Table des matières

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur le Dr. *GUERARRA Sihem*, qui m'a bien dirigé pendant toute la durée de mon travail. Je la remercie pour sa gentilleusse, son aide, ses conseils et ses encouragements.

Je veux exprimer mes remerciements à Pr. ZEKRAOUI *Hanifa,* qui m'a honoré de sa présence et qui a accepté de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury : Dr. BEGHOU *Samira* et Dr. DJEDDI *Kamel*, qui ont acceptés d'évaluer mon travail de mémoire.

Je remercie tout spécialement mes parents pour leur soutien tout au long de ce travail, et dont la patience et l'encouragement m'ont été très précieux durant mes années d'études. Je leur dédie ce mémoire.

Enfin, je remercie tout particulièrement mes frères et mes soeurs et toutes mes amies qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

Introduction

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans plusieurs domaines mathématiques comme l'algèbre, analyse numérique, contrôle optimal, théorie spectrale. C'est la raison pour laquelle, certains mathématiciens ont pensé introduire de nouvelles notions d'inversibilité qui sont utiles aux solutions des plusieurs problèmes. Parmi eux, nous citons, en 1936, J. Von Neumann [22] a introduit la notion d'inverse généralisé pour les éléments d'un anneau, plus tard et plus précisément en 1948, I. Kaplansky [9] a donné une extention de cette notion pour les algébres. Enfin la notion d'inverse généralisé ou Pseudo-inverse a été établie indépendament par E. H. Moore [20], en 1922 et R. Penrose [24] en 1955, où ce dernier a prouvé que toute matrice A à éléments réels ou complexes, rectangulaire (et plus particulierement toute matrice carrée singulière) a possède un genre unique des inverses généralisés appelé l'inverse généralisé de Moore-Penrose, en introduisant une matrice $X = A^+$ vérifiant les quatre équations suivantes :

$$AXA = A \quad (1)$$

$$XAX = X \quad (2)$$

$$(AX)^* = AX \quad (3)$$

$$(XA)^* = XA \quad (4)$$

Le but de la construction de l'inverse généralisé est d'obtenir une matrice qui peut servir comme l'inverse en quelque sorte pour une classe de matrices plus large que celles des matrices inversibles. Autrement dit, l'inverse généralisé existe pour une matrice arbitraire, et quand une matrice est inversible, alors son inverse coincide avec son inverse généralisé.

L'étude des inverses généralisés et ses applications a été l'interet de beaucoup des chercheurs voir [3], [4], [10], [24], [34], [33].

La théorie des inverses généralisés a ses racines génétiques essentiellement dans le cadre de la résolution des systèmes lineaires et les équations matricielles. De nombreuses techniques ont été proposées et développées pour étudier plusieurs types d'équations matricielles. Par exemple, l'une des équations linéaires la plus connue dans la théorie des matrices est l'équation matricielle

$$AXB = C$$

Où A, B et C sont des matrices connues et X est inconnue, si cet équation n'est pas consistente, les chercheurs essaient souvent de trouver des solutions approchées qui satisfont certains critères optimaux. l'une des solutions approchées la plus utilisée est la solution à moindres carrées, qui est définie comme étant une matrice X qui minimise la norme de la différence $AXB - C$, voir [6] [14], une autre solution approximées moins utilisée par rapport à celle des moindres carrées, est la solution à rang minimal qui est définie comme étant une matrice X qui minimise le rang de la différence $AXB - C$, le concept de la solution à rang minimal d'équations matricielles a été proposé dans [29] [31], par Yongge Tian dans l'étude du rang minimal de la fonction matricielle linéaire $AXB - C$. De toute évidence, la solution à moindres carrées, la solution à rang minimal et la solution ordinaire de $AXB = C$ toutes coïncident si cette équation est consistente. Dans la littérature on rencontre l'étude de cette équation et ses applications, par exemple dans [18], [19], [21], S. K. Mitra, A. Navarra, P. L. Odell, D. M. Yong, ont étudié la solution commune de la paires d'équations $A_1X_1B_1 = C_1$ et $A_2X_2B_2 = C_2$, et ils ont donné la représentation de cette solution commune.

Le rang et l'inertie d'une matrice sont deux concepts de base de la théorie des matrices pour décrire la dimension des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs colonnes ou les vecteurs lignes, et la répartition des valeurs propres selon leurs signes afin de calculer l'inertie d'une matrice, qui est une opération simple en utilisant les opérations élémentaires et de congruence d'une matrice en blocs. Ces deux quantités jouent un rôle essentiel dans la caractérisation des propriétés algébriques des matrices hermitiennes. En fait, le rang et l'inerties de matrices hermitiennes ont été l'objet principal d'étude des solution hermitiennes définies positives et définies non négatives d'une équation matricielle non symetrique. voir [1], [7], [11], [15].

Vu l'importance de l'inverse généralisé de Moore-Penrose, tout au long de ce travail, on a tenu à rappeler ses propriétés algébriques dans le premier chapitre de ce mémoire. D'autre notions préliminaires à savoir : les applications linéaires, les matrices, le rang d'une matrice, les opérations élémentaires sur les matrices en blocs et de congruence, et pour raconter un peu d'historique de l'équation matricielle $AXA^* = B$, des résultats obtunues par des chercheurs ont été aussi présenté dans ce chapitre.

Les deux autres chapitres :

Chapitre 2. Nous établissons plusieurs formules de rang et de l'inertie pour les expressions matricielles qui font intervenir l'inverse généralisé de Moore-Penrose. Ces formules de rang sont considérées comme des outils de base pour développer le contenu de chapitre suivant.

Chapitre 3. L'objectif de ce chapitre concerne aux conditions nécessaires et suffisantes pour les quelles les sous matrices X_1 et X_4 dans la solution hermitienne de l'équation $AXA^* = B$ soient définies positives ou définies négatives ou definies non positives ou définies non négatives, par l'étude de l'inertie maximal et minimal des sous matrices X_1 et X_4.

Notations

$\mathbb{k}$: le corps des nombres réels ou complexes.

$M_{m\times n}(\mathbb{k})$: l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{k}$.

$\mathbb{R}^{m\times n}$: l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}^{m\times n}$: l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}_r^{m\times n}$: l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{C}$ de rang r.

A^{-1} : l'inverse ordinaire de A.

$A^{(1)}$ ou A^{-} : l'inverse généralisé de A.

A^{+} : l'inverse généralisé de Moore-Penrose de A.

A^{t} : la matrice transposée de A.

A^{*} : la matrice adjointe de A.

$In\,(A) = \{i_{+}\,(A)\,,\, i_{-}\,(A)\,,\, i_{0}\,(A)\}$: l'inertie de A.

$i_{+}\,(A)$: le nombre de valeurs propres positives de A.

$i_{-}\,(A)$: le nombre de valeurs propres négatives de A.

$i_{0}\,(A)$: le nombre de valeurs propres nulles de A.

$r\,(A)$: le rang de A,

$N(A)$ ou $\ker(A)$: le noyau de la matrice A.

$R(A)$ ou $\mathrm{Im}(A)$: l'image de la matrice A.

$tr(A)$: la trace de la matrice A.

$||A||_F$: la norme de Frobinius.

$E_A = (I - AA^{+})$ et $F_A = (I - A^{+}A)$ sont des projecteurs orthogonaux induits par A.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notions de base

1.1.1 Applications linéaires

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une* ***application linéaire*** *si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*
1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$,pour tous $u, v \in E$.
2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$,pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$.

Autrement dit : *une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.*

Notation 1.1.1 *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*

Définition 1.1.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

Le noyau de *f, noté $N(f)$, est par définition l'ensemble des $v \in E$ telle que*

$$f(v) = 0$$

L'image de *f, notée $R(f)$, est par définition l'ensemble des $w \in F$ tel qu'il existe $v \in E$ avec*

$$f(v) = w$$

1.1.2 Matrices associées à une application linéaire

Définition 1.1.3 *Soit E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimensions finies ($E = \Bbbk^n$ et $F = \Bbbk^m$), $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E et $\{f_1, ..., f_m\}$ une base de F. Soit g une application linéaire de E dans F (on dira $g \in \pounds(E, F)$), telles que $x \longrightarrow y = g(x)$.*

On appelle matrice de g relativement aux deux bases, la matrice $A = [a_{ij}]$ de dimensions $m \times n$ définie par colonnes

$$g(e_1)...g(e_n)$$

$$A = [A^1...A^n]$$

La $j^{ième}$ colonne A^j contient les coordonnées de $g(e_j)$ exprimées dans la base $\{f_1, ..., f_m\}$. Plus précisément, $g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$. Alors, la matrice colonne $X = [x_j]$ des coordonnées de x dans la base $\{e_j\}$, grâce au produit matriciel $Y = AX$ où $y_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j$.

En outre, Soit A une matrice de $M_{m \times n}(\Bbbk)$. Alors A est la matrice d'une unique application linéaire g_A de $\Bbbk^n$ dans $\Bbbk^m$ relativement aux bases canoniques de ces espaces. On dit que g_A est l'application linéaire canoniquement associée à A.

1.1.3 Matrices partitionnées

Définition 1.1.4 *Une notation souvent utilisée à écrire une matrice $A(n, p)$ comme une juxtaposition de sous-matrices ou blocs. On dit alors que A est partitionnée. Il faut bien entendu que les dimensions des blocs soient compatibles.*

Exemple 1.1.1 *A, matrice à n lignes et p colonnes peut s'écrire*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & a_{1(l+1)} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} & a_{k(l+1)} & \dots & a_{kp} \\ a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)l} & a_{(k+1)(l+1)} & \dots & a_{(k+1)p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nl} & a_{n(l+1)} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Où A_{11} et A_{12} ont k lignes, A_{21} et A_{22} $n-k$ lignes, A_{11} et A_{21} l colonnes, A_{12} et A_{22} $p-l$ colonnes.

1.1.4 Norme de Frobinius

Définition 1.1.5 *(Trace d'une matrice carrée) La trace de $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est définie par la somme des éléments diagonaux*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Définition 1.1.6 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, on définit la norme matricielle de Frobinius notée par $||A||_F$ telle que*

$$||A||_F = \sqrt{traceA^*A} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.5 Les valeurs propres d'une matrice

Définition 1.1.7 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $Ax = \lambda x$, alors λ est une valeur propre de A associée au vecteur propre x. l'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A et on a noté $\lambda(A)$.*
Si λ est une valeur propre de A, le sous espace $\{x \in \mathbb{C}^n,\ Ax = \lambda x\}$ est appelé le sous espace propre de A associé à λ, sa dimension est appelée la multiplicité géometrique de la valeur propre λ.

Proposition 1.1.1 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est Hermitienne, alors :*
i) les valeurs propres de A sont réelles,
ii) les vecteurs propres associés aux valeurs propres differentes sont orthogonaux.

1.1.6 Les matrices définies positives et définies négatives

Définition 1.1.8 *1) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite definie positive si $\langle Hx, x\rangle \succ 0$, pour tout $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont strictement positives.*

2) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite definie négative si $\langle Hx, x\rangle \prec 0$, pour tout $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont strictement négatives.

3) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite positive (définie non négative) si $\langle Hx, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont non négatives.

4) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite négative (définie non positive) si $\langle Hx, x\rangle \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont non positives.

1.1.7 Rang d'une matrice

Définition 1.1.9 *Le rang de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, noté $rang(A)$ ou $r(A)$, est le nombre de colonnes (ou de lignes) de A linéairement indépendantes,*

$$rang(A) = \dim R(A)$$

Exemple 1.1.2 *Le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}(\mathbb{k})$$

est par définition le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{k}^2 : \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Tous ces vecteurs sont colinéaires à v_1, donc le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est 1 et ainsi $r(A) = 1$.

Factorisation à rang complet

Proposition 1.1.2 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rang r, $r \neq 0$. Alors, il existe des matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ telles que $r(B) = r(C) = r$ et $A = BC$.*

Cette décomposition est appelée une factorisation à rang complet de la matrice A.

Preuve. Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rang r et soit $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\}$, une matrice formée par r vecteurs linéairement indépendants. Les n colonnes de A sont donc des combinaisons linéaires uniques des vecteurs $b_1, ..., b_r$ donc $r(B) = r$. Chacune de ces combinaisons linéaires formant une colonne de $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, d'où on peut écrire $A = BC$ pour une matrice $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, donc $r(C) \leq r$. Celle-ci est alors déterminée comme :

$$r = rang(BC) \leq \min\{r(B), r(C)\}$$

On a $r = r(A) \leq r(C)$, Par conséquent $r(C) = r$ $\blacksquare$

Proposition 1.1.3 *Soient* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$
1) $r(A) = r(A^*) = r(A^*A) = r(AA^*)$.
2) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
3) Si A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

1.1.8 Les opérations élémentaires sur une matrice en blocs (EBMO)

Afin de conduire des formules explicites pour le rang de matrices en blocs, nous utilisons les trois types d'opérations élémentaires sur les matrices en blocs (abrégée par EBMO)

I) Interchange deux blocs lignes (colonnes) dans une matrice partitionnée,

II) Multiplier un bloc ligne (colonne) par une matrice non singulière à gauche (à droite) dans une matrice partitionnée,

III) Ajouter à un bloc ligne (colonne) multiplié par une matrice appropriée à gauche (droite) à un autre bloc ligne (colonne)

Exemple 1.1.3 *On effectue des opérations de ligne de type III on obtient*
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C + XA & D + XB \end{bmatrix},$$
où $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, *notez que* A *est multipliée par* X *à gauche.*

1.1.9 Les opérations élémentaires et de congruence sur une matrice en blocs (EBCMO)

Afin d'établir des formules explicites pour l'inertie d'une matrice hermitienne en blocs, nous utilisons les trois types de fonctionnement de la matrice en blocs et de congruence (abrégée par EBCMO) pour une matrice hermitienne en blocs avec la même partition en lignes et en colonnes.

I) Interchange $i^{ème}$ et $j^{ème}$ bloc ligne, avec l'échange de $i^{ème}$ et $j^{ème}$ bloc colonne de la matrice hermitienne en blocs.

II) Multilplier $i^{ème}$ bloc ligne par une matrice inversible P à gauche, de même que multiplier $i^{ème}$ bloc colonnes par P^* à droite dans la matrice hermitienne en blocs.

III) Ajouter $i^{ème}$ bloc ligne multiplié par une matrice P à gauche au $j^{ème}$ bloc ligne, de même qu'ajouter $i^{ème}$ bloc colonne multiplié par P^*de la droite au $j^{ème}$ bloc colonnes de la matrice hermitienne en blocs.

1.2 Les inverses généralisés des matrices

Considérons le système linéaire

$$Ax = b \tag{1.2.1}$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n, Si A est non singulière, donc $\ker(A) = \{0\}$, alors le vecteur solution x de l'équation linéaire $Ax = b$ est uniquement déterminé par $x = A^{-1}b$. Ici, A^{-1} est appelé la matrice inverse de A. Lorsque $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, l'équation (1.2.1) a une solution si et seulement si $b \in R(A)$, et si $b \notin R(A)$, il n'y a pas de solution à l'équation (1.2.1), alors on pose un problème où la solution peut être trouvée à l'aide de la définition suivante :

Définition 1.2.10 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, une matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est dite inverse généralisé ou (g-inverse) de la matrice A, notée par $A^{(1)}$si*

$$AXA = A. \tag{1.2.2}$$

Si A est carrée et non singulière, alors A^{-1} est l'unique inverse généralisé de A, sinon A a plusieures inverses généralisés.

Théorème 1.2.1 *Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

i) X est un g-inverse de A.

ii) pour tout $b \in R(A)$, $x = Xb$ est une solution de $Ax = b$.

Preuve. i)$\Longrightarrow$ii) $\forall b \in R(A)$, b est de la forme $b = Ay$, pour tel y, alors $A(Xb) = AXAy = Ay = b$.

ii)$\Longrightarrow$i) lorsque $AXb = b$ pour tout $b \in R(A)$, on a $AXAy = Ay$ pour tout y, donc $AXA = A$. ■

Exemple 1.2.4 *Déterminer un inverse généralisé de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.*

soit $A^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

il faut avoir $a + 2b + 2c + 4d = 1$, donc $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - 2b - 2c - 4d & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

où a, b et c sont arbitraires

1.2.1 Quelque propriétés des inverses généralisés

Proposition 1.2.1 *Soit $A \in \mathbb{C}$ .Alors ,*

1) $r(A^{(1)}) \geq r(A) = r(A^{(1)}A) = r(AA^{(1)})$.

2) Si A est carrée et non singulier, alors $A^{(1)} = A^{-1}$ est unique .

3) $AA^{(1)}$ et $A^{(1)}A$ sont idempotentes .

Preuve. 1). Pour deux matrice A et B, on a $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, alors ,

$$r(A) \geq r(AA^{(1)}) \geq r(AA^{(1)}A) = r(A) \Longrightarrow r(A) = r(AA^{(1)})$$

$$r(A) \geq r(A^{(1)}A) \geq r(AA^{(1)}A) = r(A) \Longrightarrow r(A) = r(A^{(1)}A)$$

D'où

$$r(A) = r(A^{(1)}A) = r(AA^{(1)})$$

D'autre part

$$r(A^{(1)}) \geq r(AA^{(1)}) \geq r(AA^{(1)}A) = r(A)$$

2). On a $AA^{(1)}A = A$

Si A est non singulier, alors la multiplication par A^{-1} à la fois à gauche et à droite donnerait :

$$A^{(1)} = A^{-1}$$

3).

$$\begin{aligned} (AA^{(1)})^2 &= (AA^{(1)}A)A^{(1)} = AA^{(1)} \\ (A^{(1)}A)^2 &= (A^{(1)}AA^{(1)})A = A^{(1)}A \end{aligned}$$

■

Lemme 1.2.1 *[3] Soit $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. Alors ,*
1) $A^{(1)}A = I_n$ SSi $r = n$.
2) $AA^{(1)} = I_m$ SSi $r = m$

Lemme 1.2.2 *Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1)} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ .Alors ,*
1) $r\left(I_m - AA^{(1)}\right) = m - r(A)$.
2) $r\left(I_n - A^{(1)}A\right) = n - r(A)$.
où $A^{(1)}$:est un inverse généralisé de A .

Preuve. Le noyau de A et un inverse généralisé $A^{(1)}$ de A sont liées par :

$$N(A) = R\left(I_n - A^{(1)}A\right) \tag{1.2.3}$$

$$N(A^*) = R\left(I_m - AA^{(1)}\right) \tag{1.2.4}$$

ces formule nous donnent :

$$\begin{aligned} \dim N(A) &= \dim R\left(I_n - A^{(1)}A\right) \\ \dim N(A^*) &= \dim R\left(I_m - AA^{(1)}\right) \end{aligned}$$

Alors ,

$$\begin{aligned} r\left(I_n - A^{(1)}A\right) &= n - r(A) \\ r\left(I_m - AA^{(1)}\right) &= m - r(A) \end{aligned}$$

Car $\dim N(A) = n - \dim R(A)$, pour tout $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. $\blacksquare$

Les formules (1.2.3) et (1.2.4) sont donner aussi dans le théorème (1.3.4) ci-dessous pour l'inverse généralisé de Moore-Penrose dans la section suivante :

1.3 L'inverse généralisé de Moore-Penrose

En 1955 Penrose à démontré que, pour toute matrice A (carrée ou rectangulaire) à éléments réels ou complexes, il existe une matrice unique X satisfaisant les quatre équations :

$$\begin{aligned} AXA &= A && (1.3.5)\\ XAX &= X && (1.3.6)\\ (AX)^* &= AX && (1.3.7)\\ (XA)^* &= XA && (1.3.8) \end{aligned}$$

Cette unique inverse généralisé, est communément connu sous le nom l'inverse de Moore Penrose et est souvent désigné par A^+.

Si A est non singulière, la matrice $X = A^{-1}$ satisfait trivialement les quatre équations, alors l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice non singulière est le même que l'inverse ordinaire.

AA^+ et A^+A sont des matrices Hermitiennes idempotentes. Ce sont les projecteurs orthogonaux sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement.

1.3.1 Unicité et existence

1) Existence

Théorème 1.3.2 *[4] Si $A = BC$ où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, et $r = r(A) = r(B) = r(C)$. Alors ,*

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

Preuve. On conclut que (B^*B) et (CC^*) sont des matrices de rang r car d'après les propriétés de rang on a :

$$r(B) = r(B^*B) = r(CC^*) = r(C) = r$$

On prend

$$X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

Alors on a :

$AX = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}B^*$ donc $(AX)^* = AX$. Aussi

$XA = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = C^*(CC^*)^{-1}C$ donc $(XA)^* = XA$

Pour vérifier (1.3.5) et (1.3.6) On utilise $XA = C^*(CC^*)^{-1}C$, on obtient :

$A(XA) = BC(C^*(CC^*)^{-1}C) = BC = A$ et

$(XA)X = C^*(CC^*)^{-1}CC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = X$

On remarque que la matrice X satisfait les quatre équations de Moore-Penrose. Ainsi $X = A^+$ par définition. ■

2) Unicité [33]

Soient A_1^+ et A_2^+, deux inverses de Moore-Penrose de A. Alors d'après (1.3.6) et (1.3.7) on a :

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^*$$

Donc $A_1^+ = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$ par (1.3.5)

Alors $A_1^+ = A_1^+(A_1^+)^*A^*(AA_2^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*AA_2^+ = A_1^+(AA_1^+)^*AA_2^+ = A_1^+AA_1^+AA_2^+$ par (1.3.7)

D'où

$$A_1^+ = A_1^+AA_2^+ \text{ par (1.3.5)}$$

De même

$$A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ \text{ par (1.3.6) et (1.3.8)}$$

Donc $A_2^+ = (A_2^+AA_1^+A)^*A_2^+ = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A_1^+AA_2^+AA_2^+$ par (1.3.8)

D'où

$$A_2^+ = A_1^+AA_2^+ \text{ par (1.3.5)}$$

L'inverse de Moore-Penrose est donc unique.

