métrique complet et $T:(X,d)\to(CB(X),H)$ une application vérifiant*

$$H(Tx,Ty)\leq\gamma[D(x,Ty)+D(y,Tx)]$$

pour tout $x,y\in X$, où $\gamma\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$. Alors T admet un point fixe.

Corollaire 2.5 *Soient (X,d) un espace métrique complet et $T:(X,d)\to(CB(X),H)$ une application satisfaisant la condition suivante*

$$H(Tx,Ty)\leq\alpha d(x,y)+\beta[D(x,Tx)+D(y,Ty)]$$

pour tout $x,y\in X$, où $\alpha+2\beta<1$. Alors T admet un point fixe.

2.3 Théorème du point fixe de Mizogochi et Takahashi

Théorème 2.4 ***(Reich 1972)***[13] *Soient (X,d) un espace métrique complet et $T:X\to C(X)$ une application multivoque. Supposons qu'il existe une fonction $\phi:[0,\infty[\to[0,1[$ telle que*

$$\lim_{s\to t^{+}}\sup\phi(s)<1,\ \text{pour tout } t>0$$

et pour tout $x,y\in X$, $x\neq y$

$$H(Tx,Ty)\leq\phi(d(x,y))\,d(x,y)$$

Alors T admet un point fixe.

En **1974**, **Reich a** posé la question si le théorème ci-dessus est également vrai pour l'application $T:X\to CB(X)$. La réponse est affirmative sous l'hypothèse $\lim_{s\to t^{+}}\sup\phi(s)<1$, pour chaque $t\in[0,\infty[$ et elle est donnée par **Mizogochi et Takahashi** en **1989.** Ils ont prouvé le théorème suivant qui est plus général que le théorème de **Nadler.**

Théorème 2.5 *(Mizogochi et Takahashi 1989)[27] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to CB(X)$ une application multivoque. Supposons*

$$H(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)) d(x, y) \tag{2.3.1}$$

pour tout $x, y \in X$, où $\phi : [0, \infty[\to [0, 1[$ satisfaisant

$$\limsup_{s \to t^+} \phi(s) < 1, \text{ pour tout } t \in [0, \infty[.$$

Alors, il existe $z \in X$ tel que $z \in Tz$.

Démonstration. On définit la fonction $\psi : [0, \infty[\to [0, 1[$ par $\psi(t) = \dfrac{1 + \phi(t)}{2}$ pour $t \in [0, \infty[$. Alors vérifie les conditions suivantes :

1) $\lim_{s \to t+0} \sup \psi(s) < 1$ pour tout $t \in [0, \infty[$.

2) Pour $x, y \in X$ et $u \in Tx$, il existe un élément $v \in Ty$ tel que $d(u, v) \leq \psi(d(x, y))d(x, y)$.

Supposons $u = y$, on obtient ce qui suit :

3) Pour $x \in X$ et $y \in Tx$, il existe un élément $v \in Ty$ tel que $d(y, v) \leq \psi(d(x, y))d(x, y)$.

Ainsi, nous pouvons définir une suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant

$$x_{n+1} \in Tx_n \quad \text{et} \quad d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) d(x_n, x_{n+1})$$

Pour $n \in \mathbb{N}$. Parce que $\psi(t) < 1$ pour tout $t \in [0, \infty[$, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est une suite non croissante dans $\mathbb{R}$. D'où $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ converge vers un certain nombre réel non négatif τ. Puisque $\lim_{s \to \tau+0} \sup \psi(s) < 1$ et $\psi(\tau) < 1$, il existe $r \in [0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\psi(s) \leq r$ pour tout $s \in [\tau, \tau + \varepsilon]$. Nous pouvons prendre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\tau \leq d(x_n, x_{n+1}) \leq \tau + \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Alors puisque

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq r d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{N} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_N, x_{N+1}) < \infty$$

et danc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Comme (X,d) est complet, $\{x_n\}$ converge vers une point $z\in X$. Comme

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &= \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},Tz) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n,Tz) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \psi(d(x_n,z))\,d(x_n,z) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_n,z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque Tz est un fermée, on a $z\in Tz$. ■

Remarque 2.3 *Les théorèmes (2.2) et (2.5) ne sant pas équivalente, de la preuve ci-dessus, nous povons penser que les deux sont trés proche.*

2.4 Théorème du point fixe de Caristi multivoque

Il existe une généralisation du théorème de Caristi aux fonctions multivoques.

Théorème 2.6 *[8] Soient $\varphi : X \to]-\infty,+\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement et $T : X \to X$ une fonction multivoque tells que pour tout $x\in X$ il existe $y\in Tx$ tel que*

$$d(x,y)\leq \varphi(x)-\varphi(y)$$

Alors T a un point fixe.

Démonstration. Pour chaque $x\in X$ posons $f(x)=y$ où y est un élément de X tel que $y\in Tx$ et $d(x,y)\leq\varphi(x)-\varphi(y)$. Alors, f est une fonction de X dans X satisfaisant :

$$d(x,f(x))\leq\varphi(x)-\varphi(f(x))$$

pour tout $x\in X$.

Puisque φ est une fonction propre, il existe $u\in X$ tel que $\varphi(u)<+\infty$. Posons : $X'=\{x\in X\ :\ \varphi(x)\leq\varphi(u)-d(u,x)\}$

X' n'est pas vide puisque $u\in X'$. De plus, par la semi-continuité inférieure de φ, X' est fermé et donc un espace métrique complet

Remarquons que la fonction φ restreinte au domaine X'est a valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.

Montrons maintenant que X' est invariant sous f. Pour tout $x \in X'$, nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(f(x)) &\leq \varphi(x) - d(x, f(x)) \\
&\leq \varphi(u) - (d(u, x) + d(x, f(x))) \\
&\leq \varphi(u) - d(u, f(x))
\end{aligned}$$

Donc $f(x) \in X'$ pour tout $x \in X'$.

Le théorème de Caristi 1 nous permet de conclure que f a un point fixe $z \in X$. Donc, $z = f(z) \in Tz$. ■

Voici une version locale du théorème de Caristi multivoque obtenue par Maciejewsk en 2007. Définiuant théorème de point fixe pour une contraction multivoque non-définie sur tout l'espace métrique.

Théorème 2.7 ***(Maciejewski 2007)[8]*** *Soient $\varphi : X \to [0, +\infty[$ une fonction semi-continue inférieurement et $T : B(u, r) \to X$ une fonction multivoque telle que pour tout $x \in B(u, r)$ il existe $y \in Tx$ tel que*

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

Si $\varphi(u) \leq r$, alors T a un point fixe .

Démonstration. Définissions une fonction semi-continue inférieurement $\psi : X \to [0, \infty[$ par $\psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x) & \text{si } \varphi(x) + d(x, u) \leq \varphi(u) \\ \infty & \text{si non} \end{array} \right\}$

et une fonction multivoque $S : X \to X$ par $S(x) = \left\{ \begin{array}{c} T(x) \text{ si } \psi(x) < \infty \\ \{u\} \text{ si } \psi(x) = \infty \end{array} \right\}$.

