MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LARECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUES

# *Mémoire*

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

**Option :** Mathématiques appliquées

# L'algèbre des quaternions et le groupe des quaternions

**Présenté par :** Houara Djihad

**Sous la direction de :** Dr. H. Zekraoui

Jury:

- **Président :** Pr. A. Abdelkrim — Univ. Oum El Bouaghi
- **Rapporteur :** Dr. H. Zekraoui — Univ. Oum El Bouaghi
- **Examinateurs :** Dr. L. Kellil — Univ. Oum El Bouaghi

**Soutenu le** : 04 /06/2016

**Année Universitaire** : 2015 - 2016

# Table des matières

## REMERCIEMENTS

*La plus belle louange est due à Allah le très-haut de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.*

*C'est un agréable devoir pour moi d'exprimer ma très vive reconnaissance à Dr. H. Zekraoui avec le sérieux et la compétence qui la caractérisent. Qu'elle trouve exprimée ici ma profonde gratitude pour tout le temps qu'elle m'avait accordée et consacrée afin d'achever cet humble projet de recherche.*

*Nous remercions également les membres de jury qui nous ont honorés par leur participation : Monsieur L. kellil, Docteur à l'université Larbi ben Mhidi d'oum El Bouaghi et Monsieur A. Aliouche, Professeur à l'université Larbi ben Mhidi d'oum El Bouaghi.*

*Enfin , mes sincères remerciements à :*

*Ma chère mère qui a toujours tout fait pour me préserver une part de bonheur et de réconfort.*

*Mes sœurs et toute ma famille pour toute leur compréhension et encouragement dans la réalisation de ce travail.*

*Toutes mes amies, tous mes collègues et que soit remerciée toute personne ayant aidé et concouru à la réalisation de ce mémoire.*

*Ainsi, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner mon très cher défunt père. Que ce modeste travail soit un témoin de sa bienveillance et ses grands sacrifices, qu'Allah l'accueille dans son vaste paradis.*

# Résumé

Dans ce mémoire, nous avous présentés l'algèbre et le groupe des quaternions. Ce mémoire est composé trois parties présentés comme suit :

Dans la premiére partie : comporte quelques définitions et propriétés essentielles de l'algèbre des quaternions.

Dans la seconde partie : nous présentons le groupe des quaternions et étudies la relation substantielle entre le $Q_8$ et $H$.

Dans la troisième partie : comporte l'application des quaternions dans la rotation dans l'espace et le groupe orthogonal.



**Mots clés** : Quaternions, algèbre des quaternions, groupe des quaternions.



# Abstract

In this paper, we presented the quaternion algebra and the quaternions group. this memory consists of three parts presented as follows :

In the first part : includes some definitions and basic properties of the algebra of quaternions.

In the second part we present the quaternion group and are studying the relationship between substantial $Q_8$and $H$.

In the third part : includes the application of quaternions in the rotation in the space and the orthogonal group.



**Keywords :** Quaternion, quaternion algebre, quaternion group.

# Notation

| | |
|---|---|
| $H$ | L'ensemble des quaternions. |
| $H^*$ | L'ensemble des quaternions non nuls. |
| $\mathbb{R}$ | L'ensemble des nombres réels. |
| $\mathbb{R}_+^*$ | L'ensemble des nombres réels positifs non nuls. |
| $\mathbb{C}$ | L'ensemble des nombres complexes. |
| $\mathbb{Z}$ | L'ensemble des nombres entiers. |
| $M_4(\mathbb{R})$ | Matrice carrées de taille 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$. |
| $M_2(\mathbb{C})$ | Matrice carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. |
| $M_q$ | Matrice carrées d'un quaternion $q$. |
| $M^{-1}$ | Matrice inversible. |
| $M^t$ | Matrice transposée. |
| $\|\cdot\|$ | La norme d'un quaternion $q$. |
| $\lvert\cdot\rvert$ | Module d'un quaternion $q$. |
| $\mathrm{Re}(q)$ | Partie réelle du quaternion $q$. |
| $\mathrm{Im}(q)$ | Partie imaginair du quaternion $q$. |
| $P$ | L'ensemble des quaternions purs. |
| $G$ | L'ensemble des quaternions unités. |
| $S^3$ | La sphère de dimensions 3. |
| $\ker(q)$ | Le noyau de $q$. |
| $Q_8$ | Le groupe des quaternions. |
| $Z(Q_8)$ | Le centre de $Q_8$. |
| $S_H$ | Groupe symétrique de l'ensemble $H$. |
| $GL_2(\mathbb{C})$ | Est le groupe des matrices inversibles de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. |
| $GL(4, \mathbb{R})$ | Est le groupe des matrices inversibles de taille 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$. |
| $SL_2(\mathbb{C})$ | Est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1. |

$O(3, \mathbb{R})$ Est le groupe orthogonal réel, c'est-à-dire le groupe des matrices réelles inversibles $M$ de taille 3 telles que $M^{-1} =^t M$.

$SO(3, \mathbb{R})$ Est le groupe spécial orthogonal c'est-à'dire le groupe orthogonal réel des matrices de déterminant 1.

# Introduction

[9] L'ensemble des quaternions, noté $H$, a été introduit au beau milieu du $19^{eme}$ siècle par le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton afin de présenter un moyen plus efficace de manipuler les vecteurs dans l'espace à trois dimensions. En fait, par ses travaux, Hamilton tentait de bâtir une structure permettant de travailler avec les points dans l'espace comme on travaille avec les nombres complexes pour représenter des points sur un plan. Cependant, il n'a pas obtenu trop de succès puisque, même s'il savait comment additionner ou multiplier des triplets de nombres, il était incapable de trouver une manière de les diviser. D'ailleurs, Frobenius prouva en 1877 que cela était même impossible.

C'est pendant qu'il marchait avec sa femme le long du Canal Royal de Dublin le 16 octobre 1843, qu'il a eu l'éclair de génie qui allait plus tard devenir le fondement des quaternions. En effet, c'est lorsqu'il se tenait sur le pont de Brougham qu'il a compris que bien qu'il lui était impossible de trouver un moyen de diviser des triplets de nombres, il pouvait diviser des quadruplets de nombres. La légende dit qu'il s'est même arrêté pour graver les règles de base de la multiplication de son nouveau système sur le pont, c'est-à dire

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

D'ailleurs, une plaque commémorative est toujours affichée sur le pont de Brougham de nos jours pour immortaliser l'anecdote puisqu'aucune trace de la gravure initiale de Hamilton n'est apparente aujourd'hui.

Hamilton appela ces quadruplets de nombres des quaternions et dévoua le reste de sa vie à l'étude et à l'enseignement de ceux-ci. Il a même fondé une école de quaternionistes qu'il a dirigée jusqu'à sa mort. L'école ne mourra cependant pas avec lui puisque Peter Tait, pionnier de la thermodynamique et élève émérite de Hamilton, continua à promouvoir les quaternions. Toutefois, il n'a pas eu de succès puisque Gibbs et Heaviside attiraient la majorité de l'intérêt mathématique avec leurs travaux sur les fondements de l'analyse vectorielle, ce qui a fait sombré les quaternions dans l'oubli. Par contre, l'utilité et la simplicité de la structure des quaternions est telle que plusieurs mathématiciens ont recommencé à travailler avec ceux-ci vers la fin du $20^{eme}$ siècle avec l'arrivée de l'ère informatique. Certains ont même poussé leurs études jusqu'à généraliser les travaux de Hamilton à d'autres ensembles semblables comme les octonions pour travailler avec l'espace à quatre dimensions.

On traite donc dans ce présent article des différents travaux de Hamilton sur les quaternions. On présente, entre autres, le groupe à la base de la structure des quaternions pour ensuite exposer les di- fférentes propriétés analytiques et algébriques dérivant de celui-ci. On expose aussi les différents liens unissant les quaternions à d'autres structures algébriques telles les matrices et ceux unissant ces mêmes quaternions avec les rotations dans l'espace. Enfin, on explique pourquoi les quaternions sont un des meilleurs outils disponibles à ce jour pour représenter les mouvements dans l'espace.

Le mémoire est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre contient la présentation de quelques notions et résultats classiques sur l'algèbre des quaternions. Ensuite, nous continuons par l'algèbre $H$ vue comme sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$. Et nous donnons de manière un peu plus profonde les définitions propriétés complexes des quaternions. En effet, la forme polaire et exponentielle, racine carrée et racine $n^{eme}$ d'un quaternion et, nous concluons par l'interprétation géométrique de celle-ci. Dans le deuxième chapitre, nous introduisons l'étude du groupe des quaternions avec quelques de ses définitions, ses propriétés et quelques remarques, et le reste de ce chapitre est dédié à l'étude de la relation substantielle entre le groupe et l'algèbre des quaternions qui contient le groupe des quaternions discrète de l'algèbre des quaternions et, l'action d'un groupe des quaternion sur un ensemble des quaternions. Et enfin, dans le dernier chapitre, nous montrons l'application des quaternions dans la physique et la mécanique, qui contient les quaternions et les rotations dans l'espace, et enfin l'utilisation des quaternions dans le groupe orthogonal et spécifiquement dans le groupe spécial orthogonal réel.

# Chapitre 1

# l'algèbre des quaternions $H$

Dans ce premier chapitre, nous débutons d'abord par la présentation de quelques notions et résultats classiques sur l'algèbre des quaternions. Ensuite, nous continuons par l'algèbre $H$ vue comme sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$. Et nous donnons de manière un peu plus profonde les définitions des propriétés complexes des quaternions. En effet, la forme polaire et exponentielle, racine carrée et racine $n^{eme}$ d'un quaternion, et nous concluons par l'interprétation géométrique de celle-ci.

## 1.1 Algèbre des Quaternions

[18] En mathématiques, un quaternion est un nombre dans un sens généralisé. Les quaternions englobent les nombres réels et complexes dans un système de nombre où la multiplication n'est plus une loi commutative.

**Définition 1.1.1** *[18] L'ensemble des quaternions noté $H$ peut être décrit comme l'algèbre associative unifère sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ engendrée par trois éléments $i$, $j$ et $k$ satisfaisant les relations quaternioniques*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

*Concrètement, tout quaternion $q$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$q = a + bi + cj + dk$$

*où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels.*

*Les quaternions satisfont les lois de commutative et d'associativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, et les lois de distributivité de la multiplication sur l'addition, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} q+p &= p+q \\ q+(p+r) &= (q+p)+r, \\ q\,(pr) &= (qp)\,r, \\ q\,(p+r) &= qp+qr \\ (q+p)\,r &= qr+pr. \end{aligned}$$

*et tel que* 1 *représente l'élément neutre pour la multiplication.*

**Remarque 1.1.1** *:*

1. *La formule $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ condense toutes ces relations tel que :*

$$ijk = -1$$

*Puis, droit-multipliant les deux côtés près $k$,*

$$\begin{aligned} ijkk &= -k \\ ij\,(-1) &= -k \\ ij &= k \end{aligned}$$

*Alternativement, gauche-multipliant les deux côtés près $i$,*

$$\begin{aligned} iijk &= -i \\ (-1)\,jk &= -i \\ jk &= i \end{aligned}$$

*En continuant de cette manière on arrive à avoir le système complet suivant*

$$ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

.

2. *[22] $H$ est canoniquement isomorphe a $\mathbb{R}^4$, une base de $H$ étant donnée par le quadruplet $(1,\ i,\ j,\ k)$ . Les relations précédentes peuvent être représentées par le tableau suivait :*

| $\cdot$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

3. *[18] La multiplication n'est pas commutative : $ij \neq ji$ en général.*

## 1.2 L'algèbre $H$ vue comme sous-espase vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$

L'algèbre des quaternions est les sous-espace vectoriel $H$ de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, engendré par la base $\{1,\ i,\ j,\ k\}$ : [11]

$$1 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad i \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad j \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad k \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On peut encore noter ces quatre éléments particuliers

$$1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)\,,\ i = (0,\ 1,\ 0,\ 0)\,,\ j = (0,\ 0,\ 1,\ 0)\,,\ k = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

Et des matrices carrées $M_2(\mathbb{C})$ engendré par

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \ i = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix},\ \ j = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\ \ k = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

### 1.2.1 Représentations matricielles

[9] Les quaternions ont acquis à leur création une forme très précise, soit $q = a+bi+cj+dk$ où $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ et $i,\ j,\ k$ est une base, mais les mathématiciens ont transformé en quelque

sorte cette représentations en introduisant certains homomorphismes injectifs utiles des quaternions vers d'autres structures. De ces relations sont nées des représentations alternatives qui, à défaut de révolutionner les quaternions, réduisent les opérations quaternioniques à des opérations bien connues sur les ensembles de matrices $M_2(\mathbb{C})$ et $M_4(\mathbb{R})$.

En premier lieu, le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut être représenté dans $M_2(\mathbb{C})$ comme la matrice

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$$

Dans cette situation bien précise, l'addition et la multiplication deviennent tout simplement l'addition et la multiplication de matrices. De même, la norme se transforme en la racine carrée du déterminant et la conjugaison en matrice adjointe. Soit encore $M_q = a1 + bI + cJ + dK$, où les matrices

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

Sont les matrices complexes associées aux quaternions 1, $i$, $j$ et $k$ respectivement. Ces matrices sont étroitement liées aux matrices de Pauli en physique quantique.

