Table des matières

Introduction

Depuis 1980 la modélisation "k-consécutifs-sur-n" a non seulement fait l'objet de nombreuses publications scientifiques mais également a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs de divers pays. L'ampleur de la bibliographie et la diversité des problèmes traités font que les modèles "k-consécutifs-sur-n" sont devenus un domaine très important dans la littérature de la théorie de la fiabilité au cours de ces dernières deux décennies. On appelle système "k-consécutifs-sur-n" un système comportant n composants disposés linéairement où circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs (k sur n) sont en panne. Ces systèmes sont utilisés particulièrement dans les domaines de la télécommunication, des circuits intégrés, pompage de pétrole par pipelines...

Ils ont été introduits dans la littérature mathématique pour la première fois par Kontoleon en 1980. Depuis, de nombreux travaux scientifiques qui sont réalisés sur ce genre de modèles dans différents cadres d'hypothèses (Composants du système identiques ou non identiques, indépendance mutuelle des composants, dépendance markovienne etc...), on trouve deux catégories d'articles.

Dans la première, les auteurs s'intéressent au calcul exact ou approximatif de la fiabilité du système, ainsi, l'importance des composants dans le système et ce en utilisant des méthodes algorithmiques ou des techniques probabilistes.

Le plus souvent, devant la complexité des hypothèses, on s'est contenté de chercher un encadrement de la valeur de la fiabilité du système.

Dans la deuxième catégorie on traite plutôt le problème du comportement asymptotique du temps de panne du système sous différentes hypothèses sur les lois des temps de panne des composants.

Dans ce travail nous présentons une recherche détaillée concernant les modèles cités ci-dessus, Ainsi, on trouve aussi d'autres résultats présentés sans rentrer dans les détails de leurs démonstrations. Ceux-ci pourront être consultés dans les références citées dans la bibliographie générale qui se trouve à la fin de ce mémoire.

Le mémoire est composé d'une introduction où nous présentons un historique sur les systèmes étudiés, et de 5 chapitres présentés comme suit :

– Chapitres 1 et 2 : Ces chapitres sont consacrés à rappeler des résultats concernant les notions de bases de la fiabilité.

– Chapitres 3 : Ici nous traitons le système "k-consécutifs sur-n" où nous présentons des résultats concernant ce type de systèmes. D'abord, nous donnerons les formules exactes, récursives et l'encadrement de la fiabilité du système, dans les deux cas suivants :

1. Les composants indépendants.

2. Indépendance Markovien.

– Chapitres 4 : Ici nous traitons l'importance en fiabilité des composants où nous donnerons des méthodes de calcul et d'arrangement de ses importances.

– Chapitres 5 : Dans ce dernier chapitre, nous examinons des résultats sur la loi limite du temps de panne de système "k-consécutifs sur-n".

Chapitre 1

Notions générales sur la fiabilité

Le terme « fiabilité » est une innovation introduit dans les années 60 pour traduire le terme anglo-saxon « reliability ». La fiabilité est la science des défaillances.

Définition de la fiabilité

C'est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée. Le terme fiabilité représente une probabilité de succès ou un pourcentage de succès.

1.1 Mesures de performances

On considère un matériel (une pompe, un composant électronique, une voiture...) pouvant se trouver dans différents états. Cet ensemble d'états est noté E ; dans tous les exemples que nous considèrerons, ce sera un ensemble fini. Il se décompose en deux sous-ensembles formant une partition de E :

L'ensemble M (des états de marche).

L'ensemble P (des états de panne).

L'évolution du matériel dans le temps est décrite par un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans E, continu à droite et pourvu de limite à gauche en tout point.

La qualité du matériel, du point de vue sûreté de fonctionnement, est donnée par un certain nombre d'indicateurs ou mesures de performance.

La liste de celles qui sont utilisées le plus couramment est donné ci-dessous.

1) La disponibilité (availability en anglais) notée $D(t)$: la disponibilité du matériel à l'instant t est la probabilité pour que le matériel fonctionne sur tout l'intervalle d temps :

$$D(t) = P(X_t \in M).$$

Cette quantité est également appelée disponibilité instantanée à l'instant t, par opposition à la disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$, qui désigne soit la proportion de temps pendant laquelle le matériel est en marche sur l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s \in M\}} ds,$$

soit l'espérance mathématique de cette dernière quantité, c'est-à-dire la moyenne de la disponibilité instantanée sur l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t D(s)\,ds.$$

Nous appelons disponibilité asymptotique nous la notons $D(\infty)$,la limite, lorsque t tend vers l'infini, de la disponibilité à l'instant t (quand cette limite existe) :

$$D(\infty) = \lim_{t\to+\infty} D(t)$$

c'est donc également la limite, quand t tend vers l'infini de $\frac{1}{t}\int_0^t D(s)\,ds$.

L'**indisponibilité** à l'instant t est la probabilité que le système soit en panne à cet instant :

$$\widetilde{D}(t) = P(X_t \in P) = 1 - D(t)$$

et l'**indisponibilité asymptotique** est la limite, lorsque t tend vers l'infini, de l'indisponibilité à l'instant t (quand cette limite existe) :

$$\widetilde{D}(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \widetilde{D}(t) = 1 - D(\infty).$$

La fiabilité (reliability) $R(t)$ du matériel à l'instant t est la probabilité que le matériel soit en fonctionnement sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$R(t) = P(X_s \in M, \forall s \in [0, t]).$$

et **La défiabilité** $\widetilde{R}(t)$ à l'instant t est la probabilité que le matériel ait une panne pendant l'intervalle de temps $[0, t]$.

Soit $T = inf\ \{s \geq 0 : X_s \in P\}$ La première durée de bon fonctionnement du matériel, et F la fonction de répartition de la variable aléatoire T, nous avons :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t),$$

$$\widetilde{R}(t) = 1 - R(t) = P(T \leq t) = F(t).$$

L'inégalité $R(t) \leq D(t)$ est toujours vérifiée. Remarquons que lorsque le matériel n'est pas réparable (ce qui revient à dire que l'ensemble des états de panne est absorbant), nous avons $R(t) = D(t)$. Cette remarque évidente permet de ramener un calcul de fiabilité à un calcul de disponibilité.

Si on remplace l'ensemble M par l'ensemble P, la quantité duale de la fiabilité est la **démaintenabilité**, $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{M}(t) = P(X_s \in P, \forall s \in [0, t]).$$

tandis que la **maintenabilité** est la probabilité que la réparation du matériel soit achevée avant l'instant t, ces notions de maintenabilité et de démaintenabilité n'étant utilisées que lorsque le matériel est en panne à l'instant initial :

$$M(t) = 1 - \widetilde{M}(t) = P(\exists s \in [0, t],\ X_s \in M) \qquad \text{lorsque } X_0 \in P.$$

Examinons maintenant les différentes durées moyennes :

Le **MTTF** (Mean Time To Failure) est la durée moyenne de bon fonctionnement :

$$MTTF = E(T) = \int_0^{+\infty} p(T > t)\, dt = \int_0^{+\infty} R(t)\, dt.$$

Le **MTTR** (Mean Time To Repair) est la durée moyenne de réparation.

Elle n'est pas en général définie que si le matériel est en panne à l'instant initial, et :

$$MTTR = \int_0^{+\infty} \widetilde{M}(t)\, dt \qquad \text{lorsque } X_0 \in P.$$

Lorsque le matériel considéré est réparable, le matériel passe par des périodes successives de marche et de panne. Notons M_n (respectivement P_n) la durée de la $n^{ème}$ période de bon fonctionnement (respectivement de réparation).

Le **MUT** (Mean Up Time) est la durée moyenne de fonctionnement sans panne "en asymptotique" dans le sens où :

$$MUT = \lim_{n \to +\infty} E(M_n).$$

lorsque cette limite existe, tandis que le **MDT** (Mean Down Time) est la quantité duale :

$$MDT = \lim_{n \to +\infty} E(P_n).$$

lorsque cette limite existe.

Le **MTBF** (Mean Time Between Failure) est la durée moyenne qui sépare deux défaillances "en asymptotique" (au sens précédent), c'est-à-dire :

$$\mathbf{MTBF} = \mathbf{MUT} + \mathbf{MDT}.$$

1.2 Taux de hasard, de défaillance et de réparation

Dans ce paragraphe nous considérons une variable aléatoire positive T de fonction de répartition F et nous posons $\overline{F} = 1 - F$.

1.2.1 Les formules de base

Nous commençons par supposer que la loi de T admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

On appelle t**aux de hasard** de la variable aléatoire T, la fonction :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} & \text{si } \overline{F}(t) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \overline{F}(t) = 0. \end{cases}$$

La fonction f n'est définie qu'à une équivalence près (relativement à la mesure de Lebesgue), il en est donc de même pour le taux de hasard h. Cependant, dans la plupart des applications, la variable T admet pour densité une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si T représente la durée de fonctionnement sans défaillance d'un matériel, la fonction h s'appelle le **taux de défaillance** du matériel et se note λ.

Si T représente une durée de réparation, h est appelée le **taux de réparation** et se note μ.

La terminologie de "**taux**" est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Supposons que la variable aléatoire T admette une densité f qui soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $t > 0$ tel que $P(T > t) > 0$:*

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0_+} \frac{1}{\Delta} P(t < T \leq t + \Delta / T > t).$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{\Delta} P(t < T \leq t + \Delta / T > t) = \frac{1}{\overline{F}(t)} \frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\Delta},$$

et que $F' = f$ puisque f est continue.

