

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère d'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatiques

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE DE MAGISTER EN MATHEMATIQUES

Option : Mathématiques Appliquées

Intitulé :

Détermination des Systèmes Quadratiques en 3D
Synchronisables avec le Système de Lorenz

présenté et soutenu par

MOHAMMED MEDKOUR

Le : 13 / 06 / 2012

Jury :

Ayadi. Abdelhamid	Pr	Univ. Larbi Ben M'Hidi	Président
Zeraoulia El Hadj	M.C.A	Univ. Tebessa	Rapporteur
Hamri	Pr.	Univ. Mila	Examineur
Haouam Kamel	M.C.A.	Univ. Tebessa	Examineur

2011- 2012

Table des matières

Introduction Générale	5
1 Notion de Chaos	7
1.1 Introduction	7
1.2 Attracteurs	8
1.2.1 Les différents types d'attracteurs	8
1.3 Propriétés des équations quadratiques dans l'espace	11
1.3.1 La forme générale	11
1.3.2 Classification d'un système quadratique en 3D	11
1.4 Eléments de théorie de Lyapunov sur la stabilité	14
1.4.1 Définition de la stabilité	14
1.4.2 Fonctions de Lyapunov	15
1.4.3 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe	15
1.4.4 Stabilité des systèmes linéaires	16
2 Importance de la synchronisation	18
2.1 La synchronisation identique maître-esclave	18
2.2 Applications des communications par chaos	18
2.3 Application à la synchronisation des systèmes biologiques	19
2.4 Importance de la synchronisation du chaos	20
3 Propriétés des équations de Lorenz	23
3.1 Introduction	23
3.2 Les propriétés essentielles de l'équation de Lorenz	24
3.2.1 Remarques	26
4 Critères de synchronisation	27
4.1 Introduction	27

4.2	Critères de synchronisation	27
4.3	Synchronisation de quelques systèmes chaotiques	29
4.3.1	Le circuit original de Chua	30
4.3.2	Modification du circuit de Chua avec la fonction sinusoïdale	34
4.3.3	Le système de Rössler	37
5	Détermination des systèmes en 3D et synchronisation avec le système de Lorenz	40
5.1	Introduction	40
5.2	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Rössler	40
5.3	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Rucklidge	43
5.4	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Shimiza-Morioka	45
5.5	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Genesio-Texi	48
5.6	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Liu	50
5.7	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Chen	53
5.8	Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Sprott	56
	Conclusion Générale	59
	Bibliographie	59

Table des figures

1-1	Quelques attracteurs réguliers	9
1-2	Quelques attracteurs étranges	10
4-1	Représentation graphique de $k_{x,\tilde{x}}$ et de l'égalité (4.15)	30
4-2	Les attracteurs à double scroll du circuit de Chua	32
4-3	La différence des signaux e_x, e_y, e_z dans deux circuits couplés Chua avec les coefficients de couplage $k_1 = 4.0, k_2 = 10.0, k_3 = 1.0$	33
4-4	Circuit de Chua	34
4-5	Les attracteurs à quadruple scroll du circuit de Chua avec $\alpha = 10.814, \beta = 14.0, a = 1.3, b = 0.11, c = 3$ et $d = 0$	36
4-6	La différence des signaux e_x, e_y, e_z dans deux circuits couplés Chua avec les coefficients de couplage $k_1 = 2.8, k_2 = 9.0, k_3 = 1.0$	37
4-7	Les attracteurs du système chaotique de Rössler	39
4-8	La différence des signaux e_x, e_y, e_z dans deux circuits couplés de Rössler avec les coefficients de couplage $k_1 = 1.0, k_2 = 0.3, k_3 = 13.0$	39
5-1	Dynamique d'état des erreurs de synchronisation des erreurs e_1, e_2 et e_3 entre le système de Lorenz et le système de Rössler pour, $\sigma = 10, a = 0.2, c = 5.7$	43
5-2	Etat des erreurs de synchronisation $e_1, e_2,$ et e_3 entre le système de Lorenz et le système de Rucklidge pour, $a = 0.8$	45
5-3	Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Shimiza-Morioka pour, $\sigma = 8.55, a = 1.044, b = 0.97$	48
5-4	Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Genesio-Texi pour $\sigma = 9.45, a = 0.45$	50
5-5	Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Liu pour $a = 0.44, b' = -12, c = -5$	53
5-6	Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Chen pour $\sigma = 19.375, b = 2.66$	55

5-7 Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Sprott pour $\sigma = 8.55, b = 1.05$ 58

Introduction Générale

L'état de synchronisation dans le sens de la synchronisation identique se fait par la conception robuste d'observateurs non linéaires, compte tenu des mesures corrompues, des incertitudes des modèles et des estimateurs de couplage avec l'incertitude des observateurs d'état non linéaire.

L'application de la théorie du chaos vise à assurer la sécurité dans la transmission de l'information effectuée par le biais des technologies de télécommunication. Parlant à l'émetteur, un message est ajouté à un signal chaotique et puis, le message est masqué dans le signal chaotique. Comme il porte l'information, le signal chaotique est aussi appelé transporteur chaotique. Cela se fait par la théorie du contrôle et il est un cas particulier de la synchronisation du chaos.

Avec le développement de la radio et de l'électronique dans le 20^{ème} siècle, la synchronisation a occupé une place très spéciale dans la science et la technologie. Comme de nombreux phénomènes étudiés par la dynamique non linéaire, la synchronisation a été observée et il a été démontré son rôle important dans la résolution de nombreux problèmes de nature les plus diverses (physiques, écologiques, physiologiques, biologiques, météorologiques et chimiques pour n'en nommer que quelques-uns). Toute communication ou demande de stockage de données repose sur la synchronisation. Signalons ici que la notion d'origine de la synchronisation et de sa théorie implique la périodicité des oscillateurs.

La découverte du chaos déterministe a introduit un nouveau type de système oscillant, un générateur de chaos. Les oscillations chaotiques se trouvent dans de nombreux systèmes dynamiques d'origines diverses. Le comportement de ces systèmes est caractérisé par l'instabilité des trajectoires bornées et, par conséquent, par la prévisibilité limitée dans le temps. Intuitivement, il semble que le chaos et la synchronisation soient deux termes qui s'excluent mutuellement. La synchronisation du chaos est un phénomène qui peut se produire lorsque deux oscillateurs chaotiques ou plus, sont couplés (à savoir les réseaux complexes), ou quand un oscillateur chaotique conduit un autre oscillateur chaotique, à savoir, la synchronisation maître - esclave. Pourtant, il a été démontré que la synchronisation peut être observée même dans les systèmes chaotiques. Toutefois, les caractéristiques particulières des systèmes chaotiques ne permettent pas d'appliquer directement les mé-

thodes développées pour la synchronisation des oscillations périodiques. Bien que la synchronisation ait été observée dans les systèmes chaotiques, des propriétés particulières du chaos provoquent des méthodes synchroniques des oscillateurs périodiques et ne peuvent pas être applicables sur le chaos. Même la définition de la notion de synchronisation pour les systèmes chaotiques est difficile à dégager sans se heurter à un paradoxe ou à une controverse. Une bonne compréhension des phénomènes de synchronisation du chaos et des mécanismes dynamiques ouvre de nouvelles opportunités tant pour les applications des signaux chaotiques dans l'ingénierie que pour la compréhension des fonctionnalités des réseaux neurobiologiques ou irréguliers (chaotiques), la dynamique des neurones se produisant naturellement. Cette activité de recherche se concentre sur l'évolution des fondements théoriques pour la synchronisation du chaos sur la base des études expérimentales du phénomène de synchronisation physique et neurobiologique d'autres systèmes.

Dans notre travail, nous avons choisi la méthode de contrôle pour synchroniser nos systèmes avec le système de Lorenz. On commence par considérer le système de Lorenz comme système maître et le système choisi comme système esclave ; puis, on introduit la fonction de contrôle actif dans le système esclave ; de plus, on définit l'état d'erreur ; ainsi, on obtient le système d'erreur. Comme on a la définition de la fonction de contrôle actif, alors par substitution, on obtient un système d'erreur qui contient la fonction de contrôle qui est une fonction des états d'erreurs. Enfin, pour conclure que les deux systèmes étudiés sont synchronisés, il faut que les erreurs convergent vers zéro quand t tend vers l'infini.

Ce mémoire comprend 05 chapitres :

- **Chapitre 01 :**

Ce chapitre est consacré à la notion du chaos, à des définitions de quelques attracteurs, aux propriétés des équations quadratiques en $3D$ ainsi qu'aux éléments de théorie de Lyapunov sur la stabilité.

- **Chapitre 02 :**

Ce chapitre est consacré à l'importance de la synchronisation.

- **Chapitre 03 :**

Ce chapitre donne des notations sur les propriétés de l'équation de Lorenz.

- **Chapitre 04 :**

Ce chapitre donne quelques critères de synchronisation générale.

- **Chapitre 05 :**

Dans ce chapitre, on détermine la synchronisation de quelques systèmes quadratiques en $3D$ avec le système de Lorenz en se basant sur la convergence des erreurs de synchronisation.

Chapitre 1

Notion de Chaos

1.1 Introduction

Selon les lois classiques de la mécanique de Newton, le système solaire est un ensemble stable dans lequel la position de chaque planète peut être prédite à partir de sa position et de sa vitesse à un instant donné, c'est-à-dire que les conditions initiales nous permettent de déterminer l'état futur et antécédent d'un système considéré. Cela est devenu possible grâce à la mise en place d'une nouvelle technique mathématique : le calcul différentiel.

Plus tard, J. C. Maxwell réfute l'idée laplacienne selon laquelle les mêmes conditions considérées à un moment et en un lieu différent sont exactement les mêmes, ce qui est impossible. Maxwell trouve qu'il faut considérer deux états différents : un état stable et un autre instable. Les mathématiciens et les physiciens faisaient abstraction des considérations d'instabilité car le phénomène tendrait vers le désordre.

A la fin du 19^{ème} siècle, Poincaré a montré que si on considère une légère différence sur les conditions initiales, cette différence se trouve amplifiée de manière exponentielle après un certain temps à tel point que la trajectoire devient imprévisible, comme par exemple dans le cas du système solaire où on dira que ce système est instable et qu'il est chaotique à l'échelle de millions d'années, car si on considère la position de la terre à 10 mètres près, au bout d'une centaine de millions d'années, cet écart serait de 100 millions de kilomètres.

D'ici, on serait familiarisé avec la notion du Chaos. En bref, nous pourrions dire que la théorie du Chaos est une des très rares théories mathématiques qui ait connu un vrai succès médiatique. C'est même devenu une théorie à la mode qu'il est de bon ton de pouvoir citer si l'on veut passer pour quelqu'un de cultivé. Elle s'est rapidement étendue à peu près à toutes les sciences. Certains y ont vu une révolution scientifique d'une importance identique à l'apparition de la mécanique de Newton, de la relativité d'Einstein ou de la mécanique quantique.

1.2 Attracteurs

Définition 1.1 *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

Mathématiquement, l'ensemble est un attracteur si :

- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution

$X(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$

- $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$; $t \geq 0$
- Il existe une orbite dense dans A .

Un attracteur possède les propriétés suivantes :

1. Un sous ensemble borné de A l'espace est de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .

2. Il existe un ensemble $A \subset B$ tel que pour le voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Cette "zone d'influence" est le bassin d'attraction, c'est l'ensemble :

$$W = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(V), t < 0.$$

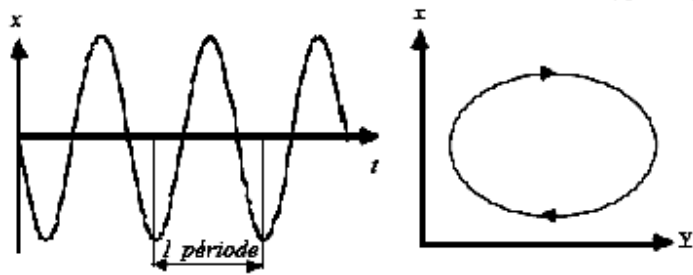
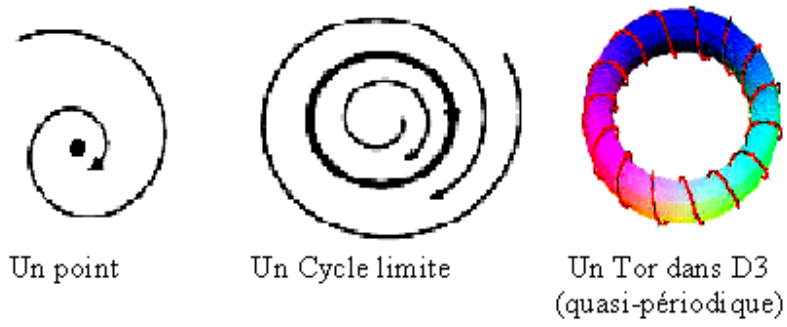
3. Un attracteur est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

1.2.1 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques. Ils peuvent être de trois sortes : Le point fixe, Le cycle limite périodique et Le cycle limite pseudopériodique.



