RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université L'Arbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thème :

Solution numérique de quelques problèmes inverses par la méthode des différences finies compactes

Préparé par :

SAIBI Nour El Houda

Soutenu le : . . /06/2024, devant le jury :

Pr. N. Kechkar	*Président*	*Univ. D'Oum El Bouaghi*
Dr. S. Dehilis	*Rapporteur*	*Univ. D'Oum El Bouaghi*
Pr. I. Rezzoug	*Examinateur*	*Univ. D'Oum El Bouaghi*

SESSION : 2023/2024

Dédicace

À mon ambitieuse personne ....

Alhamdelilah pour le commencement, la fin ...

Après des années d'efforts et de veilles, lorsque les gens dorment, et après les échecs qui ont été un escalier pour moi menant au succès, me voici arrivé.

À celui qui m'a appris que la vie est un combat et que son arme est le savoir et la connaissance, à celui qui a travaillé pour mon bien-être et mon succès, à l'homme le plus grand et le plus précieux au monde... Mon cher père, "Farid".

À celle qui est chère à mon cœur, celle dont le cœur est pur, qui a travaillé et souffert pour moi, à celle dont les prières ont été le secret de mon succès... Ma chère mère, "Aoula".

À mes frères "Mohammed", "Alaa- EDDin", "Ayoub", et ma sœur "Raneem Malak".

À mes grands-parents, à tous mes amis qui se réjouissent de mon succès comme s'il était le leur.

À ma grand-mère, qui a toujours souhaité être avec moi en ce jour, mais le destin a décidé que les tombes t'accueillent.

Je vous offre mes modestes efforts.

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer mes remerciements et mes louanges à "ALLAH".

"Alhamdulillah", qui nous a dotés de la grâce de la raison pour éclairer notre chemin et nous a guidés, par Sa volonté et Son pouvoir, à accomplir cette tâche et à progresser de cette manière. L'obligation de reconnaissance nous appelle à exprimer notre gratitude envers tous ceux qui m'ont prêté main-forte et assistance, et ont contribué avec moi, même par un mot, un geste, ou un avis. Je tiens particulièrement à remercier le distingué "Dr. Dehilis Sofiane" pour sa supervision exemplaire de ce mémoire et son soutien. Et un merci spécial également aux membres du jury de ma soutenance de mémoire : professeur "Kechkar Nasserdine " de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de présider notre jury et le professeur "Rezzoug Imad " en acceptant de juger ce travail. Je souhaite également exprimer ma gratitude envers tous les autres enseignants qui m'ont enseigné tout au long des cinq années.

Je tiens aussi à remercier mes camarades et toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

الملخص

في هذه المذكرة، نستخدم طريقتين للفروق المنتهية المضغوطة لحل مسألة عكسية ذات قطع مكافئ وهذا في البعدين الأول والثاني بالنسبة للفضاء. نطبيق مخططات أولر الخلفية و كرونك-نيكلسون المضغوطتان، كلاهما من الرتبة الرابعة بالنسبة لمتغير الفضاء والأولى والثانية بالنسبة لمتغير الزمن على التوالي.

كما نقترح طريقة التنبؤ-التصحيح لحساب الحلول وتحديث التقدير للمعامل المجهول . يتم إعطاء بعض النتائج العددية للتأكد من فعالية الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية : مسألة عكسية، فروق منتهية مضغوطة، طريقة التنبؤ-التصحيح.

Abstract

In this dissertation, we use two compact finite difference schemes to solve a parabolic inverse problem, in one and two dimensions for space. We apply compact backward Euler and compact Crank-Nicolson schemes. Both schemes are fourth-order accurate in space, and they have first-order and second-order accuracy in time, respectively. We also propose a predictor-corrector method to compute solutions and update the estimation of unknown coefficients. Numerical results are provided to validate the effectiveness of the proposed methods.

keywords :

inverse problem, compact finite differences, predictor-corrector method.

Résumé

Dans ce mémoire, nous utilisons deux schémas de différences finies compactes pour résoudre un problème inverse parabolique, en dimensions un et deux en espace. Nous appliquons les schémas d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson compacts. Les deux schémas sont précis au quatrième ordre en espace, et ils ont une précision au premier et au deuxième ordre en temps. Nous proposons également une méthode de prédicteur-correcteur pour calculer les solutions et mettre à jour l'estimation des coefficients inconnus. Des résultats numériques sont fournis pour valider l'efficacité des méthodes proposées.

Les mots clés :

problème inverse, différences finies compactes, méthode de prédicteur-correcteur.

Table des matières

Introduction 1

1 Notions préliminaires 3

1.1 Méthode des différences finies 3

1.1.1 En dimension 1 3

1.1.2 En dimension 2 5

1.2 Analyse de l'approximation 6

1.2.1 Consistance 6

1.2.2 Stabilité 6

1.2.3 Convergence 7

1.3 Différences finies compactes 7

1.4 Intégration numérique 9

1.4.1 Méthode de Simpson 10

1.5 Méthode efficace pour résoudre les systèmes tridiagonaux sauf la première et la dernière ligne 10

1.6 Méthode prédicteur-correcteur 14

2 Solution numérique d'un problème inverse parabolique unidimensionnel avec des conditions aux limites non locales et une condition sur-spécifiée 17

2.1 Position du problème 17

2.2 Partition du domaine 18

2.3 Schémas numériques de discrétisation par différences finies compactes 19

2.3.1 Schéma 1 : Dérivation du schéma d' Euler rétrograd compact 19

2.3.2 Schéma 2 : Schéma compact de Crank-Nicolson 23

2.4 Analyse théorique des schémas 26
2.4.1 Analyse d'erreur du schéma 1 26
2.4.2 Analyse d'erreur du schéma 2 29
2.5 Algorithme efficace pour estimer p(t) et u(x,t) 31
2.5.1 Méthode pédicteur-correcteur 31
2.6 Tests numériques 32

3 Résolution d'un problème inverse parabolique bidimensionnel avec des conditions de Dirichlet et une condition sur-spécifique **36**
3.1 Position du problème 36
3.2 Techniques numériques 37
3.2.1 Méthode d'Euler rétrograde compacte 38
3.2.2 Méthode de Crank-Nicolson compacte 41
3.3 Évaluation du paramètre de contrôle p(t) 43

Conclusion **46**

Bibliographie **46**

Introduction

Les problèmes inverses paraboliques, c'est-à-dire la détermination d'un paramètre inconnu $p(t)$ dans une équation parabolique joue un rôle trés important dans de nombreuses branches de la science et de l'ingénierie, par exemple, dans l'étude des processus de conduction thermique, diffusion chimique (détermination des constantes de réaction), problèmes de vibration et théorie du contrôle [1],[2],[3]. Notre objective dans ce mémoire est la résolution numérique de deux problèmes inverses paraboliques ; le premier en dimension un en espace et avec des conditions aux limites non locales (intégrales) ainsi qu'à une condition sur-spécifiée définie en un point spécifique de l'espace. Le deuxième en dimensions deux en espace et avec des conditions aux limites de Dirichlet et une condition sur-spécifiée définie en un point spécifique de l'espace. Des efforts considérables ont été déployés pour formuler des solutions numériques à la fois précises et efficaces.

Les auteurs utilisent différentes méthodes pour résoudre ces problèmes inverses, telles que la méthode des différences finies [22],[5],[7], la technique Legendre-tau [19], la procédure de décomposition d'Adomian [10], et une méthode aux différences finies-Runge-Kutta [6].

L'objectif principal de tout calcul numérique est la génération de résultats précis. Dans les méthodes traditionnelles de différences finies pour obtenir une solution numérique plus précise, il faut ajouter plus de noeuds et utiliser des maillages plus petits, ce qui nécessiterait plus d'espace de stockage et de temps de calcul. Afin d'obtenir des résultats plus précis à taille de maillage constante, nous devons augmenter l'ordre de précision de l'approximation numérique, ce qui, à son tour, signifie élargir le stencil (Les points de maillage utilisés pour former une spécifiée sont appelés le "stencil") de points de grille. L'élargissement du stencil de calcul pour les schémas d'ordre élevé en différences finies est un désavantage majeur. Une autre conséquence d'avoir un stencil plus grand se présente lors de la résolution de problèmes par des schémas implicites. Les méthodes itératives pour la solution de tels problèmes convergent beaucoup plus lentement à mesure que la taille du stencil augmente. Heureusement, il est possible de dériver des schémas différences finies d'ordre élevé avec des stencils compacts (appelés schémas compacts aux différences finies).

Pour les raisons ci-dessus, un schéma compact aux différences finies est nécessaire pour l'identification d'un paramètre de contrôle dans les problèmes inverses paraboliques. Pour l'identification de la fonction inconnue, nous avons besoin d'exigences supplémentaires (sur-spécifier). Parfois, cette information supplémentaire est donnée sous forme intégrale **(cas où une valeur moyenne de la solution peut être mesurée)**. En raison de la condition aux limites non locale, la matrice du système d'équations linéaires résultant de l'approximation est une matrice quasi-tridiagonale (tridiagonale sauf la première et la dernière ligne). Nous utiliserons une méthode efficace pour résoudre le système linéaire (Liu [14]) et la méthode prédicteur-correcteur pour calculer la solution et mettre à jour l'estimation du coefficient inconnu.

Ce mémoire est organisé comme suit : On commence par une introduction où on a présenté un historique sur les problèmes inverses étudiés, l'intérêt, l'objectif du thème abordé.

Chapitre 1 est consacré aux rappels sur les méthodes numériques et les outils nécessaires qui seront utilisées dans la suite.

Chapitre 2 est réservé à la solution numérique d'un problème inverse parabolique unidimensionnel avec des conditions aux limites non locales et une condition sur-spécifiée.

Chapitre 3 est dévoué à la solution numérique d'un problème inverse parabolique bidimensionnel avec des conditions de Dirichlet et une condition sur-spécifiée.
Enfin, le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons une vue générale sur les différences finies et les différences finies compactes, nous introduisons notamment quelques notions fondamentales nécessaires qui sont utilisées dans les chapitres suivants.

1.1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique d'analyse numérique utilisée pour approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles. Elle consiste à remplacer les dérivées par des approximations basées sur les formules de Taylor et permet d'obtenir des résultats précis et est largement utilisée dans de nombreux domaines scientifiques et techniques.

Considérons une fonction $u(x,t)$ dépendant de l'espace x et du temps t. On subdivise l'intervalle $[0,L]$ en M sous-intervalles de longueur h tels que $L = Mh$ et on subdivise l'intervalle de temps $[0,T]$ en N sous-intervalles de longueur k tels que $T = Nk$. Notons x_i le point ih et t_n le temps nk. Notons u_i^n la valeur de la solution approchée au point x_i et au temps t_n.

$x_i = x_0 + h, u(x_i, t_n) = u_i^n,$

$u(x_i, t_n + k) = u_i^{n+1}, u(x_i, t_n - k) = u_i^{n-1},$

$u(x_i + h, t) = u_{i+1}^n, u(x_i - h, t) = u_{i-1}^n, \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \dfrac{\partial u_i^n}{\partial x}.$

1.1.1 En dimension 1

— **Dérivée première :**

Un développement de Taylor à l'ordre 2 de u aux points $u(x+h,t)$ et $u(x-h,t)$ nous donne :

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + O(h^2). \tag{1.1}$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + O(h^2). \tag{1.2}$$

Le développement de Taylor aux points $u(x,t+k)$ et $u(x,t-k)$ d'ordre 2 nous donne comme suit :

$$u(x,t+k) = u(x,t) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + O(k^2). \tag{1.3}$$

$$u(x,t-k) = u(x,t) - k\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + O(k^2). \tag{1.4}$$

$O(h^2)$ et $O(k^2)$ sont les erreurs de troncature.

— **L'erreur de troncature**

Définition 1 *: La puissance de h et k avec le quelle l'erreur de troncature tend vers 0 est appellée : l'ordre de la méthode.*

— **En espace** x :

Donc les formules des schémas aux différences finies d'ordre 1 sont :

*** en avant (progressive) :**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_n) = \frac{u(x_i+h,t_n) - u(x_i,t_n)}{h} + O(h) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + O(h). \tag{1.5}$$

*** en arrière (rétrograde) :**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_n) = \frac{u(x_i,t_n) - u(x_i-h,t_n)}{h} + O(h) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + O(h). \tag{1.6}$$

La formule de la dérivée première en notation indicielle : $\delta_x u_i^n = \frac{1}{h}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$ avec l'erreur de trancation $O(h) = -\frac{h}{2!}u^{(2)}\left(\xi,t\right),\ x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$.

Avec la formule des schémas aux différences finies d'ordre supérieur est :

*** Centrée :**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_n) = \frac{u(x_i+h,t_n) - u(x_i-h,t_n)}{2h} + O\left(h^2\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + O\left(h^2\right). \tag{1.7}$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i. Le nombre de points nécessaires à l'écriture du schéma s'appelle le stencil.

— **En temps** t, on applique le même principe utilisé dans la section précédente.

— **Dérivées d'ordre supérieur :**

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i.