En deuxième lieu, on peut construire un homomorphisme entre $H$ et $M_4(\mathbb{R})$ de sorte que le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut être représenté comme la matrice

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

Dans ce cas, l'addition et la multiplication sont équivalentes à l'addition et la multiplication matricielle, la norme devient la racine quatrième du déterminant et la conjugaison devient la transposition.

**Remarque 1.2.1** *Tout quaternion*

$$q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)\,j \in H$$

*Peut être aussi représenté sous sa forme*

$$q = A + Bj$$

*Avec $A$, $B \in \mathbb{C}$ tels que $A = a + bi$ et $B = c + di$.*

**Théorème 1.2.1** *[7] L'algèbre $H$ est un corps non-commutatif.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que tout quaternion non nul est inversible. Utilisons l'écriture matricielle d'un quaternion pour cette démonstration. Soit $q = a+bi+cj+dk$ un quaternion non nul. Alors

$$q = \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$$

On a $\det(q) = |a+bi|^2 + |c+di|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, et donc $q$ est inversible dans $M_2(\mathbb{C})$. De plus,

$$q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} \begin{vmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(q)} \begin{vmatrix} \overline{A} & -B \\ \overline{B} & A \end{vmatrix}$$

En posant $\acute{A} = \frac{\overline{A}}{\det(q)}$ et $\acute{B} = \frac{-B}{\det(q)}$ on a

$$q^{-1} = \begin{vmatrix} \acute{A} & \acute{B} \\ -\overline{\acute{B}} & \overline{\acute{A}} \end{vmatrix} \in H.$$

$H$ n'est pas commutatif :

$$\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} \text{ mais } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{vmatrix}$$

■

**Remarque 1.2.2** *[13] $H - \{0\} = H^*$ est un groupe multiplicatif non abélien.*

**Définition 1.2.1** *[21] Le centre du corps non-commutatif $(H, +, \cdot)$ est l'ensemble des éléments de $H$ commutant pour la loi $\cdot$ avec tous les éléments de $H$.*

**Théorème 1.2.2** *[20] Le centre de $H$ est $\mathbb{R}$.*

**Preuve.** Comme $H$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, $\mathbb{R}$ est inclus dans le centre de $H$. Inversement, si $q = a + bi + cj + dk$ est dans le centre alors en particulier, il doit commuter avec $i$, $j$ et $k$, on vérifie par exemple avec $i$ :

$$qi = iq \iff ai + bi^2 + cji + dki = ia + bi^2 + cij + dik \iff c = 0 \text{ et } d = 0,$$

Puis $qj = jq$ nous donne $b = 0$ donc $q = a \in \mathbb{R}$. ■

## 1.3 Définitions des propriétés complexes des quaternions

Un nombre complexe, noté $z \in \mathbb{C}$, est défini de manière unique $z = a + ib$. $(a, b)$ sont de réels, tandis que $i$ est le nombre imaginaire par tel que $i^2 = -1$. Comme sur $\mathbb{C}$ on peut définir les notions de parties réelle et imaginaire, conjugué, norme, inverse, forme polaire et exponentielle. De manière analogue, on définit quaternion.

### 1.3.1 Forme complexe d'un quaternion

**Définition 1.3.1** *[9] Soit $q = a+bi+cj+dk \in H$ (où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombre réel).*

*Le nombre réel $a$ s'appelé la composante réelle (où partie réelle) de $q$ noté $\mathrm{Re}(q)$, tandis que $b$, $c$ et $d$ sont des composantes complexe de $q$, ainsi la partie $bi + cj + dk$ est appelée partie imaginaire du quaternion, noté $\mathrm{Im}(q)$. On peut donc écrire*

$$q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q)$$

**Définition 1.3.2** *Un nombre de la forme $q = a$ est appelé quaternion scalaire. Un nombre de la forme $q = bi + cj + dk$ est appelé quaternion pur.*

**Définition 1.3.3** *[1] On appelle ensemble des quaternions purs l'ensemble*

$$P = i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R} = \{bi + cj + dk,\ (b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}\}$$

**Lemme 1.3.1** *L'ensemble $P$ est un sous espace vectoriel de dimension 3. Il est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.*

**Preuve.** Soit $P = \{bi + cj + dk,\ (b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}\}$ on a

$P \neq \varnothing$ car $0 = 0i + 0j + 0k \in P$.

Pour $q = bi + cj + dk \in P$ et $p = \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k \in P$ on a

$$q + p = (bi + cj + dk) + \left(\acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k\right) = \left(b + \acute{b}\right) i + (c + \acute{c})\, j + \left(d + \acute{d}\right) k \in P$$

Et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall q \in P$ alors

$$\lambda q = \lambda\,(bi + cj + dk) = (\lambda b)\, i + (\lambda c)\, j + (\lambda d)\, k \in P.$$

Alors $P$ est un sous espace vectoriel. ■

**Définition 1.3.4** *La forme $q = a + bi + sj + dk \in H$, en appelée la forme cartésienne d'un quaternion. On pose $S(q) = a$ et $V(q) = bi + cj + dk$ tel que $q = S(q) + V(q)$.*

### 1.3.2 Conjugaison d'un quaternion

**Définition 1.3.5** *[20] Soit $q \in H$, $q = a + bi + cj + dk$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On définit le quaternion conjugué de $q$ comme étant élément*

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk$$

*Donc la conjugaison quaternionique ne change pas la partie réelle, et elle change tous les signes dans la partie imaginaire.*

**Théorème 1.3.1** *[17] Soit $q, p \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :*

1. $\overline{q+p} = \overline{q} + \overline{p}$
2. $\overline{\overline{q}} = q$
3. $\overline{\lambda q} = \lambda \overline{q}$
4. $\overline{qp} = \overline{p}\,\overline{q}$

*Ainsi le conjugué d'un produit est le produit des conjugués dans l'ordre inverse c'est comme dans les formules pour les transposées et inverses de matrices $(AB)^t = B^t A^t$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

**Preuve.** Les trois premières formules sont évidentes. Montrons 4. Par bilinéarité de la multiplication, il suffit de vérifier cette propriété pour les éléments de la base. On a

$$\overline{ij} = \overline{k} = -k, \;\; \overline{j}\,\overline{i} = (-j)(-i) = ji = -k$$

Donc

$$\overline{ij} = \overline{j}\,\overline{i}$$

Remarquons que

$$\overline{i}\,\overline{j} = (-i)(-j) = ij = k \neq \overline{ij} = -k.$$

On procède de même avec les autres éléments de la base. ■

**Théorème 1.3.2** *[21] La conjugaison est un automorphisme du groupe $(H, +)$. C'est également une involution.*

**Preuve.** Soient $q = a + bi + cj + dk$ et $p = \acute{a} + \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k$ deux quaternions.

$$\begin{aligned}
\overline{q+p} &= \overline{(a + bi + cj + dk) + \left(\acute{a} + \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k\right)} \\
&= (a + \acute{a}) - \left(b + \acute{b}\right) i - (c + \acute{c})\, j - \left(d + \acute{d}\right) k \\
&= (a - bi - cj - dk) + \left(\acute{a} - \acute{b}i - \acute{c}j - \acute{d}k\right) \\
&= \bar{q} + \bar{p}
\end{aligned}$$

et

$$\bar{\bar{q}} = a - (-b)\, i - (-c)\, j - (-d)\, k = q$$

Cette conjugaison n'est pas un automorphisme multiplicatif. En effet, si l'on considère les éléments $j$ et $k$, on a

$$\bar{j}\ \bar{k} = (-j)\,(-k) = jk = i \text{ et } \overline{jk} = \bar{i} = -i$$

■

**Proposition 1.3.1** *[21] La conjugaison sur $H$ est un anti-automorphisme d'algèbre (c'est-à-dire une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H$ dans lui-même, qui vérifie de plus $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ pour tous $p$, $q \in H$).*

**Preuve.** On a déjà montré que la conjugaison est un automorphisme du groupe $(H, +)$. Reste donc à vérifier :

Pour tout réel $x$ et tout quaternion $p$, on a $\overline{xp} = x\bar{p}$. C'est immédiat en écrivant $p$ sous la forme $a + bi + cj + dk$.

Pour tous quaternions $p$ et $q$, on a $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$. On peut bien sûr obtenir ceci en revenant aux formes $a+bi+cj+dk$, mais le résultat est beaucoup plus simple d'un point de vue matriciel. En effet, la matrice de $\bar{p}$ n'est autre que la transposée $M(p)^t$ de $M(p)$. La matrice de $\overline{pq}$ est de la même façon $M(pq)^t = (M(p)M(q))^t = M(q)^t M(p)^t$. On obtient donc $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$. Notons que le premier point s'en déduit aisément : si $x$ est réel, alors on a $\overline{xp} = \bar{p}\bar{x}$. Mais comme $\bar{x} = x$ commute avec tous les quaternions, on a en particulier $\overline{xp} = x\bar{p}$. ■

**Proposition 1.3.2** *[9] Sois $q \in H$, alors*

$$\overline{q} = -\frac{1}{2}\left(q + iqi + jqj + kqk\right)$$

*Parmi toutes ces involutions, trois sont particulières, et permettent d'obtenir les composantes réelles (a, b, c et d) de q par combinaison linéaire comme suit : [12]*

$$\begin{aligned} a &= \frac{q - iqi - jqj - kqk}{4}, \; b = \frac{q - iqi + jqj + kqk}{4i} \\ c &= \frac{q + iqi - jqj + kqk}{4j}, \; d = \frac{q + iqi + jqj - kqk}{4k}. \end{aligned}$$

De plus, les parties imaginaire et réelle d'un quaternion peuvent être extraites à l'aide de :

**Proposition 1.3.3** *[9] Soit $q \in H$, alors*

$$\mathrm{Re}\left(q\right) = \frac{q + \overline{q}}{2} \;\; et \;\; \mathrm{Im}\left(q\right) = \frac{q - \overline{q}}{2}$$

**Proposition 1.3.4** *Soit $q = a + bi + cj + dk$ le quaternion (avec a, b, c, d réels). Alors*

$$q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

*Ainsi on a toujours $q\overline{q} \in \mathbb{R}$, et on a $q\overline{q} \succ 0$ pour $q \neq 0$.*

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= \left(a + \left(bi + cj + dk\right)\right)\left(a - \left(bi + cj + dk\right)\right) \\ &= a^2 + \left(bi + cj + dk\right)a - a\left(bi + cj + dk\right) - \left(bi + cj + dk\right)^2 \\ &= a^2 + 0 - \left(bi + cj + dk\right)\left(bi + cj + dk\right) \\ &= a^2 - \left(b^2i^2 + c^2j^2 + d^2k^2 + bc\left(ij + ji\right) + bd\left(ik + ki\right) + cd\left(jk + kj\right)\right) \\ &= a^2 - \left(-b^2 - c^2 - d^2 + 0\right) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

En substituant $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ pour $q$, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{q}q &= a^2 + \left(-b\right)^2 + \left(-c\right)^2 + \left(-d\right)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.3.1** *[1] Soit $q \in H$ on a :*

1. $\frac{q+\overline{q}}{2} \in \mathbb{R}$ *et* $\frac{q-\overline{q}}{2} \in P$
2. $q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow q = \overline{q}$
3. $q \in P \Leftrightarrow q = -\overline{q}$.

### 1.3.3 Norme d'un quaternion

Ensuite, avec la conjugaison ainsi définie, on définit la norme d'un quaternion comme la racine carrée du produit du quaternion par son conjugué.

**Définition 1.3.6** *[17] La norme d'un quaternion $q \in H$ est*

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

*On a $\|q\| \succ 0$ pour tout $q \neq 0$.*

*La définition nous donne alors les formules*

$$q\overline{q} = \|q\|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\|q\| = \|\overline{q}\|$$

*pour tout quaternion $q$, avec $\|q\|^2 \succ 0$ pour $q \neq 0$.*

**Remarque 1.3.2** *[17] La norme d'un quaternion est l'analogue du module $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'un nombre complexe $z = a + ib$.*

**Théorème 1.3.3** *Soit $q$, $p$ des quaternions et $\lambda$ un réel. Alors on a*

$$\|qp\| = \|q\| \, \|p\|$$

*En particulier pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $q \in H$ on a*

$$\|\lambda q\| = |\lambda| \, \|q\|$$

**Preuve.** On a

$$\|qp\| = \sqrt{(qp)(\overline{qp})} \Leftrightarrow \|qp\|^2 = (qp)\,(\overline{qp}) = qp\overline{p}\;\overline{q} = q\,\|p\|^2\,\overline{q}.$$

Comme $\|p\|^2$est un réel, il commute avec tous les quaternions d'où on a

$$\|qp\|^2 = q\overline{q}\,\|p\|^2 = \|q\|^2\,\|p\|^2$$

En prenant les racines carrées de ces réels, on trouve $\|qp\| = \|q\|\,\|p\|$. ■

**Remarque 1.3.3** *:[20]*

1. *La norme est multiplicative :* $\|qp\| = \|q\|\,\|p\|$*, donc la norme est un morphisme de groupe de* $H^* = H - \{0\}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *On a les équivalences suivantes :*

$$q \in \mathbb{R} \iff q^2 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } q \in P \iff q^2 \in \mathbb{R}^-$$

*En effet, si* $q$ *est réel, alors* $\|q\| = q^2 \in \mathbb{R}^+$ *et si* $q$ *est un quaternion pur, alors* $\|q\|^2 = q\overline{q} = q\,(-q) = -q^2$ *donc* $\|q\|^2 = -q^2 \in \mathbb{R}^-$.

