République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de L'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi

Facuté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie

Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire 2021 – 2022

Numéro d'ordre :..................

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques **Option :** Mathématiques appliquées

Thème

Quelques propriétés de composition dans les espaces de Lebesgue et de Sobolev

Présenté par : Aicha Lamri

Soutenu le 30/06/ 2022, devant le jury :

Nabil Merazga	Président	Univ. d'oum Elbouaghi
Mohamed Saadi	Encadreur	Univ. d'oum Elbouaghi
Brahim Hadjou	Examinateur	Univ. d'oum Elbouaghi

Session : Juin 2022

ملخّص

في هذه المذكرة، قمنَا بدرَاسة المحدوديّة و الِاستمرَاريّة لمُؤثّر التّركيب $T_f(g) = f \circ g$ علَى فضَاءَات لوبيغ و سوبولَاف.

كلمَات مفتَاحيّة : فضَاءَات لوبيغ، فضَاءَات سوبولَاف، مُؤثّر التّركيب.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié la bornitude et la continuité de l'opérateur de composition $T_f(g) = f \circ g$ dans les espaces de Lebesgue et de sobolev.

Mots clés : Espaces de Lebesgue, Espaces de Sobolev, Opérateur de composition.

ABSTRACT

In this thesis, we studied the boundedness and the continuity of the composition operator $T_f(g) = f \circ g$ in Lebesgue and sobolev spaces.

Keywords : Lebesgue spaces, Sobolev spaces, Composition operator.

Remerciement

Mes remerciements vont tout premièrement à 'Dieu' tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée Pour terminer ce mémoire .

Je remercier mes parents et ma soeur Roumaissa et mon frère Ahmed.

Je remercier mon encadreur Monsieur MOHAMED SAADI d'avoir choisi le sujet, de la direction et du suivi tout au long de la préparation du mémoire. Particulièrement toute ma reconnaissance pour ma voir fait Bénéficier de ses compétences scientifiques, ses qualités Humaines et sa constante disponibilité.

Je tiens à remercier aussi à Monsieur *Merazga Nabil* d'avoir accepté d'être président du jury.

Je tiens à remercie aussi à Monsieur HADJOU BRAHIM de ma honorés en acceptant examiner mon travail.

Je remercie aussi les membres de jury d'avoir répondus aimablement afin de juger ce travail.

A tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes amis et tous mes collègue de promotion 2022 pour les bons moments que nous avons passés ensemble et nous les souhaitons le bonheur et réussite dans leur vie.

Dédicace

A mes chèrs parents,

A ma famille et ma belle famille,

A tous mes proches et tout mes aimies,

Je dédie ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et E un espace de fonctions $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On pose $T_f(g) = f \circ g$. On dit que f opère sur E si $T_f(E) \subset E$. Par exemple, si E est un espace vectoriel alors toute fonction linéaire opère sur E, on dit dans ce cas que T_f est trivial. Si E est un espace vectoriel invariant par translation alors toute fonction affine opère sur E. Si E est une algèbre de fonctions alors les polynômes qui s'annulent au point 0 opèrent sur E. Pour E un espace vectoriel, les questions suivantes se posent

Q_1 : Existe -t- il des fonctoions non linéaires opérant sur E ?

Q_2 : Pouvons nous déterminer toutes les fonctions qui opèrent sur E ?

Nous allons voir que la réponse de la questions Q_1 est "non" pour certains espaces de Sobolev, et "oui" pour d'autres espaces. Si E est un espace normé, on peut poser les questions

Q_3 : Pour quelles fonctions f, l'opérateur $T_f : E \to E$ est - il borné ?

Q_4 : Pour quelles fonctions f, l'opérateur $T_f : E \to E$ est - il continu ?

Dans ce mémoire, on va essayer de répondre aux question Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 pour $E \in \{L^p(\Omega), W_p^m(\mathbb{R}^n)\}$ où $L^p(\Omega)(\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Lebesgue et $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev, alors, notre travail est organisé en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre on va rappeler quelques propriétés et définitions sur les espaces de Lesbegue et de Sobolev.
- On va étudier l'opérateur de composition sur $L^p(\Omega)$ et $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ dans les chapitres 2 et 3 respectivement.

Dans la conclusion écrite à la fin du mémoire, on résume les résultats principaux de ce travail. Enfin, on note que l'opérateur de composition a des applications, on cite comme exemples [3] et [7, thm 9.17, thm 9.27].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous allons rapeler quelques définitions et propriétés liées aux espaces de Lebesgue et de Sobolev.

1.1 Rappels sur la théorie de mesure

On commence par qulques rappels et notations.

– Ω désigne toujours un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$ et de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$.

– Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus de E et F respectivement. La tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ est la tribu de $E \times F$ engendrée par l'ensemble $\{A \times B : A \in \mathcal{E} \ \ et \ \ B \in \mathcal{F}\}$. En particulier, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+d})$.

– Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E \to F$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ pour toute $A \in \mathcal{F}$.

– Si $f_1 : (E; \mathcal{E}) \to (F_1, \mathcal{F}_1)$ et $f_2 : (E, \mathcal{E}) \to (F_2, \mathcal{F}_2)$ sont mesurables, alors l'application produit $(f_1, f_2) : (E, \mathcal{E}) \to (F_1 \times F2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ est mesurable,

– Si $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ sont des espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes alors, une fonction mesurable $f : E \to F$ est dite borélienne.

– Si $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ sont des espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes alors, toute fonction $f : E \to F$ continue est borélienne.

− $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles qui sont mesurables (on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne).

Nous terminons ce paragraphe par les résultats suivants, qui concernent la composition de fonctions mesurables.

Proposition 1.1

Si $f : (F, \mathcal{F}) \to (G, \mathcal{G})$ et $g : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ sont mesurables, alors leur composée $f \circ g : (E, \mathcal{E}) \to (G, \mathcal{G})$ est mesurable.

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{G}$, alors $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{E}$ car $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. ■

Comme application de la Proposition 1.1, on a le

Corollaire 1.1

Si $f, g : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont deux fonctions mesurables, alors les fonctions

i) $f + g : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

ii) $fg : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

ii) $\max(f, g) : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

iv) $\min(f, g) : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

sont mesurables.

Démonstration : On donne la preuve pour le cas i), les autres sont analogues.

On a $f + g = h \circ (f, g)$ où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est donnée par $h(x, y) = x + y$. Comme h est continue elle est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et (f, g) est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}^2; \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, donc $f + g$ est mesurable comme composée de deux fonctions mesurables. ■

1.2 Espaces de Lebesgue

Convention

A la lumière de la relation d'équivalence dans Ω : $f \sim g \iff f = g$ p. p. sur Ω, nous allons identifier deux fonctions égales p.p. sur Ω. Alors, **on ne pourra pas évaluer une fonction en un point**. En effet, deux fonctions dans la même classe d'équivalence peuvent différer sur un ensemble de points de mesure nulle. Les fonctions qui sont nulles p. p. sur Ω seront toutes identifiés à la fonction identiquement nulle sur Ω.

Notation : Pour tous $p \in [1, \infty]$ et $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & si \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{x\in\Omega} ess|f(x)|, & si \quad p = \infty, \end{cases}$$

avec la convention $\inf(\phi) = +\infty$.

Remarque 1.1

Pour tout $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, on a $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p.$x \in \Omega$.

Démonstration : Voir [7, rem 1, p. 56]. ■

Notation : Pour tout $p \in [1, \infty]$, on pose

$$p' := \begin{cases} \infty \quad si \quad p = 1, \\ \dfrac{p}{p-1} \quad si \quad 1 < p < \infty, \\ 1 \quad si \quad p = \infty. \end{cases}$$

p' est appelé l'exposant conjugué de p.

