



PII: S0735-1933(02)00387-1

## ETUDE COMPARATIVE DE MODELES A BAS NOMBRE DE REYNOLDS DANS LA PREDICTION D'UN ECOULEMENT A POINT DE STAGNATION

R. Hedef

BP 297, Institut de Mécanique  
Université Larbi Ben M'Hidi  
04000 Oum El Bouaghi – Algérie

B. Leduc

Service de Mécanique Appliquée  
Université Libre de Bruxelles  
B – 1050 Bruxelles

(Communicated by M. Lebouché)

### RESUME

L'hydrodynamique et la thermique d'un jet rond impactant une surface plane sont simulées numériquement par une série de modèles de turbulence  $k$ - $\epsilon$ . Outre le modèle standard, trois modèles à bas nombre de Reynolds sont utilisés. Les résultats obtenus sont confrontés à des données expérimentales. Ils confirment l'incapacité du modèle standard à décrire correctement le transfert de chaleur à la paroi. Avec l'ajout d'un terme additif dans l'équation de  $\epsilon$ , les calculs fournis par les autres modèles sont acceptables.

Des résultats des champs de vitesse, de température et des caractéristiques de la turbulence sont également présentés et commentés. On conclut que le modèle de Chien et celui de Lam sont les meilleurs pour prédire le processus de transfert au voisinage de la paroi.

### ABSTRACT

A comparative study is presented of turbulent models simulating the round jet flow impinging normally on the flat solid surface. The models are a high and low-Reynolds-Number version of the  $k$ - $\epsilon$  model. Predictions for the local convective heat-transfer rate to the wall are compared to available experimental data. It has been found that results obtained with the low-Reynolds-Number  $k$ - $\epsilon$  models are in better agreement with experimental data. An additional source term in the  $\epsilon$  equation was necessary for reducing near-wall length scales and improving the heat-transfer predictions by means of the low-Reynolds-Number  $k$ - $\epsilon$  turbulence models.

Predictions for the velocity, temperature and turbulence characteristics field in the near wall region are presented and discussed. It is concluded that the two low-Reynolds-Numbers  $k$ - $\epsilon$  models to be successful are the Chien model and the Lam model. © 2002 Elsevier Science Ltd

### Introduction

De nombreux modèles de turbulence ont été construits et proposés au fil des années, qui permettent dans chaque cas, outre le calcul de l'écoulement moyen, la prévision des caractéristiques du champ turbulent. Ce sont les modèles à équations de transport, dont le plus répandu a été le modèle énergie-dissipation  $k-\varepsilon$  [1]. Initialement, il a été introduit en fluide incompressible pour une turbulence pleinement développée et négligeait tout effet visqueux direct sur la turbulence. En particulier, il n'est pas applicable dans la sous-couche visqueuse adjacente à une paroi [2]. Dans cette zone, les échelles des tourbillons porteurs d'énergie et des tourbillons dissipateurs se recouvrent. Les tourbillons dissipateurs sont alors directement influencés par le mouvement moyen et ne sont donc pas isotropes tandis que les structures à grande échelle sont influencées par la viscosité moléculaire. Pour rendre compte de ces phénomènes, certaines constantes empiriques des modèles devront être considérées comme des fonctions du nombre de Reynolds de la turbulence, prenant en compte la présence de la sous couche visqueuse. Ainsi, les modèles  $k-\varepsilon$  aux faibles nombres de Reynolds ont été introduits [3] et n'ont cessé d'être transformés par différents auteurs afin de parvenir à prédire correctement les caractéristiques des écoulements turbulents jusqu'à la paroi [4,5,6].

Mais la question posée est la suivante : étant donné un nombre de modèles de turbulence, implantés dans un même code de calcul avec des conditions identiques de résolution (schéma de discrétisation, conditions aux limites, densité de maillage, etc...), comment l'impact d'un jet sur une paroi peut-il être prédit correctement ? Tel est l'objectif de la présente étude. Le choix d'une telle configuration est motivé par sa large application dans le domaine de l'aéronautique (VTOL) ou dans l'industrie utilisant les techniques locales de refroidissement ou de chauffage (aubages de turbines, vêtements, papier, verre...) ou encore dans l'industrie relative aux traitements des surfaces par des jets liquides. Il est connu que le transfert de chaleur se produisant lors de l'impact d'un jet turbulent contre une paroi solide est plus important que celui obtenu dans le cas où le jet est envoyé sur celle-ci sous une incidence nulle. L'importance de cette technique de transfert justifie les nombreuses études qui lui ont été consacrées.