Proposition 1.2 *Supposons que T admette une densité f qui soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et soit $A = \{t > 0 : \overline{F}(t) \neq 0\}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.$\forall t \in A,\ h(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$

2.$\forall t \in A,\ h(t) = \left(-\log \overline{F}\,(t)\right)'$

3.$\forall t \in A,\ \overline{F}\,(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)$

4.$\forall t \in A,\ f\,(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right).$

Démonstration

La condition 1 équivaut à $h(t) = \frac{-\overline{F}(t)'}{\overline{F}(t)}$, d'où l'équivalence entre 1 et 2. L'équivalence entre les conditions 2 et 3 est immédiate en utilisant le fait que $\overline{F}\,(0) = 1$. L'implication $3 \Longrightarrow 4$ s'obtient par dérivation et $4 \Longrightarrow\ 3$ par intégration en remarquant que 4 s'écrit :

$$-\overline{F}\,(t)' \ = -\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\right]'.$$

Proposition 1.3 *La variable aléatoire T a pour taux de hasard h si et seulement si, pour tout t positif :*

$$P\,(T > t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right).$$

Démonstration

Supposons que T ait pour taux de hasard, alors :

$$P\,(T \leq t) = \ \int_0^t f(s)ds \ = \int_0^t P\,(T > s)\,h(s)ds.$$

Nous en déduisons que la fonction $z(t) = \ P\,(T > t)$ est solution de l'équation intégrale :

$$z(t) = 1 - \ \int_0^t z(s)h(s)ds\ .$$

Où cette équation admet une et une seule solution $t \to z(t)$ qui soit bornée sur tout compact, et cette solution est :

$$z(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right).$$

Réciproquement, supposons que $P\,(T > t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)$ pour une certaine fonction h_0.

En utilisant la condition nécessaire que nous venons de démontrer, nous voyons que :

$$\int_0^t h(s)ds = \int_0^t h_0(s)ds \qquad \forall t,$$

et par conséquent $h = h_0$ presque- partout (relativement à la mesure de Lebesgue).

Nous allons déduire deux corollaires de cette proposition. Le premier n'est qu'une ré-écriture de la proposition précédente avec la terminologie de la fiabilité.

Corollaire 1.1 *La fiabilité d'un matériel de taux de défaillance λ est :*

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right).$$

Le second corollaire est une manière d'exprimer le fait que la loi exponentielle est le seule loi avec densité qui soit sans mémoire.

Corollaire 1.2 *La variable aléatoire T a un taux de hasard constant égal à c si et seulement si T est de loi exponentielle de paramètre c.*

Si la variable aléatoire T désigne la durée de fonctionnement d'un matériel, un taux de défaillance constant signifie que le matériel ne vieillit pas (et ne rajeunit pas non plus !).

Il est couramment admis que la courbe du taux de défaillance $t \to \lambda(t)$ d'un matériel est une courbe en baignoire.

Pendant une première période, le taux de défaillance est décroissant, c'est la période de déverminage ou de rodage ou encore de jeunesse, puis le taux de défaillance est approximativement constant, c'est la période de « vie utile », enfin dans une troisième phase le taux de défaillance est croissant, c'est la période de vieillissement ou d'usure.

1.2.2 Taux de défaillance monotone

Nous supposons ici que la variable aléatoire T possède une densité et représente la durée de fonctionnement d'un matériel, nous parlerons donc de taux de défaillance au lieu de taux de hasard et nous le noterons $\lambda(t)$ au lieu de $h(t)$.

Une variable aléatoire ou une loi est dite **IFR** (increasing Failure Rate) si son taux de défaillance est une fonction croissante.

Elle est dite **DFR** (Decreasing Failure Rate) si son taux de défaillance est une fonction décroissante.

Définition 1.1 *on appelle durée de survie à la date t, une variable aléatoire τ_t dont la loi est donnée par :*

$$P(\tau_t > x) = P(T - t > x / T > t) = \frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}.$$

Proposition 1.4 *On suppose f continue, donc $\overline{F}$ dérivable, alors :*

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- T *est* $I\ F\ R$,
- *log* $\overline{F}$ *est concave,*
- $\forall a > 0$, *la fonction* $t \to \frac{\overline{F}(t+a)}{\overline{F}(t)}$ *est décroissante,*
- $\forall a > 0$, *la fonction* $t \to p(\tau_t > a)$ *est décroissante.*

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- T *est* $D\ F\ R$,
- *log* $\overline{F}$ *est convexe,*
- $\forall a > 0$, *la fonction* $t \to \frac{\overline{F}(t+a)}{\overline{F}(t)}$ *est croissante,*
- $\forall a > 0$, *la fonction* $t \to p(\tau_t > a)$ *est croissante.*

Proposition 1.5 *Posons* $a_n = \frac{E(T^n)}{n!}$ *pour* $n \geq 0$*. soit* n *tel que les quantités* a_{n-1}, a_n, a_{n+1} *soient finies, nous avons :*

- *si* T *est* $I\ F\ R$ *alors* $a_{n-1}a_{n+1} \leq a_n^2$,
- *si* T *est* $D\ F\ R$ *alors* $a_{n-1}a_{n+1} \geq a_n^2$.

Les coefficient de variation d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité d'espérance μ et de variance σ^2 est le quotient $\frac{\mu}{\sigma}$.

Corollaire 1.3 *Soit* T *une variable aléatoire de carré intégrable :*

- *si* T *est* $I\ F\ R$*, alors* $\frac{\mu}{\sigma} \leq 1$,
- *si* T *est* $D\ F\ R$*, alors* $\frac{\mu}{\sigma} \geq 1$.

1.2.3 Loi NBU

Soit la variable aléatoire T qui représente la durée de fonctionnement d'un matériel et son taux de défaillance est noté λ.

La variable aléatoire T (ou sa loi) est **NBU** (New Better than Used) si pour tous s et t :

$$\overline{F}(t+s) \leq \overline{F}(t)\,\overline{F}(s),$$

Ce qui équivaut, en notant

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du.$$

Le taux de défaillance cumulé, à la sur-additivité de la fonction Λ :

$$\forall s, t \geq 0 \qquad \Lambda(t+s) \geq \Lambda(t) + \Lambda(s).$$

La terminologie est due au fait que, pour tout $t > 0$, la durée de survie τ_t à la date t est stochastiquememt inférieure à la durée initiale T, au sens où :

$$\forall s > 0 \qquad P(\tau_t > s) \leq P(T > s).$$

Proposition 1.6 *tout loi IFR est **NBU.***

Démonstration

La sur-additivité de la fonction Λ s'écrit :

$$\forall s, t \geq 0 \qquad \int_t^{t+s} \lambda(u)du \geq \int_0^s \lambda(u)du.$$

Or, si λ est croissante, on a :

$$\int_t^{t+s} \lambda(u)du = \int_0^s \lambda(t+u)du \geq \int_0^s \lambda(u)du.$$

Notons $\lambda(\infty)$ le **taux de défaillance asymptotique,** c'est-à-dire :

$$\lambda(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \lambda(t).$$

lorsque cette limite existe.

Proposition 1.7 *(approximation exponentielle) Si T est NBU, si λ est bornée (hors d'un voisinage de 0) et si $\lambda(\infty)$ existe, alors :*

$$P(T > t) \geq \quad e^{-\lambda(\infty)t} \; .$$

Démonstration

Nous avons vu que, dans le cas NBU, pour tous s et t :

$$\int_0^t \lambda(u)du \leq \int_0^t \lambda(s+u)du.$$

En faisant tendre s vers l'infini, nous obtenons :

$$\int_0^t \lambda(u)du \leq \lambda(\infty)\, t,$$

d'où le résultat.

Ce résultat fournit une approximation exponentielle de la fiabilité qui est pessimiste. Ce type de résultat est fort utile en pratique.

1.2.4 Deux familles de lois classiques en fiabilité

La loi gamma

Soit α et β deux réels strictement positifs. La loi gamma de paramètres $(\alpha,\ \beta)$ est la loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction Γ étant définie pour $\alpha > 0$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Le paramètre α est le paramètre de forme et β le paramètres d'échelle.

Nous résumons les principales propriétés de la loi gamma dans la proposition suivante.

Proposition 1.8

1.(a) pour $0 < \alpha < 1$, la loi gamma de paramètres $(\alpha,\ \beta)$ est $D\ F\ R$ et son taux de hasard h vérifie :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to +\infty} h(x) = \frac{1}{\beta}.$$

(b) pour $\alpha > 1$, la loi gamma de paramètres $(\alpha,\ \beta)$ est $I\ F\ R$ et son taux de hasard h vérifie :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0\ , \qquad \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty.$$

2. Soit T une variable aléatoire de loi gamma de paramètres $(\alpha,\ \beta)$, alors :

$$E(T) = \alpha\beta, \quad var(T) = \alpha\beta^2,$$

$$E(e^{-sT}) = \frac{1}{(1+\beta s)^{\alpha}},\ E(e^{iuT}) = \frac{1}{(1-i\beta u)^{\alpha}}\ .$$

3. Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de gamma de paramètres respectifs $(\alpha_1,\ \beta)$ et $(\alpha_2,\ \beta)$. Alors $T_1 + T_2$ est de loi de gamma de paramètres $(\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta)$.

La famille des lois gamma contient des lois connues. La loi gamma de paramètres :

- *$\alpha = 1$ et β est la **loi exponentielle** de paramètre $\frac{1}{\beta}$.*
- *$\alpha = n$ et $\beta = \frac{1}{\lambda}$ est la **loi d'Erlang** d'ordre n et de paramètre λ (loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ),*
- *$\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = 2$ est la **loi du** χ^2 à n degrés de liberté (loi de la somme des carrés de n variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée de variance 1).*

La loi de weibull

Donnons-nous trois paramètres α, β et θ, les deux premiers étant strictement positifs, le troisième étant positifs ou nul. La loi de densité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t-\theta}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t-\theta}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}.$$

par rapport à le mesure de Lebesgue sur $[\theta, +\infty[$ est la **loi de weibull** de paramètres $(\alpha,\ \beta, \theta)$.

Le paramètre α est le paramètre d'échelle, β est le paramètre de forme et θ le paramètre de translation.

Remarquons que le cas $\beta = 1$ et $\theta = 0$ correspond à la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha}$.

Nous ne considérons ici que le cas $\theta = 0$ et nous parlerons alors de la loi de weibull de paramètres $(\alpha,\ \beta)$.

Proposition 1.9 *Soit T une variable aléatoire de loi de weibull de paramètres $(\alpha,\ \beta)$, Notons h son taux de hasard.*

1. Alors :

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \qquad p\left(T > t\right) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\},$$

$$E(T) = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right), \quad var(T) = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right].$$

2. La variable aléatoire $\left(\frac{T}{\alpha}\right)^{\beta}$ est de loi exponentielle de paramètre 1.

La loi de weibull est très utilisée en fiabilité. La première raison est que cette loi est apparue "expérimentalement" lors d'études sur le taux de défaillance de matériels. Notons λ le taux de défaillance du matériel étudié et son Λ taux de défaillance cumulé :

$$\Lambda\left(t\right) = \int_0^t \lambda(s)ds.$$

J. Duane a constaté que $log\ \Lambda\left(t\right)$ était approximativement une fonction linéaire de $log\ t$.

On peut également considérer que le théorème des valeurs extrêmes fournit une explication mathématique au fait que cette loi se rencontre "dans la nature".

