République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES DE PERTURBATION SINGULIERE ELLIPTIQUES

Présenté par : Derouiche Djamila

Sous la direction de : Merazga Nabil

JURY

Président	KECHKAR Nasserdine	MCA	Université d'Oum El Bouaghi
Encadreur	MERAZGA Nabil	Prof.	Université d'Oum El Bouaghi
Examinateurs	HADJOU Brahim	MCA	Université d'Oum El Bouaghi
	SENGOUGA Abdelmouhcene	MCB	Université de M'sila

Date de soutenance : 20 juin 2013

2012/2013

Remerciement

*Je tiens à exprimer mes grands remerciements à *الله* tout puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a donné durant ces* années d'études.

Mes *remerciements s'adressent à mes parents pour leurs efforts, leur suivi et leur patient durant toutes mes années* d'études.

Je remercie en particulier mon encadreur M. Merazga pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité, j'ai eu l'honneur de travailler sous sa direction.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury pour avoir bien voulu accepter de juger ce travail.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce mini projet.

Table des matières

Résumé

Ce mémoire est consacré à quelques problèmes de perturbation singulière elliptiques. On s'intéresse au comportement asymptotique de la solution de ces problèmes en liaison avec deux types de perturbation : isotrope et anisotrope.

Pour le premier type, on établit des résultats de convergence dans différentes normes pour la solution d'un problème lié à l'opérateur de divergence.

Pour le second, on considère un problème de Dirichlet et un problème mêlé Dirichlet-Neumann liés tous les deux à l'opérateur de divergence singulièrement perturbé dans quelques directions (et pas toutes). Là aussi, on établit certains résultats de convergence tout en précisant l'ordre dans le cas de domaines cylindriques.

Mots clef : problème elliptique, perturbation singulière, isotrope, anisotrope, comportement asymptotique.

Abstract

This dissertation is devoted to some results on a class of singular perturbations for elliptic problems. We study the asymptotic behavior of solutions of these problems for two types of perturbation : isotropic and anisotropic.

For the first type, we establish some convergence results of solution in different norms when our problem is in the divergence form.

For the second one, we present two boundary value problems in the divergence form : Dirichlet and mixed Dirichlet-Neumann, where the perturbation affects some and not all directions of the domain variables. Some convergence results are presented and the rate of convergence is given in cylindrical domains.

Key words : elliptic problems, singular perturbation, isotropic, anisotropic, asymptotic behavior.

Introduction

Dans de nombreuses situations physiques, on est amené à considérer des problèmes (P_ε) où intervient un petit paramètre noté ε, dont la présence signifie que des phénomènes peuvent être négligeables par rapport à d'autres. Supposons que l'on est capable de résoudre le problème (P_ε), on espère en déduire des informations sur l'éventuelle solution de (P_0) pour des valeurs de ε voisines de 0. Si $u_\varepsilon(x)$ est la solution supposée unique de (P_ε) de variable indépendante x, existe-t-il une solution $u_0(x)$ de (P_0) qui soit proche de $u_\varepsilon(x)$ pour ε proche de 0 ? Si oui, cette approximation peut-elle avoir lieu pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $u_\varepsilon(x)$ est définie ?

Pour ε proche de 0, on dit que le problème (P_ε) est une perturbation du problème (P_0), ce dernier est appelé *problème limite* ou *réduit* ou encore *non perturbé.*

Dans la théorie de perturbation, la question principale qui concerne ces problèmes est le *comportement asymptotique de la solution* $u_\varepsilon(x)$: y a-t-il convergence de $u_\varepsilon(x)$ vers la solution du problème réduit ? et dans quel espace ? et avec quel ordre de convergence en ε ?

Si pour une certaine norme $\|\cdot\|$, les solutions de (P_ε) et (P_0) sont telles que

$$\|u_\varepsilon - u_0\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

on est alors confronté à un problème de *perturbation régulière* par rapport à cette norme, sinon la perturbation est dite *singulière* par rapport à cette même norme. Examinons le cas simple du problème perturbé

$$\begin{cases} \varepsilon u'_\varepsilon + u_\varepsilon = 1, & 0 < x < 1, \\ u_\varepsilon(0) = a, & a = \text{constante réelle.} \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de perturbation singulière par rapport à la norme uniforme

$$\|u\|_\infty = \sup_{1 \le x \le 1} |u(x)|,$$

si $a \neq 1$. En effet, comme la solution du problème réduit

$$\begin{cases} u_0 = 1, & x > 0 \\ u_0(0) = a, & \end{cases}$$

ne vérifie la condition initiale que si $a = 1$, alors si $a \neq 1$, la solution exacte du problème perturbé

$$u_\varepsilon(x) = 1 + (a-1)e^{\frac{-x}{\varepsilon}}, \qquad x \geq 0$$

ne converge pas uniformément vers la solution du problème réduit quand $\varepsilon \to 0$ puisqu'elle tend vers la fonction discontinue valant a en $x = 0$ et 1 pour $x > 0$. Cette "cassure" se voit généralement sur de trés petits intervalles de la variable indépendante x. Ces intervalles sont appelés *couches limites* ou *libres* selon qu'ils se trouvent aux limites de l'intervalle de définition de la solution du problème réduit ou à l'intérieur.
Plus généralement, la présence d'un petit paramètre ε devant la dérivée du plus grand ordre d'une équation différentielle est un signe probable de perturbation singulière. En posant $\varepsilon = 0$, on perd au moins un ordre de dérivation et la définition du problème réduit devient parfois ambigüe vis-à-vis de la condition initiale ou aux limites.
Les problèmes de perturbations surviennent naturellement des autres branches de la science : le petit paramètre ε intervient alors dans les équations du modèle et représente par exemple un coefficient de diffusion, un coefficient de viscosité, une faible masse, un moment d'inertie, etc..., auquel cas on cherche à comparer la solution du problème en question avec celle du problème réduit qui correspond (au moins formellement) à la valeur nulle de ce paramètre. A titre d'exemple, dans l'étude des transitions de phase des alliages binaires tels que les polymères, verres, etc, apparait l'équation d'évolution non linéaire de Cahn-Hilliard

$$\partial_t u_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon = \Delta \phi(u_\varepsilon),$$

où ε est un petit paramètre (Cf. [9]). Mais il faut noter que les problèmes de perturbations peuvent aussi apparaître indirectement dans un contexte totalement opposé comme un "outil de démonstration" ; ce sont les méthodes dites de "régularisation" ou de " viscosité artificielle" qui consistent à renforcer la régularité de l'équation en ajoutant un terme plus régulier affecté d'un "petit" coefficient. Plus précisément, si on est concerné par la résolution d'un problème aux limites lié à un opérateur $L(x, \partial_x)$ on construit une famille d'opérateurs $L(x, \partial_x; \varepsilon)$ plus facile à étudier et tels que $L(x, \partial_x; 0) = L(x, \partial_x)$, puis on essaye de passer à la limite en $\varepsilon \to 0$. Signalons, enfin que si le paramètre de perturbation ε affete toutes les directions de la variable d'espace, on parle alors de *perturbation isotrope,* sinon, si ε agit dans certaines directions et pas toutes, la perturbation est dite *anisotrope.*
Ce mémoire est consacré à l'analyse de quelques problèmes de perturbation singulière elliptiques. On s'intéresse au comportement asymptotique de la solution de ces problèmes en liaison avec deux types de perturbation : isotrope et anisotrope.
Au chapitre 1, on passe succinctement en revue quelques notions et résultats concernant les espaces fonctionnels où se déroulera l'étude des problèmes envisagés.
L'objet principal du chapitre 2 consiste à établir des résultats de convergence dans différentes normes pour la solution du problème de perturbation singulière isotrope

$$\begin{cases} -\varepsilon \operatorname{div}(A\nabla u_\varepsilon) + qu_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

en s'inspirant des techniques utilisées dans [4] pour l'étude du comportement asymptotique des solutions du problème modèle

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Dans le chapitre 3, on expose de façon "très détaillée" le travail pilote "très condensé" [5] de S. Guesmia & M. Chipot, et voué à une classe de problèmes elliptiques aux limites de Dirichlet sous forme divergentielle avec perturbation singulière anisotrope. Dans la section 3.1, sont présentés des résultats de convergence par rapport à différentes topologies et l'ordre de convergence en puissances de ε est précisé dans le cas de domaines cylindriques $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$. Il va sans dire que le développement des résultats abrégés et la justification des différents passages a nécessité un effort de réflexion laborieux et le recours à un tas de connaissances surtout en théorie des espaces de Lebesgue et de Sobolev. Dans la section 3.2, on a obtenu un petit prolongement des résultats de la section 3.1 pour un problème lié à la même équation avec une condition de Neumann au bord latéral $\partial\omega_1 \times \omega_2$ de l'ouvert cylindrique Ω.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce premier chapitre a pour but de rappeler un certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans la suite du mémoire. Les lecteurs désireux d'approfondir ces résultats pourront aussi consulter : H. Brezis [2], G. Allaire [1], D. Gilbarg, N.S. Truginger [7], A. Munnier [8], M. Chipot [3] et [4], etc ...

1.1 Convergence faible, compacité faible

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique.

Définition 1.1.1 *Soient $(x_n)_n$ une suite de E et $x \in E$. On dit que (x_n) converge faiblement dans E vers x, ce qu'on note $x_n \rightharpoonup x$, si :*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \qquad \forall f \in E'$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre E' et E.

Dans un espace de Hilbert H de produit scalaire $(.,.)_H$, la converge faible de (x_n) vers x est caractérisée par

$$(x_n, y) \to (x, y), \qquad \forall y \in H.$$

Le théorème suivant présente un résultat très important concernant les espaces de Banach réflexifs.

Théorème 1.1.1 (Résultat de compacité faible) *Si E est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet une sous-suite faiblement convergente.*

Remarque 1.1.1 Le théorème 1.1.1 exprime un résultat de compacité faible. Il est quelque fois énoncé sous la forme suivante :
"La boule unité fermée d'un espace de Banach réflexif est faiblement compacte".

Remarque 1.1.2 Dans les applications, on rencontre fréquemment la situation suivante :
Sur la base d'une *estimation* obtenue pour une suite $(x_n)_n$ d'un espace de Banach réflexif E :

$$\|x_n\|_E \leq C < +\infty, \qquad \forall n,$$

on déduit, grâce au théorème 1.1.1, qu'il est possible d'extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{n'})_{n'}$ qui converge faiblement vers x dans E.
Supposons qu'il soit possible de montrer que la limite x est indépendante de la sous-suite

extraite, par exemple parce que l'on sait à l'avance que x est l'unique solution d'un certain problème. Alors toute la suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, comme le montre la

Proposition 1.1.1 *Soient E un espace de Banach réflexif, $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E et $x \in E$. On suppose que*
i) $\|x_n\|_E \leq C < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ii) Toute sous-suite faiblement convergente de $(x_n)_n$ a pour limite x.
Alors la suite $(x_n)_n$ toute entière converge faiblement vers x dans E.

Démonstration. Supposons que la suite (x_n) ne converge pas faiblement vers x. Alors il est possible de trouver $\varepsilon > 0,\ f \in E'$ et une sous-suite de (x_n) soit (x_m) telle que

$$|\langle f,\ x_m - x\rangle| > \varepsilon \geq 0 \qquad \text{pour tout } m. \tag{1.1}$$

Mais (x_m) est une suite bornée de E et, d'après le théorème 1.1.1, il existe alors une sous-suite $(x_{m'})$ de (x_m) qui converge faiblement vers un certain élément de E qui ne peut être que x par hypothèse, i.e.

$$\lim_{m' \longrightarrow \infty} \langle f,\ x_{m'} - x\rangle = 0 \qquad \text{pour tout } f \in E',$$

ce qui contredit (1.1). ■

Définition 1.1.2 *Soit H un espace préhilbertien de produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$ dont la norme associée est notée $|\cdot|_H$. On appelle base hilbertienne de H une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de H telle que :*
(i) $|e_i|_H = 1 \quad \forall i \in I,\ (e_i, e_j)_H = 0 \quad \forall i,j \in I,\ i \neq j$,
(ii) l'espace vectoriel engendré par les e_i est dense dans H.

Théorème 1.1.2 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

1.2 Espaces L^p

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$.

Définition 1.2.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$. On note $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables de $p^{\text{ième}}$ puissance Lebesgue-intégrable sur Ω. La norme de $L^p(\Omega)$ est*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω, i.e.

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \ \exists C > 0, \text{ telle que } |f(x)| \leq C \quad p.p.\ x \in \Omega \}.$$

La norme de $L^\infty(\Omega)$ est

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_\Omega \mathrm{ess} |f| := \inf\{ C \geq 0 \mid \ |f(x)| \leq C \ \ p.p.\ x \in \Omega \}.$$

Théorème 1.2.1 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

Rappelons maintenant quelques résultats d'intégration et quelques inégalités qu'il faut absolument connaître.

Proposition 1.2.1 (Inégalité de Hölder) *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^P(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.2}$$

La démonstration de l'inégalité de Hölder (1.2) repose sur l'inégalité dite de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.3}$$

laquelle est valable pour tous nombres réels positifs a, b, p, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2.2 (de Fubini) *On suppose que* $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *où* Ω_1 *et* Ω_2 *sont deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$ *respectivement.*
Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2) \quad et \quad \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)dy \in L^1(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$f(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1) \quad et \quad \int\limits_{\Omega_1} f(x, y)dx \in L^1(\Omega_2).$$

De plus, on a :

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} f(x, y)dx = \iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)dxdy.$$

On fera un usage répété de la réciproque partielle du théorème de convergence dominée.

Théorème 1.2.3 *Soient* $p \in [1, +\infty]$, $(f_n)_n$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$, *tels que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$.
Alors, il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_k$ *telle que*

- $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p. sur* Ω
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ *et p.p. sur* Ω, *pour une certaine fonction* $h \in L^p(\Omega)$.

Remarque 1.2.1 L'extraction d'une sous-suite est obligatoire dans ce théorème. Ce résultat moins connu que le théorème direct, mais très utile, est un sous-produit de la démonstration usuelle de la complétude de $L^p(\Omega)$.

Le cas $p = 2$ revêt une importance particulière à cause de la structure hilbertienne de $L^2(\Omega)$. En effet, il est aisé de voir que

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx, \qquad f, g \in L^2(\Omega), \tag{1.4}$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ dont la norme associée est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Ainsi, d'après le théorème 1.2.1, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (1.4). Dans ce cas, l'inégalité de Hölder (1.2) s'écrit :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall f,\ g \in L^2(\Omega), \tag{1.6}$$

et est connue sous le nom de "*inégalité de Cauchy-Schwarz*".

De même l'inégalité de Young (1.3) se réduit à l'inégalité suivante dite aussi "*inégalité de Cauchy*"

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \qquad \forall a, b \geq 0. \tag{1.7}$$

Dans le chapitre 3, on utilisera de façon répétée l'inégalité :

$$ab \leq \frac{\theta}{2} a^2 + \frac{1}{2\theta} b^2, \qquad \forall a, b \geq 0,\ \forall \theta > 0, \tag{1.8}$$

obtenue de l'inégalité (1.7) en remplaçant a et b par $\sqrt{\theta} a$ et $\frac{b}{\sqrt{\theta}}$ respectivement.

Définition 1.2.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ si $f 1_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.*

Ici, 1_K désigne la fonction indicatrice de K, i.e.

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega) \ ; \ f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus K \text{ où } K \text{ est un compact} \}.$$

On a alors le

Lemme 1.2.1 *Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega fudx = 0, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors $f = 0$ p.p. dans Ω.

1.3 Espaces de Sobolev d'ordre 1

Les espaces de Sobolev constituent un cadre fonctionnel naturel et bien adapté pour l'analyse des équations aux dérivées partielles. Dans ce qui suit, nous rappelerons quelques résultats s'y rapportant en se limitant au cas des espaces d'ordre 1. Commençons par quelques notions élémentaires de la théorie des distributions.

1.3.1 Introduction aux distributions

Pour tout multi-entier $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et on désigne par D^α la dérivée partielle

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dans la pratique des équations aux dérivées partielles, il n'est pas nécessaire de maîtriser totalement les détails de la topologie naturelle de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (la topologie limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet). Il suffit d'en connaître les suites convergentes.

Définition 1.3.1 *Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dira que*

$$\varphi_j \to \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}(\Omega), \text{ lorsque } j \to +\infty$$

si les φ_j et φ ont toutes leur support contenu dans un compact $K \subset \Omega$ et si

$$D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi \quad \text{uniformément dans } K, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Définition 1.3.2 *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour toute suite $(\varphi_j)_j$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\lim_{j\to+\infty} T(\varphi_j) = T(\varphi).$$

$T(\varphi)$ sera noté $\langle T, \varphi\rangle$ et l'espace des distributions sur Ω par $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Observons, à titre d'exemple, que si $T \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_\Omega T(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

définit une distribution sur Ω. Ceci découle de ce que

$$\left|\left\langle T, \varphi_j - \varphi\right\rangle\right| = \left|\int_\Omega T(x)\left(\varphi_j(x) - \varphi(x)\right)dx\right| \le \sup_{x\in K}\left|\varphi_j(x) - \varphi(x)\right| \int_K |T(x)|\,dx \longrightarrow 0.$$

Définition 1.3.3 *Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Alors, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ l'application*

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$$

définit une distribution sur Ω que l'on note $D^\alpha T$. Ainsi, on a

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La convergence d'une suite de distributions dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ s'exprime de façon simple.

Définition 1.3.4 *Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que*

$$T_j \longrightarrow T \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

si

$$\lim_{j\to+\infty}\langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, les fonctions de $L^p(\Omega)$ sont des distributions sur Ω. De plus, en observant que la convergence faible dans $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ d'une suite $(T_j)_j$ vers une fonction T s'exprime par

$$\int_\Omega T_j \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega T \varphi dx, \qquad \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et que $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, il s'ensuit que

Proposition 1.3.1 *Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $T \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Supposons que*

$$T_j \rightharpoonup T \qquad \textit{dans } L^p(\Omega).$$

Alors,

$$T_j \longrightarrow T \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

On a aussi la

Proposition 1.3.2 *L'opérateur de dérivation D^α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, est continu sur $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e.,*

$$T_j \longrightarrow T \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Longrightarrow D^\alpha T_j \longrightarrow D^\alpha T \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ceci découle immédiatement du fait que

$$\langle D^\alpha T_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_j, D^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle,$$

puisque $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Terminons cette sous-section par la notion de "*partition de l'unité*" dont l'objectif est de construire des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact permettant d'obtenir des propriétés globales de fonctions où de distributions en étudiant leurs propriétés locales.