Définition 1.1 (*Espace de Lebesgue*)

L'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les (classes de) fonctions $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ telles que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.

Définition 1.2 (*Convergence dans L^p*)

Une suite $(f_j)_j$ d'éléments de $L^p(\Omega)$ converge vers $f \in L^p(\Omega)$ ssi $\lim\limits_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} =$

0.

Proposition 1.2 (*Théorème de Riesz-Fisher*)

L'espace $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$ *est un espace vectoriel normé complet (i.e. un espace de Banach) pour tout* $p \in [1, +\infty]$.

Démonstration : Voir par exemple, [9, p. 82]. ■

Lemme 1.1 (*Inégalité de Young*)

Soient $a, b > 0$ *et* $1 < p < \infty$, *alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Démonstration : La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $[0, +\infty[$ c-à-d, pour tous $A, B > 0$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$e^{tA+(1-t)B} \leq te^A + (1-t)e^B.$$

Pour $t = 1/p, A = \ln a^p, B = \ln b^{p'}$ on trouve l'inégalité cherchée. ■

Proposition 1.3 (*Inégalité de Hölder*)

Soient $p \in [1, \infty]$ *et* $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$. *Alors*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Démonstration : On divise la démonstration en plusieurs cas suivant les valeurs de p.

1) Le cas $p = 1$ alors $p' = \infty$, nous avons alors

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \int_\Omega |f(x)|\|g\|_{L^\infty(\Omega)}dx = \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

2) Le cas $p = \infty$ est similaire (on change le rôle de p et p' dans le cas précédant).

3) Le cas $1 < p, q < \infty$ et $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = 1$. D'après l'inégalité de Young

(lemme1.1) on a

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^1(\Omega)} = & \int_\Omega |f(x)||g(x)|dx \\ & \le \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'}\Big)dx \\ & = \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |g(x)|^{p'} dx \\ & = \frac{1}{p}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ & = 1/p + 1/p' = 1 \\ & = \|f\|_{L^p(\Omega}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

4) Le cas général.

Si $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ alors $f = 0$ presque partout d'où $\int_\Omega |f(x)g(x)|dx = 0$ et on peut conclure. Même chose si $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = 0$.

Alors, on peut supposer que $\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} > 0$. Dans ce cas, si $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \infty$ ou $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = \infty$ alors $\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = \infty$ et c'est bon aussi.

Il reste le cas $0 < \|f\|_{L_p(\Omega)}, \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} < \infty$. On pose $F(x) = \dfrac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}$ et $G(x) = \dfrac{g(x)}{\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}}$, on a alors $\|F\|_{L^p(\Omega)} = \|G\|_{L^{p'}(\Omega)} = 1$. D'après le cas précédent,

$$\|FG\|_{L^1(\Omega)} \le \|F\|_{L^p(\Omega)}\|G\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

c-à-d

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}}\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

d'où l'inégalité de Hölder. ■

Corollaire 1.2 (*Inégalité de Hölder généralisée*)

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soient $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Alors

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Démonstration : • Si $r = \infty$ alors $p = q = \infty$.

On a $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *p.p.* $x \in \Omega$, donc

$$\|fg\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

- Si $r = 1$, l'inégalité cherchée n'est que l'inégalité de Hölder.

- Si $1 < r < \infty$ et $p = \infty$ alors $q = r$.

Si $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$ alors

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} = 0 \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si ($\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$ et $0 < \|g\|_{L^q(\Omega)} < \infty$) ou $0 < \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ et $\|f\|_{L^q(\Omega)} = \infty$) ou ($|f\|_{L^\infty(\Omega)} = |f\|_{L^q(\Omega)} = \infty$) alors

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \infty = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si ($0 < \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ et $0 < \|g\|_{L^q(\Omega)} < \infty$) alors p.p. $x \in \Omega$ on a

$$|f(x)g(x)|^r \leq \|f\|^r_{L^\infty(\Omega)}|g(x)|^r,$$

en intégrant sur Ω on trouve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|^r dx \leq \|f\|^r_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g(x)|^r,$$

donc

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^r(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

- Si $1 < r < \infty$ et $q = \infty$ alors $p = r$.

On traite ce cas comme le cas précédant en changeant le rôle de p et q.

- Supposons maintenant $p, q, r \in]1, +\infty[$ alors $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, donc $s' := \frac{q}{r}$ est l'exposant conjugué du $s := \frac{p}{r}$.

D'après l'inégalité de Hölder

$$\||fg|^r\|_{L^1(\Omega)} \leq \||f|^r\|_{L^s(\Omega)}\||g|^r\|_{L^{s'}(\Omega)},$$

c-à-d

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|^r dx \leq \left(\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}\right)^r,$$

autrement dit

$$\Big(\int_\Omega |f(x)g(x)|^r dx\Big)^{1/r} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)},$$

d'où

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

■

Corollaire 1.3

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ alors $fg \in L^r(\Omega)$, en particulier, $(f, g) \in L^p(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \Rightarrow fg \in L^p(\Omega)$.

Proposition 1.4 (*Inégalité de Minkowski*)

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ alors

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Démonstration : Pour presque tout $x \in \Omega$ on a

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \tag{1.2}$$

en intégrant sur Ω

$$\int_\Omega |f+g|dx \leq \int_\Omega |f|dx + \int_\Omega |g|dx,$$

alors

$$\|f+g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\Omega)},$$

donc l'estimation (1.1) est vréfiée pour $p = 1$

D'autre part, la Remarque 1.1 et l'inégalité (1.2) enraînnent

$$|f(x)+g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, p.p. x \in \Omega,$$

d'où

$$\|f+g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)},$$

donc l'estimation(1.1) vérifiée pour $p = \infty$.

Supposons maintenant que $1 < p < \infty$. Comme l'ingalité est triviale si $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, on suppose que $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$. Alors et on commence par écrire

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1} \quad p.p. \quad sur \quad \Omega, \tag{1.3}$$

Or, d'après l'ingalité de Hölder

$$\int_\Omega |f||f+g|^{p-1}dx \leq \Big(\int_\Omega |f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \tag{1.4}$$

et

$$\int_\Omega |g||f+g|^{p-1}dx \leq \Big(\int_\Omega |g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \tag{1.5}$$

De (1.3), (1.4) et (1.5) il résulte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f+g|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f||f+g|^{p-1}dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g||f+g|^{p-1}dx \\ &\leq \Big(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\Big)\Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

en divisant les deux membres de (1.6) par $\Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}$, on touve l'inégalité de Minkowski. ■

Proposition 1.5 (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*)

Soient $p \in [1, \infty[$, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tels que c

1) $f_j \to f$ p.p sur Ω.

2) il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $|f_j(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$, c'est-á-dire

$$\lim_{j\to\infty} ||f_j - f||_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Démonstration : Voir [6, Prop 7.1.7, p. 127]. ■

Proposition 1.6 (*Réciproque partielle du TCD de Lebesgue*)

Soient $p \in [1, \infty]$, $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ une fonction mesurable telle que

$f_j \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$.

Alors, il existe une sous-suite (f_{j_k}) extraite de (f_j) et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telle que

1) $f_{j_k} \to f$ *p.p sur* Ω.

2) $|f_{j_k}| \leq |h|$ *p.p. sur* Ω.

Démonstration : Voir [7, thm 4.9, p. 94]. ■

Lemme 1.2

Soit p un réel tel que $1 \leq p < \infty$. Alors,

$$\varphi f \in L^p(\Omega) \qquad \textit{pour tout} \quad (\varphi, f) \in \mathcal{D}(\Omega) \times L^p(\Omega).$$

De plus, l'opérateur linéaire de multiplication $H_\varphi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), f \to \varphi f$ est bornée.

