

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN MHIDI-OUM  
EL BOUAGHI

Faculté de science Technologie  
Département de génie civil



جامعة العربي بن المهدي  
أم البواقي  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية

## Mémoire de Master

No. Réf. : ...../...../2020

Présenté au Département de génie civil

Domaine : Sciences et Technologie  
Filière : Génie civil  
Spécialité : structure

Réalisé par :

**M. LOUAFI YACINE**

Thème

***Modèle rhéologique à l'élément élastique et visqueux variables***

*Soutenu le...../...../..... devant la commission d'examen composée de :*

M.	.....	Président
M.	ALI LAHMAR	Directeur du Mémoire
M.	.....	Examineur
M.	.....	Examineur

**Promotion 2020/2021**

الله أكبر

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à:*

- ❁ *A mes très chères parents qui m'ont soutenue moralement et financièrement et de tendresse qu'**Allah** me les garde durant toute ma vie.*
- ❁ *A mes très chères sœurs : **lamia et fairouz.***
- ❁ *A mes frères : **Moustafa, seif eddine.***
- ❁ *toute la famille **louafi.***
- ❁ *A mes Amies: **khaled, hichame, Ousama, youcef, imed, amine, issam.***
- ❁ *Toutes les autres qui je n'ai pas cité nommément et qui se reconnaître dans ma dédicace.*

*A tous ma promotion de Génie Civil **2020/2021***

**yacine**



# Remerciement

Avant tout, louange à "Allah", notre créateur et mètre de l'univers, de toutes ces bontés, s'avoir envoyé à nous tous le prophète "Mohamed" (I) qui doit être notre premier éducateur, puis de nous avoir donné tout de courage pour terminer ce travail de recherche.

Un très grand merci à:

- ❁ mon encadreur **M<sup>r</sup> Lahmar ali**, pour l'encadrement et orienté tout au long de cette recherche.
- ❁ mes parents qui nous ont suivis pendant mes études
- ❁ Je tiendrai à remercier chaleureusement mes familles respectives pour toute l'aide et soutien, moral et économique, qu'ils m'ont apporté tout au long de mes études. J'espère être à la hauteur de leurs espérances et me montrer dignes de leurs confiances et de leurs encouragements.
- ❁ Je tiendrai à remercier chaleureusement tous les professeurs qui m'a enseignés au cours des études primaires jusqu'aux années du cursus universitaire pour l'obtention du diplôme d'ingénieur.
- ❁ Toute personne ayant contribué de près ou de loin à achever ce travail,
- ❁ Et bien sûr, merci à tous les travailleurs de L'Universitaire Oum el Bouaghi et à tous mes amis avec qui j'ai gardé des souvenirs très agréables des bons moments vécus ensemble.
- ❁ En fin, Je tiendrai à remercier aux membres de jury et à son président.
- ❁ Et pour finir, un dernier remerciement à toute la promotion 2019-2020 de génie civil de l'université **Larbi ben Mhidi**, tout en leur souhaitant un avenir plein de réussite.



**Louafi yacine**  
Louafi yacine

---

# Résumé

Le but de ce mémoire est de proposer un modèle rhéologique à éléments élastique et visqueux variables qui permet de simuler la réponse du béton soumis simultanément à une charge statique et une autre dynamique et d'écrire d'une manière simple les équations différentielles de comportement rhéologique correspondant.

---

# Abstract

The aim of this treatise is to propose a rheological model with variable elastic and viscous elements which makes it possible to simulate the response of concrete subjected simultaneously to a static load and another dynamic and to write in a simple way the differential equations of rheological behavior corresponding.

---

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre1 : modèle rhéologique</b> .....	2
1.1. Introduction .....	3
1.2. Définition.....	3
1.3. Modèles élémentaires : .....	3
1.4. Modèles rhéologiques.....	4
1.4.1. Modèle de Maxwell.....	4
1.4.1.1. Fluage d'un modèle de maxwell.....	5
1.4.1.2. Relaxation d'un modèle de Maxwell.....	6
1.4.1.3. Contraintes uniformément croissantes : $\sigma = \nu. t$ .....	7
1.4.1.4. vitesse de déformations suivent la loi : $\epsilon = \omega. t$ .....	7
1.4.2. Modèle de Kelvin :.....	8
1.4.2.1. Fluage d'un modèle de kelvin : .....	9
1.4.2.2. Cas ou la contrainte augmente uniformément en fonction du temps suivant la loi $\sigma=\nu.t$ :.....	11
1.4.2.3. Relaxation d'un modèle de kelvin : .....	12
1.5. Combinaison complexe des modèles : .....	15
1.5.1. Deux éléments élastiques et un élément visqueux : .....	15
1.5.2. Même éléments combinés comme indique sur la figure (1.13) :.....	16
1.6. Conclusion : .....	17
<b>Chapitre2:Lois fondamentales simplifiées des déformations</b> .....	16
2.1. Équation rhéologique gérant les deux modèles complexes .....	17
2.2. Conditions initiales des déformations et des contraintes.....	17
2.2.1. Conclusion.....	17
2.3.1. La charge constante (fluage) : $\sigma = \text{constante}$ : .....	18
2.3.2. Déchargement : .....	18
2.3.3.Croissance uniforme de la charge : .....	19
2.3.4. Diminution uniforme de la charge : .....	20
2.3.5. Déformation constante dans le temps : .....	21
<b>Chapitre3:Établissement des relations différentielles Déformation-Contraintes des modèles</b> .....	23
1.3. Conclusion et recommandation : .....	26
<b>Chapitre4:Modèle rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables</b> .....	27
4.1. Introduction .....	27
4.1.1. Le régime de chargement : .....	27
4.1.2. Influence du niveau de la contrainte pour presque la même valeur du caractère de l'amplitude du cycle :.....	28
4.1.4. Influence du caractère de l'amplitude du cycle $\rho$ pour : $\sigma_{moy} = \text{const}$ :.....	29
4.1.5. Principales conclusions :.....	30
4.2. Modèles rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables :.....	30

---

4.2.1. Caractéristiques générales du modèle :.....	30
4.2.1. Rechargement du modèle après repos:.....	33
4.2.2. Chargement complexe du modèle :.....	36
<b>CONCLUSIONS GEERALES</b> .....	41
<b>PERSPECTIVES</b> .....	42



## Liste des figures

Figure 1.1 ressort	2
Figure 1.2 amortisseur	2
Figure 1.3 réponse d'un ressort élastique	3
Figure.1.4 réponse d'un amortisseur	4
Figure 1.5 Modèle de Maxwell	4
Figure 1.6 Fluage du modèle de Maxwell	5
Figure 1.7 Relaxation du modèle de Maxwell	6
Figure 1.8 vitesse de déformations constantes suivent la loi : $\varepsilon=\omega.t$	8
Figure 1.9 Modèle de Kelvin	8
Figure 1.10 Fluage du modèle de Kelvin	9
Figure 1.11 contrainte nulle	11
Figure 1.12 cas ou la contrainte augmente uniformément en fonction du temps suivant la loi : $\sigma=v.t$	12
Figure 1.13 Relaxation du modèle de Kelvin	12
Figure 1.14 Deux éléments élastiques et un élément visqueux	13
Figure 1.15 Deux éléments élastiques et un élément visqueux	14
Figure 2.1 Contrainte constante	18
Figure 2.2 Déchargement	19
Figure 2.3 Croissance uniforme de la charge	20
Figure 3.1 exemples	25
Figure 3.2 Chaîne continue des éléments visqueux	26
Figure 4.1 Schémas des régimes de chargement du fluage dynamique	27
Figure 4.2 Courbes expérimentales (lignes continues) du fluage Dynamique (1 et 2) et du fluage statique (3) (1) pour $\rho = 0,615$ et $\sigma_{max} = 0,375\sigma_{rp}$ ; (2) pour $\rho = 0,607$ et $\sigma_{max} = 0,3\sigma_{rp}$ ; (3) pour $\sigma = 0,3\sigma_{rp}$	28
Figure 4.3 Courbes expérimentales (lignes continues) du fluage Dynamique (1 et 2) et du fluage statique (3) : (1) pour $\rho=0,4$ ; (2) pour $\rho=0,8$ (3) pour $\sigma=0,375\sigma_{rp}$ Error! Bookmark not defined.9	
Figure 4.4	29
Figure 4.5 modèle rhéologique à élément élastique et visqueux variables. Les éléments non rompus en trait continu et les éléments rompus en trait discontinu	31
Figure 4.6	33
Figure 4.7 Rechargement du modèle après repos	34

---

Figure 4.8	35
Figure 4.9 régime de chargement	37
Figure 4.10 Comportement du modèle sous chargement complexe	38
Figure 4.11 Comportement du modèle sous chargement complexe	39

## *Listes des Symboles*

---

---

$\sigma(t)$  : La contrainte instantanée

$\varepsilon(t)$  : La déformation instantanée

$\sigma_0$  : La contrainte constante (Essai de fluage)

$\varepsilon_0$  : La déformation constante (Essai de relaxation)

$J t$  : La fonction de fluage

E : Module de Young

$\dot{\varepsilon}$  : Vitesse de déformation

$\tau$  : Est le temps de relaxation

$\sigma_0$  : Amplitude de contrainte sinusoïdale

$\varepsilon_0$  : Amplitude de déformation sinusoïdale

$\xi$  : Facteur d'amortissement

$c$  : Coefficient d'amortissement

$u$  : Déplacement

$u'(t)$  : Vitesse

$u''(t)$  : Accélération

---

---

# *Introduction Générale*

---

La viscoélasticité est la propriété de matériaux qui présentent des caractéristiques à la fois visqueuses et élastiques, lorsqu'ils subissent une déformation. Les matériaux visqueux, comme le miel, résistent à un écoulement en cisaillement et présentent une déformation qui augmente linéairement avec le temps lorsqu'une contrainte est appliquée. Les matériaux élastiques se déforment lorsqu'ils sont contraints, et retournent rapidement à leur état d'origine une fois la contrainte retirée.

Les matériaux viscoélastiques ont des applications dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques et le génie civil, Ils sont destinés à dissiper l'énergie mécanique des vibrations en chaleur.

Dans ce mémoire nous apprenons les différents modèles rhéologiques sous une charge statique et dynamique.

On choisit un plan de travail comme suite :

## **Chapitre 1 : modèle rhéologique**

Le comportement viscoélastique est également basé sur une représentation rhéologique du comportement d'éléments simples comme les ressorts et les amortisseurs en série et en parallèle.

## **Chapitre 2 : loi fondamentales simplifiées des déformations**

Dans ce chapitre nous utilisons la loi de déformations correspondantes aux modèles complexes.

Dans différents cas de chargement du matériau.

## **Chapitre 3 : Établissement des relations différentielles Déformation-Contraintes des modèles**

Nous reconnaissons dans ce chapitre une méthode plus simple permet de simuler les relations contraintes –déformations des matériaux. Pour la compréhension des phénomènes.

## **Chapitre 4 : Modèle rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables**

Dans ce chapitre, nous intéressons aux phénomènes viscoélastiques qui régissent le comportement du matériau sous l'action simultanée des charges statiques et vibratoires.

**Conclusion et perspective.**

# Chapitre 1 : modèle rhéologique

## 1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la base théorique de l'étude du comportement viscoélastique linéaire. L'objectif étant de proposer une modélisation générale du comportement, nous écartons une approche phénoménologique qui permet de traduire fidèlement une expérience bien précise et nous présentons les principales hypothèses retenues et nous définissons les différentes variables observables permettant de définir les lois fondamentales du comportement viscoélastique.

## 1.2. Définition

La rhéologie (du grec reo : écoulement, logos : étude) est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.

Le terme rhéologie a été introduit en 1920 par «EUGENE BINGHAM » sur une suggestion de son collègue « MARKUS REINER ».

## 1.3. Modèles élémentaires :

Les caractéristiques de comportement rhéologique d'un matériau peuvent être déterminées en remplaçant ce matériau par un modèle contenant des éléments élastiques et des éléments visqueux représentés sur la figure ci dessous :

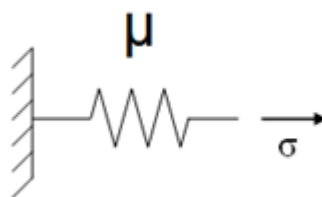


Figure 1.1 ressort

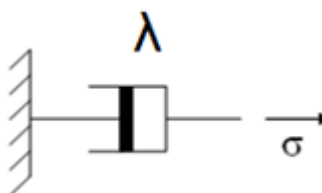


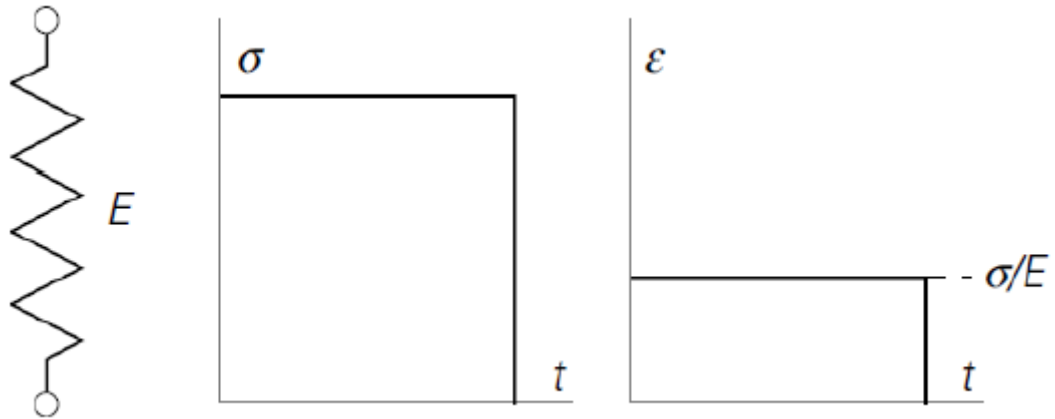
Figure 1.2 amortisseur



*a. Élément élastique linéaire*

On désigne par « E » la raideur de l'élément définie par la relation linéaire indépendante du temps :

$$\sigma = \mu \varepsilon \dots\dots\dots (1.1)$$

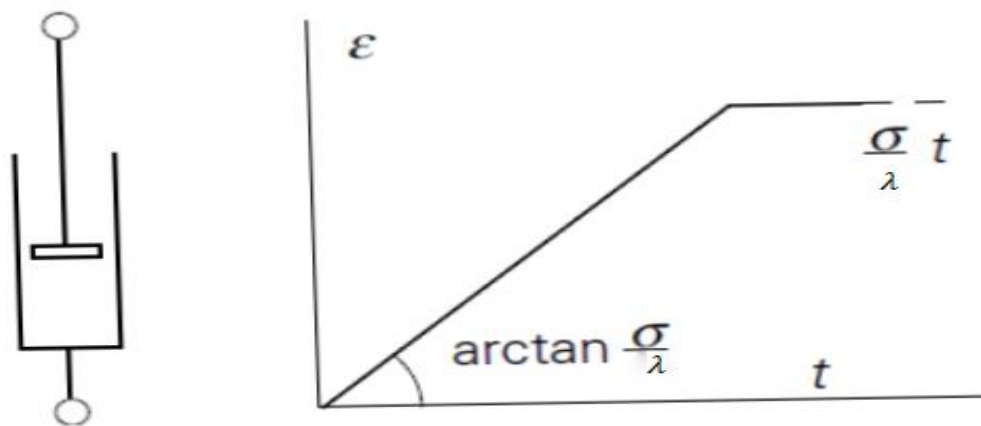


**Figure 1.3 réponse d'un ressort élastique**

*b. Élément visqueux linéaire*

Cet élément porte aussi le nom « dashpot », son coefficient de viscosité est noté  $\lambda$  défini par la relation linéaire indépendante du temps :

$$\sigma = \lambda \cdot \dot{\varepsilon} \dots\dots\dots (1.2)$$



**Figure.1.4 réponse d'un amortisseur**

## 1.4. Modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques sont utilisés pour le comportement d'un matériau, c'est-à-dire pour simuler sa réponse à une sollicitation mécanique. Concernant la viscoélasticité linéaire, des modèles rhéologique ont été proposés ; ils sont composés d'une combinaison de connexions en série et / ou parallèle de ressort (de coefficients d'élasticité E) et d'amortisseurs (de coefficients de viscosité  $\lambda$ ) élémentaires, représentant les composantes élastiques et visqueuses, respectivement.