Un cycle limite dans l'espace naturel puis dans l'espace de phase

FIG. 1-1 – Quelques attracteurs réguliers

Attracteurs étranges

Il s'agit d'ensembles dans l'espace des phases : compacts, fermés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la SCI (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). La coexistence de l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la SCI, qui implique leur écartement, s'explique par le concept d'hyperbolicité de l'attracteur : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes est appelée variété stable. Leur dimension est non entière et leur structure est fractale. A titre d'exemple, citons l'attracteur de Rössler, l'attracteur de Lorenz, l'attracteur de Chen et l'attracteur de Chua. (voir FIG.1-2)

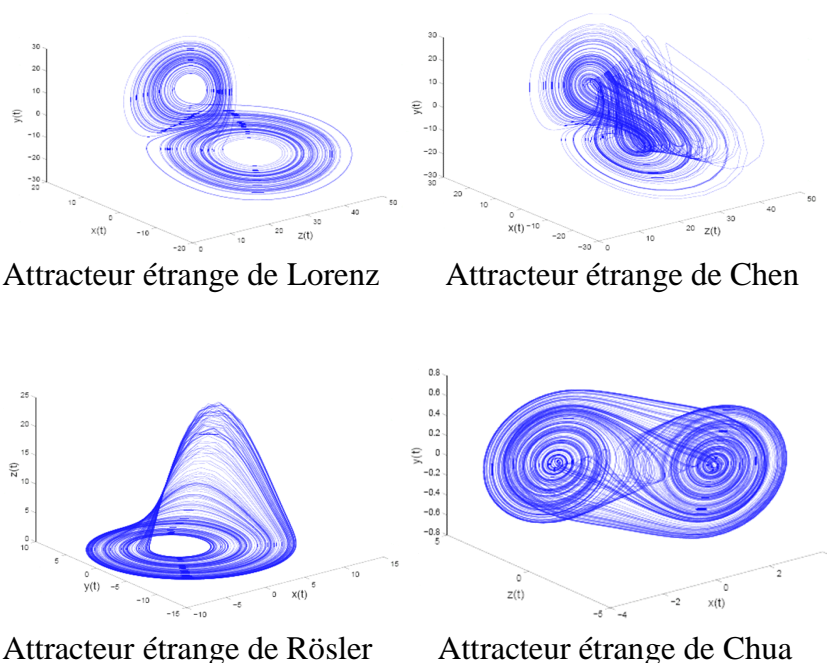


FIG. 1-2 – Quelques attracteurs étranges

Définition 1.2 Une orbite homocline est une orbite qui converge asymptotiquement vers le point d'équilibre lorsque t tend vers l'infini.

1.3 Propriétés des équations quadratiques dans l'espace

1.3.1 La forme générale

La forme générale d'un système quadratique en 3D est :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j + \sum_{i,j=1}^3 a_i x_i + a \\ \frac{dx_2}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 b_{ij}x_i x_j + \sum_{i,j=1}^3 b_i x_i + b \\ \frac{dx_3}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}x_i x_j + \sum_{i,j=1}^3 c_i x_i + c \end{cases} \quad (1.1)$$

où a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$), a_i, b_i, c_i ($1 \leq i \leq 3$) et a, b, c sont constants.

1.3.2 Classification d'un système quadratique en 3D

Un système chaotique avec deux attracteurs aurait deux points d'équilibres symétriques, c'est-à-dire :

Si (e_1, e_2, e_3) est un de ses points, alors l'autre serait $(e_1, -e_2, -e_3)$ ou $(-e_1, e_2, -e_3)$ ou $(-e_1, -e_2, e_3)$.

Les polynômes caractéristiques des matrices jacobiniennes, évalués au deux points d'équilibres, seraient les mêmes et auraient trois racines caractéristiques : une de ces racines est négative et les deux autres sont un couple de racines complexes avec les mêmes parties réelles. Ces deux points d'équilibres sont connectés par une orbite (hétérocline) simplifiant la forme du système chaotique candidat.

En général, les quelques étapes pour la classification du chaos en 3D pour les systèmes quadratiques autonomes sont :

- Détermination des points d'équilibres.
- Pour les équations linéaires au point d'équilibre, trouver quelques systèmes qui ont des points d'équilibres satisfaisant l'inégalité de Shilnicov.
- Trouver une orbite hétérocline ou homocline dans la forme de série par la méthode des coefficients indéterminés.
- Donner quelques conditions pour garantir que la série donnée pour l'orbite hétérocline ou homocline est bien définie et uniformément convergente.
- Vérifier les résultats par des simulations numériques.

Exemple 1.1 : Considérons le cas homogène pour la première équation de (1.1), cela implique que $a_{ij} = 0$ et $a = 0$. Pour garantir l'obtention d'un seul point d'équilibre, nous proposons que le système ait deux termes non linéaires.

Prenons $b_{11} = \dots = b_{32} = 0$, $b_{13} = b_{31} = \frac{1}{2}$,
 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ et $c_{11} = \dots = c_{31} = c_1 = c_2 = 0$.

Alors, nous obtenons le plus simple système candidat suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_3 + b \\ \frac{dx_3}{dt} = c_1x_1 + c_2x_2x_3 + c \end{cases} \quad (1.2)$$

où ($1 \leq i \leq 3$), $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, sont des paramètres réels; après, nous allons trouver le point d'équilibre du système (1.2).

Des deux premières équations, on a :

$$x_3 = -\frac{b}{x_1}, \quad (1.3)$$

$$x_2 = \frac{a_3b - a_1x_1^2}{a_2x_1} \quad (1.4)$$

La substitution de (1.3) et (1.4) dans la troisième équation donnera une équation algébrique en x_1 , comme suit :

$$a_2c_1x_1^3 + (a_1bc_2 + a_2c)x_1^2 - a_3c_2b^2 = 0. \quad (1.5)$$

Soit $a_1bc_2 + a_2c = 0$ où

$$c = -\frac{a_1c}{a_2}b, \quad (1.6)$$

alors, sous la condition (1.6), l'équation (1.5) a une seule racine réelle,

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{a_3c_2}{a_2c_1}b^2} \quad (1.7)$$

x_2, x_3 correspondants sont déterminés selon (1.3) et (1.4).

Alors, nous obtenons le point d'équilibre du système (1.2), noté par $O(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, x_3^{(e)})$.

Le système jacobien évalué à ce point d'équilibre est

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ c_1 & c_2x_3 & c_2x_2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont donnés par (1.3) et (1.4) respectivement.

Un simple calcul donne que :

$$\det(J) = \frac{3a_2c_2}{x_1^2}b^2, \quad (1.9)$$

alors,

$$a_2c_2 < 0. \quad (1.10)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice J est :

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0 \quad (1.11)$$

où :

$$p_1 = -(a_1 + c_2x_2) \quad (1.12)$$

$$p_2 = bc_2 - a_3c_1 + a_1c_2x_2 - a_2x_3 \quad (1.13)$$

$$p_3 = -\frac{3a_2c_2b}{x_1^2}. \quad (1.14)$$

A cette fin, donne

$$\lambda = \mu - \frac{p_1}{3} \quad (1.15)$$

$$\mu^3 + p\mu + q = 0 \quad (1.16)$$

où

$$p = p_2 - \frac{p_1^2}{3} \quad (1.17)$$

$$q = p_3 - \frac{p_1p_2}{3} + \frac{2p_1^2}{27}, \quad (1.18)$$

alors,

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Si $\Delta > 0$, c.à.d

$$\Delta = \frac{1}{4}p_3^2 - \frac{1}{108}p_1^2p_2^2 + \frac{1}{27}p_1^3p_3 - \frac{1}{6}p_1p_2p_3 + \frac{1}{7}p_2^3 > 0, \quad (1.19)$$

alors (1.16) a une seule racine réelle, avec un couple de racines conjuguées complexes. Quand (1.19) maintient l'équation originale algébrique (1.11) a une seule racine réelle et un couple des racines complexes conjuguées où la racine réelle est négative quand $\det(J) < 0$. Pour s'assurer que la partie réelle des racines complexes conjuguées est positive, il

requiert que :

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} < \begin{cases} \frac{-2p_1}{3}, \text{ si } p > 0 \\ \frac{4p_1}{3}, \text{ si } p < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

c.à.d quand (1.6), (1.9), (1.19) et (1.20) sont satisfaites, le polynôme caractéristique du système jacobien évalué au point d'équilibre $O(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, x_3^{(e)})$ a une racine négative et un couple de racines complexes conjuguées avec une partie réelle positive.

Enfin, nous simulons le système obtenu afin de voir s'il a un potentiel pour être chaotique. Nous choisissons un groupe de paramètres comme suit : $a_1 = -1.221$, $a_2 = 1.5$, $a_3 = 2$, $b = -1.3$, $c_1 = -1.5$, $c_2 = -1$. Il est facile de vérifier que les conditions (1.6), (1.9), (1.19) et (1.20) sont satisfaites.

1.4 Éléments de théorie de Lyapunov sur la stabilité

1.4.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$x' = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.21)$$

Définition 1.3 (Point d'équilibre)

Un vecteur $x_e \in \mathbb{R}^n$ est dit point ou état d'équilibre si :

$$f(x_e) = 0 \quad (1.22)$$

Définition 1.4 (Stabilité locale simple et asymptotique) L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système (1.21) est :

- Stable si, pour tout il existe $r = r(\epsilon)$, tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t > 0 \quad (1.23)$$

- Instable, si non stable,

- Asymptotiquement stable, s'il est stable et si r peut être choisi tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (1.24)$$

- Marginalement stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Définition 1.5 (Stabilité asymptotique globale) Si le système est asymptotiquement stable

quel que soit le vecteur d'état initial $x(t = 0)$, alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.

1.4.2 Fonctions de Lyapunov

Définition 1.6 (Fonction définie positive)

Une fonction scalaire $V(x)$ continuellement différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si :

- 1) $V(0) = 0$,
- 2) $V(x) > 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$.

Si (2) est remplacé par $V(x) \geq 0$, alors, la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 1.7 (Fonction quadratique définie positive)

La fonction quadratique $V(x) = x^T Q x$, où $Q_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n \times n}$ sont strictement positives. Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonction de Lyapunov). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

1.4.3 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable).

La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème 1.1 (Stabilité locale) L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable s'il existe

une fonction continuellement dérivable $V(x)$ telle que :

- 1) $V(0) = 0$,
- 2) $V(x) > 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$,
- 3) $V'(x) \geq 0, \forall x \in \Omega - \{0\}$,

où V' est la dérivée de V par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $V'(x) < 0$, alors, l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

La fonction $V(x)$ est appelée fonction de Lyapunov. Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction.

Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre.

L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyapunov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de ce document. Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle du système idéalisé).

Théorème 1.2 (*Stabilité globale*) *L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continuellement dérivable $V(x)$ telle que :*

- 1) $V(0) = 0$,
- 2) $V(x) > 0, \forall x \neq 0$,
- 3) $V'(x) < 0, \forall x \neq 0$,
- 4) $V' \rightarrow -\infty$, quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

1.4.4 Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire :

$$x'(t) = Ax(t) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.25)$$

alors, le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement positive, soit :

$$R_e(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

Théorème 1.3 (*Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes linéaires*)

Le système linéaire (1.25) est asymptotiquement stable (les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive, il existe une matrice définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de Lyapunov :

$$A^T P + PA = -Q. \quad (1.27)$$

Condition suffisante

Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(x) = x^T P x$$

alors :

$$\begin{aligned}
 V'(x) &= x'^T P x + x^T P x' \\
 &= x^T A^T P x + x^T P A x \\
 &= x^T (A^T P + P A) x.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Soit Q une matrice définie positive, si P est solution positive de l'équation de Lyapunov (1.29), alors :

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \tag{1.29}$$

et

$$V'(x) = -x^T Q x \Rightarrow V'(x) < 0 \forall x \neq 0. \tag{1.30}$$

Donc, d'après le théorème général, le système linéaire est asymptotiquement stable.

Condition nécessaire

Pour un couple (A, Q) quelconque donné, l'équation de Lyapunov admet une solution unique :

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt. \tag{1.31}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 A^T P + P A &= \int_0^{+\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt + \int_0^{+\infty} (e^{A^T t} Q e^{A t}) A dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt \\
 &= \left[(e^{A^T t} Q e^{A t}) \right]_0^{+\infty} \\
 &= -Q,
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

car $e^{A t} \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow +\infty$, si A est stable.

Chapitre 2

Importance de la synchronisation

2.1 La synchronisation identique maître-esclave

On peut considérer plusieurs cas pour la synchronisation du chaos, et en particulier la synchronisation identique maître-esclave. C'est une forme simple de synchronisation qui peut se produire lorsque deux oscillateurs chaotiques identiques sont mutuellement couplés, ou lorsque l'un d'eux conduit l'autre. Bien que la synchronisation ait été observée dans les systèmes chaotiques, des propriétés particulières des méthodes de synchronisation provoquant le chaos des oscillateurs périodiques ne peuvent pas être applicables sur le chaos.

Considérons (x_1, x_2, \dots, x_n) et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ l'ensemble des variables dynamiques qui décrivent l'état de l'oscillateur, premier et deuxième, respectivement. Il est dit que la synchronisation identique se produit lorsqu'il y a un ensemble de conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$, $(x'_1(0), x'_2(0), \dots, x'_n(0))$, de telle sorte que en désignant le temps par t , $|x'_i(t) - x_i(t)| \rightarrow 0$, pour $i = 1, 2, \dots, n$, quand $t \rightarrow +\infty$. Cela signifie que pour un temps suffisant, la dynamique des deux oscillateurs vérifie $x'_i(t) = x_i(t)$, pour $i = 1, 2, \dots, n$, dans une bonne approximation.

