الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة و الحياة

قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

أطروحة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه الطور الثالث

اختصاص: أنظمة دينامكية و تطبيقاتها

من طرف : **أحمد بوربطة**

تحت عنوان

دراسة حل بعض المسائل لفئة من المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية

للمناقشة أمام اللجنة:

رئيس اللجنة	بوزياني عبد الفتاح	أستاذ	جامعة أم البواقي
المشرف	أوصيف تقي الدين	أستاذ محاضر أ	جامعة أم البواقي
المشرف المساعد	سفيان دهيليس	أستاذ محاضر أ	جامعة أم البواقي
المناقش	غرايبية بلال	أستاذ محاضرأ	جامعة أم البواقي
المناقش	عيساوي عادل	أستاذ	جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي
المناقش	خالد بصيلة	أستاذ	جامعة قسنطينة 1

----------{ دفعة 2020 }----------

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة وجود ووحدانية الحل لمسائل مختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات مشتقات كسرية مقرونة بشروط حدية مختلفة:

نبدأ في الفصل الأول ببعض المفاهيم الأساسية الأولية والأدوات المهمة المستعملة في هذا العمل .

الفصل الثاني يتناول دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية غير خطية كسرية مع شرط ديريكلي بإستخدام طريقة متراجحة الطاقه وطريقة تكرارية تعتمد على تقريب الخطي للجزء غيرالخطي للمسألة .

الفصل الثالث يعالج وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة تفاضلية جزئية غير خطية ذات مشتقات كسرية بالنسبة للزمن و المكان مع شرط حدي من نوع دريكلي نعتمد على التقريب الخطي للمسألة .

و في الاخير يتناول الفصل الرابع دراسة و جود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية مع شروط حدية تكاملية .

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية جزئية غير خطية ، مشتقات من الرتب الكسرية ، ، الشروط الحدية لديركلي ، الشروط الحدية التكاملية ،الوجود ،الوحدانية ،متراجحة الطاقة .

Abstract

This work aims to study the existence and uniqueness of solutions for various problems involving nonlinear partial dffierential equations with fractional derivatives, coupled with dffierent boundary conditions:

We begin the first chapter with some fundamental basic concepts and the essential tools used in this work.

The second chapter addresses the study of the existence and uniqueness of the solution for a nonlinear fractional partial dffierential equation with Dirichlet boundary conditions. This is achieved using the energy inequality method and an iterative approach based on the linear approximation of the nonlinear part of the problem.

he third chapter deals with the existence and uniqueness of a weak solution for a nonlinear partial dffierential equation with fractional derivatives in both time and space, subject to Dirichlet boundary conditions. The approach relies on the linear approximation of the problem.

Finally, the fourth chapter examines the existence and uniqueness of the solution for a nonlinear fractional partial dffierential equation with integral boundary conditions.

Keywords: *Fractional parabolic equations , Fractional-order derivatives ,Dirichlet boundary conditions,Integral boundary conditions, Uniqueness , Existence ,Energy inequalities* .

Résumé

Nous commençons le premier chapitre par quelques concepts fondamentaux de base et les outils essentiels utilisés dans ce travail.

Le deuxième chapitre traite de l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution pour une équation dffiérentielle partielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet. Cela est réalisé en utilisant la méthode des inégalités d'énergie et une approche itérative basée sur l'approximation linéaire de la partie non linéaire du problème.

Le troisième chapitre traite de l'existence et de l'unicité d'une solution faible pour une équation dffiérentielle partielle non linéaire avec des dérivées fractionnaires en temps et en espace, soumise à des conditions aux limites de Dirichlet. L'approche repose sur l'approximation linéaire du problème.

Enfin, le quatrième chapitre étudie l'existence et l'unicité de la solution d'une équation dffiérentielle partielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites intégrales.

Mots clés : *Équation dffiérentielle partielle non linéaire , Les conditions aux limites de Dirichlet ,Les conditions aux limites intégrales, Unicité , Existence,Inégalités d'ènergie*.

إهداء

الحمد لله جلي النعم ذو الجود والكرم الذي جعل لأهل العلم
مزية وأي مزية منزلة علية والصلاة والسلام التامان الأكملان
على خير خلق الله محمد إبن عبد الله أما بعد أهدي عملي
المتواضع الذي أعتبره ثمرة جهدي.
إلى نسمة الحياة التي أعيش بها أمي الغالية وإلى من علمني الجد
والإجتهاد والصبر أبي العزيز ،حفظهما الله وأطال في عمرهما.
إلى زوجتي و إخوتي
إلى جميع أقربائي....
إلى جميع الأصدقاء وزملاء الدراسة...
إلى كل من حملهم قلبي ونسيهم قلمي...

أحمد بوربطة

شكر و عرفان

الشكر للأستاذين المؤطرين أوصيف تقي الدين و سفيان دهيليس اللذين لا يؤدي اللسان الفصيحُ حقَّ بعضِ صفاتهما، ولا يحيط القلم البليغ بِمِعشارِ فضائلهما، أسأله سبحانه أن يرفع مقامهما في مَرقًى يَقصرُ عنهُ طَرفُ الإدراك، ويجعلَ محلَّ رِفعَتِهما فوق هامِ النجوم والأفلاك.

كما أتقدم بجزيل الشكر لرئيس لجنة المناقشة والأعضاء المناقشين كل باسمه و درجته ومقامه وجميع من درسني أو له فضل علي.

أحمد بوربطة

المحتويات

مقدمة عامة **1**

1 المفاهيم الأولية **4**

1.1 العلاقة بين التعامد و الكثافة في الفضاءات الهيلبرتية 4

1.2 دوال الأثر في فضاءات سوبولاف 6

1.2.1 فضاءات سوبولاف $W^{1,p}(\Omega)$ و $H^1(\Omega)$ 6

1.2.2 وجود الأثر 7

1.2.3 نظرية وجود الأثر 7

1.2.4 صيغة غرين 7

1.3 المؤثر الخطي غير المحدود 8

1.4 التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية 9

1.4.1 دالة غاما 10

1.4.2 صيغة كوشي التكاملية 11

1.4.3 صيغة لاتينكوف 12

1.4.4 التكامل الكسري 13

1.4.5 صيغة ريمان ليوفيل 13

1.4.6 صيغة كابوتو 14

1.4.7 التكامل ذي الرتب الكسرية 14

1.4.8 العلاقة بين الإشتقاق الكسري لريمان - ليوفيل والاشتقاق الكسري لكابوتو و التكامل الكسري 15

1.4.9 بعض خواص المشتقات ذات الرتب الكسرية 15

1.4.10 مقارنة بين المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل و المشتقة الكسرية لكابيتو 17

1.5 فضاءات الدوال 19

1.5.1 فضاء سوبولاف $\mathbf{H}^{\alpha}(\mathbb{R})$ 19

1.5.2 طريقة متراجحة الطاقة 37

2 دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية تكافئية جزئية كسرية غير خطية مع شروط دريكلي 39
2.1 مقدمة 39
2.2 صياغة المسألة 39
2.3 دراسة المسألة الخطية 40
2.3.1 التقدير المسبق لحل مسألة خطية 41
2.3.2 وجود حل المسألة الخطية 46
2.4 دراسة الوجود و الوحدانة للمسألة غير الخطية 48

3 دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية غير خطية ذات مشتقات كسرية للزمن و المكان مع شروط دريكلي 54
3.1 مقدمة 54
3.2 صياغة المشكلة 54
3.3 دارسة المسألة الخطية 55
3.3.1 المسألة الخطية 55
3.3.2 التقدير المسبق للحل 56
3.3.3 دراسة وجود حل للمسألة الخطية 62
3.4 دراسة الحل الضعيف للمسألة غير الخطية 63

4 دراسة وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة تكافئية كسرية غير خطية مع شروط حدية من نوع تكامل 70
4.1 مقدمة 70
4.2 صياغة المشكلة 70
4.3 دارسة المسالة الخطية 71
4.3.1 المسألة الخطية 71
4.3.2 التقدير المسبق للحل 72
4.3.3 دراسة وجود حل المسألة الخطية 79
4.4 دراسة الحل الضعيف للمسألة غير الخطية 81

خلاصة عامة 87

المصادر

مقدمة عامة

يمكن نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والمسائل الحديثة في الفزياء والميكانيك والبيولوجيا والتكنولوجيا بواسطة معادلات تفاضلية جزئية ((**partielle dérivées aux équations (EDP)**) مع شروط غير محلية **(conditions non-locales)**.

في الواقع ، بفضل نمذجة هذه الظواهر من خلال المعادلات التفاضلية الجزئية، تمكنا من فهم دور كل معامل ومتغير ، والحصول على تنبؤات دقيقة للغاية في بعض الأحيان .

على الأرجح تمت صياغة المعادلات التفاضلية الجزئية لأول مرة أثناء بداية الميكانيكا الكلاسيكية خلال القرن السابع عشر مثلا من طرف نيوتن **(Newton)**، ولايبنيز **(Leibniz)** ثم تم إثراء "فهرس" المعادلات التفاضلية الجزئية مع تطور العلوم و الفيزياء على وجه الخصوص .

وإذا أردنا ذكر ببعض الأسماء، فيجب أن نذكر أولر **(Euler)** ، و نافيير **(Navier)**، وستوكس **(Stokes)** لمعادلات ميكانيكا الموائع **(mécanique des fuides)** وبذلك أصبحت معادلات نافيير-ستوكس كما نعرفها اليوم مكتملة خلال منتصف القرن ال 19 ، وفورييه **(Fourier)** لمعادلة الحرارة **(équation de la chaleur)** سنة 1822, وماكسويل **(Maxwell)** و معادلته الخاصة بالكهرومغناطيسية **(électromagnétisme)**سنة (1861 – 1862) ولشرودينجر وهايزنبرغ
(Heisenberg - Schrodinger) لمعادلات ميكانيكا الكم **(équations de la mécanique quantique les)**سنة 1925 ، و بالطبع معادلات أينشتاين **(Einstein)**سنة (1915 – 1916) للنظرية النسبية .

اتخذ شوارتز **(L.Schwartz)** خطوة عملاقة عندما اكتشف نظرية التوزيعات **(la théorie des distributions)** وكان ذلك في الخمسينيات من القرن الماضي ، و كذلك هرماندر **(L.Hormander)** لتطوير حساب شبه التفاضل و كان ذلك في أوائل السبعينيات .

من الجدير بالذكر أن نأخذ في الاعتبار أن دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية لا تزال مجالًا نشطا للبحث في بداية القرن الحادي والعشرين ، علاوة على ذلك لا يؤثر هذا البحث في العلوم التطبيقية والنظرية فحسب ، بل يلعب أيضًا دورًا مهمًا للغاية في التطور الحالي للرياضيات نفسها ، في كل من الهندسة والتحليل.

تعتبر دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية في واجهة العديد من المسائل العلمية ، حيث تؤدي النماذج البسيطة لمختلف الظواهر الطبيعية والمسائل الاقتصادية والاجتماعية بشكل طبيعي إلى معادلات تفاضلية جزئية خطية ، لكن في واقع الأمر معظم الظواهر الفيزيائية ، الكيميائية و حتى البيولوجية تؤدي دراستها إلى معادلات تفاضلية جزئية غير خطية .

عندما تكون الظاهرة المنمذجة غير الثابتة أي تطورية متعلقة بالزمن ، عادة ما يتم تمثيلها بنموذج رياضياتي بواسطة معادلات تطو رية ذات قطع مكافئ أو زائدي.

المثال النموذجي لمعادلات القطع المكافئ هو معادلة الحرارة التالية:

$$\forall x \in \Omega \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \delta \Delta u(x,t) + \frac{P}{\psi c}$$

حيث:

Δ هو مؤثر لابلاس **(Laplacien)**

δ هو معامل الانتشار الحراري

P هو حجم الإنتاج المحتمل للحرارة الذاتية

تزامنا مع تطور التكنولوجيا أصبح لا يمكن نمذجة عدة ظواهر في العلوم والهندسة بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية الكلاسيكية ، لذلك وجب إيجاد أدوات ومفاهيم الرياضياتية جديدة لنمذجة الظواهر المعقدة التي تتمثل في المعادلات التفاضلية الكسرية التي يتم الحصول عليها من خلال تعميم المعادلات التفاضلية العادية ، فهي تلعب دورًا حاسمًا في الهندسة و الفيزياء و الرياضيات التطبيقية ، نتيجة لذلك، يمكن للمرء أن يجد العديد من التطبيقات في دراسة اللزوجة المرنة، والكيمياء الكهربائية ، ومعالجة الإشارات ، ونظرية التحكم، والوسائط المسامية، وميكانيكا الموائع، وعلم الريولوجي ، والنقل بالإنتشار ، والشبكات الكهربائية ، ونظرية الكهرومغناطيسية والاحتمالية، والعديد من العمليات الأخرى .

وبما أن السؤال الأول الذي يجب طرحه في الدراسة النظرية، هو معرفة ما إذا كان هناك حل محلي واحد على الأقل وهل هو وحيد لمسألة تطو رية غير خطية ذات شروط ابتدائية وشروط حدية، حسب الحالة المدروسة، تم حل فئة كبيرة من المسائل التطو رية غير الخطية من خلال سلسلة من الطرق و النظريات الناجعة التي تم تطويرها خاصة منذ الستينيات ، مثل طريقة متراجحة الطاقة، وطريقة فايدو غالاركين **(Faedo Galerkin)** وطريقة النقطة الثابتة، والطريقة التكرارية التي تعتمد على التقريب الخطي .
إن إختيار الطريقة المناسبة لدراسة الحل مبني على شكل المعادلة و نوع الشرط الحدي (لمزيد من التفاصيل حول هذه الطرق انظر [1])

أما فيما يخص دراسة الحلول لمسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية و غير الخطية ذات المشتقات الكسرية عرفت تطور ملحوظ في السنوات الأخير، ففي المسأل الخطية مع شروط حدية كلاسيكية نجد العديد من طرق التي إعتمدها

العديد من المؤلفين مثل طريقة متراجحة الطاقة ،طريقة لكس ميلغرام، أما في حالة المسأل الخطية مع شروط حدية غير كلاسيكية من نوع تكامل درست أول مرة من طرف الباحثين بوزياني عبد الفتاح و أوصيف تقي الدين في المقال [2] بإستخدام طريقة متراجحة الطاقة في فضاء بوزياني الكسري .أما بالنسبة لدراسة المسأل غير الخطية مع شروط حدية مختلفة نجد نفس المؤلفان لهما المساهمة الأولى فى دراسة هذا النوع مع شروط حدية كلاسيكية و غير كلاسيكية من نوع تكامل ،ذلك بإستخدام طرق مختلفة مثل طريقة متراجحة الطاقة ، طريقة التقريبة التكرارية ،أنظر ([3]،[4]،[5]،[6])، ، وكذلك طرق أخرى مختلفة إعتمدها العديد من المؤلفين ، انظر على سبيل المثال ([7], [8][2])

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو مواصلة تطوير دراسة المسائل السابقة بإستخدام نفس الطرق أين قمنا بمعالجة عدة مسائل معادلات تفاضلية جزئية غير خطية ذات مشتقات كسرية مع شروط حدية مختلفة حيث ينقسم هذا العمل إلى أربعة فصول على الشكل التالي :

الفصل الأول مخصص للتذكير ببعض الأدوات الأساسية والنتائج الأولية الأساسية لعملنا على وجه الخصوص، نقدم بعض النتائج الأساسية حول خصائص الاشتقاق الجزئي الكسري والمؤثر الخطي الغير محدود والفضاء الدالي ...إلخ .

الفصل الثاني يتناول دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية مع شروط ديركلي .

الفصل الثالث : مخصص لدراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية للزمن و المكان مع شروط حدية من نوع دريكلي .

الفصل الرابع : يتناول دراسة و جود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية مع شروط تكاملية .

الفصل 1

المفاهيم الأولية

هذا الفصل لتذكير بأهم المفاهيم الأولية و الأساسية في التحليل المستعملة خلال هذا العمل البحثي ، حيث يتم ذكرها في شكل تعريفات و توطئات و قضايا وملحوضات ... الخ.

1.1 العلاقة بين التعامد و الكثافة في الفضاءات الهيلبرتية

ليكن F فضاء هيلبرتيا مزود بالجداء السلمي $\langle .,. \rangle_F$ ، و ليكن M فضاء شعاعي جزئي غير خالي من الفضاء الهيلبرتي F.

تعريف 1

نعرف التعامدعلى جزء غير خالى M من الفضاء F ، بالمجموعة التعامد الذي نرمز لها ب $M^{\perp}$ و المعرفة كمايلي :

$$M^{\perp} = \{u \in F : \langle u, v \rangle_F = 0, \forall v \in M\}$$

تعريف 2

نقول إن المجموعة M كثيفة في الفضاء F إذا و فقط إذا كان :

$$\overline{M} = F$$

خاصية 1

M كثيف في F إذا و فقط إذا كان :

$$M^{\perp} = \{0\}$$

البرهان

- " $\Leftarrow$ " نفرض أن M كثيفة فى F ، ومنه من أجل كل $f \in M^{\perp} \subset F$, إذا توجد متتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من M متقاربة نحو f.

ومنه

$$\langle f_n, f\rangle_F = 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

بالمرور إلى النهاية نجد :

$$\langle \lim_{n\to 0} f_n, f\rangle_F = \langle f, f\rangle_F = \|f\|_F^2 = 0$$

ومنه

$$f = 0$$

إذن

$$M^{\perp} = \{0\}$$

- " $\Rightarrow$ " في الجهة العكسية نفرض أن $M^{\perp} = \{0\}$

إذن

$$(M^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = F$$

وبما أن

$$M \subset \overline{M}$$

فإن

$$(\overline{M})^{\perp} \subset M^{\perp}$$

ومنه

$$F = (M^{\perp})^{\perp} \subset ((\overline{M})^{\perp})^{\perp}$$

بما أن $\overline{M}$ مغلق إذا

$$((\overline{M})^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$$

ومنه :

$$F = \overline{M}$$

1.2 دوال الأثر في فضاءات سوبولاف

1.2.1 فضاءات سوبولاف $W^{1,p}(\Omega)$ و $H^1(\Omega)$

ليكن Ω مفتوح غير خالي من $\mathbb{R}^n$

تعريف 3

من أجل كل $P \in [1, \infty]$ يكون تعريف فضاء سوبولاف $W^{1,P}(\Omega)$ كالتالي :

$$W^{1,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = \overline{1,n} \right\}, \tag{1.1}$$

المزود بالنظيم

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^P(\Omega)} \right)^{1/p} = \left(\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{(L^P(\Omega))^n} \right)^{1/p} \tag{1.2}$$

من أجل : $p \neq \infty$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq 1} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \tag{1.3}$$

تعريف 4

في الحالة $p = 2$ نضع :

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1,n} \right\}, \tag{1.4}$$

المزود بالجداء السلمي

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^1(\Omega)} &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u,\nabla v)_{(L^2(\Omega))^n}\end{aligned}$$

و بالنظيم المرفق :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

نظرية 1

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$ معناه :

من أجل كل u من الفضاء $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$ توجد متتالية $(u_n)_n$ من $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ بحيث (u_n) تتقارب نحو u في الفضاء $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 وجود الأثر

لنعتبر $L^2(\partial\Omega)$ ، مجموعة الدوال w قابلة للقياس على $\partial\Omega$ بحيث $\int_{\partial\Omega} w^2 d\Gamma < \infty$ ، هي فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي الاعتيادي .

1.2.3 نظرية وجود الأثر

لتكن Ω مفتوحة و محدودة في $\mathbb{R}^n$ ، الحافة $\partial\Omega$ نظامية بما يكفي ،إذا تطبيق الأثر :

$$\gamma_0 : \begin{array}{c} C_0^\infty(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) \\ u \to \gamma_0 u = u\mid_{\partial\Omega} \end{array} \tag{1.6}$$

قابل للتمديد بإستمرار إلى تطبيق خطي مستمر نرمز له أيضا γ_0 من $H^1(\Omega)$ نحو $L^2(\partial\Omega)$ ، حيث يوجد ثابت $c^* \succ 0$ مستقل عن u بحيث :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.7}$$

1.2.4 صيغة غرين

لتكن Ω مفتوحة و محدودة في $\mathbb{R}^n$ ليبشيزي ، إذا كان u و v دالتين من الفضاء $H^1(\Omega)$ ومنه نجد :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) n_i ds - \int_\Omega u\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{1.8}$$

ملحوظة

تطبيق الأثر γ_0 ليس غامر من $H^1(\Omega)$ نحو $L^2(\partial\Omega)$ ، لكن هو غامر نحو الفضاء $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ حيث أن $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ هو

فضاء سوبولاف بمعامل كسري $\frac{1}{2}$ ،و المعرف بالشكل :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ w \in L^{1/2}(\partial\Omega) : \exists v \in H^1(\Omega), w = \gamma_0(v) \right\}.$$

1.3 المؤثر الخطي غير المحدود

ليكن E و F فضاءين شعاعين على الحقل السلمي k حيث $(k = \mathbb{C} \quad \text{أو} \quad k = \mathbb{R})$

تعريف 5

نقول عن التطبيق T من E نحو F أنه مؤثر خطي إذا تحقق :

$$\forall u_1, u_2 \in E,\ \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C} : \text{a on } T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2),$$

تعريف 6 (مجموعة تعريف المؤثر الخطي)

هي مجموعة العناصر x من E المعرف عندها المؤثر T،و نرمز لها ب $D(T)$ ، عندما يكون T مؤثر خطي لابد أن تكون $D(T)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء E.