Théorème 1.1 ***(extrait du théorème des valeurs extrêmes)*** *Considérons des variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ indépendantes de même loi de fonction de répartition F. Supposons qu'il existe :*

a) un réel x_0 pour lequel $F(x_0) = 0$ et $F(x_0) > 0$ pour tout $x > x_0$,

b) un réel $\beta > 0$ tel que, pour tout $x > 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(xt + x_0)}{F(t + x_0)} = x^{\beta}.$$

Alors il existe des suites de réels a_n et b_n $(a_n > 0)$ telles que la suite de variables aléatoires :

$$Z_n = \min_{1\leq k\leq n} (a_n X_k + b_n).$$

converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de loi de weibull de paramètre de forme β. La variable Z_n peut représenter la durée de vie d'un matériel décomposé en n éléments, le matériel étant défaillant dès que l'un des éléments le constituant est défaillant (imaginer par exemple un câble découpé "virtuellement" en n tronçons).

Exemple 1.1 *Si les X_k sont de loi de gamma de paramètres de forme α, alors Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi de weibull de paramètre de forme α. En effet, $x_0 = 0$ et en appliquant la formule généralisée des accroissements finis(règle de l'hôpital), on obtiet :*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(xt) - F(0)}{F(t) - F(0)} = \lim_{t\to 0} \frac{xf(xt)}{f(t)} = x^{\alpha}.$$

Chapitre 2

Fiabilité des systèmes complexes

Le but de ce chapitre est de donner les notions de base et les propriétés des systèmes complexes, cohérents et binaires, c'est-à-dire :

On suppose que le système possède deux états 0 et 1 où 0 veut dire que le système est en panne et 1 est en marche.

Dans la théorie de la fiabilité un problème clé est de trouver la fiabilité d'un système complexe à partir des états de ses composants. Pour cette raison nous présentons un utile descriptif qui nous permette de savoir les relations entre un système et ses composants ensuite nous passerons au calcul proprement de la fiabilité d'un système en fonction des fiabilités de ses composants.

Définition 2.1 *Un système binaire est tous système possède deux états marche et en panne, dans ce cas les composants aussi possèdent deux états marche et en panne.*

Alors nous avons besoins des notations.

Notations :

♣ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, tel que $x_i = 0$ ou $1 \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$

♣ $\prod_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$

♣ $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$

♣ $(\bullet_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, ..., x_n)$

♣ $(1_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$

♣ $(0_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$

♣ $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

♣ $x \amalg y = (x_1 \amalg y_1, x_2 \amalg y_2, ..., x_n \amalg y_n)$

♣ $x \leq y \Longrightarrow x_i \leq y_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$

♣ $x < y \Longrightarrow x_i \leq y_i$ avec $x_i < y_i$ pour un certain j.

♣ x^A est le vecteur composé des coordonnées x_i pour $i \in A$.

♣ $\overline{A}$ est le sous-ensemble C (ensemble des indices) complémentaire de A.

♣ $x << y \Longleftrightarrow x_i < y_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$

2.1 Propriétés déterministes des systèmes complexes

Dans ce paragraphe, on considère les relations (déterministes) de structure entre un système et ses composants, en supposant que l'état du système ne dépend que des états de ses composants.

2.1.1 Système des composants

Soit un système des composants $C = \{1, 2, ..., n\}$ et l'état de chaque composant est une variable aléatoire X_i tel que $i = 1, 2, ..., n$.

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si le composant numéro } i \text{ est en panne.} \\ 1 & \text{si le composant numéro } i \text{ est en marche (fonctionne).} \end{cases}$$

et soit : $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ vecteur aléatoire des états des composants.

Définition 2.2 *(Fonction de structure) : On appelle fonction de structure et on note Φ la variable aléatoire que représente l'état du système c'est-à-dire :*

$$\begin{array}{rll} \Phi(x) : & \{0,\ 1\}^n & \longrightarrow \{0,\ 1\} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \longrightarrow \Phi(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Où $\forall x \in \{0,\ 1\}^n$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si le système en panne.} \\ 1 & \text{si le système en marche.} \end{cases}$$

Le nombre n de composants est appelé l'ordre du système, on dit aussi le système (c, Φ) quand on veut préciser l'ensemble des composants. Dans toute la suite on ne fera pas la distinction entre "système" et "structure".

Remarque 2.1 *La fonction de structure Φ est croissante s'il est croissante par rapport à chaque coordonnées x_i.*

2.1.2 Exemples

1) système en série :

On appelle un système en série : tout système qui fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent, alors :

$$\Phi(x) = \Phi(X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

2) système en parallèle :

On appelle un système en parallèle : tout système qui tombe en panne si et seulement si tous ses composants tombent en panne, alors :

$$\Phi(x) = \Phi(X_1, X_2, ..., X_n) = \coprod_{i=1}^{n} X_i = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

3) système k-sur-n :

On appelle un système **k-sur-n** : tout système qui fonctionne si et seulement si au moins k de ses composants fonctionnent, alors :

$$\forall x \in \{0,\ 1\}^n : \quad \Phi(x) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k, c\prime est - \grave{a} - dire :$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\right\}}(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Remarque 2.2 • *Un système "**n-sur-n**" est un système en série.*

• *Un système "**1-sur-n**" est un système en parallèle.*

4) système k-consécutifs-sur n :

On appelle un système **k-consécutifs-sur n** : tout système qui tombe en panne si et seulement si au moins k de ses composants successifs en panne, alors :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (x_1 \amalg x_2 \amalg ... \amalg x_k).(x_2 \amalg ... \amalg x_{k+1})...(x_{n-k+1} \amalg ... \amalg x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n-k+1} \coprod_{j=i}^{i+k-1} x_j = \min_{1 \leq i \leq n-k+1} \max_{i \leq j \leq i+k+1} (x_j). \end{aligned}$$

Remarque 2.3 • *Un système "**1-consécutifs-sur n**" est un système en série.*

• *Un système "**n-consécutifs-sur n**" est un système en parallèle.*

Définition 2.3 *Soit Φ une structure d'ordre n, le $i^{ème}$ composant est dit **inutile** à la structure Φ si la fonction $\Phi(x)$ est constante par rapport à la $i^{ème}$ coordonnée x_i du vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; c'est-à-dire :*

$$\Phi(1_i, x) = \Phi(0_i, x) \quad \textit{pour tout vecteur } (\bullet_i, x).$$

Notons qu'un composant inutile ne peut jamais causer directement la panne d'un système. Comme exemple d'un tel composant on peut considérer un condensateur disposé en parallèle avec un dispositif électrique, son rôle est de couper les hauts voltages qui peuvent détruire le dispositif électrique, donc bien qu'inutile, le condensateur peut être très important dans la durée de vie du dispositif électrique, c'est le cas d'un disjoncteur dans les compteurs électriques domestiques.

Lemme 2.1 *Pour toute fonction de structure Φ d' ordre n, on a la décomposition suivante :*

$$\Phi(x) = x_i \Phi(1_i, x) + (1 - x_i)\Phi(0_i, x), \quad \textit{pour tout } i, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Démonstration :

x_i prend les valeurs 1 ou 0, donc :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi(1_i, x) & \text{si} \quad x_i = 1. \\ \Phi(0_i, x) & \text{si} \quad x_i = 0. \end{cases}$$

D'où : $\Phi(x) = 1_{\{1\}}(x_i)\ \Phi(1_i, x) + 1_{\{0\}}(x_i)\ \Phi(0_i, x)$.

Mais $1_{\{1\}}(x_i) = x_i$ et $1_{\{0\}}(x_i) = (1 - x_i)$, donc : $\Phi(x) = x_i \Phi(1_i, x) + (1 - x_i)\ \Phi(0_i, x)$.

Remarque 2.4 *Le lemme* (2.1) *nous permet d'écrire la fonction de structure d'ordre* n *en fonction de la fonction de structure d'ordre* $n - 1$. *En répétant cette opération plusieurs fois on obtient :*

$$\Phi(x) = \sum_y \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1-y_j}\ \Phi(y),$$

la somme porte sur tous vecteurs $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *tels que* $0^0 \equiv 1$.

Exemple 2.1 *Soit la fonction de structure* $\Phi(x) = x_1.x_2$, *c'est la fonction de structure d'un système en série d'ordre 2.*

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= x_1 (1 - x_1)^0 x_2 (1 - x_2)^0 .1 + x_1 (1 - x_1)^0 x_2^0 (1 - x_2)^1 .0 \\ &\quad + x_1^0 (1 - x_1)^1 x_2^1 (1 - x_2)^0 .0 + x_1^0 (1 - x_1)^1 x_2^0 (1 - x_2)^1 .0 \\ &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Définition 2.4 *Si* Φ *est une fonction de structure d'ordre* n, *sa dual* Φ^D *est donnée par :*

$$\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1 - x), \ \textit{où}\ 1 - x = (1 - x_1, 1 - x_2, ..., 1 - x_n).$$

Exemple 2.2 *Un système en parallèle d'ordre* n *est dual d'un système en série d'ordre* n *et réciproquement une structure "**k-sur-n**" est dual de la structure "**n–k+1 sur n**".*

2.1.3 Structures cohérentes

Ici on s'intéresse aux systèmes dits «cohérents». Les conditions de cohérence consistent à écarter tout système physique dont l'état ne dépend pas des états de ses composants et qui fonctionne avec un composant en panne et tombe en panne après réparation de ce composant. En effet, un tel système ne présente aucun intérêt dans la pratique.

Définition 2.5 *Un système est cohérent si et seulement si :*

(i) $\Phi(x)$ *est croissante par rapport à chaque coordonnée* x_i, $i = 1, 2, ..., n$.