Définition 1.3.5 *Soit $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de Ω. On appelle partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^\infty$ subordonnée à $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, une famille de fonctions $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telles que :*
(i) $\forall i \in \mathbb{N},\ \psi_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \psi_i \geq 0,\ supp\psi_i \subset U_i$,
(ii) Sur tout compact de Ω, seul un nombre fini de ψ_i ne sont pas identiquement nulles.
(iii) $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \psi_i(x) = 1,\ \forall x \in \Omega$.

Théorème 1.3.1 *Il existe toujours une partition de l'unité subordonnée à $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

1.3.2 Espaces $W^{1,p}$

Définition 1.3.6 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid\ \partial_{x_i} u \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1, ..., n\}$$

où $\partial_{x_i} u$ désigne la dérivée partielle de u dans la direction x_i au sens des distributions.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.9}$$

pour $p \in [1, +\infty[$, et

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{1.10}$$

pour $p = +\infty$.

Proposition 1.3.3 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

Pour établir un résultat de régularité dans le chapitre 3, on a besoin de deux lemmes. Introduisons d'abord la

Définition 1.3.7 *Soit v une fonction réelle définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et soit e_i $(i = 1, ..., n)$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit le quotient différentiel de v en x dans la* *direction* e_i *par*

$$D_h^i v(x) = \frac{v(x + he_i) - v(x)}{h}, \qquad h \neq 0. \tag{1.11}$$

Lemme 1.3.1 *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. *Alors pour tout* $i = 1, ..., n$, $D_i^h u \in L^p(\Omega')$ *pour tout* $\Omega' \subset\subset \Omega$[1] *satisfaisant* $0 < h < \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$[2], *et l'on a :*

$$\left\| D_i^h u \right\|_{L^p(\Omega')} \leq \left\| \partial_{x_i} u \right\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.12}$$

Lemme 1.3.2 *Soit* $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Supposons qu'il existe une constante* C *telle que* $D_i^h u \in L^p(\Omega')$ *et* $\left\| D_i^h u \right\|_{L^p(\Omega')} \leq C$ *pour tout* $h > 0$ *et* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *où* $h < \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.
Alors la dérivée $\partial_{x_i} u \in L^p(\Omega)$ *et satisfait*

$$\left\| \partial_{x_i} u \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C. \tag{1.13}$$

1.3.3 Espace H^1

Dans le cas $p = 2$, on note

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \ \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n \right\}.$$

La norme de $H^1(\Omega)$ donnée par (1.9) :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \partial_{x_i} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

provient du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}. \tag{1.15}$$

[1] i.e. $\overline{\Omega'}$ est un compact inclus dans Ω.
[2] Noter que si $x \in \Omega'$ et $0 < h <$dist$(\Omega', \partial\Omega)$ alors $x + he_i \in \Omega$ et $v(x + he_i)$ a un sens.

Proposition 1.3.4 *Muni du produit scalaire (1.15), $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

En général, les fonctions de $H^1(\Omega)$ pour $n \geq 2$ ne sont pas continues. Comme pour toute fonction mesurable, on ne peut donc parler de la valeur ponctuelle d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ que *"presque partout"*. En particulier, il n'est pas possible de parler de *"la valeur au bord"*, ou *"trace"* de $v \in H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$ au sens usuel vu que $\partial\Omega$ est un ensemble négligeable ou de mesure nulle. Fort heureusement pour les problèmes aux limites que nous étudions, il y a tout de même un moyen pour définir la trace $v\mid_{\partial\Omega}$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Ce résultat essentiel, appelé théorème de trace, est le suivant.

Théorème 1.3.2 (de trace) *Etant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ régulier, il existe un opérateur linéaire continu appelé opérateur trace et noté γ_0, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues.*

Grâce à ce théorème, on peut parler da la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$, et énoncer la formule d'intégration par parties

Théorème 1.3.3 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ lipschitzien. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_i} u)\, v \; dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)\nu_i \; ds - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} v dx, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{1.16}$$

où ν_i est la $i^{ème}$ composante du vecteur normal ν à la frontière $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω.

Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, il n'est pas vrai que de toute suite bornée, on puisse extraire une sous-suite convergente. Toutefois, on a le

Théorème 1.3.4 (de Rellich) *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$H^1(\Omega) \underset{compacte}{\hookrightarrow} L^2(\Omega),$$

i.e. tout ensemble borné de $H^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Il revient au même de dire que toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$.

Espace $H_0^1(\Omega)$.

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.3.8 *L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$ est noté $H^{-1}(\Omega)$.*

Remarque 1.3.1 Etant un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire induit par celui de $H^1(\Omega)$.

Etant donné un vecteur unitaire ν dans $\mathbb{R}^n$, si $v \in C^1(\Omega)$ alors la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h\nu)-v(x)}{h}$$

existe et est appelée dérivée de v dans la direction ν. Notons-la $\frac{\partial v}{\partial \nu}$. On peut montrer que

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu \tag{1.17}$$

où " $\cdot$ " désigne le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$. Il faut noter que, si $v \in H^1(\Omega)$, l'égalité (1.17) définit une fonction $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ laquelle est dans $L^2(\Omega)$. Maintenant, on peut établir l'inégalité suivante pour les éléments de $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.5 (Inégalité de Poincaré) *Soit ν un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $d > 0$. Supposons que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace, plus précisement*

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ |x \cdot \nu| \leq d\}.$$

Alors, on a

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.18}$$

où $C_\Omega = \sqrt{2}d$ est appelée constante de Poincaré associée à Ω.

Démonstration. Comme par définition, on peut approcher tout élément de $H_0^1(\Omega)$ au sens de $H^1(\Omega)$, par une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, il suffit d'établir l'inégalité (1.18) pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ puis d'étendre le résultat par densité. Considérons alors $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ que nous prolongeons à $\mathbb{R}^n$ tout entier par 0 en dehors de Ω. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que le système de coordonnées est choisi de sorte que $\nu = e_1$, ce qui signifie que Ω est contenu dans la bande

$$\{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n \mid -d \leq x_1 \leq d\}.$$

Pour $x \in \Omega$, on peut alors écrire

$$v(x) = v(x) - v(-d, x') = \int_{-d}^{x_1} \partial_{x_1} v(s, x') ds,$$

d'où par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
|v(x)|^2 &= \left| \int_{-d}^{x_1} \partial_{x_1} v(s, x') ds \right|^2 \\
&\leq \left(\int_{-d}^{x_1} |\partial_{x_1} v(s, x')| \, ds \right)^2 \\
&\leq (x_1 + d) \int_{-d}^{x_1} |\partial_{x_1} v(s, x')|^2 \, ds \\
&\leq (x_1 + d) \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_{x_1} v(s, x')|^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Intégrant sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x_1, x')|^2 \, dx' \leq (x_1 + d) \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1} v(x)|^2 \, dx,$$

puis intégrant dans la direction x_1, il vient

$$\int_{-d}^{d} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x_1, x')|^2 \, dx' dx_1 \leq \int_{-d}^{d} (x_1 + d) \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1} v(x)|^2 \, dx' dx_1,$$

d'où enfin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2 \, dx &\leq \left. \frac{(x_1 + d)^2}{2} \right|_{-d}^{d} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1} v(x)|^2 \, dx \\ &= 2d^2 \int_{\Omega} |\partial_{x_1} v(x)|^2 \, dx \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité cherchée. ■

Un corollaire important de l'inégalité de Poincaré est

Corollaire 1.3.1 *Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est borné dans au moins une direction de l'espace, alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.19}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Comme conséquence du théorème de trace 1.3.2, on peut caractériser l'espace $H_0^1(\Omega)$ d'une manière explicite.

Corollaire 1.3.2 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert assez régulier, alors :*

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \ker \gamma_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \ \gamma_0 v = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \ v = 0 \textit{ sur } \partial\Omega \textit{ (au sens des traces)} \right\}. \end{aligned}$$

Espace $H_0^1(\Omega; \Gamma_1)$.

Mentionnons un autre sous-espace intéressant de $H^1(\Omega)$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert régulier dont la frontière $\partial\Omega$ se décompose en deux parties disjointes régulière Γ_1 et Γ_2 telles que

$$|\Gamma_1| > 0,$$

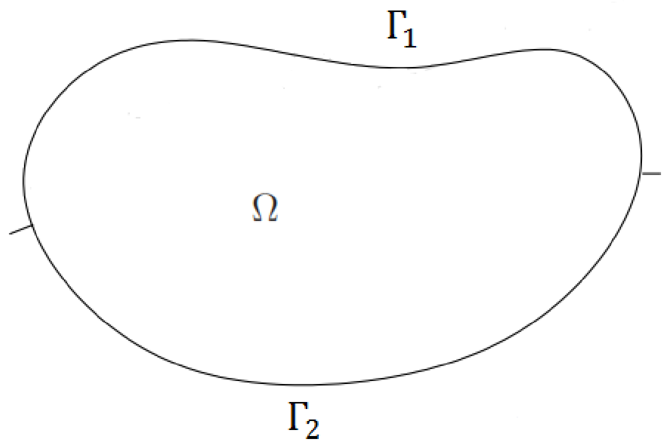


FIG. 1-1 – Partition en deux parties disjointes de la frontière d'un ouvert

où $|\cdot|$ dénote la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.
On définit l'espace $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ par

$$H_0^1(\Omega;\Gamma_1) = \text{Adhérence de } C_0^1(\overline{\Omega};\ \Gamma_1) \text{ dans } H^1(\Omega),$$

où

$$C_0^1(\overline{\Omega};\Gamma_1) = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega});\ \ v|_{\Gamma_1} = 0\right\}.$$

$H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$. C'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire (1.15).

Remarque 1.3.2 A l'instar de l'espace $H_0^1(\Omega)$, on peut montrer que $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ est le noyau de l'application linéaire

$$\widetilde{\gamma_0} : v \longmapsto v|_{\Gamma_1} = \gamma_0 v|_{\Gamma_1}$$

définie de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$, i.e.

$$H_0^1(\Omega;\Gamma_1) = \left\{v \in H^1(\Omega);\ \ v|_{\Gamma_1} = 0 \text{ (au sens des traces)}\right\}. \tag{1.20}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré demeure valide dans $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$.

Théorème 1.3.6 *Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné régulier. Il existe un constante $C_\Omega > 0$ telle que :*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega;\Gamma_1). \tag{1.21}$$

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité (1.21) soit vérifiée. Alors, on pourrait trouver une suite $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ telle que

$$\|w_m\|_{L^2(\Omega)} > m \|\nabla w_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

En posant

$$v_m = \frac{w_m}{\|w_m\|_{L^2(\Omega)}},$$

on obtient une suite $(v_m)_m$ de fonctions de $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ telle que

$$\|v_m\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{m}, \tag{1.22}$$

ce qui entraîne que

$$\|v_m\|_{H^1(\Omega)} < \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

Ainsi, la suite $(v_m)_m$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, et admet donc en raison de l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (théorème de Rellich 1.3.4), une sous suite $(v_{m'})_{m'}$ convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un élément v. De plus, (1.22) montre que $(\nabla v_{m'})_{m'}$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ (composante par composante). Ainsi, $(v_{m'})$ et $(\nabla v_{m'})$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, ce qui signifie que $(v_{m'})_{m'}$ est de Cauchy dans $\left(V, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ lequel est complet, et par conséquent est convergente dans $H_0^1(\Omega;\ \Gamma_1)$ vers v, avec

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{m'\to\infty} \|\nabla v_{m'}\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{m'\to\infty} \frac{1}{m'} = 0.$$

On en déduit que v est une constante en vertu de la connexité de Ω. L'appartenance de v à l'espace $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$ signifie que v est nulle sur Γ_1, par conséquent $v = 0$ dans Ω, ce qui est impossible puisque

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{m'\to\infty} \|v_{m'}\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Ceci achève la démonstration de l'inégalité (1.21). ■

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on a

Corollaire 1.3.3 *Sur l'espace $H_0^1(\Omega;\Gamma_1)$, les normes (1.19) et (1.14) sont équivalentes.*

Remarque 1.3.3 Considérons le cas spécial où Ω est cylindrique, i.e.

$$\Omega = \omega_1 \times \omega_2$$

où ω_1 et ω_2 sont deux domaines bornés de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivement, $1 < p < n$. En adaptant la démonstration du théorème 1.3.5, pour l'espace $H_0^1(\Omega;\omega_1 \times \partial\omega_2)$, on établit une inégalité plus fine que (1.21), à savoir

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\omega_2} \|\nabla_{X_2} v\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega;\omega_1 \times \partial\omega_2), \tag{1.23}$$

où $C_{\omega_2} > 0$ est une constante dépendant uniquement de ω_2, et

$$\nabla_{X_2} = \left(0, ..., 0, \partial_{x_{p+1}}, ..., \partial_{x_n}\right)^T.$$

En effet, en choisissant comme ν le vecteur unitaire normal à $\omega_1 \times \partial\omega_2$, i.e.

$$\nu = (\underbrace{0,\ .\ .\ .\ ,0}_{p \text{ composantes}},\ \underbrace{1,\ .\ .\ .\ ,1}_{n-p \text{ composantes}})^T,$$

on trouve

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu = \nabla_{X_2} v,$$

et on conclut avec l'inégalité (1.18).

1.4 Résolution d'une classe de problèmes elliptiques d'ordre deux

Rappelons un résultat fondamental dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques : le théorème de Lax-Milgram qui constitue un outil simple et efficace pour la résolution de ces équations.

Soit H un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(.,.)_H$ et de norme correspondante $\|\cdot\|_H$.

Notons H' le dual de H.

Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H, i.e., $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire telle que

$$\exists\, \beta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |a(u,v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H \qquad \forall u, v \in H \quad \text{(continuité)} \tag{1.24}$$

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \qquad \forall v \in H \quad \text{(coercivité).} \tag{1.25}$$

On a alors le

Théorème 1.4.1 (de Lax-Milgram) *Sous les hypothèses (1.24)-(1.25), pour tout $f \in H'$, il existe un unique u solution du problème*

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H. \end{cases}$$

Appliquons ce théorème pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour une classe de problèmes elliptiques d'ordre deux et autour de laquelle s'articule notre travail dans les prochains chapitres.

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on considère une matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ et une fonction $q(x)$ définies sur Ω.

On suppose que la matrice A est *uniformément définie positive* sur Ω, i.e. qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$A(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \tag{1.26}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, et qu'elle est *uniformément bornée*, i.e. qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$|A(x)\xi| \leq \Lambda |\xi| \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{1.27}$$

Remarque 1.4.1 La condition (1.27) est équivalente à la suivante

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{1.28}$$

En effet,

$$\|A\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|A\xi|}{|\xi|} \tag{1.29}$$

est une norme sur l'espace des matrices équivalente à toute autre norme du moment que l'espace des matrices est de dimension finie. En particulier elle est équivalente à

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}| \tag{1.30}$$

d'où la conclusion.

On suppose de plus que

$$q \in L^\infty(\Omega), \qquad q \geq a > 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \tag{1.31}$$

pour une certaine constante a.

Proposition 1.4.1 *Supposons que les conditions (1.26), (1.27) et (1.31) sont vérifiées. Soit* V *un sous-espace fermé de* $H^1(\Omega)$ *et* $f \in V'$ *où* V' *désigne le dual de* V*. Alors, il existe un unique* u *solution du problème*

$$\begin{cases} u \in V, \\ \int\limits_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int\limits_\Omega q(x)uv dx = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.32}$$

Démonstration. Posons $a(u,v) = \int\limits_\Omega \{A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + q(x)uv\} dx$.

- $a(\cdot,\cdot)$ <u>est une forme bilinéaire continue sur V</u>.

La bilnéarité est claire. Pour la continuité, on remarque que pour tous $u, v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le \int\limits_\Omega \{|A(x)\nabla u \cdot \nabla v| + q(x)\,|uv|\} dx \\ &\le \int\limits_\Omega \{|A(x)\nabla u|\,|\nabla v| + q(x)\,|u|\,|v|\} dx \qquad \text{(Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^n) \\ &\le \int\limits_\Omega \left\{\Lambda\,|\nabla u|\,|\nabla v|\,dx + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\,|u|\,|v|\right\} dx \\ &\le \max\left\{\Lambda, \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\right\} \int\limits_\Omega \{|\nabla u|\,|\nabla v| + |u|\,|v|\} dx \\ &\le \max\left\{\Lambda, \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\right\} \left\{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right\} \\ &\le \max\left\{\Lambda, \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\right\} \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

- $a(\cdot,\cdot)$ <u>est coercive dans V</u>.

En effet

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int\limits_\Omega \left\{A(x)\nabla v \cdot \nabla v dx + q(x)v^2\right\} dx \\ &\ge \int\limits_\Omega \left\{\lambda\,|\nabla v|^2 + a v^2\right\} dx \\ &\ge \min\{\lambda, a\}\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Comme $f \in V'$, on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.32) en vertu du théorème de Lax-Milgram. ■

La proposition ci-dessus s'applique aussi bien pour $V = H_0^1(\Omega)$ que pour $V = H_0^1(\Omega, \Gamma_1)$ lesquels sont des sous-espaces fermés de $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.4.2 Supposons que les données du problème (1.32) sont suffisamment régulières ainsi que Ω.

- Dans le cas

$$V = H_0^1(\Omega), \quad f \in H^{-1}(\Omega),$$

le problème (1.32) s'interprète en termes de problème aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + qu = & f \quad \textit{dans } \Omega, \\ u = & 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Dans le cas

$$V = H_0^1(\Omega; \Gamma_1), \quad f \in L^2(\Omega),$$

le problème (1.32) s'interprète en termes de problème aux limites mêlé Dirichlet-Neumann :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + qu = & f \quad \textit{dans } \Omega, \\ u = & 0 \quad \textit{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = & 0 \quad \textit{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = A\nabla u \cdot \nu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \left(\partial_{x_j} u\right) \nu_i$$

désigne la dérivée conormale de u associée à l'opérateur

$$-\operatorname{div}(A\nabla \cdot) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} \left(a_{ij}(x) \partial_{x_j} \cdot\right),$$

et ν_i est la i^{ème} composante du vecteur normal ν à la frontière Γ_2 dirigé vers l'extérieur de Ω.

Chapitre 2

Problèmes de perturbation singulière Le cas isotrope

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement asymptotique de la solution d'un problème elliptique lié à l'opérateur de divergence dans le cas isotrope. On établira des théorèmes de convergence pour différentes normes.

2.1 Présentation du problème

Commençons par la description du problème auquel on s'interesse.

On suppose tout le long de ce chapitre, que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$. On dénote par $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice $n\times n$ qui vérifie les conditions suivantes

$$|A(x)\xi| \leq \Lambda\,|\xi| \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad \Lambda > 0, \tag{2.1}$$

$$A(x)\xi\cdot\xi \geq \lambda\,|\xi|^2 \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad \lambda > 0, \tag{2.2}$$

Etant donné $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, on considère le problème elliptique sous forme divergentielle suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\mathrm{div}(A\nabla u_\varepsilon) + qu_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $q(x)$est une fonction satisfaisant

$$q(x) \in L^\infty(\Omega), \qquad q(x) \geqslant a > 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \tag{2.4}$$

pour un certaine constante a.