Exemple 1.3.5 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, r(A) = 1$ *et* $A = BC$

Où $B \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ *et* $C \in \mathbb{C}^{1\times 3}$ *. En fait une petite pensée montre que :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Puis ,

$$B^*B = [5]\,, C^*C = [6]\,.$$

Ainsi ,

$$A^+ = 1/30 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = 1/30 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Cas particulier , si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $r(A) = 1$. Alors ,

$$A^+ = 1/\alpha A^*$$

Où $\alpha = trace(A^*A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$.

Exemple 1.3.6 *On considère l'exemple ci-dessus .Alors ,*

$$A^+ = 1/30 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Propriétés principales de l'inverse de Moore-Penrose

Lorsque l'inverse généralisé n'a pas tous les propriétés de l'inverse ordinaire, il devient important de savoir quelles propriétés il a et quelles identités il satisfait, il ya bien sûr un nombre arbitrairement grand d'affirmations véritables sur les inverses généralisées. Le théorème suivant représent certaines des propriétés les plus élémentaires.

Théorème 1.3.3 *[4]Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*. Alors ,*

1) $(A^+)^+ = A$ *.*

2) $(A^+)^* = (A^*)^+$.

3) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$ *où* $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$ *si* $\lambda \neq 0$ *et* $\lambda^+ = 0$ *si* $\lambda = 0$.

4) $A^* = A^* A A^+ = A^+ A A^*$.

5) $(A^* A)^+ = A^+ A^{*+}$.

6) $A^+ = (A^* A)^+ A^* = A^* (A A^*)^+$.

7) $r(A) = r(AA^+) = r(A^+ A)$.

Théorème 1.3.4 *[4] Si* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. *Alors ,*

1) $R(A) = R(AA^+) = R(AA^*)$.

2) $R(A^+) = R(A^*) = R(A^+ A) = R(A^* A)$.

3) $R(I_m - AA^+) = N(AA^+) = N(A^*) = N(A^+) = R(A)^\perp$.

4) $R(I_n - A^+ A) = N(A^+ A) = N(A) = N(A^*)^\perp$.

Définition 1.3.11 *[3] Pour toute* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A\{i, j, ..., k\}$ *désigne l'ensemble des matrices* $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ *qui satisfont les équation* $(i), (j), ..., (k)$ *parmi les quatre équation de Penrose.*

Une matrice $X \in A\{i, j, ..., k\}$ *est appelée* $\{i, j, ..., k\}$*-inverse de* A *et aussi notée par* $A^{(i,j,...,k)}$.

1.3.3 Les inverses généralisés et les équations linéaires

L'application principale de l'inverse généralisé est la résolution des systèmes linéaires, où ils sont utilisés de la même manière que les inverses ordinaires dans le cas où la matrice est nonsingulière.

Théorème 1.3.5 *[3] Soient* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$. *Alors l'équation matricielle* $AXB = C$ *est consistente si et seulement si* $AA^{(1)} C B^{(1)} B = C$,
dans ce cas la solution générale est :

$$X = A^{(1)} C B^{(1)} + Y - A^{(1)} A Y B B^{(1)}.$$

où $Y \in \mathbb{C}^{n \times p}$ *est arbitraire.*

Corollaire 1.3.1 *[3] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, b \in \mathbb{C}^m$. *Alors l'équation* $Ax = b$ *est consistent si et seulement si* $AA^{(1)} b = b$, *dans ce cas la solution générale est :*

$$x = A^{(1)} b + (I - A^{(1)} A) y \tag{1.3.9}$$

Où $y \in \mathbb{C}^n$ arbitraire

Le corollaire suivant exprime la caractérisation de l'ensemble $A\{1\}$, en termes d'un élément arbitraire $A^{(1)}$ de cette ensemble .

Corollaire 1.3.2 *[3] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$. Alors*

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)},\ Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}$$

1.3.4 Les solutions à moindres carrées d'un système linéaire non consistent

Pour la matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, et le vecteur $b \in \mathbb{C}^m$, le système linéaire

$$Ax = b$$

est consistent c'est à dire a une solution pour x, si et seulement si $b \in R(A)$. Autrement dit, le vecteur résidu,

$$r = b - Ax$$

est différent de zéro pour tous les $x \in \mathbb{C}^n$, et il peut être souhaitable de trouver une solution approximée de $Ax = b$, c-à-d : trouver un vecteur x de telle sorte que le vecteur résidu r est minimisé.

Une solution approximée qui est souvent utilisée en particulier dans les applications statistiques est la solution à moindres carrées de $Ax = b$, qui définie par :

Définition 1.3.12 *Supposons que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{C}^m$ alors le vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ est appelé la solution à moindres carrées de $Ax = b$, si et seulement si $\|Au - b\| \leq \|Av - b\|$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n$.*

Définition 1.3.13 *Un vecteur u est appelé solution à moindre carrées et à norme minimale de $Ax = b$ si u est une solution à moindre carrées de $Ax = b$ et $\|u\| \leq \|w\|$, pour toutes les autres solutions à moindres carrées w.*

Si $b \in R(A)$, alors les notions de "solution" et "solution à moindre carrées" coïncident évidemment.

1.4 L'équation matricielle $AXB = C$

Considérons l'équation matricielle linéaire

$$AXB = C$$

où A, B et C sont des matrices connues de types appropriés, et X est inconnue.
L'équation $AXB = C$ est l'une des équations matricielles les plus connues de la théorie des matrices.

Les conditions de la consistence et la solution générale de l'équation $AXB = C$ ont été calculées de manière analytique à l'aide de l'inverse généralisé et le résultat classique suivant a été obtenu

Lemme 1.4.1 *L'équation $AXB = C$ est consistent si et seulement si $R(C) \subseteq R(A)$ et $R(C^*) \subseteq R(B^*)$, ou d'une manière équivalente, $AA^+CB^+B = C$. Dans ce cas, la solution générale est donnée sous la forme paramétrique suivante :*

$$X = A^+CB^+ + F_AU_1 + U_2E_B \tag{1.4.10}$$

où U_1, $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ sont arbitraires.
En particulier, l'unique solution de l'équation $AXB = C$ ayant la $F-$norme minimale est exprimée comme suit $X = A^+CB^+$ où $F-$norme désigne la norme de Frobinious .

Preuve. 1) La condition suffisante
on pose $X = A^+CB^+$ dans $AXB = C$, alors $AA^+CB^+B = C$

2) La condition nécessaire

on multiple $AXB = C$ par AA^+ et B^+B on obtient $AA^+AXBB^+B = AXB = AA^+CB^+B$.

■

Remarquons que (1.4.10) est donnée sous la forme paramétrique, nous pouvons facilement en tirer des propriétés diverses de la solution à moindres carrées, comme l'unicité, rang maximal et minimal, la norme de la solution à moindres carrées...etc, à titre d'exemple dans [14], Y. H. Liu a étudie le rang maximal et minimal de la solution à moindres carrées de l'équation $AXB = C$, dans [31] Y. Tian et S. Cheng, ont étudié le rang maximal et minimal de l'expression matricielle $A - BXC$

1.5 Quelques résultats concernant l'équation matricielle $AXA^* = B$

l'équation $AXA^* = B$ est un cas particulier de l'équation matricielle $AXB = C$, où dans ce cas les solutions seront symétriques ou hermitiennes, cet équation a été étudié par de nombreuses auteurs, alors pour cet importance, on va annoncer quelques résultats obtenus par les chercheurs.

1.5.1 Relations entre les solutions à moindres carrés et les solutions à rang minimal de $AXA^* = B$

Nous écrivons les ensembles de tous les solutions hermitiennes à moindres carrés et à rang minimale de l'équation matricielle $AXA^* = B$ comme :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{X \in \mathbb{C}_H^{n\times n} \mid X \text{ minimise la norme de la difference } B - AXA^*\right\} \qquad (1.5.11) \\ S_2 &= \left\{X \in \mathbb{C}_H^{n\times n} \mid X \text{ minimise le rang de la difference } B - AXA^*\right\} \qquad (1.5.12) \end{aligned}$$

tel que la norme indiqué dans (1.5.11) est la norme de Frobinius.

Théorème 1.5.6 *[28] Soient S_1et S_2 indiqués dans (1.5.11) et (1.5.12). Alors les proprietés suivantes sont équivalentes :*

(a) $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, i.e, les solutions hermitiennes à moindres carrés coincident avec les solutions hermitiennes à rang minimal.

(b) $S_1 \subseteq S_2$, i.e, toutes les solutions hermitiennes à moindres carrés sont des solutions hermitiennes à rang minimal de l'équation matricielle $AXA^* = B$.

(c)

$$r\begin{bmatrix} B & BA & A \\ A^*B & 0 & 0 \\ A^* & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2(A) + 2r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$r\begin{bmatrix} E_ABE_A & E_ABA \\ A^*BE_A & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} E_ABE_A & E_ABA \end{bmatrix} - r(E_ABE_A).$$

Théorème 1.5.7 *[28] Soient S_1et S_2 indiqués dans (1.5.11) et (1.5.12). Alors les proprietés suivantes sont équivalentes :*

(a) $S_1 \supseteq S_2$, i.e, toutes les solutions hermitiennes à rang minimal sont des solutions hermitiennes à moindres carrés de l'équation matricielle $AXA^* = B$.

(b)

$$r\begin{bmatrix} A & BA & A \\ A^*B & 0 & 0 \\ A^* & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$r\begin{bmatrix} E_ABE_A & E_ABA \\ A^*BE_A & 0 \end{bmatrix} = r(E_ABE_A).$$

1.5.2 Relations entre les solutions de deux équations matricielles hermitiennes

Considérons la paire d'équations matricielles suivantes :

$$A_1X_1A_1^* = C_1. \quad \text{et} \quad A_2X_2A_2^* = C_2. \tag{1.5.13}$$

Où $A_j \in \mathbb{C}^{m_j \times n}$ et $C_j \in \mathbb{C}_H^{m_j \times m_j}$ sont donnés , $j = 1, 2$.