C'est ce qu'on appelle l'état synchronisé dans le sens de la synchronisation identique. Il se fait par la conception robuste d'observateur non linéaire, compte tenu des mesures corrompues et des incertitudes des modèles couplés aux estimateurs d'incertitude avec des observateurs d'état non linéaires.

2.2 Applications des communications par chaos

La demande de communication par chaos est une application de la théorie du chaos qui vise à assurer la sécurité dans la transmission des informations effectuées par le biais

des technologies de télécommunications.

Par communications sécurisées, il faut comprendre que le contenu du message transmis est inaccessible aux oreilles indiscretes possibles.

Dans le chaos, la sécurité des communications relatives à la vie privée est basée sur les comportements dynamiques complexes fournis par des systèmes chaotiques. Certaines propriétés de la dynamique chaotique, comme le comportement complexe, la dynamique semblable à du bruit et l'étalement de spectre, sont utilisés pour coder les données.

D'autre part, étant un phénomène de chaos déterministe, il est possible de décoder les données en utilisant ce déterminisme. Dans la pratique, les implémentations des communications dans le chaos, nécessitent le recours à l'un des deux phénomènes chaotiques : synchronisation du chaos ou contrôle du chaos.

Pour mettre en œuvre des communications en utilisant de telles propriétés du chaos, deux oscillateurs chaotiques sont nécessaires : un émetteur (ou master) et un récepteur (ou esclave). A l'émetteur, un message est ajouté à un signal chaotique, puis le message est masqué dans le signal chaotique. Comme il porte l'information, le signal chaotique est aussi appelé transporteur chaotique. Il se fait avec la théorie du contrôle et il est un cas particulier de la synchronisation du chaos.

2.3 Application à la synchronisation des systèmes biologiques

Les applications à la synchronisation des systèmes biologiques, c'est-à-dire les ondes intercellulaires de Ca^{+2} , ont été vues comme un mécanisme par lequel un groupe de cellules peuvent communiquer entre elles et coordonner une réponse multicellulaire à un événement local. Récemment, il a été observé dans une variété de systèmes que les signaux de calcium peuvent aussi se propager d'une cellule à une autre et ainsi servir de moyen de communication intercellulaire. Le désir de comprendre les mécanismes biophysiques de la dynamique cellulaire a conduit à adopter des lois d'asservissement dans certains systèmes biologiques.

L'ubiquité des oscillations dans les systèmes biologiques est bien établie. Les oscillations sont observées dans tous les types d'organismes, des plus simples aux plus complexes. Les périodes peuvent varier de quelques fractions de seconde à plusieurs mois ou années. De temps en temps, il a été suggéré que de nombreuses oscillations biologiques soient le résultat de la rupture de l'efficacité de l'auto-régulation. Le point de vue opposé fait valoir que le comportement de la plupart des périodiques n'est pas pathologique, mais constitue plutôt le fonctionnement normal de ces systèmes. Ils sont présents parce qu'ils confèrent

des avantages fonctionnels à l'organisme. La recherche en neuroscience, en particulier, a développé des outils importants qui permettent la compréhension de base de la procédure d'information dans les neurones biologiques uniques et les réseaux de neurones. La preuve médicale indique que la synchronisation des grands réseaux de neurones est beaucoup plus en rapport avec le traitement de l'information du cerveau.

Les études théoriques dans la synchronisation des oscillateurs non linéaires ont mis l'accent sur la question du niveau de synchronisation pour que la régularisation se fasse en utilisant le degré de couplage des neurones. Presque tout ce que nous faisons est contrôlé par le Ca^{+2} : comment nous nous déplaçons, la façon dont nos cœurs battent et comment notre cerveau traite l'information et stocke les souvenirs. Pour faire tout cela Ca^{+2} agit comme un messager intracellulaire, reliant l'information dans les cellules pour régulariser leur activité. Par exemple, Ca^{+2} déclenche la vie lors de la fécondation, et contrôle le développement et la différenciation des cellules en types spécialisés. Il médiatise l'activité ultérieure de ces cellules et, enfin, est toujours impliqué dans la mort cellulaire. Pour coordonner toutes ces fonctions, les signaux Ca^{+2} doivent être souples et réglementés avec précision. Cette polyvalence incroyable se produit par l'utilisation d'une signalisation de Ca^{+2} «boîte à outils», selon laquelle l'ion peut agir dans les différents contextes d'espace, de temps et d'amplitude. Il est largement admis que les ondes de Ca^{+2} intercellulaires sont un mécanisme par lequel un groupe de cellules peuvent communiquer entre elles et coordonner une réponse multicellulaire à un événement local. Récemment, il a été observé dans une variété de systèmes que les signaux de calcium peuvent aussi se propager d'une cellule à une autre et ainsi servir de moyen de communication intercellulaire.

Le désir de comprendre les mécanismes biophysiques de la dynamique cellulaire a conduit à introduire des boucles de rétroaction biologique dans certains systèmes. Les objectifs des boucles de rétroaction dans les systèmes biologiques sont de provoquer une excitation ou une suppression des oscillations, un entraînement et une synchronisation, ou des transitions à partir des oscillations chaotiques vers les oscillations périodiques et vice versa, en utilisant les entrées de commande réalistes.

Considérant les données énumérées ci-dessus, cette section explore les liens, en rétroaction, entre le système de contrôle de données externes et les fonctions de coordination et de contrôle du calcium intracellulaire.

2.4 Importance de la synchronisation du chaos

Comme on le sait, l'étude du problème de synchronisation des oscillateurs chaotiques a été très importante du point de vue de la science non linéaire, en particulier les applications à la biologie, à la médecine, à la cryptographie et à la sécurisation des données.

En général, la recherche de synchronisation a été focalisée sur deux domaines. Le premier est en rapport avec l'emploi d'observateurs d'état où les principales applications reposent sur la synchronisation des oscillateurs non linéaires avec le même modèle de structure et d'ordre, mais avec des conditions initiales et/ou des paramètres différents. Il est bien connu que les programmes d'observation sont largement utilisés pour la reconstruction non mesurée dans l'état dynamique. La seule information disponible est la sortie du système de mesure, ce qui représente une fonction de certains états intérieurs du système. Habituellement, la dimension du vecteur de sortie des signaux mesurés est plus petite que la dimension du vecteur correspondant des états ; il est donc nécessaire de développer des techniques d'estimation connues sous le nom de conception d'observateur traitant de l'estimation d'état en ligne.

Les régimes d'observation ayant plus de succès ont besoin d'un modèle nominal pour leur mise en œuvre, mais il est aussi bien connu que la connaissance exacte de la non-linéarité des plantes non linéaires est une tâche difficile. Cette situation fait que les observateurs standards ne peuvent être appliqués. D'intéressantes recherches de l'observateur, basées sur le système de synchronisation chaotique, ont été faites. Elles ont mis en application un observateur pour les oscillations non linéaires pouvant être transformées en forme canonique observable. Elles ont réduit l'ordre des observateurs employés pour la synchronisation et l'identification des paramètres relatifs aux oscillateurs chaotiques. Cependant, le problème de l'estimation d'état avec ce qui est inobservable présente encore des incertitudes. Suite à ces idées, des recherches ont été orientées vers le problème d'estimation d'observation soumis à des non-linéarités limitées. Si le modèle d'usine est incertain ou incomplet, ce qui est le cas le plus fréquent, la mise en œuvre d'observateurs à gain élevé s'avère suffisante.

Par ailleurs, les modèles de nouveaux observateurs robustes basés sur des techniques adaptatives ont été proposés. Une autre approche liée à la construction d'observateurs pour des processus non linéaires, est l'approche de géométrie différentielle. L'idée principale est de trouver une transformation d'état qui représente le système d'origine comme une équation linéaire, plus un terme non linéaire qui est fonction de la sortie du système. Cependant, trouver une transformation non linéaire, qui place un système d'ordre n en forme d'observateur, exige l'intégration simultanée de n -couplé, équations différentielles partielles.

En outre, cette approche nécessite une connaissance précise de la dynamique non linéaire du système, d'où son inapplicabilité si le modèle pour le processus comprend des incertitudes.

Toutefois, des problèmes n'ont pas été suffisamment étudiés : états du système et conditions incertaines non observables ; sortie mesurée du signal corrompue.

De ce qui précède, les nouvelles théories de l'estimation en rapport avec l'état et l'estimation de l'incertitude doivent être pris en considération.

D'autres méthodes de contrôle traditionnel envisagent l'introduction d'un contrôleur de rétroaction additif pour forcer le système à atteindre la référence désirée (point de consigne), à savoir $\|x(t) - x'_{sp}(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Les méthodologies mentionnées ci-dessus sont basées sur l'annulation des termes non-linéaires des systèmes chaotiques pour imposer un comportement souhaité. Des techniques de contrôle non-linéaires géométriques différentielles ont été utilisées avec succès. Elles correspondent à des systèmes qui peuvent être totalement ou partiellement linéarisés par un changement de coordonnées et/ou un feed-back d'état selon des concepts différentiels géométriques. Cette classe de systèmes non linéaires peut être linéarisée par un feed-back de contrôle d'état qui annule toutes les non-linéarités assumant une parfaite connaissance du modèle mathématique.

Un inconvénient des techniques de linéarisation exacte ainsi que le modèle d'autres contrôleurs de base, c'est qu'ils comptent sur l'annulation exacte des non-linéarités. Une situation plus réaliste est de connaître certaines fonctions nominales des non linéarités correspondantes qui sont employées dans la conception du contrôle. Toutefois, l'utilisation du modèle nominal des non linéarités peut conduire à une dégradation des performances et même à l'instabilité en boucle fermée.

En réalité, lorsque les systèmes possèdent une non linéarité forte, la linéarisation standard, modèle générique, et les contrôleurs actifs, ne peuvent pas annuler complètement ces non linéarités et des instabilités peuvent être induites. Le pire des cas, c'est quand la connaissance de la non linéarité est très faible ou nulle, de sorte que, les techniques conventionnelles de linéarisation sont inadéquates.

Pour éviter les problèmes ci-dessus, l'approche géométrique pour la conception des contrôleurs non linéaires, basée sur l'incertitude des observateurs, a été employée. Ce genre de technique a montré des capacités satisfaisantes pour plusieurs systèmes. L'utilisation de certains observateurs couplés à des contrôleurs linéarisés a très bien réussi ; toutefois, ils se sont heurtés à plusieurs problèmes. A titre d'exemple, citons les problèmes relatifs à la mesure du bruit et à la robustesse qui n'ont pas été complètement résolus. Pour ces raisons, des observateurs plus sophistiqués ont été conçus afin de générer un plus grand nombre de boucles ouvertes adéquates ainsi que des boucles fermées plus performantes. Des observateurs PI, en mode coulissant et numérique ont été développés.

Chapitre 3

Propriétés des équations de Lorenz

3.1 Introduction

Le système de Lorenz est un exemple célèbre de système différentiel du comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Il est défini usuellement comme le couplage de trois équations différentielles ordinaires.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

où les trois paramètres $\sigma > 0$, $r > 0$, $b > 0$ sont appelés nombre de Prandtl, nombre de Rayleigh et la proportion physique, respectivement.

Ces paramètres constants déterminent le comportement du système et des trois équations qui sont extrêmement sensibles aux conditions initiales. Un petit changement des conditions initiales mène rapidement à une large différence dans les solutions correspondantes.

Les valeurs classiques utilisées pour démontrer le chaos sont $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$.

Il est important de noter que x , y et z ne sont pas des coordonnées spatiales.

La variable x est proportionnelle à l'intensité du mouvement de convection tandis que y est proportionnel à la différence de température entre les données ascendantes et descendantes.

La variable z est proportionnelle à la distorsion du profil vertical de température issue de la linéarité, une valeur positive indiquant que les gradients se trouvent près des bords.

3.2 Les propriétés essentielles de l'équation de Lorenz

Les propriétés essentielles de l'équation de Lorenz peuvent être résumées comme suit.

Non linéarité :

Les deux non linéarités sont xy et xz .

Dissipation :

Un système est dissipatif si éventuellement chaque orbite s'éloigne infiniment. Considérons $B \subset \mathbb{R}^2$, délimité, tel que $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2, \exists t_0$, (dépendant de x_0, B) avec la solution $\phi(t, x_0)$ qui satisfait $\phi(t, x_0) \in B, \forall t \geq t_0$. On peut démontrer que le système de Lorenz est dissipatif en utilisant la fonction de Liapunov

$$V = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2, \quad (3.2)$$

puis

$$V' = 2rxx' + 2\sigma yy' + 2\sigma(z - 2r)z' = 2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz), \quad (3.3)$$

choisir la région délimitée D tel que $\underline{X} \in D \Leftrightarrow V'(\underline{X}) \geq 0$, et laisser C être le maximum de V . Soit E être l'ellipsoïde défini par $V \leq C + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \underline{X} \notin E &\implies \underline{X} \notin D \\ &\implies V(\underline{X}) \leq -\delta; \delta > 0. \end{aligned}$$

et les points sur les trajectoires passant par \underline{X} seront associés avec V décroissant. Ainsi, les trajectoires peuvent éventuellement entrer et demeurer dans E .