En formulation faible, ce problème s'écrit comme suit

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ \varepsilon \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v dx + \int_\Omega q(x)u_\varepsilon v dx = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

D'après la proposition 1.4.1, le problème (2.5) admet une unique solution faible u_ε.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'étude du comportement de u_ε quand $\varepsilon \to 0$. En passant à la limite formellement, on peut s'attendre à ce que u_ε "converge" vers u_0 solution faible du problème $qu_0 = f$; u_0 étant dans un certain espace fonctionnel à préciser.

Bien entendu, cette convergence ne peut pas avoir lieu pour n'importe quelle topologie. Par exemple, si $f \notin H_0^1(\Omega)$ et q est régulière, alors il est impossible d'avoir $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2.2 Convergence dans $H^{-1}(\Omega)$

Etablissons d'abord ce premier résultat de convergence.

Théorème 2.2.1 *Supposons que les conditions (2.1), (2.2) et (2.4) ont lieu. Supposons de plus que*

$$q \in W^{1,\infty}(\Omega). \tag{2.6}$$

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, *alors*

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{q} f \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

Démonstration. Munissons $H_0^1(\Omega)$ de la norme (1.19) :

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'identité intégrale du problème (2.5) s'écrit

$$\varepsilon \int_\Omega A(x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \langle q u_\varepsilon, v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.7}$$

d'où, par utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|\langle f - qu_\varepsilon, v\rangle| &= \left|\int_\Omega A(x)\left(\varepsilon\nabla u_\varepsilon\right)\cdot\nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|A\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right|\left|\nabla v\right| dx \\
&\leq \Lambda\int_\Omega \left|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right|\left|\nabla v\right| dx \\
&\leq \Lambda\left\|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Divisant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ pour $v \in H_0^1(\Omega)$ avec $v \neq 0$ arbitraire, il vient

$$\frac{|\langle f - qu_\varepsilon, v\rangle|}{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}} \leqslant \Lambda\left\|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui donne, en prenant l'infimum

$$|f - qu_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{|\langle f - qu_\varepsilon, v\rangle|}{|v|_{H_0^1(\Omega)}} \leqslant \Lambda\left\|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Par ailleurs, prenant $v = \varepsilon u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ dans l'identité intégrale du problème (2.5), on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)dx + \varepsilon\int_\Omega q(x)u_\varepsilon^2 dx = \langle f, \varepsilon u_\varepsilon\rangle,$$

d'où, compte tenu des hypothèses (2.2) et (2.4),

$$\lambda\left\|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon a\left\|u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle f, \varepsilon u_\varepsilon\rangle, \tag{2.9}$$

par suite

$$\lambda\left\|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon a\left\|u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant |f|_{H^{-1}(\Omega)}\left\|\nabla\left(\varepsilon u_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Omettant le second terme du membre de gauche, on obtient

$$\|\nabla(\varepsilon u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda}|f|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Ceci montre que la suite $\varepsilon u_\varepsilon$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ (indépendamment de ε). Par conséquent, il existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans} \qquad H_0^1(\Omega), \tag{2.12}$$

pour une certaine sous-suite encore notée $(\varepsilon u_\varepsilon)$.
D'autre part, de (2.10) et (2.11), on tire

$$\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda a}|f|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

par suite

$$\|\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \varepsilon\left(\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda a}|f|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Ceci signifie que

$$\varepsilon u_\varepsilon \longrightarrow 0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega),$$

et par conséquent,

$$\varepsilon u_\varepsilon \longrightarrow 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme la convergence (2.12) entraîne la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on déduit que $v_0 = 0$ et par unicité de la limite, il s'ensuit que

$$\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

et cette convergence est valable pour la suite $(\varepsilon u_\varepsilon)$ toute entière en vertu de la proposition 1.1.1.

Ainsi, de (2.9), on obtient :

$$\|\nabla(\varepsilon u_\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda}\langle f, \varepsilon u_\varepsilon\rangle \longrightarrow 0,$$

ce qui implique, compte tenu de l'inégalité (2.8),

$$qu_\varepsilon \longrightarrow f \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega). \tag{2.13}$$

Pour en déduire que

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{q}f \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega),$$

il faut d'abord donner un sens à $\frac{1}{q}f$. Pour cela, on utilise l'hypothèse supplémentaire (2.6). On définit d'abord le produit de $f \in H^{-1}(\Omega)$ par une fonction $r \in W^{1,\infty}(\Omega)$ en posant :

$$\langle rf, v\rangle = \langle f, rv\rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci a bien un sens puisque $rv \in H_0^1(\Omega)$ si $v \in H_0^1(\Omega)$, et l'on a

$$\begin{aligned}
|\langle rf, v\rangle| &\leq |\langle f, rv\rangle| \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} |rv|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla(rv)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\nabla r + r\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\|v\nabla r\|_{L^2(\Omega)} + \|r\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\|\nabla r\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\|r\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla r\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&\leq |f|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\|r\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla r\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq (C_\Omega^2 + 1)^{1/2} \left(\|r\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla r\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)^{1/2} |f|_{H^{-1}(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

où C_Ω est la constante de Poincaré associée à l'ouvert Ω. D'où,

$$|\langle rf, v\rangle| \leq C' \, |v|_{H_0^1(\Omega)}\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où $C' = (C_\Omega^2+1)^{1/2} \left(\|r\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla r\|^2_{L^\infty(\Omega)} \right)^{1/2} |f|_{H^{-1}(\Omega)}$ avec $\|\nabla r\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\sum\limits_{i=1}^n \|\partial_{x_i} r\|^2_\infty \right)^{1/2}$.
Ceci signifie que rf est bien une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, i.e. $rf \in H^{-1}(\Omega)$.

D'autre part, on peut voir que la multiplication par $r \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est une application linéaire continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans lui-même. En effet, l'inégalité (2.14) s'écrit aussi

$$|\langle rf, v\rangle| \leq C'' \, |f|_{H^{-1}(\Omega)} \, |v|_{H_0^1(\Omega)}$$

où $C'' = (C_\Omega^2+1)^{1/2} \left(\|r\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla r\|^2_{L^\infty(\Omega)} \right)^{1/2}$, ce qui entraîne que

$$|rf|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'' \ \ |f|_{H^{-1}(\Omega)}\,,$$

et montre que l'application $f \mapsto rf$ est continue sur $H^{-1}(\Omega)$. Ceci joint à (2.13) donne

$$u_\varepsilon = \frac{1}{q}\left(qu_\varepsilon\right) \longrightarrow \frac{1}{q} f \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega),$$

du moment que les hypothèses (2.4) et (2.6) sur q assurent que

$$\frac{1}{\|q\|_{L^\infty(\Omega)}} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{a}$$

et donc $\dfrac{1}{q} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. ■
La convergence obtenue ci-dessus est une convergence très faible. Examinons la convergence dans $L^2(\Omega)$.

2.3 Convergence dans $L^2(\Omega)$

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.4), si* $f \in L^2(\Omega)$, *alors*

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{q} f \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Démonstration. Dans ce cas l'identité intégrale de (2.5) s'écrit

$$\varepsilon \int_\Omega A(x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx + \int_\Omega q(x) u_\varepsilon v dx = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Prenant $v = u_\varepsilon$, on obtient

$$\varepsilon \int_\Omega A(x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx + \int_\Omega q(x) u_\varepsilon^2 dx = \int_\Omega f u_\varepsilon dx, \tag{2.16}$$

d'où, en utilisant les hypothèses (2.2), (2.4) ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\lambda \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + a \int_\Omega u_\varepsilon^2 dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

i.e.

$$\lambda \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui entraîne d'abord

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{a} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.17}$$

puis

$$\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda a} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

soit

$$\left\|\sqrt{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda a}}\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.18}$$

L'estimation (2.17) signifie que u_ε est bornée dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de ε. Par conséquent, il existe $u_0 \in L^2(\Omega)$ et une sous-suite encore notée $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{2.19}$$

Montrons que

$$u_0 = \frac{f}{q}. \tag{2.20}$$

Compte tenu de (2.18) et de l'hypothèse (2.1), on peut écrire pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ moyennant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon\int_\Omega A(x)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v dx\right| &\leq \sqrt{\varepsilon}\int_\Omega\left|\sqrt{\varepsilon}A\nabla u_\varepsilon\right|\left|\nabla v\right|dx \\
&\leq \sqrt{\varepsilon}\Lambda\int_\Omega\left|\sqrt{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\right|\left|\nabla v\right|dx \\
&\leq \sqrt{\varepsilon}\Lambda\left\|\sqrt{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{\varepsilon}\frac{\Lambda}{\sqrt{\lambda a}}\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Par ailleurs, comme $qv \in L^2(\Omega)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il s'ensuit de (2.19)

$$\int_\Omega q u_\varepsilon v dx = \int_\Omega u_\varepsilon(qv)dx \longrightarrow \int_\Omega u_0(qv)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.22}$$

Ainsi, en passant à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans chaque terme de (2.15), on obtient moyennant (2.21) et (2.22)

$$\int_\Omega q u_0 v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

et donc, par densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega q u_0 v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in L^2(\Omega),$$

i.e.

$$q u_0 = f \qquad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

soit enfin

$$u_0 = \frac{f}{q} \qquad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Comme $u_0 = \dfrac{f}{q}$ est indépendante de la suite extraite de (u_ε), on déduit grâce à la proposition 1.1.1 que la convergence (2.19) a lieu pour la suite (u_ε) toute entière.

Reste à montrer que cette convergence est forte. Pour cela, on développe la quantité

$$I_\varepsilon = \varepsilon \int_\Omega A(x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx + \int_\Omega q \left(u_\varepsilon - \frac{f}{q} \right)^2 dx$$

en tenant compte de (2.15). On trouve

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \left(\varepsilon \int_\Omega A(x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx + \int_\Omega q u_\varepsilon^2 dx \right) - 2 \int_\Omega f u_\varepsilon dx + \int_\Omega \frac{f^2}{q} dx \\ &= - \int_\Omega f u_\varepsilon dx + \int_\Omega \frac{f^2}{q} dx \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, en vertu de (2.19) et (2.20). Or, moyennant les hypothèses (2.2) et (2.4), on a

$$\varepsilon \lambda \left\| \nabla u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \left\| u_\varepsilon - \frac{f}{q} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq I_\varepsilon,$$

ce qui donne grâce à (2.23)

$$\left\| u_\varepsilon - \frac{f}{q} \right\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

i.e.

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{f}{q} \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Ceci achève la démonstration. ■

2.4 Convergence dans $H_0^1(\Omega)$

Théorème 2.4.1 *Supposons que les conditions (2.1), (2.2), (2.4) et (2.6) ont lieu. Si* $f \in H_0^1(\Omega)$, *on a*

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{q} f \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On a déjà vu que les conditions (2.4) et (2.6) assurent que

$$\frac{1}{q} \in W^{1,\infty}(\Omega),$$

d'où,

$$\frac{1}{q} f \in H_0^1(\Omega) \quad \text{si} \quad f \in H_0^1(\Omega).$$

D'aprés le théorème 2.3.1

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{q} f \qquad \text{dans } L^2(\Omega),$$

et donc

$$u_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{q} f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

d'où, par continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\nabla u_\varepsilon \longrightarrow \nabla\left(\frac{1}{q}f\right) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.24}$$

D'autre part, l'identité intégrale dans le problème (2.5) s'écrit

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v dx = \int_\Omega (f-qu_\varepsilon)v dx, \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Prenant $v=\dfrac{f}{q}-u_\varepsilon\ (\in H_0^1(\Omega))$ comme fonction-test, il vient

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\left(\frac{f}{q}-u_\varepsilon\right)dx &= \int_\Omega \frac{(f-qu_\varepsilon)^2}{q}dx\\ &\geq \frac{1}{\|q\|_{L^\infty(\Omega)}}\|f-qu_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

i.e.

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\left(\frac{f}{q}\right)dx-\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon dx\geq\frac{\|f-qu_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|q\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

d'où,

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon dx\leq-\frac{\|f-qu_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|q\|_{L^\infty(\Omega)}}+\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\left(\frac{f}{q}\right)dx,$$

par suite, compte tenu des hypothèses (2.1) et (2.2),

$$\begin{aligned}
\lambda\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx &\leq \varepsilon \int_\Omega A\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\left(\frac{f}{q}\right) dx \\
&\leq \varepsilon \int_\Omega |A\nabla u_\varepsilon| \left|\nabla\left(\frac{f}{q}\right)\right| dx \\
&\leq \varepsilon\Lambda \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon| \left|\nabla\left(\frac{f}{q}\right)\right| dx \\
&\leq \varepsilon\Lambda \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{f}{q}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon\Lambda \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla\left(\frac{f}{q}\right)\right\|_{L^2(\Omega)},$$

soit enfin

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{\Lambda}{\lambda} \left\|\nabla\left(\frac{f}{q}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Ceci signifie que ∇u_ε est bornée dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de ε, par conséquent, il existe $w \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup w \qquad \text{dans } L^2(\Omega),$$

pour une certaine sous-suite u_ε. D'après la proposition 1.3.1, on a aussi

$$\nabla u_\varepsilon \longrightarrow w \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

ce qui permet de déduire, grâce à l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, que $w = \nabla\left(\frac{f}{q}\right)$ compte tenu de (2.24). Ainsi, on a le résultat de convergence

$$\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla\left(\frac{f}{q}\right) \qquad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{2.27}$$

lequel est valable pour la suite u_ε toute entière en vertu de la proposition 1.1.1.

Reste à montrer que cette convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$ −fort.

Testant (2.25) par $v = u_\varepsilon - \dfrac{f}{q}$, il vient

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx + \int_\Omega q u_\varepsilon\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx = \int_\Omega f\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx$$

d'où

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx + \int_\Omega (q u_\varepsilon - f)\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx = 0$$

i.e.

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx + \int_\Omega q\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)^2 dx = 0.$$

Utilisant l'hypothèse (2.4), on obtient

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx + a\int_\Omega \left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)^2 dx \leq 0,$$

ce qui entraîne que

$$\varepsilon\int_\Omega A\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx \leq 0,$$

i.e.

$$\int_\Omega A\nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right) \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx + \int_\Omega A\nabla\left(\frac{f}{q}\right) \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx \leq 0,$$

d'où l'on déduit, compte tenu de l'hypothèse (2.2),

$$\lambda\left\|\nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega A\nabla\left(\frac{f}{q}\right) \cdot \nabla\left(u_\varepsilon - \frac{f}{q}\right)dx \leq 0,$$

soit en définitive

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(u_\varepsilon-\frac{f}{q}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq -\frac{1}{\lambda}\int_\Omega A\nabla\left(\frac{f}{q}\right)\cdot\nabla\left(u_\varepsilon-\frac{f}{q}\right)dx \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left(A\nabla\left(\frac{f}{q}\right),\nabla\left(u_\varepsilon-\frac{f}{q}\right)\right)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Et comme le membre de droite tend vers 0 lorsque $\varepsilon\longrightarrow 0$ en vertu de (2.27), il s'ensuit que

$$\left\|\nabla\left(u_\varepsilon-\frac{f}{q}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow 0,$$

i.e.

$$\left|u_\varepsilon-\frac{f}{q}\right|_{H_0^1(\Omega)}\longrightarrow 0,$$

soit enfin

$$u_\varepsilon\longrightarrow\frac{f}{q}\qquad\text{dans } H_0^1(\Omega).$$

■

Chapitre 3

Problèmes de perturbation singulière Le cas anisotorpe

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement asymptotique des solutions de deux problèmes aux limites elliptiques liés à l'opérateur de divergence dans le cas anisotrope. Le premier est un problème de Dirichlet auquel est consacré la première section, le second est un problème mêlé Dirichlet-Neumann faisant l'objet de la deuxième section. Pour chacun d'eux, on déterminera le problème limite correspondant ainsi que la vitesse de convergence de la solution vers sa limite.

3.1 Cas d'une condition aux limites de Dirichlet

3.1.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. On scinde les composantes d'un point $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ en deux parties

$$X_1 = (x_1, ..., x_p) \quad \text{et} \quad X_2 = (x_{p+1}, ..., x_n),$$

où p est un entier positif tel que $p < n$. Avec cette notation, on pose

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)^T = \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u \\ \nabla_{X_2} u \end{pmatrix},$$

où

$$\nabla_{X_1} u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_p} u)^T, \quad \nabla_{X_2} u = (\partial_{x_{p+1}} u, ..., \partial_{x_n} u)^T,$$

∂_{x_i} désignant la dérivée partielle dans la direction x_i.

Soit $A = (a_{ij}(x))$ une matrice $n \times n$ telle que

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad \forall i, j = 1, ..., n, \tag{3.1}$$

et vérifiant pour un certain $\lambda > 0$,

$$A\xi \cdot \xi \geqslant \lambda |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } x \in \Omega. \tag{3.2}$$

On rappelle que la condition (3.1) est équivalente à

$$\exists \Lambda > 0 \quad \text{t.q.} \quad |A(x)\xi| \leq \Lambda |\xi| \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{3.3}$$

On décompose A en quatre blocs en écrivant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

où A_{11}, A_{22} sont des matrices $p \times p$ et $(n-p) \times (n-p)$ respectivement. Posons alors pour $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = A_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Grâce à la condition (3.2), on vérifie aisément que pour p.p $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$A_\varepsilon \xi \cdot \xi = (A\xi_\varepsilon \cdot \xi_\varepsilon) \geqslant \lambda \left|\xi_\varepsilon\right|^2 = \lambda \left\{ \varepsilon^2 \left|\overline{\xi}_1\right|^2 + \left|\overline{\xi}_2\right|^2 \right\}, \tag{3.6}$$

$$A_{22}\overline{\xi}_2 \cdot \overline{\xi}_2 \geqslant \lambda \left|\overline{\xi}_2\right|^2, \tag{3.7}$$

où l'on a scindé ξ comme suit

$$\xi = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1 \\ \overline{\xi}_2 \end{pmatrix}$$

avec $\overline{\xi}_1 = (\xi_1, ..., \xi_p)^T$, $\overline{\xi}_2 = (\xi_{p+1}, ..., \xi_n)^T$ et $\xi_\varepsilon = (\varepsilon\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2)$. Ainsi, on a

$$A_\varepsilon \xi \cdot \xi \geqslant \lambda \min(\varepsilon^2, 1) \left|\xi\right|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Il s'ensuit que A_ε et A_{22} sont uniformément définies positives.