(ii) chaque composant est utile ; c'est à dire :

$$\forall i, \exists\left(\bullet_i, x\right) \ ; \quad \Phi\left(1_i, x\right) = 1 \quad et \quad \Phi\left(0_i, x\right) = 0.$$

Théorème 2.1 *Soit* Φ *une structure cohérente d'ordre* n*, alors :*

(i) $\Phi(0) = 0 \ , \ \Phi(1) = 1.$

(ii) $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \Phi(x) \leq \coprod_{i=1}^{n} x_i.$

Démonstration :

(i) Chaque composant étant utile donc pour tout i, $i = (1, 2, ..., n)$ il existe un vecteur $(\bullet_i, x)$ tel que $\Phi\left(1_i, x\right) = 1$ et $\Phi\left(0_i, x\right) = 0$, comme Φ est croissante alors :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \Phi\left(0_i, x\right) = 0 \qquad \text{c'est à dire : } \Phi(0) = 0, \\ \Phi(1) &\leq \Phi\left(1_i, x\right) = 1 \qquad \text{c'est à dire : } \Phi(1) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Supposons $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$, alors $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Donc $\Phi(x) = 1$; et par conséquent $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \Phi(x)$.

Supposons $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = 0$, alors $x_i = 0, \forall i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Donc $\Phi(x) = 0$; et par conséquent $\Phi(x) \leq \coprod_{i=1}^{n} x_i$.

Théorème 2.2 *Soit Φ une fonction de structure cohérente alors :*

(i) $\Phi\left(x \amalg y\right) \geq \Phi(x) \amalg \Phi(y)$,

(ii) $\Phi\left(x.y\right) \leq \Phi(x).\Phi(y)$,

On a l'égalité dans (i) si et seulement si la structure est en parallèle et on a l'égalité dans (ii) si et seulement si la structure est en série.

Démonstration :

(i) Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $x_i \amalg y_i \geq x_i$ et $x_i \amalg y_i \geq y_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, et Φ étant croissante, donc :

$$\begin{aligned}\Phi\left(x \amalg y\right) &\geq \Phi(x) \ et \ \Phi\left(x \amalg y\right) \geq \Phi(y), \Longrightarrow \\ \Phi\left(x \amalg y\right) &\geq \max\left(\Phi(x), \Phi(y)\right) = \Phi(x) \amalg \Phi(y)\end{aligned}$$

(ii) $x_i.y_i \leq x_i$ et $x_i.y_i \leq y_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, donc :

$$\Phi\left(x.y\right) \leq \Phi\left(x\right) et \ \Phi\left(x.y\right) \leq \Phi\left(y\right),$$

$$\text{Il suit que} \quad \Phi\left(x.y\right) \leq \min\left(\Phi(x), \Phi(y)\right) = \Phi(x).\Phi(y).$$

* Si le système est en série alors :

$$\Phi\left(x.y\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i . \prod_{i=1}^{n} y_i = \Phi(x).\Phi(y).$$

Réciproquement si $\Phi\left(x.y\right) \leq \Phi(x).\Phi(y)$, il est immédiat que la structure Φ est en série.

* Si le système est en parallèle alors :

$$\begin{aligned}
\Phi\left(x \amalg y\right) &= \coprod_{i=1}^{n} \left(x_i \amalg y_i\right) \ = 1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(x_i \amalg y_i\right)\right] \\
&= 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)\left(1-y_i\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1-y_i\right) \\
&= 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)\left(1-y_i\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1-y_i\right) \\
&= 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\Phi(x)\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1-\Phi(y)\right) \\
&= \Phi(x) \amalg \Phi(y).
\end{aligned}$$

La réciproque est immédiate.

Définition 2.6 *Soit* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *le vecteur indiquant les états des composants* $C = (1, 2, ..., n)$*. Le vecteur* x *est dit vecteur-lien si et seulement si* $\Phi(x) = 1$*. L'ensemble correspondant* $C_1(x) = \{i \,;\, x_i = 1\}$ *s'appelle lien.*

Un vecteur -lien minimal est un vecteur-lien x *tel que si* $y < x$ *alors* $\Phi(y) = 0$*. L'ensemble* $C_1(x)$ *correspondant s'appelle lien minimal. C'est l'ensemble minimal de composants dont le fonctionnement assure le fonctionnement du système.*

Définition 2.7 *Un vecteur* x *est dite vecteur-coupe si et seulement si* $\Phi(x) = 0$*. L'ensemble correspondant* $C_0(x) = \{i \,;\, x_i = 0\}$ *s'appelle coupe.*

Un vecteur -coupe minimal est un vecteur-coupe x *tel que si* $y > x$ *alors* $\Phi(y) = 1$*. L'ensemble* $C_0(x)$ *correspondant s'appelle coupe minimale. C'est l'ensemble minimal de composants dont la panne entraine la panne du système.*

Maintenant, considérons un système qui opère dans le temps, chaque composant fonctionne jusqu'à sa panne à un certain temps t. Aucune réparation n'est faite, si on note par t_i le temps de panne du $i^{ème}$ composant, $i = 1, 2, ..., n$, et par $\zeta_\Phi\ (t)$ le temps de panne de la structure Φ, comme fonction des temps de panne de ses composants alors on a le résultat suivant.

Théorème 2.3 *Si Φ est une structure cohérente avec des liens minimaux $L_1,\ L_2, ..., L_p$ et des coupes minimales $K_1,\ K_2, ..., K_s$, alors :*

$$\max_{1\leq j\leq p}\ \min_{i\in L_j}(t_j) = \zeta_{\Phi}\ (t) = \min_{1\leq j\leq s}\ \max_{i\in K_j}(t_j).$$

Démonstration :

L'égalité de gauche découle du fait qu'un système tombe en panne lorsque le dernier lien minimal tombe en panne et qu'un lien minimal tombe en panne quand son premier composant tombe en panne.

L'égalité de droite est due au fait qu'un système tombe en panne lorsque la première coupe minimale tombe en panne et qu'une coupe minimale tombe en panne quand son dernier composant tombe en panne.

Dans un système cohérent donnée certain composants, de part leur position dans la configuration structurale de celui-ci, sont plus déterminants (importants) que d'autres dans le fonctionnement du système. Par exemple dans une structure en série ou en parallèle tous les composants ont la même importance.

Supposons connu le vecteur $(\bullet_i, x)$, alors si :

$$\Phi\left(1_i, x\right) = 1 \text{ et } \Phi\left(0_i, x\right) = 0, \text{ soit } \ \Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right) = 1,$$

On peut considérer le $i^{ème}$ composant plus important que si on avait :

$$\Phi\left(1_i, x\right) = 0 = \Phi\left(0_i, x\right) \text{ ou } \ \Phi\left(1_i, x\right) = 1 = \Phi\left(0_i, x\right).$$

Dans le premier cas le $i^{ème}$ composant détermine quand le système marche ou non, alors que dans le deuxième cas il n'est pas conséquent. Dans la première situation le vecteur $(1_i, x)$ est appelé « vecteur-lien critique» pour le $i^{ème}$ composant et l'ensemble correspondant $C_1\left(1_i, x\right)$ s'appelle « lien critique » pour le $i^{ème}$ composant.

Définition 2.8 *Dans une structure cohérente Φ l'importance du $i^{ème}$ composant est donnée par :*

$$I_{\Phi}\ (i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x;\ x_i=1\}} \left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right].$$

Remarque 2.5 $n_{\Phi}\ (i) = \sum_{\{x;\ x_i=1\}} \left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right]$ *est le nombre de liens critiques pour le composant i, c'est aussi le nombre de vecteurs –liens critiques pour le composant i. Le terme 2^{n-1} provient du fait qu'il ya 2^{n-1} possibilités d'écrire le vecteur $(1_i, x)$.*

$I_{\Phi}\ (i)$ est donc une proportion.

Exemple 2.3 ***Structure "k-sur-n" .***

On a $\Phi(x) = 1$ si et seulement si au moins k coordonnées du vecteur x valent 1, donc :

$$\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right) = 1_{[x_1+x_2+...+x_{i-1}+x_{i+1}+...+x_n=k-1]},$$

Cela vaut 1 pour C_{n-1}^{k-1} valeurs de $(1_i, x)$, d'où :

$$I_{\Phi}\ (i) = \frac{1}{2^{n-1}} C_{n-1}^{k-1}, \quad \textit{pour tout composant } i.$$

On peut vérifier que pour une structure en série (k=n) ou pour une structure en parallèle (k=1) tous les composants ont la même importance (en fiabilité) qui vaut :

$$I_{\Phi}\ (i) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, ..., n.$$

Exemple 2.4 ***"Montage (en série) de k composants en série et n-k en parallèle."***

$$Ici \quad \Phi(x) = \prod_{i=1}^{k} x_i \coprod_{i=k+1}^{n} (x_i) = \prod_{i=1}^{k} x_i \left[1 - \prod_{j=k+1}^{n} (1 - x_j)\right], \; donc :$$

$$\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) = \begin{cases} \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k} (x_l) \left[1 - \prod\limits_{j=k+1}^{n} (1 - x_j)\right] & si \;\; i \leq k. \\ \prod\limits_{l=1}^{k} (x_l) \left[1 - \prod\limits_{\substack{j=k+1 \\ j \neq i}}^{n} (1 - x_j)\right] & si \quad i > k. \end{cases}$$

On a $\prod_{j=k+1}^{n} (1 - x_j) = 0$ *ssi un des* $x_j = 1$*; donc il ya* $\left(2^{n-k} - 1\right)$ *possibilités, par conséquent :*

$$I_\Phi \;(i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \left[2^{n-k} - 1\right] = 2(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}) & si \quad i \leq k. \\ \frac{1}{2^{n-1}} & si \quad i > k. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que dans le cas particulier où : $\Phi(x) = x_1.(x_2 \amalg x_3)$*, alors on a :*

$$I_\Phi \;(1) = \frac{3}{4}, \; I_\Phi \;(2) = \frac{1}{4} \; et \;\; (par\ symétrie) \; I_\Phi \;(3) = \frac{1}{4} \; .$$

2.2 Propriétés des systèmes aléatoires

Ici on précise d'abord la notion de fonction de fiabilité d'un système cohérent, ensuite on établit ses propriétés importantes, on introduit aussi la notion de variables aléatoires « associées » très utile pour démontrer des inégalités sur la fiabilité des systèmes (ou sous-système tels que liens minimaux et coupes minimales) à composants non indépendants.