### 1.4.1. Modèle de Maxwell

Le modèle de maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur monté en série représentée sur la figure (1.5) :

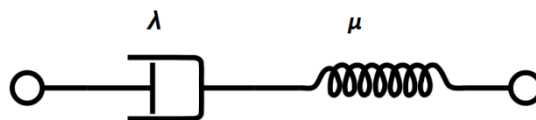


Figure 1.5 Modèle de Maxwell

La contrainte et la déformation sont données comme suite :

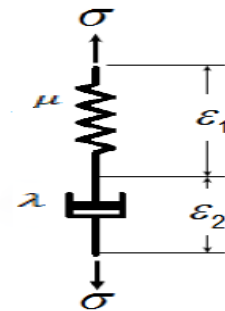
$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_v \\ \sigma &= \sigma_e = \sigma_v.\end{aligned}$$

Élastique linéaire :  $\sigma_e = \mu \varepsilon_e$

Loi visqueuse linéaire :  $\sigma_v = \lambda \cdot \dot{\varepsilon}$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_e}{dt} = \frac{d\sigma_v}{dt}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_e}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon_e}{dt} \longrightarrow \frac{d\varepsilon_e}{dt} = \frac{1}{\mu} * \frac{d\sigma}{dt}$$





$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_v}{dt} \longrightarrow \frac{1}{\mu} * \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda} \longrightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \sigma$$

Après la résolution de

cette équation différentielle :

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu} + \frac{t}{\lambda} \sigma \dots \dots \dots (1.3)$$

### 1.4.1.1. Fluage d'un modèle de maxwell

Sous une contrainte constante, la réponse sous cette contrainte est représentée sur la figure ci-dessous :

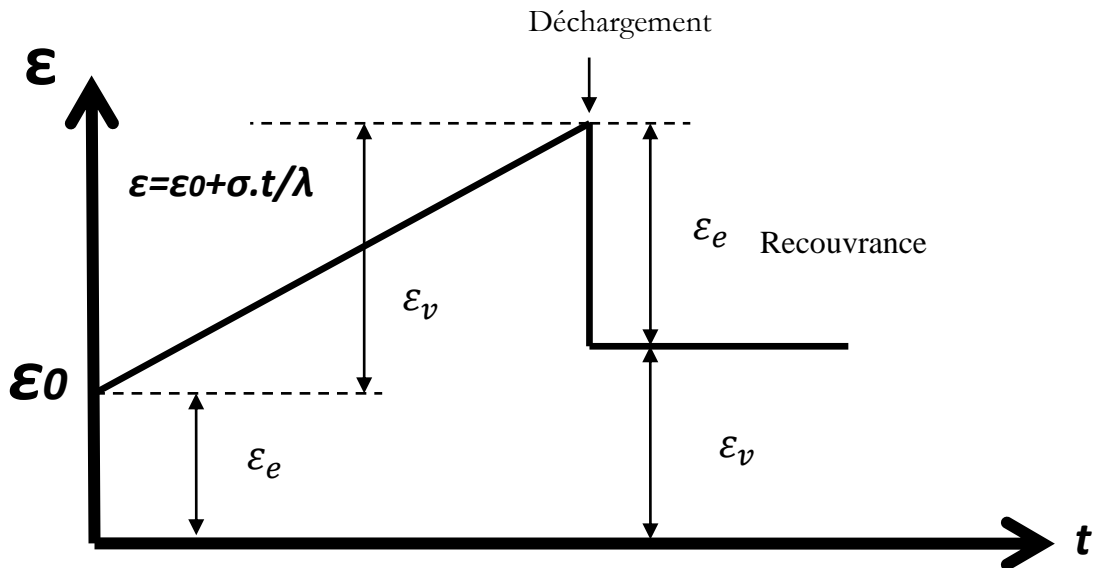


Figure 1.6 Fluage du modèle de Maxwell

- Interprétation mathématique :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_v}{dt} = \frac{1}{\mu} * \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda} \text{ et } \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\lambda} \xrightarrow{\text{Intégration}} \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^t \frac{\sigma}{\lambda} dt \longrightarrow \varepsilon - \varepsilon_e = \frac{\sigma}{\lambda} t \text{ lors } \varepsilon = \frac{\sigma}{\lambda} t + \varepsilon_e$$

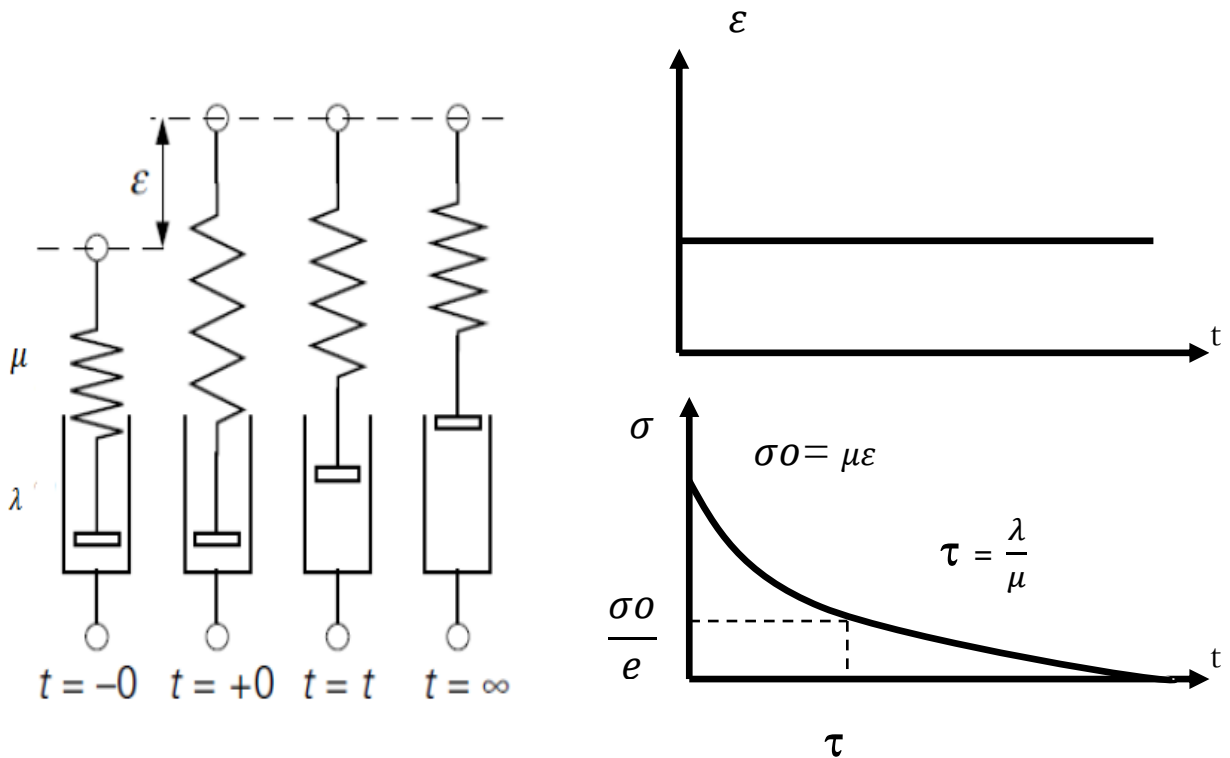
$$\varepsilon = \sigma \left( \frac{1}{\lambda} t + \frac{1}{\mu} \right) \longrightarrow \varepsilon = \sigma J(t)$$

$$J(t) = \left( \frac{1}{\lambda} t + \frac{1}{\mu} \right) \dots \dots \dots (1.4) : \text{ dite fonction de fluage}$$

Les principales observations obtenues dans les travaux [5], une déformation instantanée  $\epsilon_e$  suite à l'application de la contrainte  $\sigma$  qui correspond à la réponse élastique. On observe ensuite progressive de la déformation  $\epsilon_p$  jusqu'à arriver à une déformation  $\epsilon_e$  à la fin de l'essai de fluage. Au début de l'essai de recouvrance, lorsque la charge est enlevée, on observe également une instantanée de la déformation pour arriver jusqu'à une valeur  $\epsilon_p$ .

### 1.4.1.2. Relaxation d'un modèle de Maxwell

Une déformation constante a  $t = 0$  jusqu'à  $t_1$  la figure (1.7) représenté la relaxation de ce modèle.



**Figure 1.7 Relaxation du modèle de Maxwell**

- Interprétation mathématique :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_v}{dt} = \frac{1}{\mu} * \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda} \text{ et } \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \text{ (déformation constante)}$$

$$\frac{1}{\mu} * \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda} = 0. \implies \frac{1}{\mu} * \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\lambda} \implies \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{\mu}{\lambda} dt$$

Après l'intégration de cette dernière équation, on a trouvé.

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\int_0^t \frac{\mu}{\lambda} dt \implies \ln(\sigma(t)) - \ln(\sigma(0)) = -\frac{\mu}{\lambda} t + c$$

$$e^{\ln(\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)})} = e^{-\frac{\mu}{\lambda} t + c} = c_1 e^{-\frac{\mu}{\lambda} t} \text{ pour } e^c = c_1 \implies \frac{\sigma(t)}{\sigma(0)} = c_1 e^{-\frac{\mu}{\lambda} t}$$

Et  $\sigma(0) = \mu \varepsilon_0$  alors  $C_1=1$

$$\text{Pour } t=0 \sigma(0) = \mu \varepsilon_0 \implies \sigma = \mu \varepsilon_0 e^{-\frac{\mu}{\lambda} t} = \mu \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ ou } \tau = \frac{\mu}{\lambda}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \mu(t)$$

$$\mu(t) = \mu e^{-\frac{\mu}{\lambda} t} \dots\dots\dots (1.5) \text{ s'appel fonction de relaxation}$$

$\tau$  : le temp de relaxation, comme indiqué sur le schéma (1.7), est le temp l'ou la contrainte est réduite à la valeur 1/e

A L'instant  $t = 0$ , on mesure une contrainte  $\sigma(0)$  qui correspond à la réponse élastique du modèle. Ensuite la contrainte diminue jusqu'à arriver à l'état initial.

**1.4.1.3. Contraintes uniformément croissantes :  $\sigma = v. t$**

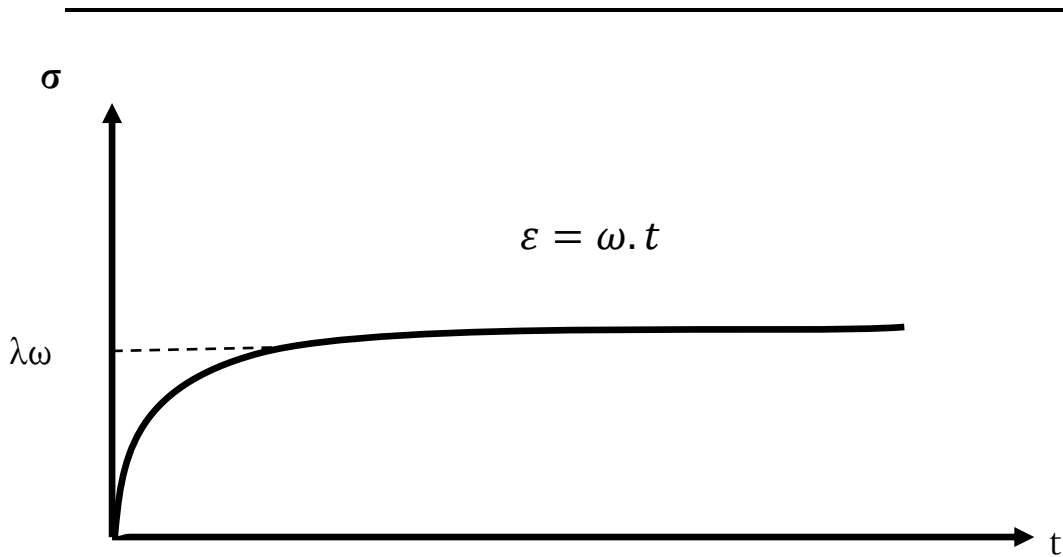
Dans ce cas les déformations  $\varepsilon$  suivent la loi parabolique suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{v}{\lambda} \gamma t + \frac{v}{2\lambda} t^2 \dots\dots\dots (1.6).$$

**1.4.1.4. vitesse de déformations suivent la loi :  $\varepsilon = \omega. t$**

Dans ce cas les contraintes suivent la loi :

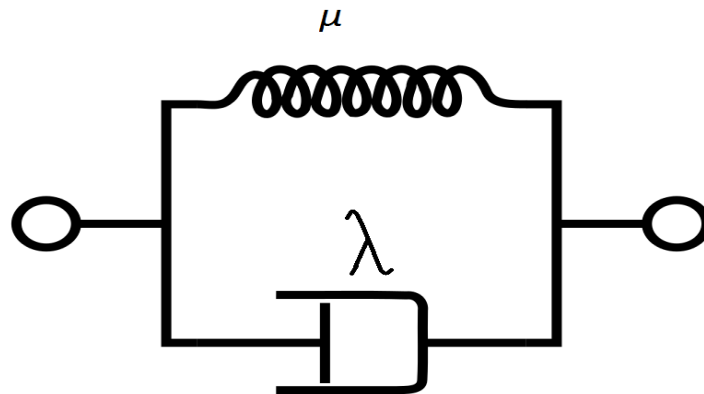
$$\sigma = \lambda \omega (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \dots\dots\dots (1.7)$$



**Figure 1.8** vitesse de déformations constantes suivent la loi :  $\epsilon = \omega \cdot t$

#### 1.4.2. Modèle de Kelvin :

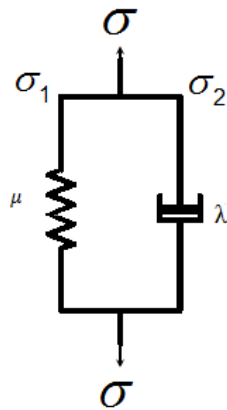
Le modèle de Kelvin est composé d'un ressort et d'un amortisseur montés en parallèle représentés sur la figure (1.9)