Etant donné

$$f \in L^2(\Omega), \tag{3.9}$$

on considère le problème aux limites de Dirichlet associé à l'opérateur de divergence

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) & = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

où

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial x_i \left(a_{ij}(x) \partial x_j u_\varepsilon \right).$$

A la différence du problème étudié dans le chapitre précédent, la perturbation dans ce cas est anisotrope en ce sens que le paramètre ε agit uniquement dans les directions X_1 des variables du domaine, ce qui traduit le fait que la vitesse de diffusion est très petite dans ces directions. Bien entendu, le problème (3.10) doit être compris en un sens faible, à savoir u_ε satisfait

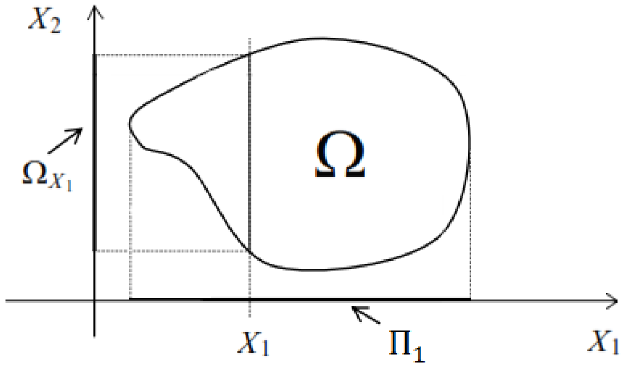
$$\begin{cases} \int\limits_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \; dx = \int\limits_\Omega f v \; dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.11}$$

D'après la proposition 1.4.1, le problème ci-dessus admet une solution unique u_ε.
Notons Π_{X_1} (resp. Π_{X_2}) la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'espace $X_2 = 0$ (resp. $X_1 = 0$) et posons

$$\begin{aligned} \Pi_1 \; &: = \Pi_{X_1}(\Omega) = \{X_1 \mid \exists X_2 \text{ tel que } (X_1, X_2) \in \Omega\}, \\ \Pi_2 \; &: = \Pi_{X_2}(\Omega) = \{X_2 \mid \exists X_1 \text{ tel que } (X_1, X_2) \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Pour tout $X_1 \in \Pi_1$, on note par Ω_{X_1} la section de Ω au-dessus de X_1, i.e.

$$\Omega_{X_1} = \{X_2 \mid (X_1, X_2) \in \Omega\}.$$



Pour une fonction réelle u définie sur $\mathbb{R}^n$, on pose

$$u(X_1, \cdot) : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X_2 \mapsto u(X_1, X_2), \quad X_1 \in \Pi_1.$$

Lemme 3.1.1 *Soit u une fonction réelle définie sur Ω. Alors, on a*

1. $u(X_1, \cdot) \in L^2(\Omega_{X_1})$ *p.p.* $X_1 \in \Pi_1$ *si* $u \in L^2(\Omega)$;
2. $u(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1})$ *p.p.* $X_1 \in \Pi_1$ *si* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration.

1. Supposons que $u \in L^2(\Omega)$. Soit $\widetilde{u}$ le prolongement de u par 0 on dehors de Ω , i.e.

$$\widetilde{u}(X_1, X_2) = \begin{cases} u(X_1, X_2) & \text{si } (X_1, X_2) \in \Omega, \\ 0 & \text{si } (X_1, X_2) \in \Pi_1 \times \Pi_2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

   Il est clair que $\widetilde{u} \in L^2(\Pi_1 \times \Pi_2)$ et donc $\widetilde{u}^2 \in L^1(\Pi_1 \times \Pi_2)$. D'après le théorème de Fubini, on a $\widetilde{u}^2(X_1, \cdot) \in L^1(\Pi_2)$ p.p. $X_1 \in \Pi_1$ et donc $u^2(X_1, \cdot) \in L^1(\Omega_{X_1})$, i.e. $u(X_1, \cdot) \in L^2(\Omega_{X_1})$.

2. Supposons à présent que $u \in H_0^1(\Omega)$. soit $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\|w_m - u\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } m \longrightarrow \infty.$$

   i.e.

$$\int_\Omega \left\{ |w_m - u|^2 + |\nabla (w_m - u)|^2 \right\} dx \longrightarrow 0.$$

Ceci entraîne que

$$\int_{\Omega} \left\{ |w_m - u|^2 + |\nabla_{X_2}(w_m - u)|^2 \right\} dx \longrightarrow 0,$$

ce qui s'écrit d'après le théorème de Fubini après avoir prolongé w_m et u par 0 en dehors de Ω,

$$\int_{\Pi_1} dX_1 \int_{\Omega_{X_1}} |w_m - u|^2 + |\nabla_{X_2}(w_m - u)|^2 \, dX_2 \longrightarrow 0.$$

Mais alors, d'après le théorème 1.2.3, il existe une sous-suite $(w_{m'})$ de (w_m) telle que pour p.p. $X_1 \in \Pi_1$,

$$\int_{\Omega_{X_1}} |w_{m'}(X_1, \cdot) - u(X_1, \cdot)|^2 + |\nabla_{X_2}(w_{m'}(X_1, \cdot) - u(X_1, \cdot))|^2 \, dX_2 \longrightarrow 0$$

lorsque $m' \longrightarrow \infty$, i.e.

$$\|w_{m'}(X_1, \cdot) - u(X_1, \cdot)\|_{H^1(\Omega_{X_1})} \longrightarrow 0 \qquad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1. \tag{3.12}$$

Or, étant une fonction régulière,

$$w_{m'}(X_1, \cdot) = w_{m'}|_{\Omega_{X_1}} \in \mathcal{D}(\Omega_{X_1}) \qquad \text{pour tout } X_1 \in \Pi_1,$$

ce qui permet de conclure grâce à (3.12) que $u(X_1, .) \in H_0^1(\Omega_{X_1})$.

■

Maintenant, en vertu du lemme ci-dessus et compte tenu de (3.9), on a :

$$f(X_1, \cdot) \in L^2(\Omega_{X_1}), \quad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1.$$

Par suite, comme la matrice A_{22} vérifie la conditions (3.1) et est uniformément définie positive, il existe en vertu de la proposition 1.4.1 une unique solution $u_0 = u_0(X_1, \cdot)$ de

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_{X_1}} A_{22}\nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} v(X_2)\ dX_2 = \int_{\Omega_{X_1}} f(X_1, X_2) v(X_2)\ dX_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_{X_1}) \\ u_0(X_1, \cdot)\ \in H_0^1(\Omega_{X_1}). \end{cases} \tag{3.13}$$

lequel est un problème elliptique posé dans la section Ω_{X_1}.
On veut montrer que

$$u_\varepsilon \to u_0 \ \text{ quand } \ \varepsilon \to 0,$$

tout en préciser en quel sens la convergence a lieu. Tout d'abord, remarquons que dans le cas

$$\begin{aligned} n &= 2, \\ \Omega &= (-1,1) \times (-1,1), \\ A &= Id, \qquad f = f(x_2), \end{aligned}$$

où Id désigne la matrice identité, alors $u_\varepsilon,\ u_0$ sont respectivement les solutions faibles de

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \partial_{x_1}^2 u_\varepsilon - \partial_{x_2}^2 u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\partial_{x_2}^2 u_0 = f \quad \text{dans } \omega_2 = (-1,1), \\ \qquad u_0 = 0 \quad \text{dans } \partial\omega_2. \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, u_0 est indépendante de x_1 et ne peut être identiquement nulle si f ne l'est pas. Par conséquent,

$$u_0 = u_0(x_2) \notin H_0^1(\Omega),$$

car sinon u_0 serait nulle sur le bord latéral $\partial\omega_1 \times \omega_2$ et donc dans Ω tout entier. Ainsi, on ne peut s'attendre à ce que

$$u_\varepsilon \to u_0 \qquad \text{dans } H^1(\Omega)$$

puisque cela entraînerait l'appartenance de u_0 à $H_0^1(\Omega)$ en raison du fait que ce dernier est fermé dans $H^1(\Omega)$.

Dans la sous-section suivante, on établit la convergence de u_ε vers u_0 dans $L^2(\Omega)$. La troisième sous-section est destinée au cas spécial où $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$. On précisera alors les conditions qui garantissent l'appartenance de u_0 à $H^1(\Omega)$ et on estimera la vitesse de convergence de u_ε vers u_0 pour différentes normes.

3.1.2 Comportement asymptotique dans un domaine quelconque

Il est clair que u_0 est le condidat naturel pour la limite de u_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet, on a

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses (3.1), (3.2) et (3.9), on a*

$$u_\varepsilon \to u_0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \to \nabla_{X_2} u_0, \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \to 0 \qquad \textit{dans } L^2(\Omega) \tag{3.14}$$

où u_ε (resp. u_0) est la solution de(3.11) (resp.(3.13)).

(A noter que la convergence vectorielle dans $L^2(\Omega)$ signifie la convergence composante par composante).

Démonstration. Prenons $v = u_\varepsilon$ dans (3.11). Compte tenu de (3.6), on obtient :

$$\lambda \int_\Omega \left\{ \varepsilon^2 \left|\nabla_{X_1} u_\varepsilon\right|^2 + \left|\nabla_{X_2} u_\varepsilon\right|^2 \right\} dx \leqslant \int_\Omega f u_\varepsilon dx \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Comme Ω est borné, l'inégalité de Poincaré (1.18) permet d'écrire pour une certaine constante $C_\Omega > 0$ indépendante de ε

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla_{X_2} v\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.16}$$

De (3.15), il vient alors

$$\lambda \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon^2 \left| \nabla_{X_1} u_\varepsilon \right|^2 + \left| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right|^2 \right\} dx \leq C_\Omega \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.17}$$

soit, en omettant le terme en ε^2,

$$\lambda \left\| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui donne

$$\left\| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda}.$$

Substituant cette inégalité dans (3.17), on obtient

$$\int_{\Omega} \left\{ \varepsilon^2 \left| \nabla_{X_1} u_\varepsilon \right|^2 + \left| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right|^2 \right\} dx \leq \frac{C_\Omega^2 \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)}^2}{\lambda^2}. \tag{3.18}$$

Ceci combiné à (3.16), entraîne que

$$u_\varepsilon, \quad \left| \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \right|, \quad \left| \nabla_{X_2} u_\varepsilon \right| \quad \text{sont bornées dans } L^2(\Omega),$$

(bien sûr indépendamment de ε). Il s'ensuit qu'il existe

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad u_1 \in \left[L^2(\Omega) \right]^p, \quad u_2 \in \left[L^2(\Omega) \right]^{n-p}$$

et une sous-suite de u_ε encore notée u_ε telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \qquad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1, \qquad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2 \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Evidemment, la convergence faible dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, d'où par continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on déduit que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{3.19}$$

$$\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{3.20}$$

$$\nabla_{X_2}u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2}u_0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.21}$$

Revenons à l'équation (3.11_1) satisfaite par u_ε et développons-la en utilisant les différents blocs de A. Ceci donne

$$\int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1}v dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1}v dx + \int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2}v dx$$

$$+\int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2}v dx = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in \ H_0^1(\Omega). \tag{3.22}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient grâce à (3.20) et (3.21)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1}v dx &= \varepsilon\int_\Omega \varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon \cdot A_{11}^T\nabla_{X_1}v dx \\ &= \varepsilon\left(\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon, A_{11}^T\nabla_{X_1}v\right)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1}v dx &= \varepsilon\int_\Omega \nabla_{X_2}u_\varepsilon \cdot A_{12}^T\nabla_{X_1}v dx \\ &= \varepsilon\left(\nabla_{X_2}u_\varepsilon, A_{12}^T\nabla_{X_1}v\right)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2}v dx &= \int_\Omega \varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon \cdot A_{21}^T\nabla_{X_2}v dx \\ &= \left(\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon, A_{21}^T\nabla_{X_2}v\right)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite dans chaque terme de (3.22), on trouve

$$\int_{\Omega} A_{22}\nabla_{X_2}u_0 \cdot \nabla_{X_2}v dx = \int_{\Omega} f v dx \qquad \forall v \in \ H_0^1(\Omega). \tag{3.23}$$

A ce stade, on ne sait pas encore si on a

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1}) \qquad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1. \tag{3.24}$$

Pour établir cela, on prend d'abord $v = u_\varepsilon$ dans (3.23) et on passe à la limite en ε, on obtient compte tenu de (3.19) et (3.21)

$$\int_{\Omega} A_{22}\nabla_{X_2}u_0 \cdot \nabla_{X_2}u_0 dx = \int_{\Omega} f u_0 dx. \tag{3.25}$$

Ensuite, on développe

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega} A_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla_{X_1}u_\varepsilon \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1}u_\varepsilon \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0) \end{pmatrix} dx. \tag{3.26}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_1}u_\varepsilon dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\cdot\nabla_{X_1}u_\varepsilon dx \\
&+\int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)dx + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\cdot\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)dx \\
&= \int_\Omega \varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_1}u_\varepsilon dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_1}u_\varepsilon dx \\
&+\int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_2}u_\varepsilon dx + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_2}u_\varepsilon dx \\
&-\int_\Omega \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_1}u_\varepsilon dx - \int_\Omega \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_2}u_0 dx \\
&-\int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_2}u_\varepsilon dx - \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_\varepsilon\cdot\nabla_{X_2}u_0 dx \\
&+\int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_2}u_0 dx.
\end{aligned}$$

Par utilisation de $(3.11)_1$, I_ε s'écrit

$$I_\varepsilon = \int_\Omega f u_\varepsilon dx - \int_\Omega A_{12}\nabla_{X_2}u_0\cdot(\varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon)\,dx - \int_\Omega \varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon\cdot A_{21}^T\nabla_{X_2}u_0 - \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_2}u_\varepsilon dx$$

$$-\int_\Omega \nabla_{X_2}u_\varepsilon\cdot A_{22}^T\nabla_{X_2}u_0 dx + \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_2}u_0 dx,$$

d'où, en passant à la limite en ε, on obtient grâce à (3.19), (3.20), (3.21) et (3.25)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_\Omega f u_0 dx - \int_\Omega A_{22}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_2}u_0 dx = 0.$$

Utilisant l'inégalité (3.6), on aura

$$\lambda\int_\Omega \left\{\varepsilon^2\left|\nabla_{X_1}u_\varepsilon\right|^2 + \left|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\right|^2\right\} dx \le I_\varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_0 \rightarrow 0, \qquad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{3.27}$$

$$\nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \nabla_{X_2} u_0, \qquad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.28}$$

Par extension de u_ε et u_0 par 0 en dehors de Ω, et par utilisation du théorème de Fubini, le résultat (3.28) qui signifie

$$\int_\Omega |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dx \longrightarrow 0,$$

s'écrit

$$\int_{\Pi_1} \int_{\Omega_{X_1}} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dX_2 dX_1 \longrightarrow 0. \tag{3.29}$$

On en déduit en vertu du théorème 1.2.3, qu'il existe une sous-suite de u_ε encore notée u_ε telle que

$$\int_{\Omega_{X_1}} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dX_2 \longrightarrow 0, \qquad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1. \tag{3.30}$$

D'autre part, observons qu'en vertu du lemme 3.1.1, $u_\varepsilon(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1})$ p.p. $X_1 \in \Pi_1$. Par conséquent, pour montrer que

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1}) \qquad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1,$$

il suffit de prouver que

$$u_\varepsilon(X_1, \cdot) \longrightarrow u_0(X_1, \cdot) \qquad \text{dans } H^1(\Omega_{X_1}), \quad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1.$$

Or, d'aprés (3.30), on a

$$\nabla_{X_2} u_\varepsilon(X_1, \cdot) \longrightarrow \nabla_{X_2} u_0(X_1, \cdot) \qquad \text{dans } L^2(\Omega_{X_1}), \quad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1.$$

ce qui signifie que $(\nabla_{X_2} u_\varepsilon(X_1,\cdot))_\varepsilon$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega_{X_1})$ p.p. $X_1 \in \Pi_1$. Et comme

$$\|\nabla_{X_2} v\|_{L^2(\Omega_{X_1})} = \left(\int_{\Omega_{X_1}} |\nabla_{X_2} v|^2 \, dX_2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega_{X_1})$, alors $(u_\varepsilon(X_1,\cdot))_\varepsilon$ est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega_{X_1})$ pour cette norme, et donc pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_{X_1})}$ (les deux normes étant équivalentes). Par conséquent, $u_\varepsilon(X_1,\cdot)$ converge dans l'espace complet $\left(H^1(\Omega_{X_1}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega_{X_1})}\right)$ vers un certain élément w de $H_0^1(\Omega_{X_1})$ lequel est fermé dans $H^1(\Omega_{X_1})$. Mais w est alors est aussi la limite de $u_\varepsilon(X_1,\cdot)$ pour la norme $\|\nabla_{X_2}\cdot\|_{L^2(\Omega_{X_1})}$. Enfin, par unicité de la limite, on déduit que

$$u_\varepsilon(X_1,\cdot) \longrightarrow u_0(X_1,\cdot) \qquad \text{dans } H^1(\Omega_{X_1}), \quad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1,$$

ce qui permet de conclure que

$$u_0(X_1,\cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1}) \quad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_1.$$

Maintenant, prolongeons $u_\varepsilon(X_1,\cdot)$ et $u_0(X_1,\cdot)$ par 0 en dehors de Ω_{X_1}. Les prolongements également notés $u_\varepsilon(X_1,\cdot)$ et $u_0(X_1,\cdot)$ deumeurent dans $H_0^1(\Pi_2)$, ce qui perment d'utiliser l'inégalité de Poincaré (1.18). Ainsi, on a pour une certaine constante $C_{\Pi_2} > 0$ dépendant uniquement de l'ouvert Π_2,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{X_1}} |u_\varepsilon(X_1,\cdot) - u_0(X_1,\cdot)|^2 \, dX_2 &= \int_{\Pi_2} |u_\varepsilon(X_1,\cdot) - u_0(X_1,\cdot)|^2 \, dX_2 \\ &\leq C_{\Pi_2} \int_{\Pi_2} |u_\varepsilon(X_1,\cdot) - u_0(X_1,\cdot)|^2 \, dX_2 \\ &\leq C_{\Pi_2} \int_{\Omega_{X_1}} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon(X_1,\cdot) - u_0(X_1,\cdot))|^2 \, dX_2, \end{aligned}$$

et ceci pour presque tout $X_1 \in \Pi_1$. Intégrant sur Π_1, il vient grâce au théorème de Fubini

$$\int_\Omega |u_\varepsilon - u_0|^2 \, dx \leq C_{\Pi_2} \int_\Omega |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dx \longrightarrow 0$$

en vertu de (3.28). Ainsi,

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.31}$$

Tous les résultats de convergence obtenus ci-dessus sont vrais pour une certaine sous-suite de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$. Si on arrive à montrer que u_0 est unique, alors tous ces résultats seront valables pour la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ toute entière en vertu de la proposition 1.1.1. Pour cela, il suffit de prouver que u_0 satisfait à $(3.13)_1$, ce qui rend u_0 l'unique solution du problème (3.13).