Théorème 1.5.8 *[23] , [27] Supposons qu'il existe deux matrices hermitiennes X_1 et X_2 telles que (1.5.13) est satisfaite, et soit*

$$S_j = \left\{X_j \in \mathbb{C}_H^{n\times n} |\ A_jX_jA_j^* = C_{j.}\right\}, j = 1, 2.$$

Et

$$M = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & A_1 \\ 0 & -C_2 & A_2 \\ A_1^* & A_1^* & 0 \end{bmatrix}$$

Alors ,

(a) $\max\limits_{X_1\in S_1, X_2\in S_2} r(X - X_2) = \{n, r(M) + 2n - 2r(A_1) - 2r(A_2)\}.$

(b) $\min\limits_{X_1\in S_1, X_2\in S_2} r(X - X_2) = r(M) - 2r\begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}.$

(c) $\max\limits_{X_1 \in S_1, X_2 \in S_2} i_{\pm}(X_1 - X_2) = i \pm (M) + n - r(A_1) - r(A_2).$
(d) $\min\limits_{X_1 \in S_1, X_2 \in S_2} i_{\pm}(X_1 - X_2) = i \pm (M) - r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}.$
Par concequence,

(a) Il existe deux solutions hermitiennes X_1 et X_2 de (1.5.13) telle que $X_1 - X_2$ est non singulière si et seulement si

$$r(M) \geq 2r(A_1) + 2r(A_2) - n.$$

(b) $X_1 - X_2$ est non singulière pour tout deux matrices X_1 et X_2 de (1.5.13) si et seleument si

$$r(M) = 2r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} + n.$$

(c) L'équation (1.5.13) a une solution hermitienne commune si et seulement si

$$R(C_j) \subseteq R(A_j).,j = 1, 2.$$

Et

$$r(M) = 2r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}$$

(d) Il existe deux solutions hermitiennes X_1 et X_2 de (1.5.13) telles que $X_1 > X_2$ ($X_1 < X_2$) si t seulement si

$$\begin{aligned} i_+(M) &= r(A_1) + r(A_2). \\ i_-(M) &= r(A_1) + r(A_2). \end{aligned}$$

(e) $X_1 > X_2$ ($X_1 < X_2$) pour tout deux matrices X_1 et X_2 de (1.5.13) si t seulement si

$$\begin{aligned} i_+(M) &= r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} + n. \\ i_-(M) &= r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} + n. \end{aligned}$$

(f) Il existe deux solutions hermitiennes X_1 et X_2 de (1.5.13) telles que $X_1 \geq X_2$ ($X_1 \leq X_2$) si t seulement si

$$\begin{aligned} i_-(M) &= r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}. \\ i_+(M) &= r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(g) $X_1 \geq X_2$ $(X_1 \leq X_2)$ *pour tout deux matrices* X_1 *et* X_2 *de (1.5.13) si t seulement si*

$$\begin{aligned} i_-(M) &= r(A_1) + r(A_2) - n. \\ i_+(M) &= r(A_1) + r(A_2) - n. \end{aligned}$$

(h) $i_+(X_1 - X_2)$ *est invariant (non singulière) pour les deux matrices* X_1 *et* X_2 *de (1.5.13) si t seulement si ,*$i_-(X_1 - X_2)$ *est invariant pour les deux matrices* X_1 *et* X_2 *de (1.5.13) si et seulement si*

$$r(A_1) = r(A_2) = n.$$

Chapitre 2

Sur le rang des matrices et l'inertie des matrices hermitiennes

2.1 Introduction

Ce chapitre est basé sur les rangs et l'inerties des expressions matricielles interviennent l'inverse généralisé de Moore-Penrose, en utilisant ces formules de rang ou d'inertie nous caractériserons différentes égalités et proprietés pour les inverses généralisés des matrices, puis présentent leurs applications dans la théorie des matrices.

Le problème de minimisation et maximisation de rang ou de l'inertie d'une matrice est un sujet essentiel dans la théorie d'optimisation, où par le rang ou l'inertie maximale ou minimale d'une expression matricielle on peut caracteriser :

1. Les dimensions maximals et minimals d'espaces image de l'expression matricielle.

2. Nonsingularité de la matrice lorsqu'elle est carrée.

3. Solvabilité de l'expression matricielle.

4. Classification de l'expression matricielle lorsqu'elle est hermitienne (la solution est définie positive, définie négative,.définie nonpositive...etc)

Le lemme (2.2.5) à la fin de ce chapitre explique en détails les caractéristiques du rang et l'inertie d'une matrice

Les matrices considérées dans ce chapitre sont définies principalement sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, nous utilisons A^*, $r(A)$ et $R(A)$ pour désigner l'adjoint, le rang et l'image de A respectivement.

Il est bien connu que l'inverse généralisé de Moore-Penrose de la matrice A, noté par A^{+} est définie comme l'unique matrice X qui verifie les quatre équations de Penrose :

$$(1)\ AXA = A,\ (2)\ XAX = X,\ (3)\ (AX)^{*} = AX \text{ et } (4)\ (XA)^{*} = XA$$

Pour plus de simplicité, notons par E_A et F_A les deux projecteurs orthogonaux induits par A, $E_A = I_m - AA^{+}$ et $F_A = I_n - A^{+}A$. Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, alors les rangs des ces deux projecteurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} r(E_A) &= r\left(I_m - AA^{+}\right) = m - r(A). \\ r(F_A) &= r\left(I_n - A^{+}A\right) = n - r(A). \end{aligned}$$

Vu l'interét de l'inverse de Moore-Penrose, dans la section suivante nous établissons plusieurs formules de rang pour les expressions matricielles faisant intervenir cet inverse généralisé. Ces formules de rang sont trés importantes dans la théorie d'optimisation de rang et l'inertie des matrices.

2.2 Formules fondamentales de rang et l'inertie des matrices interviennent l'inverse de Moore-Penrose

Lemme 2.2.1 *[17] ,[27] Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$ et $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$. Alors ,*

$$\text{1) } r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A). \tag{2.2.1}$$

$$\text{2) } r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C). \tag{2.2.2}$$

$$\text{3) } r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C). \tag{2.2.3}$$

Preuve. 1) D'aprés les règles de Cancellation de rang (Factorization à rang complet, voir : proposition (1.1.2)). Soient V une matrice où tout ses vecteurs collonnes sont linéairement indépondants et H une matrice où tout ses vecteurs lignes sont linéairement indépondants. Alors pour toute matrice A on a $r(A) = r(VA) = r(AH)$.
Alors, (2.2.1) devienne :

$$\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} &= r\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}\right), \quad L_1 \to L_1 - \left(A^+B\right) L_2. \\
&= r\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^+B \\ 0 & I_k \end{bmatrix}\right), \\
&= r\begin{bmatrix} A & \left(I_m - AA^+\right) B \end{bmatrix}, \\
&= r\left(A\right) + r\left(\left(I_m - AA^+\right) B\right), \\
&= r\left(A\right) + r\left(E_A B\right).
\end{aligned}$$

D'une manière equivalente on trouve :

$$r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r\left(B\right) + r\left(E_B A\right).$$

2) Pour (2.2.2) aussi on a :

$$\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} &= r\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right), \qquad C_1 \to C_1 - C_2\left(CA^+\right). \\
&= r\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^+ & I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right), \\
&= r\begin{pmatrix} A \\ C(I_n - A^+A) \end{pmatrix}, \\
&= r(A) + r(CF_A).
\end{aligned}$$

D'une manière équivalente, on trouve :

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(C) + r(AF_C).$$

Où $A^{+} \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

3) Maintenant pour (2.2.3) :

On a d'aprés (2.2.1) et (2.2.2) :

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} + r\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} F_{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}\right), & (2.2.4) \\ &= r\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} + r\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\right)\right), \\ &= r(C) + r\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^{+} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\right)\right). & (2.2.5) \end{aligned}$$

Car $\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} C^{+} \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors, (2.2.5) devienne :

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(C) + r\begin{bmatrix} A(I_n - C^{+}C) & B \end{bmatrix} = r(C) + r\begin{bmatrix} AF_C & B \end{bmatrix}. \qquad (2.2.6)$$

Et d'aprés (2.2.1), on a :

$$r\begin{bmatrix} AF_C & B \end{bmatrix} = r\,(B) + r\,(E_B A F_C)\,.$$

Alors ,

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(C) + r(B) + r(E_B A F_C).$$

■

Lemme 2.2.2 *[26] Soient $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}, B \in \mathbb{C}_H^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{C}_H^{n\times n}$,et supposer que $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ une matrice non singulière .Alors ,*

1) $i_{\pm}(PAP^{*}) = i_{\pm}(A)$.

2) $i_{\pm}(A^{+}) = i_{\pm}(A)$ et $i_{\pm}(A^{2K+1}) = i_{\pm}(A)$.

3) $i_{\pm}(\lambda A) = \begin{cases} i_{\pm}(A), & si\ \lambda \succ 0 \\ i_{\mp}(A), & si\ \lambda \prec 0 \end{cases}$

4) $i_\pm \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = i_\pm(A) + i_\pm(B).$

5) $i_\pm \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{bmatrix} = r(Q).$

Preuve. 1) c'est la loi bien connue d'inertie de Sylvester.

2) On sait que les signes des valeurs propres des matrices A, A^+, A^{2k+1} sont les mêmes, donc 2) est satisfaite.

3) et 4) sont évidents d'aprés la définition de l'inertie.

5) évident, d'aprés la formule (2.2.8) ci-dessous. ■

Lemme 2.2.3 *[26] Soient $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $D \in \mathbb{C}_H^{n\times n}$. Alors ,*

$$i_\pm \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix} = i_\pm \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^* & D \end{bmatrix} = i_\mp \begin{bmatrix} -A & B \\ B & -D \end{bmatrix}. \tag{2.2.7}$$

Preuve. Considérons la matrice non singulière $P = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}$

On applique les propriétés (1) et (3) du lemme (2.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} i_\pm \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix} &= i_\pm \left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \right) \\ &= i_\pm \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \right) \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^* & D \end{bmatrix} \\ &= i_\pm \left(- \begin{bmatrix} -A & B \\ B^* & -D \end{bmatrix} \right) \\ &= i_\mp \begin{bmatrix} -A & B \\ B^* & -D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.4 *[26] ,[27] Soient $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ et $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$,et dénoter $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$.*

Alors ,

$$1)\ i_{\pm}(M) = r(B) + i_{\pm}(E_B A E_B). \tag{2.2.8}$$

$$2)\ i_{\pm}\begin{bmatrix} A & BF_P \\ F_P B^* & 0 \end{bmatrix} = i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{bmatrix} - r(P). \tag{2.2.9}$$

$$3)\ i_{\pm}(A) \le i_{\pm}(M) \le i_{\pm}(A) + r(B). \tag{2.2.10}$$

Preuve. 1) Posont $P = \begin{bmatrix} I_m & -(I_m - 1/2BB^+)A(B^+)^* \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$

Alors ,

$$\begin{aligned}
P\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}P^* &= \begin{bmatrix} I_m & -(I_m - 1/2BB^+)A(B^+)^* \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B^+A^*(I_m - 1/2BB^+)^* & I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A - \left(A - \frac{1}{2}BB^+A\right)(BB^+)^* - BB^+A^* + \frac{1}{2}BB^+A^*\,(BB^+)^* & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\left(I_m - (BB^+)^*\right) - (BB^+)\,A\left(I_m - (BB^+)^*\right) & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (I_m - BB^+)\,(A)\,(I_m - BB^+) & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \text{ car } A^* = A \text{ et } \left(BB^+\right)^* = BB^+ \\
&= \begin{bmatrix} E_BAE_B & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E_BAE_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donc ,

$$r\begin{bmatrix} E_BAE_B & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} E_BAE_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquant les formules (4) et (5) du lemme (2.2.2) on obtient,

$$\begin{aligned}
i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} &= i_{\pm}\begin{bmatrix} E_BAE_B & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \\
&= i_{\pm}\begin{bmatrix} E_BAE_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \\
&= r(B) + i_{\pm}(E_BAE_B)
\end{aligned}$$

2) D'aprés la formule (2.2.8). ci-dessus on a :
$i_{\pm}(E_BAE_B) = i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} - r(B).$
Donc ,

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} A & BF_P \\ F_PB^* & D \end{bmatrix} = i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{bmatrix} - r(P)$$

3) Comme $r\,(B) \geq 1$, pour toute matrice B non nulle, Alors ,

$$i_{\pm}(A) \leq i_{\pm}(A) + r(B). \tag{2.2.11}$$

Et aussi comme $M \in \mathbb{C}_H^{(m+n)\times(m+n)}$ et $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ c'est évidente que :

$$i_{\pm}(A) \leq i_{\pm}(M). \tag{2.2.12}$$

En plus ,

$$\begin{aligned}
i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} &= i_{\pm}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}\right), \\
&= i_{\pm}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{car } R\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap R\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} = \{0\} \\
&= i_{\pm}(A) + r(B). \text{(d'aprés les formules (4) et (5) du lemme (2.2.2).}
\end{aligned}$$

Donc ,

$$i_{\pm}(M) \leq i_{\pm}(A) + r(B). \tag{2.2.13}$$

Alors d'aprés (2.2.11) , (2.2.12) et (2.2.13) nous trouvons (2.2.10). ■

Le lemme suivant est tres important pour caractériser des égalités et des inégalités pour une matrice hermitienne. Cette méthode algébrique de base est outil pour l'étude de diverses expressions de la matrice hermitienne qui interviennent les inverses généralisés des matrices.