تعريف 7

نقول إن المؤثر S هو تمديد ل T إذا تحقق :

- $D(T) \subset D(S)$
- $Tu = Su \quad \forall u \in D(T)$

تعريف 8

بيان مؤثر خطي T هي المجموعة الجزئية من $E \times F$ و التي نرمز لها ب $G(T)$ ،معرفة كمايلي :

$$G(T) = \{(u, Tu),\ u \in D(T)\},$$

خاصية 2

$G(T)$ هو فضاء شعاعي جزئي من فضاء $E \times F$. ليكن G فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $E \times F$ إذن يكون G بيان لمؤثر خطي إذا و فقط إذا كان :

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0. \tag{1.9}$$

ملحوظة

ليس كل فضاء شعاعي جزئي من $E \times F$ هو بيان لمؤثر خطي .

تعريف 9

نقول إن المؤثر الخطي T مؤثر مغلق إذا كان بيانه $G(T)$ مغلق في الفضاء الشعاعي الجزئي $E \times F$.

تعريف 10

نقول إن المؤثر الخطي T قابل للغلق في E إذا كان يقبل تمديد مغلق .

خاصية 3

يكون المؤثر الخطي T قابل للغلق إذا و فقط إذا كان من أجل كل متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)$ فإن :

$$v \longleftarrow Tu_n$$

و

$$0 \longleftarrow u_n$$

إذا $v = 0$.

1.4 التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية

مع اقتراب نهاية القرن السابع عشر، كان حساب التفاضل والتكامل قد بدأ في التشكل والاتضاح خصوصا بعد مجهودات العالِمين نيوتن ولايبنتز ، كما كان قد ظهر أيضا مفهوم المشتقات ذات الرتب العليا الصحيحة والتي اصطلح لها لايبنتز الرمز $\frac{d^n y}{dt^n}$. لكنه بعد اصطلاحه هذا قام بإرسال رسالة إلى الرياضي الكبير لوبيتال يبشره بميلاد الاصطلاح الجديد، ليرد عليه هذا الأخير قائلا: ماذا لو كانت $n = \frac{1}{2}$ ؟، فكتب لايبنتز رسالة بتاريخ 30 سبتمبر 1695 وكان مضمونها: هذا سيؤدي إلى مفارقة رياضية هائلة ستكون نتائجها نافعة في يوم من الأيام.
لقد كان السؤال الذي طرحه لوبيتال موضوعا يتدارسه العلماء كثيرا في آخر ثلاثة قرون، وقد كان لعلماء مثل ريمان وليوفيل وغيرهم مساهمات كبيرة فيه، لذلك نستطيع أن نجزم ونصرح بكل ثقة بأن موضوع التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية لايعتبر موضوعا جديدا، بل هو مجرد تعميم وتمديد لعلم التفاضل والتكامل الكلاسيكي [1].

سنحاول في هذا الفصل استعراض ومراجعة بعض الأدوات الرياضية الضرورية المطلوبة في الأنظمة ذات التأخر، حيث سنذكر بعض النتائج الرياضية حول التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية وأهم نتائج جبر المصفوفات وبعض التوطئات الضرورية لتحليل هذا النوع من الأنظمة، ثم سنقوم بتقديم مفهوم ليابونوف للاستقرارية الذي سيتم استخدامه لاحقا في الفصل الثاني لدراسة الاستقرارية وتصميم المتحكمات الخاصة بالأنظمة ذات التأخر، وذِكر بعض التعريفات التي انبثقت عن أعمال ليابونوف في الاستقرارية كمفهوم الاستقرار المتقارب والاستقرار الأسي وغير ذلك. الهدف الرئيسي من هذا الفصل هو بناء القاعدة الرياضية وذكر جميع الأدوات التي سنبني عليها الدراسة والتي ستسمح لنا بتحليل وتصميم المتحكمات الخاصة بالأنظمة ذات التأخر، خلال كل هذا سنغفل أغلب البراهين لخروجها عن منظور هذه المذكرة لكننا سنعزو ذلك كله لمواضعه من الكتب والمراجع ليستفيد مبتغي التوسع والتأصيل. من خلال كل الذي عالجناه سابقا خلصنا إلى أن علم التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية هو مجرد تمديد وتعميم للتفاضل والتكامل الكلاسيكي، فكان لزاما

علينا أن نظهر أصل التمديد وسببه والحاجة إليه، ومن تأمل في تاريخ هذا العلم سيجد أن أهم ما انبنى عليه هو مفهوم العاملي، ومن هنا سيتبادر في ذهن المتلقي سؤال في غاية الأهمية ، هل يمكن أن نعمم مفهوم العاملي ليشمل مجموعة أعداد أوسع من التي اعتدنا عليها؟

صاغ أهل العلم عبارات كثيرة لتمديد العاملي، ومع ذلك فجل هذه الصيغ قد اندرس واختفى ولم ينل حظه من الشهرة والاستخدام، ولعل أقوى وأشهر صيغة شاعت في الوسط الرياضي هي ماتعرف بدالة غاما، فما هي دالة غاما وماهي صيغتها؟

1.4.1 دالة غاما

هي إحدى الدوال الخاصة ذات الأهمية الملحة في التطبيقات الرياضية ولعل أكثر ماتستخدم فيه هذه الدالة هو تمديد مفهوم العاملي ليشمل الأعداد المركبة (يرمز لها بالحرف الاغريقي Γ) وهي المعرفة بالتكامل التالي [1]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt,\ z \in C \tag{1.10}$$

يكون هذا التكامل متقاربا من أجل $Re(z) > 0$. **بعض خواص دالة غاما**

إن دالة غاما لها عدد كبير من الخواص لكننا سنقتصر هنا على أهم الخواص:

1. **خاصية 4**

$$\Gamma(1) = 1$$

البرهان :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$$

2. **خاصية 5**

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

البرهان :

من التعريف (1.1) نجد :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt,$$

نستعمل التكامل بالتجزئة نجد :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= -e^{-t}t^z\big|_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\end{aligned}$$

ومنه

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(x).$$

3. **خاصية 6**

$$\Gamma(n+1) = n!$$

البرهان :

لبرهنة هذه الخاصية سنستخدم البرهان بالتراجع:

من أجل $n = 1$ لدينا:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!$$

نفرض صحتها من أجل $p = n$:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p!$$

بضرب المساواة في المقدار $p+1$ نجد:

$$(p+1)\Gamma(p+1) = (p+1)p!$$

$$\Gamma(p+2) = (p+1)!$$

أي أنها صحيحة من أجل $p+1$ وهو المراد إثباته.

الآن بعد تمديد مفهوم العاملي لابد أن ننوه إلى أن تطور مفهوم التفاضل والتكامل الكسري قد شهد تعريفات وصيغ مختلفة أغلبها تسير في اتجاه واحد رغم اختلاف المنطلق الابتدائي ومن هذه التعريفات نجد الصيغ التالية:

1.4.2 صيغة كوشي التكاملية

وهي الصيغة المعرفة بالتكامل التالي [1]:

$$D^n f(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x)}{(x-t)^{n+1}} dx \qquad (1.11)$$

نلاحظ أن المقدار $n \in N$، لذلك سنحتاج إلى تمديد هذا المقدار ليشمل مجموعة أوسع من الأعداد.
من أجل التمديد إلى الرتب الكسرية يكفي أن نقوم بتمديد العاملي في التعريف فقط أي:

$$n \to \alpha$$

أي أن:

$$n! \to \alpha! \to \Gamma(\alpha + 1)$$

فتصبح صيغة كوشي ذات الرتبة الكسرية معرفة بالشكل التالي:

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x)}{(x-t)^{\alpha+1}} dx \tag{1.12}$$

حيث C هو المنحنى السلس الذي يحيط بالدالة التحليلية أحادية القيمة $f(t)$.

1.4.3 صيغة لاتينكوف

نعلم أن تعريف الاشتقاق من جهة اليسار يعطى بالشكل التالي [?]:

$$D^1 f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{1.13}$$

بالاشتقاق مرة أخرى نجد:

$$D^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \tag{1.14}$$

و بالاشتقاق مرة ثالثة نجد:

$$D^3 f(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{1.15}$$

يمكننا أن نعمم النتيجة لتصبح:

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(t-kh) \tag{1.16}$$

حيث: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

من أجل $n \in R^+$ نعرف صيغة لاتينكوف بالشكل التالي:

$${}_{t_0}D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^k C_n^k f(t-kh) \tag{1.17}$$

حيث: h : تمثل طول الخطوة.

ملاحظة

يمكننا أن نمدد هذا التعريف أكثر لأن التوفيقات تحتوي على العاملي، لكننا اكتفينا هنا بذكر إحدى الصيغ المشهورة في الوسط الرياضي.

1.4.4 التكامل الكسري

لنعتبر أن الشروط الابتدائية منعدمة عند اللحظة الابتدائية و لتكن $F(s)$ هي تحويل لابلاس للدالة $f(t)$، لنضع:

$$D^{-1}f(t) = \int_0^t f(x)dx \tag{1.18}$$

$$D^{-2}f(t) = \int_0^t \int_0^{\psi} f(v)dvd\psi \tag{1.19}$$

بأخذ تحويل لابلاس نلاحظ أن:

$$\mathcal{L}\{D^{-1}f(t)\} = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{1.20}$$

من جهة أخرى نلاحظ أن:

$$\mathcal{L}\{D^{-2}f(t)\} = \mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{\psi} f(v)\,dvd\psi\right] = \frac{F(s)}{s^2} \tag{1.21}$$

أي أنه:

$$\mathcal{L}\{D^{-n}f(t)\} = \frac{F(s)}{s^n} \tag{1.22}$$

و نعلم أن:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^n}] = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \tag{1.23}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$D^{-n}f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{F(s)}{s^n}] = f(t) * (\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)\,d\tau \tag{1.24}$$

1.4.5 صيغة ريمان ليوفيل

تعريف 11

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و v دالة معرفة و قابلة للتكامل محليا على المجال $[0,T]$ المشتقة من الرتبة α ل v معرفة كمايلي :

1. **الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل على اليسار**

$$ {}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{0}^{t}\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{1.25} $$

2. **الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل على اليمين**

$$ {}_{t}^{R}D^{\alpha}v(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t}^{T}\frac{v(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau, \tag{1.26} $$

حيث أن n عداد طبيعي, $n-1<\alpha<n$.

1.4.6 صيغة كابوتو

تعريف 12

لتكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و v دالة معرفة و قابلة للتكامل محليا على المجال $[0,T]$ المشتقة من الرتبة α ل v معرفة كمايلي :

1. **الإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو على اليسار**

$$ {}^{C}D_{t}^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{v^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{1.27} $$

2. **الإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو على اليمين**

$$ {}_{t}^{C}D^{\alpha}v(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{T}\frac{v^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau, \tag{1.28} $$

حيث أن n عداد طبيعي, $n-1<\alpha<n$.

1.4.7 التكامل ذي الرتب الكسرية

تعريف 13

لتكن $\alpha\in\mathbb{R}_{+}$ و v دالة معرفة و قابلة للتكامل محليا على المجال $[a,b]$ التكامل الكسري من الرتبة α ل v معرفة كمايلي :

$$ I_{a}^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau. $$

1.4.8 العلاقة بين الإشتقاق الكسري لريمان - ليوفيل والاشتقاق الكسري لكابوتو و التكامل الكسري

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+$ حيث $\alpha \in [n-1, n]$ نفرض أن v يقبل مشتقة كسرية ،إذن :

$$\begin{aligned} {}^{R}D_t^{\alpha} v(t) &= {}^{C}D_t^{\alpha} v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(0)(t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}, \\ {}_t^{R}D^{\alpha} v(t) &= {}_t^{C}D^{\alpha} v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(T)(T-t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{C}D_t^{\alpha} I_t^{\alpha} v(t) &= v(t), \\ I_t^{\alpha} \left({}^{C}D_t^{\alpha} v(t) \right) &= v(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} \frac{d}{dt} v(0). \end{aligned}$$

من أجل $n = 1$ لدينا :

$$\begin{aligned} {}^{R}D_t^{\alpha} v(t) &= {}^{C}D_t^{\alpha} v(t) + \frac{v(0)}{\Gamma(1-\alpha)\, t^{\alpha}}, \\ {}_t^{R}D^{\alpha} v(t) &= {}_t^{C}D^{\alpha} v(t) + \frac{v(T)}{\Gamma(1-\alpha)\,(T-t)^{\alpha}}. \end{aligned}$$

إذا كان $v^{(i)}(0) = 0$ بحيث $i = 0, 1, ..., n-1$ إذن المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل و كابيتو متساويتين أي أن :

$${}^{R}D_t^{\alpha} v(t) = {}^{C}D_t^{\alpha} v(t).$$

1.4.9 بعض خواص المشتقات ذات الرتب الكسرية

1. **خاصية 7**

الخطية

نعلم أن مؤثر الإشتقاق لكلاسيكي خطي، كذلك مؤثر الاشتقاق بمفهوم ريمان ليوفيل و مؤثر الاشتقاق بمفهوم كابيتو هما خطيان .

نظرية 2

ليكن v و w دوال قابلة للاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل من الرتبة α وعليه من أجل $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ المشتقة بمفهوم ريمان ليوفيل ${}^{R}D_t^{\alpha}(\lambda v + \mu w)$ موجودة ، ولدينا :

$$ {}^{R}D_t^{\alpha}(\lambda v + \mu w)(t) = \lambda\, {}^{R}D_t^{\alpha} v(t) + \mu\, {}^{R}D_t^{\alpha} w(t). \tag{1.33}$$

البرهان :

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ حيث $n-1 < \alpha < n$ لدينا :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}(\lambda v + \mu w)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{(\lambda v + \mu w)(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_0^t \frac{\lambda v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau + \int_0^t \frac{\mu w(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\
&= \lambda\, {}^{R}D_t^{\alpha} v(t) + \mu\, {}^{R}D_t^{\alpha} w(t)
\end{aligned}$$

2. **خاصية 8**

غير تبديلية

المشتقة بمفهوم ريمان ليوفيل و كذلك بمفهوم كابيتو غير تبديليتين.

توطئة 1

نضع $n-1 < \alpha, \beta < n$ و لتكن الدالة v بحيث ${}^{R}D_t^{\alpha} v$ موجودة ،إذن :

$${}^{R}D_t^{\alpha\, R}D_t^{\beta} v(t) = {}^{R}D_t^{\alpha+B} v(t) \neq {}^{R}D_t^{\beta\, R}D_t^{\alpha} v(t).$$

ملاحظة

إذا كانت $0 < \alpha, \beta < 1$ و $v(0) = 0$ ومن أجل كل $t > 0$ نجد :

$${}^{R}D_t^{\alpha\, R}D_t^{\beta} v(t) = {}^{R}D_t^{\alpha+B} v(t) = {}^{R}D_t^{\beta\, R}D_t^{\alpha} v(t).$$

ملاحظة

لتكن الدالة V بحيث $v^{(k)}(0) = 0$,$k = 0, 1, ..., n-1$,إذا الإشتقاق الكسري لريمان - ليوفيل والاشتقاق الكسري لكابيتو تبديليين مع الإشتقاق من الرتبة n حيث $n \in \mathbb{N}$:

$${}^{R}D_t^{n\, R}D_t^{\alpha} v(t) = {}^{R}D_t^{\alpha+n} v(t) = {}^{R}D_t^{\alpha\, R}D_t^{n} v(t),$$

و

$${}^{C}D_t^{n\, C}D_t^{\alpha} v(t) = {}^{C}D_t^{\alpha+n} v(t) = {}^{C}D_t^{\alpha\, C}D_t^{n} v(t).$$

3. **خاصية 9**

قاعدة ليبنتز

نتيجة 1

ليكن $t > 0$ و $n-1 < \alpha < n$ إذا تحقق أن v و w وكل مشتقاتهما مستمرة في المجال $[0,T]$ فإن :

$$ {}^{R}D_t^{\alpha}(vw)(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!} \left({}^{R}D_t^{\alpha-i} v(t) \right) w^{(i)}(t). $$

ملاحظة

حسب العلاقة بين الإشتقاق الكسري لريمان -ليوفيل و الإشتقاق الكسري لكابيتو قاعدة ليبنتز تعطى بالشكل التالي :

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}(vw)(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!} \left({}^{R}D_t^{\alpha-i} v(t) \right) w^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \left((vw)^{(i)}(0) \right). $$

4. خاصية 10

تحويل فوريه

من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ لذينا :

$$ \begin{aligned} \mathcal{F}\left({}^{R}D_t^{\alpha} v(t) \right) &= (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}(v(t))\,\omega, \\ \mathcal{F}\left({}_{t}^{R}D^{\alpha} v(t) \right) &= (-i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}(v(t))\,\omega. \end{aligned} \tag{1.34} $$

1.4.10 مقارنة بين المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل و المشتقة الكسرية لكابيتو

توطئة 2

لتكن الدالة v بحيث ${}^{R}D_t^{\alpha} v$ و ${}^{C}D_t^{\alpha} v$ موجودة ،ولتكن $n-1 < \alpha < n$إذا نجد :

$$ {}^{R}D_t^{\alpha} v(t) \neq {}^{C}D_t^{\alpha} v(t). $$

مثال 1

المشتق الكسري لدالة ثابتة بالنسبة لريمان ليوفيل ليست صفر وليست ثابث ،لدينا :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\,d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left(-\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right) \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}t^{n-\alpha} \\
&= \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1)...(n-\alpha-(n-1))}{\Gamma(1-\alpha)(n-\alpha)(n-\alpha-1)...(n-\alpha-(n-1))}t^{-\alpha} \\
&= \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

أما الإشتقاق الكسري وفق مفهوم كابيتو لدالة ثابتة نجد :

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_t^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{C^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= 0.
\end{aligned}$$

خاصية 11

لتكن $n-1<\alpha<n$ وعليه نجد :

$$\lim_{\alpha\to n}\ {}^{R}D_t^{\alpha}v(t) = \lim_{\alpha\to n}\ {}^{C}D_t^{\alpha}v(t) = v^{(n)}(t).$$

البرهان

باستعمال التكامل بالتجزئة و الخاصية (1.5) نجد :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}v(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\tfrac{d^n}{dt^n}\int_0^t \tfrac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\tfrac{d^n}{dt^n}\left(-v(\tau)\tfrac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+\int_0^t v'(\tau)\tfrac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}d\tau\right) \qquad (1.35)\\
&= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\tfrac{d^n}{dt^n}\left(v(0)t^{n-\alpha}+\int_0^t v'(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha}\,d\tau\right)
\end{aligned}$$

و

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_t^{\alpha}v(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{v^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-v^{(n)}\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t v^{(n+1)}(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}d\tau\right) \qquad (1.36)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(v^{(n)}(0)t^{n-\alpha} + \int_0^t v^{(n+1)}(\tau)\,(t-\tau)^{n-\alpha}\,d\tau\right)
\end{aligned}
$$

بمرور إلى النهاية $\alpha \to n$ ل (35.1) و (35.1) نجد :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n}\ {}^{R}D_t^{\alpha}v(t) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(v(0) + \int_0^t v^{'}(\tau)d\tau\right)\\
&= v^{(n)}(t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n}\ {}^{C}D_t^{\alpha}v(t) &= \left(v^{(n)}(0) + \int_0^t v^{(n+1)}(\tau)d\tau\right)\\
&= v^{(n)}(t).
\end{aligned}
$$

ومنه

$$\lim_{\alpha\to n}\ {}^{R}D_t^{\alpha}v(t) = \lim_{\alpha\to n}\ {}^{C}D_t^{\alpha}v(t) = v^{(n)}(t).$$

1.5 فضاءات الدوال

من أجل دراسة بعض المسائل نحتاج للتذكير ببعض فضاءات الدوال ، نذكر منها :

1.5.1 فضاء سوبولاف $\mathbf{H}^{\alpha}(\mathbb{R})$

تعريف 13

من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+$ نعرف :

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}) = \left\{u/\ u \in L^2(\mathbb{R}))\ ;\ (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x) \in L^2\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}\right\},$$

و المزود بالنظيم

$$\|u\|_{H^\alpha(\mathbb{R})} = \left\|(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

و الجداء السلمي :

$$(u,v)_{H^\alpha(\mathbb{R})} = \left((1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u),(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(v)\right)_{L^2(\mathbb{R})} ,$$

حيث $\mathcal{F}(u)$ يمثل تحويل فوريه بالنسبة ل u و المعرف كالتالي :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\exp(-2\pi it\xi)dt.$$

خاصية 12

ليكن $H^\alpha(\mathbb{R}), \forall\alpha\in\mathbb{R}$

1. $H^\alpha(\mathbb{R})$ فضاء هيلبرث قابل للفصل .
2. $(H^\alpha(\mathbb{R}))' = H^{-\alpha}(\mathbb{R})$

تعريف 14

من أجل I يرمز لمجال مغلق و محدود من $\mathbb{R}$ نعرف الفضاء $H^\alpha(I)$ كمايلي :

$$H^\alpha(I) = \left\{u\in L^2(I)/\ \exists\widetilde{u}\in H^\alpha(\mathbb{R}) \text{ بحيث } \widetilde{u}\mid_I = u\right\} ,$$

مزود بالنظيم

$$\|u\|_{H^\alpha(I)} = \inf_{\widetilde{u}\in H^\alpha(\mathbb{R}),\widetilde{u}|_I=u}\|\widetilde{u}\|_{H^\alpha(\mathbb{R})} .$$

تعريف 15

لتكن $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ نعرف :

$$H_0^\alpha(I) = \left\{u\ ;\|u\|_{H_0^\alpha(I)}<\infty\right\},$$

مزود بالنظيم

$$\|u\|_{H_0^\alpha(I)} = (\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{H_0^\alpha(I)})^{1/2},$$

حيث

$$|u|_{H_0^\alpha(I)} = \left|\frac{\left({}^RD_t^\alpha u,\ {}_t^RD^\alpha u\right)_{L^2(I)}}{\cos(\alpha\pi)}\right|^{1/2} .$$

إذا نعرف الفضاء $H_0^\alpha(I)$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^\infty(I)$ وفق النظيم $\|.\|_{H^\alpha(I)}$.