*Réciproquement si on 2crit* $q = a + v$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $v \in P$*, alors* $q^2 = \underbrace{a^2 + v^2}_{\in\mathbb{R}} + 2av$*, donc* $(q^2 \in \mathbb{R}) \iff (av = 0) \iff (a = 0 \text{ ou } v = 0)$.

### 1.3.4 L'inverse d'un quaternion

Ensuite, avec la norme euclidienne d'un quaternion est nécessaire à la construction de l'inverse multiplicatif de celui-ci. En effet, ce dernier est tout simplement le conjugué du quaternion divisé par sa norme au carré.

**Proposition 1.3.5** *[9] Pour* $q \in H$ *avec* $q \neq 0$ *on a*

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$$

On remarque deux choses à partir de cette proposition. Premièrement, on voit que l'inverse d'un produit de quaternions est le produit inversé des inverses, c'est-à-dire :

**Proposition 1.3.6** *[17] Soient $q$, $p \in H$, alors*

$$(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$$

Enfin, l'inverse d'un quaternion ayant une norme de 1 est tout simplement son conjugué :

**Proposition 1.3.7** *[17] Soit $q$ un quaternion avec $\|q\| = 1$. Alors $q$ est inversible avec*

$$q^{-1} = \overline{q}$$

**Théorème 1.3.4** *[17] Soit $q \neq 0$ et $p \neq 0$ des quaternions, alors on a $qp \neq 0$ et $(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$.*

*Noter que $(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1} \neq q^{-1}p^{-1}$ en général parce que la multiplication de quaternions n'est pas commutative.*

**Preuve.** Par la proposition (1.3.5), $q$ et $p$ sont inversibles. Le produit $qp$ des deux inversibles et inversible avec inverse $p^{-1}q^{-1}$(car $qpp^{-1}q^{-1} = 1$ et $p^{-1}q^{-1}qp = 1$), et un inversible est non nul.

Ces dernier théorème et proposition (1.3.5), sont non triviaux. Dans $M_2(\mathbb{R})$ il y a des matrices qui sont ni nulles ni inversibles, et parfois le produit de deux matrices non nulles est nulle. Par exemple,

$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ne sont ni nuls ni inversibles, et leur produit est nul : $AB = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. ■

### 1.3.5 Quaternion unitaire

**Définition 1.3.7** ***Proposition 1.3.8*** *Un quaternion de longueur 1 est appelé quaternion unitaire (quaternion unité) et il est tel que :*

$$\begin{aligned} \|q\| &= 1 \Longrightarrow \\ (q)^{-1} &= \overline{q} \\ \|\overline{q}\| &= 1 \\ \left\|(q)^{-1}\right\| &= 1 \end{aligned}$$

*On considère alors l'ensemble des quaternions de norme* $1$*. On le note* $G$*. [1]*

$$G = \{q \in H, \ \|q\| = 1\}.$$

**Théorème 1.3.5** *[1] L'ensemble des quaternions unités* $G$ *est un sous-groupe de* $H^*$*.*

**Preuve.** Soit $G = \{q \in H, \ |q| = 1\}$ on a

$1 \in G$ car $|q| = 1$, pour $q$, $\acute{q} \in G$ on a $|q| = |\acute{q}| = 1$, d'apres la théorème (1.3.3), $|q\acute{q}| = |q|$ $|\acute{q}|$. Donc $|q\acute{q}| = |q| \ |\acute{q}| = 1$. Ainsi $q\acute{q} \in G$.

Soit $q \in G$, alors $q^{-1} = \bar{q}$ et $|\bar{q}| = |q| = 1$ donc $q^{-1} \in G$. ■

**Remarque 1.3.4** *:*

1. *Le produit de deux quaternions unitaires* $q$ *et* $p$ *est lui aussi unitaire*

$$\|q\| = 1 \ \textit{et} \ \|p\| = 1 \implies \|qp\| = 1$$

2. *Un quaternion unitaire peut être représenté par*

$$q = \cos\theta + v\sin\theta$$

*Où* $v$ *est un vecteur de dimension* $3$ *de longueur* $1$*.*

3. *Soit le nombre complexe :*

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

*De la même manière, avec les quaternions :*

$$\exp(v\theta) = \cos\theta + v\sin\theta$$

*Ce qui permet d'introduire l'élévation à la puissance d'un quaternion unitaire :*

$$\begin{aligned} q^t &= (\cos\theta + v\sin\theta)^t \\ &= \exp(vt\theta) \\ &= \cos(t\theta) + v\sin(t\theta) \end{aligned}$$

*4. Il est aussi possible de définir le* ln *d'un quaternion unitaire*

$$\begin{aligned} \ln(q) &= \ln(\cos\theta + v\sin\theta) \\ &= \ln(\exp(v\theta)) = v\theta \end{aligned}$$

***Attention*** *: A cause de la non-commutativité de la multiplication de quaternions,* $\exp(p)\exp(q)$ *et* $\exp(p+q)$ *ne sont pas nécessairement égaux. De même* $\ln(pq)$ *et* $\ln(p)+\ln(q)$ *ne sont pas nécessairement égaux.*

**Proposition 1.3.9** *L'ensemble des quaternions unitaires coïncide avec la sphère $S^3$.*

**Preuve.** Soit $q = a + bi + cj + dk$ un quaternion. On raisonne par équivalence :

$$q \text{ unitaire} \Leftrightarrow |q| = 1 \Leftrightarrow |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \Leftrightarrow q \in S^3.$$

■

## 1.4 Forme polaire et exponentielle

Tout quaternion non nul $q$ possédé une forme polaire et exponentielle, en analogie avec le cas complexe.

**Définition 1.4.1** *[10] Tout comme un nombre complexe $a+ib$ possède une forme polaire $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on peut définir une forme polaire pour les quaternions. En effet, on peut décomposer un quaternion quelconque*

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + V(q) \end{aligned}$$

*Sous la forme*

$$\begin{aligned} q &= r\ (\cos\theta + \overrightarrow{v}\sin\theta) \\ &= r\exp(\theta\overrightarrow{v}) \qquad\qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

*où $r = \|q\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = |q|$ norme ou module de $q$ et $\theta$ sont nombres réels telle que*

$$\theta = \arctan\left(\frac{|V(q)|}{a}\right) = \arctan\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}$$

*et* $\overrightarrow{v}$ *et un quaternion pur unitaire* $(|q| = 1)$ *telle que*

$$\overrightarrow{v} = \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}, \quad b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$$

*et*

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

*et*

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{r}$$

*et*

$$\tan\theta = \pm\frac{|V(q)|}{a}$$

*Ainsi, pour tout quaternion non scalaire, la forme polaire des quaternions est, à l'instar de son équivalent complexe, unique à* $2k\pi$ *près pour* $\theta$*.*

**Définition 1.4.2** *[9] L'exponentiel d'un quaternion* $q = a + bi + cj + dk$ *sur l'ensemble* $H$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} \exp : H &\longrightarrow H \\ q &\longmapsto e^q = e^a\left(\cos(\|V\|) + \tfrac{V}{\|V\|}\sin(\|V\|)\right) \end{aligned}$$

*Une forme équivalente se déduit aussi de la forme polaire d'un quaternion :*

**Proposition 1.4.1** *[9] Soit* $q \in H$ *tel que sa forme polaire est* $q = r\left(\cos\theta + \overrightarrow{v}\sin\theta\right)$ *où* $r = \|q\|$*. Alors*

$$\begin{aligned} e^q &= re^{\theta\overrightarrow{v}} \\ &= r\left(\cos\theta + \overrightarrow{v}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

## 1.5 Racine carrée et racine n$^{ième}$ d'un quaternion

### 1.5.1 Racine carrée

**Définition 1.5.1** *[10] La racine carrée d'un quaternion* $q = a + bi + cj + dk$ *peut être obtenue algébriquement comme suit. L'équation* $p^2 = q$ *avec* $p = \acute{a} + \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k$ *conduit* *aux équations suivantes*

$$\begin{aligned} \acute{a}^2 - \acute{b}^2 - \acute{c}^2 - \acute{d}^2 &= a & & \quad (1) \\ 2\acute{a}\acute{b} &= b, & sgn\left(\acute{a}\acute{b}\right) = sgn\,(b) & \quad (2) \\ 2\acute{a}\acute{c} &= c, & sgn\,(\acute{a}\acute{c}\ ) = sgn\,(c) & \quad (3) \\ 2\acute{a}\acute{d} &= d, & sgn\left(\acute{a}\acute{d}\right) = sgn\,(d) & \quad (4) \end{aligned}$$

*En posant* $t = \acute{a}^2$ *l'équation (1) ci-dessus s'écrit*

$$t - \frac{b^2 + c^2 + d^2}{4t} = a$$

*Soit*

$$t^2 - at - \frac{b^2 + c^2 + d^2}{4} = 0$$

*Alors*

$$\begin{aligned} t &= \acute{a}^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}{2} \geq 0 \\ -\left(\acute{b}^2 + \acute{c}^2 + \acute{d}^2\right) &= a - \acute{a}^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}{2}, \end{aligned}$$

*D'où*

$$\acute{a} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + a} \qquad (\varepsilon = \pm 1)\,.$$

*Les équations (2), (3), (4) conduisent à*

$$\acute{a}^2 \left(-\acute{b}^2\right) = \frac{-b^2}{4}, \tag{5}$$

$$\acute{a}^2 \left(-\acute{c}^2 - \acute{d}^2\right) = \frac{-\left(c^2 + d^2\right)}{4} \tag{6}$$

*Avec*

$$\begin{aligned} -\acute{c}^2 - \acute{d}^2 &= \acute{b}^2 + a - \acute{a}^2 \\ &= \acute{b}^2 + \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}{2} \end{aligned}$$

*L'équation (6) s'écrit alors avec* $t = \acute{b}^2$ *et en utilisant (5)*

$$\frac{b^2}{4t} \left(t + \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}{2}\right) = -\frac{\left(c^2 + d^2\right)}{4}$$

*D'où*

$$t = \frac{b^2}{2}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}-a\right)}{b^2+c^2+d^2},$$

*Puis* $\acute{b}$ *(et de manière analogue* $\acute{c}$, $\acute{d}$*) ; finalement on obtient*

$$\acute{a} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}+a} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$\acute{b} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}-a},$$

$$\acute{c} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}-a},$$

$$\acute{d} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{d}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}-a}.$$

### 1.5.2 Racine n$^{ième}$

**Définition 1.5.2** *[10] La racine* $n^{ième}$ *d'un quaternion* $q = r(\cos\varphi + v\sin\varphi)$ *où* $\varphi$ *peut toujours être choisi dans l'intervalle* $[0, \pi]$ *par un choix approprié de* $v$*, est obtenue de la façon suivante :*

*En supposant* $\sin\varphi \neq 0$*, l'équation* $p^n = q$ *avec*

$$p = R(\cos\theta + w\sin\theta), \qquad \theta \in [0, \pi]$$

*Conduit à*

$$R^n = r, \quad \cos n\theta = \cos\varphi, \quad \sin n\theta = \sin\varphi, \quad w = v$$

*Et donc à*

$$R = r^{\frac{1}{n}}, \quad \theta = \frac{(\varphi + 2k\pi)}{n} \qquad (\ k = 0{,}1 \ldots n-1),$$

*Finalement*

$$p = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{(\varphi+2k\pi)}{n} + v\sin\frac{(\varphi+2k\pi)}{n}\right] \qquad (\ k = 0{,}1 \ldots n-1).$$

## 1.6 Interprétation géométrique des quaternions

Pour les quaternions non réels, une autre écriture nous sera aussi utile : partante de la décomposition en partie réelle et partie imaginaire.

### 1.6.1 Parties scalaire et vectorielle

Notons $\operatorname{Im} H$ l'ensemble des quaternions imaginaire purs, de sorte que $H = \mathbb{R} \oplus \operatorname{Im} H$. Muni de la base $(i,\, j,\, k)$ et de la norme euclidienne induite, $\operatorname{Im} H$ est un espace euclidien de dimension 3 canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^3$. Sous cet isomorphisme, un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ est identifié au quaternion imaginaire pur $bi + cj + dk \in \operatorname{Im} H$ et on peut s'autoriser à noter le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ comme $q = a + \overrightarrow{v}$ lorsque cette notation est utilisée, il est usuel d'appeler $a$ la partie scalaire de $q$ et $\overrightarrow{v}$ partie vectorielle telle que $\overrightarrow{v} = b\,\overrightarrow{i} + c\,\overrightarrow{j} + d\,\overrightarrow{k}$.