### Modélisation Mathématique

#### Equations

On se propose de faire l'étude du problème schématisé de la Fig. 1. Un jet d'air turbulent issu d'un injecteur de diamètre intérieur  $d$ , heurte sous incidence normale une paroi solide située à une distance  $H$  de la sortie de l'injecteur. L'air est à une température  $T_j$  et la paroi est maintenue à une température uniforme  $T_p$ . L'écoulement est supposé permanent et incompressible. En négligeant

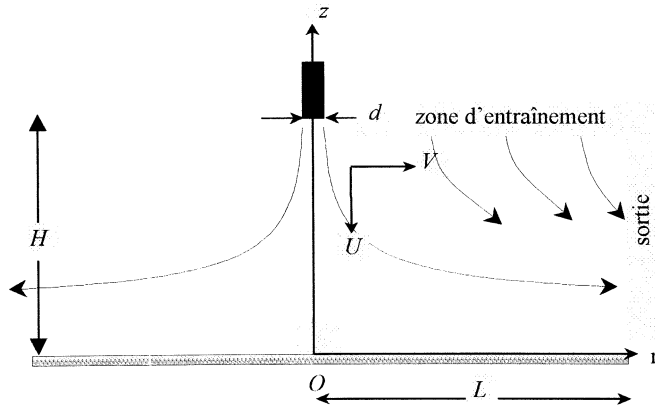


FIG 1.  
Schéma d'un jet axisymétrique heurtant une paroi solide

l'échauffement visqueux, les équations gouvernant l'hydrodynamique et la thermique de l'écoulement sont celles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, fermées par un modèle de turbulence de type  $k-\epsilon$ . Ces dernières s'expriment dans une configuration cylindrique à symétrie axiale comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial rV}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( UU - v_{eff} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( VU - v_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{eff} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{eff} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( UV - v_{eff} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( VV - v_{eff} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{2}{3} \rho k \right) - 2v_{eff} \frac{V}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v_{eff} \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ UT - \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[ VT - \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ Uk - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[ Vk - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] = P_k - (\epsilon + D) \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ U\epsilon - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[ V\epsilon - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] = (C_1 f_1 P_k - C_2 f_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} + E \tag{6}$$

avec :

$$v_{eff} = v + v_t \tag{7}$$

$v_t$  et  $P_k$  désignent respectivement la viscosité turbulente et la production de  $k$  définies par :

$$v_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{8}$$

$$P_k = 2\nu_t \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \tag{9}$$

Le terme  $D$  de l'équation de l'énergie cinétique turbulente est introduit afin de modéliser l'expression de la dissipation à la paroi. Les fonctions correctrices des effets liés à la faiblesse du nombre de Reynolds ne sont effectives qu'au voisinage immédiat de la paroi. Loin de celle-ci, l'égalité suivante est obtenue:  $f_\mu = f_1 = f_2 = 1$ . Les différents coefficients  $C_1$  et  $C_2$  ainsi que les fonctions des modèles  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_\mu$  sont établies de manière d'une part à reproduire le bon comportement des équations de l'énergie cinétique turbulente et de sa dissipation au voisinage de la paroi, et d'autre part à assurer la validité de ces équations à décrire l'écoulement complètement turbulent (loin de la paroi). Parmi les modèles de turbulence  $k-\varepsilon$  existant, nous avons utilisé en plus du modèle standard, trois modèles à bas nombre de Reynolds : le modèle de Lam [7], celui de Chien [8] et celui de Chang [9]. Les fonctions et les constantes de ces quatre modèles sont portées dans le tableau 1.