ملاحظة

إذا كانت $\alpha = 1$ و I مجال محدود في $\mathbb{R}$ العبارة :

$$(u,v)_{H_0^1(I)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L^2(I)},$$

هو جداء سلمي مرفق بالنظيم :

$$\|u\|_{H_0^1(I)} = \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(I)}.$$

فضاء الكسري حسب صيغة بوزيان ${}^RB_0^\alpha(Q)$

لتكن $\alpha \in \mathcal{R}_+^*$ نعرف مايلي

$${}^RB_0^\alpha(Q) = \left\{u; \|u\|_{{}^RB_0^\alpha(Q)} < \infty\right\}$$

مزود بالنظيم

$$\|u\|_{{}^RB_0^\alpha(Q)} = \left(\|u\|^2_{B_0^1(Q)} + |u|^2_{{}^RB_0^\alpha(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث

$$|u|_{{}^RB_0^\alpha(Q)} = \left\|{}^RD_1^\alpha(\Im_x u)\right\|_{L^2(Q)}.$$

يعرف شبه النظيم على ${}^RB_0^\alpha(Q)$ متمم للفضاء $C_0^\infty(Q)$.

الفضاءات ${}^l\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{I})$,${}^r\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{I})$و ${}^c\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{I})$

تعريف 16

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ نعرف :

$${}^lH^\alpha(I) = \left\{u\ ; \|u\|_{{}^lH^\alpha(I)} < \infty\right\},$$

مزود بالنظيم :

$$\|u\|_{{}^lH^\alpha(I)} = (\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{{}^lH^\alpha(I)})^{1/2},$$

بحيث

$$|u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} = \left\| {}^{R}D_{t}^{\alpha}u \right\|_{L^{2}(I),}$$

إذا نعرف الفضاء ${}^{l}H^{\alpha}(I)$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^{\infty}(I)$ وفق النظيم $\|.\|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}$.

ملاحظة

أولاً ، لذينا $|u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}$ نصف نظيم وليس نظيم لذينا :

$$u(\theta) = (t-\theta)^{\alpha}(t-2\theta),$$

من أجل $n=1$, لذينا

$$\begin{aligned}
|u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} &= \left(\int_I \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha}(t-2\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_I \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-2\tau)\, d\tau \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ثانيا ،من أجل البرهان على أن التطبيق :

$$\begin{aligned}
\|.\| \quad : \quad & {}^{l}H^{\alpha}(I) \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \\
u \quad \longrightarrow \quad & \|u\|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}
\end{aligned}$$

نعرف نظيم على الفضاء ${}^{r}H^{\alpha}(I)$ ، يجب التأكد من الخواص الثلاثة الأساسية ، الصعوبة الوحيدة التي نواجهها تحقيق المتراجحة المثلثية ،لهذا نستعمل متراجحة مينكوسكي نتحصل على :

من أجل $u, v \in L^2(I)$ نجد

$$\begin{aligned}
|u+v|_{{}_{l}H^{\alpha}(I)} &= \|{}^{R}D_{t}^{\alpha}u + {}^{R}D_{t}^{\alpha}v\|_{L^2(I)} \\
&= \left(\int_I \left| {}^{R}D_{t}^{\alpha}u + {}^{R}D_{t}^{\alpha}v \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_I \left| {}^{R}D_{t}^{\alpha}u \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \left| {}^{R}D_{t}^{\alpha}v \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|{}^{R}D_{t}^{\alpha}u\|_{L^2(I)} + \|{}^{R}D_{t}^{\alpha}v\|_{L^2(I)} \\
&= |u|_{{}_{l}H^{\alpha}(I)} + |v|_{{}_{l}H^{\alpha}(I)}
\end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$\|u+v\|^2_{L^2(I)} \leq 2\left(\|u\|^2_{L^2(I)}+\|v\|^2_{L^2(I)}\right)$$

$$\|{}^R D^\alpha_t u + {}^R D^\alpha_t v\|^2_{L^2(I)} \leq 2\left(\|{}^R D^\alpha_t u\|^2_{L^2(I)}+\|{}^R D^\alpha_t v\|^2_{L^2(I)}\right)$$

منه

$$\|u+v\|^2_{{}^l H^\alpha(I)} \leq \|u\|^2_{{}^l H^\alpha(I)} + \|v\|^2_{{}^l H^\alpha(I)}.$$

تعريف 17

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ نعرف :

$${}^r H^\alpha(I) = \left\{u\,;\|u\|_{{}^r H^\alpha(I)} < \infty\right\},$$

مزود بالنظيم

$$\|u\|_{{}^r H^\alpha(I)} = (\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{{}^r H^\alpha(I)})^{1/2},$$

يعرف نصف النظيم على ${}^r H^\alpha(I)$. لذلك نعرف الفضاء ${}^r H^\alpha(I)$ على أنه مكمل للفضاء $C^\infty_0(I)$ حسب النظيم $\|.\|_{{}^r H^\alpha(I)}$.

تعريف 18

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ من أجل $\alpha \neq n+\frac{1}{2}$ نعرف :

$${}^c H^\alpha(I) = \left\{u; \|u\|_{{}^r H^\alpha(I)} < \infty\right\},$$

مزود بالنظيم

$$\|u\|_{{}^c H^\alpha(I)} = (\|u\|^2_{L^2(I)} + |u|^2_{{}^c H^\alpha(I)})^{1/2},$$

بحيث

$$|u|_{{}^c H^\alpha(I)} = \left|\left({}^R D^\alpha_t u,\ {}^R_t D^\alpha u\right)_{L^2(I)}\right|^{1/2},$$

يعرف نصف النظيم على ${}^cH^\alpha(I)$. لذلك نعرف الفضاء ${}^cH^\alpha(I)$ على أنه مكمل للفضاء $C_0^\infty(I)$ حسب النظيم $\|.\|_{{}^cH^\alpha(I)}$.

توطئة 3

من أجل كل $0 < \alpha < 1$, **إذا كان** $u \in ({}^lH^\alpha(I) \cap H^\alpha(I))$ **و** $v \in C_0^\infty(I)$, **نحصل عل :**

$$({}^R D_t^\alpha u(t), v(t))_{L^2(I)} = (u(t), {}^R_t D^\alpha v(t))_{L^2(I)}.$$

البرهان

بإستعمال التكامل بالتجزئة نجد :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_t^T \frac{v(\tau)}{(\tau-t)^\alpha}d\tau &= \frac{d}{dt}\left[\frac{v(t)(\tau-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\tau=t}^{\tau=T} - \int_t^T \frac{v'(t)(\tau-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}d\tau\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{v(T)(T-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_t^T \frac{v'(\tau)(\tau-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}d\tau\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{v(T)(T-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_t^T \frac{v'(\tau)(\tau-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_t^T v'(\tau)(\tau-t)^{1-\alpha}d\tau \\
&= \int_t^T \frac{v'(\tau)}{(\tau-t)^\alpha}d\tau.
\end{aligned}$$

حسب تعريف الجداء السلمي في الفضاء $L^2(I)$ وبإستعمال التكامل بالتجزئة نجد :

$$
\begin{aligned}
({}^{R}D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} &= \int_0^T {}^{R}D_t^{\alpha}u(t).v(t)dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right) .v(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right) .v(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[v(t) \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T v'(t) \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[v(T) \int_0^T \frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}} d\tau - \int_0^T \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau v'(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[v(T) \int_0^T \frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}} d\tau - \int_0^T \int_{\tau}^T \frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} dt u(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left[v(T) \frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}} - \int_{\tau}^T \frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} dt u(\tau) \right] d\tau \\
&= \int_0^T u(\tau) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{v(T)}{(T-\tau)^{\alpha}} - \int_{\tau}^T \frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} dt \right] d\tau \\
&= \int_0^T u(\tau) \left[\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^T \frac{v(t)}{(\tau-t)^{\alpha}} dt \right] d\tau \\
&= (u(\tau),\ {}_{\tau}^{R}D^{\alpha}v(\tau))_{L^2(I)}
\end{aligned}
$$

توطئة 4

من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_+$, **إذا كان** $u \in^l H^{\alpha}(I)$ **و** $v \in C_0^{\infty}(I)$, **إذا :**

$$({}^{R}D_t^{\alpha}u(t), v(t))_{L^2(I)} = (u(t),\ {}_{t}^{R}D^{\alpha}v(t))_{L^2(I)}.$$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n-1 < \alpha < n$. حسب العلاقة بين الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل و كابيتو و بما أن

لدينا : $v \in C_0^{\infty}(I)$

$$ {}_t^R D^{\alpha} v(t) = {}_t^C D^{\alpha} v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(T)(T-t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} = {}_t^C D^{\alpha} v(t), $$

حسب تعريف الجداء السلمي في الفضاء $L^2(I)$ و بإستعمال المشتقة ${}_t^R D^{\alpha} v(t)$ نحصل على :

$$ \begin{aligned} ({}^R D_t^{\alpha} u(t), v(t))_{L^2(I)} &= \int_0^T \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) .v(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left(\frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) .v(t) dt, \end{aligned} $$

نستعمل التكامل بالتجزئة n مرة ،نجد :

$$ \begin{aligned} & \int_0^T v(t). \left(\frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) dt \\ = \; & (-1)^n \int_0^T v^{(n)}(t). \left(\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) dt \\ = \; & (-1)^n \int_0^T \int_0^t v^{(n)}(t). \left(\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) dt \\ = \; & (-1)^n \int_0^T \int_{\tau}^T \frac{v^{(n)}(t)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} .u(\tau) dt d\tau. \end{aligned} $$

ومنه

$$ \begin{aligned} ({}^R D_t^{\alpha} u(t), v(t))_{L^2(I)} &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T u(\tau) \left(\int_{\tau}^T \frac{v^{(n)}(t)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} dt \right) d\tau. \\ &= (u(\tau), {}_t^C D^{\alpha} v(\tau))_{L^2(I)} \\ &= (u(\tau), {}_t^R D^{\alpha} v(\tau))_{L^2(I)}. \end{aligned} $$

توطئة 5

من أجل $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}
\left({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \cos(\pi\alpha)\left\| {}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
\left({}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t),\ {}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \cos(\pi\alpha)\left\| {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} .
\end{aligned}$$

برهان

لتكن $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, حسب نظرية بارسيفال (théoèreme de Plancherel-Parseval) ,و $\forall u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\left({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\mathcal{F}\left({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u\right), \mathcal{F}\left({}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u\right)\right)_{L^2(\mathbb{R})},$$

حسب الخاصية (10) نجد :

$$\begin{aligned}
\left({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u\right).\overline{\mathcal{F}\left({}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u\right)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(u(t))\,\omega.\overline{(-i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(u(t))\,\omega}dt,
\end{aligned}$$

ونعلم أن

$$\overline{(i\omega)^{\alpha}}\begin{cases} \exp(-i\pi\alpha)\overline{(-i\omega)^{\alpha}}, & \varpi \geq 0 \\ \exp(i\pi\alpha)\overline{(-i\omega)^{\alpha}}, & \varpi < 0 \end{cases}.$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\left({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(u(t))\,\omega.\overline{(-i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(u(t))\,\omega}\right)1_{E_1}d\omega \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \left((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(u(t))\,\omega.\overline{(-i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(u(t))\,\omega}\right)1_{E_2}d\omega,
\end{aligned}$$

حيث $E_1 = \{\omega \geq 0\}$, و $E_2 = \{\omega < 0\}$ إذا :

$$
\begin{aligned}
&({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \int_0^{\infty} \left((i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega . \exp(i\pi\alpha) \overline{(i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega} \right) d\omega \\
&+ \int_{-\infty}^{0} \left((i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega . \exp(-i\pi\alpha) \overline{(i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega} \right) d\omega \\
&= \exp(i\pi\alpha) \int_0^{\infty} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega \\
&+ \exp(-i\pi\alpha) \int_{-\infty}^{0} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega \\
&= (\cos(\pi\alpha) + i\sin(\pi\alpha)) \int_0^{\infty} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega \\
&+ (\cos(\pi\alpha) - i\sin(\pi\alpha)) \int_{-\infty}^{0} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

وعليه

$$
\begin{aligned}
({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} &= \cos(\pi\alpha) \int_{\mathbb{R}} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega \\
&+ i\sin(\pi\alpha) \left[\int_0^{\infty} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega - \int_{-\infty}^{0} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega \right].
\end{aligned}
$$

يكفي أن نبرهن

$$
\int_0^{\infty} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{0} \left| (i\omega)^{\alpha} \mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega \right|^2 d\omega,
$$

من أجل $v = -\omega$, نجد :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^{2} d\omega &= -\int_{\infty}^{0} \left|(-iv)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)(-v)\right|^{2} dv \\ &= \int_{0}^{\infty} \left|(iv)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)(v)\right|^{2} dv.\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}&({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{\infty}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \cos(\pi\alpha)\int_{\mathbb{R}} \left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^{2} d\omega \\ &= \cos(\pi\alpha)\int_{\mathbb{R}} (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega.\overline{(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega} d\omega \\ &= \cos(\pi\alpha)((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega, (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \cos(\pi\alpha)({}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t),\ {}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \cos(\pi\alpha)\left\|{}^{R}_{-\infty}D^{\alpha}_{t}u\right\|^{2}_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نبرهن المتراجحة الثانية

خاصية 13

من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$ **و** $v \in L^2(I)$ **التطبيق الخطي :**

$$\begin{aligned}{}^{R}D^{\alpha}_{t}u : C^{\infty}_{0}(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto {}^{R}D^{\alpha}_{t}u(\phi) = \int_{I} u\ {}^{R}_{t}D^{\alpha}(\phi)dt\end{aligned} \tag{1.37}$$

مستمر في الفضاء $C^{\infty}_{0}(I)$. .

البرهان

ليكن $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C^{\infty}_{0}(I)$, بحيث :

$$\left\|\phi_i^{(m)}\right\|_\infty = \sup_{t\in I}\left|\phi_i^{(m)}(t)\right| \longrightarrow 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \text{ pour } \ i \longrightarrow \infty.$$

نعلم أنه من أجل كل $n-1<\alpha<n$ بحيث $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|{}^{R}D_t^{\alpha}u(\phi_i)\right| &= \left|\int_I u\ {}_t^{R}D^{\alpha}\phi_i dt\right| \\
&\leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|{}_t^{R}D^{\alpha}\phi_i\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|{}_t^{C}D^{\alpha}\phi_i\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^T \frac{\phi_i^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\phi_i^{(n)}\right\|_\infty\left\|\int_t^T \frac{1}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\phi_i^{(n)}\right\|_\infty\left\|(T-t)^{n-\alpha}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \quad \text{لما} i\longrightarrow\infty.
\end{aligned}$$

قضية 1

التطبيق ${}^{R}D_t^{\alpha}u$ مستمر من $(C_0^{\infty}(I))'$ نحو $(C_0^{\infty}(I))'$

توطئة 6

من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}_+$, ${}^{l}H^{\alpha}(I)$ و ${}^{r}H^{\alpha}(I)$ فضاءات تامة .

البرهان

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي في الفضاء ${}^{l}H^{\alpha}(I)$, إذا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\left({}^{R}D_t^{\alpha}u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) هما متتاليتين لكوشي في الفضاء $L^2(I)$. ومنه يوجد $u,w\in L^2(I)$, بحيث :

$$u_n \to u \quad \text{في} \quad L^2(I), \tag{1.38}$$

$${}^{R}D_t^{\alpha}u_n \to w \quad \text{في} \quad L^2(I) \tag{1.39}$$

و في الأخير نثبت ${}^{R}D_t^{\alpha}u = w$. بإستعمال العلاقة (39.1) نجد :

$$\forall \phi \in C_0^\infty(I): \quad \int_I {}^R D_t^\alpha u_n \phi dt \longrightarrow \int_I w\phi dt,$$

حسب التوطئة (4.1) و بستعمال العلاقة (38.1) نحصل على :

$$\int_I {}^R D_t^\alpha u_n \phi dt = \int_I u_n \, {}_t^R D^\alpha(\phi) dt \longrightarrow \int_I u \, {}_t^R D^\alpha(\phi) dt,$$

حسب (37.1) لدينا :

$$\int_I {}^R D_t^\alpha u_n \phi dt \longrightarrow {}^R D_t^\alpha u(\phi).$$

و عليه حسب وحدانية النهاية نجد

$${}^R D_t^\alpha u = w.$$

بنفس الطريقة نثبت أن الفضاء ${}^r H^\alpha(I)$ تام

توطئة 7

من أجل $0 < \alpha < 2$,$\alpha \neq 1$,$u \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$, لدينا :

$${}^R D_t^\alpha u(t) = {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \, {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t),$$

بمفهوم التوزيعات هذا يعني

$$\left\langle {}^R D_t^\alpha u(t), \phi(t) \right\rangle = \left\langle {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \, {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), \phi(t) \right\rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I),$$

بالإضافة إلى ذلك

$${}^R D_t^\alpha u \in H^{-\frac{\alpha}{2}}(I).$$

البرهان

حسب التوطئة (1.1) ، من أجل كل $\phi \in C_0^\infty(I)$ لدينا :

$$\begin{aligned} \left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), \phi(t) \right\rangle &= (u(t),\ {}_t^{R}D^{\alpha}\phi(t))_{L^2(I)}, \\ \left\langle {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\,{}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t), \phi(t) \right\rangle &= (\ {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t),\ {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t))_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

نستعمل خاصية التحليل ، و التوطئة (1.1) نجد

$$\begin{aligned} (u(t),\ {}_t^{R}D^{\alpha}\phi(t))_{L^2(I)} &= (u(t),\ {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\,{}_t^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t))_{L^2(I)} \\ &= \left({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t),\ {}_t^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t) \right)_{L^2(I)} \end{aligned} \tag{1.40}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), \phi(t) \right\rangle &= (u(t),\ {}_t^{R}D^{\alpha}\phi(t))_{L^2(I)} \\ &= \left({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t),\ {}_t^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t) \right) \\ &= \left({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\ {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t), \phi(t) \right) \end{aligned}$$

حسب المساواة (40.1)، وبستعمال متراجحة كوشي شوارتز نجد :

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), \phi(t) \right\rangle\right| \\ = &\left|(\ {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t),\ {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t))_{L^2(I)}\right| \\ \leq &\left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t)\right\|_{L^2(I)} \left\| {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t)\right\|_{L^2(I)}, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(I), \end{aligned}$$

و بما أن $C_0^\infty(I)$ كثيف في $H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$, تصح المتراجحة المذكورة أعلاه لجميع $u \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$. كذلك ${}^{R}D_t^{\alpha}u \in H^{-\frac{\alpha}{2}}(I)$.