Lemme 2.2.5 *[26] ,[27] Soit S un ensembles consititué de matrices sur $\mathbb{C}^{m\times n}$; et soit H un ensemble constitué de matrices hermitiennes sur $\mathbb{C}^{m\times m}$. Alors ,*

1). Si $m = n$, S a une matrice non singulière si et seulement si

$$\max_{X\in S} r(X) = m.$$

2). Si $m = n$, tous les $X \in S$ sont non singulièrs si et seulement si

$$\min_{X\in S} r(X) = m.$$

3). $0 \in S$ si et seulement si

$$\min_{X\in S} r(X) = 0.$$

4). $S = \{0\}$ si et seulement si

$$\max_{X\in S} r(X) = 0.$$

5). Tout les $X \in S$ ont le même rang si seulement si

$$\max_{X\in S} r(X) = \min_{X\in S} r(X).$$

6). H a une matrice $X > 0$, $(X < 0)$ c-à-d définie positive (définie négative) respectivement si et seulement si

$$\max_{X\in H} i_+(X) = m, \;\; (\max_{X\in H} i_-(X) = m).$$

7). Tout $X \in H$ satisfaite $X > 0$, $(X < 0)$ si est seulement si

$$\min_{X\in H} i_+(X) = m, \;\; (\min_{X\in H} i_-(X) = m).$$

8). H a une matrice $X \geq 0$, $(X \leq 0)$ c-à-d définie non négative (définie non positive) respectivement si est seulement si

$$\min_{X\in H} i_-(X) = 0, \;\; (\min_{X\in H} i_+(X) = 0).$$

9). Tout $X \in H$ *satisfaite* $X \geq 0$, $(X \leq 0)$ *si est seulement si*

$$\max_{X\in H} i_-(X) = 0, \ \ (\max_{X\in H} i_+(X) = 0).$$

10). Tout les $X \in H$ *ont le même indice d'inertie positive si et seulement si*

$$\max_{X\in H} i_+(X) = \min_{X\in H} i_+(X).$$

11). Tout les $X \in H$ *ont le même indice d'inertie négative si et seulement si*

$$\max_{X\in H} i_-(X) = \min_{X\in H} i_-(X).$$

Chapitre 3

Sous matrices définies positives et définies négatives dans une solution de l'équation $AXA^* = B$

3.1 Introduction

Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{C}^{m\times n}$ et $\mathbb{C}_H^m$ désignent l'ensemble de toutes les $m \times n$ matrices complexes et de toutes les $m \times m$ matrices hermitiennes complexes respictivement. Pour toute $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, rappelons que A^*, A^T, $r(A)$, A^+et $R(A)$ représentent l'adjoint, le transposé, le rang, l'inverse de Moore-Penrose et l'image de A, respectivement. E_A et F_A représentent les deux projecteurs orthogonaux $E_A = I_m - AA^+$ et $F_A = I_n - A^+A$ induits par A respectivement, I_m est défini la matrice identitée d'ordre m, l'inertie de $A \in \mathbb{C}_H^m$ est l'ensemble $In(A) = \{i_+(A), i_-(A), i_0(A)\}$ où $i_+(A)$, $i_-(A)$ et $i_0(A)$ est le nombre de valeures propres positives, négatives et nulles de A comptées avec leurs multiplicités respictivement.

Considerons l'équation matricielle linéaire

$$AXA^* = B \tag{3.1.1}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, sont données et $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice inconnue.

L'équation (3.1.1) est l'une des équations matricielles les plus connues dans la théorie des matrices et ses applications. De nombreux recherches ont été effectuées sur la résolution des problèmes de minimisation d'inertie, et beaucoup de résultats ont été obtenus sur la minimisation d'inertie associé aux équations matricielles et de leurs solutions, voir [2], [5], [7], [11], [12], [13], [32], [35], [15], [16], [8], [28], [30]. Par exemple dans [15], Y. Liu et Y. Tian ont étudié les rangs extrémaux des sous-matrices dans la solution hermitienne de l'équation matricielle $AXA^* = B$, dans [16] Y. Liu et Y. Tian et Y. Takane ont étudié les rangs de la solution hermitienne et anti-hermitienne de (3.1.1), dans [30] l'auteur a étudié des problèmes d'optimisations de l'inertie de la matrice hermitienne , dans [8] S. Guerarra et S.Guedjiba ont donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que la paire d'équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$ ait une solution hermitienne commune définie positive (négative, non positive, non négative) de la solution à moindres carrées, dans [28] Y. Tian ont donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions à moindres carrées et les solutions à rang minimal de (3.1.1) coïncident.

Le concept de la solution à rang minimal des équations matricielles $AXA^* = B$ à été proposé par [29], et [31], pour étudier le rang minimal de la fonction matricielle linéaire $C - AXB$. concernant la consistence et la solution de (3.1.1), le résultat suivant est bien connu voir [7], [27].

Lemme 3.1.1 *L'équation matricielle (3.1.1) a une solution $X \in \mathbb{C}_H^n$ si et seulement si $R(B) \subset R(A)$ ou de manière équivalente, $AA^+B = B$.*
Dans ce cas, la solution hermitienne générale est donnée par :

$$X = A^+B\left(A^+\right)^* + F_AU + U^*F_A.$$

où $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est arbitraire. En particulier, la solution unique de (3.1.1) est donnée par :

$$X = A^+B\left(A^+\right)^*.$$

D'après [28], Nous introduisons ensuite comment l'auteur obtient la solution hermitienne à rang minimal de (3.1.1).

Soit

$$P(X) = B - AXA^* \tag{3.1.2}$$

Dans [25], l'auteur a donné le rang de $P(X)$ par la formule :

$$r[P(X)] = 2r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(M) + r\left(E_{T_1}\left(X + TM^+T^*\right)E_{T_1}\right). \tag{3.1.3}$$

Où

$$M = \begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad T_1 = TF_M.$$

Pour plus de commodité,

Soit :

$$\widehat{P}(X) = E_{T_1}\left(X + TM^+T^*\right)E_{T_1}. \tag{3.1.4}$$

et appelez-le : la forme de rang réduit de $P(X)$ dans (3.1.3)

Il est évident que,

$$\min_{X \in \mathbb{C}_H^n} r\left[P(X)\right] = 2r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(M) + \min_{X \in \mathbb{C}_H^n} r\left[\widehat{P}(X)\right]. \tag{3.1.5}$$

et le rang minimal de $\widehat{P}(X)$ dans (3.1.4) est évidement :

$$\min_{X \in \mathbb{C}_H^n} r\left[\widehat{P}(X)\right] = 0$$

C'est à dire le rang minimal de $P(X)$ est :

$$\min_{X \in \mathbb{C}_H^n} r\left(B - AXA^*\right) = 2r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

La matrice hermitienne X qui satisfait (3.1.6), est appellée la solution hermitienne à rang minimal de (3.1.1), elle est la solution de l'équation consistente :

$$E_{T_1}\left(X + TM^+T^*\right)E_{T_1} = 0 \tag{3.1.7}$$

D'après le lemme (3.1.1), la solution hermitienne générale de (3.1.7) est écrite par :

$$X = -TM^+T^* + T_1U + U^*T_1^*. \tag{3.1.8}$$

où $U \in \mathbb{C}^{(m+n)\times n}$ est arbitraire.

3.2 L'inertie maximale et minimale des sous matrices dans la solution hermitienne de $AXA^* = B$.

L'un des concepts fondamentaux de la théorie des matrices est la partition de la matrice, de nombreuses propriétés d'une matrice peuvent être extraites des sous-matrices dans sa partition.

Dans ce travail, nous établissons l'inertie maximale et minimale des deux sous-matrices hermitiennes X_1 et X_4 dans la solution Hermitienne à rang minimal X de l'équation $AXA^* = B$, à partir de ces formules, nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que la solution à rang minimal X de l'équation $AXA^* = B$ a des sous matrices définies positives ou définies négatives.

Notons par S l'ensemble de toutes les solution hermitienne à rang minimal de (3.1.1), c'est à dire

$$S = \{X \mid X \text{ minimise le rang de la difference } B - AXA^*\}$$

Rappelons que la solution générale à rang minimal de (3.1.1) est :

$$X = -TM^+T^* + T_1U + U^*T_1^*. \tag{3.2.9}$$

Où $M = \begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}$, $T_1 = TF_M$.

On partitionne la matrice $X \in S$ en matrice en blocs 2×2 sous la forme :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

dans ce cas l'équation (3.1.1) peut être reécrit comme

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{bmatrix} = B, \tag{3.2.10}$$

où $A_1 \in \mathbb{C}^{m\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{m\times n_2}$, $X_1 = X_1^* \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$, $X_3 = X_2^* \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1}$, $X_4 = X_4^* \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$, avec $n_1 + n_2 = n$.

Nous adoptons la notation suivante pour les ensembles des sous-matrices X_1 et X_4 dans (3.2.10)

$$S_i = \left\{ X_i | \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{bmatrix} = B \right\},\ i = 1, 4. \tag{3.2.11}$$

Il est facile de voir que X_1 et X_4 peuvent être reécris comme

$$X_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} = P_1 X P_1^*, \tag{3.2.12}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix} = P_2 X P_2^*. \tag{3.2.13}$$

Puisque, nous supposons que (3.1.1) est consistente, en substituant sa solution hermitienne générale (3.2.9) dans (3.2.12) et (3.2.13), on obtient les expressions générales de X_1 et X_4 :

$$X_1 = -P_1 X_0 P_1^* + P_1 T_1 U_1 + U_1^* T_1^* P_1^*. \tag{3.2.14}$$

$$X_4 = -P_2 X_0 P_2^* + P_2 T_1 U_2 + U_2^* T_1^* P_2^*. \tag{3.2.15}$$

où $X_0 = TM^+T^*$, $U = [U_1, U_2]$.