De cela, il s'ensuit que la divergence du système est négative, $-(\sigma + b + 1)$, que le volume $e^{-(\sigma+b+1)t}$ de cette région diminue de sorte que toutes les trajectoires tendent vers le volume zéro.

Symétrie :

Le système de Lorenz est invariant pour la symétrie

$$\left\{ \begin{array}{l} -x' = \sigma(-(-x) + (-y)) \\ -y' = r(-x) - (-y) - (-x)z \\ -z' = -b(z) + (-x)(-y) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x' = \sigma(-x + y) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = -bz + xy \end{array} \right. \quad (3.4)$$

L'invariance de l'axe Z implique que toutes les trajectoires sur l'axe restent sur l'axe Z et approchent de l'origine. En outre, depuis

$$x = 0, y > 0 \implies x' > 0 \quad (3.5)$$

et

$$x = 0, y > 0 \implies y' > 0, \quad (3.6)$$

toutes les trajectoires qui tournent autour de l'axe Z doivent se déplacer dans le sens horaire avec augmentation du temps.

équilibres :

Trouvons maintenant les points d'équilibre du système. Résoudre

$$\begin{cases} \sigma(-\bar{x} + \bar{y}) = 0 \\ r\bar{x} - \bar{y} - \bar{x}\bar{z} = 0 \\ -b\bar{z} + \bar{x}\bar{y} = 0 \end{cases} \text{ Les rendements } \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{x} = -\sqrt{b(r-1)} \end{cases}$$

Selon les valeurs des paramètres, nous pouvons avoir comme équilibres

$$C_0(0, 0, 0); C^-(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1), C^+(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

L'origine est toujours un point d'équilibre.

Le comportement du système de Lorenz est assez complexe. Pour examiner certaines bifurcations, premièrement il faut considérer le cas où deux des paramètres sont fixés à $b = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$ et laisser $0 < r < 1$. Ensuite, la racine ci-dessus ayant une part imaginaire, et le seul point réel d'équilibre étant $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$. En fait, ce point d'équilibre est un attracteur global pour $0 < r < 1$. Pour voir ceci, considérons la fonction de Liapunov

$$V = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2. \quad (3.7)$$

Ensuite,

$$V' = 2xx' + \sigma yy' + \sigma zz' = 2\sigma [(1+r)xy - x^2 - y^2 - bz^2]. \quad (3.8)$$

Donc $V' < 0, \forall x, y, z$.

Cette dernière inégalité est vue en considérant que :

$$(1+r)xy - x^2 - y^2 < 0, \text{ c'est-à-dire } r < \frac{x^2+y^2}{xy} - 1.$$

Car, si $x \geq y$ (similaire pour l'inégalité contraire), et $\frac{x}{y} - 1 \geq 0$ et $-\frac{y}{x} + 1 \geq 0$

$$; \text{ aussi, leur produit, } \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(-\frac{y}{x} + 1\right) \geq 0 \implies -\frac{x}{y} \times \frac{y}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\implies -1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1 \geq 0 \\ &\implies \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 1 \geq 1; \end{aligned}$$

donc, $\frac{x^2+y^2}{xy} - 1 \geq 1 > r$

Ainsi, en commençant à tout point de l'origine, l'association de la valeur de V doit être réduite, et la trajectoire se rapprochera de l'origine.

3.2.1 Remarques

- Lorenz a intégré numériquement ces équations tout d'abord avec des paramètres choisis comme $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$.

Notons que quand $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} = \frac{470}{19} \simeq 24$.

Aussi son choix de $r = 28$ est juste avant $r = 24$. Ceci est un cas qui nous intéresse et auquel nous nous sommes intéressé dès le début.

- Alors, son choix de $r = 28$ est juste au dessus
- Quand $0 < r < 1$, l'origine $(0, 0, 0)$ est globalement stable et toutes les trajectoires sont attirées vers elle.
- Quand $r = 1$ deux points critiques C^+ et C^- sont créés au même moment, l'origine perd sa stabilité.
- Quand $r = r_H$, une bifurcation sous-critique de Hopf survient et C^+ et C^- perdent leur stabilité.
- Quand $r > r_H$, nous savons que :
 - 1) Il n'existe aucun point critique stable. L'origine, C^+ et C^- tout devient instable.
 - 2) Il n'y a pas de cycles limités autour de C^+ et de C^- dûs à la bifurcation sous-critique de Hopf.
 - 3) Les trajectoires sont toujours bornées et ne peuvent tendre vers l'infini.
 - 4) Le volume se contracte exponentiellement vite. Si nous commençons dans les conditions initiales avec un énorme massif, il peut éventuellement se contracter et tendre vers un volume nul. Cette limitation de l'ensemble, ou de l'attracteur, ne contient aucun point critique. Il est aussi peu probable qu'elle contienne des cycles limités.

Chapitre 4

Critères de synchronisation

4.1 Introduction

Il existe plusieurs critères de synchronisation du chaos. Dans ce chapitre, on présente des exemples d'étude de quelques critères de synchronisation du chaos. On étudie des conditions pour la synchronisation du chaos de deux systèmes chaotiques couplés.

4.2 Critères de synchronisation

Considérons le système chaotique sous la forme :

$$x' = Ax + g(x) + u, \quad (4.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de l'état, $u \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur externe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice constante et où $g(x)$ est une fonction continue non linéaire. Admettons que :

$$g(x) - g(\tilde{x}) = M_{x,\tilde{x}}(x - \tilde{x}), \quad (4.2)$$

pour une matrice bornée $M_{x,\tilde{x}}$, dans laquelle les éléments sont dépendants de x et \tilde{x} .

Remarque 4.1 : *La plupart des systèmes chaotiques, incluant tous les systèmes non linéaires de Lure et de Lipchitz, peuvent être définis par (4.1) et (4.2).*

De l'approche unidirectionnelle de couplément linéaire, le système esclave pour (4.1) est construit comme suit :

$$\tilde{x}' = A\tilde{x} + g(\tilde{x}) + u + k(x - \tilde{x}), \quad (4.3)$$

où $k = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ avec $k_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ est la matrice de feed-back à concevoir plus tard.

De (4.1) et (4.3), l'équation du système d'erreur suivant peut être obtenue :

$$\begin{aligned} e' &= Ae + g(x) - g(\tilde{x}) - k(x - \tilde{x}) \\ &= Ae - ke + g(x) - g(\tilde{x}) \\ &= (A - k)e + g(x) - g(\tilde{x}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $e = x - \tilde{x}$ est le terme d'erreur.

Théorème 4.1 *Si la matrice k de feed-back est choisie tel que :*

$$\lambda_i \leq \mu < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice $(A - k + M_{x,\tilde{x}})^T P + P(A - k + M_{x,\tilde{x}})$ avec une matrice P constante, définie, symétrique et positive, et où μ est une constante négative, alors le système dynamique de l'erreur (4.4) est de manière globale exponentiellement stable par rapport à l'origine, impliquant que les deux systèmes (4.1) et (4.3) sont dans l'ensemble asymptotiquement synchronisés.

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov

$$V = e^T P e \quad (4.6)$$

où P est une matrice constante, symétrique définie, positive. Alors sa dérivation est :

$$\begin{aligned} V' &= e'^T P e + e^T P e' \\ &= [(A - k)e + g(x) - g(\tilde{x})]^T P e + e^T P [(A - k)e + g(x) - g(\tilde{x})] \\ &= e^T \left[(A - k)^T P + P(A - k) \right]^T e + [(g(x) - g(\tilde{x}))]^T P e + e^T P [g(x) - g(\tilde{x})] \\ &= e^T \left[(A - k + M_{x,\tilde{x}})^T P + P(A - k + M_{x,\tilde{x}}) \right] e \\ &= e^T Q e \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$Q = (A - k + M_{x,\tilde{x}})^T P + P(A - k + M_{x,\tilde{x}}).$$

Comme $Q = Q'$, soit $Q = U^* \Lambda U$ où U est une matrice unitaire carrée et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors (4.6) devient :

$$V' = e^T Q e = e^T U^* \Lambda U e = e^T \Lambda e \leq \mu e^T e < 0, \quad (4.8)$$

où $e_1 = Ue$.

Selon (4.8) et le théorème de stabilité de Lyapunov, le système (4.4) est globalement exponentiellement stable pour l'origine, et donc, les deux systèmes (4.1) et (4.3) sont globalement et asymptotiquement synchronisés. ■

Théorème 4.2 *Choisissons $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ et soit*

$$P(A + M_{x,\bar{x}}) + (A + M_{x,\bar{x}})^T P = [\tilde{a}_{ij}]$$

et

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\tilde{a}_{ij}|. \quad (4.9)$$

Si k est choisi tel que :

$$k_i \geq \frac{1}{2p_i} (a_{ii} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

Alors (4.5) est satisfaite, impliquant que les deux couples des systèmes chaotiques (4.1) et (4.3) sont globalement synchronisés.

Remarque 4.2 *Si $P = I$, selon les théorèmes (4.1) et (4.2), on obtient les inégalités algébriques suivantes et ce pour le choix des paramètres de couplement :*

$$k_i \geq \frac{1}{2} (\tilde{a}_{ii} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Remarque 4.3 : *Si $R' = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^n |\tilde{a}_{ij}|$, alors on se basant sur (4.9), on a $R' \geq R_i$, et selon le théorème de Gerschgorin, on a :*

$$k_i \geq \frac{1}{2p_i} (\tilde{a}_{ii} + R' - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.12)$$

Par contre le rang de k dans (4.12) est réduit par rapport à (4.10).

Remarque 4.4 : *Pour les systèmes chaotiques couplés, les conditions des inégalités algébriques correspondantes peuvent être dérivées pour la détermination des paramètres couplés afin d'assurer globalement la synchronisation du chaos.*

4.3 Synchronisation de quelques systèmes chaotiques

Pour illustrer l'utilisation des critères de synchronisation du chaos, trois différents systèmes chaotiques sont discutés :

4.3.1 Le circuit original de Chua

Le circuit de Chua est décrit par

$$\begin{cases} x' = \alpha(y - x - f(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y \end{cases} \quad (4.13)$$

où $\alpha > 0, \beta > 0, a < b < 0$, $f(\cdot)$ est une fonction linéaire décrite par

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|). \quad (4.14)$$

Dans (4.14), nous avons

$$f(x) - f(\tilde{x}) = k_{x,\tilde{x}}(x - \tilde{x}), \quad (4.15)$$

où $k_{x,\tilde{x}}$ est dépendant de x et \tilde{x} de et varie dans l'intervalle $[a, b]$ pour $t \geq 0$; tel que $k_{x,\tilde{x}}$ est borné par des constantes comme $a \leq k_{x,\tilde{x}} \leq b < 0$ (voir FIG.4-1).

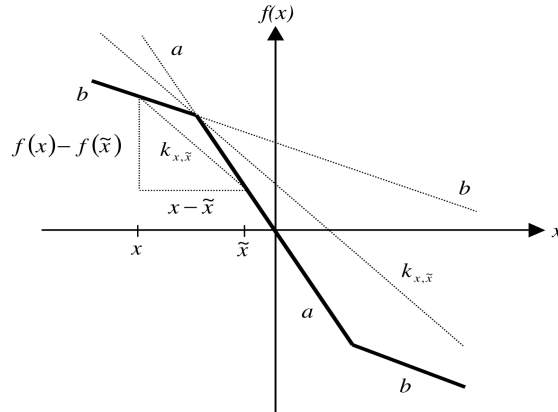


FIG. 4-1 – Représentation graphique de $k_{x,\tilde{x}}$ et de l'égalité (4.15)

Se référant à (4.3), le système esclave suivant est construit pour la dérivée (4.13) avec un couplement unidirectionnel linéaire.

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \alpha(\tilde{y} - \tilde{x} - f(\tilde{x})) + k_1(x - \tilde{x}) \\ \tilde{y}' = \tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z} + k_2(y - \tilde{y}) \\ \tilde{z}' = -\beta\tilde{y} + k_3(z - \tilde{z}) \end{cases} \quad (4.16)$$

En soustrayant(4.16) de (4.13), on obtient

$$\begin{cases} e'_x = \alpha(e_y - e_x - k_{x,\tilde{x}}e_x) - k_1e_x \\ e'_y = e_x - e_y + e_z - k_2e_y \\ e'_z = -\beta e_y - k_3e_z \end{cases} \quad (4.17)$$

où $e_x = x - \tilde{x}$, $e_y = y - \tilde{y}$, $e_z = z - \tilde{z}$ le système (4.17) peut être réécrit comme

$$e' = Ae + g(x) - g(\tilde{x}) - ke \quad (4.18)$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \\ z - \tilde{z} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} -\alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observons que

$$g(x) - g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} -\alpha(f(x) - f(\tilde{x})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha k_{x,\tilde{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \\ z - \tilde{z} \end{pmatrix} = M_{x,\tilde{x}}e, \quad (4.19)$$

où

$$M_{x,\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha k_{x,\tilde{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit de (4.18) et (4.19) que

$$(A + M_{x,\tilde{x}}) + (A + M_{x,\tilde{x}})^T = \begin{pmatrix} (-2\alpha - 2\alpha k_{x,\tilde{x}}) & \alpha + 1 & 0 \\ \alpha + 1 & -2 & 1 - \beta \\ 0 & 1 - \beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

On peut alors choisir

$$\begin{aligned}
k_1 &\geq \frac{1}{2}(-2\alpha - 2\alpha k_{x,\tilde{x}} + |\alpha + 1| - \mu) \\
k_2 &\geq \frac{1}{2}(-2 + |\alpha + 1| + |1 - \beta| - \mu) \\
k_3 &\geq \frac{1}{2}(|1 - \beta| - \mu).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Selon le théorème (4.2) et la remarque (4.2), les deux systèmes couplés (4.13) et (4.16) de Chua sont globalement et asymptotiquement synchronisés.