2.2.1 Systèmes aléatoires à composants non indépendants

On suppose que le système est formè de n composants indépendants, L'état du $i^{ème}$ composant est d'écrit par une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p_i.

On note $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ et $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ où les variables aléatoires X_i, $i =$

$1.2.3\ldots\ldots.n$, sont supposées indépendantes. Si P et E désignent respectivement la probabilité et l'espérance mathématique alors :

$$P\left[X_i = 1\right] = p_i = E\left(X_i\right) \quad \text{est la fiabilité du i}^{\grave{e}me} \text{ composant.}$$

La fiabilité du système est donnée par :

$$P\left[\Phi\left(X\right) = 1\right] = h = E\left[\Phi\left(X\right)\right].$$

Les composants du système étant supposés indépendants (les variables aléatoires X_i indépendants, $\forall i$, $i = 1, 2, ..., n$) alors on peut écrire :

$$h = h(p_1, p_2, \ldots p_n) = h(p)$$

La fonction $h(p)$ s'appelle **"fonction de fiabilité"** de la structure Φ.

Lorsque $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, on note également $h(p)$.

Remarque 2.6 *Dans le cas des systèmes à composants indépendants on ne peut pas utiliser la notation $h(p)$ pour désigner la fonction de fiabilité par ce que h ne dépend pas uniquement de $p_1, p_2, \ldots p_n$.*

Définition 2.9 *Φ est une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants non nécessairement indépendants, alors l'importance moyenne du i$^{\grave{e}me}$ composant est définie par :*

$$I_h\ (i) = E\left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right] \quad , \text{ pour } \ i = 1.2.3\ldots\ldots.n.$$

Définition 2.10 *Si Φ est une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants indépendants, alors l'importance moyenne du i$^{\grave{e}me}$ composant est donnée par :*

$$I_h\ (i) = \frac{\partial h(p)}{\partial p_i}, \text{ pour } \ i = 1.2.3\ldots\ldots.n \ \text{; avec } \ p = (p_1, p_2, \ldots p_n).$$

Proposition 2.1 *Dans le cas d'une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants indépendants, les deux définitions précédentes sont équivalentes.*

Démonstration :

On peut écrire $h(p)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} h(p) &= P[\Phi(X)=1] = P[\{\Phi(X)=1\}\cap\{X_j=1\}] + P[\{\Phi(X)=1\}\cap\{X_j=0\}] \\ &= P[\Phi(X)=1/X_j=1]\,P[X_j=1] + P[\Phi(X)=1/X_j=0]\,P[X_j=0] \\ &= P[\Phi(1_j,X)=1]\,p_j + P[\Phi(0_j,X)=1]\,(1-p_j) \\ &= p_j h(1_j,p) + (1-p_j)\,h(0_j,p). \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} I_h\ (i) &= E[\Phi(1_i,x)-\Phi(0_i,x)] = h(1_i,p) - h(0_i,p) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i}[p_j\ h(1_i,p) + (1-p_i)\ \ h(0_i,p)] \\ &= \frac{\partial h(p)}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Remarque 2.7 **1**. *$h(p)$ est une fonction multilinéaire, si $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, alors $h(p)$ est un polynôme en p.*

2. *Si $p_i = \frac{1}{2}$ pour tout i, $i = 1.2.3\ldots\ldots.n$, alors :*

$$I_h\ (i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_x [\Phi(1_i,x) - \Phi(0_i,x)].$$

L'importance moyenne coïncide avec l'importance de structure.

3. *Si $0 < p_i < 1$ pour tout i, $i = 1.2.3\ldots\ldots.n$, alors :*

$$0 < I_h\ (i) < 1.$$

Exemple 2.5 ***Structure "k-sur-n" .***

La fonction de fiabilité s'écrit :

$$h(p) = \sum p_{i_1}.p_{i_2}.....p_{i_m} \left(1 - p_{i_{m+1}}\right) ..... \left(1 - p_{i_n}\right),$$

la somme porte sur toutes les partitions $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *et* $\{i_{m+1}, i_{m+2}, ..., i_n\}$ *de l'ensemble* $\{1, 2, ...n\}$ *en deux ensembles disjoints où* $m \geq k$.

L'importance moyenne du $i^{\text{ème}}$ *composant est donnée par :*

$$I_h\ (i) = \frac{\partial h(p)}{\partial p_i} = \sum p_{i_1}.p_{i_2}.....p_{i_{k-1}} \left(1 - p_{i_{k+1}}\right) ..... \left(1 - p_{i_n}\right),$$

où $\{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\}$ *et* $\{i_{k+1}, i_{m+2}, ..., i_n\}$ *est une partition de l'ensemble* $\{1, 2, ..., i-1, i+1, ...n\}$.

a) Lorsque k=1 (structure en parallèle) *alors :*

$$h(p) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)...(1 - p_n) \ \text{ et } \ I_h\ (i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1 - p_j).$$

Si en outre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, *alors :* $I_h\ (1) < I_h\ (2) < ... < I_h\ (n)$, *le composant qu'a la plus grande fiabilité est le plus important.*

b) Lorsque k=n (structure en série) *alors :*

$$h(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i \ \text{ et } I_h\ (i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j$$

Si en outre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, *alors :* $I_h\ (1) > I_h\ (2) > ... > I_h\ (n)$, *le composant qui a la plus petite fiabilité est le composant le plus important.*

Théorème 2.4 *La fonction de fiabilité* $h(p)$ *d'une structure cohérente d'ordre* n *est strictement croissante pour* $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ *dans* $]0.1[^n$.

Démonstration :

On sait que $h(p) = p_j \; h\left(1_j, p\right) + (1 - p_j) \; h\left(0_j, p\right)$, pour $1 < j < n$; donc :

$$\frac{\partial h(p)}{\partial p_i} = h\left(1_i, p\right) - h\left(0_i, p\right) = E\left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right].$$

Comme $\Phi\left(x\right)$ est une fonction croissante alors :

$$\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right) \geq 0 \;\; \text{pour tout} \;\; x.$$

En outre il existe x^0 tel que $\Phi\left(1_i, x^0\right) - \Phi\left(0_i, x^0\right) = 1$, puisque chaque composant est utile, x^0 existe avec une probabilité strictement positive car $p \in \left]0.1\right[^n$.

On déduit donc :

$$E\left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right] > 0.$$

Par conséquent $h(p)$ est une fonction strictement croissante par rapport à chacune des coordonnées du vecteur $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$.

Théorème 2.5 *Si $h(p)$ est la fonction de fiabilité d'une structure cohérente Φ, alors pour tout p et $p' \in \left[0.1\right]^n$:*

(i) $h\left(p \amalg p'\right) \geq h(p) \amalg h(p')$,

(ii) $h\left(p.p'\right) \leq h(p).\Phi(p')$,

On a l'égalité dans (i) si et seulement si la structure Φ est en parallèle.

On a l'égalité dans (ii) si et seulement si la structure Φ est en série.

Démonstration :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$; $X_1', X_2', ..., X_n'$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes avec $P\left[X_i = 1\right] = p_i$, $P\left[X_i' = 1\right] = p_i'$, alors :

(i)

$$h\left(p \amalg p'\right) - \; h(p) \amalg h(p') = \sum_x \sum_{x'} \left[\Phi\left(x \amalg x'\right) - \Phi(x) \amalg \Phi(x')\right] P\left[X = x\right] P\left[X' = x'\right] \geq 0,$$

car :

$$E\left[\Phi\left(x \amalg x'\right)\right] - E\left[\Phi(x)\right] \amalg E\left[\Phi(x')\right] = E\left[\Phi\left(x \amalg x'\right) - \Phi(x) \amalg \Phi(x')\right],$$

et on sait que $\quad \Phi\left(x \amalg x'\right) \geq \Phi(x) \amalg \Phi(x')$; donc :

$$h\left(p \amalg p'\right) \geq \; h(p) \amalg h(p').$$

(ii)

$$h\left(p.p'\right) \leq \; h(p).h(p') = \sum_{x}\sum_{x'}\left[\Phi\left(x.x'\right) - \Phi(x).\Phi(x')\right] P\left[X = x\right] P\left[X' = x'\right].$$

Or : $\Phi\left(x.x'\right) \leq \Phi(x).\Phi(x')$; donc :

$$h\left(p.p'\right) \leq \; h(p).h(p').$$

* Si le système est en parallèle alors : $\Phi\left(x \amalg x'\right) = \Phi(x) \amalg \Phi(x')$, donc $h\left(p \amalg p'\right) = h(p) \amalg h(p')$.
Réciproquement, si $h\left(p \amalg p'\right) = h(p) \amalg h(p')$, alors :

$$\sum_{x}\sum_{x'}\left[\Phi\left(x \amalg x'\right) - \Phi(x) \amalg \Phi(x')\right] P\left[X = x\right] P\left[X' = x'\right] = 0.$$

Et si p et $p' \in \left]0.1\right[^{n}$ alors $P\left[X = x\right] > 0$ et $P\left[X' = x'\right] > 0$, on a nécessairement :

$$\Phi\left(x \amalg x'\right) = \Phi(x) \amalg \Phi(x'),$$

Par conséquent le système est en parallèle.

* On raisonne de la même façon pour $h\left(p.p'\right) \leq h(p).\Phi(p')$. On conclure que le système est en série.

2.2.2 Système aléatoires à composants associes

Dans beaucoup de situations en fiabilité, les variables aléatoires qui présentent un intérêt ne sont pas indépendantes c'est le cas par exemple des liens minimaux ou des coupes minimales dans un système cohérent ayant des composants en commun, Nous dirons que ces variables aléatoires sont « associées » dans un sens précisé dans la définition suivante :

Définition 2.11 *Les variables aléatoires $T = T_1, T_2, ..., T_n$ sont dites « associées » si*

$$cov\left[\Gamma\left(T\right), \Delta\left(T\right)\right] \geq 0,$$

pour tout couple de fonctions binaires (Γ, Δ) croissantes.

La relation aux fonctions binaires ne fait perdre aucune généralité comme le montre le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Si $T = T_1, T_2, ..., T_n$ sont des variables aléatoires associées et si f et g sont des fonctions croissantes, alors :*

$$cov\left[f\left(T\right), g\left(T\right)\right] \geq 0,$$

lorsque cette covariance existe.