توطئة 8

من أجل $\alpha \neq n+\frac{1}{2}\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, **أشباه النظيمات :** $|.|_{l_{H^\alpha(I)}}, |.|_{r_{H^\alpha(I)}}, |.|_{c_{H^\alpha(I)}}$ **و** $|.|_{H_0^\alpha(I)}$ **متكافئين ، و نكتب :**

$$|.|_{l_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |.|_{r_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |.|_{c_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |.|_{H_0^\alpha(I)}.$$

البرهان

حسب التوطئة (1.5) **لدينا**

$$|u|_{c_{H^\alpha(I)}} = \left(\left({}^{R}D_t^\alpha u(t),\ {}_t^{R}D^\alpha u(t)\right)_{L^2(I)}\right)^{1/2} = \sqrt{\cos(\pi\alpha)}\left\|{}^{R}D_t^\alpha u\right\|_{L^2(I)}$$

$$= \sqrt{\cos(\pi\alpha)}\,|u|_{l_{H^\alpha(I)}},$$

و بما أن $\alpha \neq n+\frac{1}{2}\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, **لدينا**

$$0 < |\cos(\pi\alpha)| \leq 1.$$

وعليه

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \alpha \neq n+\frac{1}{2}, \exists \varepsilon > 0 : \text{بحيث}\quad \varepsilon \leq |\cos(\pi\alpha)| \leq 1. \tag{1.41}$$

فنتحصل على

$$\varepsilon\,|u|_{l_{H^\alpha(I)}} \leq |u|_{c_{H^\alpha(I)}} \leq |u|_{l_{H^\alpha(I)}} \Longleftrightarrow |u|_{l_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |u|_{c_{H^\alpha(I)}}.$$

بنفس الطريقة نثبت أن

$$|u|_{r_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |u|_{c_{H^\alpha(I)}}.$$

أي أن

$$|u|_{r_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |u|_{c_{H^\alpha(I)}} \widetilde{=} |u|_{l_{H^\alpha(I)}}. \tag{1.42}$$

وللتكافؤ بين $|.|_{{}^cH^\alpha(I)}$ و $|.|_{H_0^\alpha(I)}$, لدينا

$$|u|_{H_0^\alpha(I)} = \frac{|u|_{{}^cH^\alpha(I)}}{\sqrt{\cos(\pi\alpha)}},$$

حسب العلاقة (41.1) نجد

$$|u|_{{}^cH^\alpha(I)} \leq |u|_{H_0^\alpha(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,|u|_{{}^cH^\alpha(I)} \Longleftrightarrow |u|_{H_0^\alpha(I)} \widetilde{=} |u|_{{}^cH^\alpha(I)}\,, \tag{1.43}$$

حسب العلاقتين (42.1) و (43.1) نستنتج

$$|u|_{{}^rH^\alpha(I)} \widetilde{=} |u|_{{}^cH^\alpha(I)} \widetilde{=} |u|_{{}^\iota H^\alpha(I)} \widetilde{=} |u|_{H_0^\alpha(I)}\,.$$

توطئة 9

من أجل $0 < \alpha < 2$,$\alpha \neq 1$,$u, v \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ لدينا

$$\left\langle {}^RD_t^\alpha u(t), v(t)\right\rangle = \left({}^RD_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t),\ {}_t^RD^{\frac{\alpha}{2}} v(t)\right)_{L^2(I)}, \tag{1.44}$$

$$\left\langle {}_t^RD^\alpha u(t), v(t)\right\rangle = \left({}_t^RD^{\frac{\alpha}{2}} u(t),\ {}^RD_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t)\right)_{L^2(I)}. \tag{1.45}$$

البرهان

من خلال تعريف الفضاء $H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I), \forall v \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ توجد متتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ ، بحيث :

$$\|v_n - v\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \longrightarrow 0, \text{ لما } \quad n \longrightarrow \infty.$$

من أجل كل $u \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ ،وحسب التوطئة (1.8) لدينا

$$\begin{aligned} \left\langle {}^RD_t^\alpha u(t), v_n(t)\right\rangle &= \left\langle {}^RD_t^{\frac{\alpha}{2}}\,{}^RD_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), v_n(t)\right\rangle \\ &= \left({}^RD_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t),\ {}_t^RD^{\frac{\alpha}{2}} v_n(t)\right)_{L^2(I)}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

و من جهة أخرى

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u, v_n\right\rangle - \left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u, v\right\rangle\right| \\ = & \left|\left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u, v_n - v\right\rangle\right| \\ \lesssim & \left\|v_n - v\right\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \longrightarrow 0, \text{ لما } \quad n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

بستعمال متراجحة كوشي شوارتز و التوطئة (1.8) نجد

$$\left|\left({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u, {}_{t}^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}v_n\right)_{L^2(I)} - \left({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u, {}_{t}^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}v\right)_{L^2(I)}\right|$$

$$= \left|\left({}^{R}D_t^{\alpha}u, {}_{t}^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}(v_n - v)\right)_{L^2(I)}\right|$$

$$\leq \left\|{}^{R}D_t^{\alpha}u\right\|_{L^2(I)} \left\|{}_{t}^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}(v_n - v)\right\|_{L^2(I)}$$

$$= \left\|{}^{R}D_t^{\alpha}u\right\|_{L^2(I)} |v_n - v|_{{}_{r}H^{\frac{\alpha}{2}}(I)}$$

$$\lesssim \left\|{}^{R}D_t^{\alpha}u\right\|_{L^2(I)} |v_n - v|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)}$$

$$\lesssim \left\|{}^{R}D_t^{\alpha}u\right\|_{L^2(I)} \|v_n - v\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \longrightarrow 0, \text{ لما } \quad n \longrightarrow \infty.$$

توطئة 10

من أجل كل دالة u مستمرة تماما في المجال $[0,T]$, لدينا :

$$u(t)\,{}^{C}D_t^{\alpha}u(t) \geq \frac{1}{2}\,{}^{C}D_t^{\alpha}u^2(t) \quad ,0 < \alpha < 1. \tag{1.47}$$

البرهان

من خلال العلاقة (1.4) يمكننا إعادة كتابة المتراجحة (47.1) على الشكل التالي :

$$
\begin{aligned}
& u(t)\ {}^{C}D_t^{\alpha}u(t) - \frac{1}{2}\ {}^{C}D_t^{\alpha}u^2(t) \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}u(t)\int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau - \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{2u(\tau)u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u'(\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\int_{\tau}^t u'(\xi)d\xi d\tau \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t u'(\xi)d\xi\int_0^{\xi} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau = \Lambda,
\end{aligned}
$$

للإثبات هده التوطئة يكفي إثبات أن التكامل Λ موجب ، يأخد التكامل Λ قيمة موجبة ،حيت :

$$
\begin{aligned}
\Lambda = & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha}\frac{u'(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}}d\xi\int_0^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha}\frac{d}{d\xi}\left(\int_0^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^2 d\xi \\
= & \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}(t-\xi)^{\alpha}\left(\int_0^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^2\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=t} \\
& +\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\left(\int_0^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^2 d\xi \\
= & \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\left(\int_0^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

و منه

$$\Lambda \geq 0.$$

خاصية 14

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dx = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t,x)dx + f(v(x),x)v'(x) - f(u(x),x)u'(x).$$

1.5.2 طريقة متراجحة الطاقة

طريقة متراجحة الطاقة هي تقنية فعالة لدراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية الجزئية، وتسمى كذلك طريقة التحليل الدالي أو طريقة التقديرات المسبقة، هذه الطريقة لها ميزة متفوقة، حيث يمكن أن نثبت وجود حل المسألة من خلال مترجحة الطاقة التي تعطينا تقديرا مسبقا للحل ونتيجة مباشرة لوحدانية، تكمن صعوبة هذه الطريقة في ختيار فضاءات الدوال E و F ، وكذلك في إختيار معامل الضرب Mu .
يمكن تلخيص مخطط الطريقة على النحو التالي :

1. **المرحلة 1**
نكتب المسألة المقترحة على شكل معادلة المؤثر :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L); \tag{1.48}$$

حيث المؤثر L معرف من فضاء بناخ E نحو الفضاء الهيلبرتي F ، حيث يتم إختيارهم بشكل مناسب .

2. **المرحلة 2**
نضع تقديرأولي للحل u

3. **المرحلة 3**
نثبت كثافة مجموعة قيم الصوة المؤثر L في الفضاء F.

بتعبير أكثر دقة ، نتبع في هده المرحلة المخطط التالي :
نثبت متراجحة الطاقة من الشكل :

$$\|u\|_B \leq c\|Lu\|_F. \tag{1.49}$$

يتم الحصول على هذا النوع من التقدير المسبق المتمثل في المتراجحة السابقة بضرب معادلة المسألة في معامل الضرب Mu و الذي يعتبر مؤثر تكامليي-تفاضلي (يحتوي على الدالة u أو مشتقاتها) المحدودة و المعرفة في المجال Q_T .

إختيار معامل الضرب Mu هو أمر أساسي، حيث يحدد هذا الإختيار حسب المعادلة وشروط الحدود.
بعد ذلك، نوضح أن المؤثر L من E الى F يقبل الإغلاق $\overline{L}$ وبالتالي فإن حل المعادلة :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad u \in D\left(\overline{L}\right), \tag{1.50}$$

يسمى الحل القوي المعمم للمسألة المدروسة.
بالمرور إلى النهاية ،سيتم تمديد التقدير (49.1) إلى $\overline{L}$ ،نجد :

$$\|u\|_B \leq c \left\|\overline{L}u\right\|_F .$$

وبالتالي ، فإننا نستنتج وحدانية حل المعادلة (50.1) . وبما أن صورة المؤثر $\overline{L}$ مغلقة فيF ، وكذلك $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$, فإن تحديد كثافة المجموعة $R\left(\overline{L}\right)$ فى F يضمن وجود حل قوي للمسالة (50.1) .

الفصل 2

دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية تكافئية جزئية كسرية غير خطية مع شروط دريكلي

2.1 مقدمة

نهدف في هذا الفصل لإثبات وجود و وحدانية حل مسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية ذات قطع مكافي مع شروط حدية من نوع دريكلي حيث تنقسم هذه الدراسة إلى جزئين:
الجزء الأول: دراسة وجود ووحدانية المسألة الخطية بإستعمال متراجحة الطاقة .
الجزء الثاني: دراسة المسألة غير الخطية بإستعمال تقنيات النقطة الصامدة مع وجود شروط حدية من النوع دريكلي .
.

2.2 صياغة المسألة

ليكن :

$$Q_t = \Omega \times (0,t) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, 0 \leq t \leq T\}$$

بحيث

$$\Omega = (0,l), T \geq 0, a \in \mathbb{R}_+^*.$$

نعتبر مسألة القطع المكافي غير الخطية ذات المشتقات الكسرية :

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha v(x,t) - a\frac{\partial}{\partial x}(x^\beta \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}) + bv(x,t) = g(x,t,v) \quad \in Q_t, \\ v(x,0) = \varphi(x), \quad \forall x \in (0,l), \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.1}$$

حيث:

g و φ دالتان معرفتان،و الدالة φ تحقق شرط التوافق : $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ولتكن الدالة g لبشيزية ،حيث يوجد ثابت حقيقي k يحقق المتراجحة :

$$\|g(x,t,v_1) - g(x,t,v_2)\|_{L^2(Q)} \leq k(\|v_1 - v_2\|_{L^2(0,T,H^1(0,1))}$$

لتطبيق هده الطريقة يجب تغير المتغير ، نعرف الدالة : $u(x,t) = v(x,t) - \varphi(x)$ نجد المسألة التالية :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}u(x,t) - a\frac{\partial}{\partial x}(x^{\beta}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + bu(x,t) = g(x,t,u) + a\frac{\partial}{\partial x}(x^{\beta}\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}) \\ -b\varphi(x,t) = f(x,t,u) \quad \in Q_t, \\ u(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.2}$$

حيث نجد المعالة التفاضلية غير الخطية ذات المشتقات الكسرية المكافئة التالية :

$$\mathcal{L}u = {}^{C}D_t^{\alpha}u + a\frac{\partial}{\partial x}(x^{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}) + bu = f(x,t,u) \tag{2.3}$$

مع الشرط الإبتدائي :

$$lu = u(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,l] \tag{2.4}$$

والشرط الحدودي لدركلي :

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.5}$$

لكن العددين الحقيقين αو β بحيث : $0 \leq \alpha \leq 1$و $0 \leq \beta \leq 1$

أولا سندرس وجود و وحدانية الحل للمسألة الخطية

2.3 دراسة المسألة الخطية

في هذا القسم سندرس الجزء الخطي للمسألة :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}u(x,t) - a\frac{\partial}{\partial x}(x^{\beta}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + bu(x,t) = f(x,t) \quad \in Q_t, \\ u(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.6}$$

حيث نجد المعالة التفاضلية الخطية ذات المشتقات الكسرية المكافئة التالية :

$$\mathcal{L}u = {}^{C}D_t^{\alpha}u + a\frac{\partial}{\partial x}(x^{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}) + bu = f(x,t) \tag{2.7}$$

2.3.1 التقدير المسبق لحل مسألة خطية

سندرس في هذا الفصل وجود حل المسألة (6.2) حيث الكتابة المجردة للمسألة كالتالي : $Lu = F$ نضع $L = (\mathcal{L}, l)$ و $F = (f, u_0)$ ونعرف المؤاثر المرافق للمسألة (6.2) ب L من فضاء بناخ E إلى الفضاء الهلبرتي F و المرفق بالدالة $u \in D(L)$ المزود بالنظيم :

$$\|u\|_E^2 = \left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|x^{\frac{\beta}{2}}\nabla u\right\|_{L^2(Q)}^2 + \|u\|_{L^2(Q)}^2 \tag{2.8}$$

وليكن الفضاء الهلبرتي F المزود بالنظيم :

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|_{L^2(Q)}^2 \tag{2.9}$$

نظرية 1

من أجل كل دالة $u \in D(L)$ يوجد ثابت حقيقيk مستقل عن الدالة u يحقق :

$$\left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|x^{\frac{\beta}{2}}\nabla u\right\|_{L^2(Q)}^2 + \|u\|_{L^2(Q)}^2 \leq k(\|f\|_{L^2(Q)}^2) \tag{2.10}$$

بحيث $D(L)$ هي مجموعة تعريف المؤاثر L و المعرفة بالشكل :

$$D(L) = \{u \in L^2(Q) | {}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u, x^{\frac{\beta}{2}}\nabla u \in L^2(Q)\}.$$

و تحقق الشرط (5.2)

البرهان

نستخدم الجداء السلمي في الفضاء $L^2(Q)$ بين المعادلة (7.2) و الدالة :

$$Mu = u$$

بحيث :

$$Q^{\tau} = \Omega \times (0,T)$$

نجد :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} &= ({}^C D_t^\alpha u, u)_{L^2(Q^\tau)} - a(\tfrac{\partial}{\partial x}(x^\beta \tfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}, u)_{L^2(Q^\tau)} \\
&\quad + b(u,u)_{L^2(Q^\tau)} \\
&= (\widetilde{f}, u)_{L^2(Q^\tau)}
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

نستعمل التكامل بالتجزئة للطرف الأول من المعادلة (11.2) نحصل على :

$$
\begin{aligned}
({}^C D_t^\alpha u, u)_{L^2(Q^\tau)} &= ({}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} u, {}_t^C D^{\frac{\alpha}{2}} u)_{L^2(Q^\tau)} \\
&= \cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \, |u|^2_{{}_c H^{\frac{\alpha}{2}}(Q^\tau)} \\
&= \cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \left\| {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

و

$$
-a(\frac{\partial}{\partial x}(x^\beta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}), u)_{L^2(Q^\tau)} = a \left\| x^{\frac{\beta}{2}} \nabla u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} . \tag{2.13}
$$

نعوض النتيجة (12.2) و (13.2) في المعادلة (11.2) نحصل على المتراجحة التالية :

$$
\cos\frac{\alpha\pi}{2} \left\| {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + a \left\| x^{\frac{\beta}{2}} \nabla u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + b \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq (\widetilde{f}, u)_{L^2(Q^\tau)} \tag{2.14}
$$

لتقدير الطرف الآخر من المتراجحة (14.2)نعتمد على متراجحة كوشي شوارتز ل ϵ :

$$
|ab| \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2} \tag{2.15}
$$

نتحصل على :

$$
\begin{aligned}
&\cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \left\| {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + a \left\| x^{\frac{\beta}{2}} \nabla u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + b \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&\leq \tfrac{1}{2\epsilon} \left\| \widetilde{f} \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \tfrac{\epsilon}{2} \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

و منه :

$$
\begin{aligned}
&\cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \left\| {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + a \left\| x^{\frac{\beta}{2}} \nabla u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + (b - \tfrac{\epsilon}{2}) \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&\leq \tfrac{1}{2\epsilon} \left\| \widetilde{f} \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

إذن كل الحدود موجبة،و لدينا من (17.2) :

$$
\left\| {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq \frac{1}{2\epsilon \cos\frac{\alpha\pi}{2}} \left\| \widetilde{f} \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} . \tag{2.18}
$$

$$
\left\| x^{\frac{\beta}{2}} \nabla u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq \frac{1}{2\epsilon a} \left\| \widetilde{f} \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} . \tag{2.19}
$$

$$
\left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq \frac{1}{2\epsilon(b - \frac{\epsilon}{2})} \left\| \widetilde{f} \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} . \tag{2.20}
$$

من النتائج (17.3),(19.2) و (20.2) نجد :

$$\begin{aligned}&\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}u\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2+\left\|x^{\frac{\beta}{2}}\nabla u\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2+\|u\|_{L^2(Q^\tau)}^2\\&\leq\frac{1}{2\epsilon\min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2},a,(b-\frac{\epsilon}{2})\}}\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2.\end{aligned}\tag{2.21}$$

نتحصل على المتراجحة :

$$\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}u\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2+\left\|x^{\frac{\beta}{2}}\nabla u\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2+\|u\|_{L^2(Q^\tau)}^2\leq\delta\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2(Q^T)}^2.\tag{2.22}$$

بحيث :

$$\delta=\frac{1}{2\epsilon\min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2},a,(b-\frac{\epsilon}{2})\}}\tag{2.23}$$

بما أن الطرف الأيمن من المتراجحة مستقل عن τ نستطيع أن نمر إلى النهاية $t\longrightarrow T$ في الطرف الأيسر من المتراجحة فنتحصل على :

$$\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}u\right\|_{L^2(Q^T)}^2+\left\|x^{\frac{\beta}{2}}\nabla u\right\|_{L^2(Q^T)}^2+\|u\|_{L^2(Q^T)}^2\leq\delta\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2(Q^T)}^2.\tag{2.24}$$

وفي الأخير نجد :

$$\|u\|_E\leq\phi\|Lu\|_F\tag{2.25}$$

بحيث :

$$\phi=\sqrt{\delta}$$

لتكن $R(L)$ هي صورة المؤثر L,ليس لدينا أي معلومات حول $R(L)$ سوى $R(L)\subset F$لهذا يجب علينا تمديد المؤثر L باستعمال المتراجحة (25.2) في الفضاء F أولا نتحقق من القضية التالية :

قضية 1

المؤثر $L:E\longrightarrow F$ قابل للغلق

البرهان:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D(L)$ متتالية عناصر بحيث :

$$u_n\longrightarrow 0\in E$$

و

$$Lu_n\longrightarrow(\widetilde{f},0)\in F\tag{2.26}$$

لنثبت أن :

$$f \equiv 0$$

تقارب u_n نحو 0 هذا يستلزم :

$$u_n \longrightarrow 0 \in D^{'}(Q_T)$$

من استمرارية الإشتقاق الكسري ، حسب القضية 1 و المشتقة من الدرجة الأولى (حالة خاصة للمشتقة الكسرية) من $D^{'}(Q_T)$ في $D^{'}(Q_T)$. إدا (26.2) تستلزم :

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow 0 \in D^{'}(Q_T) \tag{2.27}$$

بالإضافة إلى ذلك، فأن تقارب $\mathcal{L}u_n$ نحو f في $L^2(Q_T)$ يستلزم :

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow f \in D^{'}(Q_T) \tag{2.28}$$

و بما أن النهاية إذا وجدت فهي وحيدة في $D^{'}(Q_T)$ نستنتج من (27.2)و (28.2) نجد :

$$f \equiv 0$$

إذن المؤثر L قابل للغلق.

تعريف 1

ليكن المؤثر L قابل للغلق و معرف على المجموعة $D(\overline{L})$ ومنه حل المعادلة :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}$$

هو حل قوي للمسألة (3.2) − (5.2) .

نتيجة 1

ليكن المؤثر المغلق $\overline{L}$ المعرف على المجموعة $R(\overline{L})$ مغلق في فضاء الوصول F و $\overline{R(L)}$ هي المجموعة المغلقة ل $R(L)$ ومنه :

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$$

البرهان:

1. الإحتواء الأول :
$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$.
ليكن $z \in \overline{R(L)}$ إذن توجد متتالية كوشي $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من F عناصرها من المجموعة $R(L)$ بحيث :

$$\lim_{n\xrightarrow{+}\infty} z_n = z$$

إذن توجد متتالية عناصر $u_n \in D(L)$ بحيث :

$$Lu_n = z_n$$

من المتراجحة (25.2) نتحصل على :
لما $p, q \longrightarrow +\infty$ نجد :

$$\|u_p - u_q\|_E \leq \phi \|Lu_p - Lu_q\|_F \longrightarrow 0$$

عندما يؤول p, q إلى اللانهاية ، يمكن استنتاج متتالية كوشي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ بحيث E فضاء بناخ ، وبالتالي يوجد $u \in E$بحيث :$\lim_{n\xrightarrow{+}\infty} u_n = u$ من تعريف $\overline{L}$إذا كان :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} Lu_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} z_n = z$$

ومنه

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \overline{L}u_n = z$$

بما أن $\overline{L}$مغلق إذن :

$$\overline{L}u = z \quad ; u \in D(\overline{L})$$

و بذلك $z \in R(\overline{L})$ إذن :

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$$

. في هذه الحالة نستنتج أن $R(\overline{L})$ مغلق لأنه فضاء تام (كل فضاء جزئي تام من الفضاء المتري(ليس بالضرورة تام) مغلق)

2. الإحتواء الثاني :
$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$
ليكن $z \in R(\overline{L})$ إدن توجد متتالية كوشي $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ عناصرها من المجموعة $R(\overline{L})$ بحيث :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z$$

أي $z \in R(\overline{L})$ لأن $R(\overline{L})$ هي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء التام F إذن $R(\overline{L})$ فضاء جزئي تام .
إذن يوجد متتالة مطابقة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(\overline{L})$ بحيث:
من المتراجحة (25.2) نتحصل على :
لما $p, q \longrightarrow +\infty$ نجد :

$$\|u_p - u_q\|_E \leq \phi \|Lu_p - Lu_q\|_F \longrightarrow 0$$

عندما يؤول p, q إلى اللانهاية ، يمكن استنتاج متتالية كوشي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ بحيث E فضاء بناخ ، وبالتالي يوجد $u \in E$ بحيث: $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ من تعريف $\overline{L}$.
مرة أخرى توجد متتالة مطابقة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(L)$ بحيث :

$$Lu_n = \overline{L}u_n \quad \text{في} \quad R(L) \quad ;\forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} Lu_n = z$$

بالتالي ، $z \in \overline{R(L)}$ وعليه :

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$$

2.3.2 وجود حل المسألة الخطية

لإثبات وجود الحل علينا إثبات أن $R(L)$ كثيف في الفضاء F هذا يعني إثبات أن معامد صورة المؤثر يساوي الصفر ،من أجل ذلك نحتاج للنظرية التالية :

نظرية 2

إذا تحققت شروط النظرية (2.1) وكذلك من اجل $w \in \mathbb{L}^2(Q_T)$ومن أجل كل $u \in D(L)$ لذينا :

$$\int_{Q_T} \mathcal{L}u.w dx dt = 0 \tag{2.29}$$

إذن wيؤول إلى الصفر في المجموعة Q_T هذا يستلزم أنه يوجد حل قوى وحيد $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F}$

برهان

لدينا

$$(Lu, W)_F = \int_Q \mathcal{L}u.wdxdt$$

بحيث:

$$W = (w, 0)$$

إذا كان $w \in L^2(Q)$ و من أجل كل $\{u/u \in D(L) : \mathcal{L}u = 0\}$ نحصل على : $u \in D_0(L) =$

$$\int_Q \mathcal{L}.wdxdt = 0$$

نضع $u = w$ من التقدر المسبق للحل نجد :

$$\left\| {}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^T)} + \left\| x^{\frac{\beta}{2}} \nabla u \right\|^2_{L^2(Q^T)} + \|u\|^2_{L^2(Q^T)} \leq 0$$

وعليه

$$\|u\|_E \leq 0 \quad \Rightarrow u = 0$$

و منه : $u = w = 0$ **نتيجة 2 (إثبات وحدانية الحل)**

المتراجحة $\|u\|_E \leq \phi \|\mathcal{F}\|_F$ تعطي وحدانية الحل :

البرهان

لنفرض أن u_1 و u_2 حلين للمعادلة إذن :

$$\begin{cases} Lu_1 = \mathcal{F} \\ Lu_2 = \mathcal{F} \end{cases} \tag{2.30}$$
$$\Rightarrow L(u_1 - u_2) = 0$$

ومنه :

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq \phi \|0\|_F$$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_E \leq 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

وعليه المسألة تملك حل وحيد .