Comme $\alpha > 0$ et $a \leq k_{x,\tilde{x}} \leq b < 0$, de (4.21) on peut choisir :

$$\begin{aligned}
k_1 &\geq \frac{1}{2}(-2\alpha - 2\alpha a + |\alpha + 1| - \mu) \\
k_2 &\geq \frac{1}{2}(\alpha - 1 + |1 - \beta| - \mu) \\
k_3 &\geq \frac{1}{2}(|1 - \beta| - \mu)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

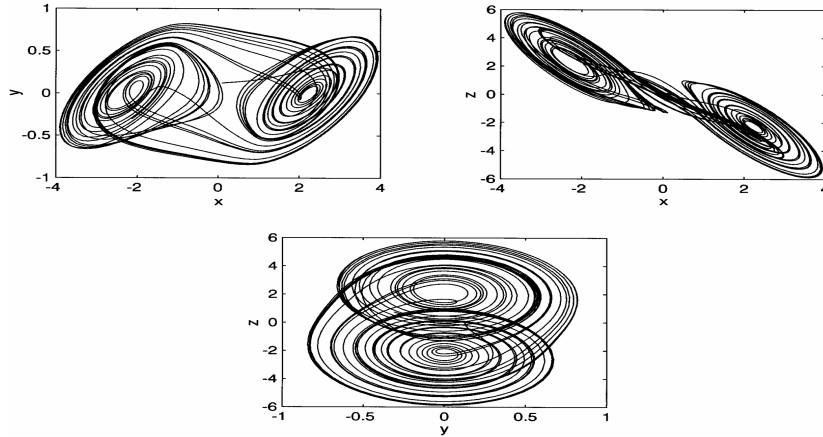


FIG. 4-2 – Les attracteurs à double scroll du circuit de Chua

Corollaire 4.3 *Pour les deux systèmes couplés (4.14) et (4.17) de Chua, si la matrice de feed-back k est choisie tel que l'inégalité (4.23) est vérifiée, alors ils sont globalement et asymptotiquement synchronisés.*

Quand $\alpha = 9.87$, $\beta = 14.97$, $a = -1.31$, $b = -0.75$, le système (4.13) exhibe un comportement chaotique. En sélectionnant $\mu = -0.2$ et les paramètres couplés $k_1 = 4.0$, $k_2 = 10.0$, $k_3 = 1.0$, l'inégalité (4.22) est vérifiée.

En se basant sur le corollaire (4.3), les deux circuits couplés de Chua (4.13) et (4.16) avec les paramètres choisis sont globalement et asymptotiquement synchronisés. Voir Fig. 4-3

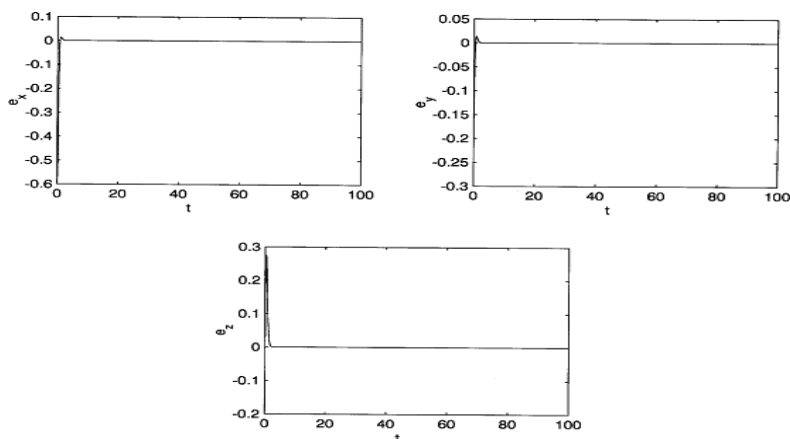


FIG. 4-3 – La différence des signaux e_x , e_y , e_z dans deux circuits couplés Chua avec les coefficients de couplage $k_1 = 4.0$, $k_2 = 10.0$, $k_3 = 1.0$

Le système (4.13) est identique au système du circuit de Chua qui s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{1}{RC_1} (v_{C_2} - v_{C_1}) - \frac{1}{C_1} g(v_{C_1}) \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{RC_2} (v_{C_1} - v_{C_2}) + \frac{1}{C_2} i_L \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_{C_2} \end{cases}$$

tel que $g(v_{C_1}) = m_1 v_{C_1} + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) [|v_{C_1} + b_1| - |v_{C_1} - b_1|]$
 et $x = \frac{v_{C_1}}{b_1}$, $y = \frac{v_{C_2}}{b_1}$, $z = \frac{R i_L}{b_1}$, $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, $\beta = \frac{C_2 R^2}{L}$, $\overline{m_0} = m_0 R$, $\overline{m_1} = m_1 R$

Le système (4.13) s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x' = \alpha (y - x - f(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y \end{cases}$$

où $f(x) = m_1 x + \frac{1}{2} (\overline{m_0} - \overline{m_1}) [|x + 1| - |x - 1|]$, voir Fig. 4-4

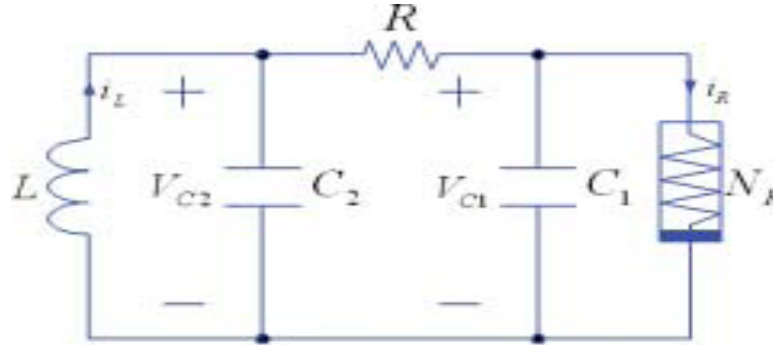


FIG. 4-4 – Circuit de Chua

4.3.2 Modification du circuit de Chua avec la fonction sinusoïdale

Contrairement au circuit original de Chua, le circuit modifié de Chua utilise une fonction sinusoïdale. Pour ce circuit, le n-scroll attracteurs peut être obtenu, comme indiqué en FIG. 4-4

L'état de l'équation du circuit sans dimension est :

$$\begin{cases} x' = \alpha(y - f(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -\beta y \end{cases} \quad (4.23)$$

où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(\pi - 2ac) & , \quad x \geq 2ac \\ -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right) & , \quad -2ac < x < 2ac \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac) & , \quad x \leq -2ac \end{cases} \quad (4.24)$$

Ici, dans (4.23) et (4.24), α , β , a , b , c , d sont des constantes convenables, et $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Le n-scroll attracteurs est généré selon les hypothèses suivantes :

$$n = c + 1 \quad (4.25)$$

et

$$d = \begin{cases} \pi & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad (4.26)$$

Dans (2.24), on a :

$$f(x) - f(\tilde{x}) = k_{x,\tilde{x}}(x - \tilde{x}) \quad (4.27)$$

où $k_{x,\tilde{x}}$ est dépendant de x et \tilde{x} , et satisfait la condition $\frac{-b\pi}{2a} \leq x \leq \frac{-b\pi}{2a}$.

Le système esclave pour le système (4.23), via un couplage unidirectionnel linéaire, est :

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \alpha(\tilde{y} - f(\tilde{x})) + k_1(x - \tilde{x}) \\ \tilde{y}' = \tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z} + k_2(y - \tilde{y}) \\ \tilde{z}' = -\beta\tilde{y} + k_3(z - \tilde{z}) \end{cases} \quad (4.28)$$

En soustrayant (4.28) de (4.23), le système dynamique de l'erreur est obtenu :

$$\begin{cases} e'_x = \alpha(e_y - k_{x,\tilde{x}}e_x) - k_1e_x \\ e'_y = e_x - e_y + e_z - k_2e_y \\ e'_z = -\beta e_y - k_3e_z \end{cases} \quad (4.29)$$

où $e_x = x - \tilde{x}$, $e_y = y - \tilde{y}$, $e_z = z - \tilde{z}$.

Le système (4.29) peut être réécrit comme :

$$e' = Ae + g(x) - g(\tilde{x}) - Ke \quad (4.30)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 & \alpha & 0 \\ 1 & k_2 & 1 \\ 0 & -\beta & k_3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \\ z - \tilde{z} \end{pmatrix}$$

et
$$g(x) = \begin{pmatrix} -\alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$g(x) - g(\tilde{x}) = M_{x,\tilde{x}}(x - \tilde{x})$$

et nous obtenons alors

$$(A + M_{x,\tilde{x}}) + (A + M_{x,\tilde{x}})^T = \begin{pmatrix} -2\alpha k_{x,\tilde{x}} & \alpha + 1 & 0 \\ \alpha + 1 & -2 & 1 - \beta \\ 0 & 1 - \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Il s'ensuit alors des théorèmes (4.1) et (4.2) que :

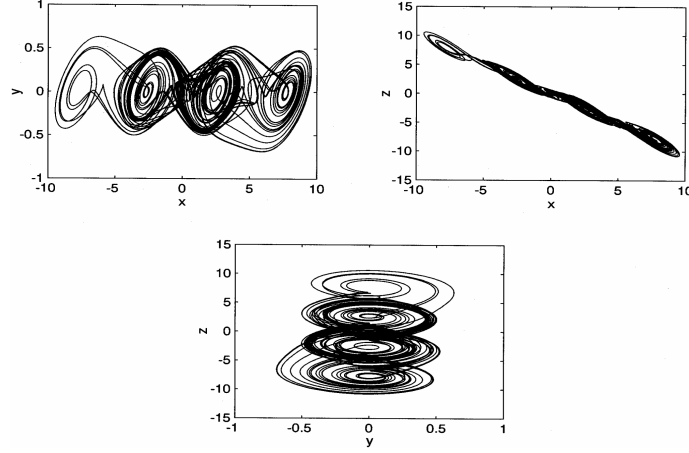


FIG. 4-5 – Les attracteurs à quadruple scroll du circuit de Chua avec $\alpha = 10.814$, $\beta = 14.0$, $a = 1.3$, $b = 0.11$, $c = 3$ et $d = 0$

$$\begin{aligned}
 k_1 &\geq \frac{1}{2}(\pi b + \alpha + 1 - \mu) \\
 k_2 &\geq \frac{1}{2}(\alpha - 1 + |1 - \beta| - \mu) \\
 k_3 &\geq \frac{1}{2}(|1 - \beta| - \mu).
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Les deux systèmes couplés modifiés de Chua (4.23) et (4.28) sont globalement et asymptotiquement synchronisés

Corollaire 4.4 *Pour les deux systèmes couplés modifiés de Chua (4.23) et (4.28), si k_1 , k_2 , k_3 sont choisis tel que l'inégalité (4.32) est vérifiée, alors ils sont globalement et asymptotiquement synchronisés.*

Soit $\alpha = 10.814$, $\beta = 14.0$, $a = 1.3$, $b = 0.11$, $c = 3$ et $d = 0$, alors, le système (4.23) exhibe le comportement chaotique. (FiG.4-5).

On sélectionne $\mu = -0.8$ et les paramètres de couplement comme $k_1 = 2.8$, $k_2 = 9.0$, $k_3 = 1.0$.

Alors, l'inégalité (4.32) est vérifiée.

Ainsi, il découle du corollaire (4.4) que les deux circuits couplés modifiés de Chua (4.23) et (4.28) avec les paramètres choisis ci-dessus, sont globalement et asymptotiquement synchronisés . (FiG.4-5).

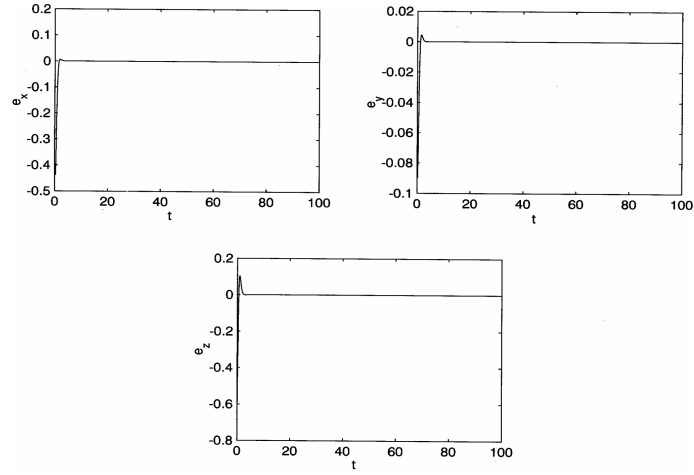


FIG. 4-6 – La différence des signaux e_x , e_y , e_z dans deux circuits couplés Chua avec les coefficients de couplage $k_1 = 2.8$, $k_2 = 9.0$, $k_3 = 1.0$

4.3.3 Le système de Rössler

Le système de Rössler est décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + zx - cz \end{cases} \quad (4.33)$$

où a , b et c désignent des paramètres positifs.