Recouvrons Ω par par une famille dénombrable d'ouverts de la forme

$$U_i \times V_i \subset \Omega, \quad i \in \mathbb{N},$$

où $U_i,\ V_i$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^p,\ \mathbb{R}^{n-p}$ respectivement. En choisissant $\varphi \in H_0^1(V_i)$, on trouve moyennant (3.23)

$$\begin{aligned}
&\int_{U_i} \eta(X_1) \int_{V_i} A_{22}(X_1, X_2) \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} \varphi(X_2) \, dX_2 dX_1 \\
= &\int_{U_i} \eta(X_1) \int_{V_i} f(X_1, X_2) \varphi(X_2) \, dX_2 dX_1, \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}(u_i),
\end{aligned}$$

du moment que $\eta\varphi \in H_0^1(\Omega)$ $(\text{supp}\eta\varphi \subset U_i \times V_i)$. D'aprés le lemme 1.2.1, il existe un ensemble $N_i(\varphi) \subset \Pi_1$ de mesure nulle tel que

$$\int_{V_i} A_{22}(X_1, X_2) \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} \varphi(X_2) \, dX_2 = \int_{V_i} f(X_1, X_2) \varphi(X_2) \, dX_2, \tag{3.32}$$

pour tout $X_1 \in U_i \smallsetminus N_i(\varphi)$. Soit $\{\varphi_m\}_m$ une base hilbertienne dénombrable de $H_0^1(V_i)$ (l'existence d'une telle base est garantie par le fait que $H_0^1(V_i)$ est un espace de Hilbet séparable). Ecrivons alors (3.32) pour φ_m au lieu de φ,

$$\int_{V_i} A_{22}(X_1, X_2) \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} \varphi_m(X_2)\, dX_2 = \int_{V_i} f(X_1, X_2) \varphi_m(X_2)\, dX_2.$$

Cette identité a lieu pour tout $X_1 \in U_i \smallsetminus N_i(\varphi_m)$ où $N_i(\varphi_m)$ est un ensemble de mesure nulle dans Π_1. Par conséquent, pour

$$X_1 \in U_i \smallsetminus \bigcup_m N_i(\varphi_m)$$

l'identité (3.32) a lieu pour chaque φ_m et donc pour chaque $\varphi \in H_0^1(V_i)$, en raison de la densité dans $H_0^1(V_i)$ de l'espace des combinaisons linéaires finies de φ_m.
Choisissons alors

$$X_1 \in \Pi_1 \smallsetminus \bigcup_i \bigcup_m N_i(\varphi_m)$$

(A noter que $\bigcup_i \bigcup_m N_i(\varphi_m)$ est un ensemble de mesure nulle). Soit

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{X_1}).$$

Si K désigne le support de φ, alors on a clairement

$$K \subset \bigcup_i V_i$$

puisque

$$\begin{aligned} \Omega_{X_1} &= \{X_2 \mid (X_1, X_2) \in \Omega\} \\ &\subset \left\{X_2 \mid (X_1, X_2) \in \bigcup_i U_i \times V_i\right\} \\ &\subset \left\{X_2 \mid X_2 \in \bigcup_i V_i\right\} = \bigcup_i V_i \end{aligned}$$

Par suite, K peut être recouvert par un nombre fini de V_i, qu'on note pour simplifier, $V_1, ..., V_k$.

Utilisant une partition de l'unité, il existe $\psi_i \in \mathcal{D}(V_i)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_i = 1 \qquad \text{dans } K,$$

d'où, d'aprés (3.32), on trouve

$$\begin{aligned}
\int_K A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} \varphi dX_2 &= \int_K A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} \sum_{i=1}^{k} (\psi_i \varphi)\, dX_2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{K \cap V_i} A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} (\psi_i \varphi)\, dX_2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} (\psi_i \varphi)\, dX_2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} f \psi_i \varphi dX_2 \\
&= \int_{V_i} f \sum_{i=1}^{k} \psi_i \varphi dX_2 \\
&= \int_K f \varphi dX_2,
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\int_{\Omega_{X_i}} A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} \varphi dX_2 = \int_{\Omega_{X_i}} f \varphi dX_2, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{X_1}).$$

Par densité, cette identité est vraie pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega_{X_1})$, ce qui signifie que u_0 est l'unique solution de (3.13) pour p.p $X_1 \in \Pi_1$. Ainsi, les convergences (3.31), (3.27) et (3.28) tiennent pour la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ toute entière. Ceci termine la démonstration du théorème. ■

3.1.3 Ordre de convergence dans des domaines cylindriques

Dans cette section, on suppose que

$$\Omega = \omega_1 \times \omega_2,$$

où ω_1 et ω_2 sont des domaines bornés lipshitziens de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivement. Alors, pour tout $X_1 \in \Pi_1 = \omega_1$, on a $\Omega_{X_1} = \omega_2$ et le problème (3.13) s'écrit :

$$\begin{cases} \int\limits_{\omega_2} A_{22} \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} v(X_2) \; dX_2 = \int\limits_{\omega_2} f(X_1, X_2) v(X_2) \; dX_2 \quad \forall v \in H_0^1(w_2), \\ u_0(X_1, \cdot) \; \in H_0^1(\omega_2). \end{cases} \tag{3.33}$$

Clairement, on ne peut espérer obtenir la convergence de u_ε vers u_0 dans $H^1(\Omega)$, sans avoir

$$u_0 \in H^1(\Omega),$$

ce qui équivaut au fait que $\nabla_{X_1} u_0 \in (L^2(\Omega))^p$. Ceci est possible si on se donne quelques hypothèses supplémentaires, à savoir

$$\partial_{x_k} f \in L^2(\Omega), \quad \partial_{x_k} A_{22} \in L^\infty(\Omega), \qquad \forall k = 1, ..., p, \tag{3.34}$$

la seconde hypothèse signifiant que

$$\partial_{x_k} a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \qquad \forall k = 1, ..., p, \quad \forall i, j = p+1, ..., n.$$

Un résultat de régularité.

Proposition 3.1.1 *Sous les hypothèses (3.1), (3.2), (3.9) et (3.34), on a*

$$u_0 \in H^1(\Omega).$$

De plus, u_0 est nulle au sens des traces sur $\omega_1 \times \partial\omega_2$, i.e.

$$u_0 \in H_0^1(\Omega, \omega_1 \times \partial\omega_2).$$

Démonstration. L'ingrédient essentiel de la démonstration est la "méthode des translations". Soit ω_1' un ouvert de $\mathbb{R}^p$ qui vérifie :

$$\omega_1' \subset\subset \omega_1,$$

(cette notation signifie que $\overline{\omega_1'}$ est un compact inclus dans ω_1).
Pour $0 < h < \text{dist}(\omega_1', \partial\omega_1),\ X_1 \in \omega_1'$, on définit :

$$\tau_h^i u_0(X_1, X_2) = u_0(X_1 + he_i, X_2), \quad i = 1, ..., p,$$

et

$$D_h^i u_0 = \frac{\tau_h^i u_0 - u_0}{h}$$

où e_i désigne le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Pour $v \in H_0^1(\omega_2)$, de (3.33), on tire

$$\int_{\omega_2} \tau_h^i (A_{22} \nabla_{X_2} u_0) \cdot \nabla_{X_2} v dX_2 - \int_{\omega_2} A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dX_2 = \int_{\omega_2} (\tau_h^i f - f) v dX_2,$$

ce qui implique

$$\int_{\omega_2} \left(\tau_h^i A_{22}\right) \nabla_{X_2} (\tau_h^i u_0 - u_0) \cdot \nabla_{X_2} v dX_2 + \int_{\omega_2} (\tau_h^i A_{22} - A_{22}) \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dX_2 = \int_{\omega_2} (\tau_h^i f - f) v dX_2,$$

compte tenu de la relation

$$\tau_h^i (A_{22} \nabla_{X_2} u_0) = \tau_h^i A_{22} \nabla_{X_2} (\tau_h^i u_0)$$

aisément vérifiable. Pronons $v = \frac{\tau_h^i u_0 - u_0}{h^2}$ $\left(\in H_0^1(\omega_2)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega_2} \left(\tau_h^i A_{22}\right) \nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right) \cdot \nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right)\; dX_2 \\
= &\; -\int_{\omega_2} \left(D_h^i A_{22}\right) \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right) dX_2 + \int_{\omega_2} \left(D_h^i f\right)\left(D_h^i u_0\right) dX_2.
\end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse d'ellipticité (3.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned}
\lambda \left\|\nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right)\right\|_{L^2(\omega_2)}^2 \;\leq\; & \left\|\left(D_h^i A_{22}\right) \nabla_{X_2} u_0\right\|_{L^2(\omega_2)} \left\|\nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right)\right\|_{L^2(\omega_2)} \\
& + \left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)} \left\|D_h^i u_0\right\|_{L^2(\omega_2)}.
\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Poincaré au seconde terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\lambda \left\|\nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right)\right\|_{L^2(w_2)}^2 \;\leq\; & \left\|D_h^i A_{22}\right\|_{L^\infty(\omega_2)} \left\|\nabla_{X_2} u_0\right\|_{L^2(\omega_2)} \left\|\nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right)\right\|_{L^2(\omega_2)} \\
& + C_{\omega_2} \left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)} \left\|\nabla_{X_2}(D_h^i u_0)\right\|_{L^2(\omega_2)}.
\end{aligned}$$

soit,

$$\left\|\nabla_{X_2}\left(D_h^i u_0\right)\right\|_{L^2(w_2)} \leq \frac{1}{\lambda}\left\{\left\|D_h^i A_{22}\right\|_{L^\infty(\omega_2)} \left\|\nabla_{X_2} u_0\right\|_{L^2(\omega_2)} + C_{\omega_2}\left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)}\right\},$$

où C_{ω_2} est la constante de Poincaré relative à l'ouvert ω_2.
Appliquant l'inégalité de Poincaré, encore une fois, pour le membre de gauche, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left\|D_h^i u_0\right\|_{L^2(\omega_2)} &\leq C_{\omega_2} \left\|\nabla_{X_2}(D_h^i u_0)\right\|_{L^2(\omega_2)} \\
&\leq \frac{C_{\omega_2}}{\lambda}\left\{\left\|\left(D_h^i A_{22}\right)\right\|_{L^\infty(\omega_2)} \left\|\nabla_{X_2} u_0\right\|_{L^2(\omega_2)} + C_{\omega_2}\left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)}\right\} \\
&\leq C_1 \left\{\left\|D_h^i A_{22}\right\|_{L^\infty(\omega_2)} + \left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)}\right\},
\end{aligned}$$

où $C_1 = \frac{C_{\omega_2}}{\lambda} \max\left(\left\|\nabla_{X_2} u_0\right\|_{L^2(\omega_2)}, C_{\omega_2}\right)$, ce qui donne en élevant au carré,

$$\left\|D_h^i u_0\right\|_{L^2(\omega_2)}^2 \leq 2C_1^2\left(\left\|D_h^i A_{22}\right\|_{L^\infty(\omega_2)}^2 + \left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)}^2\right). \tag{3.35}$$

Or, comme $f \in L^2(\Omega)$ et $\partial_{x_i} f \in L^2(\Omega)$, il vient d'après le théorème de Fubini

$$f(\cdot, X_2) \in L^2(\omega_1) \quad \text{et} \quad \partial_{x_i} f(\cdot, X_2) \in L^2(\omega_1), \qquad \text{p.p. } X_2 \in \omega_2,$$

i.e.

$$f(\cdot, X_2) \in H^1(\omega_1), \qquad \text{p.p. } X_2 \in \omega_2.$$

Il s'ensuit alors en vertu du lemme 1.3.1 que :

$$\begin{cases} D_h^i f(\cdot, X_2) \in L^2(\omega_1'), \\ \\ \|D_h^i f(\cdot, X_2)\|_{L^2(\omega_1')} \leq \|\partial_{x_i} f(\cdot, X_2)\|_{L^2(\omega_1)}, \end{cases}$$

et ceci p.p. $X_2 \in \omega_2$. Par suite

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1'} \left\|D_h^i f\right\|^2_{L^2(\omega_2)} dX_1 &= \int_{\omega_1'} \int_{\omega_2} \left|D_h^i f\right|^2 dX_2 dX_1 \\ &= \int_{\omega_2} \int_{\omega_1'} \left|D_h^i f\right|^2 dX_1 dX_2 \\ &= \int_{\omega_2} \left\|D_h^i f\right\|^2_{L^2(\omega_1')} dX_2 \\ &\leq \int_{\omega_2} \|\partial_{x_i} f\|^2_{L^2(\omega_1)} dX_2 \\ &= \int_{\omega_2} \int_{\omega_1} |\partial_{x_i} f|^2 dX_1 dX_2 \\ &= \int_{\omega_1 \times \omega_2} |\partial_{x_i} f|^2 dX_1 dX_2 \\ &= \|\partial_{x_i} f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Par ailleurs, comme $A_{22} \in L^\infty(\Omega)$ et $\partial_{x_i} A_{22} \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$A_{22}(\cdot, X_2) \in L^\infty(\omega_1) \quad \text{et} \quad \partial_{x_i} A_{22}(\cdot, X_2) \in L^\infty(\omega_1), \qquad \text{p.p. } X_2 \in \omega_2,$$

c'est-à-dire

$$A_{22}(\cdot, X_2) \in W^{1,\infty}(\omega_1), \qquad \text{p.p. } X_2 \in \omega_2.$$

D'où, en vertu du lemme 1.3.1,

$$\begin{cases} D_h^i A_{22}(\cdot, X_2) \in L^\infty(\omega_1'), \\ \\ \|D_h^i A_{22}(\cdot, X_2)\|_{L^\infty(\omega_1')} \leq \|\partial_{x_i} A_{22}(\cdot, X_2)\|_{L^\infty(\omega_1)}, \end{cases}$$

et ceci p.p. $X_2 \in \omega_2$. Par suite,

$$\begin{aligned} \left|D_h^i A_{22}(X_1, X_2)\right| &\leq \left\|D_h^i A_{22}(\cdot, X_2)\right\|_{L^\infty(\omega_1')} \\ &\leq \|\partial_{x_i} A_{22}(\cdot, X_2)\|_{L^\infty(\omega_1)} \\ &\leq \|\partial_{x_i} A_{22}\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1',\ \text{p.p. } X_2 \in \omega_2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne par définition du supess sur ω_2,

$$\left\|D_h^i A_{22}(X_1, \cdot)\right\|_{L^\infty(\omega_2)} \leq \|\partial_{x_i} A_{22}\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1',$$

soit, en élevant au carré puis en intégrant sur ω_1',

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1'} \left\|D_h^i A_{22}(X_1, \cdot)\right\|_{L^\infty(\omega_2)}^2 dX_1 &\leq |\omega_1'| \, \|\partial_{x_i} A_{22}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq |\omega_1| \, \|\partial_{x_i} A_{22}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 . \end{aligned} \tag{3.37}$$

A présent, intégrons (3.35) sur ω_1', en tenant compte de (3.36) et (3.37) :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1'} \left\|D_h^i u_0\right\|_{L^2(\omega_2)}^2 dX_1 &\leq 2C_1^2 \left(\int_{\omega_1'} \left\|D_h^i A_{22}\right\|_{L^\infty(\omega_2)}^2 dX_1 + \int_{\omega_1'} \left\|D_h^i f\right\|_{L^2(\omega_2)}^2 dX_1 \right) \\ &\leq 2C_1^2 \left(|\omega_1| \, \|\partial_{x_i} A_{22}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_i} f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\omega_1'}\int_{\omega_2}\left|D_h^i u_0\right|^2 dX_2 dX_1 \leq 2C_1^2\left(|\omega_1|\,\|\partial_{x_i}A_{22}\|^2_{L^\infty(\Omega)}+\|\partial_{x_i}f\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

soit

$$\left\|D_h^i u_0\right\|_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} \leq C_2,$$

ce qui entraîne en particulier pour tout $\omega_2' \subset\subset \omega_2$:

$$\left\|D_h^i u_0\right\|_{L^2(\omega_1'\times\omega_2')} \leqslant C_2,$$

où la constante $C_2 = C_1\sqrt{2\left(|\omega_1|\,\|\partial_{x_i}A_{22}\|^2_{L^\infty(\Omega)}+\|\partial_{x_i}f\|^2_{L^2(\Omega)}\right)}$ est clairement indépendante de h et de ω_1'. Il s'ensuit en vertu du lemme 1.3.2 que

$$\partial_{x_i}u_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{avec} \quad \|\partial_{x_i}u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2,$$

et cela pour tout $i = 1, ..., p$, ce qui signifie que $\nabla_{X_1}u_0 \in \left(L^2(\Omega)\right)^p$. Ceci joint au fait que $\nabla_{X_2}u_0 \in \left(L^2(\Omega)\right)^{n-p}$ - déjà établi dans (3.21) - permet de conclure que $u_0 \in H^1(\Omega)$.