Démonstration : D'après l'inégalité de Hölder généralisée $\|H_\varphi(f)\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)}$ donc

$$\|\varphi f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad C = \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty (car \;\; \mathcal{D}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)),$$

alors l'opérateur de multiplication H_φ est borné. ■

On termine ce paragraphe par le résultat suivant :

Proposition 1.7

Soient $(B_j)_{j \geq 0}$ une suite de boules de Ω deux-à-deux disjointes et $(u_j)_{j \geq 0}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ telles que supp $u_j \subset B_j, j \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, alors il existe $u \in L^p(\Omega)$ tel que

i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} u_j = u \text{ dans } L^p(\Omega),$

ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x) = u(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$

Démonstration : **i)** Soit $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $k < m$, d'après l'inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{j=0}^{m} u_j - \sum_{j=0}^{k} u_j \Big\|_{L^p(\Omega)} = \Big\| \sum_{j=k+1}^{m} u_j \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{j=k+1}^{m} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

Et comme la série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}$ est convergente, il vient que la suite $S_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} u_k$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, donc elle est convergente car $L^p(\Omega)$ est complet, d'où l'existence d'un $u \in L^p(\Omega)$ tel que $S_j \to u$ dans $L^p(\Omega)$.

ii) On pose $g := g(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x), x \in \Omega$. Soit $x \in \Omega$, puisque les B_j sont deux-à-deux disjoints, on a

si $x \notin \displaystyle\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$, alors $g(x) = 0$, sinon, il existe un et un seule $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) = u_{k_0}(x)$. Alors, pour x fixé $S_j(x) \to g(x)$.

D'après **i)**, $S_j \to u$ dans $L^p(\Omega)$, d'après la Proposition 1.6, il exitse une sous-suite S_{j_k} extraite de S_j telle que $S_{j_k}(x) \to u(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

Comme $S_j \to g$ p.p. sur Ω il vient $S_{j_k} \to g$ p.p. sur Ω. En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathbb{R}$ on trouve $u(x) = g(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)$ p.p. $x \in \Omega$. ■

1.3 Espaces de Sobolev

On note

$$L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^n) := \{f \ mesurable \ : \int_K |f(x)|dx < \infty, \quad pour\ tout\ compact\ \ K \subset \mathbb{R}^n\},$$

et

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : supp \ \ \phi \ \ est \ \ compact\}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$|\alpha| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \quad et \quad \phi^{(\alpha)} = \frac{\partial \phi^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Définition 1.3

Soient $u \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on dit que f admet une dérivée faible d'odre α s'il existe une fonction $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi^{(\alpha)}(x)dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

Pour $u \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$, s'il existe $g \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (1.7), alors g est unique et appelée la dérivée faible d'oredre α de u et on écrit $u^{(\alpha)} = g$.

Définition 1.4

Soient $m \geq 1$ un nombre entier et $p \in [1, +\infty]$, on définit l'espace de Sobolev $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ comme suit :

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad t.q. \quad |\alpha| \leq m, \quad on \quad ait \quad u^{(\alpha)} \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Proposition 1.8

Soit $m \geq 1$ un nombre entier et $p \in [1, +\infty[$. On pose

$$\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

alors, l'espace de Sobolev $(W_p^m(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)})$ est un espace de Banach.

Démonstration : Voir [2, thm 2 p. 60]. ■

Remarque 1.2

Un suite (u_j) d'éléments de $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ converge vers $u \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $u_j \to u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $u_j^{(\alpha)} \to u^{(\alpha)}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $1 \leq |\alpha| \leq m$.

Proposition 1.9

- *Soit $1 < p < \infty$. Alors $W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow m > n/p$.*
- *$m \geq n \Rightarrow W_1^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration : Voir [2, thm 4.12, p. 32]. ■

Proposition 1.10

Si $m > \dfrac{n}{p}$ ou $p = 1$ et $m = n$ alors $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de fonctions pour le produit pnctuel.

Démonstration : Voir [2, thm 4.39, p. 106]. ■

Proposition 1.11

Pour tout $\lambda \geq 1$ etb tout $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{m-n/p}\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration : Pour tout $|\alpha| \leq m$, on a $(f(\lambda\cdot))^{(\alpha)} = \lambda^{|\alpha|}f^{(\alpha)}(\lambda\cdot)$, alors

$$\|(f(\lambda\cdot))^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{|\alpha|}\|f^{(\alpha)}(\lambda\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{|\alpha|-n/p}\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

pour la dernière égalité on a effectué le changement de variable $y = \lambda x$. Alors

$$\|(f(\lambda\cdot))^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{m-n/p}\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

car $\lambda \geq 1$ et $|\alpha| \leq m$. Enfin

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m}\|f(\lambda\cdot)^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{m-n/p}\sum_{|\alpha|\leq m}\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{m-n/p}\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}.$$

■

Lemme 1.3

Soient $m \geq 1$ un entier et $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$, de plus, pour φ fixée dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de multiplication $f \mapsto \varphi f$ est borné de $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

Démonstration : Avant de procéder à la preuve, nous mentionnons les définitions suivante. Pour tous $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ on a

— $\beta \leq \alpha$ si et seulement si $\beta_j \leq \alpha_j$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$.

— Si $\beta \leq \alpha$ alors $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$, où $(\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n)! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$.

Passons maintenant à la démonstration. D'après [11, thm 1 p. 247], on a $\varphi f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $|\alpha| \leq m$, on a

$$(\varphi f)^{(\alpha)} = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varphi^{(\beta)} f^{(\alpha-\beta)}.$$

D'autre part,

$$\Big\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varphi^{(\beta)} f^{(\alpha-\beta)} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.8}$$

Si $\beta \leq \alpha$ alors $\gamma := \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n) \leq \alpha$, alors l'égalité (1.8) devient

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varphi^{(\beta)} f^{(\alpha-\beta)} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \sup_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \Big\| \varphi^{(\beta)} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{\gamma \leq \alpha} \Big\| f^{(\gamma)} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C \sum_{\gamma \leq \alpha} \| f^{(\gamma)} \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C \| f \|_{W_p^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

avec $C := \sup_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \Big\| \varphi^{(\beta)} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Alors,

$$\|\varphi f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|f\|_{W_p^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)},$$

car $W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_p^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq m$ (voir [2, thm. 4.12] pour cette injection). ■

Lemme 1.4

Soit λ un réel tel que $\lambda \notin \mathbb{N}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. Alors, la fonction $g(x) := |x|^\lambda \varphi(x)$ appartient à $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\lambda > m - (n/p)$.