Selon l'approche de couplage unidirectionnelle linéaire d'erreur en feed-back, le système esclave de (4.33) est construit comme suit

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -\tilde{y} - \tilde{z} + k_1(x - \tilde{x}) \\ \tilde{y}' = \tilde{x} + a\tilde{y} + k_2(y - \tilde{y}) \\ \tilde{z}' = b + \tilde{z}\tilde{x} - \tilde{z}c + k_3(z - \tilde{z}) \end{cases} \quad (4.34)$$

Il résulte de (4.33) et (4.34) que

$$e' = Ae + g(x) - g(\tilde{x}) - ke \quad (4.35)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \\ z - \tilde{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$$

Alors, on a

$$g(x) - g(\tilde{x}) = k_{x,\tilde{x}}e,$$

et ainsi

$$(A + M_{x,\tilde{x}}) + (A + M_{x,\tilde{x}})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{z} - 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ \tilde{z} - 1 & 0 & 2x - 2c \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Il résulte des théorèmes (4.1) et (4.2) que si

$$\begin{aligned} k_1 &\geq \frac{1}{2} (|\tilde{z} - 1| - \mu) \\ k_2 &\geq \frac{1}{2} (2a - \mu) \\ k_3 &\geq \frac{1}{2} (|\tilde{z} - 1| + 2x - 2c - \mu), \end{aligned} \quad (4.37)$$

les deux systèmes appariés de Rössler (4.33) et (4.34) sont globalement et asymptotiquement synchronisés.

Corollaire 4.5 *Pour les deux systèmes couplés de Rössler (4.33) et (4.34), si k_1, k_2, k_3 sont choisis tel que l'inégalité (4.37) est vérifiée, alors ils sont globalement et asymptotiquement synchronisés.*

Remarque 4.5 *Comme la trajectoire du système chaotique est bornée, l'inégalité (4.37) est vérifiée pour suffisamment de valeurs de k_1, k_2, k_3 .*

La Sélection donne un comportement chaotique du système comme il est représenté dans (FIG.4-6).

De la figure (FIG.4-6), on peut voir que $-10 < x < 13$, $-12 < y < 8$, $0 < z < 24$.

Choissant $\mu = -0.2$ et les paramètres de couplage comme $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.3$, $k_3 = 13.0$ vont satisfaire l'inégalité (4.37).

Donc, par le corollaire (4.5), les deux systèmes couplés de Rössler (4.33) et (4.34) sont globalement et asymptotiquement synchronisés, comme il est montré dans (FIG.4-7).

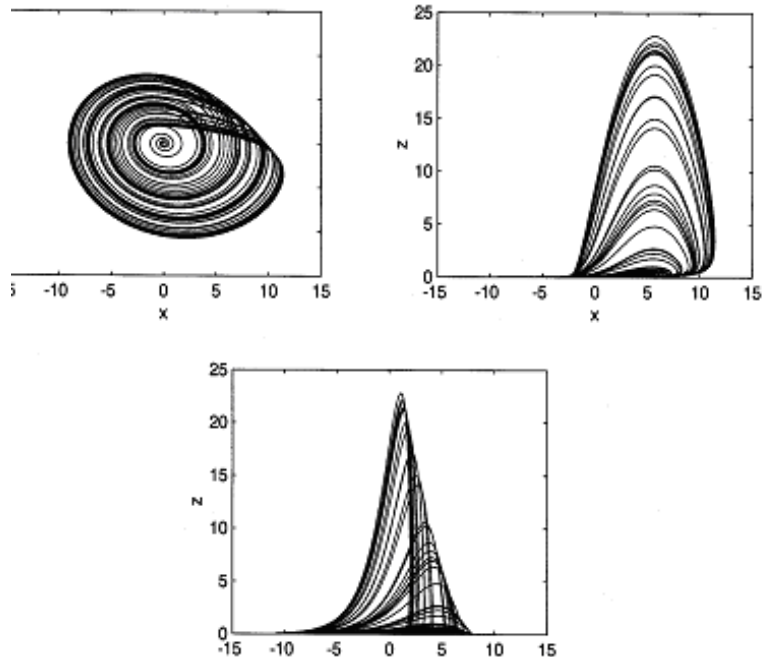


FIG. 4-7 – Les attracteurs du système chaotique de Rössler

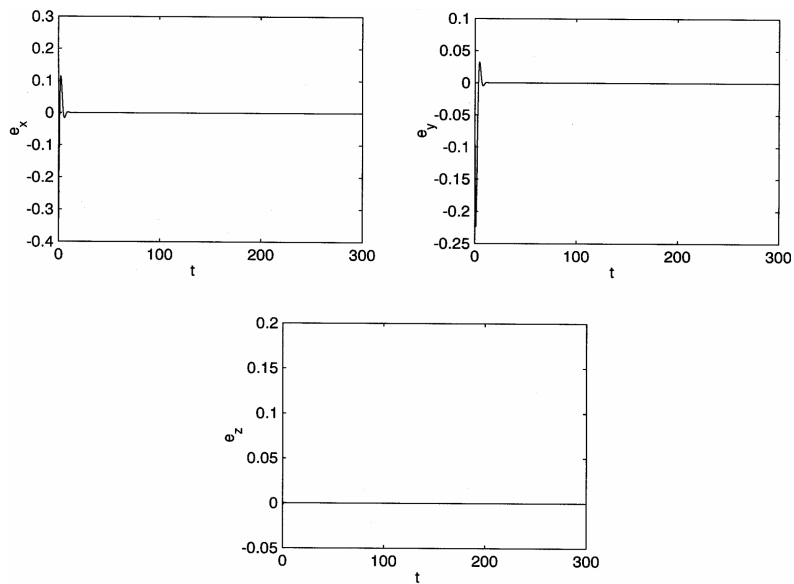


FIG. 4-8 – La différence des signaux e_x, e_y, e_z dans deux circuits couplés de Rössler avec les coefficients de couplage $k_1 = 1.0, k_2 = 0.3, k_3 = 13.0$

Chapitre 5

Détermination des systèmes en 3D et synchronisation avec le système de Lorenz

5.1 Introduction

Il existe plusieurs méthodes pour synchroniser deux systèmes. Nous avons appliqué la méthode de contrôle pour synchroniser quelques systèmes avec le système de Lorenz.

Dans ce chapitre : $\sigma, a, b, b', d_1, d_3, l$ et r sont des paramètres réels.

5.2 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Rössler

On considère les deux systèmes : Lorenz et Rössler

Système de Lorenz

$$Le\ maître : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.1)$$

Système de Rössler

$$L'esclave : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b' + zx - cz \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\text{Le maître} : \begin{cases} x_1' = \sigma(y_1 - x_1) \\ y_1' = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z_1' = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Système de Rössler

$$\text{L'esclave} : \begin{cases} x_2' = -y_2 - z_2 + U_1(t) \\ y_2' = x_2 + ay_2 + U_2(t) \\ z_2' = b' + z_2x_2 - cz_2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.4).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$

Alors, le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = \sigma e_2 - \sigma e_1 - (\sigma + 1)y_2 + \sigma x_2 - z_2 + U_1(t) \\ e_2' = re_1 + ae_2 + (1 - r)x_2 + (a + 1)y_1 + x_1z_1 + U_2(t) \\ e_3' = b' - ce_3 + (b - c)z_1 - cz_2 - x_1y_1 + x_2z_2 + U_3(t). \end{cases} \quad (5.5)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) + (\sigma + 1)y_2 - \sigma x_2 + z_2 \\ U_2(t) = V_2(t) + (r - 1)x_2 - (a + 1)y_1 - x_1z_1 \\ U_3(t) = V_3(t) - (b - c)z_1 + cz_2 + x_1y_1 - x_2z_2. \end{cases} \quad (5.6)$$

Ainsi, le système des erreurs (5.5) devient :

$$\begin{cases} e_1' = \sigma e_2 - \sigma e_1 + V_1(t) \\ e_2' = re_1 + ae_2 + V_2(t) \\ e_3' = b' - ce_3 + V_3(t). \end{cases} \quad (5.7)$$

Le système des erreurs (5.7) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t), V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (5.7), e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Rössler et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.1 La fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = -\sigma e_2 \\ V_2(t) = -re_1 - 2ae_2 \\ V_3(t) = -b' \end{cases} \quad (5.8)$$

où σ, r, b' sont les paramètres réels choisis, tel que le système des erreurs converge vers zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -\sigma e_2 + (\sigma + 1)y_2 - \sigma x_2 + z_2 \\ U_2(t) = -re_1 + (r - 1)x_2 - (a + 1)y_1 - x_1z_1 \\ U_3(t) = -b' - (b - c)z_1 + cz_2 + x_1y_1 - x_2z_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

Donc, le système (5.4) devient :

$$\begin{cases} x_2' = \sigma y_2 - \sigma x_2 - \sigma e_2 \\ y_2' = -re_1 - ae_2 - y_1 - x_1z_1 + rx_2 \\ z_2' = (c - b)z_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.10)$$

Avec le choix particulier(5.8), le système (5.7) est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 \\ e_2' = -ae_2 \\ e_3' = -ce_3 \end{cases} \quad (5.11)$$

Ses valeurs propres sont : $-\sigma, -a, -c$, alors, pour tout $\sigma > 0, a > 0, c > 0$, le système linéaire (5.11) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent que les erreurs e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Rössler et celui de Lorenz est achevée.

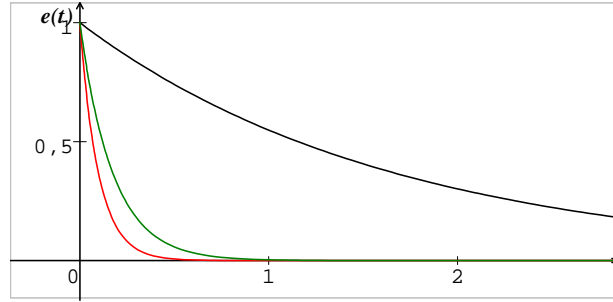


FIG. 5-1 – Dynamique d'état des erreurs de synchronisation des erreurs e_1 , e_2 et e_3 entre le système de Lorenz et le système de Rösler pour, $\sigma = 10$, $a = 0.2$, $c = 5.7$

5.3 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Rucklidge

On considère les deux systèmes : Lorenz et Rucklidge

Système de Lorenz :

$$\text{Le maître} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.12)$$

Système de Rucklidge :

$$\text{L'esclave} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - ly - yz \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = -z + y^2 \end{cases} \quad (5.13)$$

où a, l sont des paramètres réels.

$$\text{Le maître} : \begin{cases} x'_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ y'_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z'_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\text{L'esclave} : \begin{cases} x'_2 = ax_2 - ly_2 - y_2z_2 + U_1(t) \\ y'_2 = x_2 + U_2(t) \\ z'_2 = -z_2 + y_2^2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.15)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.15).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$, alors le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e'_1 = ae_1 - le_2 + (a + \sigma)x_1 - (l + \sigma)y_1 - y_2z_2 + U_1(t) \\ e'_2 = e_1 - e_2 + (1 - r)x_1 + y_2 + x_1z_1 + U_2(t) \\ e'_3 = -e_3 + (b - 1)z_2 - x_1y_1 + y_2^2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) - (a + \sigma)x_1 + (l + \sigma)y_1 + y_2z_2 \\ U_2(t) = V_2(t) + (r - 1)x_1 - y_2 - x_1z_1 \\ U_3(t) = V_3(t) + (1 - b)z_2 + x_1y_1 - y_2^2 \end{cases} \quad (5.17)$$

Donc, le système des erreurs (5.16) devient :

$$\begin{cases} e'_1 = ae_1 - le_2 + V_1(t) \\ e'_2 = e_1 - e_2 + V_2(t) \\ e'_3 = -e_3 + V_3(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

Le système des erreurs (5.18) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t), V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (5.18), e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Rucklidge et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.2 la fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = le_2 \\ V_2(t) = -e_1 \\ V_3(t) = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

où l est le paramètre réel choisi, tel que le système des erreurs converge vers zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -ae_1 - (a + \sigma)x_1 + (l + \sigma)y_1 + y_2z_2 \\ U_2(t) = -e_1 + (r - 1)x_1 - y_2 - x_1z_1 \\ U_3(t) = (1 - b)z_2 + x_1y_1 - y_2^2 \end{cases} \quad (5.20)$$

Donc, le système (5.15) devient :

$$\begin{cases} x'_2 = -ly_2 - \sigma x_1 + (l + \sigma) y_1 \\ y'_2 = rx_1 - y_2 - x_1 z_1 \\ z'_2 = -bz_2 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.21)$$

Avec le choix particulier (5.19), le système (5.18) est donné par :

$$\begin{cases} e'_1 = ae_1 \\ e'_2 = -e_2 \\ e'_3 = -e_3 \end{cases} \quad (5.22)$$

Ses valeurs propres sont : a , -1 , -1 ; alors, pour tout $a < 0$, le système linéaire (5.22) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent que les erreurs e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Rucklidge et celui de Lorenz est achevée.