Cette fonction est bien définie car si

$$\psi(x) < \infty, \quad d(x, u) \leq \varphi(u) < r$$

De plus, si $y \in Tx$ tel que

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

Alors

$$\varphi(y) + d(y,u) \leq \varphi(u)$$

Donc

$$d(x,y) \leq \psi(x) - \psi(y).$$

Le théorème de Caristi garantit l'existence d'un point fixe de S donc d'un point fixe de T. ■

2.5 Théorème du point fixe de Fisher 1

Théorème 2.8 *[13] [25] Soient X un espace métrique complet et $F : X \to B(X)$ satisfaisant l'inégalité suivante*

$$\delta(Fx,Fy) \leq k \max\left\{ d(x,y), \delta(x,Fx), \delta(y,Fy) \frac{1}{2}\left[D(x,Fy) + D(y,Fx)\right] \right\} \tag{2.5.1}$$

pour tout $x,y \in X$, où $0 \leq k < 1$. Alors F admet un unique point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ arbitraire. On définit la suite $\{x_n\}$ par $x_{n+1} \in Fx_n$.

En utilisant (2.5.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\delta(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \delta(Fx_n, Fx_{n+1}) \\
&\leq k \max\left\{ d(x_n,x_{n+1}), \delta(x_n,Fx_n), \delta(x_{n+1},Fx_{n+1}), \frac{1}{2}\left[D(x_n,Fx_{n+1}) + D(x_{n+1},Fx_n)\right] \right\} \\
&\leq k \max\left\{ d(x_n,x_{n+1}), \delta(x_{n+1},x_{n+2}), \frac{1}{2}\delta(x_n,x_{n+2}) \right\}
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Si le maximum du côté droit de (2.5.2) est $d(x_{n+1},x_{n+2})$, alors on obtient une contradiction

$$\delta(x_{n+1},x_{n+2}) \leq k\delta(x_{n+1},x_{n+2})$$

Si le maximum du côté droit de (2.5.2) est $d(x_n,x_{n+1})$, alors on trouve

$$\delta(x_{n+1},x_{n+2}) \leq k\delta(x_n,x_{n+1}) \tag{2.5.3}$$

Si le maximum du côté droit de (2.5.2) est $\frac{1}{2}\,d(x_n,x_{n+2})$, alors en appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve (2.5.3)

De la même façon on obtient

$$\delta(x_n,x_{n+1}) \leq k\delta(x_{n-1},x_n)$$

Par récurrence on a

$$\begin{aligned} \delta(x_{n+1}, x_n) &\leq \delta(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^n \delta(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Pour tout $m > n$

$$\begin{aligned} \delta(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \delta(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} \delta(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Puisque (X, d) est complet, elle est convergente vers une limite $z \in X$. En utilisant (2.5.1)

$$\delta(x_{n+1}, Fz) \leq k \max\left\{ d(x_n, z), \delta(x_n, x_{n+1}), \delta(z, Fz), \frac{1}{2}[D(x_n, Fz) + D(z, x_{n+1})] \right\} \tag{2.5.4}$$

Par passage à limite dans (2.5.4), on obtient

$$\delta(z, Fz) \leq k \max\left\{ 0, 0, \delta(z, Fz), \frac{1}{2}\delta(z, Fz) \right\}$$

ce qui implique $Fz = \{z\}$.

Pour prouver l'unicité, on suppose que w un autre point fixe de F tel que $Fw = \{w\}$, d'après (2.5.1)

$$\begin{aligned} \delta(z, w) &\leq \delta(Fz, Fw) \\ &\leq k \max\{d(z, w), 0, \delta(z, w), \ldots\} \end{aligned}$$

Ce qui implique que $z = w$. ■

2.6 Théorème du point fixe de Fisher 2

Théorème 2.9 *[10] [18] Soient X un espace métrique complet et F une application de $(X, d) \to B(X)$ satisfaisant l'inégalité suivante*

$$\delta(Fx, Fy) \leq c \max\{d(x, y), \delta(x, Fx), \delta(y, Fy), \delta(x, Fy), \delta(y, Fx)\} \tag{2.6.1}$$

pour tout $x, y \in X$, où $0 \leq c < 1$.

Si F est aussi une application de $B(X)$ dans lui-même, telle que pour A un sous-ensemble bornée de $B(X)$, on définit $FA = \cup_{a \in A} Fa \in B(X)$.

Alors F admet un point fixe unique $z \in X$, c-à-d $Fz = \{z\}$.

Démonstration. Il résulte de l'inégalité 2.6.1 que si A et B sont deux sous-ensembles de $B(X)$, alors

$$\delta(Fa, Fb) \leq c \max\{d(a,b), \delta(a, Fa), \delta(b, Fb), \delta(b, Fa), \delta(a, Fb)\}$$

pour tout $a \in A$ et $b \in B$, et ainsi de suite en prenant le supremum sur $a \in A$ et $b \in B$ du deux côtés de cette inégalité nous avons

$$\delta(FA, FB) \leq c \max\{\delta(A,B), \delta(A, FA), \delta(B, FB), \delta(A, FB), \delta(B, FA)\} \tag{2.6.2}$$

pour tout A et B dans $B(X)$, les deux côtés existent étant finies puisque nous supposons que F est une application de $B(X)$ dans lui-même .

Maintenant soit $x \in X$ arbitraire. On définit l'ensemble $F^n x$ par

$$F^n x = F\left(F^{n-1}x\right)$$

pour $n = 2, 3, \ldots$Supposons que la suite $\{\delta(F^n x, Fn) = 1, 2, \ldots\}$ n'est pas bornée.

Alors il existe un certain $n > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \delta(F^n, Fx) &> \frac{c}{1-c}\delta(x, Fx) \\ &\geq \max\{\delta(F^r x, Fx), r = 1, 2, \ldots, n-1\} \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

On remarque que $n \succ 1$, car si $n = 1$ nous pouvons trouver

$$\begin{aligned} (1-c)\,\delta(Fx, Fx) &\succ c\delta(x, Fx) \\ &\geq c[\delta(x, Fx) - \delta(Fx, Fx)] \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\delta(Fx, Fx) > c\delta(x, Fx)$ d'où, l'inégalité (2.6.1) implique que $\delta(Fx, Fx) \leq c\delta(x, Fx)$.

Il s'ensuit à partir de l'inégalité (2.6.3) que

$$\begin{aligned} (1-c)\,\delta(F^n x, Fx) &> c\delta(x, Fx) \\ &\geq c[\delta(x, F^r x) - \delta(F^r x, Fx)] \\ &\geq c[\delta(x, F^r x) - \delta(F^n x, Fx)] \end{aligned}$$

Pour $r = 1, 2, \ldots n$ et ainsi

$$\delta(F^n x, Fx) > c \max\{\delta(x, F^r x), r = 1, 2, \ldots n\} \tag{2.6.4}$$

Nous allons maintenant prouver que

$$\delta\left(F^n x, Fx\right) > c \max\left\{\delta\left(F^r x, F^s x\right), r, s = 0, 1, 2, \ldots n\right\} \tag{2.6.5}$$

D'où $F^0 x = x$ et donc

$$\delta(F^0 x, F^0 x) = d\left(x, x\right) = 0$$

Sinon

$$\begin{aligned}\delta\left(F^n x, Fx\right) &\leq c \max\left\{\delta\left(F^r x, F^s x\right), r; s = 0, 1, 2, \ldots, n\right\}\\ &\leq c \max\left\{\delta\left(F^r x, F^s x\right), r; s = 1, 2, \ldots, n\right\}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2.6.4). Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité (2.6.2) pour indéfiniment à ces termes, car chaque fois qui un terme de la forme $\delta\left(x, F^r x\right)$ apparait, il peut être omis à cause de l'inégalité (2.6.4). Cela signifie que

$$\delta\left(F^n x, Fx\right) \leq c^k \max\left\{\delta\left(F^r x, F^s x\right); r, s = 0, 1, 2, \ldots, n\right\} \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots$$

En faisant $k \to \infty$, il suit que $\delta\left(F^n x, Fx\right) = 0$, ce qui donne une contradiction .