Reste à montrer que u_0 est nulle au sens des traces sur $\omega_1 \times \partial\omega_2$. Comme $u_0 \in H^1(\Omega)$, il existe $v_n \in C^1(\overline{\Omega})$ telle que

$$v_n \longrightarrow u_0 \qquad \text{dans } H^1(\Omega). \tag{3.38}$$

Notons par $\Gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\omega_1 \times \partial\omega_2)$ l'opérateur trace sur $\omega_1 \times \partial\omega_2$ et par $\gamma_0 : H^1(\omega_2) \to L^2(\partial\omega_2)$ l'opérateur trace sur $\partial\omega_2$. Par continuité de Γ_0 , on obtient de (3.38) :

$$\Gamma_0 v_n = v_n|_{\omega_1\times\partial\omega_2} \longrightarrow \Gamma_0 u_0 \qquad \text{dans } L^2(\omega_1 \times \partial\omega_2),$$

i.e.

$$\int_{\omega_1\times\partial\omega_2} |\Gamma_0 v_n (X_1,\sigma) - \Gamma_0 u_0 (X_1,\sigma)|^2 \, dX_1 d\sigma \longrightarrow 0,$$

soit par le théorème de Fubini

$$\int_{\omega_1} dX_1 \int_{\partial\omega_2} |\Gamma_0 v_n (X_1,\sigma) - \Gamma_0 u_0 (X_1,\sigma)|^2 \, d\sigma \longrightarrow 0.$$

D'après le théorème 1.2.3, il existe alors une sous-suite également notée (v_n) telle que pour presque tout $X_1 \in \omega_1$, on ait

$$\int_{\partial\omega_2} |\Gamma_0 v_n (X_1,\sigma) - \Gamma_0 u_0 (X_1,\sigma)|^2 \, d\sigma \longrightarrow 0,$$

i.e.

$$\Gamma_0 v_n (X_1,\cdot) \longrightarrow \Gamma_0 u_0 (X_1,\cdot) \qquad \text{dans } L^2(\partial\omega_2), \quad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1. \tag{3.39}$$

D'autre part, on a aussi

$$v_n (X_1,\cdot) \longrightarrow u_0 (X_1,\cdot) \qquad \text{dans } H^1 (\omega_2), \quad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1. \tag{3.40}$$

En effet, (3.38) entraîne que

$$\int_{\omega_1\times\omega_2} \left\{ |v_n (X_1,X_2) - u_0 (X_1,X_2)|^2 + |\nabla_{X_2} (v_n (X_1,X_2) - u_0 (X_1,X_2))|^2 \right\} dX_1 X_2 \longrightarrow 0,$$

soit, par Fubini

$$\int_{\omega_1} dX_1 \int_{\omega_2} \left\{ |v_n (X_1,X_2) - u_0 (X_1,X_2)|^2 + |\nabla_{X_2} (v_n (X_1,X_2) - u_0 (X_1,X_2))|^2 \right\} X_2 \longrightarrow 0,$$

d'où, pour une certaine sous-suite (v_n)

$$\int_{\omega_2} \left\{ |v_n(X_1, X_2) - u_0(X_1, X_2)|^2 + |\nabla_{X_2}(v_n(X_1, X_2) - u_0(X_1, X_2))|^2 \right\} X_2 \longrightarrow 0,$$

p.p. $X_1 \in \omega_1$. Ainsi, (3.40) est établie. Or, d'après (3.33), on a

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2), \quad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1,$$

i.e.

$$u_0(X_1, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_2, \quad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1.$$

D'où, par continuité de γ_0

$$\gamma_0 v_n(X_1, \cdot) = \ \Gamma_0 v_n(X_1, \cdot) \longrightarrow \gamma_0 u_0(X_1, \cdot) = 0 \qquad \text{dans } L^2(\partial\omega_2),$$

ce qui montre compte tenu de (3.39) que $\Gamma_0 u_0 = 0$. ■

Théorème de convergence

Dans ce qui suit, on établira un *résultat de convergence* et des *estimations d'erreur à l'intérieur* de Ω (plus précisément, loin de la frontière latérale $\partial\omega_1 \times \omega_2$) moyennant des hypothèses supplémentaires de *régularité à l'intérieur* portant sur les éléments de la sous-matrice A_{12}. Il est clair que pour tout ouvert ω_1' satisfaisant $\omega_1' \subset\subset \omega_1$, on peut trouver un autre ouvert ω_1'' tel que $\omega_1' \subset\subset \omega_1'' \subset\subset \omega_1$ et une fonction régulière ρ qui satisfait

$$\text{supp}\rho \subset \omega_1'', \quad \rho = 1 \text{ dans } \omega_1'. \tag{3.41}$$

Pour la suite, on suppose de plus que A_{12} vérifie la condition suivante

$$\partial_{x_k} A_{12} \in L^\infty(\omega_1'' \times \omega_2), \qquad \forall k = 1, ..., n,$$

i.e.

$$\partial_{x_k} a_{ij} \in L^\infty(\omega_1'' \times \omega_2), \qquad k = 1, ..., n, \quad i = 1, .., p, \quad j = p+1, ..., n. \tag{3.42}$$

De la proposition précédente, il découle alors

$$\rho^2 (u_\varepsilon - u_0) \in H_0^1(\Omega).$$

Pour $v \in H_0^1(\Omega)$ ($v(X_1, \cdot)$ est alors dans $H_0^1(\omega_2)$ p.p. $X_1 \in \omega_1$ d'après le lemme 3.1.1, on intégre (3.33) sur ω_1, puis on soustrait le résultat obtenu de (3.11), il vient

$$\varepsilon^2 \int_\Omega A_{11} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v dx + \varepsilon \int_\Omega A_{12} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v dx + \varepsilon \int_\Omega A_{21} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v dx$$

$$+ \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} v dx = 0.$$

Soustrayant de cette identité l'expression :

$$\varepsilon^2 \int_\Omega A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} v dx + \varepsilon \int_\Omega A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} v dx + \varepsilon \int_\Omega A_{21} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dx,$$

puis testant l'identité obtenue par $v = \rho^2 (u_\varepsilon - u_0)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \int_\Omega A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx \\
& + \varepsilon \int_\Omega A_{12} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx \\
& + \varepsilon \int_\Omega A_{21} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx \\
& + \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx \\
= \; & -\varepsilon^2 \int_\Omega A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx - \varepsilon \int_\Omega A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx \\
& - \varepsilon \int_\Omega A_{21} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_2} \left(\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)\right) dx.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho^2 A_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0)\, dx \\
= \; & -2\varepsilon^2 \int_\Omega \rho (u_\varepsilon - u_0) A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \rho dx - \varepsilon^2 \int_\Omega \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)\, dx \\
& -\varepsilon \int_\Omega \rho^2 A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)\, dx - 2\varepsilon \int_\Omega \rho (u_\varepsilon - u_0) A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \rho dx \\
& -\varepsilon \int_\Omega \rho^2 A_{21} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)\, dx - 2\varepsilon^2 \int_\Omega \rho (u_\varepsilon - u_0) A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho dx \\
& -\varepsilon \int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{12} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho^2 dx. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\rho^2 A_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0) = \; & \varepsilon^2 \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \\
& + \varepsilon \rho^2 A_{12} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \\
& + \varepsilon \rho^2 A_{21} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \\
& + \rho^2 A_{22} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0).
\end{aligned}$$

Calculons chaque terme séparément.

- $\varepsilon^2 A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (\rho^2 (u_\varepsilon - u_0))$

$= \varepsilon^2 \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) + 2\varepsilon^2 \rho (u_\varepsilon - u_0) A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho,$

d'où,

$\varepsilon^2 \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)$

$= \varepsilon^2 A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (\rho^2 (u_\varepsilon - u_0)) - 2\varepsilon^2 \rho (u_\varepsilon - u_0) A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho.$

- $\varepsilon A_{12} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} (\rho^2 (u_\varepsilon - u_0))$

$$= \varepsilon\rho^2 A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon(u_\varepsilon - u_0)A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho^2,$$

d'où,

$$\varepsilon\rho^2 A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)$$

$$= \varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\left(\rho^2(u_\varepsilon - u_0)\right) - \varepsilon(u_\varepsilon - u_0)A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho^2.$$

- $\rho^2\varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0) = \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_2}\left(\rho^2(u_\varepsilon - u_0)\right).$

- $\rho^2 A_{22}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0) = A_{22}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_2}\left(\rho^2(u_\varepsilon - u_0)\right).$

Compte tenu de (3.43), il vient

$$\rho^2 A_\varepsilon\nabla(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla(u_\varepsilon - u_0) = -\varepsilon^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_1}\left(\rho^2(u_\varepsilon - u_0)\right)$$

$$-\varepsilon A_{12}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_1}\left(\rho^2(u_\varepsilon - u_0)\right) - \varepsilon A_{21}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_2}\left(\rho^2(u_\varepsilon - u_0)\right)$$

$$-2\varepsilon^2\rho(u_\varepsilon - u_0)A_{11}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho - \varepsilon(u_\varepsilon - u_0)A_{12}\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho^2.$$

D'où, l'égalité (3.44).

Majorons successivement les deux premiers et les quatres derniers termes du second membre de l'équation (3.44), en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young (1.8) et de Poincaré :

- $\left|-2\varepsilon^2\int_\Omega \rho(u_\varepsilon - u_0)A_{11}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_1}\rho dx\right|$

$$\leq 2\varepsilon^2\int_\Omega |\rho|\,|u_\varepsilon - u_0|\,|A_{11}\nabla_{X_1}u_0|\,|\nabla_{X_1}\rho|\,dx$$

$= 2\varepsilon^2 \int_{\omega_1'' \times \omega_2} |\rho| \, |u_\varepsilon - u_0| \, |A_{11} \nabla_{X_1} u_0| \, |\nabla_{X_1} \rho| \, dx \qquad (\text{supp}\rho \subset \omega_1'')$

$\leq 2\varepsilon^2 \|\rho\|_\infty \Lambda_{11} \|\nabla_{X_1} \rho\|_\infty \int_{\omega_1'' \times \omega_2} |u_\varepsilon - u_0| \, |\nabla_{X_1} u_0| \, dx$

où $\Lambda_{11} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{p} \|a_{ij}\|^2_{L^\infty(\Omega)}}$ et $\|\rho\|_\infty = \max\limits_{X_1 \in \omega_1} |\rho(X_1)|$. D'où, en posant $C_3 = \Lambda_{11} \|\rho\|_\infty \|\nabla_{X_1} \rho\|_\infty$,

$$\left| -2\varepsilon^2 \int_\Omega \rho \left(u_\varepsilon - u_0\right) A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \rho dx \right| \leq \varepsilon^2 C_3 [\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \|\nabla_{X_1} u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)}]$$

- $\left| -\varepsilon^2 \int_\Omega \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \left(u_\varepsilon - u_0\right) dx \right|$

$\leq \varepsilon^2 \int_\Omega |\rho A_{11} \nabla_{X_1} u_0| \, |\rho \nabla_{X_1} \left(u_\varepsilon - u_0\right)| \, dx$

$\leq \varepsilon^2 \|\rho\|_\infty \Lambda_{11} \int\limits_\Omega |\nabla_{X_1} u_0| \, |\rho \nabla_{X_1} \left(u_\varepsilon - u_0\right)| \, dx$

$= \varepsilon^2 C_4 \int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} |\nabla_{X_1} u_0| \, |\rho \nabla_{X_1} \left(u_\varepsilon - u_0\right)| \, dx$

$\leq \varepsilon^2 C_4 [\frac{1}{2\theta_1} \|\nabla_{X_1} u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \frac{\theta_1}{2} \|\rho \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)}]$

$\leq \frac{\varepsilon^2 C_4}{2\theta_1} \|\nabla_{X_1} u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \varepsilon^2 \frac{C_4 \theta_1}{2} \|\rho \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)}$,

où $C_4 = \Lambda_{11} \|\rho\|_\infty$ et $\theta_1 > 0$ arbitraire.

- $\left| -2\varepsilon \int_\Omega \rho \left(u_\varepsilon - u_0\right) A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \rho dx \right|$

$\leq 2\varepsilon \int_\Omega |\rho \left(u_\varepsilon - u_0\right)| \, |A_{12} \nabla_{X_2} u_0| \, |\nabla_{X_1} \rho| \, dx$

$= 2\varepsilon \int_{\omega_1'' \times \omega_2} |\rho \left(u_\varepsilon - u_0\right)| \, |A_{12} \nabla_{X_2} u_0| \, |\nabla_{X_1} \rho| \, dx$

$\leq 2\Lambda_{12} \|\nabla_{X_1} \rho\|_\infty \int_{\omega_1'' \times \omega_2} |\rho \left(u_\varepsilon - u_0\right)| \, |\varepsilon \nabla_{X_2} u_0| \, dx$

$= 2C_5[\frac{\theta_2}{2}\left\|\rho(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \frac{\varepsilon^2}{2\theta_2}\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}]$

$= C_5\theta_2\left\|\rho(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + C_5\frac{\varepsilon^2}{\theta_2}\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}$

$\leq \theta_2 C_5 C_\Omega^2\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + C_5\frac{\varepsilon^2}{\theta_2}\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}$

où $C_5 = \Lambda_{12}\left\|\nabla_{X_1}\rho\right\|_\infty$ avec $\Lambda_{12} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n}\left\|a_{ij}\right\|^2_{L^\infty(\Omega)}}$ et $\theta_2 > 0$ arbitraire.

- $\left|-\varepsilon\int_\Omega \rho^2 A_{21}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)dx\right|$

$\leq \varepsilon\int_\Omega\left|\rho A_{21}\nabla_{X_1}u_0\right|\left|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right|dx$

$= \varepsilon\int_{\omega_1''\times\omega_2}\left|\rho A_{21}\nabla_{X_1}u_0\right|\left|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right|dx$

$\leq \Lambda_{21}\left\|\rho\right\|_\infty\int_{\omega_1''\times\omega_2}\varepsilon\left|\nabla_{X_1}u_0\right|\left|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right|dx$

$\leq C_6[\frac{\varepsilon^2}{2\theta_3}\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \frac{\theta_3}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}]$

$= \frac{\varepsilon^2}{2\theta_3}C_6\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \frac{\theta_3}{2}C_6\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$

où $C_6 = \Lambda_{21}\left\|\rho\right\|_\infty$ avec $\Lambda_{21} = \sqrt{\sum_{i=p+1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left\|a_{ij}\right\|^2_{L^\infty(\Omega)}}$ et $\theta_3 > 0$ arbitraire.

- $\left|-2\varepsilon^2\int_\Omega \rho(u_\varepsilon - u_0)A_{11}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho dx\right|$

$\leq 2\varepsilon^2\int_\Omega\left|(u_\varepsilon - u_0)A_{11}\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right|\left|\nabla_{X_1}\rho\right|dx$

$\leq 2\varepsilon^2\Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho\right\|_\infty[\frac{1}{2\theta_4}\left\|u_\varepsilon - u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \frac{\theta_4}{2}\left\|\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}]$

$= \frac{\varepsilon^2}{\theta_4}C_7\left\|u_\varepsilon - u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \varepsilon^2\theta_4 C_7\left\|\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$

où $C_7 = \Lambda_{11} \|\nabla_{X_1}\rho\|_\infty$ et $\theta_4 > 0$ arbitraire.

- $\left|-\varepsilon \int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{12} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho^2 dx\right|$

$\leq \left|2 \int_\Omega \varepsilon (u_\varepsilon - u_0) A_{12} \rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho dx\right|$

$\leq 2 \int_\Omega \varepsilon |u_\varepsilon - u_0| \left|A_{12} \rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)\right| |\nabla_{X_1} \rho dx|$

$\leq 2\Lambda_{12} \|\nabla_{X_1}\rho\|_\infty [\frac{\varepsilon^2}{2\theta_5} \|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \frac{\theta_5}{2} \|\rho \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)}]$

$= \frac{\varepsilon^2}{\theta_5} C_5 \|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \theta_5 C_5 \|\rho \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)}$

où $\theta_5 > 0$ est arbitraire.

Combinant (3.44) avec toutes les majorations ci-dessus, on obtient moyennant l'inégalité (3.6)

$$\begin{aligned}
& \lambda\varepsilon^2 \|\rho \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq \; & -\varepsilon \int_\Omega \rho^2 A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \, dx \\
& + \left(C_3 + \frac{C_4}{2\theta_1} + \frac{C_6}{2\theta_3}\right) \varepsilon^2 \|\nabla_{X_1} u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} \\
& + \frac{C_5}{\theta_2} \varepsilon^2 \|\nabla_{X_2} u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} \\
& + \left(C_3 + \frac{C_5}{\theta_5} + \frac{C_7}{\theta_4}\right) \varepsilon^2 \|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} \\
& + \left(C_5 C_\Omega^2 \theta_2 + \frac{C_6 \theta_3}{2} + C_5 \theta_5\right) \|\rho \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \left(\frac{C_4 \theta_1}{2} + C_7 \theta_4\right) \varepsilon^2 \|\rho \nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Choisissant θ_1 et θ_4 de sorte que $\frac{C_4}{2}\theta_1 + C_7\theta_4 = \frac{\lambda}{2}$ et $\theta_2, \theta_3,\ \theta_5$ telles que

$$C_5 C_\Omega^2 \theta_2 + \frac{C_6}{2} \theta_3 + C_5 \theta_5 = \frac{\lambda}{2},$$

il vient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 \left\|\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & -\varepsilon\int_\Omega \rho^2 A_{12}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\,dx \\
& +C_8\varepsilon^2\left(\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \|\nabla_{X_1}u_0\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} + \|\nabla_{X_2}u_0\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}\right) \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

où $C_8 = \max\left\{C_3 + \frac{C_4}{2\theta_1} + \frac{C_6}{2\theta_3},\ \frac{C_5}{\theta_2},\ C_3 + \frac{C_5}{\theta_5} + \frac{C_7}{\theta_4}\right\}$ est indépendante de ε.

Estimons le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus. Pour cela remarquons d'abord que pour tous $i = 1, ..., p,\quad j = p+1, ..., n$, on a

$$\int_\Omega \partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)\right)\partial_{x_j}u_0 dx = \int_\Omega \partial_{x_j}\left(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)\right)\partial_{x_i}u_0 dx. \qquad (3.46)$$

En effet, comme $\rho^2(u_\varepsilon - u_0) \in H_0^1(\Omega)$ et les $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ de la sous-matrice A_{12} vérifient la condition (3.42), il s'ensuit que $\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0) \in H_0^1(\omega_1''\times\omega_2)$. Soit (ψ_m) une suite de $\mathcal{D}(\omega_1''\times\omega_2)$ telle que

$$\psi_m \longrightarrow \rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0) \qquad \text{dans } H^1(\omega_1''\times\omega_2),$$

par suite

$$\begin{cases}
\partial_{x_i}\psi_m \longrightarrow \partial_{x_i}(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)) & \text{dans } L^2(\omega_1''\times\omega_2) \\
\partial_{x_j}\psi_m \longrightarrow \partial_{x_j}(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)) & \text{dans } L^2(\omega_1''\times\omega_2).
\end{cases}$$

Par conséquent,

$$\int_{\omega_1''\times\omega_2} \partial_{x_i}\psi_m\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega \partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)\right)\varphi dx \qquad \forall\varphi \in L^2(\omega_1''\times\omega_2), \qquad (3.47)$$

$$\int_{\omega_1''\times\omega_2} \partial_{x_j}\psi_m\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega \partial_{x_j}\left(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)\right)\varphi dx \qquad \forall\varphi \in L^2(\omega_1''\times\omega_2). \qquad (3.48)$$

Prenant $\varphi = \partial_{x_j} u_0$ dans (3.47) et $\varphi = \partial_{x_i} u_0$ dans (3.48), il vient

$$\int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \partial_{x_i} \psi_m \partial_{x_j} u_0 dx \longrightarrow \int\limits_{\Omega} \partial_{x_i} \left(\rho^2 a_{ij} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \right) \partial_{x_j} u_0 dx,$$

$$\int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \partial_{x_j} \psi_m \partial_{x_i} u_0 dx \longrightarrow \int\limits_{\Omega} \partial_{x_j} \left(\rho^2 a_{ij} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \right) \partial_{x_i} u_0 dx.$$

D'autre part, en faisant une intégration par partie et en observant que $\psi_m \in \mathcal{D}\left(\omega_1'' \times \omega_2\right)$, on obtient

$$\int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \partial_{x_i} \psi_m \partial_{x_j} u_0 dx = - \int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \partial_{x_j} (\partial_{x_i} \psi_m) u_0 dx = - \int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \partial_{x_i} (\partial_{x_j} \psi_m) u_0 dx = \int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \partial_{x_j} \psi_m \partial_{x_i} u_0 dx.$$

On conclut alors d'après l'unicité de la limite.