2.4 دراسة الوجود و الوحدانة للمسألة غير الخطية

سندرس في هذا المحور وجود و وحدانية حل المسألة غير الخطية التالية :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}u(x,t) - (x^{\alpha}u_x)_x + bu = f(x,t,u) \quad \forall (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.31}$$

نضع :

$$u = y$$

حيث أن y حل للمسالة شبه الخطية (31.2) ومنه نحصل على :

$$\mathcal{L}y = {}^{C}D_t^{\alpha}y(x,t) - (x^{\alpha}y_x)_x + by = f(x,t,y) \tag{2.32}$$

مع الشرط الإبتدائي :

$$y(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,l) \tag{2.33}$$

و الشرط الحدودي لدركلي :

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \tag{2.34}$$

لتكن الدالة f تحقق شروط ليبشتيز ،أي أنه يوجد ثابت حقيقي موجب k بحيث :

$$\|f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)\|_{L^2(Q)} \leq k \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T,H^1)} \tag{2.35}$$

الحل يعتمد على بناء متتالية تراجعية $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدها الأول $y^0 = 0$ و تولد حتى الحد y^{n-1} من أجل $n = 1, 2, 3, \ldots$ نقوم بحل المسألة التالية :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}y^{(n)} - (x^{\alpha}y_x^{(n)})_x + by^{(n)} = f(x,t,y^{(n-1)}) \quad \forall (x,t) \in Q, \\ y^{(n)}(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,l), \\ y^{(n)}(0,t) = y^{(n)}(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.36}$$

من أجل n ثابت ، وباستخدام النتائج المحصل عليها في المسألة (6.2) نستنتج أن المسألة (36.2) تقبل الحل الوحيد $y^{(n)}(x,t)$

نضع

$$z^{(n)}(x,t) = y^{(n+1)}(x,t) - y^{(n)}(x,t)$$

نحصل على مسألة خطية جديدة:

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} z^{(n)} - (x^{\alpha} z_x^{(n)})_x + b z^{(n)} = p^{(n-1)}(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q, \\ z^{(n)}(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,l), \\ z^{(n)}(0,t) = z^{(n)}(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.37}$$

بحيث

$$p^{(n-1)}(x,t) = f(x,t,y^{(n)}) - f(x,t,y^{(n-1)})$$

نضرب المعادلة التالية :

$${}^{C}D_t^{\alpha} z^{(n)} - (x^{\alpha} z_x^{(n)})_x + b z^{(n)} = p^{(n-1)}(x,t)$$

في $z^{(n)}$ و نكامل على المجموعة Q_τ نجد :

$$\int_{Q_\tau} {}^{C}D_t^{\alpha} z^{(n)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dxdt - \int_{Q_\tau} (x^{\alpha} z_x^{(n)})_x \cdot z^{(n)}(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} b z^{(n)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dxdt$$

$$= \int_{Q_\tau} p^{(n-1)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dxdt$$

عند إستخدام التكامل بالتجزئة و بالإعتماد على الشرط الإبتدئي و شرط دريكلي نحصل على :

$$\cos\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right) \left\| {}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}} z^{(n)} \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| z_x^{(n)} \right\|^2_{L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)} + b \left\| z^{(n)} \right\|^2_{L^2(Q)} \tag{2.38}$$

$$= \int_{Q_\tau} p^{(n-1)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dxdt$$

إستخدام متراجحة كوشي شوارتز على الطرف الثاني للمعادلة (38.2) نجد :

$$\int_{Q_\tau} p^{(n-1)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dxdt$$

$$\leq \tfrac{1}{2\epsilon} \int_{Q_\tau} \left| p^{(n-1)}(x,t) \right|^2 dxdt + \tfrac{\epsilon}{2} \int_{Q_\tau} (z^{(n)}(x,t))^2 dxdt \tag{2.39}$$

$$\leq \tfrac{1}{2\epsilon} \int_{Q_\tau} \left| f(x,t,y^{(n)}) - f(x,t,y^{(n-1)}) \right|^2 dxdt + \tfrac{\epsilon}{2} \int_{Q_\tau} (z^{(n)}(x,t))^2 dxdt$$

من المتراجحة (35.2) نحصل على :

$$\int_{Q_\tau} p^{(n-1)}(x,t)\cdot z^{(n)}(x,t)dxdt$$

$$\leq \frac{k^2}{2\epsilon}\int_{Q_\tau}\left|y^{(n)}-y^{(n-1)}\right|^2 dxdt+\frac{\epsilon}{2}\int_{Q_\tau}(z^{(n)}(x,t))^2dxdt$$

$$\leq \frac{k^2}{2\epsilon}\int_{Q_\tau}\left|z^{(n-1)}\right|^2 dxdt+\frac{\epsilon}{2}\int_{Q_\tau}(z^{(n)}(x,t))^2dxdt \tag{2.40}$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\int_{Q_\tau}\left|z^{(n-1)}\right|^2 dxdt+\frac{\epsilon}{2}\int_{Q_\tau}(z^{(n)}(x,t))^2dxdt$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{\epsilon}{2}\left\|(z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

وبالتالي :

$$\cos\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right)\left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)}+b\left\|z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{\epsilon}{2}\left\|(z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

وعليه :

$$\cos\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right)\left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)}+(b-\tfrac{\epsilon}{2})\left\|z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

أي أن :

$$\left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)}+\left\|z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon\min\{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),1,(b-\frac{\epsilon}{2})\}}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

ومنه يمكن كتابة المتراجحة على الشكل :

$$\left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)}+\left\|z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon\min\{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),1,(b-\frac{\epsilon}{2})\}}\left(\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z_x^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)}\right)$$

نضع :

$$c=\max\{1,\frac{k^2}{\epsilon\min\{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),1,(b-\frac{\epsilon}{2})\}}\}$$

في الإخير نجد :

$$\left\|z^{(n)}\right\|_V^2 \leq c\left\|z^{(n-1)}\right\|_V^2$$

بحيث :

$$V = \{y : y \in L^2(Q), y_x \in L^2_{\sqrt{x^\beta}}(Q)\}$$

سيكون هدفنا التالي هو دراسة تقارب المتتالية $y^{(n)}$ من أجل ذلك نقوم بدراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z^{(i)}$ تكون هذه السلسلة متقاربة من أجل $|C| \leq 1$ وعليه:

$$\left|\frac{k^2}{\epsilon \min\{\cos(\frac{\alpha\pi}{2}), 1, (b-\frac{\epsilon}{2})\}}\right| \leq 1$$

و بالتالي :

$$\sqrt{\frac{k^2}{\epsilon \min\{\cos(\frac{\alpha\pi}{2}), 1, (b-\frac{\epsilon}{2})\}}} \leq 1$$

و منه

$$k\sqrt{\frac{1}{\epsilon \min\{\cos(\frac{\alpha\pi}{2}), 1, (b-\frac{\epsilon}{2})\}}} \leq 1$$

في الإخير نجد :

$$k \leq \sqrt{\epsilon \min\{\cos(\frac{\alpha\pi}{2}), 1, (b-\frac{\epsilon}{2})\}}$$

من جهة أخرى نعلم أن :

$$z^{(n)}(x,t) = y^{(n+1)}(x,t) - y^{(n)}(x,t)$$

وكذلك :

$$y^{(0)}(x,t) = 0$$

وبالتالي نجد :

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-1}(y^{(i+1)} - y^{(i)} \\ = y^{(1)} - y^{(0)} + y^{(2)} - y^{(1)} + y^{(3)} - y^{(2)} + ... + y^{(n)} - y^{(n-1)} \\ = y^{(n)}\end{gathered}$$

ومنه

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)}$$

متقاربة نحو الدالة $y \in V$

بعد إثبات تقارب $y^{(n)}$ في المجموعة V باقي إثبات النهاية :

$$\lim_{x \to 0} y^{(n)}(x,t) = y(x,t)$$

هو حل للمسألة (36.2) .

من أجل الحصول على هذه النتيجة، سيكون من الضروري التأكد من أن y تحقق:

$$A(y,v) = \int_{Q_\tau} f(x,t,y) \cdot v(x,t) dxdt \quad v \in O \tag{2.41}$$

بحيث

$$O = \{v \in C^1(Q) : v(0,t) = v(1,t) = 0, \forall t \in (0,T)\}$$

و عليه نكتب (41.2) على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} A(y^{(n)},v) &= \int_{Q_\tau} {}^C D_t^\alpha y^{(n)} \cdot v(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} (x^\alpha y_x^{(n)})_x \cdot v(x,t) dxdt \\ &+ \int_{Q_\tau} y^{(n)} \cdot v(x,t) dxdt \end{aligned} \tag{2.42}$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned} A(y^{(n)},v) &= \int_{Q_\tau} {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} y^{(n)} \cdot {}_t^C D^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} x^\alpha y_x^{(n)} \cdot v_x(x,t) dxdt \\ &+ \int_{Q_\tau} y^{(n)} \cdot v(x,t) dxdt \end{aligned} \tag{2.43}$$

بما أن A خطي نجد :

$$A(y^{(n)},v) = A(y^{(n)} - y, v) + A(y,v)$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned} A(y^{(n)},v) &= \int_{Q_\tau} {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} (y^{(n)} - y) \cdot {}_t^C D^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} x^\alpha (y^{(n)} - y)_x \cdot v_x(x,t) dxdt \\ &+ \int_{Q_\tau} (y^{(n)}) - y) \cdot v(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} y \cdot {}_t^C D^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) dxdt \\ &+ \int_{Q_\tau} x^\alpha y_x \cdot v_x(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} y \cdot v(x,t) dxdt \end{aligned} \tag{2.44}$$

إستخدام متراجحة كوشي شوارتز من أجل $A(y^{(n)} - y, v)$ نجد :

$$A(y^{(n)} - y, v) \leq \|v\|_V \left\|(y^{(n)} - y)_t\right\|_V + \|v\|_V \left\|(y^{(n)} - y)_x\right\|_V$$

من جهة أخرى نعلم أن :

$$y^{(n)} \longrightarrow y \in V$$

أي أن :

$$y^{(n)} \longrightarrow y \in L^2(Q)$$
$$y_t^{(n)} \longrightarrow y_t \in L^2(Q)$$
$$y_x^{(n)} \longrightarrow y_x \in L^2_{\sqrt{x^\alpha}}(Q)$$

الآن من أجل $n \longrightarrow +\infty$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty} A(y^{(n)} - y, v) = 0$$

بما أن A خطي نجد :

$$\lim_{n\to+\infty} y^{(n)} = y$$

الفصل 3

دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة معادلة تفاضلية غير خطية ذات مشتقات كسرية للزمن و المكان مع شروط دريكلي

3.1 مقدمة

نهدف في هذا الفصل لإثباث وجود حل ضعيف ووحدانيته لمسألة المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية ذات قطع مكافي للإنتشار مع شروط الحدودية لدريكلي حيث تنقسم هذه الدراسة إلى جزئين:
الجزء الأول: دراسة وجود ووحدانية المسألة الخطية بإستعمال متراجحة الطاقة .
الجزء الثاني: دراسة المشكلة غير الخطية بإستعمال التقريب التآلفي مع وجود شروط الحدودية لدريكلي .
.

3.2 صياغة المشكلة

ليكن $T \geq 0$, و $\Sigma \subset \mathbb{R}$
بحيث :

$$I = (0, T) \quad \text{و} \quad \Sigma = [-1, 1] \quad \text{حيث} \quad Q = \Sigma \times I$$

نعتبر غير خطية ذات المشتقات الكسرية التالية :

$$
\begin{cases}
{}^{R}D_t^{\alpha} v(x,t) - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} v(x,t) - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} v(x,t) + a(x,t)v(x,t) \\
= f(x,t,v,{}^{R}D_x^{\beta} v) \quad (x,t) \in Q, \\
v(x,0) = 0 \quad \forall x \in (-1,1), \\
v(-1,t) = v(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T)
\end{cases} \tag{3.1}
$$

حيث p_1 و p_2 عددين حقيقيين يحققان :

$$p_1 + p_2 = 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq p_1, p_2 \leq 1$$

ولتكن الدالة الحقيقة $a(x,t)$ والتي تحقق :

$$a_0 \prec a(x,t) \prec a_1 : a_0, a_1 \in \mathbb{R} \quad \forall (x,t) \in Q$$

3.3 دارسة المسألة الخطية

سنقوم في هذا الجزء بإثباث وجود ووحدانية الحل للمسألة الخطية عن طريق تقدير مسبق للحل باستخدام طريقة متراجحة الطاقة وكذلك إثباث أن ملاصقة صورة المؤثرالمدروس مساوية لفضاء الوصول .

3.3.1 المسألة الخطية

$$
\begin{cases}
{}^{R}D_t^{\alpha} v(x,t) - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} v(x,t) - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} v(x,t) + a(x,t)v(x,t) \\
= f(x,t) \quad (x,t) \in Q \\
v(x,0) = 0 \quad \forall x \in (-1,1), \\
v(-1,t) = v(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T)
\end{cases} \tag{3.2}
$$

نمثل مسألة الإنتشار كمايلي :

$$\mathcal{L}v = {}^{R}D_t^{\alpha} v(x,t) - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} v(x,t) - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} v(x,t) + a(x,t)v(x,t) = f(x,t) \tag{3.3}$$

مع الشرط الإبتدائي :

$$lv = v(x,0) = 0 \quad \forall x \in [-1,1] \tag{3.4}$$

والشرط الحدودي لدركلي :

$$v(-1,t) = v(1,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.5}$$

لكين العددين الحقيقين αو βبحيث : $0 \leq \alpha \leq 1$و $0 \leq \beta \leq 1$
ولتكن $f(x,t)$ دالة حقيقة حيث $\forall (x,t) \in \overline{Q}$

3.3.2 التقدير المسبق للحل

سندرس في هذا الفصل وجود حل المسألة (3.3) – (5.3) حيث الكتابة المجردة للمسألة كالتالي : $Lu = F$ نضع $L = (\mathcal{L}, l)$ و $F = (f, u_0)$ ونعرف المؤثر المرافق للمسألة (3.3) – (5.3) ب L من فضاء بناخ E إلى الفضاء الهلبرتي F و المرفق بالدالة $u \in D(L)$ المزود بالنظيم :

$$\|v\|_E^2 = \left\| {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v \right\|_{L^2(Q)}^2 + \|v\|_{L^2(Q)}^2 \tag{3.6}$$

وليكن الفضاء الهلبرتي F المزود بالنظيم :

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|_{L^2(Q)}^2 \tag{3.7}$$

نظرية 1

من أجل كل دالة $v \in D(L)$ يوجد ثابت حقيقيk مستقل عن الدالة v يحقق :

$$\left\| {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v \right\|_{L^2(Q)}^2 + \|v\|_{L^2(Q)}^2 \leq k(\|f\|_{L^2(Q)}^2) \tag{3.8}$$

بحيث $D(L)$ هي مجموعة تعريف المؤثر L و المعرفة بالشكل :

$$D(L) = \{v \in L^2(Q) | \quad {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} V, {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} V \in L^2(Q)\}.$$

البرهان

نستخدم الجداء السلمي في الفضاء $L^2(Q)$ بين المعادلة (3.2) و الدالة :

$$Mv = v$$

بحيث :

$$Q^\tau = \Sigma \times (0, T)$$

نجد :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}v, Mv)_{L^2(Q^\tau)} &= ({}^R D_t^\alpha v, v)_{L^2(Q^\tau)} - p_1({}^R D_x^\beta v, v)_{L^2(Q^\tau)} \\
&\quad -p_2({}_x^R D^\beta v, v)_{L^2(Q^\tau)} \\
&= (\widetilde{f}, v)_{L^2(Q^\tau)}
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

نستعمل التكامل بالتجزئة للطرف الأول من المعادلة (11.2) نحصل على :

$$
\begin{aligned}
({}^R D_t^\alpha v, v)_{L^2(Q^\tau)} &= ({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v, {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L^2(Q^\tau)} \\
&= \cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \, |u|^2_{{}^C H^{\frac{\alpha}{2}}(Q^\tau)} \\
&= \cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \left\| {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q)^\tau} .
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

و

$$
\begin{aligned}
-p_1({}^R D_x^\beta v, v)_{L^2(Q^\tau)} &= ({}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v, {}_x^R D^{\frac{\beta}{2}} v)_{L^2(Q^\tau)} \\
&= -p_1 \cos\tfrac{\beta\pi}{2} \, |v|^2_{{}^C H^{\frac{\alpha}{2}}(Q^\tau)} \\
&= -p_1 \cos\tfrac{\beta\pi}{2} \left\| {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

وكذلك

$$
\begin{aligned}
-p_2({}_x^R D^\beta v, v)_{L^2(Q^\tau)} &= ({}_x^R D^{\frac{\beta}{2}} v, {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v)_{L^2(Q^\tau)} \\
&= -p_2 \cos\tfrac{\beta\pi}{2} \, |v|^2_{{}^C H^{\frac{\alpha}{2}}(Q^\tau)} \\
&= -p_2 \cos\tfrac{\beta\pi}{2} \left\| {}_x^R D^{\frac{\beta}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&= -p_2 \cos\tfrac{\beta\pi}{2} \left\| {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} .
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

نعوض النتيجة (11.3), (10.3) و (12.3) في المعادلة (9.3) نحصل على المتراجحة التالية :

$$
\begin{aligned}
&\cos\tfrac{\alpha\pi}{2} \left\| {}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} - (p_1 + p_2) \cos\tfrac{\beta\pi}{2} \left\| {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + (a, v)_{L^2(Q^\tau)} \\
&\qquad \leq (\widetilde{f}, v)_{L^2(Q^\tau)}
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

لتقدير الطرف الأخر من المتراجحة (13.3)نعتمد على متراجحة كوشي شوارتز ل ϵ :

$$
|ab| \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2} \tag{3.14}
$$

نتحصل على :

$$\cos\tfrac{\alpha\pi}{2}\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}-(p_{1}+p_{2})\cos\tfrac{\beta\pi}{2}\left\|{}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+a_{0}\left\|v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\tfrac{1}{2\epsilon}\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+\tfrac{\epsilon}{2}\left\|v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}. \tag{3.15}$$

و منه :

$$\cos\tfrac{\alpha\pi}{2}\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}-(p_{1}+p_{2})\cos\tfrac{\beta\pi}{2}\left\|{}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+(a_{0}-\tfrac{\epsilon}{2})\left\|v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\tfrac{1}{2\epsilon}\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}. \tag{3.16}$$

إذن كل الحدود موجبة،و لدينا من (16.3) :

$$\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\frac{1}{2\epsilon\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}. \tag{3.17}$$

$$\left\|{}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\frac{1}{-2\epsilon(p_{1}+p_{2})\cos\frac{\beta\pi}{2}}\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}. \tag{3.18}$$

$$\left\|v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\frac{1}{2\epsilon(a_{0}-\frac{\epsilon}{2})}\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}. \tag{3.19}$$

من النتائج (16.3),(18.3) و (19.3) نجد :

$$\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+\left\|{}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+\left\|v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\frac{1}{2\epsilon\min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2},-(p_{1}+p_{2})\cos\frac{\beta\pi}{2},(a_{0}-\frac{\epsilon}{2})\}}\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}. \tag{3.20}$$

نتحصل على المتراجحة :

$$\left\|{}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+\left\|{}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}}v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}+\left\|v\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{\tau})}\leq\delta\left\|\widetilde{f}\right\|^{2}_{L^{2}(Q^{T})}. \tag{3.21}$$

بحيث :

$$\delta=\frac{1}{2\epsilon\min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2},-(p_{1}+p_{2})\cos\frac{\beta\pi}{2},(a_{0}-\frac{\epsilon}{2})\}} \tag{3.22}$$

بما أن الطرف الأيمن من المتراجحة مستقل عن τ نستطيع أن نمر إلى النهاية $t \longrightarrow T$ في الطرف الأيسر من المتراجحة فنتحصل :

$$\left\| {}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2(Q^T)}^2 + \left\| {}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}} v \right\|_{L^2(Q^T)}^2 + \|u\|_{L^2(Q^T)}^2 \leq \delta \left\| \widetilde{f} \right\|_{L^2(Q^T)}^2 . \tag{3.23}$$

وفي الأخير نجد :

$$\|v\|_E \leq \phi \|Lv\|_F \tag{3.24}$$

بحيث :

$$\phi = \sqrt{\delta}$$

لتكن $R(L)$ هي صورة المؤثر L,ليس لدينا أي معلومات حول $R(L)$ سوى $R(L) \subset F$لهذا يجب علينا تمديد المؤثر L باستعمال المتراجحة (25.2) في الفضاء F أولا نتحقق من القضية التالية :

قضية 1

المؤثر $L : E \longrightarrow F$ قابل للغلق .