**Figure 1.9** Modèle de Kelvin

La contrainte et la déformation sont données comme suite :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_e = \epsilon_v \\ \sigma &= \sigma_e + \sigma_v \end{aligned}$$



Élastique linéaire :  $\sigma_e = \mu \varepsilon_e$

Loi visqueuse linéaire :  $\sigma_v = \lambda \cdot \dot{\varepsilon}$

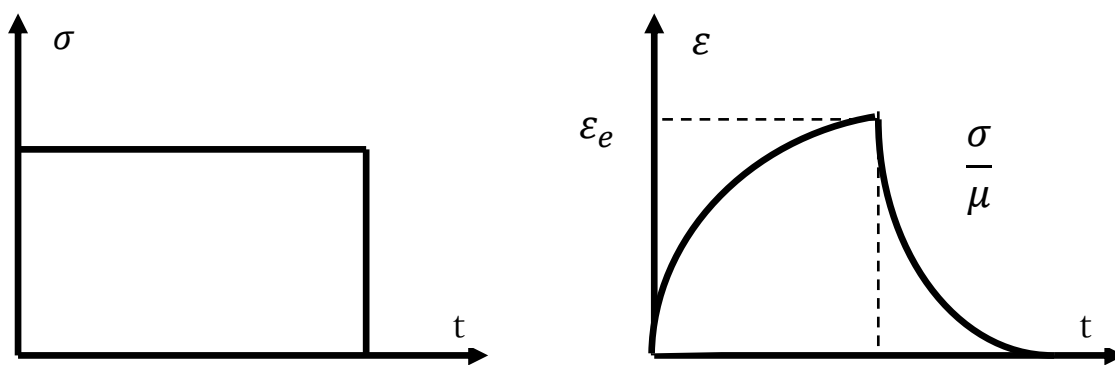
$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = \mu \varepsilon_e + \lambda \cdot \dot{\varepsilon} \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \implies \sigma = \mu \varepsilon + \lambda \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \implies \frac{\mu}{\lambda} \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\lambda}$$

La solution de cette équation différentielle de premier ordre :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{\lambda} t}\right) \dots \dots \dots (1.8)$$

**1.4.2.1. Fluage d'un modèle de kelvin :**

Le fluage dans le modèle de Kelvin représenté sur la figure suivante :



**Figure 1.10 Fluage du modèle de Kelvin**

- Interprétation mathématique :

$$\frac{\mu}{\lambda} \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\lambda} \text{ pour } \sigma \text{ est constante}$$

La solution de cette équation est la forme suivante :  $\varepsilon(t) = \varepsilon_H(t) + \varepsilon_N(t)$

$$\varepsilon_H(t) = c_1 e^{-\frac{\mu}{\lambda}t}$$

$$\varepsilon_N(t) = c_2$$

$$c_1 = \frac{-\sigma}{\mu} \text{ et } c_2 = \frac{-\sigma}{\mu}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{\lambda}t}) = \sigma J(t)$$

$$J(t) = \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{\lambda}t}) \dots \dots \dots (1.9) \text{ fonction de fluage.}$$

Avec :  $\mu$  : module d'élasticité différé obtenue sous l'action permanente ( $t \rightarrow \infty$ ) d'un charge constante.

$\frac{\mu}{\lambda}$  : Temps de retard des déformations

Après l'application de la contrainte on remarque une évolution progressive de déformation jusqu'à  $\varepsilon_e$

Et le temps de suppression de la contrainte la déformation est décroisse progressivement jusqu'à La valeur initiale.

Si les déformations initiales avaient une valeur  $\neq 0$  soit  $\varepsilon_0$  l'équation des déformations aurait pris l'allure suivante :

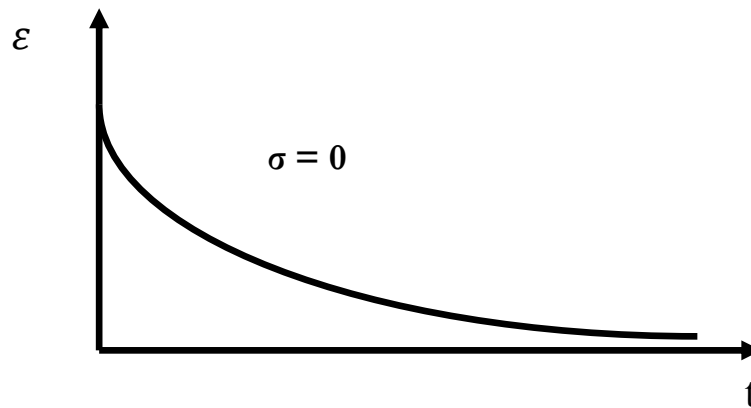
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{\lambda}t}) + \varepsilon_0 e^{-\frac{\mu}{\lambda}t} \dots \dots \dots (1.10)$$

En plus dans la loi (1.9), on a une diminution progressive des déformations initiale  $\varepsilon_0$  avec les mêmes fonctions décroissantes :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\mu} \left[ \frac{\sigma}{\mu} - \varepsilon_0 \right] e^{-\frac{\mu}{\lambda}t} \quad \begin{cases} \text{pour } t = 0 & \varepsilon = \varepsilon_0 \\ \text{pour } t = \infty & \varepsilon = \frac{\sigma}{\mu} \dots \dots \dots \end{cases} (1.11)$$

On remarque que la différence entre la valeurs des déformations finales  $\frac{\sigma}{\mu}$  et initiales  $\varepsilon_0$  s'amortit avec une loi exponentielle

Dans le cas particulier  $\sigma=0$  (c'est-à-dire un déchargement total du modèle) les déformations initiales  $\varepsilon_0$  disparaissent avec cette même loi exponentielle.



**Figure 1.11 contrainte nulle**

**1.4.2.2. Cas ou la contrainte augmente uniformément en fonction du temps suivant la loi**

**$\sigma=v.t$  :**

La solution de l'équation  $\lambda \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} = \sigma$  sera

$$\varepsilon = \frac{v}{\mu} t - \frac{\lambda}{\mu^2} \cdot v \left[ 1 - e^{-\frac{\mu}{\lambda} \cdot t} \right] \dots\dots\dots (1.12)$$

Le premier terme représente les déformations statiques pour une contrainte  $\sigma = v.t$  et le second représente le retard des déformations qui est proportionnel à la vitesse de chargement  $v$  ce retard a une valeur nulle au moment initial et se tend suivant une loi exponentielle vers une valeur constante

$$\frac{\lambda \cdot v}{\mu^2}$$

La vitesse des déformations s'obtient, en faisant la dérivée de l'expression (1.12)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v}{\mu} \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{\lambda} \cdot t} \right) \dots\dots\dots (1.13)$$

Cette vitesse est égale à zéro au moment initial  $t = 0$

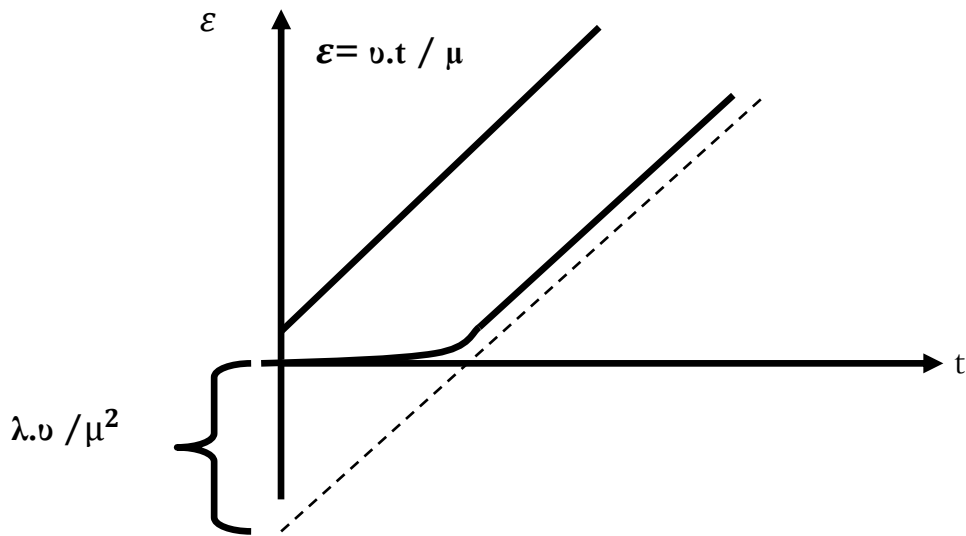


Figure 1.12 cas ou la contrainte augmente uniformément en fonction du temps suivant la loi :

$$\sigma = v.t$$

#### 1.4.2.3. Relaxation d'un modèle de kelvin :

Dans ce cas, les contrainte suivant l'équation  $\lambda \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} = \sigma$  restons constantes en fonction du temps. Ce qu'est en contradiction avec le comportement réel du matériau généralement pour maintenir le niveau d'une déformation donnée durant un temps suffisamment long.

Il sera nécessaire d'appliquer initialement des grandes valeurs de contraintes et par la suite des valeurs de plus en plus moins. ce phénomène s'appelle : LA RELAXATION DES CONTRAINTE.

Le matériau qui se déforme suivant la loi  $\lambda \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} = \sigma$  s'avère est un matériau non relaxable.

La relaxation dans le modèle de Kelvin représenté sur la figure suivante :

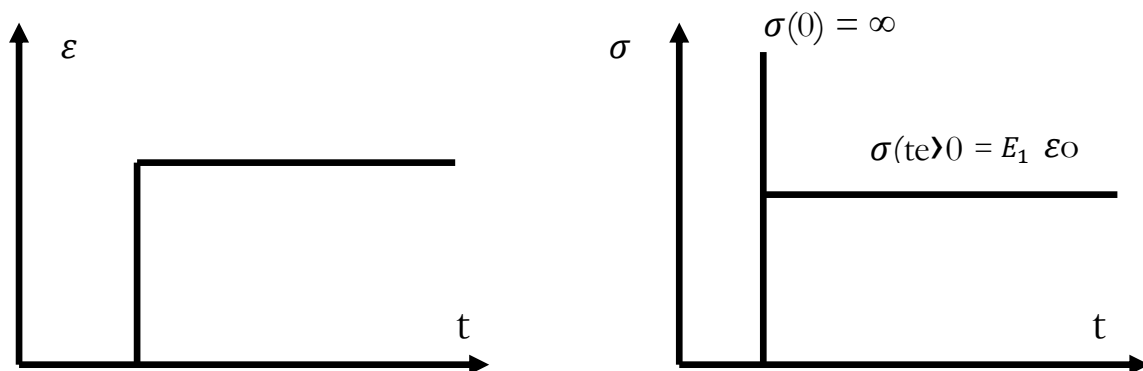


Figure 1.13 Relaxation du modèle de Kelvin



Interprétation mathématique :

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = \mu \varepsilon_e + \lambda \cdot \dot{\varepsilon}_v \text{ et } \varepsilon_v \text{ (constante) donc } \dot{\varepsilon}_v = 0 \text{ alors}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_e + \sigma_v = \mu \varepsilon_e \text{ pour } t > 0 \\ \sigma = \infty \text{ pour } t = 0 \end{cases}$$

### 1.5. Combinaison complexe des modèles :

Cette modèle fournit une combinaison des deux éléments et donc offre plus de possibilité pour simuler le comportement réel des matériaux viscoélastiques. Il fournit un élément de Kelvin-Voigt en série avec un ressort, un élément de Maxwell en parallèle avec un ressort.

#### 1.5.1. Deux éléments élastiques et un élément visqueux :

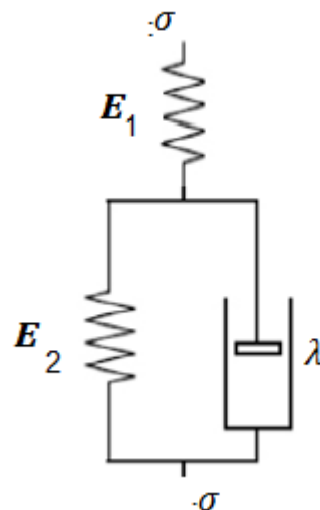


Figure 1.14 Deux éléments élastiques et un élément visqueux

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_{e2} \quad ; \quad \lambda \cdot \dot{\varepsilon}_v = \sigma_v \\ \sigma_v + \sigma_{e2} &= \sigma_{e1} = \sigma \quad ; \quad E_1 \varepsilon_{e1} = \sigma_{e1} \\ \varepsilon_{e1} + \varepsilon_{e2} &= \varepsilon \quad ; \quad E_2 \varepsilon_{e2} = \sigma_{e2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.14)$$

En éliminant des équations (1.14) les contraintes et les déformations relative aux éléments on obtient la relation différentielle suivante :

$$E_1 \lambda \dot{\varepsilon} + E_1 E_2 \varepsilon = \lambda \dot{\sigma} + (E_1 + E_2) \sigma \dots\dots\dots (1.15)$$

1.5.2. Même éléments combinés comme indique sur la figure (1.13) :

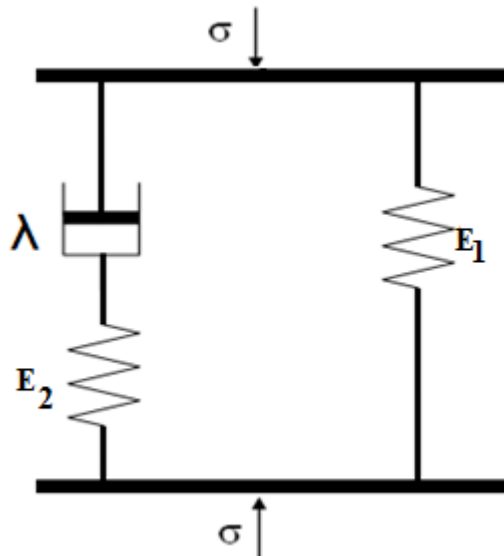


Figure 1.15 Deux éléments élastiques et un élément visqueux

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_{e2} \quad ; \quad \lambda \cdot \dot{\varepsilon}_v = \sigma_v \\ \sigma_v + \sigma_{e1} &= \sigma \quad ; \quad E_1 \varepsilon_{e1} = \sigma_{e1} \\ \varepsilon_{e2} + \varepsilon_v &= \varepsilon_{e1} = \varepsilon \quad ; \quad E_2 \varepsilon_{e2} = \sigma_{e2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.16)$$

En éliminant tous  $\sigma$  et  $\varepsilon$  ayant un indice, on obtient la loi de déformation suivante :

$$\lambda(E_1 + E_2)\dot{\varepsilon} + E_1 E_2 \varepsilon = \lambda \dot{\sigma} + E_2 \sigma \dots\dots\dots (1.17)$$

La structure de cette équation est identique à celle de l'équation (1.15)

## **1.6. Conclusion :**

Notre approche du comportement viscoélastique est également basée sur une représentation rhéologique du comportement en employant d'éléments simples comme les ressorts et les amortisseurs en série et en parallèle (Kelvin, Maxwell).