Grâce à l'égalité (3.46), on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \rho^2 A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) dx \\
= \; & \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \rho^2 a_{ij} \partial_{x_j} u_0 \partial_{x_i} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) dx \\
= \; & \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_{x_i} (\rho^2 a_{ij} \left(u_\varepsilon - u_0 \right)) \partial_{x_j} u_0 dx - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \partial_{x_i} (\rho^2 a_{ij}) \partial_{x_j} u_0 dx \\
= \; & \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left\{ \rho^2 a_{ij} \partial_{x_i} u_0 \partial_{x_j} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) + \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \partial_{x_j} (\rho^2 a_{ij}) \partial_{x_i} u_0 \right\} dx \\
& - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \partial_{x_i} \left(\rho^2 a_{ij} \right) \partial_{x_j} u_0 dx
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int_\Omega \rho^2 A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) dx \\
& = \textstyle\int_\Omega \rho^2 A_{12} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_2} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) dx + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \rho^2 \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \partial_{x_j} a_{ij} \partial_{x_i} u_0 dx \\
& - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(u_\varepsilon - u_0 \right) \partial_{x_i} \left(\rho^2 a_{ij} \right) \partial_{x_j} u_0 dx
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Avec cette décomposition, il est possible d'estimer le premier terme du second membre de (3.45). En effet

$$\begin{aligned}\left|-\varepsilon\int_\Omega \rho^2 A_{12}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_1}\left(u_\varepsilon-u_0\right)dx\right| &\leq \varepsilon\left|\int_\Omega \rho^2 A_{12}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon-u_0\right)dx\right| \\ &+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n}\varepsilon\left|\int_\Omega \rho^2\left(u_\varepsilon-u_0\right)\partial_{x_j}a_{ij}\partial_{x_i}u_0dx\right| \\ &+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n}\varepsilon\left|\int_\Omega \left(u_\varepsilon-u_0\right)\partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}\right)\partial_{x_j}u_0dx\right|.\end{aligned}$$

Majorons chaque terme séparement en utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

- $\varepsilon\left|\int_\Omega \rho^2 A_{12}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon-u_0\right)dx\right|$

$$\begin{aligned}&\leq \int_\Omega \left|\varepsilon\rho A_{12}\nabla_{X_1}u_0\right|\left|\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon-u_0\right)\right|dx \\ &\leq \Lambda_{12}\left\|\rho\right\|_\infty\int_{\omega_1''\times\omega_2}\left|\varepsilon\nabla_{X_1}u_0\right|\left|\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon-u_0\right)\right|dx \\ &\leq \tfrac{C_9}{2\theta_6}\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}+\tfrac{C_9\theta_6}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)},\end{aligned} \tag{3.50}$$

où $C_9=\Lambda_{12}\left\|\rho\right\|_\infty$ et $\theta_6>0$ arbitraire.

- $\varepsilon\left|\int_\Omega \rho^2\left(u_\varepsilon-u_0\right)\partial_{x_j}a_{ij}\partial_{x_i}u_0dx\right|$

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_{\omega_1''\times\omega_2}\left|\rho\right|\left|\rho\left(u_\varepsilon-u_0\right)\right|\left|\partial_{x_j}a_{ij}\right|\left|\varepsilon\partial_{x_i}u_0\right|dx \\ &\leqslant \left\|\rho\right\|_\infty\left\|\partial_{x_j}a_{ij}\right\|_{L^\infty(\omega_1''\times\omega_2)}\int_{\omega_1''\times\omega_2}\left|\rho\left(u_\varepsilon-u_0\right)\right|\left|\varepsilon\partial_{x_i}u_0\right|dx \\ &\leqslant C_{10}\left(\tfrac{\theta_7}{2}\left\|\rho(u_\varepsilon-u_0)\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}+\tfrac{\varepsilon^2}{2\theta_7}\left\|\partial_{x_i}u_0\right\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}\right)\end{aligned}$$

où $C_{10}=\left\|\rho\right\|_\infty\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ p+1\leqslant j\leqslant n}}\left\|\partial_{x_j}a_{ij}\right\|_{L^\infty(\omega_1''\times\omega_2)}$ et $\theta_7>0$ arbitraire.

D'où, en utilisant l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left|\int_{\Omega}\rho^2\left(u_\varepsilon-u_0\right)\partial_{x_j}a_{ij}\partial_{x_i}u_0dx\right| \\
\leq\ &\frac{C_{\omega_2}^2C_{10}\theta_7}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C_{10}}{2\theta_7}\varepsilon^2\left\|\partial_{x_i}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^2,
\end{aligned}$$

où C_{ω_2} est la constante de Poincaré associée à l'ouvert ω_2. Par suite

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n}\varepsilon\left|\int_{\Omega}\rho^2\left(u_\varepsilon-u_0\right)\partial_{x_j}(a_{ij})\partial_{x_i}u_0dx\right| \\
&\leqslant p(n-p)\tfrac{C_{\omega_2}^2C_{10}\theta_7}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+(n-p)\tfrac{C_{10}}{2\theta_7}\varepsilon^2\sum_{i=1}^{p}\left\|\partial_{x_i}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^2 \\
&=p(n-p)\tfrac{C_{\omega_2}^2C_{10}\theta_7}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon-u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+(n-p)\tfrac{C_{10}}{2\theta_7}\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

- $\varepsilon \left| \int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon - u_0)\, \partial_{x_i} (\rho^2 a_{ij})\, \partial_{x_j} u_0 dx \right|$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} 2\rho\, (u_\varepsilon - u_0)\, a_{ij}\, (\partial_{x_i} \rho) \left(\varepsilon \partial_{x_j} u_0\right) dx + \int\limits_{\Omega} \rho^2\, (u_\varepsilon - u_0)\, \partial_{x_i} a_{ij} \left(\varepsilon \partial_{x_j} u_0\right) dx \right|$$

$$\leqslant 2 \left\| a_{ij} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \partial_{x_i} \rho \right\|_\infty \int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \left| \rho\, (u_\varepsilon - u_0) \right| \left| \varepsilon \partial_{x_j} u_0 \right| dx$$

$$+ \left\| \rho \right\|_\infty \left\| \partial_{x_i} a_{ij} \right\|_{L^\infty(\omega_1'' \times \omega_2)} \int\limits_{\omega_1'' \times \omega_2} \left| \rho\, (u_\varepsilon - u_0) \right| \left| \varepsilon \partial_{x_j} u_0 \right| dx$$

$$\leqslant \left(2 \left\| a_{ij} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \partial_{x_i} \rho \right\|_\infty + \left\| \rho \right\|_\infty \left\| \partial_{x_i} a_{ij} \right\|_{L^\infty(\omega_1'' \times \omega_2)} \right)$$

$$\times \left(\tfrac{\theta_8}{2} \left\| \rho\, (u_\varepsilon - u_0) \right\|^2_{L^2(w_1'' \times w_2)} + \tfrac{\varepsilon^2}{2\theta_8} \left\| \partial_{x_j} u_0 \right\|^2_{L^2(w_1'' \times w_2)} \right)$$

où $\theta_8 > 0$ est arbitraire. Ainsi,

$\varepsilon \left| \int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon - u_0)\, \partial_{x_i} (\rho^2 a_{ij})\, \partial_{x_j} u_0 dx \right|$

$$\leqslant \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ p+1 \leqslant j \leqslant n}} \left(2 \left\| a_{ij} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \partial_{x_i} \rho \right\|_\infty + \left\| \rho \right\|_\infty \left\| \partial_{x_i} a_{ij} \right\|_{L^\infty(\omega_1'' \times \omega_2)} \right)$$

$$\times \left(\tfrac{\theta_8}{2} \left\| \rho\, (u_\varepsilon - u_0) \right\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \tfrac{\varepsilon^2}{2\theta_8} \left\| \partial_{x_j} u_0 \right\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} \right)$$

$$\leq \tfrac{C^2_{\omega_2} C_{11} \theta_8}{2} \left\| \rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \right\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} + \tfrac{C_{11} \varepsilon^2}{2\theta_8} \left\| \partial_{x_j} u_0 \right\|^2_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)}$$

où

$$C_{11} = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ p+1 \leqslant j \leqslant n}} \left(2 \left\| a_{ij} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \partial_{x_i} \rho \right\|_\infty + \left\| \rho \right\|_\infty \left\| \partial_{x_i} a_{ij} \right\|_{L^\infty(\omega_1'' \times \omega_2)} \right),$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{n}\varepsilon\left|\int_{\Omega}(u_{\varepsilon}-u_{0})\,\partial_{x_i}\left(\rho^{2}a_{ij}\right)\partial_{x_j}u_{0}dx\right| \tag{3.52}$$

$$\leq \tfrac{p(n-p)}{2}\tfrac{C_{\omega_2}^{2}C_{11}\theta_8}{2}\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}+p\tfrac{C_{11}}{2\theta_8}\varepsilon^{2}\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}$$

Ainsi, grâce à (3.50), (3.51), (3.52), on peut écrire :

$$\left|-\varepsilon\textstyle\int_{\Omega}\rho^{2}A_{12}\nabla_{X_2}u_0\cdot\nabla_{X_1}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)dx\right|$$

$$\leq\left(\tfrac{C_9}{2\theta_6}+\tfrac{(n-p)C_{10}}{2\theta_7}\right)\varepsilon^{2}\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}+\tfrac{pC_{11}}{2\theta_8}\varepsilon^{2}\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}$$

$$+\left(\tfrac{C_9\theta_6}{2}+p(n-p)\tfrac{C_{\omega_2}^{2}C_{10}\theta_7}{2}+\tfrac{p(n-p)}{2}\tfrac{C_{\omega_2}^{2}C_{11}\theta_8}{2}\right)\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}$$

Choisissant dans l'inégalité ci-dessus θ_6,θ_7 et θ_8 de sorte que

$$\frac{C_9\theta_6}{2}+p(n-p)\frac{C_{\omega_2}^{2}C_{10}\theta_7}{2}+\frac{p(n-p)}{2}\frac{C_{\omega_2}^{2}C_{11}\theta_8}{2}=\frac{\lambda}{4},$$

et combinant l'inégalité ainsi obtenue avec l'inégalité (3.45), il vient

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{2}\varepsilon^{2}\left\|\rho\nabla_{X_1}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}+\frac{\lambda}{4}\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}\\ \leq\;& C_{12}\varepsilon^{2}\left(\left\|u_{\varepsilon}-u_{0}\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}+\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}+\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}\right)\end{aligned}$$

où $C_{12}=\max\left\{C_8,\frac{C_9}{2\theta_6}+\frac{(n-p)C_{10}}{2\theta_7},\frac{pC_{11}}{2\theta_8}\right\}$. d'où,

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2}\left\|\rho\nabla_{X_1}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}+\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_{\varepsilon}-u_{0}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}\\ \leq\;& C_{13}\varepsilon^{2}\left(\left\|u_{\varepsilon}-u_{0}\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}+\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}+\left\|\nabla_{X_2}u_0\right\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}^{2}\right)\end{aligned}$$

où la constante $C_{13}=\frac{4C_{12}}{\lambda}$ est indépendante de ε.

Or, en vertu de l'inégalité (3.18) et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)} &\leq \|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\
&\leq 2C_\Omega^2 \|\nabla_{X_2} u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\frac{C_\Omega^4 \|f\|^2_{L^2(\Omega)}}{\lambda^2} + 2\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Insérons cette inégalité dans l'inégalité précédente, il vient en définitive

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \|\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\; & C_{14}\varepsilon^2 \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{X_1} u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{X_2} u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
=\; & C_{14}\varepsilon^2 \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

où C_{14} est une constante indépendante de ε. De là, on tire, compte tenu des propriétés de ρ (3.41) et de l'inégalité de Poincaré, les majorations suivantes :

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)} \leqslant C\varepsilon, \tag{3.53}$$

$$\|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)} \leqslant C. \tag{3.54}$$

En effet, d'une part

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} &= \int_{\omega_1'\times\omega_2} |u_\varepsilon - u_0|^2\, dx = \int_{\omega_1'\times\omega_2} |\rho(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&\leq \int_\Omega |\rho(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx = \|\rho(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_\Omega^2 \|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_\Omega^2 C_{14}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

d'où la première estimation dans (3.53) avec $C = C_\Omega\sqrt{C_{14}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right)}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} &= \int\limits_{\omega_1'\times\omega_2} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&= \int\limits_{\omega_1'\times\omega_2} |\rho\nabla_{X_2}\,(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} |\rho\nabla_{X_2}\,(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&\leq C_{14}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\varepsilon^2
\end{aligned}$$

d'où, la deuxième inégalité dans (3.53). Enfin,

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} &= \int\limits_{\omega_1'\times\omega_2} |\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&= \int\limits_{\omega_1'\times\omega_2} |\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} |\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)|^2\, dx \\
&= \|\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} \\
&\leq C_{14}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

d'où (3.54).

Maintenant de (3.54), on déduit

$$\nabla_{X_1}\,(u_\varepsilon - u_0) \rightharpoonup 0 \qquad \text{dans } L^2\,(\omega_1' \times \omega_2)\,.$$

En effet, comme $|\nabla_{X_1}\,(u_\varepsilon - u_0)|$ est borné dans $L^2\,(\omega_1' \times \omega_2)$ et $\mathcal{D}\,(\omega_1' \times \omega_2)$ est dense dans $L^2\,(\omega_1' \times \omega_2)\,,$ il suffit de vérifier que

$$\int\limits_{\omega_1'\times\omega_2} \nabla_{X_1}\,(u_\varepsilon - u_0)\cdot\varphi\; dx \longrightarrow 0 \qquad \forall\varphi \in (\mathcal{D}\,(\omega_1' \times \omega_2))^p\,,$$

ce qui s'ensuit facilement grâce à la formule de Green et du fait que $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1'\times\omega_2} \nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\varphi\, dx &= -\int_{\omega_1'\times\omega_2} (u_\varepsilon - u_0)\nabla_{X_1}\cdot\varphi\, dx \\ &= -(u_\varepsilon - u_0, \nabla_{X_1}\cdot\varphi)_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

où $\nabla_{X_1}\cdot\varphi = \operatorname{div}_{X_1}\varphi = \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}\varphi$.
Nous venons d'établir le théorème suivant.

Théorème 3.1.2 *Supposons que les hypothèses (3.1), (3.2), (3.9), (3.34) et (3.42) ont lieu. Alors pour tout*

$$\omega_1' \subset\subset \omega_1,$$

il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\omega_1'\times\omega_2)} \leq C\varepsilon, \tag{3.55}$$

et

$$\nabla_{X_1}u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_1}u_0 \qquad \text{dans } L^2(\omega_1'\times\omega_2). \tag{3.56}$$

Cas d'une matrice diagonale par blocs

En combinant (3.56) avec (3.14), on voit que la convergence de u_ε vers u_0 dans $H^1(\omega_1'\times\omega_2)-$ faible est établie. Dans ce qui suit, on montre que la convergence est forte tout en améliorant l'ordre de convergence pourvu que la matrice A possède une structure diagonale par blocs. Plus précisément

Théorème 3.1.3 *Sous les hypothèses du théorème 3.1.2, si de plus*

$$A_{12} = A_{21} = 0, \tag{3.57}$$

alors :

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \qquad \textit{dans } H^1\left(\omega_1' \times \omega_2\right),$$

avec

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)} = o(\varepsilon), \tag{3.58}$$

$$\|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)} = o(1). \tag{3.59}$$

Démonstration. Compte tenu de (3.57), on peut réécrire (3.44) comme suit :

$$\begin{aligned}
&\lambda \|\rho\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{\varepsilon^2}\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \tfrac{1}{\varepsilon^2}\textstyle\int_\Omega \rho^2 A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla(u_\varepsilon - u_0)\,dx \\
&\leq -\textstyle\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{11}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho^2 dx \qquad (3.60)\\
&-\textstyle\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{11}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_1}\rho^2 dx \\
&-\textstyle\int_\Omega \rho^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\,dx.
\end{aligned}$$

Montrons que chaque terme du membre de droite tend vers 0. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on écrit

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{11}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho^2 dx\right| \\
\leq\ & \int_{\omega_1''\times\omega_2} |u_\varepsilon - u_0|\,|A_{11}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)|\,\left|\nabla_{X_1}\rho^2\right| dx \\
\leq\ & \Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho^2\right\|_\infty \int_{\omega_1''\times\omega_2} |u_\varepsilon - u_0|\,|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)|\,dx \\
\leq\ & \Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho^2\right\|_\infty \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}\,\|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\omega_1''\times\omega_2)}
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant ω_1' par ω_1'' dans le théorème 3.1.2 (loisible),

$$\left| -\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0)\, A_{11} \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_1} \rho^2 dx \right| \le C\varepsilon \longrightarrow 0.$$

De même,

$$\begin{aligned}
& \left| -\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0)\, A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} \rho^2 dx \right| \\
\le\ & \int_{\omega_1'' \times \omega_2} |u_\varepsilon - u_0|\, |A_{11} \nabla_{X_1} u_0| \left| \nabla_{X_1} \rho^2 \right| dx \\
\le\ & \Lambda_{11} \left\| \nabla_{X_1} \rho^2 \right\|_\infty \int_{\omega_1'' \times \omega_2} |u_\varepsilon - u_0|\, |\nabla_{X_1} u_0|\, dx \\
\le\ & \Lambda_{11} \left\| \nabla_{X_1} \rho^2 \right\|_\infty \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} \|\nabla_{X_1} u_0\|_{L^2(\Omega)} \\
\le\ & C\varepsilon \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
& -\int_\Omega \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0)\, dx \\
=\ & -\int_{\omega_1'' \times \omega_2} \sum_{i,j=1}^{p} \rho^2 a_{ij} \partial_{x_j} u_0 \partial_{x_i} (u_\varepsilon - u_0) dx \\
=\ & -\sum_{i,j=1}^{p} \left(\rho^2 a_{ij} \partial_{x_j} u_0, \partial_{x_i} (u_\varepsilon - u_0) \right)_{L^2(\omega_1'' \times \omega_2)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

d'après (3.56) avec ω_1'' au lieu de ω_1'. Ainsi,

$$\lambda \left\| \rho \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \left\| \rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \longrightarrow 0,$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, ce qui entraîne (3.58) et (3.59) vu que $\rho = 1$ sur $\omega_1' \times \omega_2$. ■

Théorème 3.1.4 *Sous les hypothèses du théorème 3.1.3, et si, en outre, la limite u_0 et la matrice A_{11} sont suffisamment régulières dans les directions X_1, à savoir*

$$\nabla_{X_1}^2 u_0 \in L^2(\Omega) \quad et \quad \nabla_{X_1} A_{11} \in L^\infty(\Omega), \tag{3.61}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)} &= O\left(\varepsilon^2\right), \\ \|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2\left(\omega_1'\times\omega_2\right)} &= O\left(\varepsilon\right). \end{aligned}$$

(Ici $\nabla^2_{X_1} u_0 = \left(\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_0\right)_{1\le i,j\le p}$ *est la matrice Hessienne dans les directions* X_1*).*

Remarque 3.1.1 Comme nous avons vu dans la proposition 3.1.1, la régularité de u_0 dans les directions X_1 dépend de la régularité de A_{22} et f dans les mêmes directions.