On a la formule de schéma aux différences finies de la deuxième dérivées de u :

* **Centrée :**

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u(x_i + h, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i - h, t_n)}{h^2} + O(h^2) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.1.2 En dimension 2

— **Notation 2** *:*

$u_{i,j}^n = u(ih, jh, nk), \qquad i, j = 0, 1, ..., M, \quad n = 0, 1, ..., N.$

h *: le pas de la direction de* x *et* y*.*

k *: le pas de la direction de* t*.*

— **Dérivée première**

De la même manière que dans le cas en dimension un, on obtient pour 2D les approximations suivants :

* **en avant (progressive) :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h} + O(h). \tag{1.9}$$

* **en arrière (rétrograde) :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h} + O(h). \tag{1.10}$$

* **en avant (progressive) :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h} + O(h). \tag{1.11}$$

* **en arrière (rétrograde) :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h} + O(h). \tag{1.12}$$

Remarque 3 *: Pour obtenir de ordres superieurs il faut utiliser plusieurs noeuds au voisinage de* (x_i, y_j)*.*

— **Dérivée d'ordre supérieur**

*** Centrée en x :**

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} + O(h^2). \tag{1.13}$$

*** Centrée en y :**

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} + O(h^2). \tag{1.14}$$

1.2 Analyse de l'approximation

Pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) à l'aide de leurs équivalents discrétisés, plusieurs concepts sont nécessaires. Les trois principaux sont la consistance, la stabilité et la convergence. Ces propriétés permettent d'établir un lien entre la solution exacte des équations continues et celle des équations discrétisées, ainsi que la solution numérique obtenue.

1.2.1 Consistance

La consistance d'un schéma numérique en différences finies se réfère à la capacité du schéma à reproduire fidèlement le comportement de l'équation aux dérivées partielles continue lorsqu'on discrétise spatialement et temporellement cette équation. Un schéma est dit consistant s'il converge vers la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro.

1.2.2 Stabilité

Cette propriété garantit que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.

Définition 4 *: Un schéma numérique est stable si la solution du schéma homogène associé est bornée en tout point x_i et t_n quels que soient h et k.*

Il y a plusieurs notions de stabilité : critère de Van Neumann-Fourrier et stabilité au sens d'une norme.

- Un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme $\|.\|$; s'il existe une constante K indépendante de k et h telle que

$$\|u^n\| \leq K\|u^0\| \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 0, \tag{1.15}$$

quelle que soit la donnée initiale u^0. Avec $u^n = (u_i^n)_{0\leq i\leq M}$.
Si cette inégalité a lieu sous une condition entre k et h, on dit que le schéma est conditionnellement stable.

Introduisons la norme L^∞ discrète suivante :
Pour $v \in \mathbb{R}^M$ on pose :

$$\|v^n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq M} |v_i|.$$

1.2.3 Convergence

La convergence d'un schéma numérique en différences finies est la propriété théorique globale qui assure que l'écart entre la solution approchée et la solution exacte tend vers zéro lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro. La convergence est obtenue lorsque le schéma est à la fois consistant et stable. C'est un critère fondamental pour évaluer la fiabilité des solutions numériques obtenues par la méthode des différences finies.

Théorème de Lax

Un schéma numérique consistant et stable est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

1.3 Différences finies compactes

Les différences finies compactes sont une classe de méthodes numériques utilisées pour approximer les dérivées d'une fonction dans le cadre de la résolution d'équations différentielles ou d'autres problèmes mathématiques. Contrairement aux schémas de différences finies traditionnels, les schémas compacts utilisent un stencil plus restreint, c'est-à-dire qu'ils ne nécessitent qu'un petit nombre de points voisins pour calculer la dérivée d'une fonction. Cette compacité conduit souvent à une meilleure précision et à une meilleure efficacité numérique. Les schémas compacts sont souvent caractérisés par leur capacité à fournir une précision élevée avec un nombre réduit de points de grille.

<u>Schéma intérieur :</u>

1- **Formule des différences finies compactes avec des coefficients inconnus :**

Seuls les schémas compacts centrés sont considérés dans le présent travail. Le schéma compact pour la dérivée première aux points intérieurs s'écrit :

$$\sum_{k=-l}^{l} \beta_k u'_{i+k} = \frac{1}{h} \sum_{l=-m}^{m} \alpha_l u_{i+k} \qquad ,\beta_0 = 1, \beta_k = \beta_{-k}, l \leqslant 2, m \leqslant 4 \tag{1.16}$$

La dérivation des coefficients des schémas compacts présentés ici sera principalement limitée aux cas tridiagonaux et pentadiagonaux car $l \leq 2$. Pour les dérivées d'ordre supérieur, des schémas compacts centrés similaires peuvent être définis en remplaçant u' par u'', u''',. . .sur le côté gauche. Le stencil de droite sera limité à $m \leq 4$ en utilisant des approximations de différences finies centrées pour la dérivée. L'ordre de précision formel maximal atteignable de n'importe quel schéma peut être augmenté en augmentant l'une des valeurs de l ou m.

Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 4 pour la deuxième dérivée s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{1}{12h^2}\left(-u_{i-2}^n + 16u_{i-1}^n - 30u_i^n + 16u_{i+1}^n - u_{i+2}^n\right) + O\left(h^4\right). \tag{1.17}$$

et utilise 5 points. On peut trouver un schéma compacte qui utilise seulement 3 points :

2- **Formule de différence finie compacte du quatrième ordre pour la dérivée seconde :**

1. Ecrire la formule des différences finies compactes avec des coefficients inconnus :

$$a_1 u''_{i+1} + a_0 u''_i + a_{-1} u''_{i-1} = \frac{b_1 u_{i+1} + b_0 u_i + b_{-1} u_{i-1}}{h^2},$$

2. Développer les deux membres de cette équation en série de Taylor au point x_i puis les régrouper suivant l'ordre de h :

$$\begin{aligned} &-\left(b_{-1} + b_0 + b_1\right) u_i h^{-2} + (-b_{-1} + b_1) u'_i h^{-1} + \left[(a_{-1} + a_0 + a_1) - \tfrac{1}{2}\left(b_{-1} + b_1\right)\right] u''_i \\ &+ \left[(-a_{-1} + a_1) - \tfrac{1}{3!}\left(-b_{-1} + b_1\right)\right] u'''_i h + \left[\tfrac{1}{2}\left(a_{-1} + a_1\right) - \tfrac{1}{4!}\left(b_{-1} + b_1\right)\right] u_i^{(4)} h^2 \\ &+ \left[\tfrac{1}{3!}\left(-a_{-1} + a_1\right) - \tfrac{1}{5!}\left(-b_{-1} + b_1\right)\right] u_i^{(5)} h^3 = 0, \end{aligned}$$

3. Obtenir un système de six équations à six inconnues (les coefficients de h^k sont nuls

$\forall k$).

$$\left\{\begin{array}{c} b_{-1}+b_0+b_1=0, \\ -b_{-1}+b_1=0, \\ (a_{-1}+a_0+a_1)-\frac{1}{2}(b_{-1}+b_1)=0, \\ (-a_{-1}+a_1)-\frac{1}{3!}(-b_{-1}+b_1)=0, \\ \frac{1}{2}(a_{-1}+a_1)-\frac{1}{4!}(b_{-1}+b_1)=0, \\ \frac{1}{3!}(-a_{-1}+a_1)-\frac{1}{5!}(-b_{-1}+b_1)=0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow (S)\left\{\begin{array}{c} b_{-1}+b_0+b_1=0, \\ b_{-1}-b_1=0, \\ b_1-a_{-1}-a_0-a_1=0, \\ a_{-1}-a_1=0, \\ -a_0+10a_1=0, \end{array}\right.$$

(S) est un système homogène de cinq équations à six inconnues, et admet une infinité de solutions. Les variables directrices sont b_{-1}, b_0, a_{-1}, a_0 alors que les variables libres sont b_1, a_1. Posons alors :

$$b_1 = s, \quad \text{et} \quad a_1 = t.$$

On obtient :

$$b_{-1} = s, \quad b_0 = -2s,$$
$$a_{-1} = t, \quad a_0 = 10t,$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$b_{-1} = s, b_0 = -2s, b_1 = s, \ a_{-1} = t, \ a_0 = 10t, a_1 = t.$$

On prend particulièrement :

$$s = 1, t = \frac{1}{12}.$$

Donc :

$$b_{-1} = 1, b_0 = -2, b_1 = 1, \ a_{-1} = \frac{1}{12}, \ a_0 = \frac{10}{12}, a_1 = \frac{1}{12}.$$

Finalement, on a

$$\frac{1}{12}\left(u''_{i-1} + 10u''_i + u''_{i+1}\right) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O\left(h^4\right). \tag{1.18}$$

1.4 Intégration numérique

Dans la majorité des cas le calcul explicite de l'intégrale d'une fonction f est très compliqué ou même impossible. Dans ces cas, le recours à des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée est nécessaire.

Il existe plusieurs méthodes d'intégration numérique. Nous rappelons seulement la méthode de Simpson qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

1.4.1 Méthode de Simpson

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Considérons une subdivision uniforme de l'intervalle $[a,b]$ en $2n$ sous-intervalles $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,...,2n$ de même longueur $h=x_i-x_{i-1}$.

Méthode de Simpson composite :

La formule de Simpson composite est donnée par :

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx,\\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1})+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j})+f(x_{2n})\right)-\frac{(b-a)}{180}f^{(4)}(c)h^4.\end{aligned}$$

1.5 Méthode efficace pour résoudre les systèmes tridiagonaux sauf la première et la dernière ligne

Liu [14] a proposé une technique efficace pour résoudre les systèmes linéaires d'équations de la forme suivante :

$$Au=\omega.$$

où A est donnée par

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{M-1} & a_M\\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda & 1\\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{M-1} & b_M \end{pmatrix}$$

et $u=(u_0,u_1,...,u_M)^t, \omega=(\omega_0,\omega_1,....,\omega_M)^t$. En forme explicite, le système précédent s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{M} a_j u_j &= \omega_0, \\
u_{j-1} + \lambda u_j + u_{j+1} &= \omega_j, \quad j = 1, 2, ..., M-1, \\
\sum_{j=0}^{M} b_j u_j &= \omega_M,
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Une particularité de la matrice A est qu'à l'exception des première et dernière lignes, elle est tridiagonale. Pour utiliser cette forme spéciale, nous introduisons l'algorithme suivant pour la résolution de (1.19).

Soit :

$$
A_0 = \begin{pmatrix}
\alpha & 1 & & & & \\
1 & \lambda & 1 & & & \\
 & 1 & \lambda & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & \lambda & 1 \\
 & & & & 1 & \lambda
\end{pmatrix}
$$

alors $A_0 = LU$ avec :

$$
L = \begin{pmatrix}
\alpha & & & & & \\
1 & \alpha & & & & \\
 & 1 & \alpha & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & 1 & \alpha & \\
 & & & & 1 & \alpha
\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix}
1 & \beta & & & & \\
 & 1 & \beta & & & \\
 & & 1 & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \beta & \\
 & & & & 1 & \beta \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha + \beta = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha^2 + 1 = \alpha\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha^2 - \lambda\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-4}}{2}; \qquad \text{et} \qquad \beta = \lambda - \alpha = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}; \end{cases}$$

Soit y la solution de : $A_0 y = \omega$. En raison de la factorisation LU de A_0 :

$$A_0 y = \omega \quad \Leftrightarrow \quad LUy = \omega$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Lv = \omega ....(1) \\ Uy = v ....(2) \end{cases}$$

Pour l'equation (1) on a :

$$Lv = \omega \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha v_0 = \omega_0 \\ v_0 + \alpha v_1 = \omega_1 \\ \vdots \\ v_{M-1} + \alpha v_M = \omega_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = \frac{1}{\alpha}\omega_0 = \beta\omega_0 \\ v_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\omega_1 - v_0\right) = \beta\left(\omega_1 - v_0\right) \\ \vdots \\ v_M = \frac{1}{\alpha}\left(\omega_M - v_{M-1}\right) = \beta\left(\omega_M - v_{M-1}\right) \end{cases}$$

qui est donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = \beta\omega_0, \\ v_j = \beta(\omega_j - v_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., M. \end{cases} \tag{1.20}$$

Pour l'équation (2) on a :

$$Uy = v \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_0 + \beta y_1 = v_0 \\ \vdots \\ y_{M-1} + \beta y_M = v_{M-1} \\ y_M = v_M \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_M = v_M \\ y_{M-1} = v_{M-1} - \beta y_M \\ \vdots \\ y_0 = v_0 - \beta y_1 \end{array} \right.$$

Le système d'équations ci-dessus peut être résolu via la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} y_M = v_M, \\ y_j = v_j - \beta y_{j+1}, \quad j = M-1, ..., 0, \end{array} \right. \tag{1.21}$$

où v est la solution de : $Lv = \omega$

Les procédures ci-dessus sont stables, puisque $|\beta| < 1$. Soit $z = u - y$. Alors,

$$\begin{aligned} Az = A(u-y) &= Au - Ay \\ &= \omega - Ay \\ &= \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{M-1} \\ \omega_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{M} a_j y_j \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{M-1} \\ \sum_{j=0}^{M} b_j y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 - \sum_{j=0}^{M} a_j y_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega_M - \sum_{j=0}^{M} b_j y_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$z_{j-1} + \lambda z_j + z_{j+1} = 0, \quad j = 1, ..., M-1. \tag{1.22}$$

C'est une suite récurrente d'ordre 2. Les scalaires γ tels que : $(\gamma^j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont données par (1.22) sont les solutions de l'équation :

$$\gamma^{j-1} + \lambda\gamma^j + \gamma^{j+1} = 0 \Rightarrow 1 + \lambda\gamma + \gamma^2 = 0.$$

On obtient :

$$z_j = c_0\gamma^{M-j} + c_1\gamma^j, \quad j = 0, 1, ..., M.$$

où : $\gamma_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$, est les racines de l'équation quadratique $\gamma^2 + \lambda\gamma + 1 = 0$; et c_0, c_1 sont des paramètres réels déterminés par la première et la dernière ligne :

$$c_0 \sum_{j=0}^{M} a_j \gamma^{M-j} + c_1 \sum_{j=0}^{M} a_j \gamma^j = \omega_0 - \sum_{j=0}^{M} a_j y_j,$$

$$c_0 \sum_{j=0}^{M} b_j \gamma^{M-j} + c_1 \sum_{j=0}^{M} b_j \gamma^j = \omega_0 - \sum_{j=0}^{M} b_j y_j.$$

Finalement, nous déduisons la solution de (1.19) par la relation $u = y + z$.