البرهان

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(L)$ متتالية عناصر بحيث :

$$v_n \longrightarrow 0 \in E$$

و

$$Lv_n \longrightarrow (\widetilde{f}, 0) \in F \tag{3.25}$$

لنثبت أن :

$$f \equiv 0$$

تقارب v_n نحو 0 هذا يستلزم :

$$v_n \longrightarrow 0 \in D^{'}(Q_T)$$

من استمرارية الاشتقاق الكسري ، حسب القضية 1 و المشتقة من الدرجة الأولى (حالة خاصة للمشتقة الكسرية) من

$D^{'}(Q_T)$ في $D^{'}(Q_T)$. إدا (26.2) تستلزم :

$$\mathcal{L}v_n \longrightarrow 0 \in D^{'}(Q_T) \tag{3.26}$$

بالإضافة إلى ذلك، فأن تقارب $\mathcal{L}u_n$ نحو f في $L^2(Q_T)$ تستلزم :

$$\mathcal{L}v_n \longrightarrow f \in D^{'}(Q_T) \tag{3.27}$$

و بما أن النهاية إذا وجدت فهي وحيدة في $D^{'}(Q_T)$ نستنتج من (27.2)و (27.3) :

$$f \equiv 0$$

إذن المؤثر L قابل للغلق.

تعريف 1

ليكن المؤثر L قابل للغلق و معرف على المجموعة $D(\overline{L})$ ومنه حل المعادلة :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}$$

هو حل قوي للمسألة (3.2) − (5.2) .

نتيجة 1

ليكن المؤثر المغلق $\overline{L}$ المعرف على المجموعة $R(\overline{L})$ مغلق في فضاء الوصول F و $\overline{R(L)}$ هي المجموعة المغلقة ل $R(L)$,ومنه :

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$$

البرهان:

1. الإحتواء الأول :

$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$.

ليكن $z \in \overline{R(L)}$ إذن توجد متتالية كوشي $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من F عناصرها من المجموعة $R(L)$ بحيث :

$$\lim_{n \overset{+}{\longrightarrow} \infty} z_n = z$$

إذن توجد متتالية عناصر $v_n \in D(L)$ بحيث :

$$Lv_n = z_n$$

من المتراجحة (24.3) نتحصل على :
لما $p, q \longrightarrow +\infty$ نجد :

$$\|v_p - v_q\|_E \leq \phi \|Lv_p - Lv_q\|_F \longrightarrow 0$$

عندما يؤول p, q إلى اللانهاية ، يمكن استنتاج متتالية كوشي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ بحيث E فضاء بناخ ، وبالتالي يوجد $u \in E$ بحيث: $\lim_{n\xrightarrow{+}\infty} v_n = u$ من تعريف $\overline{L}$ إذا كان :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} Lv_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} z_n = z$$

ومنه

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \overline{L}v_n = z$$

بما أن $\overline{L}$ مغلق إذن :

$$\overline{L}u = z \quad ; v \in D(\overline{L})$$

و بذلك $z \in R(\overline{L})$ إذن :

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$$

. في هذه الحالة نستنتج أن $R(\overline{L})$ مغلق لأنه فضاء تام (كل فضاء جزئي تام من الفضاء النتري(ليس بالضرورة تام) مغلق)

2. الإحتواء الثاني :
$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$
ليكن $z \in R(\overline{L})$ إذن توجد متتالية كوشي $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ عناصرها من المجموعة $R(\overline{L})$ بحيث :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z$$

أي $z \in R(\overline{L})$ لأن $R(\overline{L})$ هي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء التام F إذن $R(\overline{L})$ فضاء جزئي تام .
إذن يوجد متتالة مطابقة $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(\overline{L})$ بحيث:
من المتراجحة (25.2) نتحصل على :
لما $p, q \longrightarrow +\infty$ نجد :

$$\|v_p - v_q\|_E \leq \phi \|Lv_p - Lv_q\|_F \longrightarrow 0$$

عندما يؤول p, q إلى اللانهاية ، يمكن استنتاج متتالية كوشي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ بحيث E فضاء بناخ ، وبالتالي يوجد $u \in E$ بحيث: $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ من تعريف $\overline{L}$.
مرة أخرى توجد متتالة مطابقة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(L)$ بحيث :

$$Lu_n = \overline{L}v_n \quad \text{في} \quad R(L) \quad ;\forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} Lv_n = z$$

بالتالي ، $z \in \overline{R(L)}$ وعليه :

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$$

3.3.3 دراسة وجود حل للمسألة الخطية

لإثبات وجود الحلول علينا إثبات أن $R(L)$ كثيف في الفضاء F هذا يعني إثبات أن معامد صورة المؤثر يساوي الصفر من أجل ذلك نحتاج للنظرية التالية :
نظرية 2

إذا تحققت شروط النظرية (3.1) وكذلك من أجل $w \in \mathbb{L}^2(Q_T)$ ومن أجل كل $v \in D(L)$ لدينا :

$$\int_Q \mathcal{L}v.wdxdt = 0 \tag{3.28}$$

إذن w يؤول إلى الصفر في المجموعة Q هذا يستلزم أنه يوجد حل قوى وحيد $v = \overline{L}^{-1}\mathcal{F}$
برهان

لدينا :

$$(Lv, W)_F = \int_Q \mathcal{L}v.wdxdt$$

بحيث:

$$W = (w, 0)$$

إدا كان $w \in L^2(Q)$ و من أجل كل $v \in D_0(L) = \{v/v \in D(L) : lv = 0\}$ نحصل على :

$$\int_Q \mathcal{L}u.wdxdt = 0$$

نضع $v = w$ من التقدر المسبق للحل نجد :

$$\left\| {}^{C}D_{t}^{\frac{\alpha}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q^T)} + \left\| {}^{R}D_{x}^{\frac{\beta}{2}} v \right\|^2_{L^2(Q^T)} + \|v\|^2_{L^2(Q^T)} \leq 0$$

وعليه

$$\|u\|_E \leq 0 \quad \Rightarrow v = 0$$

و منه : $v = w = 0$

نتيجة 2 (إثبات وحدانية الحل)

المتراجحة $\|vv\|_E \leq \phi \|\mathcal{F}\|_F$ تعطي وحدانية الحل

البرهان:

لنفرض أن v_1 و v_2 حلين للمعادلة إذن :

$$\begin{cases} Lv_1 = \mathcal{F} \\ Lv_2 = \mathcal{F} \end{cases} \tag{3.29}$$
$$\Rightarrow L(v_1 - v_2) = 0$$

ومنه :

$$\|v_1 - v_2\|_E \leq \phi \|0\|_F$$

$$\Rightarrow \|v_1 - v_2\|_E \leq 0$$

$$\Rightarrow v_1 = u_2$$

وعليه المسألة تملك حل وحيد .

3.4 دراسة الحل الضعيف للمسألة غير الخطية

سندرس في هذا الجزء وجود و وحدانية حل المسألة غير الخطية التالية :

$$\begin{cases} {}^{R}D_t^{\alpha}v(x,t) - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta}v(x,t) - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta}v(x,t) + a(x,t)v(x,t) \\ = f(x,t,v,{}^{R}D_x^{\beta}v) \quad (x,t) \in Q, \\ v(x,0) = 0 \quad \forall x \in (-1,1), \\ v(-1,t) = v(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{3.30}$$

نضع :

$$u = y$$

حيث أن y حل للمسألة غير الخطية (30.3) ومنه نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y &= {}^{R}D_t^{\alpha}y(x,t) - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta}y(x,t) - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta}y(x,t) + a(x,t)y(x,t) \\ &= f(x,t,y,{}^{R}D_x^{\alpha}y) \end{aligned} \tag{3.31}$$

مع الشرط الإبتدائي :

$$y(x,0) = 0, \quad \forall x \in (-1,1) \tag{3.32}$$

و الشرط الحدودي لدركلي :

$$y(-1,t) = y(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \tag{3.33}$$

لتكن الدالة f تحقق شروط ليبشتيز ،أي أنه يوجد ثابت حقيقي موجب k بحيث :

$$\|f(x,t,v_1) - f(x,t,v_2)\|_{L^2(Q)} \leq k(\|v_1 - v_2\|_{L^2(Q)} + \left\|{}^{R}D_x^{\beta}v_1 - {}^{R}D_x^{\beta}v_2\right\|_{L^2(Q)}) \tag{3.34}$$

الحل يعتمد على بناء متتالية تراجعية $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدها الأول $y^0 = 0$ و تولد حتى الحد y^{n-1} من أجل $n = 1,2,3,...$ نقوم بحل المسألة التالية :

$$\begin{cases} {}^{R}D_t^{\alpha}y^n - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta}y^n - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta}y^n + ay^n \\ = f(x,t,y^{n-1},{}^{R}D_x^{\beta}y^{n-1}) \quad (x,t) \in Q, \\ y^n(x,0) = 0 \quad \forall x \in (-1,1), \\ y^n(-1,t) = y^n(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{3.35}$$

من أجل n ثابت ، وبإستخدام النتائج المحصل عليها في المسألة (2.3) نستنتج أن المسألة (35.3) تقبل الحل الوحيد $y^{(n)}(x,t)$

نضع :

$$z^{(n)}(x,t) = y^{(n+1)}(x,t) - y^{(n)}(x,t)$$

نحصل على مسألة خطية جديدة:

$$\begin{cases} {}^{R}D_t^{\alpha} z^n - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} z^n - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} z^n + a z^n = \xi^{n-1}(x,t) \quad (x,t) \in Q, \\ z^n(x,0) = 0 \quad \forall x \in (-1,1), \\ z^n(-1,t) = z^n(1,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{3.36}$$

بحيث

$$\xi^{(n-1)}(x,t) = f(x,t,y^{(n)}) - f(x,t,y^{(n-1)})$$

نضرب المعادلة التالية :

$${}^{R}D_t^{\alpha} z^n - p_1 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} z^n - p_2 \cdot {}^{R}D_x^{\beta} z^n + a z^n = \xi^{n-1}(x,t)$$

في $z^{(n)}$ و نكامل على المجموعة Q_τ نجد :

$$\int_{Q_\tau} {}^{R}D_t^{\alpha} z^{(n)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt - p_1 \int_{Q_\tau} {}^{R}D_x^{\beta} z^{(n)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt$$

$$-p_2 \int_{Q_\tau} {}^{R}_{x}D^{\beta} z^{(n)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt + a_0 \int_{Q_\tau} z^{(n)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt$$

$$= \int_{Q_\tau} \xi^{(n-1)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt$$

عند إستخدام التكامل بالتجزئة و بالإعتماد على الشرط الإبتدئي و شرط دريكلي نحصل على :

$$\cos\left(\tfrac{\alpha\pi}{2}\right) \left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}} z^{(n)} \right\|^2_{L^2(Q)} - p_1 \cos\left(\tfrac{\beta\pi}{2}\right) \left\| {}^{R}D_x^{\frac{\beta}{2}} z^{(n)} \right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$-p_2 \cos\left(\tfrac{\beta\pi}{2}\right) \left\| {}^{R}_{x}D^{\frac{\beta}{2}} z^{(n)} \right\|^2_{L^2(Q)} + a_0 \left\| z^{(n)} \right\|^2_{L^2(Q)} \tag{3.37}$$

$$= \int_{Q_\tau} \xi^{(n-1)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt$$

إستخدام متراجحة كوشي شوارتز على الطرف الثاني للمعادلة (37.3) نجد :

$$\int_{Q_\tau} \xi^{(n-1)}(x,t) \cdot z^{(n)}(x,t) dx dt$$

$$\leq \tfrac{1}{2\epsilon} \int_{Q_\tau} \left| \xi^{(n-1)}(x,t) \right|^2 dx dt + \tfrac{\epsilon}{2} \int_{Q_\tau} (z^{(n)}(x,t))^2 dx dt$$

$$\leq \tfrac{1}{2\epsilon} \int_{Q_\tau} \left| f(x,t,y^{(n)}, {}^{R}D_x^{\beta} y^{(n)}) - f(x,t,y^{(n-1)}, {}^{R}D_x^{\beta} y^{(n-1)}) \right|^2 dx dt \tag{3.38}$$

$$+\tfrac{\epsilon}{2} \int_{Q_\tau} (z^{(n)}(x,t))^2 dx dt$$

من المتراجحة (34.3) نحصل على :

$$\int_{Q_\tau} \xi^{(n-1)}(x,t)\cdot z^{(n)}(x,t)dxdt$$

$$\leq \frac{k^2}{2\epsilon}\int_{Q_\tau}\left|y^{(n)}-y^{(n-1)}\right|^2 dxdt+\frac{k^2}{2\epsilon}\int_{Q_\tau}\left|{}^R D_x^\beta y^{(n)}-{}^R D_x^\beta y^{(n-1)}\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{\epsilon}{2}\int_{Q_\tau}(z^{(n)}(x,t))^2 dxdt$$

(3.39)
$$\leq \frac{k^2}{2\epsilon}(\int_{Q_\tau}\left|z^{(n-1)}\right|^2 dxdt+\int_{Q_\tau}\left|{}^R D_x^\beta z^{(n-1)}\right|^2 dxdt)+\frac{\epsilon}{2}\int_{Q_\tau}(z^{(n)}(x,t))^2 dxdt$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}(\int_{Q_\tau}\left|z^{(n-1)}\right|^2 dxdt+\int_{Q_\tau}\left|{}^R D_x^\beta z^{(n-1)}\right|^2 dxdt)+\frac{\epsilon}{2}\int_{Q_\tau}(z^{(n)}(x,t))^2 dxdt$$

$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{k^2}{\epsilon}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left\|{}^R_x D^{\frac{\beta}{2}} z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{\epsilon}{2}\left\|(z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

وبالتالي :

$$\cos\frac{\alpha\pi}{2}\left\|{}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} z^n\right\|^2_{L^2(Q)}-(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left\|{}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} z^n\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+a_0\left\|z^n\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}$$

(3.40)
$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{k^2}{\epsilon}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left\|{}^R_x D^{\frac{\beta}{2}} z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{\epsilon}{2}\left\|(z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

وعليه

$$\cos\frac{\alpha\pi}{2}\left\|{}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} z^n\right\|^2_{L^2(Q)}-(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left\|{}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} z^n\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+(a_0-\frac{\epsilon}{2})\left\|z^n\right\|^2_{L^2(Q)}$$

(3.41)
$$\leq \frac{k^2}{\epsilon}\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{k^2}{\epsilon}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left\|{}^R_x D^{\frac{\beta}{2}} z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

أي أن

$$\left\|{}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} z^n\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|{}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} z^n\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z^n\right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \frac{k^2\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\epsilon\min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2},-(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2},(a_0-\frac{\epsilon}{2})\}}(\left\|{}^R_x D^{\frac{\beta}{2}} z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)})$$

$$\leq \frac{k^2\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\epsilon\min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2},-(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2},(a_0-\frac{\epsilon}{2})\}}(\left\|{}^C D_t^{\frac{\alpha}{2}} z(n-1)\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|{}^R_x D^{\frac{\beta}{2}} z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)})$$

(3.42)

نضع :

$$\theta = \max\{1, \frac{k^2 \cos(\frac{\beta\pi}{2})}{\epsilon \min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2}, -(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}, (a_0 - \frac{\epsilon}{2})}\}$$

في الأخير نجد :

$$\left\|z^{(n)}\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \theta \left\|z^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

سيكون هدفنا التالي هو دراسة تقارب المتتالية $y^{(n)}$ من أجل ذلك نقوم بدراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z^{(i)}$ تكون هذه السلسلة متقاربة من أجل $|\theta| \leq 1$ وعليه:

$$\left|\frac{k^2 \cos(\frac{\beta\pi}{2})}{\epsilon \min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2}, -(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}, (a_0 - \frac{\epsilon}{2})\}}\right| \leq 1$$

و بالتالي :

$$\sqrt{\frac{k^2 \cos(\frac{\beta\pi}{2})}{\epsilon \min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2}, -(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}, (a_0 - \frac{\epsilon}{2})\}}} \leq 1$$

و منه

$$k\sqrt{\frac{1}{\epsilon \min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2}, -(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}, (a_0 - \frac{\epsilon}{2})\}}} \leq 1$$

في الأخير نجد :

$$k \leq \sqrt{\epsilon \min\{\cos\frac{\alpha\pi}{2}, -(p_1+p_2)\cos\frac{\beta\pi}{2}, (a_0 - \frac{\epsilon}{2})\}}$$

من جهة أخرى نعلم أن :

$$z^{(n)}(x,t) = y^{(n+1)}(x,t) - y^{(n)}(x,t)$$

وكذلك :

$$y^{(0)}(x,t) = 0$$

وبالتالي نجد :

$$\sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-1}(y^{(i+1)} - y^{(i)}$$
$$= y^{(1)} - y^{(0)} + y^{(2)} - y^{(1)} + y^{(3)} - y^{(2)} + ... + y^{(n)} - y^{(n-1)}$$
$$= y^{(n)}$$

ومنه

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)}$$

متقاربة نحو الدالة $y \in L^2(Q)$

بعد إثبات تقارب $y^{(n)}$ في المجموعة $L^2(Q)$ باقي إثبات النهاية :

$$\lim_{x \to 0} y^{(n)}(x,t) = y(x,t)$$

هو حل للمسألة (35.3) .

من أجل الحصول على هذه النتيجة، سيكون من الضروري التأكد من أن y تحقق:

$$A(y,v) = \int_{Q_\tau} f(x,t,y, {}^R D_x^\beta y(x,t)) \cdot v(x,t) dxdt \quad v \in O \tag{3.43}$$

بحيث

$$O = \{v \in C^1(Q) : v(-1,t) = v(1,t) = 0, \forall t \in (0,T)\}$$

و عليه نكتب (43.3) على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} A(y^{(n)},v) = \int_{Q_\tau} {}^R D_t^\alpha y^{(n)}(x,t) \cdot v(x,t) dxdt - p_1 \int_{Q_\tau} {}^R D_x^\beta y^{(n)}(x,t) \cdot v(x,t) dxdt \\ -p_2 \int_{Q_\tau} {}_x^R D^\beta y^{(n)}(x,t) \cdot v(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} y^{(n)}(x,t) \cdot v(x,t) dxdt \end{aligned} \tag{3.44}$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned} A(y^{(n)},v) = \int_{Q_\tau} {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} y^{(n)}(x,t) \cdot {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) dxdt - p_1 \int_{Q_\tau} {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} y^{(n)}(x,t) \cdot {}_x^R D^{\frac{\beta}{2}} v(x,t) dxdt \\ -p_2 \int_{Q_\tau} {}_x^R D^{\frac{\beta}{2}} y^{(n)}(x,t) \cdot {}^R D_x^{\frac{\beta}{2}} v(x,t) dxdt + \int_{Q_\tau} y^{(n)} \cdot v(x,t) dxdt \end{aligned} \tag{3.45}$$

بما أن A خطي نجد :

$$A(y^{(n)},v) = A(y^{(n)} - y, v) + A(y,v)$$

و بالتالي :

$$A(y^{(n)},v)=\int_{Q_\tau}{}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}(y^{(n)}-y)\cdot{}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}v(x,t)dxdt-p_1\int_{Q_\tau}{}^{R}D_x^{\frac{\beta}{2}}(y^{(n)}-y)\cdot{}_x^{R}D^{\frac{\beta}{2}}v(x,t)dxdt$$

$$-p_2\int_{Q_\tau}{}_x^{R}D^{\frac{\beta}{2}}(y^{(n)}-y)\cdot{}^{R}D_x^{\frac{\beta}{2}}v(x,t)dxdt+\int_{Q_\tau}(y^{(n)})-y)\cdot v(x,t)dxdt$$

$$\int_{Q_\tau}{}^{R}D_t^{\alpha}y\cdot v(x,t)dxdt-p_1\int_{Q_\tau}{}^{R}D_x^{\beta}y\cdot v(x,t)dxdt$$

$$-p_2\int_{Q_\tau}{}_x^{R}D^{\beta}y\cdot v(x,t)dxdt+\int_{Q_\tau}y\cdot v(x,t)dxdt \tag{3.46}$$

باستخدام متراجحة كوشي شوارتز من أجل $A(y^{(n)}-y,v)$ نجد :

$$A(y^{(n)}-y,v)\leq\|v\|_{L^(Q)}\left\|(y^{(n)}-y)_t\right\|_{L^(Q)}+\|v\|_{L^(Q)}\left\|(y^{(n)}-y)_x\right\|_{L^(Q)}$$

من جهة أخرى نعلم أن :

$$y^{(n)}\quad\longrightarrow y\quad\in V$$

أي أن :

$$\begin{aligned}y^{(n)}&\longrightarrow y&&\in L^2(Q)\\ y_t^{(n)}&\longrightarrow y_t&&\in L^2(Q)\\ y_x^{(n)}&\longrightarrow y_x&&\in L^2(Q)\end{aligned}$$

الآن من أجل $n\longrightarrow+\infty\leftarrow+\infty$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}A(y^{(n)}-y,v)=0$$

بما أن A خطي نجد :

$$\lim_{n\to+\infty}y^{(n)}=y$$

الفصل 4

دراسة وجود ووحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة تكافئية كسرية غير خطية مع شروط حدية من نوع تكامل

4.1 مقدمة

نهدف في هذا الفصل لإثباث وجود و وحدانية حل ضعيف لمسألة المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية مكافئ للإنتشار مع شروط التكاملية حيث تنقسم هذه الدراسة إلى جزئين:
الجزء الأول: دراسة وجود ووحدانية المسألة الخطية بإستعمال متراجحة الطاقة .
الجزء الثاني: دراسة المشكلة غير الخطية بإستعمال طريقة النقطة الصامدة مع وجود الشروط التكاملية .