**Définition 1.6.1** *:*

1. *Tout quaternion $q$ se décompose en une somme d'un réel et d'un vecteur, alors on a*

$$q = a + \overrightarrow{v} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$$

   *Cette décomposition est unique.*

2. *La quaternion de la forme*

$$\begin{aligned} q &= b\,\overrightarrow{i} + c\,\overrightarrow{j} + d\,\overrightarrow{k} \\ &= \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

   *Forment un espace vectoriel tridimensionnel, identifié à $\mathbb{R}^3$, par identification des bases $(i,\, j,\, k) = \left(\overrightarrow{i},\, \overrightarrow{j},\, \overrightarrow{k}\right)$. On les appelle quaternions purs, quaternions vectoriels, ou par abus de langage, vecteurs.*

**Définition 1.6.2** *[1] Pour $q = a + bi + cj + dk = a + \overrightarrow{v} \in H$, $p = \acute{a} + \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k = \acute{a} + \overrightarrow{\acute{v}} \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit dans $H$ :*

1. *L'addition*

$$\begin{aligned} q + p &= (a + \overrightarrow{v}) + \left(\acute{a} + \overrightarrow{\acute{v}}\right) \\ &= (a + \acute{a}) + \left(b + \acute{b}\right) i + (c + \acute{c})\, j + \left(d + \acute{d}\right) k \\ &= (a + \acute{a}) + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\acute{v}}\right) \end{aligned}$$

   *Et*

$$\lambda q = \lambda\,(a + \overrightarrow{v}) = \lambda a + \lambda \overrightarrow{v}$$

2. *La multiplication*

$$\begin{aligned} qp &= (a+\overrightarrow{v})\left(\acute{a}+\overrightarrow{\acute{v}}\right) \\ &= \underbrace{a\acute{a}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\acute{v}}}_{\text{Parie réelle}}+\underbrace{a\overrightarrow{\acute{v}}+\acute{a}\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\acute{v}}}_{\text{Partie vectorielle}} \end{aligned}$$

*Ici* $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\acute{v}}$ *designe le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\acute{v}} = b\acute{b}+c\acute{c}+d\acute{d}$$

*Et* $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\acute{v}}$ *le produit vectoriel telle que*

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\acute{v}} = \left(c\acute{d}-d\acute{c}\right)i+\left(\acute{b}d+b\acute{d}\right)j+\left(b\acute{c}+\acute{b}c\right)k$$

3. *Le conjugué du quaternion* $q=a+\overrightarrow{v}$ *est par définition*

$$\bar{q}=a-\overrightarrow{v}$$

**Définition 1.6.3** *[1] Soit* $q=a+\overrightarrow{v}\in H$*, on appelle module de* $q$ *:*

$$|q|^2=a^2+\overrightarrow{v}^2$$

**Théorème 1.6.1** *[1]* $|\ |$ *sur* $H$ *est une norme.*

*En effet, pour* $q=a+\overrightarrow{v}$ *,* $p=\acute{a}+\overrightarrow{\acute{v}}\in H$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *on a :*

1. $|q|=0\Leftrightarrow a^2+\overrightarrow{v}^2\Leftrightarrow a=0$ *et* $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow q=0$
2. $|\lambda q|=|\lambda(a+\overrightarrow{v})|=|\lambda a+\lambda\overrightarrow{v}|=\sqrt{\lambda^2(a^2+\overrightarrow{v}^2)}=|\lambda|\,|q|$
3. $|q+p|=\left|(a+\acute{a})+\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{\acute{v}}\right)\right|=\sqrt{(a+\acute{a})^2+\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{\acute{v}}\right)^2}\leq\sqrt{a^2+\acute{a}^2+\overrightarrow{v}^2+\overrightarrow{\acute{v}}^2}$
   *donc on a bien l'inégalité de Minkowski* $|q+p|\leq|q|+|p|$.

**Définition 1.6.4** *Soit* $q=a+\overrightarrow{v}\in H$*, on appelle l'inverse (à gauche et à droite) d'un quaternion non nul est*

$$(a+\overrightarrow{v})^{-1}=\frac{a-\overrightarrow{v}}{a^2+|\overrightarrow{v}|^2}$$

### 1.6.2 Calcul vectoriel classique

[10] On peut utiliser le produit de deux quaternions purs pour déduire quelques définitions et propriétés des produits vectoriel et scalaire.

**Produit scalaire et produit vectoriel**

1. Soit $q$, $p$, $r \in Vec\ H$ tell que $q = bi + cj + dk$, $p = \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k$ et $r = \H{b}i + \H{c}j + \H{d}k$, on défini

$$\begin{aligned} qp &= \frac{qp + pq}{2} + \frac{qp - pq}{2} \\ &= -q \cdot p + q \times p \end{aligned}$$

One défini respectivement le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs $q$, $p$ par

$$(q,\, p) \equiv q \cdot p = -\frac{qp + pq}{2} = b\acute{b} + c\acute{c} + d\acute{d} \in \mathbb{R}$$

$$q \times p = \frac{qp - pq}{2} = \left(c\acute{d} - d\acute{c}\right) i + \left(d\acute{b} - b\acute{d}\right) j + \left(b\acute{c} - c\acute{b}\right) k \in \mathbb{R}^3$$

Les deux produits sont bilinéaires c'est à dire pour $q$, $p$, $r \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$(q + p) \cdot r = q \cdot r + p \cdot r \quad \text{et} \quad q \cdot (p + r) = q \cdot p + q \cdot r$$

$$(\lambda q) \cdot r = \lambda (q \cdot r) \quad \text{et} \quad q \cdot (\lambda p) = \lambda (q \cdot p)$$

Et similairement pour le produit vectoriel, et ils vérifient $q \cdot p = p \cdot q$ et $q \times p = -p \times q$ et ainsi $q \times q = 0$.

2. La norme euclidienne d'un vecteur est

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}.$$

Pour $\lambda$ un réel on a

$$\|\lambda q\| = |\lambda| \, \|q\| \, .$$

On a $\|q\| \geq 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}^3$, et on a $\|q\| \succ 0$ pour tout $q \neq 0$.

3. Deux vecteurs $q$ et $p$ sont orthogonaux s'ils vérifient

$$q \cdot p = 0.$$

4. L'angle entre deux vecteurs non nuls est défini par $0 \leq \theta \leq \pi$ et

$$\cos\theta = \frac{q \cdot p}{\|q\| \, \|p\|} \tag{7}$$

$$\sin\theta = \frac{\|q \times p\|}{\|q\| \, \|p\|}. \tag{8}$$

Pour la huitième on a :

$$\begin{aligned}
\|qp\|^2 &= \|q\|^2 \|p\|^2 = (qp)\left(\overline{qp}\right) \\
&= \left[-(q,p) + q \times p\right]\left[-(q,p) - q \times p\right] \\
&= (q,p)^2 - (q \times p)^2 \\
&= (q,p)^2 + \|q \times p\|^2
\end{aligned}$$

D'où

$$\|q \times p\|^2 = \|q\|^2 \|p\|^2 - (q,p)^2 .$$

Par l'inégalité (7) on a donc

$$\begin{aligned}
\|q \times p\|^2 &= \|q\|^2 \|p\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= \|q\|^2 \|p\|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Avec $\theta$ dans un intervalle où $\sin\theta \geq 0$.

**Définition 1.6.5** *[17] Une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ est une famille de trois vecteurs $\{q,\ p,\ r\}$ non nuls avec*

$$q \cdot p = q \cdot r = p \cdot r = 0 \tag{9}$$

*Une telle famille est toujours libre et ainsi une base de $\mathbb{R}^3$( soit $q,\ p,\ r$ des vecteurs non nuls vérifiant l'inégalité (9), et soit $t_1,\ t_2,\ t_3$ des réels avec $t_1q + t_2p + t_3r = 0$. Alors on a $0 = q0 = q\left(t_1q + t_2p + t_3r\right) = t_1 \|q\|^2$. Mais on a $q \neq 0$ et ainsi $\|q\| \succ 0$. D'où $t_1 = 0$. En faisant les produits scalaires de $t_1q + t_2p + t_3r = 0$ avec $p \neq 0$ et $r \neq 0$, on déduit $t_2 = 0$ et $t_3 = 0$). Une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est une famille de trois vecteurs $\{q,\ p,\ r\}$ avec*

$$\|q\| = \|p\| = \|r\| = 1$$

*et l'inégalité (9) c'est une base orthogonale dont tous les membres sont de norme 1.*

**Proposition 1.6.1** *[17] Une famille $\{q,\ p,\ r\}$ de trois vecteurs est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle satisfait à*

$$\|q\| = \|p\| = 1,\ q \cdot p = 0,\ r = q \times p$$

# Chapitre 2

# Le groupe des quaternions

Dans ce second chapitre, nous introduisons l'étude du groupe des quaternions avec quelques de ses définitions, ses propriétés et quelques remarques, et le reste de ce chapitre est dédié à l'étude de la relation substantielle entre le groupe et l'algèbre des quaternions, qui contient le groupe des quaternions discrète de l'algèbre des quaternions et, l'action d'un groupe des quaternions sur un ensemble des quaternions.

## 2.1 Groupe des quaternions

En mathématiques et plus précisément en théorie des groupes, le groupe des quaternions est un groupe non abélien d'ordre 8.

**Définition 2.1.1** *[19] Le groupe des quaternions est souvent désigné par le symbole $Q$ ou $Q_8$ et est écrit sous forme multiplicative, avec les 8 éléments suivants*

$$Q_8 = \{1,\ -1,\ i,\ -i,\ j,\ -j,\ k,\ -k\}$$

*Ici, 1 est l'élément neutre, $(-1)^2 = 1$ et $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$ pour tout $a$ dans $Q$. Les règles de multiplication restantes peuvent être obtenues à partir de la relation suivante :*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2.1.1}$$

*La table de multiplication pour $Q_8$ est donnée par : [19]*

| $Q \times Q$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ | $-1$ | $-i$ | $-j$ | $-k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ | $-1$ | $-i$ | $-j$ | $-k$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ | $-i$ | $1$ | $-k$ | $j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ | $-j$ | $k$ | $1$ | $-i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ | $-k$ | $-j$ | $i$ | $1$ |
| $-1$ | $-1$ | $-i$ | $-j$ | $-k$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $-i$ | $-i$ | $1$ | $-k$ | $j$ | $i$ | $1$ | $k$ | $-j$ |
| $-j$ | $-j$ | $k$ | $1$ | $-i$ | $j$ | $-k$ | $1$ | $i$ |
| $-k$ | $-k$ | $-j$ | $i$ | $1$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $1$ |

*Le groupe ainsi obtenu est non commutatif comme on peut le voir sur la relation :* $ij = -ji$.

**Remarque 2.1.1** *[19] Le groupe quaternion a la suivante présentation :*

$$\left\langle i,\, j,\, k \backslash\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk \right\rangle$$

*Les éléments $i^3$, $j^3$, $k^3$ sont désignés $-i$, $-j$, $-k$ respectivement.*

**Proposition 2.1.1** *[19] Le groupe quaterionique peut être représenté comme un sous-groupe du groupe linéaire $GL_2(\mathbb{C})$ une représentation*

$$Q_8 = \{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\} \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

*Est donné par*

$$1 \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ i \mapsto \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix},\ j \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\ k \mapsto \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

*étant donné que toutes les matrices ci-dessus ont unité déterminant, cela est une représentation de $Q_8$ dans le groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{C})$. Les identités standard pour quaternion multiplication peuvent être vérifiées en utilisant les lois habituelles de la multiplication matricielle dans $GL_2(\mathbb{C})$.*

**Nature de groupe**

[19] De la relation (2.1.1), on obtient

$$i^4 = j^4 = k^4 = 1,$$

D'où on peut avoir la définition suivante :

**Définition 2.1.2** *[19] Dans le groupe des quaternions $Q_8$, les trois éléments $i$, $j$ et $k$ sont tous d'ordre 4 dans $Q_8$ et deux quelconques d'entre eux engendrent le groupe entier. $Q_8$ admet la présentation*

$$\left\langle x,\, y \setminus x^4 = 1,\, x^2 = y^2,\, yxy^{-1} = x^{-1} \right\rangle$$

*On peut prendre, par exemple, $x = i$, $y = j$.*

**Remarque 2.1.2** *[19] Le groupe $\{+1,\ -1\}$ est donc un sous-groupe distingué isomorphe au groupe cyclique d'ordre deux, noté ici $C_2$. Le quotient de $Q_8$ par le groupe $C_2$ donne un groupe à quatre élément on écrit*

$$Q_8/C_2 = \left\{\overline{1},\, \overline{i},\, \overline{j},\, \overline{k}\right\}$$