Démonstration : Voir [4, Lemma 1, Proposition 11]. ■

On termine ce chapitre par le résultat suivant

Proposition 1.12

Soient $(B_j)_{j\geq 0}$ une suite de boules de $\mathbb{R}^n$ deux-a-deux disjointes et $(u_j)_{j\geq 0}$ une suite d'éléments de $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ telles que supp $u_j \subset B_j$, pour tout $j \geq 0$, et $\sum_{j\geq 0} \|u_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} <$

∞. *Alors, il existe une fonction* $u \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\sum_{j\geq 0} u_j(x) = u(x) \ p.p.x \in \mathbb{R}^n \quad et \quad \sum_{j=0}^{\infty} u_j = u \quad dans \quad W_p^m(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration : Il est clair que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite (u_j) converge vers la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$u(x) := \begin{cases} 0 \quad si \quad x \notin \bigcup_{j\geq 0} B_j, \\ u_{j_0}(x) \quad si \quad x \in B_{j_0} \ \ pour \ \ certain \ j_0 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\sum_{j\geq 0} u_j(x) = u(x) \ p.p.x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Posons, pour tout $r \geq 0$,

$$U_r = \sum_{j=0}^{r} u_j.$$

Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k < \ell$, on a

$$\begin{aligned} \|U_\ell - U_k\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \Big\| \sum_{j=k+1}^{\ell} u_j \Big\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{j=k+1}^{\ell} \|u_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \\ &= \Big| \sum_{j=0}^{\ell} \|u_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} - \sum_{j=0}^{k} \|u_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \Big|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la série $\sum_{j\geq 0} \|u_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}$ est convergente dans $\mathbb{R}$, on en déduit que la suite (U_j) est de Cauchy dans $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

L'espace $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ étant complet, la suite (U_j) est nécessairement convergente dans $W_p^m(\mathbb{R}^n)$, i.e. il existe une fonction $v \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sum_{j=0}^{\infty} u_j = v$ dans $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

En particulier $\sum_{j=0}^{\infty} u_j = v$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Par la proposition 1.6 il existe une sous-suite U_{j_k} extraite de (U_j) telle que $\lim_{j_k} U_{j_k}(x) = v(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathbb{R}$, il découle de (1.9) que $u(x) = v(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Ce qui achève la démonstration. ∎

CHAPITRE 2

LA COMPOSITION DANS LES ESPACES DE LEBESGUE

Si E est un espace de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opère sur E si $f \circ g \in E, \forall g \in E$. Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'opérateur de composition $T_f(g) = f \circ g, g \in L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de Ω.

2.1 Fonctions qui opèrent sur L^p

On commence ce paragraphe par la propriété suivante :

Proposition 2.1

Soient p un réel tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $|\Omega| = \infty$. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ opère sur $L^p(\Omega)$ alors $f(0) = 0$.

Démonstration : On raisone par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui opère sur $L^p(\Omega)$ avec $f(0) \neq 0$. Soit g la fonction identiquement nulle sur Ω, alors $g \in L^p(\Omega)$. On a $f \circ g(x) = f(0)$, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(0) \neq 0$ n'appartient pas à $L^p(\Omega)$ (car $|\Omega| = \infty$) c-à-d $f \circ g \notin L^p(\Omega)$, cela conterdit le fait que

f opère sur $L^p(\Omega)$. ■

Théorème 2.1

Soient p un réel tel que $1 \leq p < \infty, \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $|\Omega| = \infty$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Alors f opère sur $L^p(\Omega)$ si et seulement si

$$\exists C > 0, \forall t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq C|t|. \tag{2.1}$$

Démonstration : Supposons que (2.1) est satisfaite et montrons que f opère sur $L^p(\Omega)$, cela veut dire :

$$f \circ g \in L^p(\Omega), \quad \forall g \in L^p(\Omega).$$

Soit $g \in L^p(\Omega)$, alors $f \circ g$ est mesurable comme composé de deux fonctions mesurables, de plus, $|f(g(x))|^p \leq C^p|g(x)|^p, p.p.x \in \Omega$, donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f \circ g(x)|^p dx &= \int_\Omega |f(g(x))|^p dx \\ &\leq C^p \int_\Omega |g(x)|^p dx, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f \circ g\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p(\Omega)} < \infty, \tag{2.2}$$

donc $f \circ g \in L^p(\Omega)$.

Montrons maintenant par l'absurde que "f opère sur $L^p(\Omega) \Rightarrow$ (2.1) est vérifiée". Si f opère sur $L^p(\Omega)$ telle que l'estimation (2.1) n'est pas vérifiée, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel α_k non nul tel que

$$|f(\alpha_k)| > k|\alpha_k|. \tag{2.3}$$

Soit $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjointes inclus dans Ω telle que

$$|\alpha_k|^p|B_k| = k^{-p-1}. \tag{2.4}$$

Pour Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\|\alpha_k \chi_{B_k}\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |\alpha_k \chi_{B_k}|^p dx = |\alpha_k|^p |B_k| = k^{-1-p} < \infty$$

(car $\sum_{k\geq 1} k^{-1-1/p}$ est une série de Riemann convergente), par la proposition 1.7, la fonction $g := \sum_{k\geq 1} \alpha_k \chi_{B_k}$ appartient à $L^p(\Omega)$.

Tenant compte de la Proposition 2.1, $f(0) = 0$. Les B_k sont deux-à-deux disjointes, alors, pour tout $x \in \Omega$, on a exclusivement les deux cas suivants

- $x \notin \bigcup_{k\geq 1} B_k$, et dans ce cas $g(x) = 0$ et $f \circ g(x) = 0$.
- il existe un et un seule $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in B_k$ et dans ce cas $f \circ g(x) = f(\alpha_k)$,

alors

$$T_f(g) = f\Big(\alpha_1 \chi_{B_1} + \dots + \alpha_n \chi_{B_n}\Big) = \sum_{k\geq 1} f(\alpha_k) \chi_{B_k}, \tag{2.5}$$

Soit $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. De l'expression (2.5) on a

$$\|f \circ g\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_B \Big| \sum_{k\geq 1} f(\alpha_k) \chi_{B_k}(x) \Big|^p dx.$$

Les B_j sont deux-à-deux disjoints, donc

$$\|f \circ g\|^p_{L^p(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} \Big| \sum_{k\geq 1} f(\alpha_k) \chi_{B_k}(x) \Big|^p dx$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{B_j} \Big| \sum_{k\geq 1} f(\alpha_k) \chi_{B_k}(x) \Big|^p dx = \int_{B_j} \Big| f(\alpha_j) \chi_{B_j}(x) \Big|^p dx = |f(\alpha_j)|^p |B_j|$,

alors

$$\|f \circ g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{\infty} |f(\alpha_j)|^p |B_j|. \tag{2.6}$$

D'après les inégalités (2.6), (2.3) et (2.4) on trouve

$$\|f \circ g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} k^p |\alpha_j|^p |B_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

donc $f \circ g \notin L^p(\Omega)$. Contradiction ! ■

Proposition 2.2

Soient p un réel tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et f opère sur $L^p(\Omega)$, il existe une boule fermée $B \subset \Omega$ et deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour toute $g \in L^p(\Omega)$ on ait

$$\Big(\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \quad et \quad supp\ g \subseteq B\Big) \Rightarrow \|f \circ g\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2.$$

Démonstration : On raisonne par contradiction. On suppose que pour toute boule fermée B de Ω et toutes constantes $C_1, C_2 > 0$ il existe une fonction g telle que

$$\Big(\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1, supp\ g \subseteq B\Big) \quad et \quad \|f \circ g\|_{L^p(\Omega)} > C_2. \tag{2.7}$$

On considère une suite $(B_j)_{j\geq 1}$ de boules fermées deux-à-deux disjoints de Ω. On définit les fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}, x \in = \widetilde{B_j} \\ 0 & \text{si}, x \notin B_j, \end{cases}$$

où $\widetilde{B_j}$ et la boule fermée de même centre que B_j et de rayan égale a la moitié de celui de B_j. D'aprés le Lemme 1.2, l'opérateur linéaire de multiplication défini par $T_{\varphi_j} : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega), \quad g \mapsto \varphi_j g$ est borné sur $L^p(\Omega)$. On note M_j la norme de T_{φ_j} alors

$$M_j = sup\{\|\varphi_j g\|_{L^p(\Omega)} : \|g\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\}.$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on choisit $B = \widetilde{B}_j, C_1 = 2^{-j}, C_2 = jM_j$ dans (2.7) alors il existe une fonction $g_j \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\|g_j\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-j}, \quad supp\ g_j \subseteq \widetilde{B_j} \quad et \quad \|f \circ g_j\|_{L^p(\Omega)} > jM_j \tag{2.8}$$

Soit $g := \sum_{j\geq 1} g_j$. D'après l'inégalité de Minkowski dénombrable on a

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{j\geq 1} \|g_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{j\geq 1} 2^{-j} < \infty$$

(car $\sum_{j\geq 1} 2^{-j}$ est une série géometrique convergente), donc $g \in L^p(\Omega)$.