---

# CHAPITRE 2

## Lois fondamentales simplifiées Des déformations

---

## *Chapitre 2 : lois fondamentales simplifiées des déformations*

### 2.1. Équation rhéologique gérant les deux modèles complexes

Étant donné que l'utilisation des modèles complexes ne donne pas une correction importante aux lois de déformations par contre elle crée d'énormes difficultés aux niveaux des calculs. Pour la plupart des cas d'application pratique, il est rationnel d'utiliser la loi des déformations correspondants aux modèles représentés sur les figures (1.13) et (1.14) et ayant l'allure :

$$E\gamma\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon = \gamma\dot{\sigma} + \sigma \dots\dots\dots (2.1)$$

Pour la figure (1.13) les coefficients de cette équation sont égales à :

$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 \\ \mu &= \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} ; \quad \gamma = \frac{\lambda}{E_1 + E_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

Pour la figure (1.14) :

$$E = E_1 + E_2 ; \mu = E_1 ; \gamma = \frac{\lambda}{E_2} \dots\dots\dots (2.3)$$

Le coefficient **E** de l'équation (2.1) représente le module d'élasticité instantané, et **μ** le module d'élasticité différé, le sens de ces deux termes est expliqué comme suit :

Dans le cas de processus long de déformation dans l'équation (2.1) les vitesses  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$  peuvent être négligées en comparant avec  $\sigma$  et  $\varepsilon$  et dans ce cas on obtient la loi de Hooke avec le module d'élasticité différé

$$\sigma = \mu \cdot \varepsilon \dots\dots\dots (2.4)$$

Par contre dans le cas de processus rapide des déformations les valeurs des vitesses des déformations et des contraintes sont plus importantes que les déformations et les contraintes par conséquent on peut négliger ces dernières et on obtient à nouveau la loi de Hooke mais différenciée par rapport au temps et avec module d'élasticité instantané E.

$$\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon} \dots\dots\dots (2.5)$$



- Remarquons que dans tous les cas  $E > \mu$  ce qui est confirmé dans les formules (2.2) et (2.3).
- Le coefficient  $\gamma$  est le temps de relaxation, il est facile de voir que la relation  $\lambda \dot{\varepsilon} + \mu \varepsilon = \sigma$  (modèle de Voigt) et  $\sigma + \gamma \dot{\sigma} = \lambda \dot{\varepsilon}$  (modèle de Maxwell) correspondant aux cas de liaisons parallèles et en série d'un élément élastique et d'un autre visqueux, constituent les deux parties de formule (2.1)
- Pour avoir la relation  $\lambda \dot{\varepsilon} + \mu \varepsilon = \sigma$  il suffit de poser dans l'équation (2.1) le module d'élasticité  $E = +\infty$  et le temps de relaxation  $\gamma = 0$  pour que le produit  $\gamma E = \lambda$  soit une valeur limitée.
- Pour avoir la relation  $\sigma + \gamma \dot{\sigma} = \lambda \dot{\varepsilon}$  il suffit de mettre  $\mu = 0$ .

## 2.2. Conditions initiales des déformations et des contraintes

Mise à part l'équation (2.1) pour résoudre le problème des déformations il est nécessaire d'avoir les conditions initiales des déformations et des contraintes

$$\text{Pour } t = 0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \sigma(0) = \sigma_0 \dots (2.6)$$

Les conditions initiales constituent bien sûr l'état de contrainte de matériaux ou les déformations de l'élément visqueux sont nulles :  $\varepsilon_v = 0$ .

De l'ensemble des équations (1.14) figure (1.13) et en tenant compte de l'équation (2.2) on voit que :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{e2} = \varepsilon - \varepsilon_{e1} = \varepsilon - \frac{\sigma_{e1}}{E_1} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

$\varepsilon_v = 0$ ;  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  Ou suivant les conditions initiales cette équation sera :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \dots \dots \dots (2.7)$$

De la même façon de l'équation (1.16) figure (1.14) on obtient :

$$\varepsilon_v = \varepsilon - \frac{\sigma_{e2}}{E_2} = \varepsilon - \frac{\sigma - \sigma_{e1}}{E_2} = \varepsilon \left( \frac{E_1 + E_2}{E_2} \right) - \frac{\sigma}{E_2}$$

Pour  $\varepsilon_v = 0$  et  $t = t_0$  et on tenant compte de l'équation (2.3) on aura :  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$

### 2.2.1. Conclusion

L'état initial de matériau régi par la loi de déformation (2.1) est caractérisé par les déformations qui sont égales à la contrainte divisée par le module d'élasticité instantané  $E$ .

**2.3. Différents cas de chargement du matériau régit par la loi de déformation (2.1)**

**2.3.1. La charge constante (fluage) :  $\sigma = \text{constante}$ :**

Dans ce cas la solution de l'équation (2.1) aura l'allure suivante :

$$\varepsilon = c e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} + \frac{\sigma}{\mu} \dots\dots\dots (2.8)$$

En prenant comme condition initiale l'état naturel du matériau :

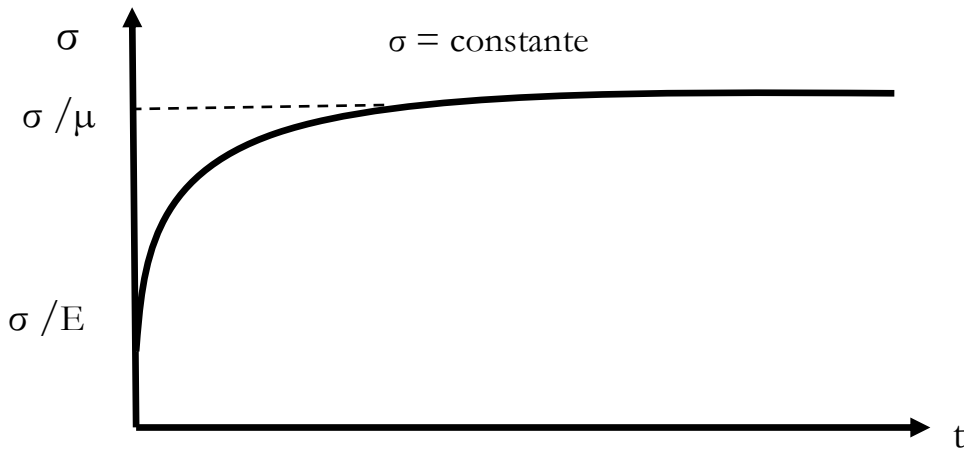
$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma}{E} \dots\dots\dots (2.9)$$

On obtient

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mu} + \sigma \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} \dots\dots\dots (2.10)$$

En remarque que la valeur de  $\left( \frac{1}{E} - \frac{1}{\mu} \right)$  est négative, puisque  $E > \mu$  c'est pourquoi le graphe de

La relation  $\varepsilon$  et  $t$  de l'équation (2.10) aura l'allure montrée sur la figure (2.1) :



**Figure 2.1 Contrainte constante**

A différence de la figure (1.10) représentant le modèle de Voigt sur la figure (2.1) on a les déformations initiales  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}$ , qui se manifestent instantanément au moment de l'application de la contrainte  $\sigma$ . En fonction du temps les déformations se tends vers la valeur  $\frac{\sigma}{\mu}$ .

**2.3.2. Déchargement :**

Dans le cas d'une diminution instantanée de la contrainte jusqu'à zéro, la valeur des déformations



Obtenues de l'équation (2.8) pour  $\sigma = 0$  est :

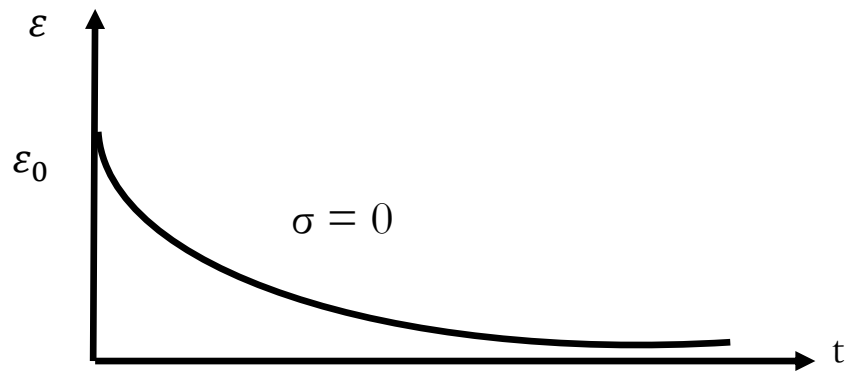
$$\varepsilon = C e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} \dots\dots\dots (2.11)$$

Soit au moment de déchargement  $t = t_0$  les déformations  $\varepsilon = \varepsilon_0$  et les contraintes  $\sigma = \sigma_0$ . Dans ce même moment  $t = 0$  suite à la diminution instantanée de la contrainte de la valeur  $\sigma_0$ , il se produit une diminution instantanée des déformations jusqu'à la valeur :

$$\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} \dots\dots\dots (2.12)$$

Par la suite, les déformations changeront suivant la loi (2.11) ou la constante **C** doit être définie à partir des conditions initiales (2.12). On obtient ainsi :

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E}\right) e^{-\frac{\mu(t-t_0)}{E\gamma}} \dots\dots\dots (2.13)$$



**Figure 2.2 Déchargement**

Après le déchargement, les déformations s'annulent en fonction du temps.

**2.3.3. Croissance uniforme de la charge :**

Soit la contrainte change suivant la loi :

$$\sigma = v.t \dots\dots\dots (2.14)$$

Avec v : vitesse constante de la croissance de la contrainte.

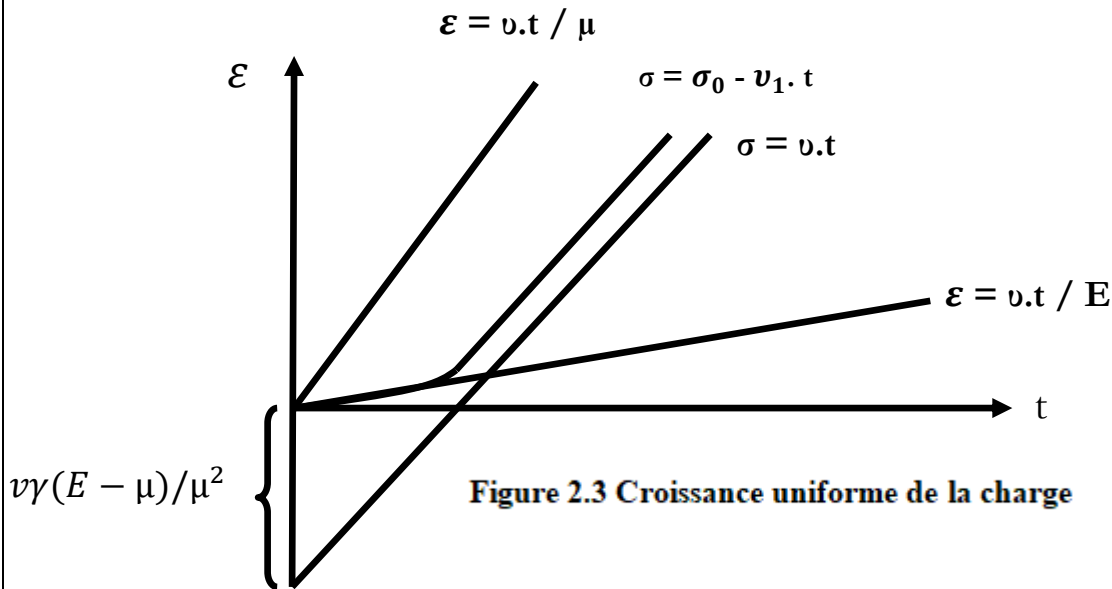
En remplaçant dans l'expression (2.14) dans (2.1) la solution en déformation sera :

$$\varepsilon = c e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} + \frac{vt}{\mu} + \frac{v\gamma}{\mu} - \frac{v\gamma E}{\mu^2} \dots\dots\dots (2.15)$$

pour :  $\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E} = 0c \implies \frac{v\gamma}{\mu} + \frac{v\gamma E}{\mu^2}$

L'équation (2.15) prend l'allure :

$$\varepsilon = \frac{v\gamma}{\mu} \left(1 - \frac{E}{\mu}\right) \left(1 - e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t}\right) + \frac{vt}{\mu} \dots\dots\dots (2.16)$$



La différence de graphe de figure (2.3) et celui de la figure (1.12) (modèle de Voigt) est la suivante : Au temps initial  $t = 0$  la tangente à la courbe  $\varepsilon$  ne coïncide pas avec l'axe  $t$ , mais elle s'incline par rapport à cet axe. Ceci dit que la vitesse de déformation au moment de chargement a une valeur différente de zéro. Elle est égale à :

$$\varepsilon(\dot{0}) = \frac{v}{E} \dots\dots\dots (2.17)$$

Pour  $t \rightarrow \infty$  les déformations  $\varepsilon$  se tendent vers une valeur se différenciant de la valeur des déformations élastique (avec module d'élasticité différé  $\mu$ ):

$$-\frac{v\gamma}{\mu^2} (E - \mu) \dots\dots\dots (2.18)$$

**2.3.4. Diminution uniforme de la charge :**

Soit au moment  $t = 0$  (temps initial de déchargement) le déchargement du matériau se fait suivant la loi :

$$\sigma = \sigma_0 - v_1 t \dots\dots\dots (2.19)$$

On remplaçant (2.19) dans (2.1) et on intégrant par rapport à  $\varepsilon$  on obtient :

$$\varepsilon = c e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} - \frac{v_1}{\mu} t - \frac{v_1}{\mu} \gamma + \frac{v_1 \gamma E}{\mu^2} + \frac{\sigma_0}{\mu} \dots\dots\dots (2.20)$$

Soit au moment de déchargement  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ , en déterminant C de cette condition initiale l'équation

(2.20) devient :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} - \frac{v_1 t}{\mu} + \left( \frac{\sigma_0}{\mu} + \frac{v_1 \gamma E}{\mu^2} - \frac{v_1 \gamma}{\mu} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{E\gamma}t} \right) \dots \dots \dots (2.21)$$

La vitesse de déformation au moment de déchargement est :

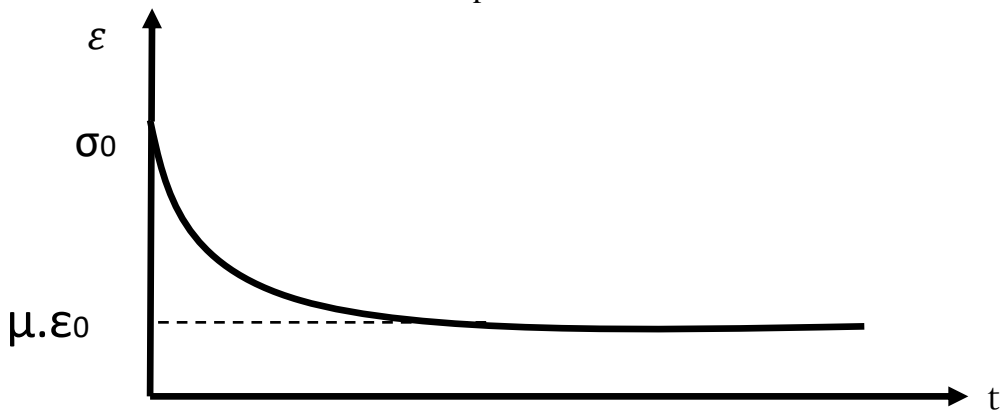
$$\dot{\varepsilon}(0) = \frac{\sigma_0 - \mu \varepsilon_0}{E\gamma} - \frac{v_1}{E} \dots \dots \dots (2.22)$$

**2.3.5. Déformation constante dans le temps :**

Si les déformations  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{constante}$  l'équation (2.1) donne :

$$\sigma = \mu \varepsilon_0 + (\sigma_0 - \mu \varepsilon_0) e^{-\frac{t}{\gamma}} \dots \dots \dots (2.23)$$

On comparant cette équation avec la solution  $\sigma = \sigma_0 e^{t \frac{1}{\gamma}}$  de l'équation  $\sigma + \gamma \dot{\sigma} = \lambda \dot{\varepsilon}$  exprimant le modèle de Maxwell, on remarque que pour  $t \rightarrow \infty$  la contrainte suivant l'équation (2.23) ne se tend pas vers une valeur nulle mais vers une constante de valeur  $\mu \varepsilon_0$  figure.19. Sans doute, la solution (2.23) correspond plus au comportement réel de la plupart des matériaux subissant des déformations constantes dans le temps.