L'inégalité (2.6.5) est ainsi prouvé. Cependant, en utilisant l'inégalité (2.6.2), nous avons

$$\begin{aligned}\delta\left(F^n x, Fx\right) &\leq c \max\left\{\delta\left(F^{n-1} x, F^n x\right), \delta\left(x, Fx\right), \delta\left(F^{n-1}, Fx\right), \delta\left(x, F^n x\right), \delta\left(F^{n-1} x, x\right)\right\}\\ &\leq c \max\left\{\delta\left(F^r x, F^s x\right), r, s = 0, 1, 2, \ldots n\right\}\end{aligned}$$

Ce qui est impossible à cause de l'inégalité (2.6.4). Cette contradiction implique que la suite $\left\{\delta\left(F^n x, Fx\right); n = 1, 2, \ldots\right\}$ est vraiment bornée.

Donc, puisque

$$\delta\left(F^r x, F^s x\right) \leq \delta\left(F^r x, Fx\right) + \delta\left(Fx, F^s x\right)$$

il suit que : $M = \sup\left\{\delta\left(F^r x, Fx\right); r, s = 0, 1, 2, \ldots\right\}$ est finie .

Maintenant, pour $\epsilon \succ 0$ arbitraire, on choisit N tel que $c^N M \prec \epsilon$. Il suit que pour $m, n \geq N$, peut être appliquer l'inégalité (2.6.2) N fois au terme $\delta\left(F^m x, F^n x\right)$ et ainsi

$$\delta\left(F^m x, F^n x\right) \leq c^N M \prec \epsilon \tag{2.6.6}$$

Choisissons un point $x_n \in F^n x$ pour $n = 1, 2, \ldots$, nous avons

$$d\left(x_m, x_n\right) \leq \delta\left(F^m x, F^n x\right) \prec \epsilon$$

Pour $m, n \geq N$. La suite $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ est de cauchy dans l'espace métrique complet X , donc elle converge vers une limite z dans X. D'autre part

$$\begin{aligned} \delta(z, F^n x) &\leq d(z, x_m) + \delta(x_m, F^n x) \\ &\leq d(z, x_m) + \delta(F^m x, F^n x) \\ &< d(z, x_m) + \epsilon \end{aligned}$$

pour $n, m \geq N$. En faisant $m \to \infty$ on obtient

$$\delta(z, F^n x) \leq \epsilon \tag{2.6.7}$$

Pour $n \geq N$ et donc

$$\begin{aligned} \delta(F^n x, Fz) &\leq \delta(F^n x, z) + \delta(z, Fz) \qquad (2.6.8) \\ &\leq \delta(z, Fz) + \epsilon \end{aligned}$$

pour $n \geq N$. En utilisant les inégalités (2.6.2),(2.6.6),(2.6.7) et (2.6.8), on trouve pour $n > N$

$$\begin{aligned} \delta(F^n x, Fz) &\leq c \max\left\{\delta\left(F^{n-1}x, F^n x\right), \delta(z, Fz), \delta\left(F^{n-1}x, Fz\right), \delta(z, F^n z), \delta\left(F^{n-1}x, z\right)\right\} \\ &\leq c \max\{\epsilon, \delta(z, Fz), \delta(z, Fz) + \epsilon, \epsilon, \epsilon\} \\ &= c[\delta(z, Fz) + \epsilon] \end{aligned}$$

Puisque $x_n \in F^n x$, nous avons

$$\begin{aligned} \delta(x_n, Fz) &\leq \delta(F^n x, Fz) \\ &\leq c[\delta(z, Fz) + \epsilon] \end{aligned}$$

pour $n > N$ et en faisant $n \to \infty$, on trouve

$$\delta(z, Fz) \leq c\delta(z, Fz)$$

Lorsque ϵ est arbitraire, il suit que $\delta(z, Fz) = 0$ et donc $Fz = \{z\}$.

Maintenant, montrons que z est unique. Supposons que F admet un autre point fixe $w \in X$, tel que $Fw = \{w\}$. Alors, en utilisant l'inégalité (2.6.1) on a

$$\begin{aligned} \delta(Fw, Fw) &\leq c\delta(w, Fw) \\ &\leq c\delta(Fw, Fw) \end{aligned}$$

D'où $\delta(Fw, Fw) = 0$ et donc Fw contient un seul point w. Alors

$$\begin{aligned} d(z,w) &= \delta(Fz, Fw) \\ &\leq c\max\{d(z,w), \delta(z,Fz), \delta(w,Fw), \delta(z,Fw), \delta(w,Fz)\} \\ &= cd(z,w) \end{aligned}$$

Donc on a l'unicité du point fixe. ∎

Corollaire 2.6 *Soit F une application de l'espace métrique complet (X,d) dans $B(X)$ satisfaisant l'inégalité suivante*

$$\delta(Fx, Fy) \leq a_1 d(x,y) + a_2\delta(x,Fx) + a_3\delta(y,Fy) + a_4\delta(x,Fy) + a_5\delta(y,Fx)$$

pour tout $x, y \in X$, où $a_1, \ldots, a_5 \geq 0$ et $a_1 + \cdots + a_5 < 1$. Si F une application de $B(X)$ dans lui-même, alors F admet un unique point fixe $z \in X$ et de plus $Fz = \{z\}$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \delta(Fx, Fy) &\leq a_1 d(x,y) + a_2\delta(x,Fx) + a_3\delta(y,Fy) + a_4\delta(x,Fy) + a_5\delta(y,Fx) \\ &\leq c\max\{d(x,y), \delta(x,Fx), \delta(y,Fy), \delta(x,Fy), \delta(y,Fx)\} \end{aligned}$$

où $c = \max\{a_1, a_{2,} \ldots, a_5\}$. Le résultat est vérifiée d'après le théorème précédent. ∎

Corollaire 2.7 *Soit T une application de (X,d) dans lui-même satisfaisant l'inégalité suivante*

$$d(Tx, Ty) \leq c\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

pour tout $x, y \in X$, où $0 \leq c < 1$. Alors T admet un unique point fixe z.

Démonstration. On définit l'application $F : X \to B(X)$ en mettant $Fx = \{Tx\}$ pour tout $x \in X$ telle que F satisfait l'inégalité (2.6.2) . D'autre part en notant la condition que F est une application de $B(X)$ dans lui-même a été seulement utilisée pour prouver l'inégalité (2.6.3) et parce que nous avons exigé que les ensembles $\{F^n x, n = 1, 2, \ldots\}$ sont bornés. Cette condition n'est pas nécessaire dans ce corollaire puisque $F^n x$ est un ensemble qui toujours contient un seul point.

Dans ce cas, l'inégalité (2-6), peut être utilisée toujours au lieu de l'inégalité (2.6.3) dans toute le preuve de ce corollaire.

Alors, il existe un unique point $z \in X$ avec $Fz = \{z\} = \{Tz\}$. ∎

Chapitre 3

Théorème du point fixe pour deux fonctions multivoques

Dans ce chapitre nous énonçons et prouvons deux théorèmes généraux du point fixe commun pour deux applications satisfaisant une condition.