TABLEAU 1  
Expression des Fonctions Correctrices et des Conditions de la Dissipation à la Paroi

Modèles	$f_\mu$	$f_1$	$f_2$
Standard	1.0	1	1
Lam	$[1 - \exp(-0.016 Re_k)]^2 (1 + 19.5/Re_t)$	$1 + (0.05/f_\mu)^3$	$1 - 0.3 \exp(-Re_t^2)$
Chien	$1 - \exp(-0.0115 z^+)$	1	$1 - 0.22 \exp(-Re_t^2/36)$
Chang	$[1 - \exp(-0.0215 Re_k)]^2 (1 + 31.66/Re_t^{5/4})$	1	$[1 - 0.01 \exp(-Re_t^2)][1 - \exp(-0.0631 Re_k)]$

(a)

Modèles	$D$	$E$	$\varepsilon$ à la paroi	$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
Standard	0	0	loi de paroi	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
Lam	0	0	$(\partial \varepsilon / \partial z) = 0$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
Chien	$-2\nu k / z^2$	$-2(\nu \varepsilon / z^2) e^{-0.5 z^+}$	0	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
Chang	0	0	$\varepsilon_p = \nu (\partial^2 k / \partial z^2)$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

(b)

**Conditions aux Limites**

A sa sortie de l'injecteur, l'écoulement turbulent est pleinement établi avec un profil en puissance de la vitesse axiale [10] :

$$U(r,0)/U_{axe} = (1-r/R)^{1/7} \tag{10}$$

Le rapport de la vitesse débitante à la vitesse sur l'axe est donné en fonction du nombre de Reynolds :

$$U_d/U_{axe} = 0.811 + 0.038 [\log_{10} Re - 4] \quad (11)$$

La vitesse de frottement à la paroi  $U_\tau$  est approximée par la relation [11]:

$$U_d/U_\tau = [2.5 \text{Log}(2U_\tau d/\nu) + 1.5] \quad (12)$$

et sa connaissance permet de déterminer l'énergie cinétique turbulente et sa dissipation à l'entrée [12]:

$$k_e = \frac{0.91 U_\tau^2}{(r/R) + 0.14} \quad (13)$$

$$\varepsilon_e = C_\mu^{3/4} k_e^{1.5} / l_m \quad (14)$$

où  $l_m$  est la longueur de mélange approximée par:

$$l_m = R [0.14 - 0.08 (r/R)^2 - 0.06 (r/R)^4] \quad (15)$$

Sur l'axe de symétrie, on a:

$$V = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0$$

Sur la paroi on a :  $U=V=k=0$ , avec une condition imposée sur  $\varepsilon$  selon le modèle utilisé (Tableau 1-b)

Sur la frontière de sortie on a :  $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0$  et  $V$  est déduite de l'équation de continuité appliquée au point situé juste en amont de la frontière.

Sur la zone d'entraînement :  $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0$  et  $U$  est déduite de l'équation de continuité appliquée au point situé juste en aval de la frontière.

### Résolution Numérique

La méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution numérique de ces équations [13]. Les composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse sont discrétisées en des mailles décalées par rapport aux nœuds principaux sur lesquels sont localisées les autres variables scalaires. Les termes de convection-diffusion sont approchés par le schéma 'QUICK' pour les composantes de la vitesse et par le schéma 'HYBRID' pour les scalaires  $k$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  [14,15,16]. La pression étant l'unique variable n'ayant pas d'équation, elle sera estimée par son couplage avec le champs hydrodynamique ( $U,V$ ) grâce l'algorithme 'PISO' [17]. Le système constitué par les équations finales discrétisées écrites en chaque nœud du domaine ainsi que les conditions aux limites est résolu itérativement en utilisant l'algorithme de Thomas, TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) en conjonction.

Du fait du couplage et de la non-linéarité des équations à résoudre, la stabilité du processus itératif ne peut être assurée que par l'utilisation de coefficients de sous-relaxation et la linéarisation des termes sources. La convergence de la méthode est contrôlée par l'examen de l'évolution des résidus relatifs à chacune des équations et du défaut de masse intervenant comme terme source de correction de la pression.

Le maillage est adapté aux caractéristiques de l'écoulement par un resserrement dans les zones à forts gradients telle que la sous-couche visqueuse moléculaire. Les calculs ont été effectués avec un maillage de 65x75 avec une présence de 15 nœuds dans la couche visqueuse.

### Résultats et Discussion

Dans ce paragraphe, consacré à l'étude du transfert de chaleur, nous présentons les résultats de notre étude numérique que nous comparons à ceux obtenus expérimentalement par Baughn et Shimizu [18]. Dans leur expérience, un jet d'air turbulent, issu d'un injecteur cylindrique de diamètre  $d=26.5\text{ mm}$  à la température  $T_j=20^\circ\text{ C}$ , égale à la température du milieu ambiant, heurte sous incidence normale une paroi maintenue à une température constante  $T_p=30^\circ\text{ C}$ . Le nombre de Reynolds est  $Re=23750$ , correspondant à une vitesse débitante  $U_d=13.46\text{ ms}^{-1}$ .