**Figure 2.4 Déformation = ε₀ = constante**

---

Remarque :

- Pour l'état réel initial des matériaux au moment  $t = 0$ , quand les déformations  $\epsilon_0$  s'appliquent instantanément, nous aurons selon (2.7) :

$\sigma_0 = \epsilon_0 E$ , et au lieu de (2.23) on obtient :

$$\sigma = \mu \epsilon_0 + (E - \mu) \epsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \dots\dots\dots (2.24)$$

- Si les contraintes initiales  $\sigma_0 = \mu \epsilon_0$  ceci implique que la relaxation des contraintes suivant l'équation (2.23) **n'existe pas**.

A decorative border in a light green color, resembling a scroll. It has rounded corners and a vertical strip on the left side that looks like a scroll's edge. There are two grey circular accents at the top corners of the scroll.

# Chapitre 3

Etablissement des relations différentielles  
déformation-contrainte des modèles

---



## Chapitre 3 : établissement des relations différentielles déformations-contrainte des modèles

Dans le cas où les modèles contiennent un nombre élevé d'éléments élastiques et d'éléments visqueux leurs lois de déformation s'avèrent très difficile à établir, en utilisant les conditions d'équilibre et la continuité des déformations (comme le cas des équations (1.14 et 1.16) pour contourner ce problème, on utilise une méthode plus simple appelée la méthode de *l'opérateur D*.

Dans cette méthode, on introduit *l'opérateur D* représentant la différentiation par rapport au temps. On note que toutes les opérations avec cet opérateur se fondent de la même façon qu'avec une valeur Algébrique.

Le rapport entre contrainte  $\sigma$  et déformation  $\varepsilon$  exprimé en fonction de l'opérateur D est définie comme étant la rigidité du modèle :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E(D)$$

Cette rigidité peut être déterminée, on supposant que tous les éléments du modèle sont élastiques.

Le coefficient élastique de chaque élément visqueux peut être considéré comme étant le produit de son coefficient de viscosité  $\lambda$  par l'opérateur D.

**Exemple :**

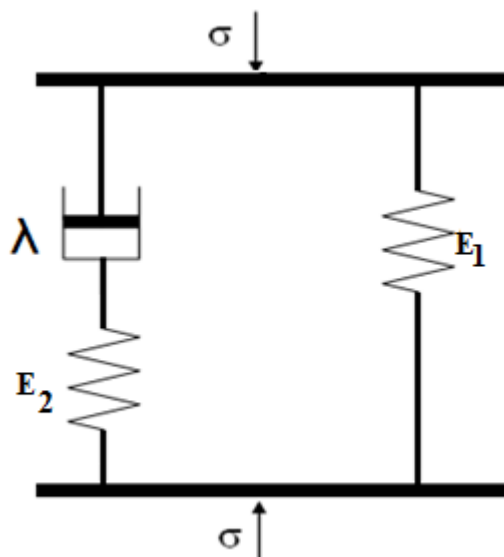


Figure 1.15 Deux éléments élastiques et un élément visqueux

Pour la figure.11 (modèle déjà étudié), la somme des rigidités des deux éléments parallèles élastiques et visqueux est :

$$E_2 + \lambda D = E'$$

La rigidité totale E du modèle est définie par la formule de la liaison en série de la rigidité E' et celle du premier élément élastique E<sub>1</sub> :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E'} + \frac{1}{E_1} E \implies \frac{E'E_1}{E'+E_1} = \frac{(E_2+\lambda D)E_1}{E_2+\lambda D+E_1} = E(D) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \implies$$

$$(E_1 + E_2 + \lambda D)\sigma = (E_1E_2 + E_1\lambda D)\varepsilon$$

Avec :  $D\varepsilon = \dot{\varepsilon}$  ;  $D\sigma = \dot{\sigma}$

On remplaçant l'opérateur D par le symbole de différentiation par rapport au temps on obtient l'équation (1.15) :

$$E_1\lambda\dot{\varepsilon} + E_1E_2\varepsilon = \lambda\dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma$$

**Remarque :** La rigidité déterminée par cette méthode est appelée : « **La rigidité conventionnelle du modèle noté E(D)** »

Dans le cas général l'expression de la rigidité conventionnelle d'un modèle quelconque constitué des éléments élastiques et visqueux prend la forme suivante :

$$E(D) = \frac{A_0 + A_1D + A_2D^2 + \dots + A_iD^i}{B_0 + B_1D + B_2D^2 + \dots + B_kD^k} \dots \dots \dots (3.1)$$

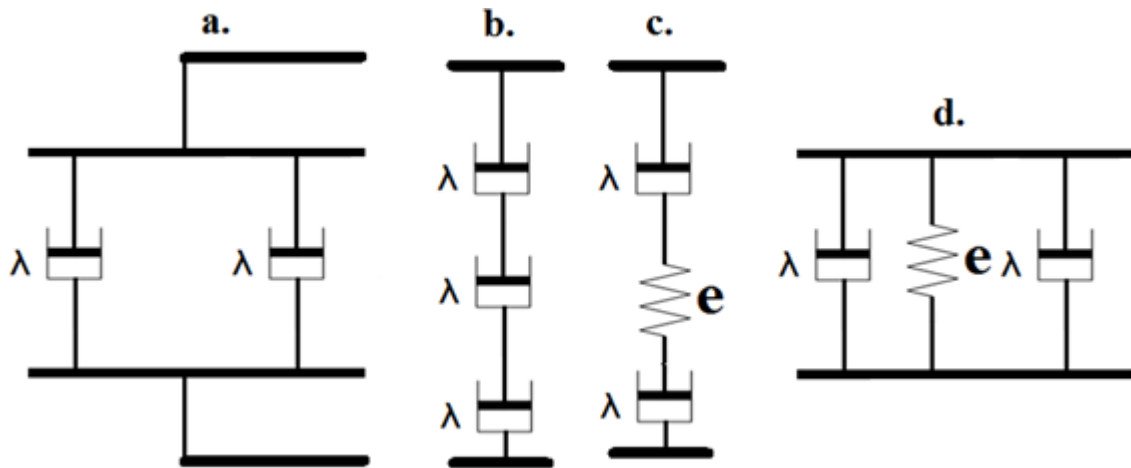
Avec : A<sub>0</sub> .....A<sub>i</sub> et B<sub>0</sub>...B<sub>k</sub> coefficients constants.

L'équation (3.1) est équivalente à l'équation différentielle suivante :

$$A_0\varepsilon + A_1\dot{\varepsilon} + A_2\ddot{\varepsilon} + \dots + A_i\varepsilon^{(i)} = B_0\sigma + B_1\dot{\sigma} + B_2\ddot{\sigma} + \dots + B_k\sigma^{(k)} \dots \dots (3.2)$$

L'ordre de différentiation de cette équation est égal au nombre d'élément visqueux du modèle, mais on doit prendre pour deux ou plusieurs éléments visqueux liés en série ou en parallèle (figure 20, a et b), même dans le cas de leur séparation par des éléments élastiques (figure 20, c et d) comme un seul élément visqueux





**Figure 3.1 exemples**

Donc l'ordre de la différentiation de l'équation (3.2) sera égal au nombre des éléments visqueux moins le nombre des éléments visqueux qui leur sont parallèles ou en série.

La somme des coefficients visqueux d'un tel groupe d'élément se fait suivant les formules suivantes :

- Pour les éléments parallèles :  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
- Pour les éléments en séries :  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$

❖ **REMARQUE :**

1. Dans le cas d'une longue action des charges constantes dans le temps l'état du modèle se stabilise graduellement et les vitesses des déformations et des contraintes des éléments se tendent vers la valeur nulle. Dans ce cas limite la rigidité conventionnelle du modèle se détermine pour la valeur de  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  et égale au module d'élasticité différé  $E(0)$  ou

$$E(0) = \frac{A_0}{B_0} = \mu \dots \dots \dots (3.3)$$

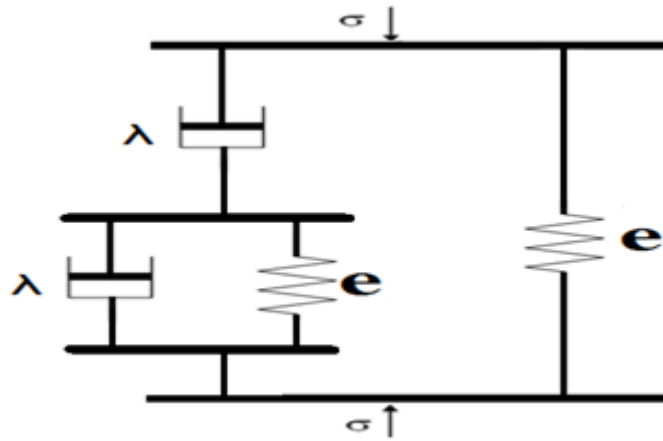
2. Dans le cas de grande vitesse de déformation du modèle  $\mathbf{D} = \infty$

La rigidité conventionnelle du modèle se tend vers sa valeur maximale, elle est égale au module d'élasticité instantanée  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\infty)$  ; ce module peut être directement obtenu du modèle dans lequel on suppose que tous les éléments visqueux sont remplacés par des éléments absolument rigides.

Il est clair que le module d'élasticité instantané est toujours supérieur au module d'élasticité déferée :

$$E = E(\infty) > \mu = E(0) \dots \dots \dots (3.4)$$

Le module d'élasticité instantanée est égal  $+\infty$  ; si le modèle contient une chaîne continue des éléments visqueux d'extrémité en extrémité Fig. (21). Le module d'élasticité différé est égal à zéro dans le cas où le modèle ne contient pas une chaîne continue d'élément élastique d'extrémité en extrémité.



**Figure 3.2 Chaîne continue des éléments visqueux**

### 1.3. Conclusion et recommandation :

- ❖ Les modèles rhéologiques permettent une simulation des phénomènes physiques observés expérimentalement.
- ❖ Avec des modèles simples on peut modéliser un phénomène complexe.
- ❖ Les modèles rhéologiques permettent de gérer le comportement rhéologique des différents matériaux sous différents cas de charges.
- ❖ Ces modèles rhéologiques nous permettent de gagner sur le plan coût et temps comparativement avec l'expérimentale.
- ❖ Ces modèles rhéologiques nous permettent de prédire le comportement des différents matériaux sous différents cas de charges.
- ❖ Les modèles rhéologiques permettent d'étudier des phénomènes qui se développent à long terme en un temps très réduit.
- ❖ On peut citer comme recommandation l'utilisation de la technologie numérique qu'est représentée avec l'outil informatique (logiciel) dans le domaine rhéologique. Avec l'implantation d'un code d'éléments finis, permet de simuler les relations contraintes – déformations des matériaux. Pour la compréhension des phénomènes. Tous cela faits de l'étude des modèles rhéologiques un domaine vaste reste à découvrir avec plein de notions à dévoiler.

# Chapitre 4

Modèles rhéologique à éléments  
Élastiques et visqueux variables

---



## Chapitre 4 : modèles rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables

### 4.1. Introduction

L'idée d'utiliser un modèle rhéologique à éléments élastiques et visqueux variable vient dans le cadre du développement des travaux [1] constituant une recherche bibliographique sur le fluage dynamique du béton. Cette recherche s'est basée essentiellement sur l'analyse des essais menés par Professeur A. A. Gvozdev et Messieurs Y. N. Kardovcki et I. K. Belobrov (Moscou 1972) [2]. Les principaux résultats exprimés en graphes de ces essais sont :

#### 4.1.1. Le régime de chargement :

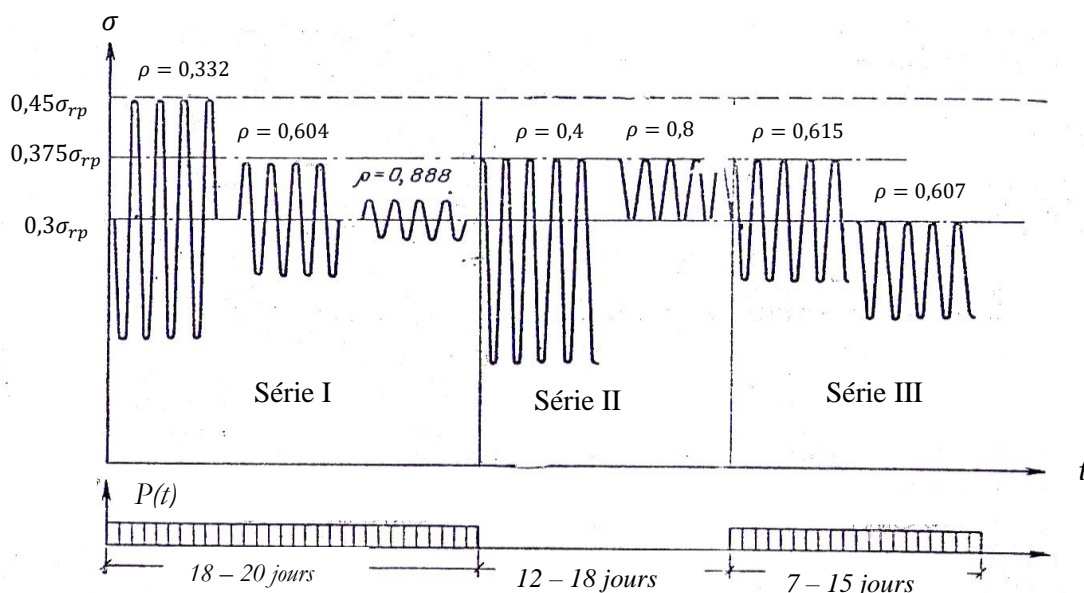


Figure 4.1 Schémas des régimes de chargement du fluage dynamique

Sous l'action des charges dynamiques, trois séries de prismes ont été mis à l'essai:

- Dans la 1<sup>ère</sup> série, l'essai était fait avec une contrainte moyenne du cycle

$\sigma_{moy} = 0,3\sigma_{rp} = \text{constet}$  03 différentes caractéristiques de l'amplitude du cycle

$\rho_1 = 0,332, \rho_2 = 0,604, \rho_3 = 0,888.$

- Dans la 3<sup>ème</sup> série, les essais étaient menés pour presque la même valeur de  $\rho = 0,6$  et 2 niveaux de contraintes maximales du cycle :  $\sigma'_{max} = 0,375\sigma_{rp}$  et  $\sigma''_{max} = 0,3\sigma_{rp}$
- Dans la 2<sup>ème</sup> série, les essais étaient menés avec un seul niveau de contrainte maximale  $\sigma_{max} = 0,375\sigma_{rp}$  et 02 caractéristiques d'amplitude du cycle

$\rho_1 = 0,4$  et  $\rho_2 = 0,8.$

#### 4.1.2. Influence du niveau de la contrainte pour presque la même valeur du caractère de l'amplitude du cycle :

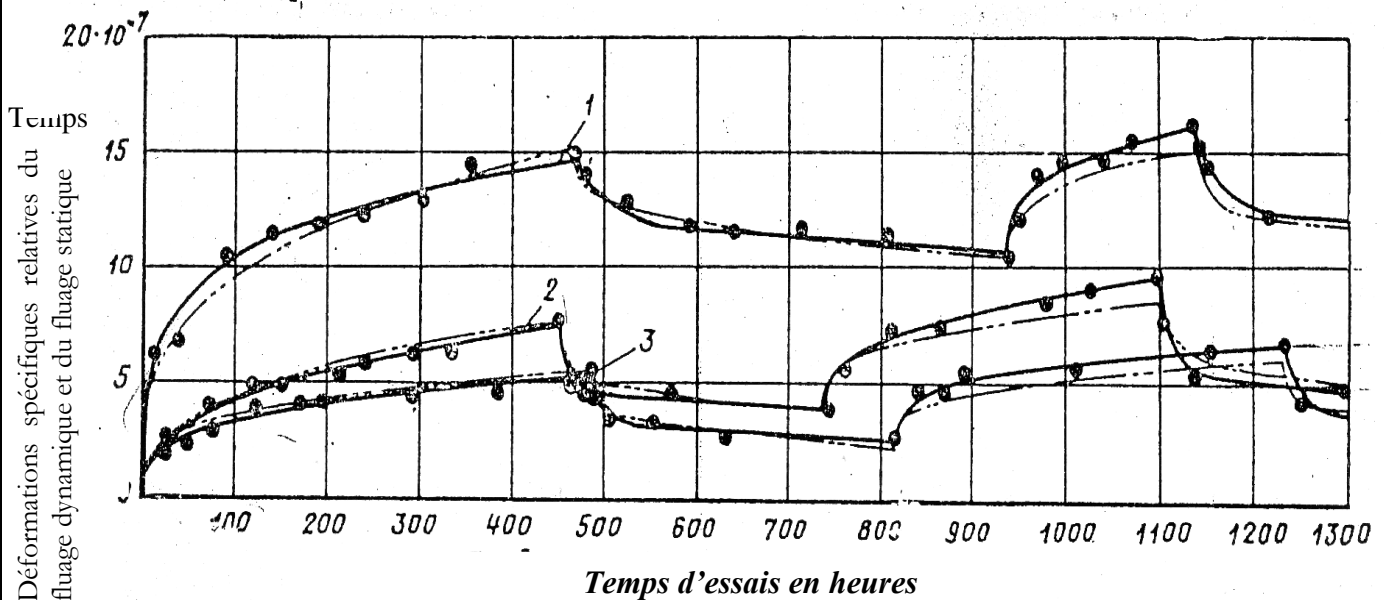


Figure 4.2 Courbes expérimentales (lignes continues) du fluage Dynamique (1 et 2) et du fluage statique (3) (1) pour  $\rho = 0,615$  et  $\sigma_{max} = 0,375\sigma_{rp}$  ; (2) pour  $\rho = 0,607$  et  $\sigma_{max} = 0,3\sigma_{rp}$  ; (3) pour  $\sigma = 0,3\sigma_{rp}$

4.1.3. Influence du caractère de l'amplitude du cycle pour un niveau de contrainte  $\sigma_{max} = 0,375\sigma_{rp}$

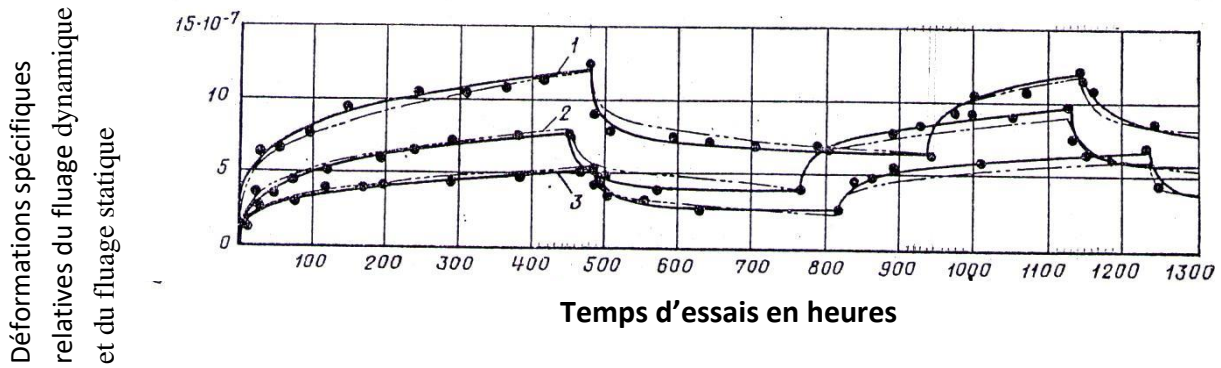
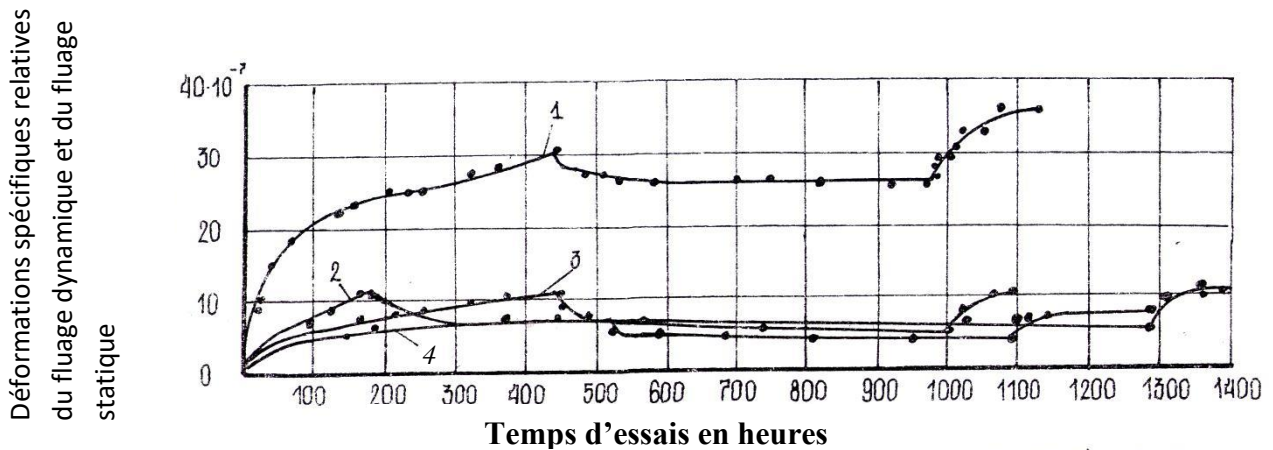


Figure 4.3 Courbes expérimentales (lignes continues) du fluage Dynamique (1 et 2) et du fluage statique (3) : (1) pour  $\rho=0,4$  ; (2) pour  $\rho=0,8$  (3) pour  $\sigma=0,375\sigma_{rp}$

4.1.4. Influence du caractère de l'amplitude du cycle  $\rho$  pour :  $\sigma_{moy} = const$  :



1 – pour  $\rho = 0,332$  ; 2 – pour  $\rho = 0,604$  ; 3 – pour  $\rho = 0,888$  ; 4 – pour  $\sigma =$

Figure 4.4

Avec :

$\sigma_{max}$  : Contrainte maximale

$\sigma_{moy}$  : Contrainte moyenne égale à :  $\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$

$\rho$  : Caractère de l'amplitude du cycle égal à :  $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

#### 4.1.5. Principales conclusions :

Les principales conclusions obtenues dans les travaux [2] suite à l'analyse de ces graphes publiés dans [1] sont :

1. Les déformations du fluage dynamique peuvent être de l'ordre de trois fois le fluage statique.
2. L'accroissement des déformations du fluage dynamique est notamment important dans les premières heures après chargement. En fonction du temps la vitesse d'accroissement des déformations du fluage dynamique est considérablement réduite.
3. Les déformations du fluage dynamique sont beaucoup plus consommées lors du premier chargement.
4. Lors du deuxième long chargement, on observe la diminution de la croissance des déformations résiduelles (non réversibles) en comparaison avec le premier chargement.
5. Pour presque la même valeur du caractère de l'amplitude du cycle  $\rho$ , le fluage dynamique est plus important que la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  de la charge appliquée est plus importante.
6. Pour  $\sigma_{\text{moy}} = \text{const}$  les déformations du fluage dynamique augmentent avec la diminution de la valeur du caractère de l'amplitude du cycle  $\rho$ .
7. Les déformations du fluage dynamique augmentent avec la diminution de la valeur du caractère de l'amplitude du cycle  $\rho$ .
8. Les déformations non réversibles s'amplifient avec la diminution du caractère de l'amplitude du cycle  $\rho$ .
9. La valeur du module d'élasticité instantané du béton diminue de l'ordre de 20% pour la valeur du caractère de l'amplitude du cycle  $\rho = 0,332$ . La variation de la valeur du module d'élasticité du béton est inversement proportionnelle à la valeur  $\rho$ .

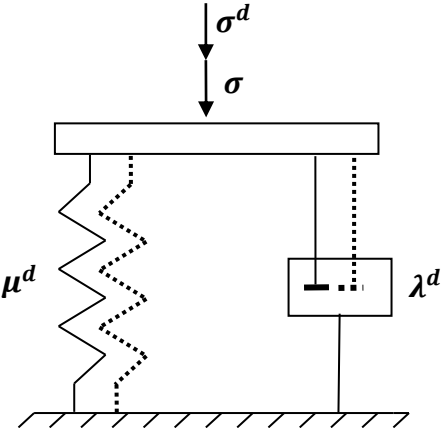
#### 4.2. Modèles rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables :

##### 4.2.1. Caractéristiques générales du modèle :

Le modèle rhéologique proposé (fig.4.5) est analogue à celui de Kelvin-Voigt. La différence fondamentale entre ces deux modèles est que le nombre de liaisons élastiques et visqueux du modèle proposé dépend de l'état de vibration du matériau. On postule que la composante vibratoire de la charge provoque un endommagement interne de la structure du matériau. Sur le modèle, cet endommagement est exprimé par la diminution du nombre d'éléments élastiques et visqueux. En conséquence les valeurs normales des termes  $\mu$  et  $\lambda$  (respectivement coefficients de rigidité et de viscosité sous charge statique) diminueront jusqu'aux valeurs  $\mu^d$  et  $\lambda^d$ . Lors de l'interruption des vibrations, les éléments rompus se rétablissent et les coefficients  $\mu$  et  $\lambda$  reprennent leurs valeurs



initiales. Le passage du modèle d'un état à un autre est considéré comme étant instantané. Il est clair que les valeurs  $\mu^d, \lambda^d$  dépendent de l'un ou de plusieurs paramètres de la charge dynamique, mais cela n'est pas notre traité. Dans ce travail, on suppose d'une manière générale, que plus la charge dynamique (ou l'un ou plusieurs paramètres de la charge dynamique) est grande, plus les déformations de l'élément étudié en béton seront plus importantes. Le but de ce traité est de proposer un modèle rhéologique à éléments élastique et visqueux variables qui permet de simuler la réponse du béton soumis simultanément à une charge statique et une autre dynamique et d'écrire d'une manière simple les équations différentielles de comportement rhéologique correspondant.



**Figure 4.5 modèle rhéologique à élément élastique et visqueux variables. Les éléments non rompus en trait continu et les éléments rompus en trait discontinus**

Si le modèle de Voigt sous charge statique donne l'équation rhéologique du fluage statique (voir chapitre I)

$$\lambda \dot{\epsilon}_t + \mu \epsilon_t = \sigma_t \dots \dots \dots (4.1)$$

Le modèle rhéologique proposé sous charge statique et dynamique donne l'équation rhéologique suivante :

$$\lambda^d \dot{\varepsilon}_t^d + \mu^d \varepsilon_t^d = \sigma_t \dots \dots \dots (4.2)$$

On doit noter ici qu'en appliquant la charge dynamique en plus de la charge statique le niveau de contrainte appliqué oscille de  $\sigma_{max}$  à  $\sigma_{min}$  autour de la contrainte statique  $\sigma$ , et dans le but de simplifier la théorie, on considère que la contrainte appliqué dans les deux cas statique ou dynamique est la contrainte moyenne  $\left(\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}\right)$ . Cette valeur est égale à la contrainte statique  $\sigma$ . Donc la charge sera toujours considérée comme statique ou quasi-statique et l'application de la charge dynamique n'influe que sur les valeurs des éléments élastiques et visqueux du modèle.

De ce fait, l'application de la charge dynamique fait diminuer les valeurs des coefficients élastiques et visqueux  $\lambda$  et  $\mu$  (correspondant aux valeurs statiques) aux valeurs  $\lambda^d$  et  $\mu^d$  (correspondant aux valeurs dynamiques).