Remarque 5 *: Un simple compte montre que le coût (en nombre de multiplications et de divisions) de la résolution (1.19) avec élimination gaussienne est proportionnel à* M^2*, tandis que le coût de la résolution (1.19) avec l'algorithme précédent est d'environ* $8M$*. Alors l'algorithme précédent est moins coûteux.*

1.6 Méthode prédicteur-correcteur

En mathématiques, notamment en analyse numérique, une méthode prédicteur-correcteur est un algorithme qui procède en deux pas. Tout d'abord, l'étape de prédiction calcule une approximation grossière de la quantité souhaitée. Deuxièmement, l'étape correctrice affine l'approximation initiale en utilisant d'autres moyens.

Cette méthode est souvent utilisée lorsque la solution explicite n'est pas directement disponible. Donnons un exemple : parmi les méthodes utilisées pour approximer la solution d'équation différentielle on a la méthode de Heun (Méthode de correction du prédicteur d'Euler) :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + \frac{h}{2}\left(f\left(t^n, y^{[n]}\right) + f\left(t^{n+1}, y^{[n+1]}\right)\right).$$

Dans le second membre il y a aussi le terme $y^{[n+1]}$. Donc, on ne peut pas calculer la valeur de $y^{[n+1]}$ explicitement dans la formule précédente. L'idée est d'utiliser un autre schéma comme le schéma d' Euler explicite :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf\left(t^n, y^{[n]}\right),$$

il s'ensuit :

- Prédiction :

$$y_E^{[n+1]} = y^{[n]} + hf\left(t^n, y^{[n]}\right),$$

- Correction :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + \frac{h}{2}(f\left(t^n, y^{[n]}\right) + f\left(t^{n+1}, y_E^{[n+1]}\right).$$

La méthode de Heun est une approche prédicteur-correcteur.

Pour illustrer cette méthode, déterminons la valeur de y pour $x = 0.1$ étant donné que

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 1 \text{ et } \; h = 0.05.$$

Ici, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$. Par conséquent, $f(x_0, y_0) = 1$. Par la formule d'Euler, on obtient

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1.05.$$

Cette valeur prédite de $y_1^{(0)}$ est utilisée dans la formule du correcteur comme première approximation. En utilisant la formule de correction de la formule d'Euler améliorée, nous obtenons la première approximation de y_1 comme suit :

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right], \\ &= 1 + \frac{0.05}{2}\left[1 + (1.05)^2\right], \\ &= 1.05256. \end{aligned}$$

Encore une fois, la deuxième approximation de y_1 est

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right], \\ &= 1 + \frac{0.05}{2}\left[1 + \left\{(0.05)^2 + (1.05256)^2\right\}\right], \\ &= 1.0527. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous prenons $y_1 = 1.053$, corrigé à trois décimales, c'est-à-dire $y(0.05) = 1.053$. Ensuite, encore une fois par en utilisant la formule d'Euler, on obtient

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.10857.$$

Cette valeur prédite de $y_2^{(0)}$ est utilisée dans la formule du correcteur comme première approximation. En utilisant la formule de correction de la méthode d'Euler améliorée, nous obtenons la deuxième approximation de y_2 comme

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} &= y_0 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_1, y_2^{(0)}\right)\right] = 1.11157, \\ y_2^{(2)} &= y_0 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_1, y_2^{(1)}\right)\right] = 1.11173. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous prenons $y_2 = 1.112$, corrigé à trois décimales, c'est-à-dire $y(0.1) = 1.112$, la solution recherchée est donc

$$y(0.1) = 1.112.$$

Chapitre 2

Solution numérique d'un problème inverse parabolique unidimensionnel avec des conditions aux limites non locales et une condition sur-spécifiée

Dans ce chapitre nous appliquons la méthode **des différences finies compactes d'ordre quatre** pour obtenir une solution approchée d'un problème inverse visant à déterminer un paramètre de source $p(t)$ dans l'équation de diffusion avec une condition sur-spécifiée en un point x_0 du domaine spatial et des conditions aux limites non locales.

2.1 Position du problème

Considérons l'équation parabolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)\, u + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

avec la condition initiale :

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.2}$$

et les conditions aux limites non locales :

$$u(0,t) = \int_0^1 k_0(x)\, u(x,t)\, dx + g_0(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.3}$$

$$u(1,t)=\int_0^1 k_1(x)\,u(x,t)\,dx+g_1(t)\,,\qquad\qquad 0\leq t\leq T,$$

et la condition sur-spécifiée en un point x_0 du domaine spatial :

$$u(x_0,t)=E(t),\qquad 0\leq x_0\leq 1\ ,\quad 0\leq t\leq T, \tag{2.4}$$

où $g_0(t)\,,g_1(t)\,,k_0(x)\,,k_1(x)\,,\ f(x,t)$ et $u_0(t)$ sont des fonctions suffisamment régulières, et $b\in(0,1)$.

L'équation (2.1) peut être utilisé pour décrire le processus de transfert de chaleur avec un paramètre source $p(t)$, et (2.4) contrôle la température $u(x,t)$ en un point spécifique x_0 dans le domaine spatial à tout instant t **[1]**, **[20]**, **[8]**, **[5]**, **[12]**.

Ainsi le but de la résolution (2.1) est d'identifier le paramètre source $p(t)$ qui produit la température souhaitée $u(x,t)$ en un point x_0 donnée à chaque instant t. Lorsque le coefficient $p(t), 0\leq t\leq T$ est également donné, le problème qui consiste à trouver $u(x,t)$ en utilisant l'équation (2.1), la condition initiale (2.2) et les conditions aux limites (2.3) est appelé problème direct.

L'existence, l'unicité et quelques propriétés de la solution du problème (2.1)-(2.4) avec $p(t)\neq 0$ ont été établies dans **[1]**.

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous décrivons d'abord deux schémas de différences finies compactes pour fournir une approximation de la solution $u(x,t)$ du problème inverse (2.1). Nous présentons la méthode prédicteur-correcteur et la solution du système linéaire quasi-tridiagonal par la méthode donnée dans [14]. Enfin, nous présentons les résultats numériques pour la solution d'un problème modèle.

2.2 Partition du domaine

On considère une discrétisation du domaine $]0,1[\times]0,T[$, en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en M sous-intervalles de longueur $h=\frac{1}{M}$ et l'intervalle $]0,T[$ en N sous-intervalles de longueur $k=\frac{T}{N}$. Les noeuds du maillage (x_i,t_n) sont pris tels que : $x_i=ih\ (i=0,1,...,M)$, $t_n=nk\ (k=0,1,...,N)$, et on pose : $x_0=l_0h$, avec $1<l_0<M-1$, et $u_i^n=u(ih,nk)$.

2.3 Schémas numériques de discrétisation par différences finies compactes

Nous introduisons les opérateurs de différence suivants :

$$
\begin{aligned}
&\delta_t u = \delta_t u_i^n = \tfrac{1}{k}\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right), \\
&\delta_x^2 u = \delta_x^2 u_i^n = \tfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) = \tfrac{1}{h}\left(\delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^n - \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^n\right), \\
&\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^n = \tfrac{1}{h}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right), \qquad \delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^n = \tfrac{1}{h}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right).
\end{aligned}
$$

2.3.1 Schéma 1 : Dérivation du schéma d' Euler rétrograd compact

Schéma intérieure :

— **Principe**

Considérons d'abord le problème unidimensionnel analogue (**1D**) :

$$u_t = u_{xx} + pu + f, \tag{2.5}$$

Le schéma de différence finie compact centré (1.18) donne comme approximation de la dérivée seconde u_{xx}

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{12}\left(u_{i-1}^{''} + 10u_i^{''} + u_{i+1}^{''}\right) &= \tfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} + O\left(h^4\right), \\
u_i^{''} + \tfrac{h^2}{12}\tfrac{\left(u_{i-1}^{''}-2u_i^{''}+u_{i+1}^{''}\right)}{h^2} &= \tfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} + O\left(h^4\right), \\
\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)u_i^{''} &= \tfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} + O\left(h^4\right), \\
u_i^{''} &= \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2 u + O\left(h^4\right).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

D'aprés le schéma de différence finie rétrograd pour approximer la dérivée première u_t, on a :

$$u_t = \delta_t u + O(k). \tag{2.7}$$

On substitue (2.6) et (2.7) dans (2.5) pour obtenir :

$$\delta_t u + O(k) = \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2 u + pu + f + O\left(h^4\right). \tag{2.8}$$

Ici l'opérateur $\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}$ n'a qu'une signification symbolique.

En multipliant par l'opérateur $\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)$ les deux membres de(2.8), on obtient :

$$\boxed{\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_t u = \delta_x^2 u + \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)pu + \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)f + O\left(k+h^4\right),} \tag{2.9}$$

L'équation (2.9) est équivalente à :

$$\begin{aligned}&\delta_t u + \tfrac{h^2}{12}\delta_x^2(\delta_t u) = \delta_x^2 u + pu + \tfrac{h^2}{12}\delta_x^2(pu) + f + \tfrac{h^2}{12}\delta_x^2 f,\\ &\delta_t u_i^n + \tfrac{h^2}{12}\delta_x^2(\delta_t u_i^n) = \delta_x^2 u_i^n + p^n u_i^n + \tfrac{h^2}{12}\delta_x^2(p^n u_i^n) + f_i^n + \tfrac{h^2}{12}\delta_x^2 f_i^n,\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k}\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right) + \tfrac{h^2}{12}\left(\tfrac{1}{h}\left(\delta_x\left(\delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^n\right) - \delta_x\left(\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^n\right)\right)\right) - \tfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) - p^n u_i^n\\ &-\tfrac{h^2}{12}\left(\tfrac{p^n}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\right) = f_i^n + \tfrac{h^2}{12}\left(\tfrac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{h^2}\right),\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k}\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right) + \tfrac{h}{12}\left(\delta_x\left(\tfrac{1}{k}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}\right)\right) - \delta_x\left(\tfrac{1}{k}\left(u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)\right)\right) - \tfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\\ &-p^n u_i^n - \tfrac{p^n}{12}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) = f_i^n + \tfrac{1}{12}\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right),\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k}\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right) + \tfrac{h}{12k}\left(\delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^n - \delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} - \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^n + \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \tfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) - p^n u_i^n\\ &-\tfrac{p^n}{12}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) = \tfrac{1}{12}\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right),\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k}\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right) + \tfrac{1}{12k}\left[u_{i+1}^n - u_i^n - u_{i+1}^{n-1} + u_i^{n-1} - u_i^n + u_{i-1}^n + u_i^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}\right] - \tfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\\ &-p^n u_i^n - \tfrac{p^n}{12}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) = \tfrac{1}{12}\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow u_i^n - u_i^{n-1} + \tfrac{1}{12}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n - u_{i+1}^{n-1} + 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}\right) - \tfrac{k}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\\ &-\tfrac{kp^n}{12}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) - kp^n u_i^n = k\left(\tfrac{1}{12}f_{i+1}^n + \tfrac{5}{6}f_i^n + \tfrac{1}{12}f_{i-1}^n\right),\end{aligned}$$

En posant $r = \frac{k}{h^2}$ le schéma s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}&\tfrac{5}{6}u_i^n - \tfrac{5}{6}u_i^{n-1} + \tfrac{1}{12}\left(u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1} + u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}\right) - r\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) - \tfrac{kp^n}{12}\left(u_{i+1}^n + 10u_i^n + u_{i-1}^n\right)\\ &= k\left(\tfrac{1}{12}f_{i+1}^n + \tfrac{5}{6}f_i^n + \tfrac{1}{12}f_{i-1}^n\right),\end{aligned}$$

Aprés certains réarrangements, on trouve :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1-kp^n}{12} - r\right)u_{i-1}^n + \left(\frac{5-5kp^n}{6} + 2r\right)u_i^n + \left(\frac{1-kp^n}{12} - r\right)u_{i+1}^n\\ =\;& \frac{1}{12}u_{i-1}^{n-1} + \frac{5}{6}u_i^{n-1} + \frac{1}{12}u_{i+1}^{n-1} + k\left(\frac{1}{12}f_{i+1}^n + \frac{5}{6}f_i^n + \frac{1}{12}f_{i-1}^n\right),\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}&\left(1-kp^n-12r\right)u_{i-1}^n + \left(10\left(1-kp^n\right)+24r\right)u_i^n + \left(1-kp^n-12r\right)u_{i+1}^n\\ =\;& u_{i-1}^{n-1} + 10u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1} + k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right). \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Traitement des conditions aux limites non locales :