Nous avons besoin le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *[27] Soit*

$$p(X) = A - BX - (BX)^*.$$

où $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sont données et $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ est une matice variable ,
Soit $N = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$. Alors ,
a) L'inertie maximale de $p(X)$ est donnée par :

$$\max_{X \in \mathbb{C}^{n \times m}} i_\pm [p(X)] = i_\pm (N) = r(B) + i_\pm(E_B A E_B). \tag{3.2.16}$$

b) L'inertie minimale de $p(X)$ est donnée par :

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{n \times m}} i_\pm [p(X)] = i_\pm (N) - r(B) = i_\pm(E_B A E_B). \tag{3.2.17}$$

Preuve. On a d'aprés la formule (2.2.10) du lemme (2.2.4) que

$$i_\pm [p(X)] \leq i_\pm \begin{bmatrix} p(X) & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \leq i_\pm [p(X)] + r(B). \tag{3.2.18}$$

En appliquant (2.2.8) à la matrice en blocs dans (3.2.18) et en simplifiant ,on obtient :

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} p(X) & B \\ B^{*} & 0 \end{bmatrix}. = r(B) + i_{\pm}(E_B p(X) E_B) = r(B) + i_{\pm}(E_B A E_B). \tag{3.2.19}$$

de,(3.2.18) et (3.2.19) on a :

$$i_{\pm}(E_B A E_B) \leq i_{\pm}\left[p(X)\right] \leq r(B) + i_{\pm}(E_B A E_B). \tag{3.2.20}$$

C'est -à- dire que $i_{\pm}(E_B A E_B)$ et $r(B) + i_{\pm}(E_B A E_B)$ sont les limites inférieure et supérieure de $i_{\pm}\left[p(X)\right]$, respectivement. ■

Théorème 3.2.1 *Supposons que l'équation matricielle dans (3.2.10) est consistente, et soit S_i indiqué dans (3.2.11). Notons par :*

$$K_1 = \begin{bmatrix} B & A_2 \\ A^{*} & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} B & A_1 \\ A^{*} & 0 \end{bmatrix}$$

Alors ,

$$a)\ \max_{X_1 \in S_1} i_{\pm}\left(X_1\right) = i_{\pm}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^{*} & 0 \end{bmatrix} + n_1 - r\left(M\right), \tag{3.2.21}$$

$$b)\ \min_{X_1 \in S_1} i_{\pm}\left(X_1\right) = i_{\pm}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^{*} & 0 \end{bmatrix} - r\left(K_1\right), \tag{3.2.22}$$

$$c)\ \max_{X_4 \in S_4} i_{\pm}\left(X_4\right) = i_{\pm}\begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^{*} & 0 \end{bmatrix} + n_2 - r\left(M\right), \tag{3.2.23}$$

$$d)\ \min_{X_4 \in S_4} i_{\pm}\left(X_4\right) = i_{\pm}\begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^{*} & 0 \end{bmatrix} - r\left(K_2\right). \tag{3.2.24}$$

Preuve. Premuièrement on prouve a) et b) :
De (3.2.14) nous pouvons écrire ,

$$X_1 = G + H_1 U_1 + \left(H_1 U_1\right)^{*} \tag{3.2.25}$$

Où $G = -P_1 T M^{+} T^{*} P_1^{*}$, $H_1 = P_1 T_1$.

En appliquant les formules (3.2.16) et (3.2.17) à (3.2.25), on obtient ,

$$\max_{X_1 \in S_1} i_{\pm}(X_1) = \max_{U_1} \left(G + H_1U_1 + (H_1U_1)^*\right) = i_{\pm}\begin{bmatrix} G & H_1 \\ H_1^* & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2.26}$$

$$\begin{aligned} \min_{X_1 \in S_1} i_{\pm}(X_1) &= \min_{U_1} \left(G + H_1U_1 + (H_1U_1)^*\right) \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} G & H_1 \\ H_1^* & 0 \end{bmatrix} - r(H_1). \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

En appliquant (2.2.9) à la matrice $\begin{bmatrix} G & H_1 \\ H_1^* & 0 \end{bmatrix}$, et en simplifier par les formules (2.2.7) et $M^* = M$, et aussi en utilisant les trois types des opérations élémentaires et de congruence sur les matrices en block nous obtenons ,

$$\begin{aligned} i_{\pm}\begin{bmatrix} G & H_1 \\ H_1^* & 0 \end{bmatrix} &= i_{\pm}\begin{bmatrix} -P_1TM^+T^*P_1^* & P_1T_1 \\ T_1^*P_1^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} -P_1TM^+T^*P_1^* & P_1TF_M \\ F_MT^*P_1^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} -P_1TM^+T^*P_1^* & P_1T & 0 \\ T^*P_1^* & 0 & M^* \\ 0 & M & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} -P_1TM^+T^*P_1^* & 0 & P_1T \\ 0 & 0 & M \\ T^*P_1^* & M^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}P_1TM^+M^* & P_1T \\ -\frac{1}{2}MM^+T^*P_1^* & 0 & M \\ T^*P_1^* & M^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \end{aligned}$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1T \\ 0 & MM^{+}M^{*} & M \\ T^{*}P_1^{*} & M^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1T \\ 0 & M & M \\ T^{*}P_1^{*} & M & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & B & A_1 & A_2 & B & A_1 & A_2 \\ 0 & A_1^{*} & 0 & 0 & A_1^{*} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{*} & 0 & 0 & A_2^{*} & 0 & 0 \\ 0 & B & A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_1} & A_1^{*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{*} & A_1^{*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^{*} & A_2^{*} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & B & B & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_1 + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & A_1^{*} & A_1^{*} & 0 \\ 0 & 0 & A_2^{*} & A_2^{*} & 0 \\ A_1 & A_2 & 0 & B & 0 \\ A_1 & A_2 & B & B & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & A_2^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_1 + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & A^{*} & A^{*} & 0 \\ A & 0 & B & 0 \\ A & B & B & A_2 \\ 0 & 0 & A_2^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_1 + i_{\pm} \begin{bmatrix} B & A & B & A_2 \\ A^* & 0 & A^* & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ A_2^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_1 + i_{\pm} \begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \tag{3.2.28}$$

Maintenant, en appliquant (2.2.2) à la matrice H_1 ,on trouve ,

$$r(H_1) = r(P_1T_1) = r(P_1TF_M)$$
$$= r \begin{bmatrix} P_1T \\ M \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= r \begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 \\ B & A_1 & A_2 \\ A_1^* & 0 & 0 \\ A_2^* & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$
$$= r \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & B & A_2 \\ 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$
$$= r \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & B & A_2 \\ 0 & A^* & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$
$$= n_1 + r(K_1) - r(M). \tag{3.2.29}$$

Par la substitution de (3.2.28) et (3.2.29) dans (3.2.26) et (3.2.27) on trouve (3.2.21) et (3.2.22).

De manière similaire nous traitons X_4,

De (3.2.14) nous pouvons aussi écrire,

$$X_4 = G + H_2U_2 + (H_2U_2)^* \tag{3.2.30}$$

Où $G = -P_2TM^+T^*P_2^*$, $H_2 = P_2T_1$.

En appliquant les formules (3.2.16) et (3.2.16) à (3.2.30), on obtient ,

$$\max_{X_4 \in S_4} i_\pm (X_4) = \max_{U_4} (G + H_2U_2 + (H_2U_2)^*) = i_\pm \begin{bmatrix} G & H_2 \\ H_2^* & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2.31}$$

$$\begin{aligned} \min_{X_4 \in S_4} i_\pm (X_4) &= \min_{U_4} (G + H_2U_2 + (H_2U_2)^*) \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} G & H_2 \\ H_2^* & 0 \end{bmatrix} - r(H_2). \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

En appliquant (2.2.9) à la matrice $\begin{bmatrix} G & H_2 \\ H_2^* & 0 \end{bmatrix}$, et en simplifier par les formules (2.2.7) et $M^* = M$, et aussi en utilisant les trois types d'opérations élémentaires de matrices de congruence par blocs nous obtenons,

$$\begin{aligned} i_\pm \begin{bmatrix} G & H_2 \\ H_2^* & 0 \end{bmatrix} &= i_\pm \begin{bmatrix} -P_2TM^+T^*P_2^* & P_2T_1 \\ T_1^*P_2^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} -P_2TM^+T^*P_2^* & P_2TF_M \\ F_MT^*P_2^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} -P_2TM^+T^*P_2^* & P_2T & 0 \\ T^*P_2^* & 0 & M^* \\ 0 & M & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} -P_2TM^+T^*P_2^* & 0 & P_2T \\ 0 & 0 & M \\ T^*P_2^* & M^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}P_2TM^+M^* & P_2T \\ -\frac{1}{2}MM^+T^*P_2^* & 0 & M \\ T^*P_2^* & M^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= i_\pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_2T \\ 0 & MM^+M^* & M \\ T^*P_2^* & M^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \end{aligned}$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_2T \\ 0 & M & M \\ T^*P_2^* & M & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_2} \\ 0 & B & A_1 & A_2 & B & A_1 & A_1 \\ 0 & A_1^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 & 0 & A_2^* & 0 & 0 \\ 0 & B & A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_2} & A_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^* & 0 & A_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^* & 0 & A_2^* \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^* \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & B & A_1 & B \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_2 + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & 0 & A_1^* & 0 & A_1^* \\ 0 & 0 & A_2^* & 0 & A_2^* \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^* \\ A_1 & A_2 & B & A_1 & B \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_2 + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & A^* & 0 & A^* \\ A & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A_1^* \\ A_1 & B & A_1 & B \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_2 + i_{\pm}\begin{bmatrix} B & A & B & A_1 \\ A^* & 0 & A^* & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ A_1^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(M)$$

$$= n_2 + i_{\pm}\begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \tag{3.2.33}$$

Maintenant , en appliquant (2.2.1) à la matrice H_2 ,on trouve ,

$$\begin{aligned} r(H_2) &= r(P_2T_1) = r(P_2TF_M) \\ &= r\begin{bmatrix} P_2T \\ M \end{bmatrix} - r(M) \\ &= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{n_2} \\ B & A_1 & A_1 \\ A_1^* & 0 & 0 \\ A_2^* & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= r\begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & B & A_1 \\ 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= r\begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & B & A_1 \\ 0 & A^* & 0 \end{bmatrix} - r(M) \\ &= n_2 + r(K_2) - r(M). \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Par la substitution de (3.2.33) et (3.2.34) dans (3.2.31) and (3.2.32) on trouve (3.2.23) et (3.2.24).

■

Maintenant nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour les quelles les sous matrices X_1 et X_4 soient définies positives (négatives, non positives, non négatives).