D'où, les nouvelles valeurs de ces coefficients correspondant à la charge dynamique

$$\lambda^d = \frac{\lambda}{K^d} \quad ; \quad \mu^d = \frac{\mu}{K^d} \dots \dots \dots (4.3)$$

En conséquence l'équation rhéologique sous charge statique et dynamique s'écrit :

$$\lambda \dot{\varepsilon}_t^d + \mu \varepsilon_t^d = K^d \sigma_t \dots \dots \dots (4.4)$$

On remarque que l'équation rhéologique du fluage dynamique (4.4) diffère de celle du fluage statique (4.1) par un facteur multiplicateur  $K^d$  devant la contrainte. Et comme  $K^d$  est considéré comme constant et l'équation rhéologique est linéaire, il s'ensuit que :

$$\varepsilon_t^d = K^d \varepsilon_t \dots \dots \dots (4.5)$$

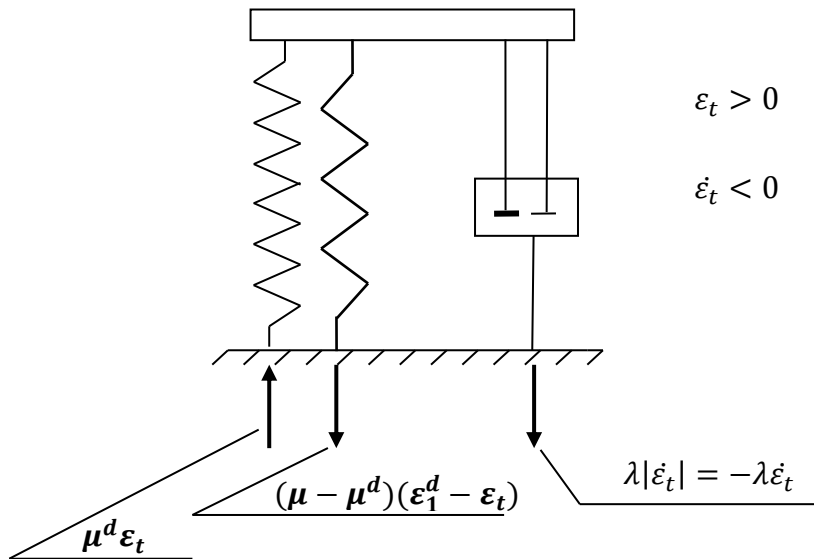
Le coefficient  $K^d$  : est appelé le coefficient du fluage dynamique. Il dépend de l'un ou de plusieurs paramètres de la charge dynamique qui peuvent être soit l'amplitude de la charge dynamique, soit la pulsation de la charge dynamique ou bien le niveau de contrainte max et min ou la contrainte moyenne. Dans notre traité, on suppose que ce coefficient a une valeur supérieure à 1

Dans le cas de déchargement du modèle, les éléments rompus se rétablissent, et le comportement du modèle complètement déchargé (Fig.4.6) s'écrit selon l'équation suivante :

$$\mu^d \varepsilon_t = (\mu - \mu^d)(\varepsilon_1^d - \varepsilon_t) - \lambda \dot{\varepsilon}_t \dots \dots \dots (4.6)$$

Ici la partie droite de l'équation représente la charge interne active, et la partie gauche représente la réaction à cette charge. De l'équation (4.6), on déduit que :

$$\mu^d \varepsilon_\infty = (\mu - \mu^d)(\varepsilon_1^d - \varepsilon_\infty) \dots \dots \dots (4.7)$$



**Figure 4.6**

$$\varepsilon_{\infty} = \varepsilon_1^d - \frac{\mu^d}{\mu} \varepsilon_1^d = \varepsilon_1^d - \frac{\mu^d}{\mu} K^d \varepsilon_1^{st} = \varepsilon_1^d - \varepsilon_1 \dots \dots \dots (4.8)$$

Ainsi, on remarque que les déformations rhéologiques (fluage) conditionnées par la charge dynamique s'avèrent non réversible dans le cas de déchargement total.

Il est clair que dans le cas où le modèle sera déchargé de la charge statique et soumis uniquement sous la charge dynamique, les déformations selon le modèle proposé seront totalement réversibles. Que serait le cas en réalité, on ne le sait pas, les expériences appropriées n'ont pas été réalisées. Cependant, ce type de déchargement présente peu d'intérêt pratique

#### 4.2.1. Rechargement du modèle après repos:

La question du rechargement du modèle après repos à vide est d'un grand intérêt du point de vue de la vérification expérimentale du modèle (théorie).

Nous allons résoudre ce problème en s'appuyant directement sur le modèle, sans recourir aux équations.

Dans la figure IV.7, on a :

- (a) : Modèle avant chargement.
- (b) : Etat stationnaire du modèle sous chargement dynamique.
- (c) : Etat du modèle juste après déchargement.
- (d) : Etat stationnaire du modèle après déchargement.

(e) : Etat du modèle juste après le deuxième chargement.

(f) : Etat stationnaire du modèle après le deuxième chargement.

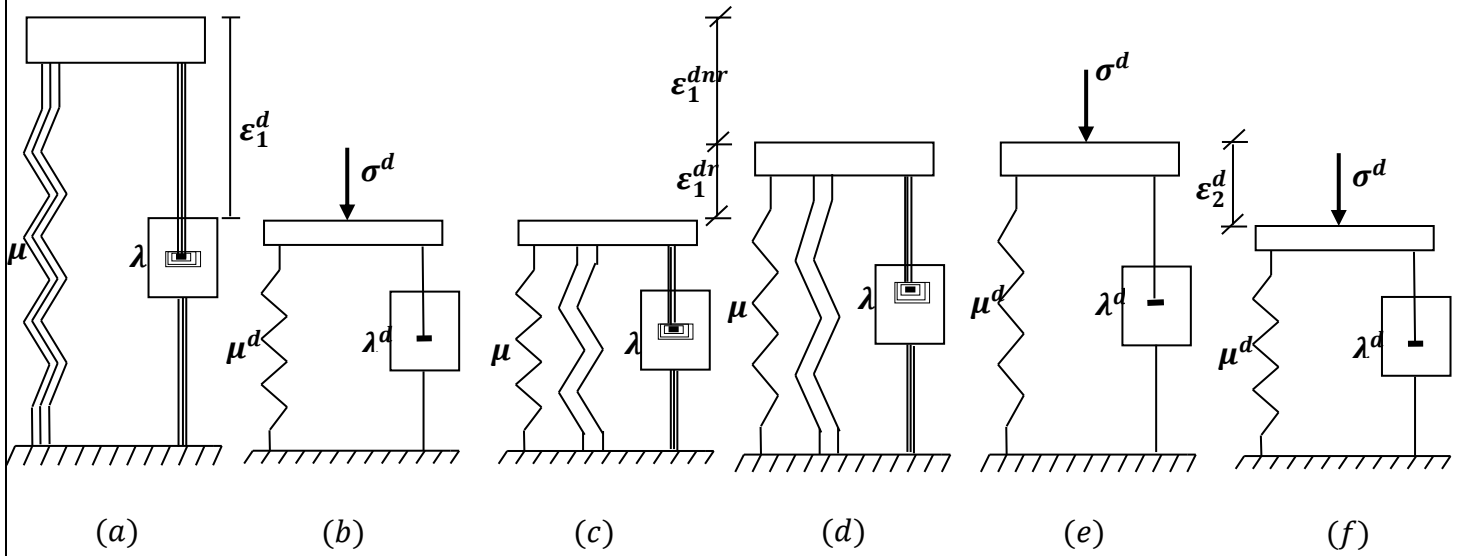


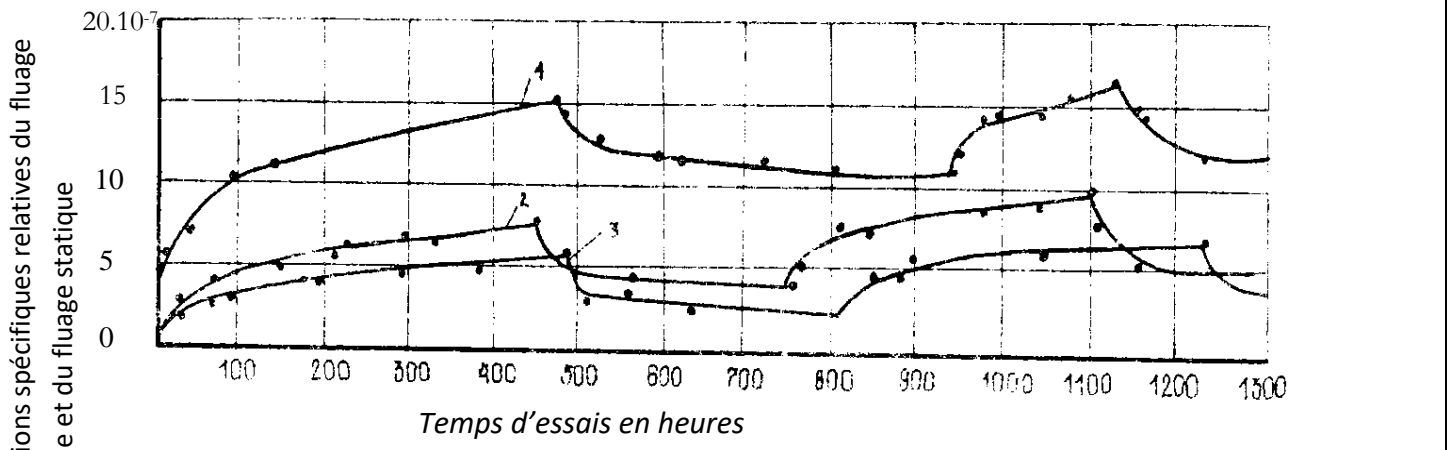
Figure 4.7 Rechargement du modèle après repos

Ou  $\epsilon_1^d$  : Déformations dynamiques dues au 1<sup>er</sup> chargement dynamique.

$\epsilon_1^{dr}$  : Déformations de retour dues au 1<sup>er</sup> déchargement.

$\epsilon_1^{dnr}$  : Déformations de non-retour dues au 1<sup>er</sup> déchargement.

$\epsilon_2^d$  : Déformations dynamiques dues au 2<sup>ème</sup> chargement dynamique.



1 – pour  $\rho = 0,615$  et  $\sigma_{max} = 0,375 \sigma_{rp}$ ; 2 – pour  $\rho = 0,607$  et  $\sigma_{max} = 0,3 \sigma_{rp}$ ; 3 – pour  $\sigma = 0,375 \sigma_{rp}$

**Figure 4.8**

Après le 1<sup>er</sup> chargement (fig.4.7.(b)), les valeurs des éléments élastiques et des éléments visqueux  $\mu$  et  $\lambda$  (fig.IV.7.(a)) diminueront jusqu'aux valeurs  $\mu^d$  et  $\lambda^d$  (fig.4.7.(b)). Lors du déchargement total les éléments rompus se rétablissent et on obtient deux types d'éléments élastiques (fig.4.7.(c)) : les éléments élastiques déformés en compression de valeur  $\mu^d$  qui lors de leurs décompression fond déformer en traction les éléments élastiques nouvellement rétablis de valeurs  $(\mu - \mu^d)$  (fig.4.7.(d)). Les éléments élastiques nouvellement rétablis ne permettent pas la décompression totale des éléments  $\mu^d$  ce qui donne au modèle deux types de déformation : les déformations de non-retour dues au 1<sup>er</sup> déchargement notées  $\varepsilon_1^{dnr}$  et les déformations de retour dues au 1<sup>er</sup> déchargement notées  $\varepsilon_1^{dr}$  (fig.4.7. (d)). Just après le 2<sup>ème</sup> chargement avec la même charge que le premier chargement les éléments élastiques et des éléments visqueux  $\mu$  et  $\lambda$  diminueront encore jusqu'aux mêmes valeurs  $\mu^d$  et  $\lambda^d$ (fig.4.7.(e)) et le modèle continue sa déformation en compression jusqu'à la compression totale des éléments élastiques ou on obtient les déformations dynamiques dues au 2<sup>ème</sup> chargement notées  $\varepsilon_2^d$  (fig.4.7.(f)).

On constate que les déformations rhéologiques dynamiques du modèle, observées après le deuxième chargement, sont égales à la partie réversible des déformations dynamiques due au premier chargement :

$$\varepsilon_2^d = \varepsilon_1^{dr} = \varepsilon_1^d - \varepsilon_1^{dnr} = \frac{\sigma}{\mu^d} - \left( \frac{\sigma}{\mu^d} - \frac{\sigma}{\mu^{st}} \right) = \frac{\sigma}{\mu^{st}} = \varepsilon^{st} \dots \dots \dots (4.9)$$

Il est évident, alors que :

$$\varepsilon_2^d = \varepsilon_2^{dr} \dots \dots \dots (4.10)$$

Donc, les déformations du fluage dynamique du modèle, correspondant à la répétition du chargement sont nettement inférieures par rapport aux déformations dues au premier chargement. Sans doute, cette conclusion théorique s'accorde avec les résultats expérimentaux [2] (Fig.4.8).

En plus, la figure (4.8) empruntée des travaux [2], confirme dans une bonne approximation l'exactitude des résultats théorique (4.9) et (4.10) : de la figure il est clair que, la déformation rhéologique dynamique (fluage dynamique) due au deuxième chargement est quasiment totalement réversible et approximativement égale aux déformations rhéologiques statiques (fluage statique)

#### 4.2.2. Chargement complexe du modèle :

Examinons maintenant le mode complexe de chargement montré sur la figure (4.9).

Le but de ce mode de chargement est la démonstration des équations rhéologique en utilisant le modèle rhéologique proposé (modèle rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables). Sur la figure (4.10) est présenté l'état du modèle à divers intervalles de temps. Ici les chiffres 1,2 et 3 notés sous les éléments élastiques distinguent ces éléments par leur histoire de déformation (les ressorts avec le même numéro ont la même histoire de déformation).