3.0.1 Théorème I

Théorème 3.1 *[29] Soient (X, d) un espace métrique complet, et F et G deux applications de X dans $B(X)$ satisfaisant la condition suivante :*

$$\delta(Fx, Gy) \leq \alpha \max\{d(x, y), \delta(x, Fx), \delta(y, Gy)\} + (1 - \alpha)[aD(x, Gy) + bD(y, Fx)] \tag{3.0.1}$$

Pour tout $x, y \in X$, où

$$1 \leq \alpha < 1, a + b < 1, \ a \geq 0, \ b \geq 0, \alpha |a - b| < 1 - (a + b) a + b < 1 \tag{3.0.2}$$

Alors, F et G admettent un point fixe unique z dans X , telle que $\{z\} = Fz = Gz$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ arbitraire, nous choisissons les points $x_1, x_2, \ldots \in X$, tels que $x_1 \in Fx_0 = Z_0$, $x_2 \in Gx_1 = Z_1$. En continuant par cette manière, nous définissons un suite $\{x_n\}$ comme suit :

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &\in Fx_{2n} = Z_{2n} && (3.0.3) \\ x_{2n+2} &\in Gx_{2n+1} = Z_{2n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Pour simplifier, on prend $V_n = \delta(Z_n, Z_{n+1})$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

D'après (3.0.1),

$$\begin{aligned}
V_{2n} &= \delta\left(Z_{2n}, Z_{2n+1}\right) = \delta\left(Fx_{2n}, Gx_{2n+1}\right) \\
&\leq \alpha \max\left\{d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right), \delta\left(x_{2n}, Fx_{2n+1}\right), \delta\left(x_{2n+1}, Gx_{2n+1}\right)\right\} + (1-\alpha)\left[aD\left(x_{2n}, Gx_{2n+1}\right) + bD(x_{2n}\right. \\
&\leq \alpha \max\left\{\delta\left(Gx_{2n+1,}Fx_{2n}\right), \delta\left(Fx_{2n}, Gx_{2n+1}\right)\right\} + \left(1-\alpha\left[a\delta\left(Gx_{2n-1}, Gx_{2n+1}\right)\right]\right) \\
&\leq \alpha \max\left\{V_{2n-1,}V_{2n}\right\} + (1-\alpha)\, a\left(V_{2n-1}, V_{2n}\right) \\
&\leq \beta V_{2n-1} \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

où $\quad \beta = \max\left\{\dfrac{\alpha + (1-\alpha)\, a}{1-(1-\alpha)\, a}, \dfrac{a}{1-a}\right\}$

La dernière inégalité ci-dessus suit facilement en considérant les cas

$$V_{2n} \leq V_{2n-1} \ et \ V_{2n-1} \leq V_{2n}.$$

De la même façon $V_{2n+1} \leq \gamma V_{2n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, où $\gamma = \max\left\{\dfrac{\alpha + (1-\alpha)\, b}{1-(1-\alpha)\, b}, \dfrac{b}{1-b}\right\}$

Soit $c = \beta\gamma$. Si $a, b \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, alors $\beta < 1, \gamma < 1$. Donc $0 \leq c < 1$. Si $\max\{a, b\} \geq \dfrac{1}{2}$, alors puisque

$$\frac{\alpha + (1-\alpha)\, x}{1-(1-\alpha)\, x} \leq \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \text{ pour tout } x \in [0, 1[$$

Par l'hypothèse (3.0.2), il est facile de voire que $0 \leq c \prec 1$

Alors on déduit que

$$V_{2n} = \delta\left(Z_{2n}, Z_{2n+1}\right) = \delta\left(Fx_{2n}, Gx_{2n+1}\right) \leq c^n \delta\left(Fx_0, Gx_1\right) = c^n V_0 \tag{3.0.4}$$

et

$$V_{2n+1} = \delta\left(Z_{2n+1}, Z_{2n+2}\right) = \delta\left(Gx_{2n+1}, Fx_{2n+2}\right) \leq c^n \delta\left(Gx_1, Fx_2\right) = c^n V_1 \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.0.5}$$

Posons

$$M = \max\left\{\delta\left(Fx_{0,}Gx_1\right), \delta\left(Gx_1, Fx_2\right)\right\} = \max\left\{V_0, V_1\right\}$$

Alors, si $z_n \in Z_n$ un point arbitraire pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$il suit que

$$\begin{aligned}
d\left(z_{2n+1}, z_{2n+2}\right) &\leq \delta\left(Z_{2n+1}, Z_{2n+2}\right) \leq c^n M \\
d\left(z_{2n+2}, z_{2n+3}\right) &\leq \delta\left(Z_{2n+1}, Z_{2n+2}\right) \leq c^n M
\end{aligned}$$

Soit $\{x_n\}$ est une suite définie par (3.0.3), alors

$$d\left(x_{2m+1}, x_{2n+1}\right) \leq \delta\left(Z_{2m}, Z_{2n}\right) < \epsilon \qquad \text{pour } n, m \geq n_0, \quad n_0 = 1, 2, 3, \cdots$$

Donc $\{x_{2n+1}\}$ est de Cauchy et comme (X,d) est complet $x_{2n+1} \to z \in X$.

Mais $x_{2n} \in Gx_{2n-1} = Z_{2n-1}$ et d'après (3.0.3), nous avons

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq \delta(Z_{2n+1}, Z_{2n}) = V_{2n-1} \to 0$$

Par conséquent : $x_{2n} \to z$. De plus, nous avons pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} \delta(Fx_{2n}, z) &\leq \delta(Fx_{2n}, x_{2n}) + \delta(x_{2n}, z) \\ &\leq \delta(Z_{2n}, Z_{2n-1}) + d(x_{2n}, z) \end{aligned}$$

Donc, $\delta(Fx_{2n}, z) \to 0$. D'une manière analogue, $\delta(Gx_{2n-1}, z) \to 0$.

En utilisant l'inégalité (3.0.1), nous avons pour $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$\begin{aligned} \delta(Fx_{2n}, Gz) &\leq \alpha \max\{d(x_{2n}, z), \delta(x_{2n}, Fx_{2n}), \delta(z, Gz)\} + (1-\alpha)[aD(x_{2n}, Gz) + bD(z, Fx_{2n})] \\ &\leq \alpha \max\{d(x_{2n}, z), \delta(x_{2n}, Fx_{2n}), \delta(z, Gz)\} + (1-\alpha)[a\delta(x_{2n}, Gz) + b\delta(z, Fx_{2n})] \end{aligned}$$

Puisque, $\delta(x_{2n}, Gz) \to \delta(z, Gz)$ quand $x_{2n} \to z$.

On obtient lorsque $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \delta(z, Gz) &\leq \alpha\delta(z, Gz) + (1-\alpha)\delta(z, Gz) \\ &\Rightarrow (1-\alpha)(1-a)\delta(z, Gz) \leq 0 \end{aligned}$$

Alors, $Gz = \{z\}$.

Maintenant, si $Fz \neq Gz$ alors $\delta(Fz, Gz) \neq 0$. D'aprés (3.0.1) on obtient

$$\begin{aligned} \delta(Fz, Gz) &\leq \alpha \max\{d(z, z), \delta(z, Fz), \delta(z, Gz)\} + (1-\alpha)[aD(z, Gz) + bD(z; Fz)] \\ &\leq \alpha\delta(z, Fz), + (1-\alpha) b\delta(z, Fz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(Fz, z) &\leq \alpha\delta(Fz, z) + (1-\alpha) b\delta(Fz, z) \\ &\Rightarrow (1-\alpha)(1-b)\delta(Fz, z) \leq 0 \end{aligned}$$

et d'où $Fz = \{z\}$ ..