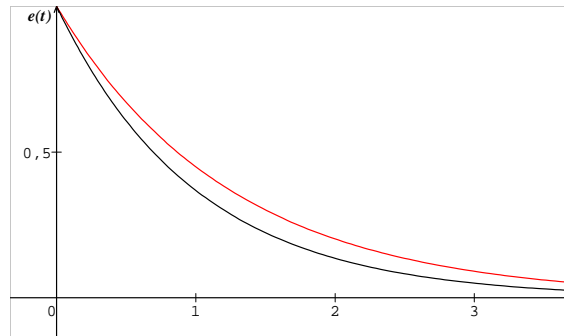


FIG. 5-2 – Etat des erreurs de synchronisation e_1, e_2 , et e_3 entre le système de Lorenz et le système de Rucklidge pour, $a = 0.8$

5.4 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Shimiza-Morioka

On considère les deux systèmes : Lorenz et Shimiza-Morioka

Système de Lorenz

$$\text{Le maître : } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.23)$$

Système de Shimiza-Morioka

$$L'esclave : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - ay - xz \\ \frac{dz}{dt} = -b_1y + x^2 \end{cases} \quad (5.24)$$

où : σ, b, r sont les paramètres réels.

$$Le\ maître : \begin{cases} x'_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ y'_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z'_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.25)$$

Système de Shimiza-Morioka

$$L'esclave : \begin{cases} x'_2 = y_2 + U_1(t) \\ y'_2 = x_2 - ay_2 - x_2z_2 + U_2(t) \\ z'_2 = -b_1y_2 + x_2^2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.26)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.26).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$

Alors, le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e'_1 = \sigma e_1 + e_2 - \sigma x_2 + (1 - \sigma) y_1 + U_1(t) \\ e'_2 = r e_1 - a e_2 - e_3 x_1 - e_1 z_2 + (1 - r) x_2 + (1 - a) y_1 + U_2(t) \\ e'_3 = -b_1 e_2 - b e_3 - b_1 y_1 + b z_2 - x_1 y_1 + x_2^2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.27)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) + \sigma x_2 - (1 - \sigma) y_1 \\ U_2(t) = V_2(t) + e_3 x_1 + e_1 z_2 - (1 - r) x_2 - (1 - a) y_1 \\ U_3(t) = V_3(t) + b_1 y_1 - b z_2 + x_1 y_1 - x_2^2 \end{cases} \quad (5.28)$$

Ainsi, le système des erreurs (5.27) devient :

$$\begin{cases} e'_1 = \sigma e_1 + e_2 + V_1(t) \\ e'_2 = r e_1 - a e_2 + V_2(t) \\ e'_3 = -b_1 e_2 - b e_3 + V_3(t) \end{cases} \quad (5.29)$$

Le système des erreurs (5.29) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t)$, $V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (5.29), e_1 , e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Shimiza-Morioka et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.3 la fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = -e_2 - 2\sigma e_1 \\ V_2(t) = -re_1 \\ V_3(t) = b_1 e_2 \end{cases} \quad (5.30)$$

où σ, r, b_1 sont les paramètres réels choisis, tel que le système des erreurs converge vers zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -e_2 - 2\sigma e_1 + \sigma x_2 + (\sigma + 1) y_1 \\ U_2(t) = -re_1 + e_3 x_1 + e_1 z_2 + (r - 1) x_2 + (a - 1) y_1 \\ U_3(t) = -be_3 + b_1 y_1 - bz_2 + x_1 y_1 - x_2^2 \end{cases} \quad (5.31)$$

Donc, le système (5.26) devient :

$$\begin{cases} x_2' = -e_2 - \sigma e_1 + \sigma x_1 + (\sigma + 1) y_1 + y_2 \\ y_2' = -re_1 - e_3 x_1 + e_1 z_2 + rx_2 - ay_2 - x_2 z_2 + (a - 1) y_1 \\ z_2' = -b_1 e_2 - be_3 - bz_2 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.32)$$

Avec le choix particulier (5.30), le système (5.29) est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 \\ e_2' = -ae_2 \\ e_3' = -be_3 \end{cases} \quad (5.33)$$

Ses valeurs propres sont : $-\sigma$, $-a$, $-b$, alors, pour tout $\sigma > 0$, $a > 0$, $b > 0$, le système linéaire (5.33) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent que les erreurs e_1 , e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Shimiza-Morioka et celui de Lorenz est achevée.

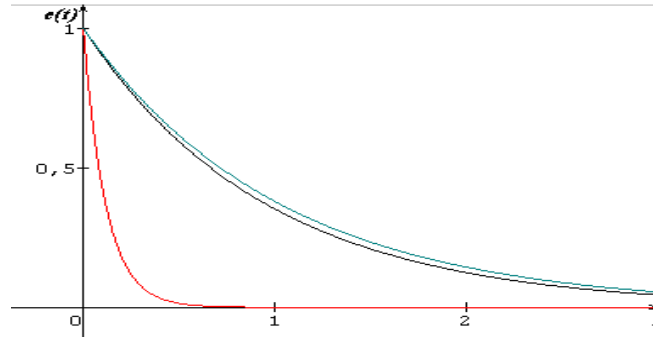


FIG. 5-3 – Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Shimiza-Morioka pour, $\sigma = 8.55$, $a = 1.044$, $b = 0.97$

5.5 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Genesio-Texi

On considère les deux systèmes : Lorenz et Genesio-Texi

Système de Lorenz

$$\text{Le maître} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.34)$$

Système de Genesio-Texi

$$\text{L'esclave} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -cx - b_1y - az + x^2 \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\text{Le maître} : \begin{cases} x'_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ y'_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z'_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.36)$$

Système de Genesio-Texi

$$\text{L'esclave} : \begin{cases} x'_2 = y_2 + U_1(t) \\ y'_2 = z_2 + U_2(t) \\ z'_2 = -cx_2 - b_1y_2 - az_2 + x_2^2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.37)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.37).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$

Alors, le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 + e_2 + \sigma x_2 + (1 - \sigma) y_1 + U_1(t) \\ e_2' = r e_1 - e_2 - r x_2 + y_2 + z_2 + x_1 z_1 + U_2(t) \\ e_3' = -c e_1 - b_1 e_2 - a e_3 - c e_3 - c x_1 - b_1 y_1 + (b - a) z_1 - x_1 y_1 + x_2^2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.38)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) - \sigma x_2 - (1 - \sigma) y_1 \\ U_2(t) = V_2(t) + r x_2 - y_2 - z_2 - x_1 z_1 \\ U_3(t) = V_3(t) + c x_1 + b_1 y_1 - (b - a) z_1 + x_1 y_1 - x_2^2 \end{cases} \quad (5.39)$$

Ainsi, le système des erreurs (5.38) devient :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 + e_2 + V_1(t) \\ e_2' = r e_1 - e_2 + V_2(t) \\ e_3' = -c e_1 - b_1 e_2 - a e_3 + V_3(t) \end{cases} \quad (5.40)$$

Le système des erreurs (5.40) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t), V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (5.40), e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Genesio-Texti et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.4 la fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = -e_2 \\ V_2(t) = -r e_1 \\ V_3(t) = c e_1 + b_1 e_2 \end{cases} \quad (5.41)$$

où r, c, b_1 sont les paramètres réels choisis, tel que le système des erreurs converge vers zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -e_2 - \sigma x_2 + (\sigma - 1) y_1 \\ U_2(t) = -r e_1 + r x_2 - y_2 - z_2 - x_1 z_1 \\ U_3(t) = c e_1 + b_1 e_2 + c x_1 + b_1 y_1 + (a - b) z_1 + x_1 y_1 - x_2^2 \end{cases} \quad (5.42)$$

Donc, le système (5.37) devient :

$$\begin{cases} x_2' = \sigma y_1 - \sigma x_2 \\ y_2' = -r e_1 + r x_2 - y_2 - x_1 z_1 \\ z_2' = -a e_3 - b z_1 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.43)$$

Avec le choix particulier (5.41), le système (5.40) est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 \\ e_2' = -e_2 \\ e_3' = -a e_3 \end{cases} \quad (5.44)$$

Ses valeurs propres sont : $-\sigma$, -1 , $-a$, alors, pour tout $\sigma > 0$, $a > 0$, le système linéaire (5.44) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent que les erreurs e_1 , e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Genesio-Texti et celui de Lorenz est achevée.

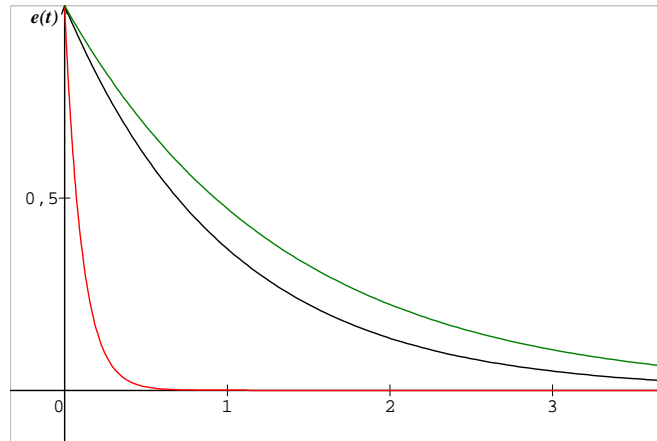


FIG. 5-4 – Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1 , e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Genesio-Texti pour $\sigma = 9.45$, $a = 0.45$

5.6 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Liu

On considère les deux systèmes : Lorenz et Liu

Système de Lorenz

$$\text{Le maître} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.45)$$

Système de Liu

$$\text{L'esclave} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + d_1yz \\ \frac{dy}{dt} = b'y + d_2xz \\ \frac{dz}{dt} = cz + d_3xy \end{cases} \quad (5.46)$$

Tel que $a, b', c,$ et d_i ($1 \leq i \leq 3$) sont les paramètres qui satisfont $ab' + ac + b'c = 0$

$$\text{Le maître} : \begin{cases} x'_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ y'_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z'_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.47)$$

Système de Liu

$$\text{L'esclave} : \begin{cases} x'_2 = ax_2 - d_1y_2z_2 + U_1(t) \\ y'_2 = b'y_2 + d_2x_2z_2 + U_2(t) \\ z'_2 = cz_2 + d_3x_2y_2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.48)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.48).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$

Alors, le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e'_1 = ae_1 + \sigma e_2 + (a + \sigma)x_1 - \sigma y_2 + d_1y_2z_2 + U_1(t) \\ e'_2 = b'e_2 + re_1 - rx_2 + (b' + 1)y_1 + x_1z_1 + d_2x_2z_2 + U_2(t) \\ e'_3 = ce_3 + (c + b)z_1 - x_1y_1 + d_3x_2y_2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.49)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) - (a + \sigma)x_1 + \sigma y_2 - d_1y_2z_2 \\ U_2(t) = V_2(t) + rx_2 - (b' + 1)y_1 - x_1z_1 - d_2x_2z_2 \\ U_3(t) = V_3(t) - (c + b)z_1 + x_1y_1 - d_3x_2y_2 \end{cases} \quad (5.50)$$

Ainsi, le système des erreurs (5.49) devient :

$$\begin{cases} e'_1 = ae_1 + \sigma e_2 + V_1(t) \\ e'_2 = re_1 + b'e_2 + V_2(t) \\ e'_3 = ce_3 + V_3(t) \end{cases} \quad (5.51)$$

Le système des erreurs (5.51) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t), V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (2.51), e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Liu et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.5 la fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = -\sigma e_2 - 2ae_1 \\ V_2(t) = -re_1 \\ V_3(t) = 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

où σ, r sont les paramètres réels choisis, tel que le système des erreurs converge vers zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -\sigma e_2 - (a + \sigma)x_1 + \sigma y_2 - d_1 y_2 z_2 \\ U_2(t) = -re_1 + rx_2 - (b' + 1)y_1 - x_1 z_1 - d_2 x_2 z_2 \\ U_3(t) = -(c + b)z_1 + x_1 y_1 - d_3 x_2 y_2 \end{cases} \quad (5.53)$$

Donc, le système (5.48) devient :

$$\begin{cases} x_2' = ae_1 - \sigma e_2 - \sigma x_1 + \sigma y_2 \\ y_2' = -re_1 + b'e_2 + rx_2 - y_1 - x_1 y_1 \\ z_2' = -ae_3 - bz_1 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.54)$$

Avec le choix particulier (5.52), le système (5.51) est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -ae_1 \\ e_2' = b'e_2 \\ e_3' = ce_3 \end{cases} \quad (5.55)$$

Ses valeurs propres sont : $-a, b', c$, alors, pour tout $a > 0, b' < 0, c < 0$, le système linéaire (5.55) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent que les erreurs e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Liu et celui de Lorenz est achevée.