Sur la fig. (4.10)(A) est montré le modèle avant chargement. Au moment  $t_1$  la charge  $\sigma_1^d$  est appliquée fig. (4.10)(B), une partie des éléments seront rompus et le modèle obéira à la loi suivante :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_B^d \dot{\varepsilon}_t^d + \mu_B^d \varepsilon_t^d = \sigma \quad , \quad \varepsilon_{t_1}^{d(A)} = \varepsilon_{t_1}^{d(B)} \\ \lambda_B^d = K_1 \lambda \quad , \quad \mu_B^d = K_1 \mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.11)$$

Au moment  $t_2$  la charge dynamique  $\sigma_1^d$  augmente jusqu'à la valeur  $\sigma_2^d$  , en conséquence, des éléments supplémentaires seront rompus (fig.4.10, C) et le modèle sera géré par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_C^d \dot{\varepsilon}_t^d + \mu_C^d \varepsilon_t^d = \sigma \quad , \quad \varepsilon_{t_2}^{d(B)} = \varepsilon_{t_2}^{d(C)} \\ \lambda_C^d = K_2 \lambda \quad , \quad \mu_C^d = K_2 \mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.12)$$

A la troisième étape au temps  $t_3$  la charge dynamique diminue jusqu'à la valeur  $\sigma_3^d$  ou  $\sigma_1^d < \sigma_3^d < \sigma_2^d$  (on ne doit pas perdre de vue que la charge dynamique dépend d'un paramètre ou de plusieurs paramètres dynamiques supposés influencer sur la diminution ou l'augmentation des valeurs des éléments élastiques et visqueux, influençant ainsi la valeur du coefficient dynamique  $K$ ).

$$\left. \begin{aligned} \lambda_D^d \dot{\varepsilon}_t^d + \mu_C^d \varepsilon_t^d + (\mu_D^d - \mu_C^d)(\varepsilon_t^d - \varepsilon_{t_3}^d) = \sigma \quad , \\ \varepsilon_{t_3}^{d(C)} = \varepsilon_{t_3}^{d(D)} \quad ; \quad \lambda_D^d = K_3 \lambda \quad , \quad \mu_D^d = K_3 \mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.13)$$

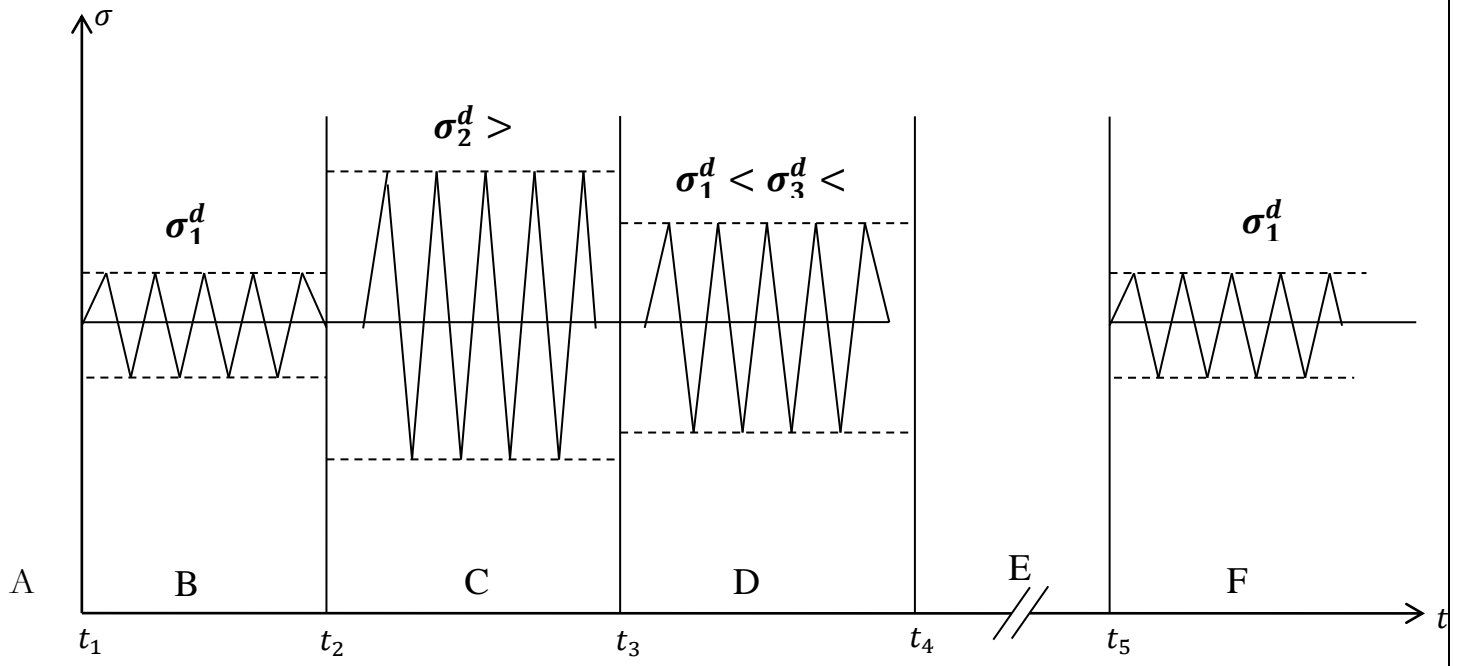


Figure 4.9 régime de chargement

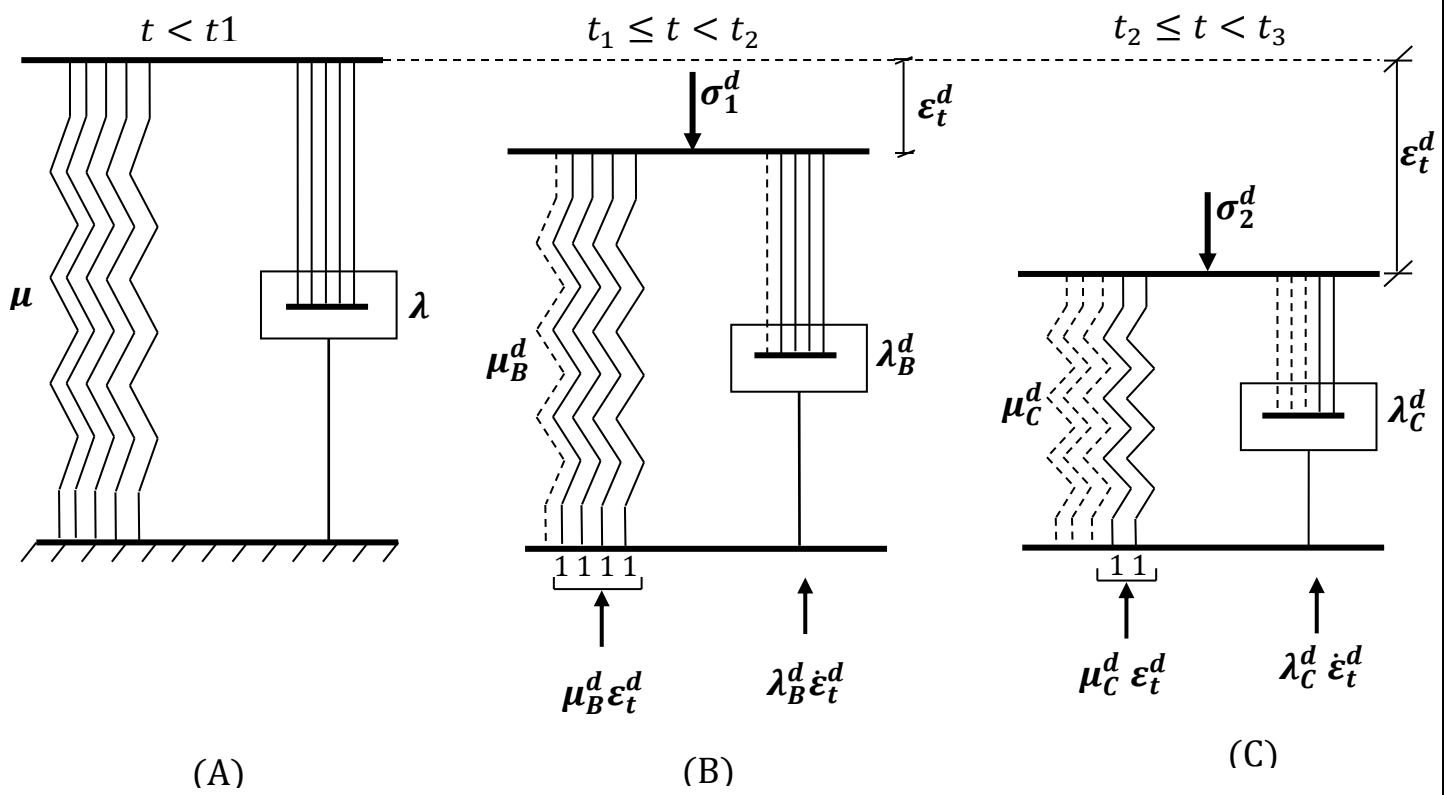


Figure 4.10 Comportement du modèle sous chargement complexe



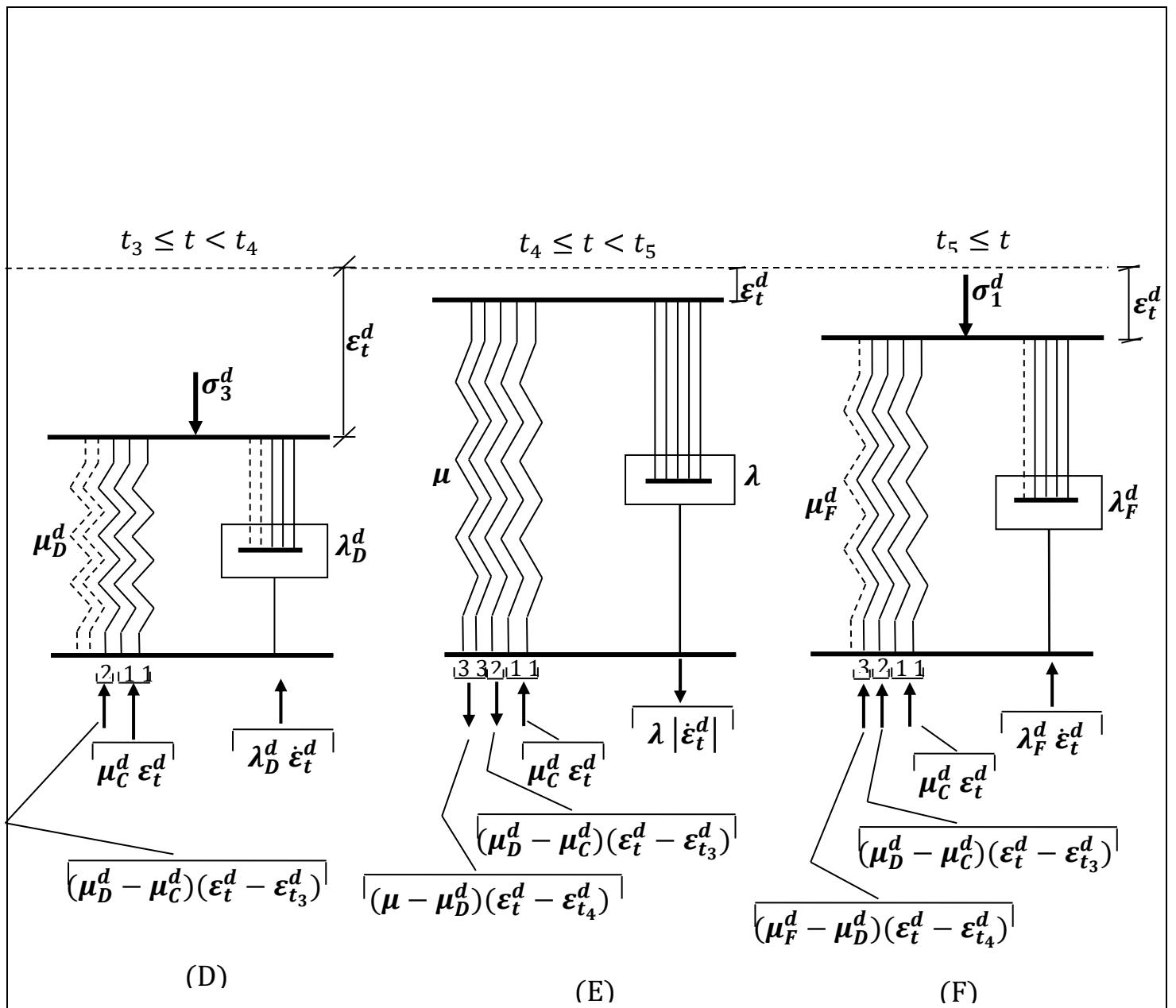


Figure 4.11. Comportement du modèle sous chargement complexe

Au moment  $t_4$ , le modèle est complètement déchargé et tous les éléments rompus se rétablissent (ils sont repérés de chiffre 3). Le modèle déchargé obéit à la loi (fig.4.10, E) :

$$\left. \begin{aligned} \lambda \dot{\varepsilon}_t^d - (\mu - \mu_D^d)(\varepsilon_t^d - \varepsilon_{t_4}^d) - (\mu_D^d - \mu_C^d)(\varepsilon_t^d - \varepsilon_{t_3}^d) + \mu_C^d \varepsilon_t^d = \mathbf{0} \\ \varepsilon_{t_4}^{d(D)} = \varepsilon_{t_4}^{d(E)} \quad ; \quad \lambda |\dot{\varepsilon}_t^d| = -\lambda \dot{\varepsilon}_t^d \end{aligned} \right\} \dots \dots (4.14)$$

Au moment  $t_5$  le modèle a été chargé par la même charge qu'au temps  $t_1$  en conséquence les mêmes éléments ont été rompus que dans le premier cas de chargement. Mais ici, il faut faire attention au fait que, les connexions restantes à intervalles de temps B et F sont différents en tension. Le modèle à partir du moment  $t_5$  sera déformé selon la loi suivante

$$\left. \begin{aligned} \lambda_F^d \dot{\varepsilon}_t^d + \mu_C^d \varepsilon_t^d + (\mu_D^d - \mu_C^d)(\varepsilon_t^d - \varepsilon_{t_3}^d) + (\mu_F^d - \mu_D^d)(\varepsilon_t^d - \varepsilon_{t_4}^d) = \mathbf{0} \\ \varepsilon_{t_5}^{d(E)} = \varepsilon_{t_5}^{d(F)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (4.15)$$

On constate que, le modèle rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables permet d'écrire d'une manière très simple les lois de comportement rhéologique du matériau sous chargement complexes statique et dynamique.

## *Conclusions Générales*

---

---

1. Le modèle rhéologique proposé permet d'écrire d'une manière simple les équations différentielles de comportement rhéologique du béton soumis simultanément à une charge statique et une autre vibratoire (fluage dynamique).
2. Ce modèle permet de prédire le comportement rhéologique du fluage dynamique du béton.
3. Selon le modèle proposé les déformations rhéologiques conditionnées par la charge dynamique sont non réversibles dans le cas de déchargement total.
4. Dans le cas où le modèle proposé est déchargé de la charge statique et soumis uniquement sous la charge dynamique, les déformations seront totalement réversibles.
5. Les déformations rhéologiques du fluage dynamique du modèle, correspondant à la répétition du chargement sont nettement inférieures par rapport aux déformations dues au premier chargement.
6. Selon le modèle proposée, la déformation rhéologique dynamique due au deuxième chargement est quasiment totalement réversible et approximativement égale aux déformations rhéologiques statiques.

## *Perspectives*

---

---

On constate que, le modèle rhéologique à éléments élastiques et visqueux variables proposé dans notre mémoire permet de gérer phénoménologiquement les déformations sous différentes charges et d'écrire d'une manière très simple les lois de comportement rhéologique du matériau sous charges complexes (statique et dynamique). Dans ce mémoire, on ne prétend pas que ce modèle soit utilisable à ce stade de développement, il est nécessaire de développer la relation entre les paramètres de la charge dynamique et les coefficients élastiques et visqueux du modèle.

## *Références Bibliographiques*

---

---

- **Mémoire**

- [1] Tlakheth Meriem « Mémoire Mastère II 2018 » Paramètres dynamiques influant sur la rhéologie du béton. Encadreur Dr. A. Lahmar.

- **Publication :**

- [2] Gvozdev, A.A. ; Kardovski, Y.N. et Belobrov, I.K. (1972) déformations du béton sous charges cycliques, NIIGB, Moscou 1972 : 4-23.

- **Mémoire**

- [3] Djouadi Tebib « Mémoire Mastère II 2015 » Modèles rhéologiques. Encadreur Dr. A. Lahmar

- **Note de cours**

- [4] « La rhéologie » Dr. A. Lahmar

- **mémoire**

- [5] Aoun Badis « Mémoire Mastère II 2013 » Modélisation de l'influence de l'insertion d'une couche viscoélastique sur le comportement dynamique des structures. Encadreur Dr. Harkati el haddi
-