La figure 2-a montre la comparaison entre l'évolution radiale du nombre de Nusselt calculé pour les divers modèles et les résultats expérimentaux. Pour les modèles de Chien et de Lam un bon accord est observé loin du point d'arrêt ( $r>2d$ ), par contre dans la zone d'impact du jet ( $r<d$ ), le calcul surestime le flux de chaleur. Le profil de  $Nu$  calculé présente comme le profil expérimental un second maximum, mais il se trouve être plus proche du point d'arrêt. Au voisinage de ce dernier, les valeurs calculées du nombre de  $Nu$  sont plus élevées que les valeurs expérimentales. Nous attribuons cette surestimation à l'utilisation des modèles qui ont été développés à l'origine pour des écoulements cisailés.

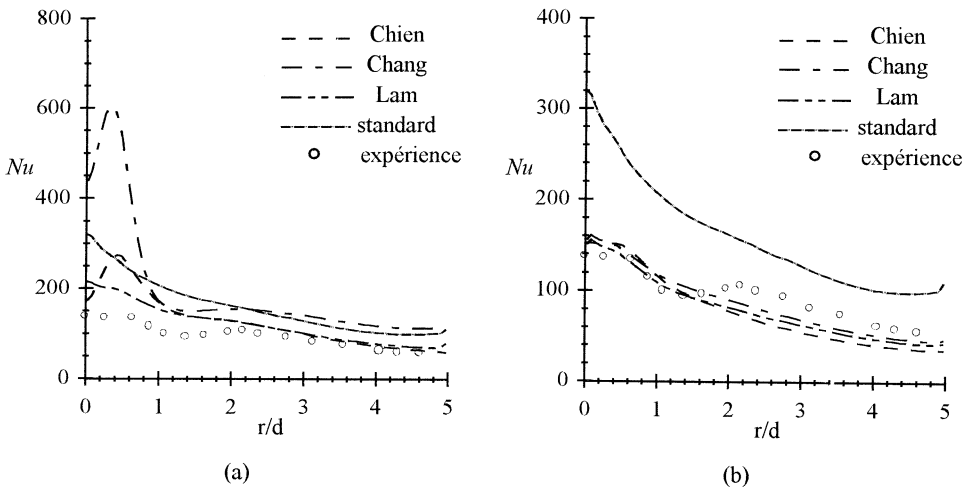


FIG. 2  
Evolution radiale du profil du nombre de Nusselt à la paroi  
(a) sans correction de Yap (b) avec correction de Yap

Afin d'améliorer les prédictions théoriques, nous avons ajouté au terme source de l'équation de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$ , un terme correctif proposé par Yap [19] qui s'écrit :

$$S_{\varepsilon, Yap} = \max \left[ 0, C_{Yap} \left( \frac{l}{l_e} - 1 \right) \left( \frac{l}{l_e} \right)^2 \frac{\varepsilon^2}{k} \right] \tag{16}$$

Cette correction a été introduite après avoir constaté la surestimation, par le modèle de Chien, des flux de chaleur dans le cas d'écoulement avec recirculation. En introduisant cette correction, les valeurs calculées du nombre de Nusselt sont largement réduites. En particulier au voisinage du point d'arrêt, ces valeurs sont en moyenne deux fois moins importantes que celles calculées sans la correction de Yap, conduisant ainsi à des résultats plus proches de ceux obtenus expérimentalement (Fig. 2-b). Néanmoins, nous reprochons à cette correction de ne pas avoir mis en évidence le second maximum du nombre de Nusselt mesuré pour  $r/d \approx 2$ . Ceci est peut être dû à la valeur de la constante  $C_{Yap}$  que nous pensons être fonction du modèle de turbulence et de la configuration géométrique.

Dans la zone thermique ( $z^+ \leq 11$ ), mis à part le modèle standard, les autres modèles prédisent une même évolution transversale pour la température adimensionnée,  $T^+$  (Fig. 3). On y trouve une concordance avec les résultats expérimentaux [20] où la distribution de la température dans la sous-couche thermique suit la loi  $T^+ = Pr z^+$ .