Par considération des supports des $g_j, j \geq 1$, pour presque tout $x \in \widetilde{B_j}$ on a

$$\begin{aligned}\varphi_j(x)(f\circ g)(x) &= \varphi_j(x)f\Big(g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_j(x)+\cdots\Big)\\ &= \varphi_j(x)(f\circ g_j)(x) = (f\circ g_j)(x) \quad (car \quad \varphi_j = 1 \quad sur\widetilde{B_j}).\end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité (2.8)

$$jM_j < \|f\circ g_j\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi_j(f\circ g)\|_{L^p(\Omega)} \leq M_j\|f\circ g\|_{L^p(\Omega)},$$

donc $\|f\circ g\|_{L^p(\Omega)} > j, \forall j \in \mathbb{N}$, d'où $f\circ g \notin L^p(\Omega)$, contradiction avec le fait que $g \in L^p(\Omega)$ et f opère sur $L^p(\Omega)$. ∎

Théorème 2.2

Soient p un réel tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ telle que $|\Omega| < \infty$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Alors f opère sur $L^p(\Omega)$ si et seulement si il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Démonstration : – **Suffisance.**

Supposons qui'l existent deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telle que

$$|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta, \forall t \in \mathbb{R},$$

alors pour tout $g \in L^p(\Omega)$ on a $f\circ g$ est mesurable comme composée de deux fonctions mesurables et

$$|f(g(x))| \leq \alpha|g(x)| + \beta, \quad p.p.x \in \Omega$$

alors

$$\Big(\int_\Omega |f(g(x))|^p\Big)^{1/p}dx \leq \Big(\int_\Omega \Big(\alpha g(x)| + \beta\Big)^p dx\Big)^{1/p}.$$

D'après l'ingalité de Minkowski

$$\Big(\int_\Omega \Big(\alpha|g(x)|+\beta\Big)^p dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_\Omega |\alpha g(x)|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega |\beta|^p dx\Big)^{1/p} \leq \alpha\|g\|_{L^p(\Omega)} + \beta|\Omega|^{1/p} < \infty,$$

donc $\|f\circ g\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ alors $f\circ g \in L^p(\Omega)$, et donc f opère sur $L_p(\Omega)$.

– **Nécessité.**

Etape 1. On suppose que $f(0) = 0$.

On introduit une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\rho = 1 \quad sur \quad Q = [-1/2, 1/2]^n \quad et \quad supp\ \rho \subset 2Q. \tag{2.10}$$

Si f opère sur $L^p(\Omega)$ alors, d'après la proposition 2.2, il existent un cube fermé $\mathcal{Q}' \subseteq \Omega$ et deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$\Big(\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \quad et \quad supp\ \ g \subseteq \mathcal{Q}'\Big) \Rightarrow \|f\circ g\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2. \tag{2.11}$$

Soient $r > 0$ et $b \in \Omega$ vérifiant la relation $\mathcal{Q}' = b + 2rQ = b + [-r, r]^n$.

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_{t,\varepsilon}(x) = t\rho\Big(\frac{x-b}{r\varepsilon}\Big).$$

Alors, en effectuant le changement de variable $y = \dfrac{x-b}{r\varepsilon}$, on trouve

$$\|g_{t,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |t|^p \Big|\rho\Big(\frac{x-b}{r\varepsilon}\Big)\Big|^p dx\Big)^{1/p} \leq |t| r^{n/p}\varepsilon^{n/p}\|\rho\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut choisir choisir ε de sorte que $\|g_{t,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1$, En effet

- Si $|t| \geq \dfrac{C_1}{r^{n/p}||\rho||_{L^p(\Omega)}}$ alors le choix

$$\varepsilon^{n/p} = \frac{C_1}{r^{n/p}|t|\|\rho\|_{L^p(\Omega)}} \leq 1 \tag{2.13}$$

  nous donne

$$||g_{t,\varepsilon}||_{L^p(\Omega)} \leq C_1.$$

- Si $|t| < \dfrac{C_1}{r^{n/p}||\rho|_{L^p(\Omega)}}$ alors le choix $\varepsilon = 1$ nous donne

$$||g_{t,\varepsilon}||_{L^p(\Omega)} \leq C_1.$$

D'autre part, puisque $0 < \varepsilon \leq 1$ alors $b + 2\varepsilon rQ \subset b + 2rQ = Q'$ donc

$$x \notin b + 2rQ = Q' \Rightarrow x \notin b + 2\varepsilon rQ \Rightarrow \frac{x-b}{r\varepsilon} \notin 2Q,$$

ce qui implqique

$$g_{t,\varepsilon}(x) = t\rho\Big(\underbrace{\frac{x-b}{r\varepsilon}}_{\notin 2Q}\Big) = 0, \forall x \notin Q',$$

alors *supp* $g_{t,\varepsilon} \subset Q'$.

Donc, il résulte de la relation (2.11) que $\|f \circ g_{t,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2$, autrement dit

$$\int_\Omega |f(g_{t,\varepsilon}(x))|^p dx \leq C_2^p. \tag{2.14}$$

Si $x \in b + \varepsilon r Q$ alors $\dfrac{x-b}{r\varepsilon} x \in Q$ et dans ce cas $\rho\Big(\dfrac{x-b}{r\varepsilon}\Big) = 1$ et $f(g_{t,\varepsilon}(x)) = f(t)$.

Alors, la relation (2.14) implique

$$\int_{b+r\varepsilon Q} |f(t)|^p dx = \int_{b+r\varepsilon Q} |f \circ g_{t,\varepsilon}(x)|^p \leq \int_\Omega |f(g_{t,\varepsilon}(x))|^p dx \leq C_2^p, \tag{2.15}$$

ce qui signifie que

$$r^{n/p}\varepsilon^{n/p}|f(t)| \leq C_2. \tag{2.16}$$

Si $|t| \geq \dfrac{C_1}{r^{n/p}||\rho||_{L^p(\Omega)}}$, on utilise les relations (2.13) et (2.16) pour obtenir —

$$f(t)| \leq \frac{C_2}{C_1}\|\rho\|_{L^p(\Omega)}|t| = C_3|t|. \tag{2.17}$$

Si $|t| > \dfrac{C_1}{r^{n/p}||\rho|_{L^p(\Omega)}}$, on utilise le fait que $\varepsilon = 1$ et la relation (2.16) on trouve

$$|f(t)| \leq \frac{(C_2)}{r^{n/p}} = C_4. \tag{2.18}$$

D'après, (2.17) et (2.18),

$$|f(t)| \leq c_3|t| + c_4, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2. Si $f(0) \neq 0$, on pose $f = \underbrace{f - f(0)} + f(0) = \widetilde{f} + f(0)$, alors $\widetilde{f}(0) = 0$.