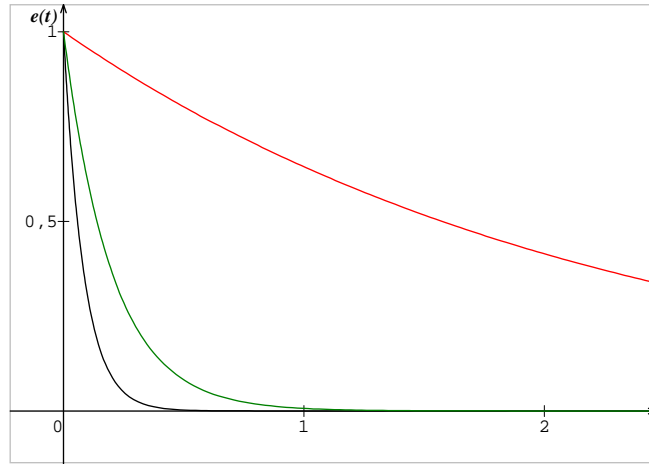


FIG. 5-5 – Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Liu pour $a = 0.44, b' = -12, c = -5$

5.7 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Chen

On considère les deux systèmes : Lorenz et Chen

Système de Lorenz

$$\text{Le maître : } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.56)$$

Système de Chen

$$\text{L'esclave : } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -z \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 - y \\ \frac{dz}{dt} = 1.7 + 1.7x + y \end{cases} \quad (5.57)$$

$$\text{Le maître : } \begin{cases} x'_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ y'_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z'_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.58)$$

Système de Chen

$$L'esclave : \begin{cases} x_2' = -z_2 + U_1(t) \\ y_2' = -x_2^2 - y_2 + U_2(t) \\ z_2' = 1.7 + 1.7x_2 + y_2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.59)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.59).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$

Alors, le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 + \sigma e_2 + \sigma x_2 - \sigma y_2 - z_2 + U_1(t) \\ e_2' = -e_2 - rx_1 + x_1 z_1 - x_2^2 + U_2(t) \\ e_3' = 1.7 - be_3 + 1.7e_1 + 1.7x_1 + y_2 + bz_2 - x_1 y_1 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.60)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) - \sigma x_2 + \sigma y_2 + z_2 \\ U_2(t) = V_2(t) + rx_1 - x_1 z_1 + x_2^2 \\ U_3(t) = V_3(t) - 1.7x_1 - y_2 - bz_2 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.61)$$

Ainsi, le système des erreurs (5.60) devient :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 + \sigma e_2 + V_1(t) \\ e_2' = -e_2 + V_2(t) \\ e_3' = 1.7 + 1.7e_1 - be_3 + V_3(t) \end{cases} \quad (5.62)$$

Le système des erreurs (5.62) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t), V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (5.62), e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Chen et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.6 la fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = -\sigma e_2 \\ V_2(t) = 0 \\ V_3(t) = -1.7 - 1.7e_1 \end{cases} \quad (5.63)$$

où σ, r, b' sont les paramètres réels choisis, tel que le système des erreurs converge vers

zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -\sigma e_2 - \sigma x_2 + \sigma y_2 + z_2 \\ U_2(t) = rx_1 - x_1 z_1 + x_2^2 \\ U_3(t) = -1.7 - 1.7e_1 - 1.7x_1 - y_2 - bz_2 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.64)$$

Donc, le système (5.59) devient :

$$\begin{cases} x_2' = \sigma y_2 - \sigma x_2 - \sigma e_2 \\ y_2' = rx_1 - x_1 z_1 + y_2 \\ z_2' = -bz_2 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.65)$$

Avec le choix particulier (5.63), le système (5.62) est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 \\ e_2' = -e_2 \\ e_3' = -be_3 \end{cases} \quad (5.66)$$

Ses valeurs propres sont : $-\sigma, -1, -b$, alors, pour tout $\sigma > 0, b > 0$, le système linéaire (5.66) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent aux erreurs e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Chen et celui de Lorenz est achevée.

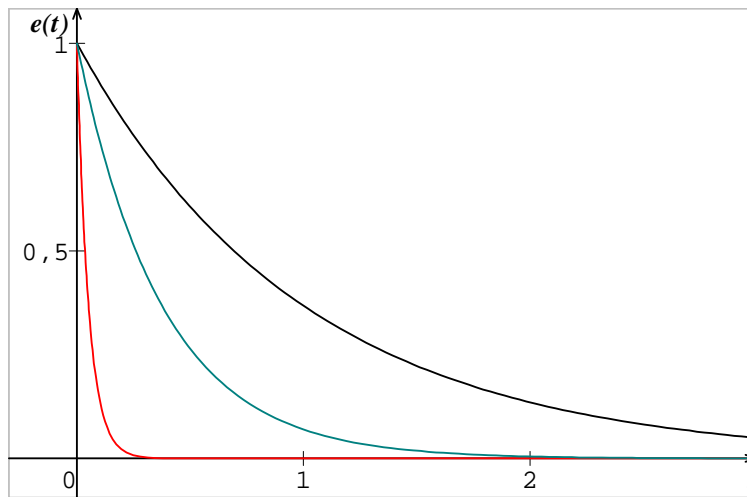


FIG. 5-6 – Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Chen pour $\sigma = 19.375, b = 2.66$

5.8 Synchronisation du chaos entre le système de Lorenz et le système de Sprott

On considère les deux systèmes : Lorenz et Sprott

Système de Lorenz

$$Le\ maître \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.67)$$

Système de Sprott

$$L'esclave \begin{cases} \frac{dx}{dt} = yz \\ \frac{dy}{dt} = x - y \\ \frac{dz}{dt} = 1 - xy \end{cases} \quad (5.68)$$

$$Le\ maître : \begin{cases} x'_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ y'_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ z'_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad (5.69)$$

Système de Sprott

$$L'esclave : \begin{cases} x'_2 = y_2z_2 + U_1(t) \\ y'_2 = x_2 - y_2 + U_2(t) \\ z'_2 = 1 - x_2y_2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.70)$$

$U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ sont les fonctions de contrôle actif introduites dans le système (5.70).

Soit l'état des erreurs $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$ et $e_3 = z_2 - z_1$

Alors, le système des erreurs est donné par :

$$\begin{cases} e'_1 = \sigma e_2 - \sigma e_1 + \sigma x_2 - \sigma y_2 + y_2z_2 + U_1(t) \\ e'_2 = -e_2 + r e_1 + (1 - r) x_2 + x_1z_1 + U_2(t) \\ e'_3 = 1 - b e_3 + b z_2 - x_1y_1 - x_2y_2 + U_3(t) \end{cases} \quad (5.71)$$

Et la fonction de contrôle actif $U = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)]^t$ est définie par :

$$\begin{cases} U_1(t) = V_1(t) - \sigma x_2 + \sigma y_2 - y_2z_2 \\ U_2(t) = V_2(t) - (1 - r) x_2 - x_1z_1 \\ U_3(t) = V_3(t) - b z_2 + x_1y_1 + x_2y_2 \end{cases} \quad (5.72)$$

Ainsi, le système des erreurs (5.71) devient :

$$\begin{cases} e_1' = \sigma e_2 - \sigma e_1 + V_1(t) \\ e_2' = -e_2 + r e_1 + V_2(t) \\ e_3' = 1 - b e_3 + V_3(t) \end{cases} \quad (5.73)$$

Le système des erreurs (5.73) à contrôler est un système linéaire avec la fonction de contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$ qui est une fonction des états d'erreurs e_1, e_2 et e_3 .

Aussi longtemps que ces rétroactions $V_1(t), V_2(t)$ et $V_3(t)$ stabilisent le système (5.73), e_1, e_2 et e_3 convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cela implique que le système de Sprott et le système de Lorenz sont synchronisés avec le contrôle des rétroactions.

Il existe différents choix ou possibilités pour le contrôle $V = [V_1(t), V_2(t), V_3(t)]^t$.

Exemple 5.7 la fonction d'entrée de commande est choisie comme suit :

$$\begin{cases} V_1(t) = -\sigma e_2 \\ V_2(t) = -r e_1 \\ V_3(t) = -1 \end{cases} \quad (5.74)$$

où σ, r sont les paramètres réels choisis, tel que le système des erreurs converge vers zéro. Alors, l'actif de contrôle U est donné par :

$$\begin{cases} U_1(t) = -\sigma e_2 - \sigma x_2 + \sigma y_2 - y_2 z_2 \\ U_2(t) = -r e_1 + (r - 1) x_2 - x_1 z_1 \\ U_3(t) = -1 - b z_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{cases} \quad (5.75)$$

Donc, le système (5.70) devient :

$$\begin{cases} x_2' = -\sigma x_2 + \sigma y_1 \\ y_2' = r x_1 - y_2 - x_1 z_1 \\ z_2' = -b z_2 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (5.76)$$

Avec le choix particulier (5.74), le système (5.73) est donné par :

$$\begin{cases} e_1' = -\sigma e_1 \\ e_2' = -e_2 \\ e_3' = -b e_3 \end{cases} \quad (5.77)$$

Ses valeurs propres sont : $-\sigma, -1, -b$, alors, pour tout $\sigma > 0, b > 0$, le système linéaire (5.77) est asymptotiquement stable. Ces choix nous ramènent que les erreurs e_1, e_2 et e_3

convergent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Donc, la synchronisation entre le système de Sprott et celui de Lorenz est achevée.

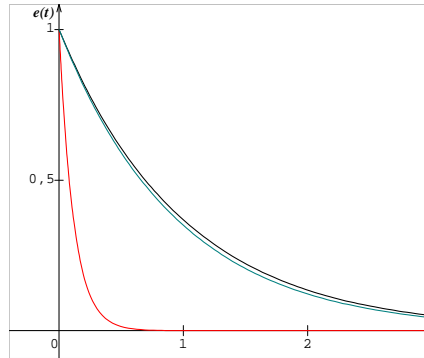


FIG. 5-7 – Dynamique d'état des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 des erreurs entre le système de Lorenz et le système de Sprott pour $\sigma = 8.55, b = 1.05$

Conclusion Générale

Dans notre travail, nous avons choisi différents systèmes chaotiques. Nous les avons synchronisés avec le système de Lorenz en utilisant la méthode de contrôle. Nous avons obtenu que toutes les erreurs de synchronisation entre les différents systèmes chaotiques choisis et le système de Lorenz convergent vers zéro.

Bibliographie

- [1] C. Liu, T. Liu, L. Liu, K. Liu, A new chaotic attractor, *Chaos, Solitons & Fractals*, 22, 2004, 1031-1038.
- [2] De-Quan Li, Dynamics of a modified Liu system, *Discrete dynamics in nature and society*, to appear (2010).
- [3] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett* 1990, 64 :821-824.
- [4] L. Kocarev, U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with application to communication. *Phys. Rev. Lett*, 74, 1995, 5028–5031.
- [5] H. K. Chen, T. N. Lin, J. H. Chen, The stability of chaos synchronization of the Japanese attractors and its application. *Jpn J. Appl. Phys*, 42, 2003, 7603-7610.
- [6] X. Tan, J. Zhang, Y. Yang. Synchronizing chaotic systems using backstepping design. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16, 2003, 37–45.
- [7] M. C. Ho, Y. C. Hung, Synchronization two different systems by using generalized active control. *Phys. Lett. A*, 301, 2002, 424-428.
- [8] M. T. Yassen, Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23, 2005, 131-140.
- [9] L. Huang, R. Feng, M. Wang, Synchronization of chaotic systems via nonlinear control. *Phys. Lett. A*, 320, 2004, 271-275.
- [10] H. K. Chen, Global chaos synchronization of new chaotic systems via nonlinear control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23, 2005, 1245–51.
- [11] H. K. Chen, Synchronization of two different chaotic systems :a new system and each of the dynamical systems Lorenz, Chen and Lu, *Chaos, Solitons & Fractals*, 25, 2005, 1049–1056.
- [12] Chaos Synchronizatio and Cryptography for Secure Communications : Applications for Encryption. Santo Banerjee. Politecnico di Torino, Italy

- [14] Guo-Ping Jiang, Wallace Kit-Sang Tang, A global synchronization criterion for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 1, N°10 (2002) 2239-2253
- [15] Guo-Ping Jiang, Wallace Kit-Sang Tang, Guanrong Chen, A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems, *Chaos, Solitons and Fractals* 1 (2003) 925-935
- [16] Jinhu Lü, Guanrong Chen, Generating multiscroll chaotic attractors : theories, methods and applications, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 16, N° 4 (2006) 775-858
- [17] Z. Elhadj, Generating 3-Scroll attractors from one Chua circuit, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 20, No. 1, (2010) 135-144.

Résumé

Dans ce mémoire, on choisit différents systèmes chaotiques. En utilisant la méthode de contrôle, on synchronise le système choisi avec le système de Lorenz. La synchronisation est obtenue grâce à la convergence des erreurs vers zéro.

Mots Clés : Synchronisation, Chaos, Attracteur, Système de Lorenz, Equation quadratique en 3 D

Abstract

In this paper, we choose different chaotic systems. By using the method of control, we synchronize the selected systems with the Lorenz system. Synchronization is achieved through the convergence of errors to zero.

Key words: Synchronization, Chaos, Attractor, Lorenz system, quadratic equation in 3 D

الملخص

في هذه المذكرة، نختار عدة أنظمة فوضوية و هذا باستخدام طريقة المراقبة ؛ نقوم بمزامنة هذه الأنظمة المختارة مع نظام لورنز. المزامنة تتحقق بفضل تقارب أخطاء المزامنة نحو الصفر. الكلمات المفتاح : الفوضى، التزامن، الجاذب، نظام لورنز، المعادلة التربيعية ذات ثلاثة أبعاد.