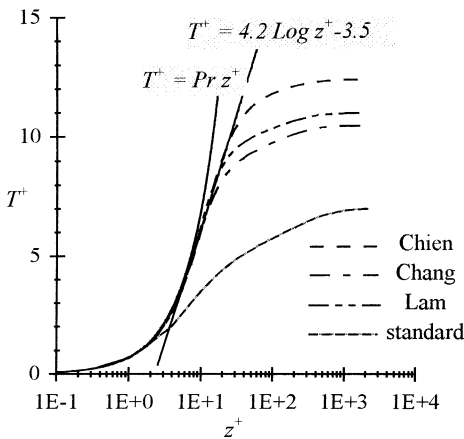


FIG. 3  
Evolution transversale de la température pour  $r=4d$

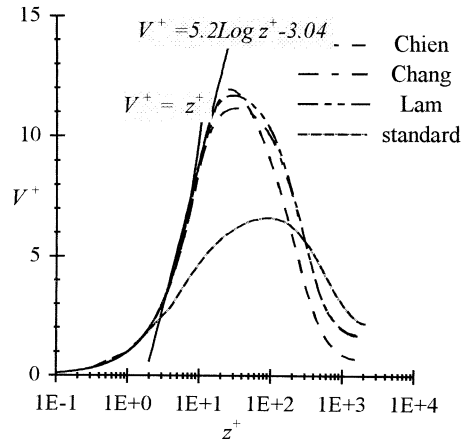


FIG. 4  
Evolution transversale de la vitesse radiale pour  $r=4d$

La figure 4 montre l'allure des profils de la vitesse  $V^+$  en fonction de la distance réduite  $z^+$  pour les divers modèles appliqués. Ces profils sont confondus dans la partie interne de la couche visqueuse

( $z^+ \leq 11$ ), ce qui correspond à l'existence d'une propriété de similitude. Cette dernière s'exprime par la loi suivante :

$$V^+ = z^+ \quad \text{pour } 0 \leq z^+ \leq 5 \quad (\text{sous-couche visqueuse}) \quad (17)$$

$$V^+ = 5.2 \text{Log } z^+ - 3.04 \quad \text{pour } 5 \leq z^+ \leq 11 \quad (\text{zone de transition}) \quad (18)$$

Cette loi est identique aux résultats expérimentaux de Zmeiko et Ustimenko [21]. En revanche, ces profils présentent une légère différence dans le reste du jet.

L'évolution de l'énergie cinétique turbulente  $k^+$  est illustrée par la figure 5.  $k^+$  passe par un maximum ( $\approx 14$ ) pour  $z^+ \approx 110$ , ce qui indique une structure de sous-couche beaucoup plus épaisse que celle observée ou calculée dans un canal par exemple [22,23,24]. Au voisinage de la paroi, ces profils sont similaires selon la relation  $k^+ = C_k z^{+2}$  [25]. Ce taux de croissance est d'un grand intérêt puisqu'il est lié à la valeur de la dissipation réelle à la paroi, du fait que  $\varepsilon_p^{*+} = 2C_k$ . De là, les valeurs de  $C_k$  prédites par les différents modèles sont portées dans le tableau 2. Un résultat intéressant est que le modèle de LAM et celui de CHIEN prédisent la même valeur de  $\varepsilon_p^{*+}$  (Fig. 6).