Démonstration :

Soient S et T deux variables aléatoires telles que $E\left(S\right), E\left(T\right)$ et $E\left(ST\right)$ existent. On définit :

$$\chi_S(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad S > u. \\ 0 & \text{si} \quad S \leq u. \end{cases} \quad ; \quad \chi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T > t. \\ 0 & \text{si} \quad T \leq t. \end{cases}$$

On se propose de démontrer :

$$cov(S,T) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} cov\left[\chi_S(u), \chi_T(t)\right] \, du \, dt.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
cov(S,T) &= E\left([S-E(S)]\,[T-E(T)]\right) = E(ST) - E(T).E(S) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P[S>u, T>t]\,du\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P[S>u]\,P[T>t]\,dt\ du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[1_{\{S>u,T>t\}}\right] du\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P[S>u]\,P[T>t]\,dt\ du. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[\chi_S(u).\chi_T(t)\right] du\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[\chi_T(t)\right].E\left[\chi_S(u)\right] dt\ du. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} cov\left[\chi_S(u), \chi_T(t)\right] du\ dt.
\end{aligned}$$

Si on applique ce résultat à $cov\left[f(T), g(T)\right]$ on obtient :

$$cov\left[f(T), g(T)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} cov\left[\chi_{f(T)}(u), \chi_{g(T)}(t)\right] dudt.$$

χ étant une fonction binaire, f et g sont des fonctions croissantes et $T = T_1, T_2, ..., T_n$ associées donc :

$$cov\left[\chi_{f(T)}(u), \chi_{g(T)}(t)\right] \geq 0,$$

$\chi_{f(T)}$ et $\chi_{g(T)}$ étant croissantes en T, par conséquent :

$$cov\left[f(T), g(T)\right] \geq 0.$$

Les variables aléatoires associées possèdent les deux propriétés fondamentales suivantes :

(p3) Les variables aléatoires images par des fonctions croissantes de variables aléatoires associées, sont associées.

(p4) Si $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ et $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont également des variables aléatoires associées et si X, Y sont indépendantes alors :

$(X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont des variables aléatoires associées.

Remarque 2.8 *De la propriété fondamentale* ***(p3)*** *on déduit immédiatement :*

Tout sous-ensemble de variables aléatoires associées est constitué de variables aléatoires associées.

Théorème 2.6 *Si* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont des variables aléatoires binaires associées alors :*

$1 - X_1, 1 - X_2, ..., 1 - X_n$ *sont aussi des variables aléatoires binaires associées.*

Démonstration :

Soient Γ, Δ deux fonctions binaires croissantes, les fonctions duales :

$$\Gamma^D(x) = 1 - \Gamma(1-x), \Delta^D(x) = 1 - \Delta(1-x),$$

sont aussi des fonctions binaires croissantes.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} cov\left[\Gamma(1-x),\ \Delta(1-x)\right] &= cov\left[1-\Gamma^D(x), 1-\Delta^D(x)\right] \\ &= cov\left[\Gamma^D(x), \Delta^D(x)\right] \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ sont des variables aléatoires associées.

2.2.3 Encadrement de la fiabilité d'un système

On a déjà vu que le calcul direct de la fiabilité d'un système à partir de la fiabilité de ses composants, est très laborieux et soit impossible dans le cas des systèmes complexes. On est contraint donc à fournir un encadrement de la valeur de cette fiabilité.

L'objet de ce paragraphe est justement de démontrer des inégalités sur la fiabilité de systèmes cohérents à composants non nécessairement indépendants.

Théorème 2.7 *Si* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont des variables aléatoires binaires associées alors :*

i) $P\left[\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P\left[X_i = 1\right],$

ii) $P\left[\coprod_{i=1}^{n} X_i = 1\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} P\left[X_i = 1\right].$

Démonstration :

i) On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n=1$ c'est évident. Supposons la relation (i) vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n-1} X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n-1} P\left[X_i = 1\right], \text{ soit :}$$
$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} E\left[X_i = 1\right].$$

Comme $\prod_{i=1}^{n-1} X_i$ et X_n sont des fonctions croissantes en X, donc elles sont associées, alors :

$$cov\left(\prod_{i=1}^{n-1} X_i, X_n\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) - E\left(\prod_{i=1}^{n-1} X_i\right) E\left(X_n\right) \geq 0, \quad \text{soit :}$$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] \geq E\left[\prod_{i=1}^{n-1} X_i\right] E\left(X_n\right) \geq \prod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right).$$

Après l'utilisation de l'hypothèse de récurrence. Cette inégalité équivalent à :

$$P\left[\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P\left[X_i = 1\right].$$

ii) On raisonne également par récurrence sur n, $X_1, X_2, ..., X_n$ étant des variables aléatoires associées alors :

$1-X_1, 1-X_2, ..., 1-X_n$ sont aussi des variables aléatoires associées.

Pour $n=1$ on a : $\quad E\left(1-X_1\right) = E\left(1-X_1\right).$

L'hypothèse de récurrence est :

$$E\left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(1-X_i\right)\right] \geq \prod_{i=1}^{n-1} E\left(1-X_i\right),$$

$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1-X_i\right)$ et $\left(1-X_i\right)$ étant des fonctions croissantes de $1-X$, donc elles sont associées, par conséquent :

$$cov\left[\prod_{i=1}^{n-1}(1-X_i),1-X_n\right]=E\left[\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)\right]-E\left[\prod_{i=1}^{n-1}(1-X_i)\right]E(1-X_n)\geq 0,$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} E\left[\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)\right] &\geq E\left[\prod_{i=1}^{n-1}(1-X_i)\right]E(1-X_n) \\ &\geq \prod_{i=1}^{n}E(1-X_i). \end{aligned}$$

Après l'utilisation de l'hypothèse de récurrence. Cette inégalité équivalent à :

$$P\left[\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)=1\right]\geq\prod_{i=1}^{n}P\left[(1-X_i)=1\right],$$

Or :

$$\begin{aligned} P\left[\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)=1\right] &= P\left[\coprod_{i=1}^{n}x_i=0\right]=1-P\left[\coprod_{i=1}^{n}x_i=1\right], \text{ et} \\ \prod_{i=1}^{n}P\left[(1-X_i)=1\right] &= \prod_{i=1}^{n}(1-P\left[X_i=1\right]). \text{ Donc :} \\ 1-P\left[\coprod_{i=1}^{n}x_i=1\right] &\geq \prod_{i=1}^{n}(1-P\left[X_i=1\right]). \end{aligned}$$

Ou bien :

$$P\left[\coprod_{i=1}^{n}x_i=1\right]\leq 1-\prod_{i=1}^{n}(1-P\left[X_i=1\right])=\coprod_{i=1}^{n}P\left[X_i=1\right].$$

Remarque 2.9 *Si* $X_1=X_2=...=X_n$ *p.s, alors on a :*

$$P\left[\prod_{i=1}^{n}X_i=1\right]=P\left[X_1=1\right]\quad et\ \prod_{i=1}^{n}P\left[X_i=1\right]=P^n\left[X_1=1\right],\ alors :$$

$$P\left[\prod_{i=1}^{n}X_i=1\right]\geq\prod_{i=1}^{n}P\left[X_i=1\right],\ et :$$

$$\begin{aligned} P\left[\coprod_{i=1}^{n} X_i = 1\right] &= 1 - P\left[X_1 = 0\right] \leq 1 - P^n\left[X_1 = 0\right] \\ &= \coprod_{i=1}^{n} P\left[X_i = 1\right]. \end{aligned}$$

Théorème 2.8 *Si $T_1, T_2, ..., T_n$ sont des variables aléatoires associées, alors :*

i) $P\left[\min_{1\leq i\leq n} T_i > t\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P\left[T_i > t\right]$,

ii) $P\left[\max_{1\leq i\leq n} T_i > t\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} P\left[T_i > t\right]$.

Démonstration :

Posons

$$\chi_i(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T_i > t_i. \\ 0 & \text{si} \quad T_i \leq t_i. \end{cases}$$

Alors :

$\chi_i(t_i), ..., \chi_n(t_n)$ sont des fonctions binaires associées.

En utilisant le théorème 2.7 on obtient :

(1) $P\left[\prod_{i=1}^{n} \chi_i(t_i) = 1\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P\left[\chi_i(t_i) = 1\right]$,

(2) $P\left[\coprod_{i=1}^{n} \chi_i(t_i) = 1\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} P\left[\chi_i(t_i) = 1\right]$.

Par conséquent :

i)

$$P\left[\min_{1\leq i\leq n} T_i > t\right] = P\left[\text{tous les } T_i > t\right] = P\left[T_1 > t, ..., T_n > t\right],$$

et on a que, $P\left[T_1 > t, ..., T_n > t\right] = P\left[\prod_{i=1}^{n} \chi_i(t_i) = 1\right]$, et d'aprés (1) on trouve :

$$P\left[\prod_{i=1}^{n} \chi_i(t_i) = 1\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P\left[\chi_i(t_i) = 1\right] = \prod_{i=1}^{n} P\left[T_i > t\right].$$

(ii)

$$P\left[\max_{1\leq i\leq n} T_i > t\right] \leq 1 - P\left[\max_{1\leq i\leq n} T_i \leq t\right] = 1 - P\left[\text{tous les } T_i \leq t\right],$$

Et on a que,

$$1 - P\left[\text{tous les } T_i \leq t\right] \leq 1 - P\left[T_1 \leq t, ..., T_n \leq t\right] = 1 - P\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \chi_i(t_i)\right) = 1\right],$$

Et si $\quad 1 - P\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \chi_i(t_i)\right) = 1\right] = P\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \chi_i(t_i)\right) = 0\right]$, et d'aprés (2) on trouve :

$$P\left[\prod_{i=1}^{n}\chi_i(t_i) = 1\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} P\left[\chi_i(t_i) = 1\right] = \coprod_{i=1}^{n} P\left[T_i > t\right]$$

Théorème 2.9 *Soit* Φ *une structure cohérente dont les composants sont associées et de fiabilités* $p_1, p_2, \ldots p_n$ *alors :*

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq P\left[\Phi(X) = 1\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i.$$