Si f opère sur $L^p(\Omega)$ alors $\widetilde{f}$ aussi opère sur $L^p(\Omega)$, en effet, pour tout $g \in L^p(\Omega)$

$$\|\widetilde{f} \circ g\|_{L^p(\Omega)} = \|\widetilde{f} \circ g - f(0)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f \circ g\|_{L^p(\Omega)} + (|f(0)||\Omega|)^{1/p} < \infty,$$

(puisque Ω et de mesure finie), alors d'après l'étape 1 il existe deux constantes α et β telles que $|\widetilde{f}(t)| \leq \alpha|t| + \beta, \forall t \in \mathbb{R}$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R} : |f(t)| = |\widetilde{f}(t) + f(0)| \leq \alpha|t| + \beta + |f(0)|.$$

■

Théorème 2.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, alors

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \Longrightarrow f \text{ opère sur } L^\infty(\Omega).$$

Démonstration : Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors pour $g \in L_\infty(\Omega)$ on a $|f \circ g(x)| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ alors f opère sur $L^\infty(\Omega)$. ■

2.2 Continuité de l'opérateur de composition sur L^p

Théorème 2.4

Soient $1 \le p < \infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opère sur $L_p(\Omega)$. Alors, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T_f : L^p(\Omega) & \to & L^p(\Omega) \\ g & \longmapsto & T_f(g) = f \circ g \end{array}$$

est continu si et seulement si f est continue.

Démonstration : Sans perte de généralité on peut supposer $f(0) = 0$ (voir la Remarque 2.1).

Supposons T_f est continu sur $L^p(\Omega)$. Soit A un sous-ensemble measurable de Ω telle que $0 < |A| < \infty$. Pour tous $u \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$, on pose

$$g_u(x) := \begin{cases} u, & si \quad x \in A, \\ 0, & sinon, \end{cases} = u\chi_A(x).$$

Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$ on a

$$f \circ g_u(x) - f \circ g_v(x) = \begin{cases} f(u) - f(v), & si \quad x \in A, \\ 0, & sinon, \end{cases} = \Big(f(u) - f(v)\Big)\chi_A(x),$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A.

Alors

$$\|f \circ g_u - f \circ g_v\|_{L^p(\Omega)} = |f(u) - f(v)||A|^{1/p}. \tag{2.19}$$

Or,

$$g_u(x) - g_v(x) := \begin{cases} u - v, & si \quad x \in A, \\ 0, & sinon, \end{cases} = (u-v)\chi_A(x),$$

donc

$$\|g_u - g_v\|_{L^p(\Omega)} = |u - v||A|^{1/p},$$

donc

$$\lim_{u \to v} \|g_u - g_v\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

ce qui implique

$$\lim_{u \to v} g_u = g_v \quad dans \quad L^p(\Omega),$$

par continuité de T_f,

$$\lim_{u \to v} f \circ g_u = f \circ g_v \quad dans \quad L^p(\Omega),$$

autrement dit

$$\lim_{u \to v} \|f \circ g_u - f \circ g_v\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

par cette égalité et (2.19) on trouve

$$\lim_{u \to v} |f(u) - f(v)| = 0,$$

d'où la continuité de f.

Supposons, maintenant que f est continue et montrons que T_f est continu. Pour cela il suffit de montrer l'assertion suivane :

pour toute suite (g_j) d'éléments de $L^p(\Omega)$ qui converge vers g dans $L^p(\Omega)$, il existe une sous-suite $(g_{j_k})_k$ extraite de $(g_j)_j$ telle que $f \circ g_{j_k}$ converge vers $f \circ g$ dans $L^p(\Omega)$(Voir par exemple [1, prop. 3, p. 11]).

Soit (g_j) une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ qui converge vers $g \in L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$. Par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il existe une sous- suite $(g_{j_k})_k$ extraite de $(g_j)_j$ et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que

$$g_{j_k} \to g \quad p.p. \quad sur \quad \Omega \quad et \quad |g_{j_k}| \leq h \quad p.p. \quad sur \quad \Omega, \forall k,$$

Comme f est continue, il vient

$$f \circ g_{j_k} \to f \circ g \quad p.p. \quad sur \quad \Omega.$$

La propriété "f opère sur $L^p(\Omega)$" entraîne

$$|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta, \forall t \in \mathbb{R},$$

pour certaines constantes positives α et β avec $\beta = 0$ si $|\Omega| = \infty$ (voir les théorèmes 2.1 et 2.2).

On suppose que $\beta = 0$ même si $|\Omega| < \infty$ (voir Remarque 2.1 pour $\beta \neq 0$).

Pour presque tout $x \in \Omega$ on a

$$|f \circ g_{j_k}(x)| \leq \alpha|g_{j_k}(x)| \leq \alpha h(x). \tag{2.20}$$

Donc, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure la convegence de $f \circ g_{j_k}$ vers $f \circ g$ dans $L^p(\Omega)$, d'où la continuité de T_f. ■

Remarque 2.1

Dans la preuve précédente on élimine l'hypothèse $f(0) = 0$ comme suit : Dans ce cas $|\Omega| < \infty$(voir la Proposition 2.1).

On pose $\widetilde{f} = f - f(0)$, alors $\widetilde{f}$ opère sur $L^p(\Omega)$ et $\widetilde{f}(0) = 0$. D'après la preuve précédente $\widetilde{f}$ est continue,et ainsi f est continue.

Si f est continnue, dans la preuve de la continuité de T_f, le nombre β n'est pas forcément nul, alors l'inégalité (2.20) devient

$$|f \circ g_{j_k}(x)| \leq \alpha h(x) + \beta.$$

Comme $|\Omega| < \infty$ on a $\alpha h + \beta \in L^p(\Omega)$ et le théorème de convergence dominée s'applique.

CHAPITRE 3

LA COMPOSITION DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques propriétés de l'opérateur de composition dans $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

3.1 Conditions nécessaires

Proposition 3.1

Soient $m \geq 1$ un entier et $p \in [1, +\infty[$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opére sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ alors $f(0) = 0$.

Démonstration : On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ avec $f(0) \neq 0$. Si g est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$, alors $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ et on a $f \circ g = f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. La fonction $x \mapsto f(0) \neq 0$ n'appartient pas à $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ car $|\mathbb{R}^n| = \infty$, alors $f \circ g \notin W_p^m(\mathbb{R}^n)$ c'est une contradiction, donc $f(0) = 0$. ■

Proposition 3.2

Soient $m \geq 1$ un entier et $p \in [1, +\infty[$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui opère *sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$, il existe une boule fermée $B \subset \mathbb{R}^n$ et deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour toute $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ on ait*

$$\Big(\|g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \quad et \quad supp\ g \subseteq B\Big) \Rightarrow \|f \circ g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2. \tag{3.1}$$

Démonstration : On raisonne par contradiction. On suppose que pour toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et toutes constantes $C_1, C_2 > 0$ il existe une fonction $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\Big(\|g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_1, supp\ g \subseteq B\Big) \ \ et \ \ \|f \circ g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} > C_2. \tag{3.2}$$

On considère une suite $(B_j)_{j\geq 1}$ de boules fermées disjointes de $\mathbb{R}^n$. On définit les fonctions $\varphi_j(x) := \begin{cases} 1 & \text{si}, x \in \widetilde{B_j}, \\ 0 & \text{si}, x \notin B_j. \end{cases}$

D'après le Lemme 1.3, l'opérateur linéaire de multiplication défini par

$$\begin{aligned} H_{\varphi_j} : \ & W_p^m(\mathbb{R}^n) \to W_p^m(\mathbb{R}^n) \\ & g \to \varphi_j g \end{aligned}$$

est borné sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$. On note M_j la norme de T_{φ_j} c-à-d

$$M_j = \sup\{\|\varphi_j g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} : \quad \|g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}.$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on choisit $B = \widetilde{B_j}$ $C_1 = 2^{-j}$ $C_2 = jM_j$ dans (3.2) alors il existe une fonction $g_j \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|g_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-j} \ \ suppg_j \subseteq \widetilde{B_j} \ \ et \ \ \|f \circ g_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} > jM_j. \tag{3.3}$$

On a

$$\sum_{j\geq 1} \|g_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j\geq 1} 2^{-j} < \infty,$$

(car $\sum_{j\geq 1} 2^{-j}$ une série géometrique convergente), par la proposition 1.12, la fonction $g = \sum_{j\geq 1} g_j$ appartient à $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Par considértion des supports de $g_j, j \geq 1$, pour presque tout $x \in \frac{1}{2}B_j$ on a

$$\begin{aligned} \varphi_j(x)(f \circ g)(x) &= \varphi_j(x) f(g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_j(x) + \cdots) \\ &= \varphi_j(x)(f \circ g_j)(x) = (f \circ g_j)(x). \end{aligned}$$

(puisque $g_j(x) = 0$ si $k \neq j$ $x \in \widetilde{B_j}$ et $\varphi_j = 1$ sur $\widetilde{B_j}$).