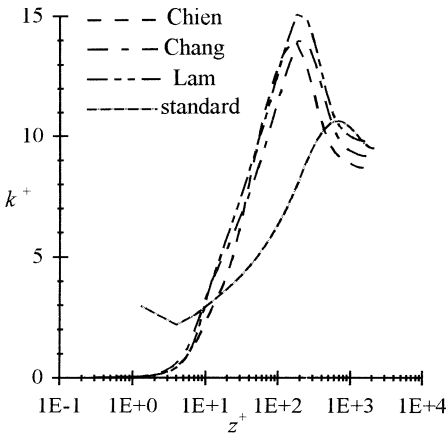


FIG. 5  
Evolution transversale de l'énergie cinétique turbulente,  $r = 4d$

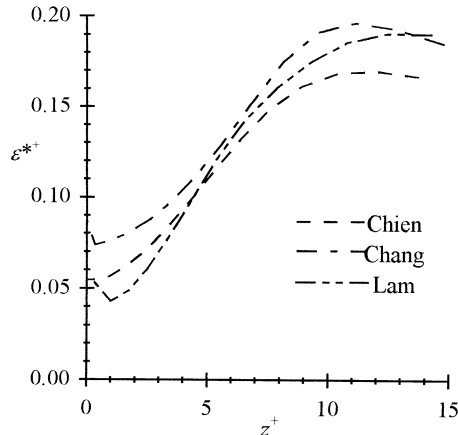


FIG. 6  
Evolution transversale de la dissipation visqueuse,  $r = 4d$

Il faut noter que les résultats présentés ci-dessus (pour  $r=4d$ ) sont valables dans toute la partie du jet pariétal qui a pris naissance loin de l'axe de l'injecteur, dans une partie de l'écoulement où les effets de l'interaction entre le jet incident et la paroi sont négligeables [26].

Près de la paroi, tous les modèles confirment que le transport moléculaire est beaucoup plus grand que le transport turbulent qui ne devient considérable qu'au-delà de  $z^+ = 5$  (Figure 7). Ils présentent aussi le même profil de la vitesse de frottement à la paroi (Fig. 8). Cette dernière croît linéairement dans la zone



d'impact pour atteindre un maximum au point  $r \approx 0.7d$  puis décroît d'une façon monotone avec la distance la radiale, en accord avec les résultats expérimentaux de S.V. Alekseenko [27].

TABLEAU 2  
Valeurs calculées de  $C_k$  et de  $\varepsilon_p^*$

Modèles	$C_k$	$2C_k$	$\varepsilon_p^*$
Lam	0.028	0.056	0.053
Chien	0.028	0.056	0.054
Chang	0.043	0.087	0.087

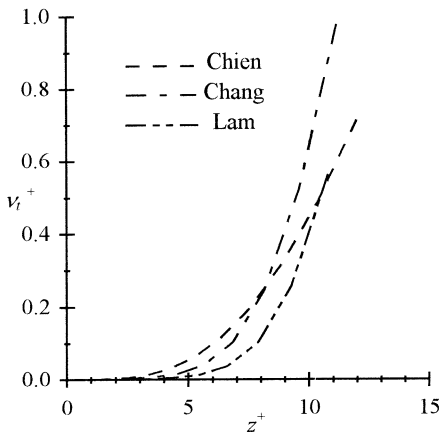


FIG. 7  
Evolution transversale de la viscosité turbulente,  $r = 4d$

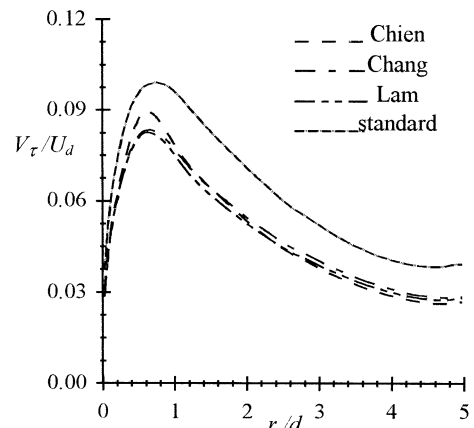


FIG. 8  
Evolution radiale du profil de la vitesse de frottement à la paroi

### Conclusion

La simulation numérique du phénomène impliquant le refroidissement d'une plaque plane par un jet d'air turbulent est réalisée par application d'une approche par les volumes finis. Les résultats obtenus par quatre modèles de turbulence sont comparés à des mesures réelles. Ils montrent que :

- le modèle standard  $k-\varepsilon$  est insuffisant pour décrire les phénomènes de transfert turbulent de chaleur et de quantité de mouvement au voisinage de la paroi,
- les modèles à bas nombre de Reynolds avec la prise en compte du terme correctif de Yap sont en accord avec les résultats expérimentaux et prédisent d'une manière identique l'évolution transversale dans la couche visqueuse des grandeurs (vitesse, tension à la paroi, coefficient de convection thermique, température, énergie cinétique...)

Malgré ceci, ces modèles demeurent toujours évolutifs et doivent intégrer des considérations liées à la diffusion de pression présente uniquement au voisinage de la paroi et dominante dans la zone d'impact.