Maintenant, nous approximons l'intégrale dans la condition aux limites non locale (2.3) par **la formule de Simpson** qui est d'ordre 4, ce qui nécessite que M soit pair. Prenons $M = 2k$ et $h = \frac{1}{M}$. On obtient :

$$\begin{aligned} u\left(0, t_n\right) &= u_0^n = \int_0^1 k_0\left(x, t_n\right) u(x, t_n) dx + g_0\left(t_n\right) \simeq \frac{h}{3}\left(k_0\left(x_0, t_n\right) u_0^n + k_0\left(x_M, t_n\right) u_M^n\right. \\ &\left. +4 \sum_{i=0}^{k-1} k_0\left(x_{2i+1}, t_n\right) u_{2i+1}^n + 2 \sum_{i=1}^{k-1} k_0\left(x_{2i}, t_n\right) u_{2i}^n\right) + g_0^n, \end{aligned}$$

qui s'écrit :

$$3u_0^n = h\left(k_0\left(x_0, t_n\right) u_0^n + k_0\left(x_M, t_n\right) u_M^n + 4 \sum_{i=0}^{k-1} k_0\left(x_{2i+1}, t_n\right) u_{2i+1}^n + 2 \sum_{i=1}^{k-1} k_0\left(x_{2i}, t_n\right) u_{2i}^n\right) + 3g_0^n,$$

et donc,

$$\begin{aligned} &\left(3 - hk_0\left(x_0, t_n\right)\right) u_0^n - hk_0\left(x_M, t_n\right) u_M^n - 4hk_0\left(x_1, t_n\right) u_1^n - 2hk_0\left(x_2, t_n\right) u_2^n - \cdots \\ &-2hk_0\left(x_{M-2}, t_n\right) u_{M-2}^n - 4hk_0\left(x_{M-1}, t_n\right) u_{M-1}^n = 3g_0^n. \end{aligned} \tag{2.11}$$

et

$$\begin{aligned} u\left(1, t_n\right) &= u_M^n = \int_0^1 k_1\left(x, t_n\right) u(x, t_n) dx + g_1\left(t_n\right) \simeq \frac{h}{3}\left(k_1\left(x_0, t_n\right) u_0^n + k_1\left(x_M, t_n\right) u_M^n\right. \\ &\left. +4 \sum_{i=0}^{k-1} k_1\left(x_{2i+1}, t_n\right) u_{2i+1}^n + 2 \sum_{i=1}^{k-1} k_1\left(x_{2i}, t_n\right) u_{2i}^n\right) + g_1\left(t_n\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\left(3 - hk_1\left(x_M, t_n\right)\right) u_M^n - hk_1\left(x_0, t_n\right) u_0^n - 4hk_1\left(x_1, t_n\right) u_1^n - 2hk_1\left(x_2, t_n\right) u_2^n - \cdots \\ &\qquad -2hk_1\left(x_{M-2}, t_n\right) u_{M-2}^n - 4hk_1\left(x_{M-1}, t_n\right) u_{M-1}^n = 3g_1^n. \end{aligned} \tag{2.12}$$

La combinaison de (2.10), (2.11)et (2.12)donne un système d'équations linéaire de $(M+1)$ équations à $(M+1)$ inconnues. Ecrivons le système sous forme matricielle :

$$A_1^n U^n = F_1^{n-1}. \tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix} a_0^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{M-2}^n & a_{M-1}^n & a_M^n \\ G & H & G & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H & G \\ b_0^n & b_1^n & b_2^n & \cdots & b_{M-2}^n & b_{M-1}^n & b_M^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3g_0(t_n) \\ L_1^{n-1} \\ \vdots \\ L_{M-1}^{n-1} \\ 3g_1(t_n) \end{pmatrix}$$

avec

$$G = 1 - kp^n - 12r, H = 10\left(1 - kp^n\right) + 24r,$$

$$L_i^{n-1} = u_{i+1}^{n-1} + 10u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1} + k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right), \; i = 1, ..., M-1, \tag{2.14}$$

et

$$\begin{cases} a_0^n = 3 - hk_0\left(x_0, t_n\right), \quad a_M^n = -hk_0\left(x_M, t_n\right), & b_0^n = -hk_1\left(x_0, t_n\right), \quad b_M^n = 3 - hk_1\left(x_M, t_n\right), \\ a_{2i+1}^n = -4hk_0\left(x_{2i+1}, t_n\right), \quad i = 0, ..., k-1, & b_{2i+1}^n = -4hk_1\left(x_{2i+1}, t_n\right), \quad i = 0, ..., k-1, \\ a_{2i}^n = -2hk_0\left(x_{2i}, t_n\right), \quad i = 1, ..., k-1, & b_{2i}^n = -2hk_1\left(x_{2i}, t_n\right), \quad i = 1, ..., k-1, \end{cases} \tag{2.15}$$

Le système (2.13) sera résolu à chaque niveau de temps t_n par l'algorithme qui écrit dans Chapitre 1.

Pour **la solvabilité du régime** que nous avons :

Définition 6 *:*

Une matrice $A \in \mathbb{R}^n$ est dite à diagonale strictement dominante si :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

Proposition 7 *: Une matrice à diagonale strictement dominante est **inversible**.*

Théorème 8 *[4] : **L'existence et l'unicité de la solution :***

Le schéma compact 1 donne une solution unique.

Démonstration. : Pour h et k suffisament petits on a :

$$|10\left(1 - kp^n\right) + 24r| > 2\left|1 - kp^n - 12r\right| \Longrightarrow |5\left(1 - kp^n\right) + 12r| > \left|1 - kp^n - 12r\right|,$$

et

$$|3 - hk_0\left(x_0, t_n\right)| > \sum_{i=1}^{M} |a_i^n|,$$

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^n, = \sum_{i=0}^{k-1} a_{2i+1}^n + \sum_{i=1}^{k-1} a_{2i}^n + a_M^n = \left(a_1^n + a_3^n + ... + a_{M-1}^n\right) + \left(a_2^n + a_4^n + ... + a_{M-2}^n\right) + a_M^n$$
$$= \left(-4hk_0\left(x_1, t_n\right) - 4hk_0\left(x_3, t_n\right) - ... - 4hk_0\left(x_{M-1}, t_n\right)\right) + \left(-2hk_0\left(x_2, t_n\right) - 2hk_0\left(x_4, t_n\right)\right.$$
$$\left. - ... - 2hk_0\left(x_{M-2}, t_n\right) - hk_0\left(x_M, t_n\right)\right),$$
$$= -\left(4hk_0\left(x_1, t_n\right) + 2hk_0\left(x_2, t_n\right) + 4hk_0\left(x_3, t_n\right) + 2hk_0\left(x_4, t_n\right) + ... + 2hk_0\left(x_{M-2}, t_n\right)\right.$$
$$\left. + 4hk_0\left(x_{M-1}, t_n\right) + hk_0\left(x_M, t_n\right)\right),$$

avec

$$
\begin{aligned}
&\left|3-hk_1\left(x_M,t_n\right)\right|>\sum_{i=0}^{M-1}\left|b_i^n\right|,\\
&\sum_{i=0}^{M-1}b_i^n=b_0^n+\sum_{i=0}^{k-1}b_{2i+1}^n+\sum_{i=1}^{k-1}b_{2i}^n=b_0^n+\left(b_1^n+b_3^n+...+b_{M-1}^n\right)+\left(b_2^n+b_4^n+...+b_{M-2}^n\right)\\
&=-hk_1\left(x_0,t_n\right)+\left(-4hk_1\left(x_1,t_n\right)-4hk_1\left(x_3,t_n\right)-...-4hk_1\left(x_{M-1},t_n\right)\right)+\left(-2hk_1\left(x_2,t_n\right)\right.\\
&\left.-2hk_1\left(x_4,t_n\right)-...-2hk_1\left(x_{M-2},t_n\right)\right),\\
&=-(hk_1\left(x_0,t_n\right)+4hk_1\left(x_1,t_n\right)+2hk_1\left(x_2,t_n\right)+4hk_1\left(x_3,t_n\right)+2hk_1\left(x_4,t_n\right)+...\\
&+2hk_1\left(x_{M-2},t_n\right)+4hk_1\left(x_{M-1},t_n\right)).
\end{aligned}
$$

Comme la matrice A_1^n est à diagonale strictement dominante, l'existence et l'unicité de la solution de notre schéma de différence compact sont prouvées. ■

2.3.2 Schéma 2 : Schéma compact de Crank-Nicolson

Schéma intérieur :

— **Principe :**

Pour obtenir une meilleure approximation de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, nous donnons le schéma de Crank-Nicolson.

En partant des deux versions de **la méthode d'Euler rétrograde et progressive** :

$$
\frac{u_i^n-u_i^{n-1}}{k}-\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2u_i^{n-1}-p^{\,n-1}u_i^{n-1}=f_i^{n-1}\qquad (Explicite)\,, \tag{2.16}
$$

et

$$
\frac{u_i^n-u_i^{n-1}}{k}-\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2u_i^{n}-p^{\,n}u_i^{n}=f_i^{n}\qquad (Implicite)\,, \tag{2.17}
$$

$$
\frac{u_i^n-u_i^{n-1}}{k}-\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2\left(\tfrac{1}{2}u_i^n+\tfrac{1}{2}u_i^{n-1}\right)-\tfrac{1}{2}\left(p^{\,n-1}u_i^{n-1}+p^{\,n}u_i^n\right)=\tfrac{1}{2}\left(f_i^{n-1}+f_i^n\right), \tag{2.18}
$$

La méthode de Crank-Nicolson s'obtient en faisant la moyenne des deux égalités.

En utilisant la notation $u_i^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u_i^n+\frac{1}{2}u_i^{n-1}$, $f_i^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(f_i^n+f_i^{n-1}\right)$ l'équation précédente s'écrit :

$$\delta_t u_i^n - \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2 u_i^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(p^{\,n-1}u_i^{n-1} + p^{\,n}u_i^n\right) = f_i^{n-\frac{1}{2}}, \tag{2.19}$$

De plus, en multipliant l'opérateur $\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)$ des deux membres de (2.19), on obtient :

$$\boxed{\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_t u_i^n - \delta_x^2 u_i^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(p^{\,n-1}u_i^{n-1} + p^{\,n}u_i^n\right) = \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right) f_i^{n-\frac{1}{2}},} \tag{2.20}$$

— **<u>Schéma :</u>**

$$\delta_t u_i^n + \frac{h^2}{12}\delta_x^2\left(\delta_t u_i^n\right) - \delta_x^2 u_i^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(p^{\,n-1}u_i^{n-1} + p^{\,n}u_i^n\right) - \frac{h^2}{24}\delta_x^2\left(p^{\,n-1}u_i^{n-1} + p^{\,n}u_i^n\right) = f_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12}\delta_x^2 f_i^{n-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
&u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{1}{12}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n - u_{i+1}^{n-1} + 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}\right) - \frac{k}{2h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1}\right.\\
&\left.+u_{i-1}^{n-1}\right) - \frac{k}{2}\left(p^{\,n-1}u_i^{n-1} + p^{\,n}u_i^n\right) - \frac{kp^{n-1}}{24}\left(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}\right) - \frac{kp^n}{24}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\\
&= \frac{k}{24}\ \left(\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right) + \left(f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right)\right),
\end{aligned}$$

En posant $r = \frac{k}{h^2}$ le schéma s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{6}u_i^n - \frac{5}{6}u_i^{n-1} + \frac{1}{12}\left(u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1} + u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}\right) - \frac{r}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}\right)\\
&-\frac{kp^{n-1}}{24}\left(u_{i+1}^{n-1} + 10u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}\right) - \frac{kp^n}{24}\left(u_{i+1}^n + 10u_i^n + u_{i-1}^n\right)\\
&= \frac{k}{24}\left(\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right) + \left(f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2-kp^n}{24} - \frac{r}{2}\right)u_{i-1}^n + \left(\frac{10-5kp^n}{12} + r\right)u_i^n + \left(\frac{2-kp^n}{24} - \frac{r}{2}\right)u_{i+1}^n\\
= &\left(\frac{2+kp^{n-1}}{24} + \frac{r}{2}\right)u_{i-1}^{n-1} + \left(\frac{10+5kp^{n-1}}{12} - r\right)u_i^{n-1} + \left(\frac{2+kp^{n-1}}{24} + \frac{r}{2}\right)u_{i+1}^{n-1}\\
&+\frac{k}{24}\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n + f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(2 - kp^n - 12r\right)u_{i-1}^n + \left(20 - 10kp^n + 24r\right)u_i^n + \left(2 - kp^n - 12r\right)u_{i+1}^n\\
= &\left(2 + kp^{n-1} + 12r\right)u_{i-1}^{n-1} + \left(20 + 10kp^{n-1} - 24r\right)u_i^{n-1} + \left(2 + kp^{n-1} + 12r\right)u_{i+1}^{n-1}\\
&+k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n + f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

<u>Traitement des conditions aux limites non locales :</u>

Les conditions aux limites (2.3) seront approximées de la même manière que la méthode d'Euler rétrograde compacte. La combinaison de (2.21), (2.11) et (2.12) donne un système d'équations linéaire de $(M+1)$ équations à $(M+1)$ inconnues. Nous écrivons le système sous forme matricielle :

$$A_2^n U^n = F_2^{n-1}. \tag{2.22}$$

$$\begin{pmatrix} a_0^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{M-2}^n & a_{M-2}^n & a_M^n \\ B & C & B & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & C & B \\ b_0^n & b_1^n & b_2^n & \cdots & b_{M-2}^n & b_{M-1}^n - & b_M^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3g_0(t_n) \\ L_1^{n-1} \\ \vdots \\ L_{M-1}^{n-1} \\ 3g_1(t_n) \end{pmatrix}$$

avec

$$B = 2 - kp^n - 12r, \ C = 20 - 10kp^n + 24r,$$

$$\begin{aligned} L_i^{n-1} &= \left(2 + kp^{n-1} + 12r\right) u_{i-1}^{n-1} + \left(20 + 10kp^{n-1} - 24r\right) u_i^{n-1} + \left(2 + kp^{n-1} + 12r\right) u_{i+1}^{n-1} \\ &\quad + k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n + f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right), \quad i = 1, ..., M-1, \end{aligned} \tag{2.23}$$

et

$$\begin{cases} a_0^n = 3 - hk_0\left(x_0\, , t_n\right), \quad a_M^n = -hk_0\left(x_M\, , t_n\right), & b_0^n = -hk_1\left(x_0, t_n\right), \quad b_M^n = 3 - hk_1\left(x_M, t_n\right), \\ a_{2i+1}^n = -4hk_0\left(x_{2i+1}\, , t_n\right), \quad i = 0, ..., k-1, & b_{2i+1}^n = -4hk_1\left(x_{2i+1}, t_n\right), \quad i = 0, ..., k-1, \\ a_{2i}^n = -2hk_0\left(x_{2i}\, , t_n\right), \quad i = 1, ..., k-1, & b_{2i}^n = -2hk_1\left(x_{2i}, t_n\right), \quad i = 1, ..., k-1, \end{cases} \tag{2.24}$$

Le système (2.22) sera résolu à chaque niveau de temps t_n par l'algorithme qui écrit dans Chapitre 1.