Alors d'après l'ingalité (3.3)

$$jM_j < \|f \circ g_j\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_j(f \circ g)\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq M_j \|f \circ g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}$$

donc

$$\|f \circ g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} > j, \forall j \in \mathbb{N},$$

d'où $f \circ g \notin W_p^m(\mathbb{R}^n)$, contradiction avec le fait que $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ et f opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$. ■

Remarque 3.1

On peut améliorer la Proposition 3.2 pour obtenir sous les mêmes hypothèses le même résultat pour toute boule fermée $B \subset \mathbb{R}^n$(voir [4, rem. 2, p. 4]).

3.2 La trivialité du calcul fonctionnel dans $W_p^m(\mathbb{R}^n)$

On appelle calcul fonctionnel sur un espace E de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ la caractérisation des fonction s qui opèrent sur E. Si E est un espace vectoriel tel que toute fonction opèrant sur E est linéaire, on dit que le calcul fonctionnel dans E est tivial. Si $E = W_p^m(\mathbb{R}^n), 1 + 1/p < m < n/p$, la trivialité du calcul fonctionnel dans E a été observée par [8], où il a supposé que f est de classe C^∞.

Par exemple, si E est une algèbre alors le calcul fonctionnel dans E n'est pas trivial, puisque, tout polynôme opère sur E. En combinant cette propriété avec la Proposition 1.10, on trouve l'affirmation :

Théorème 3.1

Si $m > n/p$ ou $m = n$ et $p = 1$ alors tout polynôme opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Dans le théorème suivant, on donne un exemple d'un espace de sobolev $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ tel que tous les polynômes de degré supérieur ou égal à 2 n'opèrent pas sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.2

Soit $m < n/p$. Si f est un polynôme qui opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ alors f est linéaire.

Démonstration : Soit f un polynôme de degré $k > 1$ tel que $f(0) = 0$, alors

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} a_j t^j, \quad a_k \neq 0.$$

Soit la fonction $g(x) := |x|^\lambda \varphi(x)$, où λ est un réel vérifiant

$$m - \frac{n}{p} < \lambda < \frac{1}{k}\Big(m - \frac{n}{p}\Big)$$

et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. Alors, d'après le Lemme 1.4 on a $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part, on a $\lambda < 0$ et $\varphi(0) \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que $|g(x)| \geq 1$ *pour tout* $|x| \leq r$.

Soit la partition de l'unité $\psi_1 + \psi_2 = 1$ avec $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que ψ_1 et ψ_2 sont portées par les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \frac{r}{2}\}$ respectivement (Voir [10, p. 155]).

Alors,

$$f \circ g = (f \circ g)\psi_1 + (f \circ g)\psi_2.$$

On a

$$(f \circ g)\psi_2(x) = \begin{cases} \psi_2(x) \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j |x|^{\lambda j} \varphi^j(x), & si \quad |x| \geq r/2, \\ 0, \quad si \quad |x| < r/2, \end{cases}$$

alors $\psi_2 f \circ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ car $supp\ (f \circ g)\psi_2 \subset supp\ \varphi =$ compact de $\mathbb{R}^n$ et $(f \circ g)\psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ comme somme de produits des fonctions C^∞.

D'autre part, on a

$$f(t) = t^k \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{t^{k-j}} = t^k u(t),$$

alors $0 \neq \lim_{t\to\mp\infty} u(t) = a_k$ et u est de classe C^∞ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Alors

$$(f\circ g)\psi_1(x) = \begin{cases} |x|^{\lambda k}\underbrace{\varphi^k(x)u(|x|^\lambda\varphi(x))\psi_1(x)}_{=H(x)}, & si \quad |x|\leq r, \\ 0, \quad si \quad |x| > r. \end{cases}$$

Il est clair que $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. De plus,

$$H(0) = \varphi^k(0)\lim_{t\to\pm\infty} u(t)\psi_1(0) \neq 0,$$

rappelons que $\psi_1(0) = 1 - \psi_2(0) = 1$. En appliquant le Lemme 1.4 on trouve $(f\circ g)\psi_1(x) \notin W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

En conclusion

$$f\circ g = \Big(\underbrace{(f\circ g)\psi_1}_{\notin W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \underbrace{(f\circ g)\psi_2}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\subset W_p^m(\mathbb{R}^n)}\Big) \notin W_p^m(\mathbb{R}^n).$$

C'est une contradiction avec le fait que $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ et f opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$. ■

Théorème 3.3

Soient m un entier et $p \in [1,+\infty[$ telles que $1+\dfrac{1}{p} < m < \dfrac{n}{p}$. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^m opérant sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ alors il existe une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que $f(t) = ct, \forall t\in\mathbb{R}$.

Démonstration : D'après la Proposition 3.2 et la remarque 3.1, il existent deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telle que : pour toute $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$,

$$\Big(\|g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \quad supp\ g \subset 2Q\Big) \Rightarrow \|f\circ g\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2. \tag{3.4}$$

Fixons une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho(x) = 1$ sur $Q = [-1/2, +1/2]^n$ et $supp\ \rho \subset 2Q$.

Définissons la fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$u(x) = x_1\rho(x),$$

où x_1 est la première composante de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Soit $a > 0, 0 < \varepsilon \leq 1$ et $g_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ la fonction définie comme suit :

$$g_a(x) = au\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

On pose

$$C_1 = a\varepsilon^{n/p-m}\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.5}$$

alors *supp* $g_a \subset 2Q$ et

$$\|g_a\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq a\varepsilon^{n/p-m}\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = C_1,$$

(voir la Proposition 1.11, avec $\lambda = 1/\varepsilon$). D'après (3.4)

$$\|f \circ g_a\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2. \tag{3.6}$$

Pour toute $x \in \varepsilon Q$, on a $\dfrac{x}{\varepsilon} \in Q$ donc $\rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big) = 1$, alors

$$f \circ g_a(x) = f\Big(\frac{a}{\varepsilon}x_1\Big), \forall x \in \varepsilon Q,$$

ce qui donne

$$(f \circ g_a(x))^{(\alpha)} = \Big(\frac{a}{\varepsilon}\Big)^m f^{(m)}\Big(\frac{a}{\varepsilon}x_1\Big), \forall x \in \varepsilon Q, \tag{3.7}$$

avec $\alpha = (m, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^n$.