**Remerciements** Nous remercions l'ANDRU pour le support financier du Projet PNR CC19701.

**Nomenclature**

- $C_k$  : constante dans le profil transversal de  $k^+$
- $C_p$  : chaleur massique à pression constante
- $C_{yap}$  : constante de Yap
- $C_1, C_2$ : constantes du modèle  $k - \varepsilon$  standard
- $d$  : diamètre de l'injecteur
- $D, E, f_1, f_2, f_u$  : fonctions du modèle  $k - \varepsilon$  à bas nombre de Reynolds
- $h$  : coefficient d'échange convectif local ( $=\dot{q}_p / (T_j - T_p)$ )
- $H$  : espacement plaque-injecteur
- $k$  : énergie cinétique turbulente
- $k^+$  : énergie cinétique turbulente ( $=k/V_\tau^2$ )
- $l$  : échelle intégrale de longueur ( $=2.45z$ )
- $le$  : longueur caractéristique ( $=k^{1.5}/\varepsilon$ )
- $l_m$  : longueur de mélange
- $L$  : rayon de la surface d'impact
- $Nu$  : nombre de Nusselt local ( $=hd/\lambda$ )
- $P$  : pression
- $P_k$  : production de l'énergie cinétique turbulente
- $Pr$  : nombre de Prandtl ( $=0.7$ )
- $Pr_t$  : nombre de Prandtl turbulent ( $=0.9$ )
- $r$  : direction radiale
- $R$  : rayon de l'injecteur
- $Re$  : nombre de Reynolds du jet ( $=U_d d/\nu$ )
- $Re_k$  : nombre de Reynolds local ( $=\sqrt{k} z/\nu$ )
- $Re_t$  : nombre de Reynolds turbulent ( $=k^2/\nu\varepsilon$ )
- $T$  : température
- $T_j$  : température du jet

- $T_p$  : température de la paroi  
 $T_\varphi$  : échelle de température ( $= \varphi_p / \rho C_p V_\tau$ )  
 $T^+$  : température adimensionnée ( $= (T - T_p) / T_\varphi$ )  
 $U$  : composante axiale de la vitesse  
 $U_{axe}$  : vitesse sur l'axe  
 $U_d$  : vitesse débitante  
 $U_\tau$  : vitesse de frottement sur la paroi de l'injecteur  
 $V$  : composante radiale de la vitesse  
 $V_\tau$  : vitesse de frottement sur la paroi d'impact ( $= \sqrt{\tau_p / \rho}$ )  
 $V^+$  : vitesse radiale adimensionnée ( $= V / V_\tau$ )  
 $z$  : direction axiale  
 $z^+$  : distance adimensionnée ( $= z V_\tau / \nu$ )  
 $\varphi_p$  : densité de flux thermique à travers la paroi ( $= -\lambda (\partial T / \partial z)_{z=0}$ )  
 $\lambda$  : conductivité thermique  
 $\nu$  : viscosité laminaire  
 $\nu_t$  : viscosité turbulente  
 $\nu^+$  : viscosité turbulente adimensionnée ( $\nu_t / \nu$ )  
 $\varepsilon$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  
 $\varepsilon^*$  : taux de dissipation réel de l'énergie cinétique turbulente ( $= \varepsilon + D$ )  
 $\varepsilon^+$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ( $= \varepsilon \nu / V_\tau^4$ )  
 $\rho$  : masse volumique  
 $\sigma_k$  : nombre de Prandtl de la grandeur  $k$   
 $\sigma_\varepsilon$  : nombre de Prandtl de la grandeur  $\varepsilon$   
 $\tau_p$  : frottement à la paroi ( $= -\rho \nu (\partial V / \partial z)_{z=0}$ )

### Références

1. W. P. Jones and B. E. Launder, The Prediction of Laminarization with a 2-Equation Model of Turbulence, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **15**, pp. 301-314 (1972)