Remarque 9 *: Pour l'existence et l'unicité de la solution, on a,*

pour h et k suffisament petits

$$|20 - 10kp^n + 24r| > 2\,|2 - kp^n - 12r| \Longrightarrow |10 - 5kp^n + 12r| > |2 - kp^n - 12r|\,,$$

et

$$|3-hk_0(x_0\ ,t_n)|>\sum_{i=1}^{M}|a_i^n|,$$

$$\sum_{i=1}^{M}a_i^n=\sum_{i=0}^{k-1}a_{2i+1}^n+\sum_{i=1}^{k-1}a_{2i}^n+a_M^n=(a_1^n+a_3^n+...+a_{M-1}^n)+(a_2^n+a_4^n+...+a_{M-2}^n)+a_M^n$$
$$=(-4hk_0(x_1,t_n)-4hk_0(x_3,t_n)-...-4hk_0(x_{M-1},t_n))+(-2hk_0(x_2,t_n)-2hk_0(x_4,t_n)$$
$$-...-2hk_0(x_{M-2},t_n)-hk_0(x_M,t_n),$$
$$=-(4hk_0(x_1,t_n)+2hk_0(x_2,t_n)+4hk_0(x_3,t_n)+2hk_0(x_4,t_n)+...+2hk_0(x_{M-2},t_n)$$
$$+4hk_0(x_{M-1},t_n)+hk_0(x_M,t_n)).$$

avec

$$|3-hk_1(x_M,t_n)|>\sum_{i=0}^{M-1}|b_i^n|,$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}b_i^n=b_0^n+\sum_{i=0}^{k-1}b_{2i+1}^n+\sum_{i=1}^{k-1}b_{2i}^n=b_0^n+(b_1^n+b_3^n+...+b_{M-1}^n)+(b_2^n+b_4^n+...+b_{M-2}^n)$$
$$=-hk_1(x_0,t_n)+(-4hk_1(x_1,t_n)-4hk_1(x_3,t_n)-...-4hk_1(x_{M-1},t_n))+(-2hk_1(x_2,t_n)$$
$$-2hk_1(x_4,t_n)-...-2hk_1(x_{M-2},t_n)),$$
$$=-(hk_1(x_0,t_n)+4hk_1(x_1,t_n)+2hk_1(x_2,t_n)+4hk_1(x_3,t_n)+2hk_1(x_4,t_n)+...$$
$$+2hk_1(x_{M-2},t_n)+4hk_1(x_{M-1},t_n)).$$

La matrice A_2^n étant à diagonale strictement dominante d'aprés la définition 6, le schéma compact 2 admet une solution unique d'aprés le théorème précédent.

2.4 Analyse théorique des schémas

2.4.1 Analyse d'erreur du schéma 1

Pour étudier la convergence on utilise le théorème de Lax (1.2.3) du Chapitre 1.

Proposition 10 *Supposons que $u\in C^{6,2}([0,1]\times[0,T])$. Alors le schéma de différence Euler compact vers l'arrière est consistant, et précis à l'ordre 1 en temps et 4 en espace c'est-à-dire : il existe une constante $C\in\mathbb{R}_+$, indépendante de k et h, telle que :*

$$|R_i^n|\leq C(k+h^4).$$

Démonstration.

Soient $e_i^n = u_i^n - U_i^n$ l'erreur de discrétisation en x_i telle que $u_i^n = u\left(x_i, t_n\right)$ est la valeur exacte de u en $\left(x_i, t_n\right)$ et U_i^n la valeur approchée de u en $\left(x_i, t_n\right)$. On calcule l'erreur de consistance R_i^n (en remplaçant la solution exacte dans le schéma) :

$$\begin{aligned} R_i^n &= \left(\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_t - \delta_x^2\right)\left(e_i^n\right) - \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)p^n e_i^n, \\ &= \left(\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_t - \delta_x^2\right)\left(u_i^n - U_i^n\right) - \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)p^n\left(u_i^n - U_i^n\right). \end{aligned}$$

Comme $\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_t U_i^n - \delta_x^2 U_i^n - \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)p^n U_i^n = \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)f_i^n$, on obtient donc

$$R_i^n = \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_t u_i^n - \delta_x^2 u_i^n - \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)p^n u_i^n - \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)f_i^n, \qquad i = 1,..,M-1.$$

Soit $u \in C^{6,2}\left([0,1]\times[0,T]\right)$. Par développement de Taylor autour du point (x_i, t_n), nous avons :

$$\delta_t u_i^n = \frac{u(x_i,t_n) - u(x_i,t_{n-1})}{k} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) + O(k),$$

$$\delta_x^2 f_i^n = \tfrac{f(x_{i+1},t_n) - 2f(x_i,t_n) + f(x_{i-1},t_n)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,t_n) + O\left(h^2\right),$$

$$\delta_x^2 u_i^n = \frac{u(x_{i+1},t_n) - 2u(x_i,t_n) + u(x_{i-1},t_n)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) + \frac{2h^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_n) + O(h^4),$$

$$\delta_x^2\delta_t u_i^n = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_t(x_i,t_n) + \frac{2h^2}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_t(x_i,t_n),$$

On applique les quatres formules dans R_i^n pour trouver :

$$\begin{aligned} R_i^n &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - p^n u_i^n - f_i^n\right) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_t(x_i,t_n) + \frac{h^4}{144}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_t(x_i,t_n) \\ &\quad -\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_n) - \frac{h^2}{12}p^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) + \frac{2h^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_n)\right) - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,t_n)\right) + O(k) + O(h^4), \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - p^n u_i^n - f_i^n\right) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - p^n u_i^n - f_i^n\right) \\ &\quad +\frac{h^4}{144}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - p^n u_i^n\right) + O(k) + O(h^4), \end{aligned}$$

De même, en utilisant le fait que : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - p^n u_i^n = f_i^n$, il s'ensuit que

$$R_i^n = \frac{h^4}{144}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) - p^n u_i^n\right) + O(k) + O(h^4).$$

Donc,

$$|R_i^n| \leq C(k+h^4), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

D'autre part, nous utilisons la règle du simpson et le développement de Taylor pour approximer condition (2.3) . Alors, l'erreur de troncature R_i^n, $i = 0, M$ satisfait :

$$|R_0^n| + |R_M^n| \leq Ch^4.$$

D'où,

$$|R_i^n| \leq C(k+h^4), \quad 0 \leq i \leq M.$$

Lorsque k et h tendent vers zero, l'erreur de troncature R_i^n tend aussi vers zero ; le schéma est donc **consistant**. ■

Proposition 11 *Le schéma de différence Euler compact vers l'arrière est* ***inconditionnellement stable.***

Démonstration. En norme L^∞

Pour tout i, on a

$$\begin{aligned}&(1-kp^n-12r)\,u_{i-1}^n + (10\,(1-kp^n)+24r)\,u_i^n + (1-kp^n-12r)\,u_{i+1}^n\\&= u_{i+1}^{n-1} + 10u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1} + k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right).\end{aligned}$$

En cosidérant la valeur absolue des deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}&\left|(1-kp^n-12r)\,u_{i-1}^n + (10\,(1-kp^n)+24r)\,u_i^n + (1-kp^n-12r)\,u_{i+1}^n\right|\\&\preceq |1-kp^n-12r|\left|u_{i-1}^n\right| + |10\,(1-kp^n)+24r|\,|u_i^n| + |1-kp^n-12r|\left|u_{i+1}^n\right|,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\left|u_{i-1}^{n-1} + 10u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1} + k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n\right)\right|\\&\preceq \left|u_{i-1}^{n-1}\right| + 10\left|u_i^{n-1}\right| + \left|u_{i+1}^{n-1}\right| \quad + k\left(\mid f_{i+1}^n \mid +10 \mid f_i^n \mid + \mid f_{i-1}^n \mid\right),\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}&|1-kp^n-12r|\left|u_{i-1}^n\right| + |10\,(1-kp^n)+24r|\,|u_i^n| + |1-kp^n-12r|\left|u_{i+1}^n\right|\\&\preceq \left|u_{i-1}^{n-1}\right| + 10\left|u_i^{n-1}\right| + \left|u_{i+1}^{n-1}\right| \quad + k\left(\mid f_{i+1}^n \mid +10 \mid f_i^n \mid + \mid f_{i-1}^n \mid\right),\end{aligned}$$

Soient $M_{n-1} = \max\limits_{1 \preceq i \preceq M} \left|u_i^{n-1}\right|$ et $f^n = \max\limits_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n|$. Alors,

$$\begin{aligned}
&|1 - kp^n - 12r| \left|u_{i-1}^n\right| + |10\,(1 - kp^n) + 24r| \left|u_i^n\right| + |1 - kp^n - 12r| \left|u_{i+1}^n\right| \\
&\preceq M_{n-1} + 10M_{n-1} + M_{n-1} \ + k\,(f^n + 10f^n + f^n)\,, \\
&\preceq 12\,(M_{n-1} + kf^n)\,.
\end{aligned}$$

En passant au maximun sur $(u_i^n)_{1 \leq i \leq M}$, il vient :

$$(1 - kp^n)\,M_n \preceq M_{n-1} + kf^n \Leftrightarrow (1 - kp^n) \max_{1 \preceq i \preceq M} |u_i^n| \preceq \max_{1 \preceq i \preceq M} \left|u_i^{n-1}\right| + k \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n|\,,$$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}
&(1 - kp^n) \max_{1 \preceq i \preceq M} |u_i^n| \preceq \max_{1 \preceq i \preceq M} \left|u_i^{n-1}\right| + k \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n| \preceq \max_{1 \preceq i \preceq M} \left|u_i^{n-2}\right| + 2k \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n| \\
&\preceq \max_{1 \preceq i \preceq M} \left|u_i^{n-3}\right| + 3k \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n| \preceq \ldots \preceq \max_{1 \preceq i \preceq M} |u_i^1| + (n-1)\,k \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n| \\
&\preceq \max_{1 \preceq i \preceq M} |u_i^0| + nk \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n|\,,
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$(1 - kp^n) \max_{\substack{1 \preceq i \preceq M \\ 1 \preceq n \preceq N}} |u_i^n| \preceq \max\left(\left|u_1^0\right|, \left|u_i^0\right|, \ldots., \left|u_M^0\right|\right) + nk \max_{1 \preceq i \preceq M} |f_i^n|\,.$$

D'où,

$$(1 - kp^n) \max_{\substack{1 \preceq i \preceq M \\ 1 \preceq n \preceq N}} |u_i^n| \leq \|u^0\|_\infty + t_n \|f^n\|_\infty.$$

Pour k suffisamment petit on a

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + t_n \|f^n\|_\infty.$$

■

2.4.2 Analyse d'erreur du schéma 2

Posons : $e_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(u_i^n + u_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(U_i^n + U_i^{n-1}\right)$, $p^{n-\frac{1}{2}} e_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(p^n u_i^n + p^{n-1} u_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(p^n U_i^n + p^{n-1} U_i^{n-1}\right)$.