D'après (3.6),

$$\|(f \circ g_a)^{(\alpha)}\|_{L^p(\varepsilon Q)} \leq \|(f \circ g_a)^{(\alpha)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f \circ g_a\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2,$$

alors

$$\Big(\frac{a}{\varepsilon}\Big)^m \int_{\varepsilon Q} \Big|f^{(m)}\Big(\frac{a}{\varepsilon}x_1\Big)\Big|^p dx \leq C_2^p. \tag{3.8}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon Q} \Big|f^{(m)}\Big(\frac{a}{\varepsilon}x_1\Big)\Big|^p dx &= \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \Big|f^{(m)}\Big(\frac{a}{\varepsilon}x_1\Big)\Big|^p dx_1 \times \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} dx_2 \times \cdots \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} dx_n \\
&= \Big(\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \Big|f^{(m)}\Big(\frac{a}{\varepsilon}x_1\Big)\Big| dx_1\Big)\varepsilon^{n-1} \\
&= \Big(\frac{\varepsilon}{a}\int_{-a/2}^{a/2} |f^{(m)}(t)|^p dt\Big)\varepsilon^{n-1},
\end{aligned}.$$

dans la dernière ligne, on a effectué le changement de variable $t = \frac{a}{\varepsilon}x_1$.

Alors

$$\int_{\varepsilon Q} \left| f^{(m)}\left(\frac{a}{\varepsilon}x_1\right)\right|^p dx = \frac{\varepsilon^n}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |f^{(m)}(t)|^p dt.$$

En substituant cette dérinère égalité dans (3.8), on trouve

$$a^{mp-1}\varepsilon^{n-mp} \int_{-a/2}^{a/2} |f^{(m)}(t)|^p dt \leq C_2^p,$$

D'après (3.5), il vient

$$a^{p(m-1-1/p)} \frac{C_1^p}{\|u\|^p_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}} \int_{-a/2}^{a/2} |f^{(m)}(t)|^p dt \leq C_2^p,$$

alors

$$\int_{-a/2}^{a/2} |f^{(m)}(t)|^p dt \leq a^{p(1+1/p-m)} \left(\frac{C_2}{C_1\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}}\right)^p,$$

En faisant $a \to +\infty$ on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)|^p dt = 0, \quad car \quad 1 + 1/p - m < 0,$$

alors $f^{(m)} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}$, et comme $f^(m)$ est continue il vient $f^{(m)} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

En intégrant m fois, on trouve que f est un polynôme de degré $m-1$. Par le Théorème 3.2, f est linéaire, alors $f(t) = ct, \forall t \in \mathbb{R}$ avec $c \in \mathbb{R}$. ■

On peut éliminer la condition "f est de classe C^m" dans le Théorème 3.3, c-à-d on a le théorème suivant

Théorème 3.4

Soient $m \geq 1$ un entier et $p \in [1, +\infty[$ tels que $1 + \frac{1}{p} < m < \frac{n}{p}$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction opérant sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(t) = ct, \forall t \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Voir [4, p. 18]. ■

3.3 Description complète des fonctions qui opèrent sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$

Dans ce paragraphe, on donne une caractirsation complète de toutes les fonctions qui opèrent sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$, pour les démonstrations ou les références voir [4].

Nous avons exclusivement les cas suivants :

i) $m = 1$,

ii) $1 + 1/pm \leq < n/p$ c-à-dire $m = 2, p = 1$ et $n \geq 3$,

iii) $1 + 1/p < m < n/p$,

iV) $m > n/p$ ou $(m = n$ et $p = 1)$,

vi) $m = n/p$ et $p > 1$.

Dans tous les théorèmes suivants $m, n \in \mathbb{N}, p \in [1, +\infty[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable .

Théorème 3.5

Si $p < n$, alors

f opère sur $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f(0) = 0$ et f est lipchitzienne, c-à-d, il existe un réel $K > 0$ tel que,$|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.6

Si $p > n$ ou $p = n = 1$, alors

f opère sur $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f(0) = 0$ et f est localement Lipchitzienne, c-à-d, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle $]a, b[$ contenant x, et un réel $K > 0$, tel que, pour tous $u, v \in]a, b[, |f(u) - f(v)| \leq K|u - v|$.

Théorème 3.7

Soit $m \geq 2$. Si $m > n/p$, ou $m = n$ et $p = 1$, alors

f opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f(0) = 0$ et f appartient locallement à $W_p^m(\mathbb{R})$, c-à-d $f\varphi \in W_p^1(\mathbb{R})$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Théorème 3.8

Si $m = n/p \geq 2$ et $p > 1$, alors

f opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f(0) = 0$ et f' appartient localement uniformément à $W_p^{m-1}(\mathbb{R})$ c-à-d

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\varphi(\cdot + a) - \varphi) f\|_{W^{m-1}(\mathbb{R})} < \infty, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Théorème 3.9

Si $n \geq 3$, alors

f opère sur $W_1^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f(0) = 0$ et $f'' \in L^1(\mathbb{R})$.

3.4 Continuité de l'opèrateur de composition sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$

Le théorème suivant énonce que

$$T_f : W_p^m(\mathbb{R}^n) \to W_p^m(\mathbb{R}^n)$$

est continu.

Théorème 3.10

Soient $m \geq 1$ un entier, $1 \leq p < +\infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un fonction qui opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$, alors l'opérateur T_f est continu de $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Démonstration : Ce théorème a été prouvé étape par étape entre 1976 et 2008 pour des cas porticulier, le cas général a été démontré dans [5]. ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié l'opérateur de composition $T_f = f \circ g$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et $g \in L^p(\Omega)$ ou $g \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Les résultats principaux de ce travail sont :

1. Pour $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$.

   – pour $|\Omega| = \infty$, f opère sur $L^p(\Omega) \Rightarrow f(0) = 0$

   – pour $|\Omega| = \infty$, f opère sur $L^p(\Omega) \Leftrightarrow \exists c > 0$ tel que $|f(t)| \leq c|t|, \forall t \in \mathbb{R}$.

   – pour $|\Omega| < \infty$, f opére sur $L^p(\Omega) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0$ tel que $|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta$

   – $T_f : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ est continu si et seulement si f opère sur $L_p(\Omega)$ et f est continue .

2. Pour $W_p^m(\mathbb{R}^n), m \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$.

   – f opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(0) = 0$.

   – Si $m \geq \dfrac{n}{p}$ ou $m = n$ et $p = 1$ alors tout polynôme opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

   – Si m est un entier telle que $1 + \frac{1}{P} < m < \frac{n}{p}$ alors toute fonction f qui opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est linéaire.

   – Si f opère sur $W_p^m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T_f$ est continue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Arama, Sur Quelques Résultats de la Théorie des Opérateurs Monotones et Applications aux EDP. Mémoire de Master en mathématiques appliquées, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, Juin 2017. 29

[2] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces, 2^{nd} edition, Elsevier (2003).
▷▷ : 17, 18, 19

[3] L. Boccardo, Some developments on Dirichlet problems with discontinuous coeffecients. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. 2 (2009), n.1, p. 285-297. 6

[4] G. Bourdaud, An introduction to composition operators in Sobolev Spaces, arXiv :2204.01118v3 [math.FA] 6 Apr 2022.
▷▷ : 19, 33, 37, 38

[5] G. Bourdaud, M .Moussai, Continuity of composition operators in Sobolev spaces, Ann. I. H. Poincaré-AN **36** (2019), 2053–2063.
▷▷ : 39

[6] A. Bouziad, J. Calbrix, Théorie de la mesure et de l'intégration., Publications de l'université de Rouen, 1993.
▷▷ : 14

[7] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et applications, MASSON, Paris 1987.

▷▷ : 6, 9, 15

[8] B.E.J. Dahlberg, A note on Sobolev spaces, Proc. Symp. Pure Math. **35**, 1(1979), 183–185.

▷▷ : 33

[9] T. Gallay, Théorie de la mesure et de l'intégration, Université Joseph Fourier, Gernoble, 2009.

▷▷ : 10

[10] V. k. Khoan Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles, Tome 1 , Imprimerie Durand, 28-Luisant, 1972.

▷▷ : 34

[11] Lawrence. C. Evens, Partial Dofferential Equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

▷▷ : 19