Démonstration :

On sait que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \Phi(x) \leq \coprod_{i=1}^{n} x_i$. Donc :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \leq E\left[\Phi(x)\right] \leq E\left(\coprod_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Grâce au théorème 2.7 on a

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] \geq \prod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) \quad \text{et} \quad E\left[\coprod_{i=1}^{n} X_i\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right).$$

Il suit que :

$$\prod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) \leq E\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \leq E\left[\Phi(x)\right] \leq E\left(\coprod_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \coprod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right).$$

Donc :

$$\prod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) \leq E\left[\Phi(x)\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} E\left(X_i\right).$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i.$$

Théorème 2.10 *Soit Φ une structure cohérente dont les composants sont associés.*

Soient $L_1,\ L_2, ..., L_p$ les liens minimaux et $K_1,\ K_2, ..., K_s$ les coupes minimales de la structure Φ alors :

$$\prod_{j=1}^{s} P\left[K_j(X)=1\right] \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \coprod_{j=1}^{p} P\left[L_j(X)=1\right].$$

Démonstration :

$K_1,\ K_2, ..., K_s, L_1,\ L_2, ..., L_p$ sont des fonctions croissantes de x, X étant par hypothèse associée, donc :

$K_1,\ K_2, ..., K_s, L_1,\ L_2, ..., L_p$ sont associées. On conclue par application du théorème 2.7 :

$$\begin{aligned} P\left[\Phi(X)=1\right] &= P\left[\prod_{j=1}^{s} K_j(X)=1\right] \geq \prod_{j=1}^{s} P\left[K_j(X)=1\right] \\ &= P\left[\coprod_{j=1}^{p} L_j(X)=1\right] \leq \coprod_{j=1}^{p} P\left[L_j(X)=1\right]. \end{aligned}$$

Corollaire 2.1 *Soit Φ une structure cohérente dont les composants sont indépendants. Alors :*

$$\prod_{j=1}^{s}\left(\coprod_{i\in K_j} p_i\right) \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \coprod_{j=1}^{p}\left(\prod_{i\in L_j} p_i\right).$$

Démonstration :

Grâce au théorème 2.10 on peut écrire :

$$\prod_{j=1}^{s} P\left[K_j(X)=1\right] \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \coprod_{j=1}^{p} P\left[L_j(X)=1\right]$$

Or les composants sont indépendants, donc :

$$P\left[K_j(X)=1\right] = \coprod_{i\in K_j} p_i \quad \text{et} \quad P\left[L_j(X)=1\right] = \prod_{i\in L_j} p_i.$$

D'où le résultat.

Théorème 2.11 ***(Théorème du Min-Max)*** *Soit* Φ *une structure cohérente. Soient* $L_1, L_2, ..., L_p$ *ses liens minimaux et* $K_1,\ K_2, ..., K_s$ *ses coupes minimales. On a :*

$$\max_{1\leq r\leq p} P\left[\min_{i\in L_r}(X_i)=1\right] \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \min_{1\leq z\leq s} P\left[\max_{i\in K_z}(X_i)=1\right].$$

Si, en outre, les composants sont associés alors :

$$\max_{1\leq r\leq p}\prod_{i\in L_r} p_i \ \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \ \min_{1\leq z\leq s}\ \coprod_{i\in K_z} p_i.$$

Démonstration :

On sait que $\quad \Phi(X) = \ \max\limits_{1\leq r\leq p}\ \min\limits_{i\in L_r}(X_i) = \min\limits_{1\leq z\leq s}\ \max\limits_{i\in K_z}(X_i)$. Donc :

$$\min_{i\in L_r}(X_i) \leq \max_{1\leq r\leq p}\ \min_{i\in L_r}(X_i) \leq \Phi(X) \leq \min_{1\leq z\leq s}\ \max_{i\in K_z}(X_i) \leq \ \max_{i\in K_z}(X_i).$$

Donc :

$$\min_{i\in L_r}(X_i) \leq \Phi(X) \leq \ \max_{i\in K_z}(X_i).$$

Par conséquent :

$$P\left[\min_{i\in L_r}(X_i)=1\right] \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq P\left[\max_{i\in K_z}(X_i)=1\right],$$

pour $\ 1\leq r\leq p\ $ et $\ 1\leq z\leq s$. Le résultat suit en maximisant sur z à droite et en minimisant sur r à gauche.

L'autre double inégalité découle du théorème 2.7.

Remarque 2.10 *Lorsque les composants du système sont associés alors on a :*

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq \ \max_{1\leq r\leq p}\prod_{i\in L_r} p_i \leq P\left[\Phi(X)=1\right] \leq \ \min_{1\leq z\leq s}\ \coprod_{i\in K_z} p_i \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i$$

Donc les bornes données par le théorème du ***Min-Max*** *sont toujours meilleures que celles données par le théorème* 2.7.

En général, si les composants sont indépendants an a :

$$\max\left[l_{\Phi}(p),\max_{1\leq r\leq p}\prod_{i\in L_r}p_i\right]\leq h_{\Phi}(p)\leq\min\left[u_{\Phi}(p),\ \min_{1\leq z\leq s}\ \coprod_{i\in K_z}p_i\right]$$

où :

$$l_{\Phi}(p)=\prod_{j=1}^{s}\left(\coprod_{i\in K_j}p_i\right)\quad et\quad u_{\Phi}(p)=\coprod_{j=1}^{p}\left(\prod_{i\in L_j}p_i\right).$$

Chapitre 3

Système k-consécutifs-sur n

Dans ce chapitre nous allons présenter le **système "k-consécutifs-sur n"** à partir de quelques résultats importants concernant le calcule et l'encadrement de la fiabilité dans le deux cas le premier c'est le cas où les composants sont indépendants et le deuxième est le cas markovien.

3.1 Définitions et notations

Dans ce chapitre on note :

$*$ n : le nombre de composants dans le système.

$*$ k : le nombre minimum de composants consécutifs en panne qui cause la panne du système $(k \leq n)$.

$*$ X_i : l'état du composant i, $X_i = 1$ ou 0 suivant que le composant i fonctionne ou tombe en panne. $i = 1, 2, ..., n$.

$*$ $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$: coefficient binomial.

$*$ q_i : la probabilité de panne du composant i. pour $i = 1, 2, ..., n$.

$*$ $p_i = 1 - q_i$.

$*$ $R_k(n, p)$: la fiabilité du **système "k-consécutifs-sur n" linéaire,** où $p = (p_1, p_2, \ldots p_j)$.

$*$ $F_k(n, p)$: la probabilité du panne du **système "k-consécutifs-sur n",** c à d : $R_k(j, p) = 1 - F_k(j, p)$.

$*$ $R_k\,(n,p)_C$: la fiabilité du **système "k-consécutifs-sur n" circulaire,** où $p = (p_1, p_2, \ldots p_j)$. $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., m$.

$*$ $I_k^n\,(i,p)$: Importance en fiabilité du composant i, $i = 1, 2, ..., n$.

Définition 3.1 *Un système **"k-consécutifs-sur n"** est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs sont en panne. On remarque que pour $k = 1$ ou $k = n$ on obtient un système en série en parallèle respectivement.*

3.1.1 Domaines d'applications

Les systèmes **"k-consécutifs-sur n"** : ont attiré l'attention de plusieurs ingénieurs et chercheurs car ils ont une large application, du fait qu'ils sont fiables que les systèmes en série et moins chers que les systèmes en parallèles. Comme exemples de ces systèmes :

Exemple 3.1 *Les systèmes de télécommunication, avec n stations transmet l'information d'un point A vers un point B, les stations sont placées à égales distances entre A et B, chaque station transmet l'information k stations plus loin. Il est claire que ce système tombe en panne si et seulement si au moins k composants (stations) consécutifs sont en panne.*

Exemple 3.2 *Les systèmes pipelines avec n stations de pompage, pour transporter le pétrole ou le gaz de point A vers un point B. on dispose de n pompes, ces pompes sont placées à égales distances entre A et B, chaque pompe peut transporter le pétrole ou le gaz k pompes plus loin. Ce système tombe en panne si et seulement si au moins k pompes consécutifs sont en panne.*

3.2 Formules et bornes de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur n"

3.2.1 Cas des composants indépendants

Dans cette section, on considère un système dont les composants sont supposés indépendants. On distingue deux cas importants, le premier est le cas où les composants sont identiques et le deuxième c'est le cas où ils ne sont pas nécessairement identiques.

Cas des composants identiques

Dans ce cas, outre l'hypothèse d'indépendance des composants nous supposons qu'ils ont tous la même fiabilité $p = p_1 = p_2 = \ldots = p_n$. On note $q = 1 - p$ (la probabilité de panne de chaque composant). Sous ces considérations nous rappelons quelques résultats importants dont les objectifs sont le calcule et l'encadrement de la fiabilité du système.

Formule exacte de la fiabilité du système

La plupart des auteurs ont utilisé l'analyse combinatoire pour l'évaluation de la fiabilité d'un système **"k-consécutifs-sur n"** quand ses composants sont indépendants et identiques.

Cet outil permet de trouver une expression explicite de la fiabilité du système en fonction de p. Mais l'inconvénient qu'on a souvent est le calcule du facteur avant du terme dans la somme ci-dessous, ce facteur est noté $N(j,k,n)$ et c'est qui indique le nombre de fois que le système fonctionne sachant que j composants sont en panne. En utilisant ce nombre on peut écrire :

$$R_k(n,p) = \sum_j q^j p^{n-j} N(j,k,n).$$

Les valeurs de $N(j,k,n)$ Pour $\mathbf{k = 2}$: D'après Chiang et Niu [4] on a :

$$N(j,2,n) = \binom{n-j+1}{j}.$$

Derman, Lieberman et Ross [5] ont considéré le nombre de façons possibles de placer au plus $k-1$ composants en panne entre deux composants fonctionnent et ils ont obtenu la formule récursive suivante :

$$N(j,k,n) = \sum_{i \geq 0} \binom{n-j+1}{i} N(j-(k-1)i, k-1, n-ki), \quad \text{pour} \quad k \geq 3.$$

On substitue $N(j,2,n)$ dans la formule récursive précédente on trouve :

$$N(j,3,n) = \sum_{i\geq 0} \binom{n-j+1}{i} \binom{n-j-i+1}{j-2i}.$$

En substituons dans la formule récursive précédente $k-2$ fois, Bolinger [6] a donné les expressions explicites de $N(j,k,n)$ comme suit :

$$N(j,k,n) = \begin{cases} 0, & ,\ j=n \\ \binom{n}{j}, & ,0 \leq j < k \\ \sum_{i=0}^{k-1} N(j-i,k,n-i-1), & ,k \leq j < n \end{cases}$$

Généralement, on peut écrire l'équation récursive de Bolinger sous forme exacte.