Proposition 12 *Supposons que $u \in C^{6,3}([0,1] \times [0,T])$. Alors le schéma compact de Crank-Nicolson est consistant, et précis à l'ordre 2 en temps et 4 en espace c'est-à-dire : il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$, indépendante de k et h, telle que :*

$$|R_i^n| \leq C(k^2 + h^4)$$

Proposition 13 *Le schéma compact de Crank-Nicolson est* ***inconditionnellement stable*** *par la norme L^∞.*

Démonstration. En norme L^∞, Pour tout i, on a

$$
\begin{aligned}
&(2 - kp^n - 12r)\,\mathrm{u}_{i+1}^n + (20 - 10kp^n + 24r)\,\mathrm{u}_i^n + (2 - kp^n - 12r)\,\mathrm{u}_{i-1}^n \\
&= (2 + kp^{n-1} + 12r)\,\mathrm{u}_{i+1}^{n-1} + (20 + 10kp^{n-1} - 24r)\,\mathrm{u}_i^{n-1} + (2 + kp^{n-1} + 12r)\,\mathrm{u}_{i-1}^{n-1} \\
&+k\left(f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n + f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

En prenant la valeur absolue des deux membres, on a

$$
\begin{aligned}
&|2 - kp^n - 12r|\left|\mathrm{u}_{i+1}^n\right| + |20 - 10kp^n + 24r|\left|\mathrm{u}_i^n\right| + |2 - kp^n - 12r|\left|\mathrm{u}_{i-1}^n\right| \\
&\preceq |2 + kp^{n-1} + 12r|\left|\mathrm{u}_{i+1}^{n-1}\right| + |20 + 10kp^{n-1} - 24r|\left|\mathrm{u}_i^{n-1}\right| + |2 + kp^{n-1} + 12r|\left|\mathrm{u}_{i-1}^{n-1}\right| \\
&+k \mid f_{i+1}^n + 10f_i^n + f_{i-1}^n + f_{i+1}^{n-1} + 10f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1} \mid.
\end{aligned}
$$

Soient : $M_{n-1} = \max\limits_{1\preceq i\preceq M}\left|u_i^{n-1}\right|$, et $f^n = \max\limits_{1\preceq i\preceq M}\left|f_i^n\right|$, $\quad f^{n-1} = \max\limits_{1\preceq i\preceq M}\left|f_i^{n-1}\right|$. Alors,

$$
\begin{aligned}
&|2 - kp^n - 12r|\left|u_{i-1}^n\right| + |20 - 10kp^n + 24r|\left|u_i^n\right| + |2 - kp^n - 12r|\left|u_{i+1}^n\right| \\
&\preceq (2 + kp^{n-1} + 12r)\,M_{n-1} + (20 + 10kp^{n-1} - 24r)\,M_{n-1} + (2 + kp^{n-1} + 12r)\,M_{n-1} \\
&+k\left(f^n + 10f^n + f^n + f^{n-1} + 10f^{n-1} + f^{n-1}\right), \\
&\preceq 12\left(2 + kp^{n-1}\right)M_{n-1} + 12k\left(f^n + f^{n-1}\right),
\end{aligned}
$$

En passant au maximun sur $(u_i^n)_{1\leq i\leq M}$, il vient

$$
\left(2 - kp^n\right)M_n \preceq \left(2 + kp^{n-1}\right)M_{n-1} + k\left(f^n + f^{n-1}\right),
$$

$$
\left(1 - \frac{kp^n}{2}\right)M_n \preceq \left(1 + \frac{kp^{n-1}}{2}\right)M_{n-1} + kf^{n-\frac{1}{2}}.
$$

Par récurrence, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \tfrac{kp^n}{2}\right)M_n \preceq \left(1 + \tfrac{kp^{n-1}}{2}\right)M_{n-1} + kf^{n-\frac{1}{2}} \preceq \left(1 + \tfrac{kp^{n-2}}{2}\right)M_{n-2} + 2kf^{n-\frac{1}{2}} \\
&\preceq \left(1 + \tfrac{kp^{n-3}}{2}\right)M_{n-3} + 3kf^{n-\frac{1}{2}} \preceq ... \preceq \left(1 + \tfrac{kp}{2}\right)M_1 + (n-1)\,kf^{n-\frac{1}{2}} \preceq \left(1 + \tfrac{k}{2}\right)M_0 + nkf^{n-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

On obtient :

$$
\left(1 - \frac{kp^n}{2}\right)M_n \preceq \left(1 + \frac{k}{2}\right)\max\left(\left|u_1^0\right|, \left|u_i^0\right|, ..., \left|u_M^0\right|\right) + nk\max_{1\preceq i\preceq M}\left|f_i^{n-\frac{1}{2}}\right|,
$$

et donc,

$$
\left(1 - \frac{kp^n}{2}\right)\max_{1\preceq i\preceq M}\left|u_i^n\right| \preceq \left(1 + \frac{k}{2}\right)\|u^0\|_\infty + t_n\|f^{n-\frac{1}{2}}\|_\infty.
$$

Pour k suffisamment petit on a

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + t_n \|f^{n-\frac{1}{2}}\|_\infty.$$

■

Conclusion 14 *: Les deux schémas (Crank-Nicolson compacte et schéma de différence Euler compacte vers l'arrière) sont* ***convergents*** *d'aprés théoréme de Lax* (1.2.3).

2.5 Algorithme efficace pour estimer p(t) et u(x,t)

Dans cette section, nous discutons des procédures pour estimer $u(x,t)$ et $p(t)$ à chaque pas de temps.

L'objectif de la résolution du problème inverse avec la conditions aux limites non locale est d'identifier le paramètre source qui produit à chaque pas de temps, une température souhaitée $u(x,t)$ en un point donnée x_0 du domaine spatial.

Dans les entrées diagonales de la matrice A, la discrétisation de (2.1)est définie par la fonction source inconnue $p(t_{n+1})$ à chaque pas de temps t_{n+1}. Ainsi, la solution $u(x_m, t_{n+1})$ nécessite une estimation précise pour la fonction inconnue $p(t_{n+1})$.

2.5.1 Méthode pédicteur-correcteur

La méthode prédicteur-correcteur suivante est utilisée pour résoudre les équations discrédites. Pour simplifier, nous allons présenter la méthode pour chaque équation du système linéaire.

Considérons (2.1) à $x = x_0$. Alors,

$$u_t(x_0,t) = u_{xx}(x_0,t) + p(t)\,u(x_0,t) + f(x_0,t).$$

Comme $u(x_0,t) = E(t)$, on a

$$E'(t) = u_{xx}(x_0,t) + p(t)\,E(t) + f(x_0,t),$$

et l'on extrait l'expression de $p(t)$ comme suit :

$$p(t) = \frac{1}{E(t)}\left(E'(t) - u_{xx}(x_0,t) - f(x_0,t)\right). \tag{2.25}$$

Remplaçons u_{xx} par la formule de différence finie de quatrième ordre dans l'équation (2.25) pour déduire

$$p^n = \frac{1}{E^n}\left((E')^n - \frac{1}{12h^2}\left(-u^n_{l_0-2} + 16u^n_{l_0-1} - 30u^n_{l_0} + 16u^n_{l_0+1} - u^n_{l_0+2}\right) - f^n_{l_0}\right). \qquad (2.26)$$

Pour $t = t_{n+1}$

$$p^{n+1} = p\left(t_{n+1}\right) = \frac{1}{E\left(t_{n+1}\right)}\left(E'\left(t_{n+1}\right) - u_{xx}\left(x_0, t_{n+1}\right) - f\left(x_0, t_{n+1}\right)\right), \qquad (2.27)$$

Fixons la valeur de p^0 comme suit :

$$p^0 = \frac{1}{E\left(0\right)}\left(E'\left(0\right) - u_{xx}\left(x_0, 0\right) - f\left(x_0, 0\right)\right).$$

De plus, les valeurs initiales de la condition $u(x,t)$ à $t = 0$, fournissant la valeur de départ de p^{n+1} pour notre calcul de $u(x,t)$ à $t = t_{n+1}$. Donc, les données initiales pour p^{n+1} sont un bon choix. Remarquons que $p^{n+1(0)}$ peut être considéré comme $p^{n+1}\left(t_n\right) = p^n, n = 0, 1, ..., N$.

Généralement, nous utilisons $p^{n+1(l)}$ pour repésenter la l-ième prédiction de $p(t)$ au temps $t = t_{n+1}$ et $u^{n+1(l)}$ peut spécifier l'approximation correspondante de $u\left(x,t\right)$ au temps $t = t_{n+1}$. Utilisons la valeur prédite de $p^{n+1(l)}$. Il convient également de noter que nous nous attendons à un certain nombre de corrections, données sous forme de l corrections, pour $p^{n+1(l)}$ et $u^{n+1(l)}$, à effectuer avant $p^{n+1(l)}$ et $u^{n+1(l)}$ peut être accepté comme bonne approximation à $t = t_{n+1}$.

La correction de $p^{n+1(l+1)}$ est donnée comme suit :

$$p^{n+1(l+1)} = \frac{1}{E^{n+1}}\left((E')^{n+1} - \frac{1}{12h^2}\left(-u^{n+1(l)}_{l_0-2} + 16u^{n+1(l)}_{l_0-1} - 30u^{n+1(l)}_{l_0} + 16u^{n+1(l)}_{l_0+1} - u^{n+1(l)}_{l_0+2}\right) - f^{n+1}_{l_0}\right).$$

Nous corrigeons $p^{n+1(l)}$ et mettons à jour la solution $u^{n+1(l)}$ jusqu'à ce qu'elle converge, en utilisant des tolérances prédéfinies. La solution est ainsi accéptée.

2.6 Tests numériques

Pour tester l'algorithme ci-dessus, nous utilisons un exemple avec une solution analytique connue.

Considérons le problème (2.1)-(2.4) avec

$$f(x,t) = \left((t-1)^2 + \pi^2\right) \exp(-t)^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi x)). \tag{2.28}$$

$$u(x,0) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x). \tag{2.29}$$

$$u(1,t) = \frac{-\pi}{2} \int_0^1 u(x,t)\, dt. \tag{2.30}$$

$$u(1,t) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 u(x,t)\, dt. \tag{2.31}$$

La condition sur-spécifiée définie au point x_0 est donnée par

$$u(x_0,t) = \exp(-t)^2 (\cos(\pi x_0) + \sin(\pi x_0)) = E_0(t), \tag{2.32}$$

avec $x_0 = 0.25$.

La solution exacte $u(x,t)$ du problème modèle est donnée par

$$u(x,t) = \exp(-t)^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi x)), \tag{2.33}$$

et $p(t) = -(t^2+1)$.

Dans le tableau (2.1) on compare les erreurs des résultats numériques de $u(x,t)$ obtenues par les schéma 1 et 2 et par les différences finies classiques (FTCS) [13], le schéma implicite rétrograd en temps et centré en espace (BTCS), le schéma Crank-Nicolson (CN) et la solution exacte à l'instant $T = 1$.

TABLE 2.1 – La solution numérique u pour $h = 0.05$ et $r = 0.2$ à l'instant $T = 1$.

x_i	$u(x_i, 1)$exacte	FTCS	BTCS	CN	schéma1	schéma2
0.05	0.420899	5.1×10^{-3}	8×10^{-3}	4.3×10^{-3}	7.2×10^{-6}	5.4×10^{-7}
0.15	0.494797	5.0×10^{-3}	8.2×10^{-3}	4.1×10^{-3}	6.9×10^{-6}	5.1×10^{-7}
0.25	0.520260	5.5×10^{-3}	8.1×10^{-3}	4.2×10^{-3}	7.1×10^{-6}	5.2×10^{-7}
0.35	0.494797	5.8×10^{-3}	7.9×10^{-3}	3.9×10^{-3}	7×10^{-6}	5.3×10^{-7}
0.45	0.420899	5.3×10^{-3}	7.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}	7.1×10^{-6}	5.2×10^{-7}
0.55	0.305801	6×10^{-3}	8.1×10^{-3}	4×10^{-3}	7.4×10^{-6}	5.5×10^{-7}
0.65	0.437016	6.1×10^{-3}	8.3×10^{-3}	4.1×10^{-3}	7.5×10^{-6}	5.6×10^{-7}
0.75	0.000000	5.8×10^{-3}	8.5×10^{-3}	4.2×10^{-3}	7.6×10^{-6}	5.5×10^{-7}
0.85	-0.4370165	5.4×10^{-3}	8.6×10^{-3}	4.1×10^{-3}	7.5×10^{-6}	5.7×10^{-7}
0.95	-0.305801	5.9×10^{-3}	7.9×10^{-3}	4.3×10^{-3}	7.6×10^{-6}	5.8×10^{-7}

Les résultats obtenus pour $p(t)$ avec $h = 0.05$, $r = 0.2$, en utilisant les schémas 1 et 2 et les résultats obtenues par le schéma implicite rétrograd en temps et centré en espace (BTCS), le schéma Crank-Nicolson (CN)[13], et la solution exacte sont présentés dans le tableau (2.2).

Notons que le critère de convergence pour $p(t)$ est $|p^{n+1(l)} - p^{n+1(l-1)}| < 0.0001$ Des tableaux précédents, on remarque que les résultats numériques obtenus en utilisant les différences finies compactes donnent des résultats largement mielleurs.

TABLE 2.2 – La solution numérique $p(t)$ pour $h = 0.05$ et $r = 0.2$

t_i	$p(t)$ exacte	BTCS	CN	schéma1	schéma2
0.05	-1.0025	6.5×10^{-3}	4.3×10^{-3}	8×10^{-5}	4.8×10^{-5}
0.10	-1.01	6.6×10^{-3}	4.9×10^{-3}	7.8×10^{-5}	4.9×10^{-5}
0.15	-1.0225	6.6×10^{-3}	4.9×10^{-3}	8.2×10^{-5}	4.6×10^{-5}
0.20	-1.04	6.5×10^{-3}	4.8×10^{-3}	8.3×10^{-5}	4.7×10^{-5}
0.25	-1.0625	6.4×10^{-3}	4.8×10^{-3}	7.9×10^{-5}	4.4×10^{-5}
0.3	-1.09	6.2×10^{-3}	4.7×10^{-3}	8.4×10^{-5}	4.9×10^{-5}
0.35	-1.1225	6.3×10^{-3}	4.6×10^{-3}	8.3×10^{-5}	4.8×10^{-5}
0.4	-1.16	6.2×10^{-3}	4.6×10^{-3}	8.2×10^{-5}	4.7×10^{-5}
0.45	-1.2025	6.1×10^{-3}	4.5×10^{-3}	8.1×10^{-5}	4.9×10^{-5}
0.5	-1.25	6.0×10^{-3}	4.4×10^{-3}	8.4×10^{-5}	5.1×10^{-5}

Conclusion

Dans ce chapitre, deux nouvelles techniques ont été appliquées pour la résolution d'un problème parabolique inverse avec des conditions aux limites non locales. Les résultats numériques obtenus en utilisant les méthodes de différences finies compactes donnent des résultats plus proches à la solution exacte. Les solutions numériques énumérés dans les tableaux (2.1)−(2.2) indiquent clairement que le schéma de Crank-Nicolson compact permet d'obtenir des résultats numériques beaucoup plus proches des solutions exactes.