Enfin, montrons que z est unique. Supposons que $w \in X$ un autre point fixe tel que $w \neq z$, et $\{w\} = Fw = Gw$

D'après (3.0.1), on obtient

$$\begin{aligned} d(z,w) &\leq \delta(Fz,Gw) \\ &\leq \alpha \max\{d(z,w), \delta(z,Fz), \delta(w,Gw)\} + (1-\alpha)[aD(z,Gw) + bD(w,Fz)] \\ &\leq \alpha d(z,w) + (1-\alpha)[ad(z,w) + bd(z,w)] \\ &\Rightarrow (1-\alpha)[1-(a+b)]\, d(z,w) \leq 0 \end{aligned}$$

Comme $a+b<1$, alors $z=w$. ∎

3.0.2 Théorème II

Théorème 3.2 *[30] Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que*

(1) $\varphi(t^+) < t$ *pour tout* $t>0$.

(2) $\sum \varphi^n(t) < \infty$ *pour tout* $t>0$.

Alors, il existe une fonction strictement croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

(3) $\varphi(t) < \psi(t)$ *pour* $t>0$ *et* $\sum \psi^n(t) < \infty$ *pour* $t>0$.

Théorème 3.3 *[30] Soient (X,d) un espace métrique complet et F,G deux applications de X dans $CB(X)$ telles que, pour tout $x,y \in X$*

$$H(Fx,Gy) \leq \varphi\left(\max\left\{d(x,y), d(x,Fx), d(y,Gy), \frac{1}{2}(d(x,Gy)+d(y,Fx))\right\}\right) \tag{3.0.6}$$

Où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante et satisfaisant (1) et (2).

Alors $z \in X$ est un point fixe de F et G c-à-d $z \in Fz$ et $z \in Gz$.

Démonstration. D'après le théorème (3.2), il existe une fonction strictement croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que : $\varphi(t) < \psi(t)$ et $\sum \psi^n(t)$ est convergente pour $t>0$.

Pour tout $x,y \in X$, on pose

$$A(x;y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Fx), d(y,Gy), \frac{1}{2}(d(x,Gy)+d(y,Fx))\right\}$$

Soit $x_0 \in X$. Choisissons $x_1 \in Fx_0$ alors

$$H(Fx_0, Gx_1) \leq \varphi(A(x_0,x_1))$$

D'où si $A(x_0,x_1) > 0$, nous avons

$$\varphi(A(x_0,x_1)) < \psi(A(x_0,x_1))$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_1, Gx_1) &\leq H(Fx_0, Gx_1) \qquad (\text{car } x_1 \in Fx_0) \\ &\leq \varphi(A(x_0, x_1)) \\ &< \psi(A(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons trouver : $x_2 \in Gx_1$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leq \psi(A(x_0, x_1)) \tag{3.0.7}$$

Si $A(x_0, x_1) = 0$, nous avons $x_2 = x_1$, donc (3.0.7) est encore satisfaite .

Maintenant,

$$H(Fx_2, Gx_1) \leq \varphi(A(x_2, x_1))$$

Si $A(x_2, x_1) > 0$, on trouve

$$\varphi(A(x_2, x_1)) < \psi(A(x_2, x_1))$$

Donc

$$\begin{aligned} d(x_2, Fx_2) &\leq H(Fx_2, Gx_1) \qquad (\text{car } x_2 \in Gx_1\ ) \\ &\leq \varphi(A(x_2, x_1)) \\ &< \psi(A(x_2, x_1)) \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut trouver $x_3 \in Fx_2$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq \psi(A(x_2, x_1)) \tag{3.0.8}$$

Si $A(x_2, x_1) = 0$, nous prenons $x_3 = x_2$, et d'où (3.0.8) est satisfaite.

En continuent par cette manière, on obtient une suite $\{x_n\}$ telle que

$$x_{2n+1} \in Fx_{2n}\ ,\ x_{2n+2} \in Gx_{2n+1} \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n}) &\leq \psi(A(x_{2n}, x_{2n-1})) \\ d(x_{2n-1}, x_{2n}) &\leq \psi(A(x_{2n-2}, x_{2n-1})) \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que

$$A(x_{2n}, x_{2n-1}) \leq \max\{d(x_{2n}, x_{2n-1}), d(x_{2n}, x_{2n+1})\}$$

et

$$A(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leq \max\{d(x_{2n-2}, x_{2n-1}), d(x_{2n-1}, x_{2n})\}$$

Puisque ψ est croissante, en utilisant le fait que $\psi(t) < t$ pour $t > 0$, on obtient finalement que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n))$$

Par récurrence,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_{1.})) \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

Comme $\sum \psi^n(t)$ est convergente pour $t > 0$, il suit que $\sum d(x_n, x_{n+1})$ est convergente.

Par conséquent, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy donc convergente vers $z \in X$ car (X, d) est complet.

Maintenant

$$\begin{aligned}
d(z, Fz) &\leq d(z, x_{2n}) + d(x_{2n}, Fz) \\
&\leq d(z, x_{2n}) + H(Fz, Gx_{2n-1}) \\
&\leq d(z, x_{2n}) + \varphi(A(z, x_{2n-1})) \\
&\leq d(z, x_{2n}) + \varphi\left(\max\left\{d(z, x_{2n-1}), d(z, Fz), d(x_{2n}, x_{2n-1}), \frac{1}{2}(d(z, x_{2n}), d(x_{2n-1}, Fz))\right\}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $d(z, Fz) \leq \varphi\left(d(z, Fz)^+\right)$. à partir de (1) nous avons $d(z, Fz) = 0$, donc $z \in Fz$. D'aprés (3.0.6), on obtient

$$d(z, Gz) \leq H(Fz, Gz) \leq \varphi d(z, Gz)$$

D'où $d(z, Gz) = 0$ donc $z \in Gz$. Alors z est un point fixe commun de F et G dans X. ■

Remarque 3.1 *Le théorème précédent n'est pas vrai, si* $\frac{1}{2}(d(x, Gy) + d(y, Fx))$ *est remplacée par* $\max\{d(x, Gy), d(y; Fx)\}$ *dans la formule (3.0.6), même si* $F = G$ *et* φ *est continue. En effet, l'exemple suivant montre que l'argument dans le côté droit de la formule (3.0.6) ne peut pas être remplacé par* $\max\{d(x, Gy), d(y; Fx)\}$.

Exemple 3.1 *Soit* $X = \mathbb{R}$ *, muni de la distance usuelle. On définit* $F : X \to CB(X)$ *par* $Fx = [x + 1, x + 2]$

et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \\ t-1 & \text{si } t \geq \frac{3}{2} \end{array} \right\}$

Alors φ est strictement croissante, continue dans $\mathbb{R}^+$ et satisfait (1). D'autre part, pour tout $x, y \in X$

$$H(Fx, Fy) \leq \varphi(\max\{d(x, Fy), d(y, Fx)\})$$

mais F admet un point fixe.

Remarque 3.2 *Sous l' hpothèse du théorème (3.3), F et G peut avoir plus d'un point fixe commun (même lorsque φ est identiquement nulle on $\mathbb{R}_+$).*

Exemple 3.2 *Soit $X = [0, 11]$. On définit $F : X \to CB(X)$ comme $Fx = X$ pour tout x dans X. Alors $H(Fx, Fy) = 0$ pour tout x, y in X. Mais $\{x \in X / x \in Fx\} = X$.*

Le théorème suivant donne une extension du théorème (3.3) de l'argument n'est pas bornée.