D'aprés le théorème (3.2.1) et le lemme (2.2.5) on a le résultat suivant :

Corollaire 3.2.1 *Supposons que l'équation matricielle (3.2.10) est consistente, et soit S_i est indiqué dans (3.2.11). Alors ,*

a) L'équation (3.2.10) a une solution de la forme $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *telle que* $X_1 \in \mathbb{C}_H^{n_1}$ *satisfaisant*

$X_1 \geq 0$ *i.e,* X_1 *est définie non négative,(*$X_1 \leq 0$*, i.e,* X_1 *est définies non positive) si et seulement si*

$$i_{-}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(K_1\right), \quad (i_{+}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(K_1\right)).$$

b) Toutes les solutions $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *de l'équation (3.2.10) ont* $X_1 \geq 0$*, (*$X_1 \leq 0$*) si et seulement si*

$$i_{-}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(M\right) - n_1, \quad (i_{+}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(M\right) - n_1).$$

c) L'équation (3.2.10) a une solution de la forme $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *telle que* $X_1 \in \mathbb{C}_H^{n_1}$ *satisfaisant* $X_1 > 0$*, i.e,* X_1 *est définie positive, (*$X_1 < 0$*, i.e,* X_1 *est définies négative,) si et seulement si*

$$i_{+}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(M\right), \quad (i_{-}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(M\right)).$$

d) Toutes les solutions $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *de l'équation (3.2.10) ont* $X_1 > 0$*, (*$X_1 < 0$*) si et seulement si*

$$i_{+}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(K_1\right) + n_1, \quad (i_{-}\begin{bmatrix} M & K_1 \\ K_1^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(K_1\right) + n_1).$$

e) L'équation (3.2.10) a une solution de la forme $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *telle que* $X_4 \geq 0$*, i.e,* X_4 *est définies non négative,(*$X_4 \leq 0$*, i.e,* X_4 *est définies non positive) si et seulement si*

$$i_{-}\begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(K_2\right), \quad (i_{+}\begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(K_2\right)).$$

f) Toutes les solutions $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *de l'équation (3.2.10) ont* $X_4 \geq 0$*, (*$X_4 \leq 0$*) si et seulement si*

$$i_- \begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r(M) - n_2, \quad (i_+ \begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r(M) - n_2).$$

g) L'équation (3.2.10) a une solution de la forme $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *telle que* $X_4 > 0$, *i.e,* X_4 *est définies positive, (*$X_4 < 0$*, i.e,* X_4 *est définies négative,) si et seulement si*

$$i_+ \begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r(M), \quad (i_- \begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r(M)).$$

h) Toutes les solutions $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ *de l'équation (3.2.10) ont* $X_4 > 0$, $(X_4 < 0)$ *si et seulement si*

$$i_+ \begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r(K_2) + n_2, \quad (i_- \begin{bmatrix} M & K_2 \\ K_2^* & 0 \end{bmatrix} = r(K_2) + n_2).$$

Exemple 3.2.1 *Considérons l'équation matricielle :*

$$AXA^* = B$$

Où $A = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 2 & 4i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_H^{2\times 2}$.

Donc la solution à rang minimal de cet équation est

$$X = -TM^+T^* + T_1U + (T_1U)^*. \tag{3.2.35}$$

où $M = \begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$

Maintenant on cherche M^+.

Soit la décomposition à plein rang de la matrice M

$$M = BC = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -2i & 2 \\ -i & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{bmatrix}$$

D'où

$$M^{+}=C^{*}\left(CC^{*}\right)^{-1}\left(B^{*}B\right)^{-1}B^{*}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{25}i & -\frac{2}{25} \\ 0 & 0 & \frac{2}{25} & \frac{4}{25}i \\ -\frac{1}{25}i & \frac{2}{25} & -\frac{1}{25} & -\frac{2}{25}i \\ -\frac{2}{25} & -\frac{4}{25}i & \frac{2}{25}i & -\frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

On a : $T=\begin{bmatrix} 0 & I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Alors, $T_1=TF_M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5}i & 0 & 0 \\ \frac{2}{5}i & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5}i \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}i & \frac{1}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5}i \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}i & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

On choisie $U=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

donc $T_1U=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5}i \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}i & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}i & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}i \end{bmatrix}$

Donc

$$\begin{aligned} X &= -TM^{+}T^{*}+T_1U+(T_1U)^{*} \\ X &= \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 1+\frac{2}{25}i \\ 1-\frac{2}{25}i & \frac{4}{25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas on a $X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 1+\frac{2}{25}i \\ 1-\frac{2}{25}i & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$

d'où $X_1=\left[\frac{1}{25}\right]$, *et* $X_4=\left[\frac{4}{25}\right]$,

On a X_1 *et* X_2 *sont définies positives.*

Exemple 3.2.2 *Considérons toujours l'équation* $AXA^{*}=B$ *où*

$$A=\begin{bmatrix}0&2&2&0\\-4&2i&2i&-2\\2i&1&1&i\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&i\\0&-i&1\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{bmatrix}\in\mathbb{C}_H^{4\times4}$$

Donc la solution à rang minimal de cet équation est

$$X=-TM^{+}T^{*}+T_1U+(T_1U)^{*}. \tag{3.2.36}$$

où $M=\begin{bmatrix}B&A\\A^{*}&0\end{bmatrix}$

Maintenant on cherche M^{+}, *où* $M=\begin{bmatrix}1&2&0&0&2&2&0\\2&0&i&-4&2i&2i&-2\\0&-i&1&2i&1&1&i\\0&-4&-2i&0&0&0&0\\2&-2i&1&0&0&0&0\\2&-2i&1&0&0&0&0\\0&-2&-i&0&0&0&0\end{bmatrix}$, *avec* $r(M)=4$

Soit la factorization à rang complet suivant

$$M=BC=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\2&0&0&2i\\0&-i&0&1\\0&-4&0&0\\2&-2i&0&0\\2&-2i&0&0\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&\frac{i}{2}&0&0&0&0\\0&-2&0&0&-2&-2&0\\0&0&\frac{1}{2}&2i&1&1&i\end{bmatrix}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
M^{+} &= C^{*}\left(CC^{*}\right)^{-1}\left(B^{*}B\right)^{-1}B^{*} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{71}{59} & \frac{29}{118}-\frac{1}{59}i & \frac{8}{59}-\frac{3}{59}i \\ 0 & \frac{29}{118}+\frac{1}{59}i & \frac{9}{59} & \frac{5}{59}-\frac{1}{118}i \\ 0 & \frac{8}{59}+\frac{3}{59}i & \frac{5}{59}+\frac{1}{118}i & \frac{11}{59} \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} \frac{9}{59} & \frac{1}{236}+\frac{5}{118}i & \frac{9}{59} & \frac{1}{118}-\frac{29}{236}i \\ \frac{1}{236}-\frac{5}{118}i & \frac{11}{236} & \frac{1}{236}-\frac{5}{118}i & -\frac{2}{59}-\frac{3}{236}i \\ \frac{9}{59} & \frac{1}{236}+\frac{5}{118}i & \frac{68}{59} & \frac{1}{118}-\frac{29}{236}i \\ \frac{1}{118}+\frac{29}{236}i & -\frac{2}{59}+\frac{3}{236}i & \frac{1}{118}+\frac{29}{236}i & \frac{71}{236} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -4 & 2i & 2i & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
M^{+} = \begin{bmatrix}
0 & \frac{7}{118}-\frac{1}{59}i & -\frac{2}{59}-\frac{7}{59}i & -\frac{1}{59}-\frac{10}{59}i & \frac{13}{59}+\frac{1}{118}i & \frac{13}{59}+\frac{1}{118}i & -\frac{1}{118}-\frac{5}{59}i \\
\frac{7}{118}+\frac{1}{59}i & -\frac{405}{13\,924} & -\frac{2}{59}+\frac{169}{6962}i & -\frac{981}{6962}+\frac{48}{3481}i & -\frac{1}{3481}-\frac{1}{236}i & -\frac{1}{3481}-\frac{1}{236}i & -\frac{981}{13\,924}+\frac{24}{3481}i \\
-\frac{2}{59}+\frac{7}{59}i & -\frac{2}{59}-\frac{169}{6962}i & \frac{67}{3481} & -\frac{96}{3481}+\frac{317}{3481}i & \frac{3}{118}-\frac{61}{3481}i & \frac{3}{118}-\frac{61}{3481}i & -\frac{48}{3481}+\frac{317}{6962}i \\
-\frac{1}{59}+\frac{10}{59}i & -\frac{981}{6962}-\frac{48}{3481}i & -\frac{96}{3481}-\frac{317}{3481}i & -\frac{233}{3481} & \frac{260}{3481}-\frac{247}{6962}i & \frac{260}{3481}-\frac{247}{6962}i & -\frac{233}{6962} \\
\frac{13}{59}-\frac{1}{118}i & -\frac{1}{3481}+\frac{1}{236}i & \frac{3}{118}+\frac{61}{3481}i & \frac{260}{3481}+\frac{247}{6962}i & -\frac{765}{13\,924} & -\frac{765}{13\,924} & \frac{130}{3481}+\frac{247}{13\,924}i \\
\frac{13}{59}-\frac{1}{118}i & -\frac{1}{3481}+\frac{1}{236}i & \frac{3}{118}+\frac{61}{3481}i & \frac{260}{3481}+\frac{247}{6962}i & -\frac{765}{13\,924} & -\frac{765}{13\,924} & \frac{130}{3481}+\frac{247}{13\,924}i \\
-\frac{1}{118}+\frac{5}{59}i & -\frac{981}{13\,924}-\frac{24}{3481}i & -\frac{48}{3481}-\frac{317}{6962}i & -\frac{233}{6962} & \frac{130}{3481}-\frac{247}{13\,924}i & \frac{130}{3481}-\frac{247}{13\,924}i & -\frac{233}{13\,924}
\end{bmatrix}
$$

On a : $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Et\ F_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{59} & -\frac{20}{59}i & -\frac{4}{59}+\frac{4}{59}i & -\frac{5}{59} & -\frac{5}{59} & -\frac{2}{59}+\frac{2}{59}i \\ 0 & \frac{20}{59}i & \frac{40}{59} & -\frac{8}{59}-\frac{8}{59}i & -\frac{10}{59}i & -\frac{10}{59}i & -\frac{4}{59}-\frac{4}{59}i \\ 0 & -\frac{4}{59}-\frac{4}{59}i & -\frac{8}{59}+\frac{8}{59}i & \frac{15}{59} & \frac{2}{59}+\frac{2}{59}i & \frac{2}{59}+\frac{2}{59}i & -\frac{22}{59} \\ 0 & -\frac{5}{59} & \frac{10}{59}i & \frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & \frac{32}{59} & -\frac{27}{59} & \frac{1}{59}-\frac{1}{59}i \\ 0 & -\frac{5}{59} & \frac{10}{59}i & \frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & -\frac{27}{59} & \frac{32}{59} & \frac{1}{59}-\frac{1}{59}i \\ 0 & -\frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & -\frac{4}{59}+\frac{4}{59}i & -\frac{22}{59} & \frac{1}{59}+\frac{1}{59}i & \frac{1}{59}+\frac{1}{59}i & \frac{48}{59} \end{bmatrix}$$

$$Alors,\ T_1 = TF_M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{59}-\frac{4}{59}i & -\frac{8}{59}+\frac{8}{59}i & \frac{15}{59} & \frac{2}{59}+\frac{2}{59}i & \frac{2}{59}+\frac{2}{59}i & -\frac{22}{59} \\ 0 & -\frac{5}{59} & \frac{10}{59}i & \frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & \frac{32}{59} & -\frac{27}{59} & \frac{1}{59}-\frac{1}{59}i \\ 0 & -\frac{5}{59} & \frac{10}{59}i & \frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & -\frac{27}{59} & \frac{32}{59} & \frac{1}{59}-\frac{1}{59}i \\ 0 & -\frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & -\frac{4}{59}+\frac{4}{59}i & -\frac{22}{59} & \frac{1}{59}+\frac{1}{59}i & \frac{1}{59}+\frac{1}{59}i & \frac{48}{59} \end{bmatrix}$$

$$On\ choisie\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Donc\ T_1U = \begin{bmatrix} -\frac{4}{59}-\frac{4}{59}i & -\frac{26}{59}+\frac{12}{59}i & \frac{3}{59}+\frac{4}{59}i & -\frac{10}{59}-\frac{10}{59}i \\ -\frac{5}{59} & \frac{6}{59}+\frac{9}{59}i & -\frac{3}{59}+\frac{8}{59}i & -\frac{42}{59} \\ -\frac{5}{59} & \frac{6}{59}+\frac{9}{59}i & -\frac{3}{59}+\frac{8}{59}i & \frac{17}{59} \\ -\frac{2}{59}-\frac{2}{59}i & \frac{46}{59}+\frac{6}{59}i & -\frac{28}{59}+\frac{2}{59}i & -\frac{5}{59}-\frac{5}{59}i \end{bmatrix}$$