Chapitre 3

Résolution d'un problème inverse parabolique bidimensionnel avec des conditions de Dirichlet et une condition sur-spécifique

Dans ce chapitre nous appliquons les schémas d'Euler rétrograd compact et Crank-Nicolson compact sur un problème inverse parabolique en dimension 2.

3.1 Position du problème

Soit donnée l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p\left(t\right) u + \Phi\left(x, y, t\right), \quad 0 \leq x, y \leq 1, 0 < t \leq T, \tag{3.1}$$

avec les conditions aux bords :

$$u(0, y, t) = g_0\left(y, t\right), \qquad 0 \leq y \leq 1, 0 < t \leq T, \tag{3.2}$$

$$u(1, y, t) = g_1\left(y, t\right), \qquad 0 \leq y \leq 1, 0 < t \leq T, \tag{3.3}$$

$$u(x,0,t) = h_0\left(x,t\right), \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T, \tag{3.4}$$

$$u(x,1,t) = h_1\left(x,t\right), \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T, \tag{3.5}$$

la condition initiale :

$$u(x,y,0) = f\left(x,y\right), \qquad 0 \leq x, y \leq 1, \tag{3.6}$$

et la condition sur-spécifiée en un point dans le domaine spatial

$$u(x_0,y_0,t) = E\left(t\right), \quad 0 \leq x_0, y_0 \leq 1, 0 < t \leq T. \tag{3.7}$$

Ici, f, g_0, g_1, h_0, h_1, et E sont des fonctions connues, tandis que les fonctions u et p sont inconnues.

L'équation (3.1) modélise un processus de transfert de chaleur avec un paramètre source présent. L'équation (3.7) peut alors être interprétée comme la température en un point donné (x_0, y_0) dans le domaine spatial à l'instant t. Ainsi, le but de la résoulution de ce problème inverse consiste à identifier le paramètre de contrôle de la source qui produit, à tout moment, une température désirée en un point donné (x_0, y_0) dans le domaine spatial.

Ce problème inverse ainsi que d'autres problèmes similaires ont été étudiés en dimension deux par ([8], [9] et [21]). Ce type de problème présente de nombreuses applications importantes. L'existence, l'unicité et la dépendance continue des solutions de ce problème, ainsi que les applications sont discutées dans ([3], [15], [16], [17], [18], [22]).

Les méthodes numériques proposées ici reposent sur deux approches. En premier lieu, une technique numérique est appliquée pour approximer la solution de l'équation de diffusion bidimensionnelle, et deuxièmement, une procédure spatiale est utilisée pour évaluer $p\left(t\right)$ approximativement en exploitant la sur-spécification de la température.

3.2 Techniques numériques

Le domaine $\left[0,1\right]^2 \times \left[0,T\right]$ est subdivisé en un maillage $M^2 \times N$ avec une taille de pas spatiale $h = \frac{1}{M}$ dans les deux directions x et y et la taille du pas de temps $k = \frac{T}{N}$ respectivement.

Les points de la grille (x_i, y_j, t_n) sont définis par :

$$x_i = ih, \qquad i = 0, 1, ..., M, \tag{3.8}$$

$$y_j = jh, \qquad j = 0, 1, ..., M, \tag{3.9}$$

$$t_n = nk, \qquad n = 0, 1, 2, ..., N, \tag{3.10}$$

où M et N sont des nombres entiers donnés. Les notations $u_{i,j}^n$ et p^n sont utilisées pour les approximations par différences finies de $u(ih, jh, nk)$ et $p(nk)$, respectivement.

Equation (3.1) est résolue approximativement aux points spatiaux (x_i, y_j), en commençant par la valeur initiale $u_{i,j}^0 = f(x_i, y_j)$, $i, j = 0, 1, 2, ..., M$, et les valeures aux frontières :

$$\begin{aligned} u_{0,j}^n &= g_0(y_j, t_n), \\ u_{M,j}^n &= g_1(y_j, t_n), \\ u_{i,0}^n &= h_0(x_i, t_n), \\ u_{i,M}^n &= h_1(x_i, t_n). \end{aligned}$$

pour $n = 0, 1, 2, ..., N$, où $h_0(x,t)$, $h_1(x,t)$, $g_0(y,t)$ et $g_1(y,t)$ sont données dans les conditions aux limites et $p(t)$ est trouvé par la procédure décrite dans Chapitre 1.

Dans les problèmes pratiques, (x_0, y_0) est un point donné qui peut toujours être choisi comme point de maillage, c'est-à-dire $x_0 = l_0 h, y_0 = k_0 h$, pour certains entiers $1 \leq l_0, k_0 \leq M - 1$. Avec cette identification, la forme de différences finies de (3.7) peut être exprimée comme suit :

$$u_{l_0,k_0}^n = E^n.$$

3.2.1 Méthode d'Euler rétrograde compacte

Soit l'équation suivante :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + pu + \Phi.$$

Nous utilisons les deux opérateurs de différences finies compactes (2.6), et différences finies en arrière pour approximer u_{xx}, u_{yy}, u_t respectivement, pour obtenir :

$$\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{k} = \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2 u_{i,j}^n + \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2 u_{i,j}^n + p^n u_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^n.$$

En multipliant par $\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)$ les deux membres de cette équation, on obtient le schéma suivant :

$$\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\tfrac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{k} = \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2 u_{i,j}^n$$

$$+\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2 u_{i,j}^n + \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(p^n u_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^n\right)$$

$$\Longrightarrow \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\tfrac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{k} = \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 u_{i,j}^n + \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 u_{i,j}^n$$

$$+\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(p^n u_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^n\right)$$

$$\Longrightarrow \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}\right) = k\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 u_{i,j}^n + k\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 u_{i,j}^n$$

$$+k\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(p^n u_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^n\right),$$

$$\left(\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right) - k\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 - k\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 - kp^n\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\right)u_{i,j}^n$$

$$= \left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n-1} + k\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\Phi_{i,j}^n.$$

Alors la première partie de l'équation est :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right) &= \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2+\frac{h^4}{144}\delta_x^2(\delta_y^2)\right),\\ &= 1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2+O(h^4).\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}k\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 &= k\left(\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2(\delta_x^2)\right).\\ k\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 &= k\left(\delta_y^2+\frac{h^2}{12}\delta_x^2(\delta_y^2)\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n &= \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n \\ &= \frac{2}{3}u_{i,j}^n+\frac{1}{12}\left(u_{i,j-1}^n+u_{i,j+1}^n+u_{i-1,j}^n+u_{i+1,j}^n\right). \quad (3.11)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}k\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2u_{i,j}^n &= k\left(\delta_y^2+\frac{h^2}{12}\delta_x^2(\delta_y^2)\right)u_{i,j}^n \\ &= \frac{5r}{6}u_{i,j+1}^n-\frac{5r}{3}u_{i,j}^n+\frac{5r}{6}u_{i,j-1}^n+\frac{r}{12}\left(u_{i+1,j-1}^n+u_{i-1,j-1}^n+u_{i-1,j+1}^n+u_{i+1,j+1}^n\right. \\ &\quad \left.-2u_{i-1,j}^n-2u_{i+1,j}^n\right). \quad (3.12)\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}k\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2u_{i,j}^n &= k\left(\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2(\delta_x^2)\right)u_{i,j}^n \\ &= \frac{5r}{6}u_{i+1,j}^n-\frac{5r}{3}u_{i,j}^n+\frac{5r}{6}u_{i-1,j}^n+\frac{r}{12}\left(u_{i+1,j-1}^n+u_{i-1,j-1}^n+u_{i-1,j+1}^n+u_{i+1,j+1}^n\right. \\ &\quad \left.-2u_{i,j-1}^n-2u_{i,j+1}^n\right), \quad (3.13)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}kp^n\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n &= kp^n\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n \\ &= kp^n\left(\frac{2}{3}u_{i,j}^n+\frac{1}{12}\left(u_{i,j-1}^n+u_{i,j+1}^n+u_{i-1,j}^n+u_{i+1,j}^n\right)\right) \quad (3.14)\end{aligned}$$

pour tout $r=\frac{k}{h^2}$ et $i,j=1,2,...,M-1$.

D'aprés (3.11) – (3.14) on conclut la première partie de l'équation :

$$\tfrac{2-2kp^n+10r}{3}u_{i,j}^n+\tfrac{1-kp^n-8r}{12}\left(u_{i,j-1}^n+u_{i,j+1}^n+u_{i-1,j}^n+u_{i+1,j}^n\right)$$

$$-\tfrac{r}{6}\left(u_{i+1,j-1}^n+u_{i-1,j-1}^n+u_{i-1,j+1}^n+u_{i+1,j+1}^n\right).$$

La deuxième partie de l'équation est :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n-1} &= \left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n-1}\\ &= \frac{2}{3}u_{i,j}^{n-1}+\frac{1}{12}\left(u_{i,j-1}^{n-1}+u_{i,j+1}^{n-1}+u_{i-1,j}^{n-1}+u_{i+1,j}^{n-1}\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$\begin{aligned}k\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\Phi_{i,j}^{n} &= k\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\Phi_{i,j}^{n}\\ &= k\left(\frac{2}{3}\Phi_{i,j}^{n}+\frac{1}{12}\left(\Phi_{i,j-1}^{n}+\Phi_{i,j+1}^{n}+\Phi_{i-1,j}^{n}+\Phi_{i+1,j}^{n}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

D'aprés (3.15) et (3.16) on obtient la deuxième partie de l'équation :

$$\frac{2}{3}u_{i,j}^{n-1}+\frac{1}{12}\left(u_{i,j-1}^{n-1}+u_{i,j+1}^{n-1}+u_{i-1,j}^{n-1}+u_{i+1,j}^{n-1}\right)+k\left(\frac{2}{3}\Phi_{i,j}^{n}+\frac{1}{12}\left(\Phi_{i,j-1}^{n}+\Phi_{i,j+1}^{n}+\Phi_{i-1,j}^{n}+\Phi_{i+1,j}^{n}\right)\right).$$

Par coséquent,

$$\begin{aligned}&\tfrac{2-2kp^n+10r}{3}u_{i,j}^{n}+\tfrac{1-kp^n-8r}{12}\left(u_{i,j-1}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i+1,j}^{n}\right)\\ &-\tfrac{r}{6}\left(u_{i+1,j-1}^{n}+u_{i-1,j-1}^{n}+u_{i-1,j+1}^{n}+u_{i+1,j+1}^{n}\right)\\ &=\tfrac{2}{3}u_{i,j}^{n-1}+\tfrac{1}{12}\left(u_{i,j-1}^{n-1}+u_{i,j+1}^{n-1}+u_{i-1,j}^{n-1}+u_{i+1,j}^{n-1}\right)\\ &+k\left(\tfrac{2}{3}\Phi_{i,j}^{n}+\tfrac{1}{12}\left(\Phi_{i,j-1}^{n}+\Phi_{i,j+1}^{n}+\Phi_{i-1,j}^{n}+\Phi_{i+1,j}^{n}\right)\right).\end{aligned}$$

3.2.2 Méthode de Crank-Nicolson compacte

D'abord, on va donner les schémas explicite et implicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}}{k}=\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2u_{i,j}^{n-1}+\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2u_{i,j}^{n-1}+p^{n-1}u_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^{n-1}\quad (Explicite)\ ,$$

$$\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}}{k}=\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2u_{i,j}^n+\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2u_{i,j}^n+p^nu_{i,j}^n+\Phi_{i,j}^n\quad (Iimplicite)\,,$$

Si nous remplaçons toutes les dérivées spatiales par la moyenne de leurs valeurs aux niveaux de temps $n-1$ et n, et puis nous substituons des formes de différences centrées pour toutes les derivées, nous obtenons la formule de Crank-Nicolson :

$$\begin{aligned}\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}}{k} &= \frac{\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2}{2}\left(u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j}^n\right)+\frac{\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2}{2}\left(u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j}^n\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(p^{n-1}u_{i,j}^{n-1}+p^nu_{i,j}^n+\Phi_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^n\right).\end{aligned}$$