*est d'ordre 4 comme $\left(\overline{j}\right)^2 = \left(\overline{k}\right)^2 = \left(\overline{i}\right)^2 = \overline{1}$, on conclut que $Q_8/C_2$ est isomorphe au groupe de Klein noté ici $V$, on écrit*

$$Q_8/C_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong V$$

**Proposition 2.1.2** *Le centre et le sous-groupe des commuters de $Q_8$ est le sous-groupe $\{+1,\ -1\}$. On écrit*

$$Z\left(Q_8\right) = \{+1,\ -1\}\,.$$

**Preuve.** Comme $Z(Q_8)$ est un sous-groupe de $Q_8$, par le théorème de Lagrange $card(Z(Q_8)) \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 8\}$. Or, $card(Z(Q_8) \neq 8$ où 4 , car $Q_8$ est non abélien et $card(Z(Q_8) \neq 1$ car $Q_8$ est un 2-groupe ( $|Q_8| = 8 = 2^3$ ), et tout $p$-groupe a d'après la formule des classes un centre non trivial. D'où $card(Z(Q_8)) = 2$. Comme on a que $1$, $-1$ qui commutent avec tous les éléments de $Q_8$, alors, $Z\left(Q_8\right) = \{1,\ -1\}$. ∎

**Proposition 2.1.3** *[19] Soit le sous-groupe $C_2 = \{1, \ -1\}$ de $Q_8$. Les classes à gauche modulo $C_2$ sont :*

$$C_2 = \{1, \ -1\}, \ iC_2 = \{i, \ -i\}, \ jC_2 = \{j, \ -j\}, \ kC_2 = \{k, \ -k\}.$$

**Proposition 2.1.4** *[8] Les classes de conjugaison de $Q_8$ sont :*

$$\{1\}, \ \{-1\}, \ \{i, \ -i\}, \ \{j, -j\}, \ \{k, \ -k\}.$$

**Preuve.** Les éléments 1 et $-1$ commutent avec tous les autres éléments et donc forment deux classes de conjugaison de cardinal 1. Les autres classes de conjugaison sont de cardinal au moins 2, puisque $Z(Q_8) = \{1, \ -1\}$. D'autre part, le cardinal de chacune de ces classes divises 8, et leur somme est 6. Donc, on trouve trois autres classes de conjugaison de cardinal 2. Elles sont $\{i, \ -i\}$,$\{j, \ -j\}$ et $\{k, \ -k\}$. ■

### Groupe de quaternions généralisé

**Définition 2.1.3** *[19] un groupe est appelé un groupe des quaternions généralisé s'il possède une présentation*

$$Q_{2^n} = \left\langle x, \, y \backslash \ x^{2^{n-1}} = 1, \, x^{2^{n-2}} = y^2, \, yxy^{-1} = x^{-1} \right\rangle$$

*Pour un certain entier $n \geq 3$. L'ordre de ce groupe est $2^n$. Le groupe des quaternions ordinaire correspond au cas $n = 3$. Le groupe des quaternions généralisé peut être réalisé comme le sous-groupe des quaternions unités engendré par $x = e^{2\pi i/2^{n-1}}$, $y = j$.*

**Remarque 2.1.3** *Les groupes des quaternions généralisés ont la propriété que chaque sous-groupe abélien est cyclique.*

**Proposition 2.1.5** *[3] Soit le groupe des quaternions $Q_8$, il y a six sous-groupes de $Q_8$ sont :*

$$\{1\}, \ \{1, \ -1\}, \ \{1, \ -1, i, \ -i\}, \ \{1, \ -1, j, \ -j\}, \ \{1, \ -1, k, \ -k\}, Q_8.$$

*L'intersection d'aucun de ses sous-groupes, deux à deux, ne se réduit à $\{1\}$.*

**Remarque 2.1.4** *:*

1. *[3] D'après le théorème de Lagrange, un sous-groupe de $Q_8$ est d'ordre 1 ou 2 ou 4 ou 8.*
2. *Tout les sous-groupes sont distingués.*
3. *$Q_8$ est indécomposable ( en produit direct de sous groupes) puisque tous ses sous-groupes stricts contiennent $Z(Q_8)$.*
4. *[3] Chaque sous-groupe de $Q_8$ est un sous- groupe normaux dans $Q_8$ car $\forall i, j, k \in Q_8$ on a :*

$$\begin{aligned} jij^{-1} &= -jij = -jk = -i \\ jkj^{-1} &= -jkj = ji = -k \\ kik^{-1} &= -kik = kj = -i \\ kjk^{-1} &= -kjk = -ki = -j \\ iji^{-1} &= -iji = ik = -j \\ iki^{-1} &= -iki = -ij = -k \end{aligned}$$

5. *Le groupe $Q_8$ est nilpotent car c'est un $2-$groupe.*

## 2.2 La relation substantielle entre le $Q_8$ et $H$

### 2.2.1 Groupe des quaternions discrets de l'algèbre des quaternions

**Lemme 2.2.1** *[2] Posons $H_0 = \{a + bi + cj + dk |\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}\} \subset H$. Alors, $H_0$ est un sous-anneau de $H$.*

**Preuve.** En effet, on a $i \in H_0$ et pour tout $q = a+bi+cj+dk$, $p = \acute{a}+\acute{b}i+\acute{c}j+\acute{d}k \in H_0$,

$$\begin{aligned} q - p &= (a + bi + cj + dk) - \left(\acute{a} + \acute{b}i + \acute{c}j + \acute{d}k\right) \\ &= (a - \acute{a}) + \left(b - \acute{b}\right) i + (c - \acute{c})\, j + \left(d - \acute{d}\right) k \in H_0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} qp &= (a+bi+cj+dk)\left(\acute{a}+\acute{b}i+\acute{c}j+\acute{d}k\right) \\ &= a\acute{a}-b\acute{b}-c\acute{c}-d\acute{d}+\left(a\acute{b}+b\acute{a}+c\acute{d}-d\acute{c}\right)i+\left(a\acute{c}+c\acute{a}-b\acute{d}+d\acute{b}\right)j+\left(d\acute{a}+a\acute{d}+b\acute{c}-c\acute{b}\right)k \\ &= a_0+b_0i+c_0j+d_0k \in H_0 \end{aligned}$$

■

**Lemme 2.2.2** *[2] Soit $q \in H_0$, alors $\bar{q} \in H_0$.*

**Preuve.** Clair, car si $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{Z}$, alors $-a$, $-b$, $-c$, $-d \in \mathbb{Z}$ aussi. ■

**Proposition 2.2.1** *1. [2] Soit $q \in H_0$, alors $\|q\| \in \mathbb{N}$.*

*2. Soit $q \in H_0$. Alors, $q \in H_0^* \Longleftrightarrow \|q\| = 1$.*

**Preuve.** Soit $q \in H_0$ on a, la section 1 est une conséquence du fait que si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a^2 \in \mathbb{N}$ et du fait que $\|q\|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$.

2. Soit $q \in H_0^*$ , alors il existe $p \in H_0$ ; tel que $p = \frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}$, d'où, $qp = pq = 1$ et $\|p\|^2 = \left\|\frac{1}{\|q\|}\bar{q}\right\|^2 = \frac{1}{\|q\|^2}\|\bar{q}\|^2 = \frac{1}{\|q\|^2}\|q\|^2 = 1$ . Par suite, $\|q\|\,\|p\| = \|qp\| = \|1\| = 1$, d'où, $\|q\| = 1$.

Inversement, Soit $q \in H_0$ tel que $\|q\| = 1$. Posons $p = \bar{q}$. On a $qp = q\bar{q} = \|q\|^2 = 1$. On sait que $p = \bar{q} \in H_0$. De même, $pq = 1$, donc $q \in H_0^*$. ■

**Proposition 2.2.2** *[2] $Q_8 = H_0^*$.*

**Preuve.** On a $\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$, alors, d'après la proposition précédente, $i, j, k \in H_0^*$. Comme $Q_8$ est engendré $i$, $j$, $k$, alors $Q_8 \subset H_0^*$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $q = a+bi+cj+dk \in H_0^*$ . On a $\|q\| = a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Donc, soit

$a^2 = 1$, $b^2 = c^2 = d^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$, $b = c = d = 0 \Longleftrightarrow q = \pm 1$ ;

$b^2 = 1$, $a^2 = c^2 = d^2 = 0 \Longleftrightarrow b = \pm 1$, $a = c = d = 0 \Longleftrightarrow q = \pm i$ ;

$c^2 = 1$, $a^2 = b^2 = d^2 = 0 \Longleftrightarrow c = \pm 1$, $b = a = d = 0 \Longleftrightarrow q = \pm j$ ;

$d^2 = 1$, $a^2 = b^2 = c^2 = 0 \Longleftrightarrow d = \pm 1$, $a = b = c = 0 \Longleftrightarrow q = \pm k$.

D'où $q \in Q_8$. ■

### 2.2.2 L'action d'un groupe $Q$ sur un ensemble $H$

**Définition 2.2.1** *[4] Soient $H$ un ensemble et $Q$ un groupe. Une action de $Q$ sur $H$ ou opération $Q$ sur $H$ est une application*

$$m : Q \times H \longrightarrow H$$
$$(x, q) \longmapsto m(x, q)$$

*Vérifiant les deux axiomes suivants :*

1. $\forall q \in H,\ m(1_Q,\ q) = q\,;$
2. $\forall x,\ \acute{x} \in Q,\ \forall q \in H,\ m(\acute{x}x,\ q) = m(\acute{x},\ m(x,\ q)).$

   Dans ces conditions, on dit que $Q$ agit (ou opère) sur $H$ via (ou par, ou grâce) $m$. On dit aussi que $m$ munit $H$ d'une structure de $Q-$ensemble.

**Remarque 2.2.1** *La notation $m(x, q)$ est très lourde et rend particulièrement illisible l'axiome (2). Pour la simplifier, on note $x \cdot q$ ou encore $xq$ plutôt que $m(x, q)$. L'axiome (2) prend alors la forme d'un axiome d'associativité, l'axiome (2) écrit*

$$\forall x,\ \acute{x} \in Q,\ \forall q \in H,\ x(\acute{x}q) = (x\acute{x})\,q.$$

**Lemme 2.2.3** *[4] Soit $Q$ un groupe. Alors, $Q$ agit sur lui-même par translation à gauche*

**Proposition 2.2.3 (Action de groupe une deuxième vision)** *[4] On suppose que le groupe $Q$ agit sur l'ensemble $H$ via $m$. Pour $x \in Q$ fixé, on considère l'application*

$$\alpha_x : H \longrightarrow H$$
$$q \longmapsto xq$$

*qui est la composée des applications $q \mapsto (x,\ q)$ et $m$.*

*Dans ce langage, l'axiome (1) est synonyme de $\alpha_{1_Q} = id_H$ et l'axiome (2) est synonyme de $\alpha_{\acute{x}} \circ \alpha_x = \alpha_{\acute{x}x}$ pour tout $x,\ \acute{x} \in Q$. On en déduit alors que $\alpha_x$ est bijection de $H$ dans lui-même d'inverse $\alpha_{x^{-1}}$ puisque :*

$$\begin{aligned} \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}} &= \alpha_{xx^{-1}} = \alpha_{1_Q} = id_H \\ \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x &= \alpha_{x^{-1}x} = \alpha_{1_Q} = id_H \end{aligned}$$

*Finalement, on a construit une application* $\alpha$

$$\begin{aligned} \alpha : Q &\longrightarrow S_H \\ x &\longmapsto \alpha_x \end{aligned}$$

*qui est un morphisme de groupes* $Q$ *dans le groupe symétrique de l'ensemble* $H$*, puisque* $\alpha_{\acute{x}} \circ \alpha_x = \alpha_{\acute{x}x}$ *pour tous* $x,\, \acute{x} \in G$*. Ainsi, à partir de l'action de groupe* $m$*, on a construit un morphisme de groupes de* $Q$ *dans* $S_H$*. On dit que* $\alpha$ *est le morphisme associé à* $m$*. On s'intéresse à présent à la construction en sens inverse : soit* $\varphi : Q \longrightarrow S_H$ *un morphisme de groupes, on va construire à partir de* $\varphi$ *une action de groupe. Pour cela, on définit l'application :*

$$\begin{aligned} m : Q \times H &\longrightarrow H \\ (x, q) &\longmapsto \varphi(x)(q) \end{aligned}$$

*est une action de* $Q$ *sur* $H$*.*

**Preuve.** Il s'agit de montrer que $m$ vérifie les axiomes (1) et (2) . Cette vérification repose fondamentalement sur le fait que $\varphi$ est un morphisme de groupes. En effet, comme $\varphi$ est un morphisme de groupe, on a

$$\varphi(1_Q) = 1_{S_H} = id_H$$

et donc

$$m(1_Q,\, q) = \varphi(1_Q)(q) = id_H(q) = q$$

pour tout $q \in H$ et (1) est vérifié.

Pour $x,\, \acute{x} \in Q$ et $q \in H$. On a

$$\begin{aligned} m(\acute{x},\, m(x,\, q)) &= \varphi(\acute{x})(\varphi(x)(q)) = \varphi(\acute{x}) \circ \varphi(x)(q) = \varphi(\acute{x}x)(q) \\ &= m(\acute{x}x,\, q). \end{aligned}$$

Et l'axiome (2) est vérifié. Le fait que $\varphi$ soit un morphisme groupes intervient pour justifier l'avant-dernière égalité. Ainsi, à partir du morphisme de groupes $\varphi$, on a bien construit une action de groupe. On dit que $m$ est l'action associée à $\varphi$.