Théorème 3.4 *[30] Soient F, G deux applications de X dans $C(X)$ telles que*

$$H(Fx, Gy) \leq \varphi\left(\max\left\{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), \frac{1}{2}[d(x, Gy), d(y, Fx)]\right\}\right) \tag{3.0.9}$$

où $H(Fx, Gy)$ est fini, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante et satisfaisant (1) et (2).

On suppose aussi les trois assertions suivantes sont vérifiées.

(i) il existe $x_0 \in X$ tel que $H(Fx_0, Gy_0)$ est finie pour $y_0 \in Fx_0$,

(ii) si $H(Fx, Gy)$ est fini, il existe deux suites $\{x_n\} \in Gy$ et $\{y_n\} \in Fx$ telles que $\{d(x_n, y)\}$ converge vers $d(y, gy)$, $\{d(y_n, x)\}$ converge vers $d(x, Fx)$ et $H(Fx_n, Gy)$ et $H(Fx, Gy_n)$ sont finies, pour tout n .

(iii) En outre, $\{x_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ une suite convergente dans X vers z telle que : $x_{2n+1} \in Fx_{2n}$, $x_{2n+2} \in Gx_{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} [H(Fx_{2n}, Gx_{2n+1}) + H(Gx_{2n+1}, Fx_{2n+1})]$$

est finie alors $H(Fz, Gx_{2n+1})$ est fini pour infinité de n, et $H(Fx_{2n}, Gz)$ est fini pour infinité de n, alors Fet G admettant un point fixe commun.

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème (3.3).

Remarque 3.3 *Le théorème ci-dessus reste valide si on suppose que (3.0.9) est satisfaite lorsque* $Fx, Gy \in CB(X)$ *au lieu de supposer sa validité* $H(Fx, Gy)$ *est finie pourvu que l'assertion (i) nous imposons la restriction supplémentaire que* $Fx_0 \in CB(X)$.

L'exemple suivant montre que les ensembles des points fixes de F et G ; dans le théorème ci-dessus, ne sont pas égaux.

Exemple 3.3 *Soit* $X = \mathbb{R}$, *muni de la distance usuelle. On définit* $F, G : X \to C(X)$ *par :*

$$Fx = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \text{si } x = 0 \\ (-\infty, 0] & \text{si } x \neq 0 \end{array} \right\} \text{ et } Gx = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \text{si } x = 0 \\ [0, +\infty[& \text{si } x \neq 0 \end{array} \right\}$$

Alors $H(Fx, Gy)$ est finie ssi $x = y = 0$. L'inégalité (3.0.9) est vraie pour $x = y = 0$ quand $\varphi = 0$ dans $\mathbb{R}_+$.

Mais $\{x \in X; x \in Fx\} = (-\infty, 0]$ et $\{x \in X; x \in Gx\} = [0, +\infty[$.

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, on va appliquer le théorème de Kakutani pour démontrer un théorème majeur de la théorie des jeux, dont une conséquence est l'existence d'un équilibre de Nash et a été utilisé pour démontrer l'existence de prix qui mettent en adéquation offre et demande dans tous les marchés d'une économie.

4.1 Théorie des jeux

4.1.1 Introduction

La théorie des jeux est un champ des mathématiques qui a pour objet d'établir et d'étudier les principes et les règles mathématiques pouvant intervenir dans l'analyse des différents types de comportement et des issues possibles lors d'une interaction stratégique entre plusieurs preneurs de décisions (appelés agents en èconomie et joueurs en théorie des jeux).

La théorie des jeux est à la fois une branche de l'économie et des mathématiques qui s'applique à de très nombreux problèmes sociaux, science politique et relations internationales, droits et économiques, biologie, philosophie, histoire ...

Un des buts de la théorie des jeux est d'abord de créer des modèles mathématiques de base.

4.1.2 Un peu d'histoire

Les fondements de la théorie des jeux modernes sont décrits pour la première fois en **1928** dans une publication de **John Von Neumann**. Les idées de la théorie des jeux ont été ensuite développées par **Oskar Morgenstern** et le même **John Von Neumann** en **1944** dans leur ouvrage Theory of Games et Economic Behavior. Cet ouvrage fondateur a détaillé la méthode de résolution des jeux à somme nulle. En **1950**, **John Nash** a développé la notion d'équilibre de **Nash** qui généralise les travaux de Cournot. L'association entre jeu et nombres surréels de Conway a été établie dans les années **1970**.

En **1994**, **John Nash**, **Reinhard Selten** et **John Harsanyi** ont reçu le « prix **Nobel** d'économie » (prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'**Alfred Nobel**) pour leurs travaux sur la théorie des jeux. Ce choix témoigne de l'importance prise par la théorie des jeux dans l'analyse économique.

En **2005**, les théoriciens des jeux **Thomas Schelling** et **Robert Aumann** ont reçu aussi le prix **Nobel** d'économie.

4.1.3 Représentations des jeux

Un jeu est défini par l'ensemble des joueurs, l'ensemble des stratégies possibles pour chacun des joueurs et la spécification des paiements ou des utilités des joueurs pour chaque combinaison de stratégies. Les jeux coopératifs sont généralement présentés sous la forme de fonction caractéristique alors que les jeux non coopératifs sont représentés sous forme normale ou sous forme extensive.

Jeux sous forme stratégique

Un jeu sous forme stratégique est défini par :

• Un ensemble $N = \{1, \dots, n\}$ de joueurs

• Pour chaque joueur i un ensemble de stratégies $S_i = \{s_1, \dots, s_{n_i}\}$

• Pour chaque joueur i une fonction de valuation $\mu_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to IR$, qui à chaque ensemble de stratégies associe les gains du joueur i.

Notations.

• On notera s un profil de stratégies $\{s_1, \dots, s_{n_i}\}$où $\forall i \ s_i \in S_i$.

• On note s_{-i} le profil s des stratégies autres que celles du joueur i :
$s_{-i} = \{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n\}$.

• On note S l'espace des stratégies, ie : $S = \times_{i=1}^{n} S_i$.

Jeux sous forme extensive

Un jeu sous forme extensive est défini par :

• Un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$ de joueurs

• Un arbre fini composé de :

• Un ensemble de noeuds $\{A, B, C, ...\}$ représentant les coups

• Un ensemble de branches $\{x, y, z, ...\}$ représentant les alternatives à chaque coup

• Une fonction de nommage qui indique à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer

• Une fonction de valuation qui associe à chaque noeud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs

• Une partition des nœuds en un ensemble d'ensembles d'informations représentant les croyances (imparfaites) des joueurs.

4.1.4 La notion de stratégie

Définition 4.1 *[31]Une stratégie est la spécification complète du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation (dans un jeu sous forme extensive cela signifie donc pour chaque ensemble d'information où c'est à ce joueur de jouer).*

Une stratégie pour un joueur dans un jeu sous forme extensive est une fonction qui associe à chaque ensemble d'information, une action dans l'ensemble des actions possibles à cet ensemble d'information.