2. R. Hedef, A. Haddad et F. Khaldoun, Simulation de l'Impact d'un Jet Turbulent Axisymétrique par Application de deux Modèles de Turbulence, *Proc. 3<sup>ème</sup> Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et des Sciences de l'Ingénieur*, Casablanca, Maroc, pp. 12-18 (2000)
3. K. Hanjalic and B. E. Launder, A Reynolds Stress Model of Turbulence and its Application to Thin Shear Flows *J. Fluid Mechanics*, **52** pp 609-638 (1972)
4. Y. Nagano and H. Hishida, Improved Form of the  $k-\varepsilon$  Model for Wall Turbulent Shear Flows, *J. Fluids Engineering*, **109**, pp. 156-160 (1987)
5. H. W. Myong and N. Kasagi, A New Approach to the Improved of  $k-\varepsilon$  Turbulence Model for Near-Bounded Shear Flows. *JSME Int. J.* **33**, pp. 63-72 (1990)
6. C. B. Hwang and C. A. Lin, Improved Low-Reynolds-Number  $k-\varepsilon$  Model Based on Direct Numerical Simulation Data, *AIAA Journal* **36**, pp. 38-43 (1998)
7. C. K. G. Lam and K. Bremhorst, A Modified Form of the  $k-\varepsilon$  Model for Predicting Wall Turbulence, *J. of Fluids Engineering* **103**, pp. 456-460 (1981)
8. Y. Chien, Prediction of channel and boundary-layer flows with a low Reynolds number turbulence model, *AIAA Journal* **20**, pp.33-38 (1982)
9. K. C. Chang, W. D. Hsieh and C. S. Chen, A Modified Low-Reynolds-Number Turbulence Model Applicable to Recirculating Flow in Pipe Expansion, *ASME J. Fluids Eng.* **117**, pp. 417-412 (1995)
10. H. Schlichting Boundary Layer Theory 6<sup>th</sup> Ed. Mc. Graw-Hill (1968)---
11. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, 1972
12. J. Nikuradse Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Röhren *VDI-Forschungshelt* **356** (1932)
13. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc-Graw Hill, New York (1980).
14. D. B. Spalding, A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving both First and Second Derivatives, *J. Numerical Methods in Eng.* **4** (1972)
15. B. P. Leonard, A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **4** (1979).
16. A. Leschziner and W. Rodi, Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Various Discretisation Schemes and Turbulence Model Variants", *ASME J. Fluids Eng.*, **103** (1981)
17. R. I. Issa, Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting, Rept FS/82/15, Imperial College of Science & Technology, Fluid Section (1983)
18. J. W. Baughn and S. Shimizu, Heat Transfer Measurements from a Surface With Uniform Heat Flux and an Impinging Jet, *ASME J. Heat Transfer*, **111** pp. 1096-1098 (1989)
19. C. R. Yap, "Turbulent and momentum transfer in a recirculating and impinging flows", Ph.D. thesis, Faculty of Technology, University of Manchester, UK (1987)
20. P. Y. Nizou & T. Tida, Transferts de chaleur et de quantité de mouvement dans les jets pariétaux plans turbulents, *Int. J. Heat Mass & Transfer* **38**, pp.1187-1200 (1995)

21. V. N. Zmeiko and B. P. Ustimenko, Hydrodynamics and Heat Transfer of Rotating Flow Between Two Coaxial Cylinders, *Proc. All Soviet Union Conf. On Heat Transfer*, **1**, pp. 164-179 (1966)
22. J. L. Chao and V. A. Sandborn, Evaluation of the Momentum Equation for a Turbulent Wall Jet. *J. Fluid Mech.* **26** pp. 819-828 (1966)
23. M. Champion and P. A. Libby, Asymptotic Analysis of Stagnating Turbulent Flows. *AIAA Journal*, **29**, pp. 16-24(1991)
24. N.N. Mansour, J. Kim and P. Moin, Near-Wall  $k-\varepsilon$  Turbulence Modeling *AIAA Journal* **27**, pp. 1068-1073 (1989)
25. V. C. Patel, W. Rodi and G. Scheuerer, Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds Number Flows : A Review, *AIAA Journal*, **23**, pp. 1308-1319 (1985)
26. F. Khaldoun et R. Hadeff, Etude Paramétrique d'un Jet Axisymétrique à Point de Stagnation, *Proc. 5<sup>ème</sup> Séminaire Internationale sur la Physique Energétique*, Béchar- Algérie, pp. 64-70 (2000)
27. S.V. Alekseenko and D. M. Markovich, Local characteristics of impinging round jets, *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Symp. Eng. Turbulence and Measurements*, Heraklion-Crete-Greece, pp. 633-642 (1996)

*Received January 24, 2002*