Démonstration. En vertu de (3.41) et (3.61), on a pour presque tout $X_2 \in \omega_2$,

$$\rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} u_0 (., X_2) \in H^1_0(\omega_1).$$

Par conséquent, par la formule de Green (1.16) on obtient

$$\int_\Omega \rho^2 A_{11} \nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\, dx = -\int_\Omega \left[\nabla_{X_1}\cdot\left(\rho^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_0\right)\right](u_\varepsilon - u_0)\, dx. \tag{3.62}$$

En effet, en intégrant par partie on trouve moyennant (3.41)

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_1} \left[\nabla_{X_1}\cdot(\rho^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_0)\right](u_\varepsilon - u_0)\, dX_1 \\ &= \int_{\omega_1} \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}\left(\rho^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_0\right)_i (u_\varepsilon - u_0)\, dX_1 \\ &= \int_{\omega_1} \sum_{i,j=1}^p \partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}\partial_{x_j} u_0\right)(u_\varepsilon - u_0)\, dX_1 \\ &= -\sum_{i,j=1}^p \int_{\omega_1} \rho^2 a_{ij}\partial_{x_j} u_0 \partial_{x_i}(u_\varepsilon - u_0)\, dX_1 + \sum_{i,j=1}^p \int_{\partial\omega_1} \rho^2 a_{ij}(\partial_{x_j} u_0)(u_\varepsilon - u_0)\, \nu_i d\sigma(X_1) \\ &= -\sum_{i,j=1}^p \int_{\omega_1} \rho^2 a_{ij}\partial_{x_j} u_0 \partial_{x_i}(u_\varepsilon - u_0)\, dX_1 \\ &= -\int_{\omega_1} \rho^2 A_{11}\nabla_{X_1} u_0 \cdot \nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\, dX_1. \end{aligned}$$

ce qui donne par intégration sur ω_2, la relation (3.62).

Substituant cette dernière dans (3.60) et appliquant les inégalités de Poincaré et Young au second membre, il vient :

• $\left|-\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{11}\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\cdot\nabla_{X_1}\rho^2 dx\right|$

$$\leqslant 2\int_{\omega_1''\times\omega_2} \left|\tfrac{1}{\varepsilon}\rho(u_\varepsilon - u_0)\right| \Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho\right\|_\infty \left|\varepsilon\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right| dx$$

$$\leqslant 2\Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho\right\|_\infty \left[\tfrac{C_{\omega_2}^2}{2\theta_9}\left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\theta_9}{2}\left\|\varepsilon\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right\|_{L^2\left(\omega_1''\times\omega_2\right)}^2\right]$$

$$= \tfrac{C_7 C_{\omega_2}^2}{\theta_9}\tfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_7\theta_9\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\right\|_{L^2\left(\omega_1''\times\omega_2\right)}^2.$$

où $C_7 = \Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho\right\|_\infty$, et $\theta_9 > 0$ arbitraire.

• $\left|-\int_\Omega (u_\varepsilon - u_0) A_{11}\nabla_{X_1}u_0\cdot\nabla_{X_1}\rho^2 dx\right|$

$$\leqslant 2\Lambda_{11}\left\|\nabla_{X_1}\rho\right\|_\infty \left[\tfrac{C_{\omega_2}^2}{2\theta_{10}}\left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\theta_{10}}{2}\left\|\varepsilon\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right]$$

$$\leqslant \tfrac{C_7 C_{\omega_2}^2}{\theta_{10}}\tfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\rho\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_7\theta_{10}\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où $\theta_{10} > 0$ arbitraire.

• $\left|\int_\Omega \left[\nabla_{X_1}\cdot\left(\rho^2 A_{11}\nabla_{X_1}u_0\right)\right](u_\varepsilon - u_0)\,dx\right|$

$$= \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^p \left[\partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}\right)\partial_{x_j}u_0 + \rho^2 a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_0\right](u_\varepsilon - u_0)\,dx\right|$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^p \int_\Omega \left|\partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}\right)\left(\partial_{x_j}u_0\right)(u_\varepsilon - u_0)\right| dx + \sum_{i,j=1}^p \int_\Omega \left|\rho^2 a_{ij}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_0)(u_\varepsilon - u_0)\right| dx,$$

Or,

1) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^p \int_\Omega \left|\partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}\right)\left(\partial_{x_j}u_0\right)(u_\varepsilon - u_0)\right| dx$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{p} \int_{\Omega} \left|2\rho\left(\partial_{x_i}\rho\right) a_{ij}\varepsilon(\partial_{x_j}u_0)\tfrac{1}{\varepsilon}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right| dx + \sum_{i,j=1}^{p} \int_{\Omega} \left|\rho\partial_{x_i}a_{ij}\varepsilon\partial_{x_j}u_0\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right| dx$$

1.1) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{p} \int_{\Omega} \left|2\rho\left(\partial_{x_i}\rho\right) a_{ij}\varepsilon\partial_{x_j}u_0\tfrac{1}{\varepsilon}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right| dx$

$$\leq 2p \max_{1\leq i,j\leq p} \left\|a_{ij}\right\|_\infty \max_{1\leq i,j\leq p} \left\|\partial_{x_i}\rho\right\|_\infty \left\{ \sum_{j=1}^{p} \left[\tfrac{C_{\omega_2}^2}{2\theta_{11}} \left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\theta_{11}}{2}\left\|\varepsilon\partial_{x_j}\left(u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \right\}$$

$$= p\tfrac{C_{15}C_{\omega_2}^2}{\theta_{11}}\tfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{15}\theta_{11}\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

où $C_{15} = p\max\limits_{1\leq i,j\leq p}\left\|a_{ij}\right\|_\infty \max\limits_{1\leq i,j\leq p}\left\|\partial_{x_i}\rho\right\|_\infty$, et $\theta_{11} > 0$ arbitraire.

1.2) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{p} \int_{\Omega} \left|\rho\partial_{x_i}a_{ij}\varepsilon\partial_{x_j}u_0\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right| dx$

$$\leqslant p\max_{1\leq i,j\leq p}\left\|\partial_{x_i}a_{ij}\right\|_\infty \left\|\rho\right\|_\infty \sum_{j=1}^{p} \left[\tfrac{C_{\omega_2}^2}{2\theta_{12}} \left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\theta_{12}}{2}\varepsilon^2\left\|\partial_{x_j}\left(u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

$$= p\tfrac{C_{16}C_{\omega_2}^2}{2\theta_{12}}\tfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{C_{16}\theta_{12}}{2}\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

où $C_{16} = p\max\limits_{1\leq i,j\leq p}\left\|\partial_{x_i}a_{ij}\right\|_\infty \left\|\rho\right\|_\infty$, $\theta_{12} > 0$ arbitraire.

2) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{p} \int_{\Omega} \left|\rho^2 a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_0\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right| dx$

$$\leqslant \max_{1\leq i,j\leq p}\left\|a_{ij}\right\|_\infty \left\|\rho\right\|_\infty \sum_{i,j=1}^{p} \left[\tfrac{C_{\omega_2}^2}{2\theta_{13}} \left\|\tfrac{1}{\varepsilon}\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\theta_{13}}{2}\varepsilon^2\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

$$= p^2\tfrac{C_{17}C_{\omega_2}^2}{2\theta_{13}}\tfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{C_{17}\theta_{13}}{2}\varepsilon^2\left\|\nabla_{X_1}^2u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où $C_{17} = \max\limits_{1\leq i,j\leq p}\left\|a_{ij}\right\|_\infty \left\|\rho\right\|_\infty$, $\theta_{13} > 0$ arbitraire.

Combinant toutes les majorations précédentes, on obtient :

$$\lambda\left\|\rho\nabla_{X_1}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\lambda}{\varepsilon^2}\left\|\rho\nabla_{X_2}\left(u_\varepsilon - u_0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$\leq C_{\omega_2}^2 \left(\frac{C_7}{\theta_9} + \frac{C_7}{\theta_{10}} + p\frac{C_{15}}{\theta_{11}} + p\frac{C_{16}}{2\theta_{12}} + p^2\frac{C_{17}}{2\theta_{13}}\right) \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$

$+C_7\theta_9\varepsilon^2 \left\| \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2\left(\omega_1'' \times \omega_2\right)}^2 + \left(C_7\theta_{10} + C_{15}\theta_{11} + \frac{C_{16}\theta_{12}}{2}\right) \varepsilon^2 \left\| \nabla_{X_1} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2$
$+\frac{C_{17}\theta_{13}}{2}\varepsilon^2 \left\| \nabla_{X_1}^2 u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$

On choisit, dans l'inégalité ci-dessus, $\theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}$ et θ_{13} de sorte que

$$C_{\omega_2}^2 \left(\frac{C_7}{\theta_9} + \frac{C_7}{\theta_{10}} + p\frac{C_{15}}{\theta_{11}} + p\frac{C_{16}}{2\theta_{12}} + p^2\frac{C_{17}}{2\theta_{13}}\right) = \frac{\lambda}{2},$$

on obtient moyennant (3.54) (avec ω_1'' à la place de ω_1') et (3.61)

$$\lambda \left\| \rho \nabla_{X_1} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2\varepsilon^2} \left\| \rho \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^2,$$

où C est une constante indépendante de ε. Ceci termine la preuve du théorème du moment que $\rho = 1$ dans $\omega_1' \times \omega_2$. ■

3.2 Cas d'une condition aux limites mêlée Dirichlet-Neumann

Toutes les notations sont celles de la section précédente. On suppose désormais que l'ouvert Ω est cylindrique, i.e.

$$\Omega = \omega_1 \times \omega_2,$$

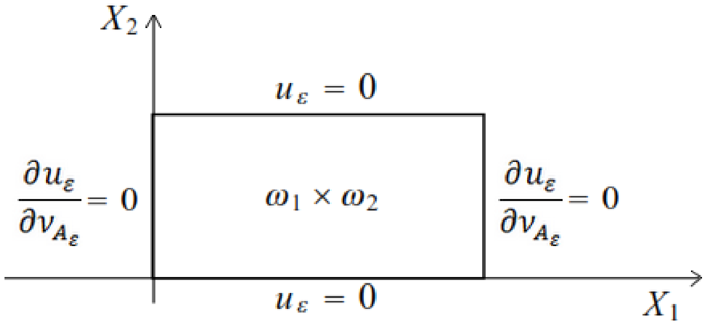
où $\omega_1$et ω_2 sont des domaines bornés lipshitziens de $\mathbb{R}^p$et $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivement. Pour $\varepsilon > 0$, on considère le problème aux limites mêlé suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \quad \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \quad \text{sur } \Gamma_1 = \omega_1 \times \partial\omega_2 \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} = 0 & \quad \text{sur } \Gamma_2 = \partial\omega_1 \times \omega_2 \end{aligned} \right. \tag{3.63}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \overset{déf}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{x_j} u \cos(\nu, x_i)$$

désigne la dérivée conormale de u associée à l'opérateur $(-\operatorname{div}(A\nabla.))$, ($\nu$ étant le vecteur unitaire normal à Γ_2 dérigé vers l'extérieur de Ω).
A la différence du problème (3.10) étudié dans la section précédente, (3.63) est soumis à une condition aux limites latérale de Neumann.



On conserve les mêmes hypothèses sur la matrice A et le second membre f, à savoir

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad \forall i,j = 1,...,n, \tag{3.64}$$

$$A\xi \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. pour } x \in \Omega, \qquad \lambda > 0, \tag{3.65}$$

$$f \in L^2(\Omega). \tag{3.66}$$

Les conditions au bord du problème (3.63) suggèrent de prendre comme espace de fonctions-test :

$$V = H_0^1(\Omega; \Gamma_1) = \{v \in H^1(\Omega), \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

lequel est un espace de Hilbert pour la norme hilbertienne (1.19)[1], i.e.

$$\|v\|_V := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \qquad v \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1), \tag{3.67}$$

[1] Voir chapitre des préliminaires, sous-section 1.3.3

Multipliant l'équation (3.63) par une fonction-test arbitraire $v \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1)$, et intégrant par parties sur Ω. Grâce à la formule de Green (1.16) et compte tenu des conditions au bord, on obtient une formulation variationnelle du problème (3.63) :

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \; dx = \int\limits_{\Omega} fv \; dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1), \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \Gamma_1). \end{cases} \tag{3.68}$$

De même, le problème "*limite*" associé, s'écrit en formulation faible :

$$\begin{cases} \int\limits_{\omega_2} A_{22} \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} v(X_2) \; dX_2 = \int\limits_{\omega_2} f(X_1, X_2) v(X_2) \; dX_2, \quad \forall v \in H_0^1(\omega_2), \\ u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2), \end{cases} \tag{3.69}$$

et ceci pour presque tout $X_1 \in \omega_1$.
Rappelons que les hypothèses (3.64) et (3.65) entraînent que les matrices A_ε et A_{22} sont uniformément bornées et uniformément définies positives, et qu'en vertu de (3.66), $f(X_1, \cdot) \in L^2(\omega_2)$ p.p. $X_1 \in \omega_1$. Il s'ensuit que l'on est dans les conditions d'applicabilité de la proposition 1.4.1, ce qui permet de conclure à l'existence de solutions uniques u_ε et u_0 pour les problèmes (3.68) et (3.69) respectivement.

Sachant que l'espace $H_0^1(\Omega; \Gamma_1)$ jouit lui ausi de l'inégalité cruciale de Poincaré (1.23), il suffit de calquer les démonstrations des résultats de la section précédente (en remplaçant $H_0^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega; \Gamma_1)$ et Ω_{X_1} par ω_2) pour établir exactement les mêmes résultats pour le problème (3.63) moyennant, bien sûr, les mêmes hypothèses.
Toutefois, dans la situation présente, il est possible avec des hypothèses de régularité globale portant sur les éléments de la sous-matrice A_{12}, d'obtenir des estimations d'erreur globales, i.e. dans Ω tout entier, avec les mêms puissances de ε que dans les majorations à l'intérieur obtenues dans les théorèmes 3.1.2, 3.1.3 et 3.1.4 de la section précédente. Plus précisément,

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses (3.64)-(3.66) sont satisfaites. Si de plus, on* *a*

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} f &\in L^2(\Omega), \quad \partial_{x_k} A_{22} \in L^\infty(\Omega), \qquad \forall k = 1, ..., p, &(3.70)\\ \partial_{x_k} A_{12} &\in L^\infty(\Omega) \qquad \forall k = 1, ..., n, &(3.71)\\ A_{12} &\in H_0^1(\Omega), &(3.72)\end{aligned}$$

alors, il existe une constante $C > 0$ *indépendante de* ε *telle que*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon,$$

$$\nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_1} u_0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Démonstration. Reprenons la démonstration du théorème 3.1.2. L'utilisation d'une fonction régulière ρ qui vérifie (3.41) avait pour souci de garantir l'appartenance de $\rho^2(u_\varepsilon - u_0)$ à $H_0^1(\Omega)$ afin de pouvoir l'utiliser comme fonction-test et faire usage de la relation (3.46) :

$$\int_\Omega \partial_{x_i}\left(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)\right)\partial_{x_j} u_0 dx = \int_\Omega \partial_{x_j}\left(\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)\right)\partial_{x_i} u_0 dx, \quad i = 1, ..., p, \ j = p+1, ..., n,$$

nécessaire pour la décomposition (3.49).

Dans le cas présent, nul besoin d'introduire ρ puisque d'après la proposition 3.1.1, $u_\varepsilon - u_0$ appartient déjà à l'espace des fonctions-test $V = H_0^1(\Omega; \Gamma_1)$. Par contre, pour pouvoir utiliser la relation ci-dessus pour la fonction $a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)$ au lieu de $\rho^2 a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)$ il est raisonnable d'exiger $a_{ij}(u_\varepsilon - u_0) \in H_0^1(\Omega)$ ce qui est assuré par (3.71) et (3.72). Ainsi, en réitérant le même raisonnement conduisant à la conclusion du théorème 3.1.2, on peut remplacer ω_1' et ω_1'' par ω_1 ce qui permet d'obtenir les majorations suivantes dans Ω tout entier :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\varepsilon, &(3.73)\\ \|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C, &(3.74)\end{aligned}$$

au lieu de (3.53) et (3.54), d'où la conclusion. ■

Un raisonnement similaire nous conduit aux résultats suivants dans le cas d'une matrice diagonale par blocs.

Théorème 3.2.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, si on suppose de plus que*

$$A_{12} = A_{21} = 0,$$

alors :

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \qquad \text{dans } H^1(\Omega),$$

avec

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} &= o(\varepsilon), \\ \|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} &= o(1). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.3 *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si, en outre, la limite u_0 et la matrice A_{11} sont telles que*

$$\begin{aligned} \nabla^2_{X_1} u_0 &\in L^2(\Omega), \\ \nabla_{X_1} A_{11} &\in L^\infty(\Omega), \qquad A_{11} \in H^1_0(\Omega), \end{aligned}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\omega_1 \times \omega_2)}, \quad \|\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\omega_1 \times \omega_2)} &= O\left(\varepsilon^2\right), \\ \|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\omega_1 \times \omega_2)} &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, Paris, 2005.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[3] M. Chipot, *l goes to plus infinity*, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2002.

[4] M. Chipot, *Elliptic Equations : An Introductory Course*, Birkhäuser Advanced Texts, Basel, 2009.

[5] M. Chipot, S. Guesmia, *On the asymptotic behavior of elliptic, anisotropic singular perturbations problems*, communications on pure and applied analysis, vol. 8, N°1, 2009, pp. 179-193.

[6] R. Dautray, J. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1988.

[7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-verlag Berlin Heidelberg New york, 1998.

[8] A. Munnier, *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, Institue Élie Cartan, 2007-2008.

[9] Z. Song-Mu, *Nonlinear evolution equations*, Chapman & Hall/CRC monographs and survey in pure and applied mathematics, 2004.