Plus préciésément : si $\{U_1^i, U_2^i, \ldots\}$ *est la partition d'information du joueur* i*, si* $A\left(U_j^i\right)$ *est l'ensemble des actions possibles à* U_j^i *et si* $A^i = \cup_{j=1,2,\ldots}\left[A\left(U_j^i\right)\right]$ *alors une stratégie* s_i *du joueur* i *est une fonction :* $s_i : \{U_1^i, U_2^i, \ldots\} \to A^i$ *telle que* $\forall j$ *:*

$$s_i\left(U_j^i\right) \in A\left(U_j^i\right)$$

4.1.5 Elimination de stratégies dominées

Définition 4.2 *[31]Une stratégie* s_i *du joueur* i *est dite strictement dominée s'il existe une stratégie* $s_i^{'}$ *du joueur* i *telle que :* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$,

$$\mu_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right) \geq \mu_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

On dira dans ce cas que s_i *est strictement dominée par* $s_i^{'}$ *et que* $s_i^{'}$ *domine strictement* s_i*.*

Si s_i est strictement dominée par $s_i^{'}$ alors, face à n'importe quelle stratégie des autres joueurs, en jouant $s_i^{'}$ le joueur i gagne strictement plus que ce qu'il aurait gagné en jouant s_i.

Il parait donc naturel et logique de supposer qu'un joueur rationnel (cherchant à maximiser son utilité), ne va jamais jouer une stratégie strictement dominée.

Hypothèse 1. *Un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie strictement dominée.*

Hypothèse 2. *Tous les joueurs sont rationnels.*

Hypothèse 3. *La rationalité et le jeu sont une connaissance commune entre les joueurs.*

Définition 4.3 *Une stratégie s est faiblement dominée pour le joueur i si il existe une stratégie $s_i^{'}$ telle que pour tous les profils s_{-i}*

$$\mu_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right) \leq \mu_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

• Un jeu est dit résolvable par élimination itérative des stratégies dominées, si on obtient un unique profil en éliminant successivement des stratégies (strictement) dominées.

• Les profils obtenus après élimination itérative des stratégies (strictement) dominées ne dépendent pas de l'ordre choisi pour l'élimination des stratégies.

• Par contre, on peut obtenir des profils différents lorsque l'on choisit des ordres différents pour l'élimination itérative de stratégies faiblement dominées.

4.1.6 Equilibre de Nash

Le mathématicien John Forbes Nash a utilisé le théorème du point fixe de Kakutani pour démontrer un théorème majeur de la théorie des jeux, dont une conséquence est l'existence d'un équilibre de Nash dans tout jeu infini à stratégies mixtes.

Définition 4.4 *[32]Un profil de stratégiées $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ est un équilibre de Nash du jeu sous forme stratégique si et seulement si que pour tout joueur i et pour toute stratégie $s^{'} \in S_i$:*

$$\mu_i\left(s_1^*, s_{-i}^*\right) \leq \mu_i\left(s^{'}, s_{-i}^*\right)$$

Equilibre de Nash et fonction de meilleure réponse

• La fonction de meilleure réponse du joueur i est la fonction B_i qui associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs s_{-i} les stratégies du joueur i qui maximise son utilité :

$$B_i\left(s_{-i}\right)=\{s_i\in S_i \text{ t.q. } \mu_i\left(s_i,s_{-i}\right)\geq\mu_i\left(s_i^{'},s_{-i}\right) \text{ pour tout } s_i^{'}\in S_i$$

• Un équilibre de Nash est un profil s^* tel que la stratégie du joueur i est une meilleure réponse :

$$s_i^*\in B_i\left(s_{-i}^*\right) \text{ pour tout } i\in N$$

Propriétés

• Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).

• Un jeu (en stratégies pures) peut avoir plusieurs équilibres de Nash, mais il peut aussi n'en avoir aucun !

• Question : comment choisir un équilibre particulier lorsqu'il y en a plusieurs

• Deux équilibres de Nash $s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ et $s^{'*}=(s_1^{'*},\ldots,s_n^{'*})$ sont interchangeables si pour tout i $\left(s_i^*,s_{-i}^{'*}\right)$ et $\left(s_i^{'*},s_{-i}^*\right)$ sont aussi des équilibres de Nash.

• Deux équilibres de Nash s^* et $s^{'*}$ sont équivalents si ils donnent la même utilité à tous les joueurs, i.e. pour tout $i\in N$ $\mu_i\left(s^*\right)=\mu_i\left(s^{'*}\right)$.

4.1.7 Théorème de Nash

Notation. Pour un ensemble dénombrable Z, soit $\Delta(Z)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur Z.

Définition 4.5 *[32] Soit un jeu sous forme stratégique $\Gamma=(N,(S_i)_{i\in N},(\mu_i)_{i\in N})$. L'extension mixte de Γ est le jeu sous forme stratégique $\Gamma_m=(N,(\Sigma_i)_{i\in N},(R_i)_{i\in N})$ où $\forall i\in N$:*

•$\Sigma_i=\Delta(S_i)$ *;*

• $\forall j\in N,\forall p_j\in\Delta(S_j)$ *:*

$$\begin{aligned}R_i(p_1,....,p_n) &= \sum_{s_1^{'},\ldots,s_n^{'}}\mu_i(s_1^{'},...,s_n^{'})p_1(s_1^{'})...p_n(s_n^{'}) \\ &= E_{p_1\otimes p_2...\otimes p_n}[\mu_i(s_1^{'},...,s_n^{'})]\end{aligned}$$

• *$R_i(p_1,....,p_n)$ est l'espérance d'utilité du joueur i si chaque joueur j compte choisir une stratégie dans S_j en utilisant la loterie p_j.*

• *$p_i\in\Delta(S_i)$ est appelée une stratégie mixte du joueur i, et $\Delta(S_i)$ est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i.*

- *$s_i \in S_i$ est appelée une stratégie pure du joueur i et elle est identifiée à la masse de Dirac δ_{s_i} .*
- *S_i est appelée l'ensemble des stratégies pures.*

Exemple 4.1 *[32] On veut analyser le jeu de tir au but entre un joueur de football et un gardien de but. On simplifie le jeu de la manière suivante : l'attaquant a le choix entre tirer à droite où à gauche et le gardien décide de sauter vers la droite où la gauche. S'ils choisissent le même côté alors le gardien gagne, sinon c'est l'attaquant qui gagne. Ceci d´écrit tout simplement le jeu de Pile ou Face :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & F \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Son extension mixte est donc :

$$\Gamma_m = (\{I, II\}, X, Y; R)$$

avec : $X = Y = [0,1]$ et :

$$\begin{aligned} R(x,y) &= xy + (1-x)(1-y) - x(1-y) - y(1-x) \\ &= 1 - 2x - 2y + 4xy \end{aligned}$$

$x \in X$ doit être interprété comme étant la stratégie mixte pour laquelle $proba(H) = x$,$proba(T) = 1 - x$. La stratégie mixte du joueur colonne y doit être interprétée d'une manière similaire. Pour résoudre ce jeu à somme nulle, on calcule les maximin et minimax :

$$\begin{aligned} \min_y R(x,y) &= \min_y [(4x-2)y + (1-2x)] \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 2x-1 & x \leq 1/2 \\ 1-2x & x \geq 1/2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Donc $v = \max_x \min_y R(x,y) = 0$ et l'unique stratégie maximin du joueur I est $x^* = 1/2$. De même :

$$\begin{aligned} \max_x R(x,y) &= \max_x [(4y-2)x + (1-2y)] \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 2y-1 & y \leq 1/2 \\ 1-2y & y \geq 1/2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

D'où $v = \min_y \max_y R(x, y) = 0$, et $y^* = 1/2$ est l'unique stratégie minimax du joueur II. On conclut que l'extension mixte du jeu de Pile ou Face admet une valeur $v = 0$ et que l'unique vecteur de stratégies optimales est $(x^*, y^*) = (1/2, 1/2)$. Donc $(1/2, 1/2)$ est l'unique équilibre de Nash du jeu.