Pour que la construction ci-dessus soit cohérente et exploitable, il reste à vérifier que le passage d'action à morphisme de groupes et de morphisme de groupes à action sont bien inverses l'un de l'autre c'est-à-dire que l'action associée au morphisme associé à une action $m$ n'est autre que $m$ et que le morphisme associé à l'action associée au morphisme $\varphi$ n'est autre que $\varphi$. Pour cela, considérons, dans un premier temps, une action $m$ de $Q$ sur $H$, $\varphi$ le morphisme associé à $m$ et $\acute{m}$ l'action associée à $\varphi$. Par définition, on a, pour $x \in Q$ et $q \in H$

$$\acute{m}(x, q) = \varphi(x)(q) = xq = m(x, q)$$

C'est-à-dire $m = \acute{m}$. Considérons à présent, un morphisme de groupes $\varphi : Q \longrightarrow S_H$ , $m$ l'action associée à $\varphi$ et $\acute{\varphi}$ le morphisme associé à $m$. Par définition, on a, pour $x \in Q$ et $q \in H$,

$$\acute{\varphi}(x)(q) = m(x, q) = \varphi(x)(q)$$

C'est-à-dire $\varphi = \acute{\varphi}$.

Finalement, la morale de tout ceci se résume par se donner une action de groupe de $Q$ sur $H$, c'est la même chose que de se donner un morphisme de groupe de $Q$ sur $S_H$. Mais ce n'est pas tant cette morale qu'il faut retenir que la façon de passer de l'un à l'autre : l'important est de savoir transformer une action en un morphisme de groupes et inversement. ■

De ce qui précède, on a la définition suivante :

**Définition 2.2.2** *l'ensemble des translations de $H$ par l'action de $Q$ est un sous groupe de $S_H$, appelé le groupe des $Q-$ translations dans $H$.*

**Définition 2.2.3 (Action de groupe version 2)** *[4] Soient $H$ un ensemble et $Q$ un groupe (dont on note $1_Q$ l'élément neutre). Une action de $Q$ sur $H$ ou opération de $Q$ sur $H$ est un morphisme de groupes $\varphi$ de $Q$ dans $S_H$. Dans ces conditions, on dit que $Q$ agit (ou opère) sur $H$ via (ou par, ou grâce à) $\varphi$. On dit aussi que $\varphi$ munit $H$ d'une structure de $Q$-ensemble.*

### 2.2.3 L'action par les translations à gauche du groupe de quaternions sur l'algèbre de quaternions

**Proposition 2.2.4** *Soient $H$ l'ensemble des quaternions et $Q_8$ le groupe des quaternions. L'application*

$$m : Q_8 \times H \longrightarrow H$$
$$(x, q) \longmapsto m(x, q) = xq$$

*est une action de $Q_8$ sur $H$ par la translation à gauche.*

**Preuve.** Soit $q = a+bi+cj+dk \in H$, $m(1_Q,\, q) = 1_Q \cdot (a+bi+cj+dk) = (1+0i+0j+0k)(a+bi+c$
$a+bi+cj+dk = q$, l'axiome (1) est vérifié, et pour l'axiome (2) on a :

pour $i,\, j \in Q$, $\forall q \in H$, $m(ji,\, q) = (ji)\, q = \; (-k)\, q = (-k)(a+bi+cj+dk) = a(-k) + b(-k)\, i + c(-k)\, j + d(-k)\, k$, pour $j^2 \; = -1$ et, d'après la remarque (1.1.1), alors $m(ji,\, q) = a(j^2k) + b(j^2k)\, i + c(j^2k)\, j + d(j^2k)\, k = a(j)(jk) + b(j)(jk)\, i + c(j)\; (jk)\, j + d(j)(jk)\, k = j(a(jk) + b(i)\, i + c(i)\, j + d(i)\, k) \; = j(i(a+bi+cj+dk)) = j(iq) = m(j,\, m(i,\, q))$,

Même méthode pour tous éléments de $Q_8$. Donc $m$ est une action de $Q_8$ sur $H$. ■

**Proposition 2.2.5** *Soit $Q_8$ le groupe des quaternions. Le groupe $Q_8$ agit sur lui-même par translation à gauche est une action.*

**Preuve.** Soit $i,\, j,\, k \in Q_8$ on a et l'application

$$\begin{aligned} m : Q_8 \times Q_8 &\longrightarrow Q_8 \\ (x,\, \acute{x}) &\longmapsto x\acute{x} \end{aligned}$$

.

$$\forall i \in Q_8,\, m(1_{Q_8},\, i) = 1_{Q_8} i = (1+0i+0j+0k)\, i = i \in Q_8$$

Et pour l'axiome (2) on a :

$$\begin{aligned} m(i,\, m(j,\, k)) &= i(jk) = ii = i^2 = -1 = k^2 = kk = (ij)\, k \\ &= m(ij,\, k)\,. \end{aligned}$$

Même méthode pour tous éléments de $Q_8$. ■

**Proposition 2.2.6** *Soient $Q_8$ le groupe des quaternions et $S_H$ le groupe symétrique de l'algèbre des quaternions $H$, l'application $\varphi : Q_8 \longrightarrow S_H$ un morphisme des groupes, on va construire à partir de $\varphi$ une action de groupe. Pour cela, on définit l'application*

$$\begin{aligned} m : Q_8 \times H &\longrightarrow H \\ (x,\, q) &\longmapsto \varphi(x)(q) \end{aligned}$$

*est une action de $Q_8$ sur $H$.*

**Preuve.** Comme $\varphi$ est un morphisme de groupe d'après la proposition (3.2.3), on a $\varphi(1_{Q_8}) = 1_{S_H} = id_H$ et donc $m(1_{Q_8}, q) = \varphi(1_{Q_8})(q) = id_H(q) = q$, pour tout $q \in H$.

Pour $i, j \in Q_8$ et $q \in H$. On a

$$\begin{aligned} m(j, m(i, q)) &= \varphi(j)(\varphi(i)(q)) = \varphi(j) \circ \varphi(i)(q) = \varphi(ji)(q) \\ &= m(ji, q). \end{aligned}$$

Même méthode pour tous éléments de $Q_8$. Alors cette application est une action de $Q_8$ sur $H$. ■

### 2.2.4 L'action par les conjugaisons du groupe de quaternions sur l'algèbre de quaternions

**Proposition 2.2.7** *Soient $Q_8$ le groupe des quaternions et $H$ l'algèbre des quaternions, l'application*

$$\begin{gathered} Q_8 \times H \longrightarrow H \\ (x, q) \longmapsto x \cdot q = xqx^{-1} \end{gathered}$$

*Est une action de $Q_8$ sur $H$ par conjugaison.*

**Preuve.** $\forall q \in H$, $1_{Q_8} q = 1_{Q_8} q 1_{Q_8}^{-1} = (1 + 0i + 0j + 0k) q (1 + 0i + 0j + 0k) = q$. Et soient $i, j \in Q_8$, $\forall q \in H$, $(ij) q = (ij) q (ij)^{-1} = (ij) q (j)^{-1} (i)^{-1} = i (jqj^{-1}) i^{-1} = i (jqj^{-1}) = i (jq)$, donc cette application est une action de $Q_8$ sur $H$ par conjugaison. ■

**Proposition 2.2.8** *Soit $Q_8$ le groupe des quaternions, alors $Q_8$ agit sur lui-même par conjugaison*

$$\begin{gathered} Q_8 \times Q_8 \longrightarrow Q_8 \\ (x, \acute{x}) \longmapsto x\acute{x}x^{-1} \end{gathered}$$

*Et ceci est bien une action.*

**Preuve.** Comme $1_{Q_8}$ l'élément neutre, alors $\forall x \in Q_8$, $1_{Q_8} x 1_{Q_8}^{-1} = x$, et pour tous $i$, $j$ et $k \in Q_8$ on a $(ij) k = (ij) k (ij)^{-1} = (ij) k (j)^{-1} (i)^{-1} = i (jkj^{-1}) i^{-1} = i (jk) i^{-1} = i (jk)$. Alors cette application est une action de $Q_8$ sur lui-même. ■

**L'action par les conjugaisons du groupe de quaternions unités sur l'algèbre de quaternions**

**Proposition 2.2.9** *Soit $q \in G$, c'est-à-dire un quaternion de norme 1, et $p \in H$. L'application*

$$G \times H \longrightarrow H$$
$$(q,\, p) \longmapsto qpq^{-1} = qp\bar{q}$$

*Est une action de $G$ sur $H$ par conjugaison.*

**Preuve.** $1 \in G$, car $\forall q \in G$, $\|q\| = 1$, donc $1p1^{-1} = p$, $\forall p \in H$.
$\forall q,\, \acute{q} \in G$ et $\forall p \in H$

$$(q\acute{q})\, p = (q\acute{q})\, p\, (q\acute{q})^{-1} = (q\acute{q})\, p\, (\acute{q})^{-1}\, (q)^{-1} = q \left(\acute{q}p\acute{q}^{-1}\right) q^{-1}$$

Pour $q \in G$, alors $\|q\| = 1$ donc $q^{-1} = \bar{q}$ on a :

$$(q\acute{q})\, p = q \left(\acute{q}p\ \bar{\acute{q}}\right) \bar{q} = q\, (\acute{q}p)$$

Alors cette application est une action de $G$ sur $H$ par conjugaison. ■

# Chapitre 3

# Application des quaternions dans la physique, la mécanique

Dans ce dernier chapitre, nous montrons l'application des quaternions dans la physique et la mécanique, qui contient les quaternions et les rotations dans l'espace, et enfin l'utilisation des quaternions dans le groupe orthogonal et spécifiquement dans le groupe spécial orthogonal réel.

## 3.1 Quaternions et rotations dans l'espace

Nous avons vu dans le chapitre 1, proposition (1.3.7), que l'inverse $q^{-1}$d'un quaternion $q$ est égal à son conjugué $\bar{q}$. Dans ce chapitre nous allons voir que la conjugaison par un élément du groupe $G$ des quaternions de norme unité peut s'interpréter comme une rotation dans l'espace.

**Définition 3.1.1** *[21] La conjugaison par un quaternion $q$ non nul et de norme unité est l'application $R_q$ définie sur $H$ par :*

$$R_q : p \in H \longrightarrow q \cdot p \cdot q^{-1} = q \cdot p \cdot \bar{q} \in H$$

*Et nous affirmons que cette application est une rotation.*

**Remarque 3.1.1** *1. D'après le lemme (1.3.1), $P$ l'ensemble des quaternions purs, $P$ est le sous-espace vectoriel engendré par $i$, $j$, $k$, il est isomorphe à $\mathbb{R}^3$, i.e. l'espace* *à 3 dimensions : à un quaternion $bi + cj + dk$, on fait correspondre le vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$. Nous allons montrer que $P$ est stable par toutes les applications $R_q$, et que celles-ci correspondent exactement aux rotations de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Si $p \in P \cap G$, alors $p^2 = -1$.*

En effet, on a $p \in G$ donc $p^{-1} = \overline{p}$, et $p \in P$ donc $\overline{p} = -p$. On en déduit $p^2 = p \cdot (-p^{-1}) = -1$.

**Théorème 3.1.1** *[21] Soit $q \in G$. L'application*

$$R_q : p \longmapsto qp\overline{q}$$

*est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H$ qui conserve la norme (c'est un endomorphisme orthogonal de $H$). De plus, $R_q$ laisse stable les sous-espace vectoriels $\mathbb{R}$ et $P$.*

**Preuve.** Soit donc $q$ un quaternion de norme 1. La linéarité de $R_q$ ne pose pas de problème : si $p_1$, $p_2$ sont deux quaternions et $\lambda_1$, $\lambda_2$ des réels, alors on a :

$$R_q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)\,\overline{q} = \lambda_1 q \cdot p_1 \cdot \overline{q} + \lambda_2 q \cdot p_2 \cdot \overline{q} = \lambda_1 R_q(p_1) + \lambda_2 R_q(p_2)$$

D'autre part, on a par le théorème ( 1.3.2), pour un quaternion $p$ :

$$\|R_q(p)\| = \|qp\overline{q}\| = \|q\|\,\|p\|\,\|\overline{q}\| = \|p\|$$

Puisque $q$ (et donc également $\overline{q}$) est de norme 1. Passons nous à la racine carrée, nous déduisons que $R_q$ conserve la norme.

Enfin, on sait déjà dans le chapitre 1 que $\mathbb{R}$ est le centre de $H$. On a donc, pour $x$ réel :

$$R_q(x) = q \cdot x \cdot \overline{q} = x \cdot q \cdot \overline{q} = x\,\|q\| = x$$

Pour ce qui est de $P$, soit donc $p \in P$ un quaternion pur. Alors

$$\begin{aligned}
R_q(p) + \overline{R_q(p)} &= q \cdot p \cdot \overline{q} + \overline{q \cdot (p \cdot \overline{q})} \\
&= q \cdot p \cdot \overline{q} + \overline{(p \cdot \overline{q})} \cdot \overline{q} \\
&= q \cdot p \cdot \overline{q} + \overline{\overline{q}} \cdot \overline{p} \cdot \overline{q} \text{ (la conjugaison est un anti-automorphisme)} \\
&= q \cdot p \cdot \overline{q} + q \cdot \overline{p} \cdot \overline{q} \text{ (la conjugaison est involutive)} \\
&= R_q(p + \overline{p}) = R_q(0) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $R_q(p)$ est aussi un quaternion pur, et donc que $P$ est stable par $R_q$.