Donc la solution à rang minimal de cet équation est

$$X = -TM^{+}T^{*} + T_1U + (T_1U)^{*}. \tag{3.2.37}$$

$$= \left(-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times M^{+} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{3.2.38}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{4}{59} - \frac{4}{59}i & -\frac{26}{59} + \frac{12}{59}i & \frac{3}{59} + \frac{4}{59}i & -\frac{10}{59} - \frac{10}{59}i \\ -\frac{5}{59} & \frac{6}{59} + \frac{9}{59}i & -\frac{3}{59} + \frac{8}{59}i & -\frac{42}{59} \\ -\frac{5}{59} & \frac{6}{59} + \frac{9}{59}i & -\frac{3}{59} + \frac{8}{59}i & \frac{17}{59} \\ -\frac{2}{59} - \frac{2}{59}i & \frac{46}{59} + \frac{6}{59}i & -\frac{28}{59} + \frac{2}{59}i & -\frac{5}{59} - \frac{5}{59}i \end{bmatrix} \tag{3.2.39}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{4}{59} + \frac{4}{59}i & -\frac{5}{59} & -\frac{5}{59} & -\frac{2}{59} + \frac{2}{59}i \\ -\frac{26}{59} - \frac{12}{59}i & \frac{6}{59} - \frac{9}{59}i & \frac{6}{59} - \frac{9}{59}i & \frac{46}{59} - \frac{6}{59}i \\ \frac{3}{59} - \frac{4}{59}i & -\frac{3}{59} - \frac{8}{59}i & -\frac{3}{59} - \frac{8}{59}i & -\frac{28}{59} - \frac{2}{59}i \\ -\frac{10}{59} + \frac{10}{59}i & -\frac{42}{59} & \frac{17}{59} & -\frac{5}{59} + \frac{5}{59}i \end{bmatrix} \tag{3.2.40}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{239}{3481} & -\frac{2089}{3481} + \frac{1663}{6962}i & -\frac{378}{3481} + \frac{719}{6962}i & -\frac{1183}{6962} - \frac{8}{59}i \\ -\frac{2089}{3481} - \frac{1663}{6962}i & \frac{3597}{13\,924} & \frac{1473}{13\,924} - \frac{1}{59}i & \frac{106}{3481} - \frac{1663}{13\,924}i \\ -\frac{378}{3481} - \frac{719}{6962}i & \frac{1473}{13\,924} + \frac{1}{59}i & -\frac{651}{13\,924} & -\frac{779}{3481} - \frac{719}{13\,924}i \\ -\frac{1183}{6962} + \frac{8}{59}i & \frac{106}{3481} + \frac{1663}{13\,924}i & -\frac{779}{3481} + \frac{719}{13\,924}i & -\frac{2127}{13\,924} \end{bmatrix} \tag{3.2.41}$$

Ici on a $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, *tel que* $X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{239}{3481} & -\frac{2089}{3481} + \frac{1663}{6962}i \\ -\frac{2089}{3481} - \frac{1663}{6962}i & \frac{3597}{13\,924} \end{bmatrix}$,
$X_4 = \begin{bmatrix} -\frac{651}{13\,924} & -\frac{779}{3481} - \frac{719}{13\,924}i \\ -\frac{779}{3481} + \frac{719}{13\,924}i & -\frac{2127}{13\,924} \end{bmatrix}$

X_1 *admet deux valeurs propres :* $\lambda_1 = \frac{1}{27\,848}\sqrt{344\,269\,857} + \frac{2641}{27\,848} \succ 0$ *et* $\lambda_2 = \frac{2641}{27\,848} - \frac{1}{27\,848}\sqrt{344\,269\,857} \prec 0$

Donc X_1 *n'est pas classifié c à d* X_1 *ni définie positive ni définie négative*

Pour X_4, *les valeurs propres sont :* $\lambda_1 = \frac{1}{13\,924}\sqrt{10\,771\,061} - \frac{1389}{13\,924} \succ 0$ *et* $\lambda_2 = -\frac{1}{13\,924}\sqrt{10\,771\,061} -$

$\frac{1389}{13\,924} \prec 0$

D'où X_4 *n'est pas classifié.*

Conclusion

Nous avons étudié un problème d'optimisation de l'inertie des matrices hermitiennes, les techniques de résolution de ce problème d'optimisation reposent entièrement sur les opérations élémentaires des matrices et leurs inverse généralisé de Moore Penrose.

L'inertie d'une matrice joue un rôle essentiel dans la caractérisation des propriétés algébriques des matrices hermitiennes, l'inerties des matrices hermitiennes a été l'objet principal d'étude des solutions hermitiennes définies positives et définies non négatives d'une équation matricielle.

L'équation $AXA^* = B$ est l'une des équations matricielles la plus connues dans la théorie des matrices. A cet égard, on a étudié l'inertie maximale et minimale des sous matrices dans la solution hermitienne à rang minimal de cet équation, à partir de ces formules on obtient les conditions necessaires et suffisantes pour classifier ces sous matrices.

Bibliographie

[1] S.C. Alexandar, V.M.Gradimir, *Positive definite solutions of some matrix equations*, Linear Algebra Appl. **429** (2008) 2401-2414.

[2] J. K. Baksalary*, Nonnegative definite and positive definite solutions to the matrix equation* $AXA^* = B$*.* Linear Multilinear Algebra*.* **16** (1984) 133–139.

[3] A. Ben Israel and T. Greville, *Generalized Inverse ,Theory and Applications*, Kreiger, (1980).

[4] S.L. Cambell and C. D. Meyer, *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Society for industrial and applied Mathematics, (2009).

[5] H. Dai, P. Lancaster*, Linear matrix equations from an inverse problem of vibration theory.* Linear Algebra Appl. **246** (1996) 31–47....(12)

[6] X. Fu Liu, Hu Yang, *An expression of the general common least squares solution to a pair of matrix equations with applications*, Comp. math. appl, **61** (2011), 3071-3078.

[7] J. Gross, *Nonnegative-definite and positive definite solutions to the matrix equation* $AXA^* = B$*-revisited*, Linear Algebra Appl. **321** (2000), 123-129.

[8] S. Guerarra and S. Guedjiba, *Common Hermitian least-rank solution of matrix equations* $A_1XA_1^* = B_1$ *and* $A_2XA_2^* = B_2$ *subject to inequality restrictions*, Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform, **30** (2015), 539-554.

[9] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc, 54 (1948), 575-580.

[10] S. Karanasios and D. Pappas, *Generalized inverses and special type operator algebras*, Facta universitatis (Niš).Ser. Math. Inform, **21** (2006), 41-48.

[11] C.G. Khatri, S.K.Mitra, *Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations*, SIAM J. Appl. Math. **31**(1976) 579-585.

[12] A. Liao, Z. Bai*, The constrained solutions of two matrix equations.* ActaMath. Sin. Engl. Ser. **18(4)**. (2002) 671–678.

[13] A. Liao, Z. Bai*, Least-squares solutions of the matrix equation $A^TXA = D$ in bisymmetric matrix set.* Math. Numer. Sin. **24(1)** (2002) 9–20.

[14] Y. Liu, *Ranks of least squares solutions of the matrix equation $AXB = C$*, Comp. math. appl, **55** (2008), 1270-1278.

[15] Y. Liu.Y. Tian, *Extremal ranks of submatrices in an Hermitian solution to the matrix equation $AXA^* = B$ with applications*, J. Appl. Math. Comput. **32** (2010), 289-301.

[16] Y. Liu.Y. Tian, Y. Takane, *Ranks of Hermitian and skew-Hermitian solutions to the matrix equation $AXA^* = B$*, Linear Algebra Appl. **431** (2009), 2359-2372.

[17] G. Marsaglia, G.P.H. Styan, *Equalities and inequalities for rank of matrices*, Linear Multilinear Algebra **2** (1974) 269-292.

[18] S. K. Mitra, *A pair of of simultaneous linear matrix equations and a matrix programming problem*, Linear Algebra Appl, **131** (1990), 97-123.

[19] S. K. Mitra, *Common solution to a pair of linear matrix equations $A_1X_1B_1 = C_1$ and $A_2X_2B_2 = C_2$*, Proc. Cambridge philos, Soc **74** (1973), 213-216.

[20] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix , Bull. Amer. Math. Soc, 26 (1920), 394-395.

[21] A. Navarra, P. L. Odell, D. M. Yong, *A representation of the general common solution $A_1X_1B_1 = C_1$ and $A_2X_2B_2 = C_2$ with applications*, Comp. Math. Appl, **41** (2001), 929-935.

[22] J. V Neumann, On regular rings, Proc. Natl. Acad. Sci USA 1936, 22 (12), 707-713.

[23] A.B. Özgüler, N. Akar, *A common solution to a pair of linear matrix equations over a principal ideal domain*, Linear Algebra Appl. **144** (1991) 85-99.

[24] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. camb. Phil. Soc, **52** (1955).

[25] Y. Tian, Y. Liu. *Extremal ranks of some symmetric matrix expressions with applications.* SIAM J on Matrix Analysis Appl, **28** (2006), 890-905.

[26] Y. Tian, *Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 263-296.

[27] Y. Tian, *Maximization and minimization of the rank and inertias of the Hermitian matrix expression* $A-BX-(BX)^*$ *with applications*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 2109-2139.

[28] Y. Tian, *Least-squares solutions and least-rank solutions of the matrix equation* $AXA^* = B$ *and their relations*, Numer. Linear Algebra Appl. **20** (2013), 713-722.

[29] Y. Tian, *The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices*, Southeast Asian Bull. Math, **25** (2002), 745-755.

[30] Y. Tian, *A survey on rank and inertia optimization problems of the matrix-valued function* $A+BXB^*$, Numer Algebra Control Optim. **5** (2015) 289-326.

[31] Y. Tian, S. Cheng, *The maximal and minimal ranks of* $A-BXC$ *with applications*, N. Y. J. Math. **9** (2003), 345-362.

[32] M. Wei and Q. Wang, *On rank-constrained Hermitian nonnegative definite least squares solutions to the matrix equation* $AXA^* = B$, Int. J. Comput. Math. **84** (2007), 945-952.

[33] H. Yanai, K. Takeuchi, Y. Takane, *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer, 2011.

[34] P. Stanimirovic, *General Determinantal representation of pseudoinverses of matrices*, Math. Vesnik **48** (1996), 1-9.

[35] X. Zhang and M. Cheng, *The rank-constrained Hermitian nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation* $AXA^* = B$, Linear Algebra Appl. **370** (2003), 163-174.