Donc, la stratégie optimale du footballeur pour un tir au but est de tirer à droite avec probabilité 1/2 et à gauche avec une probabilité $1/2$.

En fait, ceci est un cas particulier du théorème suivant qui est un des plus fondamentaux de la théorie des jeux :

Théorème 4.1 *[32] (Le théorème de **Nash,1951**) Soit Γ un jeu fini sous forme stratégique. Alors, l'extension mixte Γ_m de Γ admet un équilibre de Nash (autrement : dit tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes).*

C'est une conséquence du théorème de point fixe de Kakutani.

Prouvons maintenant le théorème de Nash.

Démonstration. Soit $X = \Pi_i \Delta(S_i)$. alors X convexe et compact. Soit $f = (f_i)_{i \in N}$ la correspondance suivante sur X :

$$f_i(x_1, ..., x_n) = \arg \max_{p \in \Delta(Si)} R_i(x_1, ..., x_{i-1}, p, x_{i+1}, ..., x_n)$$

Puisque $\Delta(S_i)$ est convexe et compact et $p \to R_i(x_1, ..., x_{i-1}, p, x_{i+1}, ..., x_n)$ est une fonction linéaire (donc en particulier concave) $\arg \max_{p \in \Delta(S_i)} R_i(x_1, ..., x_{i-1}, p, x_{i+1}, ..., x_n)$ est non vide et convexe. Le point (i) du théorème de kakutani est vérifié. Le point (ii) est une conséquence immédiate de la continuité jointe de la fonction $x \to R(x)$ (car c'est une fonction multilinéaire en dimension finie). ■

4.2 Équilibre général

[16] En théorie économique de l'équilibre général, le théorème de Kakutani a été utilisé pour démontrer l'existence de prix qui mettent en adéquation offre et demande dans tous les marchés d'une économie. La question de l'existence de tels prix remontait au moins à Léon Walras. La première preuve en fut apportée par Lionel McKenzie (en). Le théorème de Kakutani est un fondement essentiel de la « théorie de la valeur » de Gérard Debreu (économiste franco-américain dont les travaux ont été récompensés par le « prix Nobel d'économie »).

Dans ce cas, X est l'ensemble des n-uplets des prix de marchandises. La fonction F est choisie de telle sorte que le

résultat $F(x)$ diffère de l'argument x dès que le n-uplet x de prix n'égalise pas l'offre et demande partout. Le défi est ici de construire une application F vérifiant à la fois cette propriété et les hypothèses du théorème de Kakutani. Un tel F, s'il existe, possèdera alors un point fixe qui, par construction, égalisera partout l'offre avec la demande.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a démontré des théorème de point fixe pour une fonction multivoque et des théorèmes de point fixe commun pour deux fonctions multivoque dans $CB(X)$, $B(X)$, $C(X)$ et on a donné une application du théorème de Kakutani dans la théorie des jeux et l'économie.

Bibliographie

[1] A. Ahmad and M. Imdad, Some Common Fixed Point Theorems for Mappings and Multi-valued Mappings, J.Math. Anal.Appl. 218, 546-560 1998.

[2] M. A. Ahmed, Common fixed point theorems for weakly compatipatible mappings. RO. MOUN. J. MATH. Vol 33, No 4,(2003), 1189-1203.

[3] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math, 3 (1922), 133–181.

[4] H. Bouhadjera and A. Djoudi, Common fixed point theorems for single and set-valued maps without continuity. An. St. Univ. Ovidius Constanta. Vol. 16(1), 2008, 49–58.

[5] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.

[6] Lj. B. Ciric, A Generalized of Banach's contraction principle. Proc, Amer. MatI. Soc, Vol, 45 (2) (1974) 267-273 .

[7] Lj. B. Ciric, Generalized contractions and fixed-point theorem, Publ. Inst. Math., 12 (26) (1971), 19-26.

[8] Mémoire de Caroline Dazé, Théorèmes de point fixe et principe variationnel d'Ekeland, février 2010.

[9] M. Eshaghi gordji, H. Baghani, H. Khodei and M. Ramezani, A Generalization of Nadler's fixed point theorem, J. Non Sci. Appl. 3 (2010), no. 2, 148-151.

[10] B. Fisher, Set-valued mapping on metric spaces, Fund. math. 112 (1981), 141-145.

[11] B. Fisher, Set-valued mapping on bounded metric spaces, Indian j. pure. Appl. Math, 11(1) : 8-11, 1980.

[12] B. Fisher, Results on common fixed points on bounded metric spaces. Math. Sem. Note Kobe Univ. 7, 73-80, 1979.

[13] B. Fisher, Fixed points of mappings and set valued mappings. J. Univ. Kuwait Sci. 9, 1982, 175- 179.

[14] G. E. Hardy and T. D. Rogers, A Generalisation of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull. 16 (1973), 201-206.

[15] John Hillas. University of Auckland. Fixed Point Theorems. (1941) 1-11.

[16] http :/ / en. wikipedia. org/ wiki/ Kakutani_fixed-point_theorem ?oldid=461266141.

[17] R. Kannan, Some results on fixed-point — II, Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 405-408.

[18] N. N. Kaulgud and D.V. Pai, Fixed point theorems for set valued mapping, Nieuw. Arch. wisk. 23 (1975), 49-66.

[19] Feng, S. Liu, Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 103–112.

[20] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 141 (1989) 177-188.

[21] J. Maria Josephi, E. R amganesh, Fixed point theorem on multi-valued mappings. Inte. J. Anal. Appl. Vol 1, No 2 (2013), 123-127.

[22] S.B. Nadler Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math. 30 (1969) 475-488.

[23] John Nachbar, Fixed Point Theorems. Econ 511(2010), 1-16.

[24] B. E. Rhoades, A Comparison of various definitions of contractive mappings, Amer. Math. Soc. 224, (1977), 257-289.

[25] Barad K. Ray and B. E. Rhoades, Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate, Pacific. J. Math Vol. 71, No. 2, 1977, 517-520.

[26] S. Reich, Kannan's fixed point theorem, Boll. Un. Mat. Ital. 4 (1971), 1-11.

[27] S. Reich, Fixed points of contractive functions, Boll. Unione Mat. Ital. (4) (1972) 26–42.

[28] A. Sintamarian, Fixed points and common fixed point for some multivalued operators. Fixed Point Theory, Volume 5, No. 1, 2004, 137-145.

[29] Sharma S., Deshpande B. ,and R. Pathak, C ommon fixed point theorems for hybrid pairs of mappings with some weaker conditions, Fasciculi. Mathematici. No. 39 (2008) 71-86.

[30] K. P. R. Sastey, Common fixed points for mulimaps in metric space. Non. Lin. The. Meth & Appl. Vol. 13. No 3. pp 221-229. 1989.

[31] Shmuel ZAMIR,COURS DE THEORIE DES JEUX, CNRS, EUREQua Paris 1 et LEI/CREST.

[32] S´ebastien Konieczny, Introduction à la Théorie des Jeux. CRIL-CNRS. Université d'Artois - Lens.

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire on a détaillé l'essentiel du contenu des quelque articles qui ont généralisé le théorème du point fixe pour une seul fonction multivoque et pour deux fonctions multivoques définie sur un sous-ensemble d'un espace métrique complet. Nous avons donné dans le dernier chapitre de ce travaille une application du théorème de Kakutani dans la théorie des jeux et l'économie.

Mots clés : point fixe, point fixe commun, contraction, application multivoque, espace métrique.