4.2 صياغة المشكلة

$$I = (0;T) \quad \text{و} \quad \Omega = (0;1) \text{ بحيث } 0 \prec T \prec +\infty .$$

نعتبر المسألة غير الخطية ذات المشتقات الكسرية كالتالي :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + bu(x,t) = f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}) \quad \forall (x,t) \in Q \\ u(x,0) = 0 \qquad\qquad \forall x \in (0,1), \\ \int_{\Omega} x^k u(x,t)dx = 0 \qquad \forall t \in (0,T) \text{ and } \ k = \{0,1\} \end{cases} \tag{4.1}$$

ليكن $Q = \Omega \times I$ بحيث Ω و I فترتين مفتوحتين من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ و لدينا أيضا a, b و f دوال معرفة جيدا .

(A_1) : $0 \prec a_0 \leq a(x,t) \leq a_1$ و $a_2 \leq \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2} \leq a_3$. $\forall (x,t) \in Q$

(A_2) الشرط التوافقي :

$$\int_\Omega x^k u(x,t)dx \;=\; 0 \qquad \forall t \in (0,T) \text{ بحيث } k=\{0,1\}$$

4.3 دارسة المسالة الخطية

سنقوم في هذا الجزء بإثباث وجود ووحدانية الحل للمسألة الخطية عن طريق تقدير مسبق للحل باستخدام طريقة متراجحة الطاقة وكذلك إثباث أن ملاصقة صورة المؤثر المدروس مساوية لفضاء الوصول .

4.3.1 المسألة الخطية

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + bu(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q \\ u(x,0) = 0 \qquad \forall x \in (0,1), \\ \int_\Omega x^k u(x,t)dx = 0 \qquad \forall t \in (0,T) \text{ and } \; k=\{0,1\} \end{cases} \tag{4.2}$$

مشكلة الإنتشار التي يتم دراستها في هده المسألة تكتب من الشكل التالي :

$$\mathcal{L}u = {}^C D_t^\alpha u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + bu(x,t) = f(x,t) \tag{4.3}$$

مع الشرط الإبتدائي :

$$lu = u(x,0) = 0 \quad \forall x \in (0,1) \tag{4.4}$$

و الشرط التكاملي :

$$\int_\Omega x^k u(x,t)dx = 0 \quad \forall t \in (0,T), \quad k=\{0,1\} \tag{4.5}$$

حيث α تحقق الفرضية التالية :

$$0 \le \alpha \le 1, \quad \forall (x,t) \in \bar{Q}$$

4.3.2 التقدير المسبق للحل

سندرس في هذا الفصل وجود حل المسألة (3.4) – (5.4) حيث الكتابة المجردة للمسألة كالتالي : $Lu = F$ نضع $L = (\mathcal{L}, l)$ و $F = (f, u_0)$ ونعرف المؤثر المرافق للمسألة (3.4) – (5.4) ب L من فضاء بناخ E نحو الفضاء الهلبرتي F و المرفق بالدالة $u \in D(L)$.

وليكن فضاء بناخ يتكون من الدوال $u(x,t)$ و المزود بالنظيم :

$$\|u\|_E^2 = \|\Im_x u\|_{L^2(Q)}^2 + \|u\|_{L^2(Q)}^2 . \tag{4.6}$$

الفضاء الهيلبرتي F يتكون من الدوال ذات القيم الشعاعية مزود بالنظيم :

$$\|\mathcal{L}u\|_F^2 = \|f\|_{L(Q)^2}^2 + \int_0^T I^\alpha \|f\|_{L(0,1)^2}^2 \, dt + \|\Im_x \varphi\|_{L(0,1)^2}^2 \tag{4.7}$$

نظرية 1

من أجل كل دالة $u \in D(L)$ يوجد ثابت حقيقي k مستقل عن الدالة u يحقق :

$$\|\Im_x u\|_{L^2(Q)}^2 + \|u\|_{L^2(Q)}^2 \leq k \left(\|f\|_{L(Q)^2}^2 + \int_0^T I^\alpha \|f\|_{L(0,1)^2}^2 \, dt + \|\Im_x \varphi\|_{L(0,1)^2}^2 \right) \tag{4.8}$$

ليكن $D(L)$ مجموعة تعريف المؤثر L معرف بالشكل التالي :

$$D(L) = \{u \in L^2(Q) \ / \ \Im_x u \in L^2(Q)\}.$$

بتحقيق الشرطين (A_1) و (A_2).

البرهان

باستخدم الجداء السلمي في الفضاء $L^2(Q)$ بين المعادلة (3.4) و الدالة :

$$Mu = \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u(\eta, t) \, d\eta \right) d\zeta,$$

بحيث :

$$Q^\tau = \Omega \times (0, T)$$

نجد :

$$(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} = \left({}^cD_t^\alpha u, \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}), \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right)_{L^2(Q)}$$

$$+ \left(bu(x,t), \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right)_{L^2(Q)} = \left(\tilde{f}, \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right)_{L^2(Q)} \tag{4.9}$$

نستعمل التكامل بالتجزئة لطرف الأول من المعادلة (9.4) نحصل على :

$$\begin{aligned}
({}^cD_t^\alpha u, Mu)_{L^2(Q)} &= \int_Q \left({}^cD_t^\alpha u\left(x,t\right). \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right) dxdt \\
&= \int_{Q^\tau} \left({}^cD_t^\alpha \int_0^x u\left(\zeta,t\right) d\zeta. \int_0^1 u\left(\zeta,t\right) d\zeta\right) dxdt \\
&= \int_{Q^\tau} \left({}^cD_t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u\left(\zeta,t\right) d\zeta. {}^cD_t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u\left(\zeta,t\right) d\zeta\right) dxdt \\
&= \left\| {}^cD_t^{\frac{\alpha}{2}} \Im_x u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

و

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial x}(a\frac{\partial u}{\partial x}), Mu\right)_{L^2(Q)} &= -\int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right) dxdt \\
&= \int_{Q^\tau} \left(\left(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \left(\int_0^x u\left(\zeta,t\right) d\zeta\right)\right) dxdt \\
&= \int_{Q^\tau} a\left(x,t\right) \left(u(x,t)\right)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2}\right) \left(\int_0^x u\left(\zeta,t\right) d\zeta\right) dxdt \\
&\geq a_0 \left\|u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} - \frac{a_3}{2} \left\|\Im_x u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

و كذلك

$$
\begin{aligned}
(bu, Mu)_{L(Q)} &= \int_{Q^\tau} \left(b\,(x,t)\, u\,(x,t) \int_x^1 \left(\int_0 u\,(\eta,t)\, d\eta \right) d\zeta \right) dxdt \\
&\geq b \int_{Q^\tau} \left(u\,(x,t) \int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\,(\eta,t)\, d\eta \right) d\zeta \right) dxdt \\
&\geq b \int_{Q^\tau} \left(\int_0^1 u\,(\zeta,t)\, d\zeta \right) \left(\int_0^1 u\,(\zeta,t)\, d\zeta \right) dxdt \qquad (4.12) \\
&\geq b \int_{Q^\tau} \left(\Im_x u(x,t) \right)^2 dxdt \\
&\geq b \left\| \Im_x u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}
\end{aligned}
$$

نعوض النتيجة (12.4),(11.4) و (10.4) في المعادلة (9.4) نحصل على المتراجحة التالية :

$$
\begin{aligned}
&\left\| {}^c D_t^{\frac{\alpha}{2}} \Im_x u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + a_0 \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} - \tfrac{a_3}{2} \left\| \Im_x u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + b \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&\leq \left(\tilde{f}, Mu \right)
\end{aligned} \qquad (4.13)
$$

لتقدير الطرف الأخر من المتراجحة (13.4)نعتمد على متراجحة كوشي شوارتز ل ϵ :

$$
|ab| \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2} \qquad (4.14)
$$

نتحصل على :

$$
\begin{aligned}
&\left\| {}^c D_t^{\frac{\alpha}{2}} \Im_x u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + a_0 \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} - \frac{a_3}{2} \left\| \Im_x u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + b_0 \left\| u \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
&\leq \int_{Q^\tau} f(x,t) \left(\int_x^1 \left(\int_0^\varsigma u\,(\eta,t)\, d\eta \right) d\zeta \right) dxdt \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{Q^\tau} \left(\int_0^x u(\zeta,t) d\zeta \right)^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{Q^\tau} \left(\int_0^x f(\zeta,t) d\zeta \right)^2 dxdt
\end{aligned}
$$

و عليه :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q^\tau}\left(\int_0^x u(\zeta,t)d\zeta\right)^2 dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{Q^\tau}\left(\int_0^x f(\zeta,t)d\zeta\right)^2 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q^\tau}\left(\Im_x u\left(x,t\right)\right)^2 dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{Q^\tau}\left(\Im_x f\left(x,t\right)\right)^2 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_{Q^\tau}\left(u(x,t)\right)^2 dxdt+\frac{\varepsilon}{4}\int_{Q^\tau}\left(f(x,t)\right)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon}\left\|u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\frac{\varepsilon}{4}\left\|f\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}$$

و بالتالي :

$$\left\|{}^cD_t^{\frac{\alpha}{2}}\Im_x u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left(a_0+b-\frac{1}{4\varepsilon}\right)\left\|u\right\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}}\leq\frac{\varepsilon}{4}\left\|f\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}$$

و منه نجد :

$$\left\|{}^cD_t^{\frac{\alpha}{2}}\Im_x u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left\|u\right\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}}\leq\frac{\varepsilon}{4\min\left\{1,\left(a_0+b-\frac{1}{4\varepsilon}\right)\right\}}\left\|f\right\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}}$$

نضع :

$$C=\frac{\varepsilon}{4\min\left\{1,\left(a_0+b-\frac{1}{4\varepsilon}\right)\right\}}$$

و نعلم أن :

$$I^\alpha\left({}^cD_t^\alpha u\left(x,t\right)\right)=u\left(x,t\right)+\varphi\left(x\right)$$

و منه نتحصل على :

$$\left\|\Im_x u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left\|u\right\|^2_{L^2_{(0,1)}}\leq CI^\alpha\left\|f\right\|^2_{L^2_{(0,1)}}+\left\|\Im_x\varphi\right\|^2_{L^2(0,1)}$$

أي أن :

$$\left\|\Im_x u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\leq CI^\alpha\left\|f\right\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}}+\left\|\Im_x\varphi\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\tag{4.27}$$

و من جهة أخرى لدينا :

$$\|u\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} \leq C \|f\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} \tag{4.28}$$

حيث :

$$C_1 = \max\{1, C\}$$

من المعدلة (27.4)و (28.4) نجد :

$$\|\Im_x u\|^2_{L^2_{(0,1)}} + \|u\|^2_{L^2_{(0,1)}} \leq C_1 \left(I^\alpha \|f\|^2_{L(0,1)^2} + \|f\|^2_{L^2_{(0,1)}} + \|\Im_x \varphi\|^2_{L^2(0,1)} \right) \tag{4.29}$$

بالمكاملة على المجال $(0,T)$ نجد :

$$\|\Im_x u\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} + \|u\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} \leq (C_1 \max\{1,T\}) \left(\int_0^T I^\alpha \|f\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} dt + \|f\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} + \|\Im_x \varphi\|^2_{L^2_{(Q^\tau)}} \right)$$

نضع :

$$k = \quad (C_1 \max\{1,T\})^{\frac{1}{2}}$$

و منه

$$\|u\|_E \leq k \|Lu\|_F \tag{4.30}$$

لتكن $R(L)$ هي صورة المؤثر L,ليس لدينا أي معلومات حول $R(L)$ سوى $R(L) \subset F$لهذا يجب علينا تمديد المؤثر L بستعمال المتراجحة (30.4) في الفضاء F أولا نتحقق من القضية التالية :

قضية 1

المؤثر $L : E \longrightarrow F$ قابل للغلق

البرهان:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(L)$ متتالية عناصر بحيث :

$$u_n \longrightarrow 0 \in E$$

و

$$Lu_n \longrightarrow (\widetilde{f}, 0) \in F \tag{4.31}$$

لنثبت أن :

$$f \equiv 0$$

تقارب u_n نحو 0 هذا يستلزم :

$$u_n \longrightarrow 0 \in D^{'}(Q_T)$$

من استمرارية الاشتقاق الكسري ، حسب القضية 1 و المشتقة من الدرجة الاولى (حالة خاصة للمشتقة الكسرية) من $D^{'}(Q_T)$ في $D^{'}(Q_T)$. إذن (31.4) تستلزم :

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow 0 \in D^{'}(Q_T) \tag{4.32}$$

بالإضافة إلى ذلك، فأن تقارب $\mathcal{L}u_n$ نحو f في $L^2(Q_T)$ تستلزم :

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow f \in D^{'}(Q_T) \tag{4.33}$$

و بما أن النهاية إذا وجدت فهي وحيدة في $D^{'}(Q_T)$ نستنتج من (32.4)و (33.4) نجد :

$$f \equiv 0$$

إذن المؤثر L قابل للغلق.

تعريف 1

ليكن المؤثر L قابل للغلق و معرف على المجموعة $D(\overline{L})$ ومنه حل المعادلة :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}$$

هو حل قوي للمسألة (3.4) − (5.4) .

نتيجة 1

ليكن المؤثر المغلق $\overline{L}$ المعرف على المجموعة $R(\overline{L})$ مغلق في فضاء الوصول F و $\overline{R(L)}$ هي المجموعة المغلقة ل $R(L)$,ومنه :

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$$

البرهان

1. الإحتواء الأول :

$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$.

ليكن $z \in \overline{R(L)}$ إذن توجد متتالية كوشي $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من F عناصرها من المجموعة $R(L)$ بحيث :

$$\lim_{n \xrightarrow{+} \infty} z_n = z$$

إذن توجد متتالية عناصر $u_n \in D(L)$ بحيث :

$$Lu_n = z_n$$

من المتراجحة (8.4) نتحصل على :

لما $p, q \longrightarrow +\infty$ نجد :

$$\|u_p - u_q\|_E \leq \phi \|Lu_p - Lu_q\|_F \longrightarrow 0$$

عندما يؤول p, q إلى اللانهاية ، يمكن استنتاج متتالية كوشي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ بحيث E فضاء بناخ ، وبالتالي يوجد $u \in E$ بحيث :$\lim_{n \xrightarrow{+} \infty} u_n = u$ من تعريف $\overline{L}$ إذا كان :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} Lu_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} z_n = z$$

ومنه

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{L}u_n = z$$

بما أن $\overline{L}$ مغلق إذن :

$$\overline{L}u = z \quad ; u \in D(\overline{L})$$

و بذلك $z \in R(\overline{L})$ إذن :

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$$

. في هذه الحالة نستنتج أن $R(\overline{L})$ مغلق لأنه فضاء تام (كل فضاء جزئي تام من الفضاء النتري(ليس بالضرورة تام) مغلق) .

2. الإحتواء الثاني :

$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$

ليكن $z \in R(\overline{L})$ إذن توجد متتالية كوشي $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ عناصرها من المجموعة $R(\overline{L})$ بحيث :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z$$

أي $z \in R(\overline{L})$ لأن $R(\overline{L})$ هي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء التام F إذن $R(\overline{L})$ فضاء جزئي تام .

إذن يوجد متتالة مطابقة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(\overline{L})$ بحيث:

من المتراجحة (8.4) نتحصل على :

لما $p, q \longrightarrow +\infty$ نجد :

$$\|u_p - u_q\|_E \leq \phi \|Lu_p - Lu_q\|_F \longrightarrow 0$$

عندما يؤول p, q إلى اللانهاية ، يمكن استنتاج متتالية كوشي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ بحيث E فضاء بناخ ، وبالتالي يوجد $u \in E$بحيث :$\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ من تعريف $\overline{L}$.

مرة أخرى توجد متتالة مطابقة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(L)$ بحيث :

$$Lu_n = \overline{L}u_n \quad \text{في} \quad R(L) \quad ;\forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} Lu_n = z$$

بالتالي ، $z \in \overline{R(L)}$ وعليه :

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$$

4.3.3 دراسة وجود حل المسألة الخطية

لإثبات وجود الحلول ،علينا إثبات أن $R(L)$كثيف في الفضاء F هدا يعني إثبات أن معامد صورة المؤثر يساوي الصفر ،من أجل ذلك نحتاج للنظرية التالية

نظرية 2

إذا تحققت الفرضية A_1من أجل كل $\mathcal{F} = (f, 0) \in F$, هذا يستلزم أنه يوجد حل قوى $u = \overline{L}^{-1} = \overline{L^{-1}}$ وكذلك من اجل $w \in L^2(Q)$ومن أجل كل $u \in D(L)$

برهان

لدينا

$$(Lu, W)_F = \int_Q \mathcal{L}u.wdxdt$$

بحيث:

$$W = (w, 0)$$

إدا كان $w \in L^2(Q)$ و من أجل كل $u \in D_0(L) = \{u/u \in D(L) : \mathcal{L}u = 0\}$ نحصل على :

$$\int_Q \mathcal{L}u.wdxdt = 0$$

نضع $u = w$ من التقدر المسبق للحل نجد :

$$\left\| {}^cD_t^{\frac{\alpha}{2}} \Im_x u \right\|^2_{L^2(0,1)} + \|u\|^2_{L^2_{(0,1)}} = 0$$

وعليه

$$\|u\|_E \leq 0 \quad \Rightarrow u = 0$$

و منه : $u = w = 0$

نتيجة 2(إثباث وحدانية الحل)

المتراجحة $\|u\|_E \leq \phi \|\mathcal{F}\|_F$ تعطي وحدانية الحل

البرهان

لنفرض أن u_1 و u_2 حلين للمعادلة إذن :

$$\begin{cases} Lu_1 = \mathcal{F} \\ Lu_2 = \mathcal{F} \end{cases} \tag{4.34}$$
$$\Rightarrow L(u_1 - u_2) = 0$$

ومنه :

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq \phi \|0\|_F$$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_E \leq 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

وعليه المسألة تملك حل وحيد .