La dernière équation est de quatrième ordre en espace et de deuxième ordre en temps. En multipliant par $\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)$ les deux membres de cette équation, on aboutit au schéma suivant :

$$\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\tfrac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}}{k}=\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\tfrac{\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2}{2}\left(u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j}^n\right)$$

$$+\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\tfrac{\left(1+\frac{\delta_y^2}{12}\right)^{-1}\delta_y^2}{2}\left(u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j}^n\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(p^{n-1}u_{i,j}^{n-1}+p^nu_{i,j}^n+\Phi_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^n\right),$$

$$\Longrightarrow\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}\right)=\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2\left(u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j}^n\right)$$

$$+\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2\left(u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j}^n\right)+\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(p^{n-1}u_{i,j}^{n-1}+p^nu_{i,j}^n+\Phi_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^n\right),$$

$$\Longrightarrow\left(\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)-\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2-\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2-\tfrac{kp^n}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\right)u_{i,j}^n$$

$$=\left(\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)+\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2+\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2\right.$$

$$\left.+\tfrac{kp^{n-1}}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\right)u_{i,j}^{n-1}+\tfrac{k}{2}\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\tfrac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(\Phi_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^n\right),$$

pour tout $i,j=1,2,...,M-1$.
Alors,

$$\left(\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)-\frac{k}{2}\left(\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\left(\delta_x^2\right)\right)-\frac{k}{2}\left(\delta_y^2+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\left(\delta_y^2\right)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{k}{2}p^n\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\right)u_{i,j}^n$$

$$=\left(\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)+\frac{k}{2}\left(\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\left(\delta_x^2\right)\right)+\frac{k}{2}\left(\delta_y^2+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\left(\delta_y^2\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{kp^{n-1}}{2}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\right)u_{i,j}^{n-1}+\frac{k}{2}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left(\Phi_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^n\right),$$

et donc,

$$\left(\frac{2-kp^n+5r}{3}\right)u_{i,j}^n+\left(\frac{2-kp^n-8r}{24}\right)\left(u_{i,j-1}^n+u_{i,j+1}^n+u_{i-1,j}^n+u_{i+1,j}^n\right)$$

$$-\frac{r}{12}\left(u_{i-1,j-1}^n+u_{i+1,j-1}^n+u_{i-1,j+1}^n+u_{i+1,j+1}^n\right)$$

$$=\left(\frac{2+kp^{n-1}-5r}{3}\right)u_{i,j}^{n-1}+\left(\frac{2+kp^{n-1}+8r}{24}\right)\left(u_{i,j-1}^{n-1}+u_{i,j+1}^{n-1}+u_{i-1,j}^{n-1}+u_{i+1,j}^{n-1}\right)$$

$$+\frac{r}{12}\left(u_{i-1,j-1}^{n-1}+u_{i+1,j-1}^{n-1}+u_{i-1,j+1}^{n-1}+u_{i+1,j+1}^{n-1}\right)+\frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}\left(\Phi_{i,j}^{n-1}+\Phi_{i,j}^n\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{12}\left(\Phi_{i,j-1}^{n-1}+\Phi_{i,j+1}^{n-1}+\Phi_{i,j-1}^n+\Phi_{i,j+1}^n+\Phi_{i-1,j}^{n-1}+\Phi_{i+1,j}^{n-1}+\Phi_{i-1,j}^n+\Phi_{i+1,j}^n\right)\right),$$

avec $r=\frac{k}{h^2}$ et pour tout $i,j=1,2,...,M-1$.

3.3 Évaluation du paramètre de contrôle p(t)

Si $u(x,y,t)$ et $p(t)$ forment une solution pour (3.1) − (3.7), alors

$$E'(t)=u_{xx}(x_0,y_0,t)+u_{yy}(x_0,y_0,t)+p(t)E(t)+\Phi(x_0,y_0,t), \tag{3.17}$$

ce qui donne :

$$p(t)=\frac{E'(t)-u_{xx}(x_0,y_0,t)-u_{yy}(x_0,y_0,t)-\Phi(x_0,y_0,t)}{E(t)}, \tag{3.18}$$

La formule de différences finies est :

$$p^n=\frac{(E')^n-\left(\frac{1}{h^2}\right)\left(u^n_{k_0-1,l_0}-2u^n_{k_0,l_0}+u^n_{k_0+1,l_0}\right)-\left(\frac{1}{h^2}\right)\left(u^n_{k_0,l_0-1}-2u^n_{k_0,l_0}+u^n_{k_0,l_0+1}\right)-\Phi^n_{k_0,l_0}}{E^n}, \tag{3.19}$$

En combinant cela avec les conditions de compatibilité, on obtient :

$$p^0=\frac{E'(0)-f_{xx}(x_0,y_0)-f_{yy}(x_0,y_0)-\Phi(x_0,y_0,0)}{f(x_0,y_0)}. \tag{3.20}$$

Ce p^0 et les valeurs de $u(x,y,t)$ au niveau $n=0$, données par la condition initiale, fournissent un point de départ pour le calcul.

Notons que la présence du terme de sur-spécification de température peut compliquer considérablement l'application des méthodes numériques standard. La précision de la technique utilisée pour évaluer le paramètre de contrôle doit être compatible avec celle de la discrétisation de l'équation de diffusion. Cela signifie que dans le cas d'utilisation d'une formule de différences finies de quatrième ordre, un ordre de précision plus élevé que celui utilisé pour les schèmes de différences finies précises au deuxième ordre est requis. Ainsi, dans ce cas, le schéma de quatrième ordre suivant est employé pour calculer $p(t)$ approximativement :

$$\begin{aligned} p^n &= \frac{1}{E^n}\Bigg((E')^n-\frac{1}{12h^2}\left(-u^n_{k_0-2,l_0}+16u^n_{k_0-1,l_0}-30u^n_{k_0,l_0}+16u^n_{k_0+1,l_0}-u^n_{k_0+2,l_0}\right)\\ &\quad -\frac{1}{12h^2}\left(-u^n_{k_0,l_0-2}+16u^n_{k_0,l_0-1}-30u^n_{k_0,l_0}+16u^n_{k_0,l_0+1}-u^n_{k_0,l_0+2}\right)-\Phi^n_{k_0,l_0}\Bigg). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Puisque pour le calcul pratique, la taille du pas de temps est petite, il est raisonnable de supposer que p^{n+1} n'est pas éloigné de p^n. Ainsi, un bon choix de l'estimation initiale pour p^{n+1}, désigné par $p^{n+1(0)}$, pour $n=0,1,2,...,N$, est désiré.

Le remplacement de p^n et $p^{n+1(0)}$ dans la formule d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson compacte , rend les systèmes linéaires connexes prêts pour la solution.

En résolvant ces systèmes linéaires, nous obtenons $u^{n+1(0)}_{i,j}$, $i,j=1,2,...,M-1$, correspondant à $p^{n+1(0)}$. Nous utilisons $p^{n+1(l)}$ pour désigner $l-ième$ pour $p(t)$ au niveau $n+1$ et $u^{n+1(l)}_{i,j}$ pour signifier les valeurs correspondantes obtenues en utilisant $p^{n+1(l)}$, $n=0,1,...,N-1, l=0,1,....$

Pour les corrections, nous utilisons (3.19) pour générer $p^{n+1(l+1)}$ de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
p^{n+1(l+1)} &= \frac{1}{E^{n+1}}\Bigg((E')^{n+1} - \left(\frac{1}{h^2}\right)\left(u^{n+1(l)}_{k_0-1,l_0} - 2u^{n+1(l)}_{k_0,l_0} + u^{n+1(l)}_{k_0+1,l_0}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{h^2}\right)\left(u^{n+1(l)}_{k_0,l_0-1} - 2u^{n+1(l)}_{k_0,l_0} + u^{n+1(l)}_{k_0,l_0+1}\right) - \Phi^{n+1}_{k_0,l_0}\Bigg), \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

pour $l = 0, 1, ...$

La formule suivante sera utilisée pour générer $p^{n+1(l+1)}$:

$$
\begin{aligned}
p^{n+1(l+1)} &= \frac{1}{E^{n+1}}\Bigg((E')^{n+1} - \frac{1}{12h^2}\left(-u^{n+1(l)}_{k_0-2,l_0} + 16u^{n+1(l)}_{k_0-1,l_0} - 30u^{n+1(l)}_{k_0,l_0} + 16u^{n+1(l)}_{k_0+1,l_0} - u^{n+1(l)}_{k_0+2,l_0}\right) \\
&\quad - \frac{1}{12h^2}\left(-u^{n+1(l)}_{k_0,l_0-2} + 16u^{n+1(l)}_{k_0,l_0-1} - 30u^{n+1(l)}_{k_0,l_0} + 16u^{n+1(l)}_{k_0,l_0+1} - u^{n+1(l)}_{k_0,l_0+2}\right) - \Phi^{n+1}_{k_0,l_0}\Bigg), \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

pour $l = 0, 1, ...$

Nous ajustons $p^{n+1(l)}$ de manière répétée jusqu'à ce qu'elle converge, c'est-à-dire satisfasse une tolérance prédéfinie. Ensuite, nous acceptons les valeurs correspondantes $u^{n+1(l)}_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, ..., M-1)$ et $p^{n+1(l)}$ comme $u^{n+1}_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, ..., M-1)$ et p^{n+1} respectivement. Cette stratégie permet de passer du niveau n au niveau $n+1$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons proposé deux schémas numériques pour résoudre deux problèmes inverses paraboliques : le premier problème avec des conditions aux limites non locales, et le deuxième avec des conditions de Dirichlet, chacun des problèmes ayant une condition sur-spécifiée définie en un point du domaine spatial.

Le premier schéma est celui d'Euler rétrograd compact. Il est d'ordre quatre en espace et d'ordre un en temps, Le deuxième schéma est celui de Crank-Nicolson compact et il est

du quatrième ordre en espace et deuxième ordre en temps.

La méthode de différence finie compacte donne des résultats numériques trés satisfaisants.

Malheureusement, nous n'avons pas pu réaliser la partie numérique des différences finies compactes en dimension 2 en raison de contraintes de temps. Nous souhaitons la continuation de ce travail par l'un des étudiants de l'année prochaine.

Bibliographie

[1] Cannon J.R., Liu Y., and Xu S., Numerical procedures for the determination of an unknown coefficient in semi-linear parabolic differential equations. Anal, Inverse Problems 10 (1994) 227-243.

[2] Cannon J.R., Lin Y., and Wang S., Determination of source parameter in parabolic equations. Meccanica 27(1992), 85–94.

[3] Cannon J.R., Lin Y., and Wang S., Determination of a control function in a parabolic partial differential equation, Research report, 89–10, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, 1989.

[4] Cui M.R., Convergence analysis of compact difference schemes for diffusion equation with nonlocal boundary conditions, Applied Mathematics and Computation, 260 (2015), 227-241.

[5] Daoud S.D., Determination of the source parameter in a heat equation with a non-local boundary condition, Journal of Computational and Applied Mathematics 221 (2008) 261–272.

[6] Davoodi F., Abbas Nejad A., Shahrezaee A., Maghrebi M.J., Control parameter estimation in a semi-linear parabolic inverse problem using a high accurate method, Applied Mathematics and Computation 218 (2011), 1798–1804.

[7] Dehghan M., An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation, Appl. Math. Model. 25 (2001) 743-754.

[8] Dehghan M., New Schemes for a Two-dimensional Inverse Problem with Temperature Overspecification, Mathematical Problems in Engineering · 75 (2001) 283–297.

[9] Dehghan M., Implicit Solution of a Two-Dimensional Parabolic Inverse Problem with Temperature Overspecification, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 3, No. 4, October 2001.

[10] Dehghan M., Tatari M., Solution of a semilinear parabolic equation with an unknown control function using the decomposition procedure of Adomian, Numerical Methods for Partial Differential Equations 23 (2007), 499-510.

[11] Goncalvès E., Resolution numériques, Discretisation des EDP et EDO, Institut Polytechnique de Grenoble, (2005).

[12] Huntul M.J., Abbas M., and Baleanu D., An inverse problem of reconstructing the time dependent coefficient in a one-dimensional hyperbolic equation, Advances in Difference Equations (2021) 2021 : 452.

[13] Kebaili N., Détermination d'un paramètre source dans un problème inverse avec des condition aux limites non locales, Mémoire de Master sous la direction : Dr.Dehilis S.,Université Oum El Bouaghi (2023).

[14] Liu Y., Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions, Journal of Computational and Applied Mathematics 110 (1999), 115-127.

[15] MacBain J.A., and Bendar J.B., Existence and uniqueness properties for one-dimensional magnetotelluric inversion problem, Journal of Mathematical Physics 27(1986), 645–649.

[16] MacBain J.A., Inversion theory for a parametrized diffusion problem, SIAM Journal of Applied Mathematics, 18 (1987), 1386–1391.

[17] Prilepko A.I., and Orlovskii D.G., Determination of the evolution parameter of an equation and inverse problems of mathematical physics, I and II. J. Differential Equations 21(1)(1985), 119–129.

[18] Prilepko A.I., and Soloev V.V., Solvability of the inverse boundary value problem of finding a coefficient of a lower order term in a parabolic equation, J. Differential Equations 23(1)(1987), 136–143.

[19] Saadatmandi A., Dehghan M., and Campo A., The Legendre-tau technique for the determination of a source parameter in a semilinear parabolic equation, Mathematical problems in engineering 2006 (2006), Pages 1-11.

[20] Shakeri F., and Dehghan M., Inverse problem of diffusion equation by He's homotopy perturbation method, PHYSICA SCRIPTA. 75 (2007) 551–556.

[21] Wang S., Numerical solutions of two inverse problems for identifying control parameters in 2-dimensional parabolic partial differential equations. Modern Developments in Numerical Simulation of Flow and Heat Transfer 194(1992), 11–16.

[22] Wang S., and Lin Y., A finite difference solution to an inverse problem determining a control function in parabolic partial differential equations, Inverse Problems, 5(1989), 631–640.