■

**Remarque 3.1.2** *L'application $R$ est un homomorphisme car on a*

$$\begin{aligned} R_{q_1 q_2}(p) &= q_1 q_2 p \overline{q_1\ q_2} \\ &= q_1 q_2 p \overline{q_2}\ \overline{q_1} \\ &= R_{q_1} R_{q_2}(p) \end{aligned}$$

*Et son noyau est*

$$\mathbb{R} \cap G = \{1,\ -1\},$$

[21] La restriction de $R_q$ à $P$ définit donc un endomorphisme orthogonal de $P$ (isomorphe à $\mathbb{R}^3$). $R_q \mid_P$ est donc une isométrie vectorielle de $P$, c'est-à-dire une symétrie ou une rotation. On va noter $s_q$ l'isométrie de $P$ ainsi définie par le quaternion $q$.

**Lemme 3.1.1** *[21] Pour tout quaternion $q$ de norme $1$, $s_q$ est de déterminant $1$, c'est donc une rotation.*

**Preuve.** On peut bien sûr calculer explicitement en fonction de

$$q = a + bi + cj + dk$$

la matrice (dans la base canonique $\{i,\ j,\ k\}$ de $P$) de l'endomorphisme $s_q$, et en calculer ensuite le déterminant. Ainsi, on obtient les coefficients de la première colonne en calculant :

$$\begin{aligned} R_q(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) \\ &= \left(ai + b\left(i^2\right) + c\,(ji) + d\,(ki)\right)(a - bi - cj - dk) = (ai - b - ck + dj)(a - bi - cj - dk) \\ &= \left(a^2 i + ab - ack + adj\right) - \left(ba - b^2 i - bcj - bdk\right) - \left(cak - cbj + c^2 i + cd\right) + \left(daj + dbk + cd - \right. \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k \end{aligned}$$

et pour la deuxième et troisième colonne en calculant :

$$\begin{aligned} R_q(j) &= (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) \\ &= 2\,(bc - ad)\,i + \left(a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right) j + 2\,(ab + cd)\,k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_q(k) &= (a+bi+cj+dk)k(a-bi-cj-dk) \\ &= 2(ac+bd)\,i + 2(cd-ab)\,j + \left(a^2-b^2-c^2+d^2\right)k \end{aligned}$$

Il faut alors calcules le déterminant de matrice :

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & (a^2-b^2+c^2-d^2) & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(ab+cd) & (a^2-b^2-c^2+d^2) \end{vmatrix}$$

et l'on obtient alors pour son déterminant une expression polynomiale en $a$, $b$, $c$, $d$ qu'il s'agit de simplifier en utilisant le fait que $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Nous allons utiliser à la place un argument topologique. Grâce au fait que le déterminant recherché est une fonction polynomiale de $a$, $b$, $c$ et $d$, donc continue (on muni $H$ de la topologie induite par la norme), on a une fonction continue de $G$ (l'ensemble des quaternions de norme 1) dans $\{-1,1\}$ (en effet, les endomorphismes $s_q$ sont des isométries de l'espace vectoriel $P$ de dimension 3, donc de déterminant $\pm1$). Comme d'autre part $G$ est connexe ($G$ est isomorphe à la sphère de dimension 4), on en déduit que cette fonction est constante. Enfin, lorsque $q=1$, l'endomorphisme $s_q$ n'est autre que l'identité, de déterminant 1. Notre constante est donc 1, et donc les endomorphismes $s_q$ sont tous des rotations de $P$. ■

**Proposition 3.1.1** *[5] Si $q=a+bi+cj+dk$ est un quaternion unitaire, on vérifie aisément que la matrice de la rotation $3\times3$ associée peut s'écrire :*

$$\begin{aligned} M_R &= \begin{vmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2(a^2+b^2)-1 & 2(bc-ad) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & 2(a^2+c^2)-1 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(ab+cd) & 2(a^2+d^2)-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

*La deuxième matrice est une simplification de la première, avec le postulat que $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.*

**Théorème 3.1.2** *[21] Si $q=xi+yj+zk$ est un quaternion pur de norme 1, alors l'endomorphisme $s_q$ de $P$ est le demi tour d'axe $(x,\,y,\,z)$.*

**Preuve.** En effet $s_q$ est une rotation, et comme

$$R_q(q) = q \cdot q \cdot \overline{q} = q,$$

on sait que le vecteur $(x,\ y,\ z)$ est fixé par $s_q$, qui est donc une rotation d'axe $(x,\ y,\ z)$. D'autre part, comme $q$ est un quaternion pur de norme 1 ($q \in P \cap G$), on a vu que

$$q^2 = -1.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
(R_q)^2 &= R_q(R_q(p)) \\
&= q(qp\overline{q})\overline{q} = q^2 p\ \overline{q}^2 \\
&= R_{q^2} \\
&= (-1)p(-q)^2 = (-1)pq^2 = (-1)p(-1) = p
\end{aligned}$$

est la conjugaison par $-1$, soit l'identité. $s_q$ est donc une rotation d'axe $(x,\ y,\ z)$, et aussi une involution ($s_q^2$ est l'identité). C'est donc que $s_q$ est soit l'identité, soit le demi tour d'axe $(x,\ y,\ z)$. La première possibilité est exclue, sinon $q$ serait dans le centre de $H$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$. ■

**Remarque 3.1.3** *A ce stade là, on peut affirmer que toute rotation de l'espace peut se représenter par la conjugaison par un quaternion de norme* 1*. En effet, les demi-tours engendrent le groupe des rotations, c'est-à-dire que toute rotation peut s'exprimer comme le produit d'un nombre fini de demi-tours, et donc comme la conjugaison par un produit de quaternions de norme 1 (produit qui est lui-même un quaternion de norme* 1*)...*

On va tout de même donner une formule explicite reliant une rotation et le quaternion qui la représente.

**Théorème 3.1.3** *[13] Soit* $\overrightarrow{u}(x,\ y,\ z)$ *un vecteur unitaire, et* $\theta$ *un angle* ($\theta \in [0; 2\pi[$)*. Alors la rotation d'axe* $\overrightarrow{u}$ *et d'angle* $\theta$ *(dans le sens direct) correspond à l'application* $s_q$*, où* $q$ *est le quaternion :*

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + x\sin\frac{\theta}{2}i + y\sin\frac{\theta}{2}j + x\sin\frac{\theta}{2}k$$

*Ce quaternion est encore noté*

$$\begin{aligned} q &= (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u}) \\ &= \begin{vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ x\sin\frac{\theta}{2} \\ y\sin\frac{\theta}{2} \\ z\sin\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Notons $\acute{q}$ le quaternion $xi + yj + zk$. On a donc :

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\acute{q}$$

Alors

$$\begin{aligned} R_q(\acute{q}) &= q\acute{q}\overline{q} \\ &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\acute{q})\acute{q}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\acute{q}) \\ &= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\acute{q} = \acute{q} \end{aligned}$$

On en déduit là aussi que $s_q$ est une rotation d'axe $(x,\ y,\ z)$. Si $\overrightarrow{v} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ désigne un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$, et $p$ le quaternion $x_1 i + y_1 j + z_1 k$, alors on a :

$$\begin{aligned} R_q(p) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\acute{q})p(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\acute{q}) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}p + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\acute{q}p - p\acute{q}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\acute{q}p\acute{q} \end{aligned}$$

Mais $\acute{q}p\overline{\acute{q}}$ $-\acute{q}p\acute{q} = R_{\acute{q}}\left(p\right) = -p$ puisque $s_{\acute{q}}$ est le demi tour d'axe $(x, y, z)$. Et donc

$$p\acute{q} = \acute{q}\overline{\acute{q}}p\acute{q} = \acute{q}(-\acute{q}p\acute{q}) = \acute{q}(-p) = -\acute{q}p.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} R_q(p) &= \cos^2\frac{\theta}{2}p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\acute{q}p + \sin^2\frac{\theta}{2}\acute{q}p\left(-\acute{q}\right) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\acute{q}p + \sin^2\frac{\theta}{2}\acute{q}p\left(\overline{\acute{q}}\right) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\acute{q}p - \sin^2\frac{\theta}{2}p \\ &= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\acute{q}p \\ &= \cos\theta p + \sin\theta\acute{q}p \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le produit $\acute{q}p$ correspond au produit vectoriel de $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, et donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base orthonormale directe. Et l'égalité précédente se retraduit en

$$s_q(\overrightarrow{v}) = \cos\theta \overrightarrow{v} + \sin\theta \overrightarrow{w}.$$

$s_q$est bien la rotation annoncée. ■

**Proposition 3.1.2** *[9] Soient $q_1$ et $q_2$ deux quaternions des rotations, alors*

$$\begin{aligned} R_{q_1}\left(R_{q_2}\left(\acute{q}\right)\right) &= R_{q_1}\left(q_2\acute{q}\overline{q_2}\right) \\ &= q\left({}_1q_2\acute{q}\overline{q_2}\right)\overline{q_1} \\ &= \left(q_1q_2\right)\acute{q}\left(\overline{q_1q_2}\right) \\ &= R_{q_1q_2}\left(\acute{q}\right), \end{aligned}$$

*C'est-à-dire que la composition de deux rotations correspond à la rotation par leur produit.*

**Proposition 3.1.3** *[9] La rotation par le quaternion de rotation $q$ est équivalente à la rotation par $-q$. On a*

$$\begin{aligned} R_{-q}\left(\acute{q}\right) &= -q\left(\acute{q}\right)\overline{-q} \\ &= (-1)\,q\left(\acute{q}\right)(-1)\,\overline{q} \\ &= q\left(\acute{q}\right)\overline{q} \\ &= R_q\left(\acute{q}\right) \end{aligned}$$

## 3.2 Les Quaternions et le groupe orthogonal

On va intéresser maintenant à la description du groupe orthogonal par les quaternions.

### 3.2.1 Les quaternions et $SO_3(\mathbb{R})$

**Lemme 3.2.1** *[16] $G$ est homéomorphe à la sphère $S^3$ et en particulier $G$ est connexe.*

**Définition 3.2.1** *[20] Soit $q \in G$ et $\acute{q} \in H$, on définit*

$$S_q\left(\acute{q}\right) = q\acute{q}q^{-1} = q\acute{q}\overline{q}$$

*Alors $S_q$ est une bijection qui est en plus $\mathbb{R}$-linéaire, son inverse étant $(S_q)^{-1} = S_{\bar{q}}$, c'est donc un élément de $GL(H)$, on obtient ainsi une application*

$$S : G \longrightarrow GL(4, \mathbb{R})$$
$$q \longmapsto S_q$$

**Proposition 3.2.1** *[20], [15] Soit $q \in G$ on a :*

1. *$S$ est un morphisme de groupes, de noyau $\{\pm 1\}$.*
2. *La restriction de $S_q$ à $\mathbb{R}$ est triviale.*
3. *$S_q$ conserve la norme, donc $S$ est en fait un morphisme à valeurs dans $O(\|.\|)$*

$$S : G \longrightarrow O(\|.\|) \simeq O(4, \mathbb{R})$$
$$q \longmapsto S_q$$

4. *La restriction de $S_{q|P}$ sur le sous-espaces des quaternions purs qui sera noté $s_q$, nous donne donc un élément de $O(\|.\| \, |_P) \simeq O(3, \mathbb{R})$. Plus précisément, $S$ induit un morphisme de groupe $s$*

$$s : G \longrightarrow O(\|.\| \, |_P) \simeq O(3, \mathbb{R})$$
$$q \longmapsto s_q$$

*dont l'image est très précisément $SO(3, \mathbb{R})$ et de noyau $\{\pm 1\}$.*

**Preuve.** Pour tout $q_1$, $q_2 \in G$ et $\acute{q} \in H$ on a

1.

$$S_{q_1 q_2}(\acute{q}) = q_1 q_2 \acute{q} \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \acute{q} \overline{q_2} \; \overline{q_1} = S_{q_1} S_{q_2}(\acute{q}).$$

Ce qui montre que l'on a bien un morphisme de groupe. Enfin, si $q \in \ker(S)$, alors pour tout $\acute{q} \in H$ on a

$$S_q(\acute{q}) = \acute{q} \Longleftrightarrow q\acute{q}q^{-1} = \acute{q} \Longleftrightarrow q\acute{q} = \acute{q}q,$$

On en déduit que $q \in \mathbb{R}$, par conséquent

$$\ker(S) = Z(H) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{q \in \mathbb{R} / \ \|q\| = 1\} = \{1, \ -1\}.$$

2. On a, pour $a \in \mathbb{R}$, $S_q(a) = a$, et donc $S_q \, |_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$.