4.4 دراسة الحل الضعيف للمسألة غير الخطية

سندرس في هذا القسم وجود و وحدانية حل المسألة غير الخطية التالية :

$$(P_2) \quad \begin{cases} {}^cD_t^\alpha u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + bu(x,t) = f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}), \forall (x,t) \in Q \\ u(x,0) = 0 \qquad \forall x \in (-1,1), \\ \int_\Omega x^k u(x,t)dx = 0 \qquad \forall t \in (0,T) \text{ and } k = \{0,1\} \end{cases}$$

لتكن الدالة f تحقق شروط ليبشتيز ،أي أنه يوجد ثابت حقيقي موجب k بحيث :

$$\left\| f(x,t,u_1,\frac{\partial u_1}{\partial x}) - f(x,t,u_2,\frac{\partial u_2}{\partial x}) \right\|_{L^2(Q)} \leq k(\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\|_{L^2(Q)}) \quad (4.35)$$

سنثبت في هده المرحلة من البحث وحدانية الحل الضعيف للمسألة (P_2) .
أولاً : نحدد مفهوم الحل الذي ندرسه ، من أجل $u \in \overline{C^1}(Q)$ هو فضاء ذالي بحيث $u \in C^1(Q)$.
سنقوم بحساب التكامل من أجل $u, v \in \overline{C^1}(Q)$

$$\int_Q (f \Im_x^* v) dxdt$$

بحيث

$$\int_Q x^k u(x,t)dx = 0 \quad \forall k = \{0,1\}.$$

بستخدام هذا الشرط نجد

.

$$\int_Q ({}^cD_t^\alpha u \cdot \Im_x^* v)dxdt = -\int_Q (v \cdot {}^c D_t^\alpha \Im_x^* u)dxdt$$

- $$-\int_Q (\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})\cdot \Im_x^* v)dxdt = \int_Q (v\cdot a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})dxdt$$

- $$b\int_Q (u\cdot \Im_x^* v)dxdt = -\int_Q (v\cdot \Im_x^* u)dxdt$$

نتحصل على :

$$A(u,v) = -\int_Q (v\cdot {}^c D_t^\alpha \Im_x^* u)dxdt + \int_Q (v\cdot a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})dxdt - \int_Q (v\cdot \Im_x^* u)dxdt.$$

الحل يعتمد على بناء متتالية تراجعية $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدها الأول $u^0 = 0$ و تولد حتى الحد u^{n-1} من أجل $n = 1, 2, 3, ...$
نقوم بحل المسألة التالية :

$$(4.36)\quad \begin{cases} {}^c D_t^\alpha u^{(n)}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)\frac{\partial u^{(n)}(x,t)}{\partial x}) + b(x,t)u^{(n)}(x,t) = f(x,t,u^{(n-1)},\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x}) \\ u^{(n)}(x.0) = 0 \\ \int_\Omega x^k u^{(n)}(x,t)dx = 0 \qquad \forall t\in(0,T) \text{ و } k = \{0,1\} \end{cases},$$

من أجل n ثابت ، وبإستخدام النتائج المحصل عليها في المسألة (P_2) نستنتج أن المسألة (36.4) تقبل الحل الوحيد $u^{(n)}(x,t)$
نضع

$$z^{(n)}(x,t) = u^{(n+1)}(x,t) - u^{(n)}(x,t)$$

نحصل على مسألة خطية جديدة:

$$(4.37)\quad \begin{cases} {}^c D_t^\alpha z^{(n)} - \left(a(x,t)\, z_x^{(n)}\right)_x + b(x,t)z^{(n)} = p^{(n-1)}(x,t) \\ z^{(n)}(x.0) = 0 \\ \int_\Omega x^k z^{(n)}(x,t)dx = 0 \qquad \forall t\in(0,T) \quad , k = \{0,1\}. \end{cases}$$

بحيث

$$(4.38)\qquad p^{(n-1)}(x,t) = f\left(x,t,u^{(n)},\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right) - f\left(x,t,u^{(n-1)},\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x}\right).$$

مع الشرط

$$(4.39)\qquad z^{(n)}(x.0) = 0 \int_\Omega x^k z^{(n)}(x,t)dx = 0 \qquad \forall t\in(0,T) \quad , k = \{0,1\}.$$

توطئة :

نفرض أن (38.4)محققة ،إذا نجد أن المسألة (37.4) تحقق التقدير المسبق التالي :

$$\left\|Z^{(n)}\right\|_{L^2(0,1,H^1(0,1))} \leq \lambda \left\|Z^{(n-1)}\right\|_{L^2(0,1,H^1(0,1))}$$

بحيث :

$$\lambda = \sqrt{\frac{5\phi^2}{2\varepsilon}}$$

البرهان

نضرب المعادلة التالية :

$${}^{c}D_t^{\alpha} z^{(n)} - \left(a\left(x,t\right) z_x^{(n)}\right)_x + b(x,t) z^{(n)} = p^{(n-1)}(x,t)$$

في

$$\int_x^1 \left(\int_0^{\varsigma} z^n\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta$$

و نكامل على المجموعة Q_τ نجد :

$$\int\limits_Q \left(({}^{R}D_t^{\alpha} z^{(n)}(x,t) \cdot \int_x^1 \left(\int_0^{\varsigma} z^n\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right) dxdt$$

$$- \int\limits_Q (\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x,t\right) \frac{\partial z^{(n)}\left(x,t\right)}{\partial x}\right) \cdot \int_x^1 \left(\int_0^{\varsigma} z^n\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta) dxdt$$

$$+ \int\limits_Q bz^{(n)}(x,t) \cdot \int_x^1 \left(\int_0^{\varsigma} z^n\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta dxdt$$

$$= \int\limits_Q \left(p^{(n-1)}(x,t) \cdot \int_x^1 \left(\int_0^{\varsigma} z^n\left(\eta,t\right) d\eta\right) d\zeta\right) dxdt$$

عند إستخدام التكامل بالتجزئة و بالإعتماد على الشرط الإبتدئي و شرط (38.4) نحصل على :

$$\int_{Q^\tau}^{c}\left({}^{c}D_t^{\alpha}\int_0^x z^n(\zeta,t)\,d\zeta\right)^2 dxdt+a_1\int_{Q^\tau}\left(z^n(x,t)\right)^2 dxdt$$

$$\leq \int\limits_{Q^\tau}\left(\frac{a_3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{b}{2}\right)\left(z^n(x,t)\right)^2 dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{Q^\tau}\left(p^{(n-1)}\right)^2 dxdt$$

من جهة أخرى ، مؤثر المسالة (38.4) يعطى بالشكل :

$$ {}^{c}D_t^{\alpha}\left(\Im_x^* Z^n\right)+a(x,t)\frac{\partial Z^{(n)}(x,t)}{\partial x}=\Im_x^*\left(p^{(n-1)}\right) \tag{4.46}$$

نضرب المعادلة (37.4) في $\frac{\partial Z^n}{\partial x}$ و نكامل على المجموعة $\Omega^\tau=(0,1)\times(0,\tau)$ بحيث $0\leq\tau\leq T$ نجد :

$$\int_{Q^\tau}\left({}^{c}D_t^{\alpha}Z^n\right)\cdot Z^n dxdt+\int_{Q^\tau}a(x,t)\left(\frac{\partial Z^{(n)}(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt=\int_{Q^\tau}\Im_x^*\left(p^{(n-1)}(x,t)\right)\frac{\partial Z^n}{\partial x}dxdt \tag{4.47}$$

ستخدام متراجحة كوشي شوارتز عل الطرف الثاني للمعادلة (47.4) نجد :

$$\begin{array}{l}\int_{Q^\tau}\left({}^{c}D_t^{\frac{\alpha}{2}}Z^n\right)^2 dxdt+\int_{Q^\tau}a(x,t)\left(\frac{\partial Z^{(n)}(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt\\ \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q^\tau}\Im_x^*\left(p^{(n-1)}(x,t)\right)^2 dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{Q^\tau}\left(\frac{\partial Z^n}{\partial x}\right)^2 dxdt\end{array} \tag{4.48}$$

بجمع المتراجحة (47.4)و (48.4) نجد :

$$\begin{aligned}&\int_{Q^\tau}^{c}\left({}^{c}D_t^{\alpha}\int_0^x z^n(\zeta,t)\,d\zeta\right)^2 dxdt+\int_{Q^\tau}\left({}^{c}D_t^{\frac{\alpha}{2}}Z^n\right)^2 dxdt\\ &+\ a_1\int_{Q^\tau}\left(z^n(x,t)\right)^2 dxdt+\int_{Q^\tau}a(x,t)\left(\frac{\partial Z^{(n)}(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt\\ &\leq\ \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{Q^\tau}\left(p^{(n-1)}\right)^2 dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q^\tau}\Im_x^*\left(p^{(n-1)}(x,t)\right)^2 dxdt\\ &+\ \int\limits_{Q^\tau}\left(\frac{a_3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{b}{2}\right)\left(z^n(x,t)\right)^2 dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{Q^\tau}\left(\frac{\partial Z^n}{\partial x}\right)^2 dxdt\end{aligned}$$

و بالتالي

$$\left(a(x,t)-\frac{a_3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{b}{2}\right)\left\{\int_{Q^\tau}\left(\left(z^n(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial Z^{(n)}(x,t)}{\partial x}\right)^2\right)dxdt\right\}$$
$$\leq \frac{1}{2\varepsilon}\left(\int\limits_{Q^\tau}\left(p^{(n-1)}\right)^2dxdt+\int_{Q^\tau}\Im_x^*\left(p^{(n-1)}(x,t)\right)^2dxdt\right)$$

و منه نحصل على التقدير المسبق التالي :

$$\begin{aligned}\left\|\Im_x^*p^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(0,1)} &\leq \frac{1}{4}(1-0)^2\left\|p^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(0,1)}\\ &\leq \frac{1}{4}\left\|p^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q^\tau}\left(p^{(n-1)}\right)^2dxdt\\ &\leq \phi^2\int\limits_{Q^\tau}\left(\left|z^{(n-1)}(x,t)\right|+\left|\frac{\partial Z^{(n-1)}(x,t)}{\partial x}\right|\right)^2dxdt\\ &\leq \phi^2\int_0^\tau\left\|z^{(n-1)}(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n-1)}(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(0,1)}dtdx\end{aligned}$$

و عليه

$$\left(a(x,t)-\frac{a_3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{b}{2}\right)\int_0^\tau\left\{\left\|z^{(n)}(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n)}(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(0,1)}\right\}dtdx$$

$$\leq \frac{5\phi^2}{2\varepsilon}\int_0^\tau\left\{\left\|z^{(n-1)}(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n-1)}(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(0,1)}\right\}dtdx$$

وبالتالي :

$$a(x,t)-\frac{a_3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{b}{2}\geq 0$$

في الاخير نحصل على:

$$\int_0^\tau\left\{\left\|z^{(n)}(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n)}(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(0,1)}\right\}dt$$
$$\leq \frac{5\phi^2}{2\varepsilon}\int_0^\tau\left\{\left\|z^{(n-1)}(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(0,1)}+\left\|\frac{\partial Z^{(n-1)}(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(0,1)}\right\}dtdx$$

و منه

$$\left\|Z^{(n)}\right\|_V^2 \leq \frac{5\phi^2}{2\varepsilon}\left\|Z^{(n-1)}\right\|_V^2$$

بحيث :

$$V = \{u : u \in L^2\left(0,1,H^1\left(0,1\right)\right)\}$$

سيكون هدفنا التالي هو دراسة تقارب المتتالية $u^{(n)}$ من أجل ذلك نقوم بدراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z^{(i)}$ تكون هده السلسلة متقاربة من أجل $|C| \leq 1$ وعليه:

$$\left|\frac{5\phi^2}{2\varepsilon}\right| \leq 1$$

و منه

$$\phi = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{5}}$$

و

$$Z^{(n)}(x,t) = u^{(n+1)}(x,t) - u^n(x,t)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-1}(u^{(i+1)} - u^{(i)}$$

$$= u^{(1)} - u^{(0)} + u^{(2)} - u^{(1)} + u^{(3)} - u^{(2)} + ... + u^{(n)} - u^{(n-1)}$$

$$= u^{(n)}$$

ومنه

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)}$$

خلاصة عامة

في هذا العمل، قمنا بمعالجة مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية المكافئة غير الخطية بشروط حدية كلاسيكية و شروط حدية من نوع دريكلي في الفصل الثاني و الثالث و اعتمدنا على الشروط في الفصل الرابع تكامل .

أولاً من خلال تطبيق وتطوير طريقة متراجحة الطاقة لمسألة معادلة تفاضلية جزئية كسرية خطية مع شرط ، حدي من نوع ديركلي الكلاسيكي و من النوع التكاملي من الصنف الثاني في الجزء الاول من الفصول الثلاثة تحصلنا على وجود و وحدانية الحل القوي .

ثم أخيرا ، لدراسة وجود و وحدانية حل ضعيف لمسألة معادلة كسرية غير خطية مع وجود شرط حدي من نوع دركلي تكامل من الصنف الثاني أين تمت إضافة الحد غير الخطي $f(x,t,u)$ في الفصل الثاني أما في الفصل الثالث الحد الغير خطي كان من الشكل $f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})$ أما في الفصل الرابع فكان من الشكل $f(x,t,v,{}^{R}D_{x}^{\beta}v)$ إلى الجانب الأيمن من المعادلة المدروسة استطعنا تطبيق طريقة تكرارية تعتمد على نتائج المسالة الخطية للحصول على مخطط متقارب ينتج متتالية متقاربة نحو الحل ضعيف.

من المهم أن نشير أنه لا توجد حتى الآن ، بالنسبة للمسائل غي الخطية ، نظرية أو طريقة عامة مماثلة لتلك الخاصة بالمسائل الكلاسيكية في الدراسة بشكل عام .

ويرجع ذلك إلى الحداثة لهذا الموضوع من ،حية و التعقيد الذي ينتج عن وجود التكامل في الشروط الحدية. و من جهة أخرى ، حيث تتطلب كل مسألة معالجة خاصة ودراسة إستثنائية ،مما يؤكد على أهمية الموضوع اذي يتم تناوله في هذه الأطروحة.

يشار إلى أن العديد من المسائل المثيرة للاهتمام تظل مفتوحة لإثراء هذه الدراسة بشكل أوسع ، وننقل هنا بعضا منها :

1. إن دراسة حلول مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية ذات الشروط الحدية غير الكلاسيكية خاصة من نوع التكامل ، صعبة ومعقدة بشكل واضح ،والتي تتطلب بالتأكد تطويرا عميقا للغاية للطرق والتقنيات

الكلاسيكية في إثبات وجود ووحدانية الحلول ،حيث يعتبر هذا السؤال جوهر البحث والدراسة .

2. كذلك ، في جانب التحليل العددي، أين يمكن أن نواصل العمل الذي تم القيام به في هذه الأطروحة ، وخاصة في جانب تطوير أساليب والطرق العددية الكلاسيكية المعروفة ، من أجل أن تكون فعالة و متوافقة مع الشروط غير المحلية .

3. يبقى دراسة السلوك الديناميكي لحلول المسائل المعادلات التفاضلية الكسرية سواء العادية أو الجزئية مجالا واسعا حيث توجد أعمال قليلة جدا تناولت هذا الموضوع في حالات خاصة . ويعتبر من مواضيع الساعة .

المصادر

[1] Y. Lin and A.W. Allegretto. Zhou, abox schememe for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems. *Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems, vol.* ,5 *pp.* -573 578, .1999

[2] T-E. Oussaefi and A. Bouziani. Existence and uniqueness of solutions to parabolic fractional dffierential equations with integral conditions. *vol.* ,2014 *n°* ,1179 *pp.* .10-1, .2014

[3] T-E. Oussaefi and A. Bouziani. A priori estimates for weak solution for a time-fractional nonlinear reaction-dffiusion equations with an integral condition. *vol.* ,103 *p.* 89–79, .2017

[4] Taki-Eddine O. Imad R Antara, B. Unique solvability of a dirichlet problem for a fractional parabolic equation using energy-inequality method. *Methods of Functional Analysis and Topology,* ,(03)26 .226-216, .2020

[5] Oussaefi-T. E. Ouannas A. Saad K. M. Jahanshahi H. Diar A. ... Aly A. A. Abdelouahab, B. A nonlinear fractional problem with a second kind integral condition for time-fractional partial dffierential equation. *Journal of Function Spaces,* ,(1)2022 2913587, .2022

[6] et al. Oussaefi, Taki-Eddine. Existence and uniqueness of the solution for an inverse problem of a fractional dffiusion equation with integral condition. *Journal of Function Spaces* 1.2022 :(2022) .7667370, .2022

[7] A. A. Alikhanov. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractionalorder. *vol.* ,46 *n°* ,1001 *p.* 664–658, .2010

[8] S. Mesloub and I. Bachar. On a singular time-fractional order wave equation with bessel operator and caputo derivative. *vol.* ,10 *p.* 70–60, .2017

[9] R. A. Adams. Sobolev spaces, academic press, new york. .1975

[10] W. Allegretto, Y. Lin, and A. Zhou. Abox schememe for coupled systems resulting frommicrosensor thermistor problems. *Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems, pp.* -573 578, .1999

[11] I. A. Belavin, S. P. Kapitsa, and S. P. Kurdyumov. A mathematical model ofglobal demographic processes with regard for aspace distribution. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz, vol.* ,38 *n°* ,16 *p.* 902–885, .1998

[12] B. Cahlon, D. M. Kulkarni, and P. Shi. Stepwise stability for the heat equation with non local. *SIAM J. Numer. Anal, vol.* ,32 *n°* ,12 *pp.* 593-571, .(1995

[13] B. Cahlon, D. M. Kulkarni, and P. Shi. Stepwise stability for the heat équation with non local constraint. *SIAM J. Numer. Anal., vol.* ,32 *n°* ,12 *pp.* 593-571, .1995

[14] P. Cannarasa and V. Vespri. On maximal lp-regularity for abstract cauchy problem. *Boll. Unione, vol.* ,97 *pp.* ,175-165, .1986

[15] J.R. Cannon, Y. Lin, and S. Wang. Determination of a control parameter in a parabolic partial dffierential equation. *Journal of the Australian Mathematical Society, vol.* ,33 *p.* –149 163, .1991

[16] J.R. Cannon, Y. Lin, and S.Wang. Determination of source parameter in a parabolic equations. *Meccanica, vol.* ,27 *n°*

[17] *Y.S. Choi and K.Y. Chan. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. Nonlinear Anal, vol.* ,18 *p.* ,331–317 .1992

[18] *V. J. Ervin and J. P. Roop. Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in rd. pp.* ,28-1 .2007

[19] *V. J. Ervin and J. P.Roop. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation. Numer. Meth. P. D. E, vol.* 22 ,(3) *p.* ,576–558 .2006

[20] *V. J. Ervin and J. P. Roop. Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in rd. Numer. Meth Part. D. E, vol.* 23 ,(2) *p,* 256 ,281– .2007

[21] *R.E. Ewing and T. Lin. A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media. Adv. Water Ressources, vol.* ,14 *p.* ,89 .1991

[22] *A.G. Fatullayev, N. Gasilov, and I. Yusubov. Simultaneous determination of unknown coefficients. Appl. Anal, vol.* ,87 *n°* ,11 *p.* ,1177–1167 .2008

[23] *D. G. Gordeziani and G. A. Avalishvili. Solutions of nonlocal problems forone-dimensional oscillations. Mat. Model, vol.* ,12 *n°* ,11 *pp.* ,103-94 .2000

[24] *v. Grafiychuk, B.Datsko, and S.V. Meleshko. Mathematical modeling of pattern formationin sub- and superdffiusive reactiondffiusion systems. arxiv, arxiv :nlin.AO/*06110005 *v*3, .2006

[25] *B.I. Henry and S.L. Wearne. Fractional reaction-dffiusion. Physica A* ,276 *p.* ,455–448 .2000

[26] *N. I. Ionkin. A problem for the heat-condition equation with a tow-point boundary condition. Dffierentsial'nye Uravnenya, vol.* ,15 *n°* ,17 *pp.* -1284 ,1295 .1979

[27] *N. I. Ionkin. Stability of a problem in heat-condition. Dffierentsial'nye Uravnenya, vol.* ,13 *n°* ,12 *pp.* ,304-294 .1977

[28] *M.I. Ismailov and F. Kanca. An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions. Math. Meth. Appl. Sci, vol.* ,34 *n°* ,16 *p.* ,702–692 .2011

[29] *M.I. Ivanchov and N.V. Pabyrivska. Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions. Ukrainian Mathematical Journal, vol.* ,53 *n°* ,15 *p.* ,684–674 .2001

[30] *M. Ivanchov. Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL, Lviv,* .2003

[31] *M. Ivanchov. Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition. Ukrain. Math. J, vol.* ,45 *n°* ,18 *p.* ,1192–1186 .1993

[32] *N. I. Kamynin. A boundary value problem in the theory of the heat condition with non classical boundary conditions. Th. Vychist. Mat. Fiz, vol.* ,43 *n°* ,16 *pp.* ,1024-1006 .1964

[33] *N.B. Kerimov and M.I. Ismailov. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. J. Math. Anal. Appl, p.* ,396 .2012

[34] *X. J. Li and C. J. Xu. Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractionaldffiusion equation and a spectral method approximation. Communications in Computational Physics, vol.* ,8 *n°* ,15 *p.* ,1051–1016 .2010

[35] *X. J. Li and C. J. Xu. A space-time spectral method for the time fractional dffiusion equation. SIAM. J. Numer. Anal, vol.* 47 ,(3) *p.* ,2131–2108 .29

[36] *H. P. M ¨uller, R. Kimmich, and J. Weis. Nmr flow velocity mapping in random percolation model objects evidence for a power-law dependence of the volume-averaged velocity on the probe-volume radius. Phys. Rev. E, vol.* ,54 *p.* ,5285–5278 .1996

[37] *F. Mainardi. Fractional dffiusive waves in viscoelastic solids. Nonlinear Waves in Solids, p.* ,97–93 .1995

[38] *L.A. Muravei and A.V. Filinovskii. On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation. Mathematics of the USSR-Sbornik, vol.* ,74 *n°* ,11 *pp.* ,249-219 .1993

[39] *L. A. Muravei and A.V. Philinovskii. On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation. Mat. Zametki, vol.* ,54 *p.* ,116–98 .1993

[40] *A. Nakhushev. On a certain approximate method for boundary-value problems for dffierential. Dffier. Uravn, vol.* ,18 *p.* ,81–72 .1982

[41] *A. M. Nakhushev. On one approximate method for the solution of boundary-value problems. Dffierents. Uravn, vol.* ,18 *p.* ,81–72 .1982

[42] *A. M. Nakhushev. On one approximate method for the solution of boundary-value problems. Dffierents. Uravn, vol.* ,18 *n°* ,11 *p.* ,81–72 .1982

[43] *A. M. Nakhushev. The equations of the mathematical biology. Moscow : Vysshaya Shkola,* .1995

[44] *J. P. Roop. Computational aspects of fem approximation of fractional advection dispersion equations on bounded domains in r*2. . *Comp. Appl. Math, vol.* ,193 *pp.* ,268-243 .2006

[45] *A. A. Samarskii. Some problems in dffierential equations theory, dffierents. Dffierents. Uravn, vol.* ,16 *pp.* ,1935-1925 .1980

[46] *S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives - theory and. Gordon and Breach,* .1993

[47] *R.K. Saxena, A.M. Mathai, and H.J. Haubold. Reaction-dffiusion systems and nonlinear waves. Astrophysics and Space Science, vol.* ,305 *p.* –297 ,303 .2006

[48] *H. Scher and E.Montroll. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids. Phys. Rev., vol.* ,12 *p.* ,2477–2455 .1975

[49] *H. Scher and M.Lax. Stochastic transport in a disordered solid. Phys. Rev. B, vol.* ,7 *p.* –4491 ,4502 .1973

[50] *P. Shi and M. Shillor. On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity, theoretical aspects of industrial design (wright-patterson air force base, oh,*1990). *SIAM, Pennsylvania, pp.* ,.82–76 ,554–546 .1992

[51] *P. Shi. Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint. SIAM. J. Math., vol.* ,24 *pp.* ,58-46 .1993