3. Par ailleurs, $S_q$ conserve la norme, i.e. vérifie

$$\|S_q(\acute{q})\| = \|q\acute{q}\bar{q}\| = \|q\| \|\acute{q}\| \|\bar{q}\| = \|\acute{q}\|,$$

car $q$ est de norme 1. Autrement dit, $S_q$ et donc élément du groupe orthogonal euclidien défini par $\|.\|$ :

$$S_q \in O(\|.\|) \simeq O(4, \mathbb{R}).$$

4. Mais, pour la norme, l'espace des quaternions purs $P$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}$, et comme on a $S_q \mid_P = Id_{\mathbb{R}}$, $P$ est stable par $S_q$. On pose alors $s_q = S_q \mid_P$. D'autre part, la restriction de $\|.\|$ à $P$ nous donne

$$. \|bi + cj + dk\| \mid_P = b^2 + c^2 + d^2,$$

on a encore $s_q \in O(\|.\| \mid_P) \simeq O(3, \mathbb{R})$ et $s : G \longrightarrow O(3, \mathbb{R})$ et un homomorphisme de noyau $\{1, -1\}$.

Munissons $O(3, \mathbb{R})$ de sa topologie naturelle, obtenue en le considérant comme sous-espace de $M(3, \mathbb{R})$, lui-même identifié à $\mathbb{R}^9$. L'application $s$ est alors continue, comme on le voit en calculant la matrice de $s_q$ dans la base $(i, j, k)$.En effet, si $q = a + bi + cj + dk$, les coefficients de la matrice sont des polynômes homogènes de degré 2 en $a$, $b$, $c$, $d$. Par exemple, on a $s_{11} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, $s_{12} = 2(bc - ad)$...

Mais, le déterminant, $\det : O(3, \mathbb{R}) \longrightarrow \{1, -1\}$ est lui aussi une application continue, donc l'application composée $\det \circ s : G \longrightarrow \{1, -1\}$ est continue.

Comme $G$ est connexe, l'image de $G$ par $\det \circ s$ est connexe, donc un singleton, et comme on a $s(1) = Id$, c'est nécessairement $\{1\}$. Donc $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.

Monteront enfin l'égalité $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$. Soit $p \in P \cap G$. Alors $s_p(p) = pp\bar{p} = p$ donc $s_p$ fixe le point $p \in P$, donc c'est une rotation d'axe $\langle p \rangle$. De plus

$$(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{p\bar{p}} = s_{-1} = Id.$$

Donc $s_p$ est une involution et c'est donc le renversement d'axe $\langle p \rangle$. On obtient ainsi tous les renversements de $SO_3(\mathbb{R})$, et comme ils engendrent le groupe, on a bien $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$.

Finalement $G/\ker(s) \simeq s(G)$ c'est-à-dire

$$G/\ker(s) \simeq SO_3(\mathbb{R}).$$

■

**Théorème 3.2.1** *[15], [16] On a un isomorphisme de groupes*

$$G/\{1,-1\} \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$$

*Et donc un la suite exacte :*

$$1 \longrightarrow \{-1,1\} \longrightarrow G \longrightarrow SO(3,\mathbb{R}) \longrightarrow 1.$$

**Remarque 3.2.1** *[16] On a donc un homéomorphisme entre $SO_3(\mathbb{R})$ et $S^3/\{\pm 1\}$.*

**Théorème 3.2.2** *[20] Les automorphismes de corps de $H$ sont intérieurs, i.e. qu'ils sont de la forme $S_q$.*

**Preuve.** Soit $u$ un automorphisme de $H$, $u$ conserve le centre de $H$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ et $u\mid_{\mathbb{R}}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$, donc $u\mid_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$.

Par ailleurs, on a $q \in P \iff q^2 \in \mathbb{R}^-$, donc si $q \in P$, on a $u(q)^2 = u(q^2) = q^2 \in \mathbb{R}^-$, donc $u(q) \in P$ : De cela, on en déduit que $u$ laisse stable $P$.

Si $q \in P$, on a $\overline{q} = -q$ et par conséquent $\|q\| = -q^2$, et donc, comme $u(q)^2 = q^2$, on en déduit que $\|q\| = \|u(q)\|$, i.e. que $u$ conserve la norme. En résumé on a montré que $u\mid_P$ est une isométrie, soit encore

$$u\mid_P \in O(\|.\|\mid_P) = O(3,\mathbb{R}).$$

Or $i$, $j$, $k$ est une base orthonormée de $P$, relativement à forme quadratique $\|.\|$, et donc $\acute{\imath} = u(i)$, $\acute{\jmath} = u(j)$, $\acute{k} = u(k)$ est orthonormée. Par conséquent, il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que $i$, $j$, $k$ et $\acute{\imath}$, $\acute{\jmath}$, $\varepsilon\acute{k}$ soient de même orientation et d'après le théorème (3.2.2) , il existe $q \in G$ tel que l'on ait $\acute{\imath} = s_q(i)$, $\acute{\jmath} = s_q(j)$ et $\varepsilon\acute{k} = s_q(k)$.

Mais, $u$ et $S_q$ sont des automorphisme de $H$ et donc, on a :

$$u(ij) = u(k) = \acute{k} = u(i)\,u(j) = \acute{\imath}\acute{\jmath},$$

Et de même

$$s_q(ij) = \varepsilon\acute{k} = s_q(i)\,s_q(j) = \acute{\imath}\acute{\jmath}$$

Donc $\varepsilon = \pm 1$.

On a donc $u\mid_P = s_q = S_q\mid_P$, mais aussi $u\mid_{\mathbb{R}} = S_q\mid_{\mathbb{R}} = Id$, donc $u = S_q$ et $u$ est un automorphisme intérieur. ■

### 3.2.2 Les quaternions et $SO_4(\mathbb{R})$

**Définition 3.2.2** *[15], [20] Soient $q_1,\ q_2 \in G$, on pose, pour $q \in H$,*

$$S_{q_1,q_2}(q) = q_1 q \overline{q_2}$$

*c'est clairement une application linéaire sur $H$ et inversible, c'est donc un élément de $GL(4,\mathbb{R})$. On obtient ainsi un morphisme :*

$$\begin{gathered} S : G \times G \longrightarrow GL(4,\mathbb{R}) \\ (q_1, q_2) \longmapsto S_{q_1,q_2} \end{gathered}$$

*Alors on obtient les propriétés suivantes :*

**Proposition 3.2.2** *:[15], [20]*

1. *$S$ est un morphisme de groupes, de noyau $\{(1,\ 1),(-1,\ -1)\}$.*
2. *$S_{q_1,q_2}$ conserve la norme, donc $S$ est en fait un morphisme à valeurs dans $O(N)$*

$$\begin{gathered} S : G \times G \longrightarrow O(\|.\|) \simeq O(4,\mathbb{R}) \\ (q_1, q_2) \longrightarrow S_{q_1,q_2} \end{gathered}$$

*Plus précisément, l'image de $S$ est exactement $SO(4,\mathbb{R})$.*

**Preuve.** Pour tout $q_1,\ q_2 \in G$, pour $q \in H$, $S_{q_1,q_2}(q) = q_1 q \overline{q_2}$.

1. Comme $S$ est continu et $G \times G$ connexe, le même raisonnement qu'au montre qu'on a $S(G \times G) \subset SO(4,\mathbb{R})$.Pour ce qui est du noyau de $S$ : Si $(q_1, q_2) \in \ker(S) \subset G \times G$, alors pour tout $q \in H$, on a $S_{q_1,q_2}(q) = q_1 q\ \overline{q_2} = q$, en particulier pour $q = 1$ on obtient $q_1 \overline{q_2} = 1$, pour $q_1 \in G$ on a alors $q_1^{-1} = \overline{q_1}$, on en déduit que $\overline{q_2} = \overline{q_1}$ et donc $q_1 = q_2$. Et la condition $q_1 q \overline{q_2} = q$ pour tout $q \in H$ signe que $q_1$ doit être dans le centre. Donc $q_1 \in \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$ , i.e. $q_1 = q_2 = 1$, si bien que l'on a

$$\ker(S) = \{(1,\ 1),\ (-1,\ -1)\}$$

2. Pour ce qui est de la surjectivité : Considérons $g \in SO(4,\mathbb{R})$, il y a deux cas :

Si $g(1) = 1$, alors en tant qu'isométrie $g$ va stabiliser l'orthogonal de la droite réelle qui contient 1, qui n'est rien d'autre que le centre, donc $g$ stabilise $P$ et sa restriction à $P$ devient une isométrie sur cet espace, i.e. $g\mid_P \in SO(4, \mathbb{R})$, donc il existe $q \in G$ tel que $g\mid_P = s_q$, donc

$$g = S_{q,q}$$

.

Si $g(1) = r$, or $g$ est une isométrie on a $\|r\| = \|1\| = 1$, donc $r \in G$ et on a alors

$$S_{\bar{r},1} \circ g(1) = S_{\bar{r},1}(r) = \bar{r}r1 = 1$$

D'après la premier cas, il existe $q \in G$ tel que

$$S_{\bar{r},1} \circ g = S_{q,q}$$

Soit encore

$$g = S_{\bar{r},1}^{-1} \circ S_{q,q} = S_{r,1} \circ S_{q,q} = S_{rq,q}$$

D'où le résultat. ■

De ce résultat, on obtient alors la description de $SO(4, \mathbb{R})$ :

**Théorème 3.2.3** *On a l'isomorphisme suivant :*

$$SO(4, \mathbb{R}) \simeq (G \times G) / \{(1,\ 1),\ (-1,\ -1)\}$$

*On peut alors passer au quotient et on a un isomorphisme de*

$$(G \times G) / \{(\pm 1, \pm 1)\} \longrightarrow SO(4, \mathbb{R}) / \{\pm 1\}$$

*D'où*

$$SO_4/\{\pm 1\} \simeq (G \times G)/\{(\pm 1, \pm 1)\} \simeq G/\{\pm 1\} \times G/\{\pm 1\}$$

*On a donc*

$$SO_4/\{\pm 1\} \simeq SO_3 \times SO_3.$$

# Conclusion

Dans ce travail nous avons présentés l'algèbre des quaternions et, ensuite on étudie le groupe des celles-ci et études la relation substantielle entre le $Q_8$ et $H$. On applique aussi les utilisations des quaternions dans la rotation dans l'espace et le groupe orthogonal.

# Bibliographie


[1] **J. Baglio**, Une introduction à l'étude des quaternions, Dant le cadre des T.I.P.E.2002-2003.

[2] **Eva Bayer**, Algèbre I-II, EPFL-Mathématiques Bachelor 3-4, Automne 2010.

[3] **E.Bayer Fluckiger**, Cours D'algèbre I, Bachelor Semestre 3, 24 octobre 2011.

[4] **Vincent Beck,** Algèbre, Action de groupes, ENS cachan, Anneé 2007-2008.

[5] **Patrick Capolsini, Stéphane Dalmas, Yves Papegay**, Rapports Techniques, Programme 2, Calcul symbolique, Programmation et Génie logiciel, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Janvier 1993.

[6] **Michel Cretin,** Représentations des groupes finis IV, Université Claude Bernard LYON 1.

[7] **Lacoste Cyril, Pierron Théo**, Séminaire : Quaternions et autres nombres hypercomplexes, ENS Ker Lann.

[8] **Simone Diverio**, Algèbre, Partiel du 09/03/2015 avec corrigé.

[9] **Francis Dusseault-Bélanger,** Quaternions et rotations, CAMUS 1 (2010), 91-98.

[10] **Patrick R. Girard**, Quaternions, algèbre de clifford et physique relativiste, 3 éme Cycle, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

[11] **Robert Guizion,** Dess Air et Espace, Système de contrôle d'attitude et d'orbite volume III-Quaternions d'attitude, Université de la Méditerranée-Aix-Marseille II ? 2001.

[12] **Nicolas Le Bihan,** Contributions au traitement des signaux à valeurs sur des structures algébriques non-commutatives. Traitement du signal et de l'image. Université de Grenoble,2011.(tel-00606665).

[13] **M. Nadir Matringe**, Introduction à la théorie des revêtements et application, Sophi Lejeune M2 MFA, Université de poitiers, Année universitaire 2012-2013.

[14] **Christophe Mourougane,** cours du l'université de Rennes 1 (2009-2010).

[15] **Daniel PerrIn**, Cours D'algèbre, Université de Paris-Sud (orsay).

[16] **Pierron Théo**, Etude du groupe des quaternions, 23 décembre 2013.

[17] Les quaternions et les rotations. Les nombres complexe. math. Unice.fr/~walter/L1_Arith/cours_H_V2.pdf.

[18] Quaternion, Wikipedia. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion.

[19] Quaternion, Wikipedia. https ://fr.wikipedia.org/wiki/groupe_des_Quaternions.

[20] Quaternion, chapitre 5, http ://amatheux.com/IMG/pdf/quaternions.pdf.

[21] Quaternion, www.ann.jussieu.fr/~frey/papers/scientific 20 visualisation/quaternions.pdf.

[22] Quaternion, http ://www.onversity.net/cgi-bin/progarti/art-aff.cgi.