Théorème 3.1

$$N(j,k,n) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j} \text{......} \ \textit{pour} \quad 1 \leq k \leq j < n$$

Démonstration

On utilise la formule récursive de Bolinger, on trouve :

$$\begin{aligned} N(j,k,n) &= \sum_{l=0}^{k-1} N(j-l,k,n-l-1) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j}{i} \binom{n-l-1-ik}{n-j-1} \\ &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j}{i} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-l-1-ik}{n-j-1} \\ &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j}{i} \sum_{x=n-k-ik}^{n-1-ik} \binom{x}{n-j-1} \\ &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j}{i} \left[\binom{n-ik}{n-j} - \binom{n-k-ik}{n-j} \right] \end{aligned}$$

(on utilise l'identité combinatoire (1.51) dans Gould [7]), on trouve :

$$\begin{aligned}
N(j,k,n) &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j}{i} \left[\binom{n-ik}{n-j} - \binom{n-k-ik}{n-j} \right] \\
N(j,k,n) &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \left[\binom{n-j}{i} + \binom{n-j}{i-1} \right] \binom{n-ik}{n-j} \\
N(j,k,n) &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.1 *La relation entre la fiabilité du système linéaire et celle d'un système circulaire est donnée par Derman, Lieberman et Ross dans* [8] *comme suit :*

$$R_k(n,p)_C = p^2 \sum_{l=0}^{k-1} (l+1)\, q^l R_k(n-l-2,p).$$

Alors la fiabilité du système est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.2 [9] *Pour* $1 \leq k \leq n$, *on a :*

1) Cas linéaire :

$$R_k(n,p) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\binom{n-ki+1}{i} - q \binom{n-ki}{i} \right].$$

2) Cas circulaire :

$$R_k(n,p)_C = \sum_{i\geq 0} \left(-pq^k\right)^i \binom{n-ki}{i} - q^n + k \sum_{i\geq 0} \left(-pq^k\right)^{i+1} \binom{n-k(i+1)-1}{i}.$$

Démonstration

1) On a d'après la formule exacte de $N(j,k,n)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
R_k(n,p) &= \sum_{j\geq 0} q^j p^{n-j} N(j,k,n) \\
&= \sum_{j\geq 0} q^j p^{n-j} \sum_{i\geq 0}^{i} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j} \\
&= \sum_{i\geq 0}^{i} (-1)^i \sum_{j\geq 0} q^j p^{n-j} \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j} \\
&= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} (-1)^i q^j p^{n-j} \left[\frac{(n-ik)!}{(n-j)!\,(j-ik)!}\right] \left[\frac{(n-j+1)!}{i!\,(n-j-i+1)!}\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} (-1)^i q^j p^{n-j} (n-j+1) \frac{(n-ik)!}{i!} . \frac{1}{(j-ik)!\,(n-j-i+1)!}
\end{aligned}$$

On remarque que : $(n-j-i+1)+(j-ik)=n-(k+1)i+1$

Alors on trouve :

$$\begin{aligned}
R_k(n,p) &= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} (-1)^i q^j p^{n-j} (n-j+1) \frac{(n-ik)!}{i!} . \frac{1}{(j-ik)!\,(n-j-i+1)!} \\
&\quad \times \frac{(n-(k+1)i+1)!}{(n-(k+1)i+1)!} \\
&= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} (-1)^i q^j p^{n-j} (n-j+1) \frac{(n-ik)!}{i!\,(n-(k+1)i+1)!} \\
&\quad \times \frac{(n-(k+1)i+1)!}{(j-ik)!\,(n-j-i+1)!} \\
&= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(n-ik)!}{i!\,(n-(k+1)i+1)!} \sum_{j\geq 0} q^j p^{n-j} (n-j+1) \binom{n-(k+1)i+1}{j-ik}
\end{aligned}$$

On pose $l=j-ik$, on trouve : $j=l+ik$ et $n-j=n-ik-l+1-1=n-i(k+1)+i-l+1-1$, alors on trouve :

$$\begin{aligned}
R_k(n,p) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(n-ik)!}{i!\,(n-(k+1)i+1)!}\sum_{l\geq 0} q^{l+ik}p^{n-i(k+1)+i-l+1-1} \\
&\quad \times (n-l-ik+1)\binom{n-(k+1)i+1}{l} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(n-ik)!}{i!\,(n-(k+1)i+1)!} q^{ik}p^{i-1} \\
&\quad \times \sum_{l\geq 0} q^l p^{n-i(k+1)-l+1}(n-l-ik+1)\binom{n-(k+1)i+1}{l} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(n-ik)!}{i!\,(n-(k+1)i+1)!} q^{ik}p^{i-1} \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{n-(k+1)i+1} q^l p^{n-i(k+1)-l+1}(n-l-ik+1)\binom{n-(k+1)i+1}{l} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(n-ik)!}{i!\,(n-(k+1)i+1)!} q^{ik}p^{i-1}\left[n-ik+1-\{n-(k+1)i+1\}q\right] \\
R_k(n,p) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i p^{i-1}q^{ki}\left[\binom{n-ki+1}{i}-q\binom{n-ki}{i}\right].
\end{aligned}$$

Formules récursives de la fiabilité

Théorème 3.3 [4] *Pour $n \geq k$ on a :*

$$R_k(n,p) = p^{n-k+1} + \sum_{i=1}^{n-k+1}\sum_{j=i+1}^{i+k+1} p^i q^{j-i} R_k(n-j,p).$$

Démonstration

Soit X le vecteur indiquant l'état des composants, c'est-à-dire : $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tel que $x_i = 0$ ou 1où 0 veut dire que le composant est en panne et 1 est en marche.

Soit Z la variable aléatoire qui représente l'indique du premier 0 dans X et M la variable aléatoire qui représente l'indice de premier 1 dans X après Z, alors si le nombre de 0's dans le vecteur d'état inférieure à k alors la fiabilité de système **"k-consécutifs-sur n"** est égale la fiabilité de système **"k-consécutifs-sur l"** tel que $l < n$.

Alors la fiabilité de système est :

$$R_k(n,p) = \sum_{z=1}^{n} \sum_{m=z+1}^{n} \Pr(\text{le système en marche}/Z = z, M = m) \Pr(Z = z, M = m)$$

Si $Z > n - k + 1$, le système aura moins de k composants en panne et alors :

$$\Pr(\text{le système en marche}/Z > n - k + 1, M = m) = 1$$

Et il est claire que :

$$\Pr(Z > n - k + 1) = p^{n-k+1}.$$

Si $m \geq z + k$, le système aura toujours k composants consécutifs en panne donc le système est en panne, alors :

$$R_k(n,p) = \sum_{z=1}^{n-k+1} \sum_{m=z+1}^{z+k-1} \Pr(\text{le système en marche}/Z = z, M = m) \Pr(Z = z, M = m) + p^{n-k+1}.$$

Si $X_m = 1$ avec $z + 1 \leq m \leq z + k - 1$ alors le système **"k-consécutifs-sur n"** fonctionne si et seulement si le système **"k-consécutifs-sur $(\mathbf{n} - \mathbf{m})$"** fonctionne**,** alors **:**

$$\Pr(\text{le système en marche}/Z = z, M = m) = R_k(n - m, p).$$

Et on a :

$$\Pr(Z = z, M = m) = p^z q^{m-z}.$$

Alors

$$R_k(n,p) = \sum_{z=1}^{n-k+1} \sum_{m=z+1}^{z+k-1} R_k(n - m, p) \, p^z q^{m-z} + p^{n-k+1}.$$

D'où le résultat.

Théorème 3.4 *Pour* $n \geq k$ *on a :* [10] :

$$R_k(n,p) = \begin{cases} 1 & ,1 \leq n \leq k-1 \\ R_k(i,p)\, R_k(n-i,p) - pq^k \displaystyle\sum_{s=k+1-i}^{k} R_k(n-i-s,p). & ,1 \leq i \leq k \\ R_k(i,p)\, R_k(n-i,p) - p^2 q^k \displaystyle\sum_{s=2}^{k} R_k(n-i-s,p) \times & \\ \displaystyle\sum_{r=k+2-s}^{k} q^{r+s-k-2} R_k(i-r,p). & ,k \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases}$$

Bornes de la fiabilité du système Plusieurs bornes de la fiabilité du système **"k-consécutifs-sur n"** sont données dans le cas des composants indépendants et identiques.

- Dans [11] , En utilisant la méthode des probabilités conditionnelles on a montré que :

$$l_1 = \left(1-q^k\right)^{n-k+1} \leq R_k(n,p) \leq \left(1-q^k+q^{k+1}\right)^{n-k+1} = u_1$$

- Si en appliquant la méthode de Stein-Chen dans [12] on a obtenu :

$$\begin{aligned} l_2 &= \exp\left(-(n-k+1)\,q^k\right) - \left[(2k-1)\,q^k + 2(k-1)\,q\right] \leq R_k(n,p) \\ &\leq \exp\left(-(n-k+1)\,q^k\right) + \left[(2k-1)\,q^k + 2(k-1)\,q\right] = u_2. \end{aligned}$$

- En utilisant la même méthode avec quelques changements dans la démonstration [13] montre que :

$$\begin{aligned} l_3 &= \exp\left(-p(n-k+1)\,q^k\right) - (2kp-1)\,q^k \leq R_k(n,p) \\ &\leq \exp\left(-p(n-k+1)\,q^k\right) + (2kp-1)\,q^k = u_3. \end{aligned}$$

Le tableau suivant montre que les bornes l_1, u_1 sont meilleures que celles données par la méthode de Stein-Chen :

n	k	q	l_2	l_3	l_1	u_1	u_3	u_2
10	2	0.05	0.8703	0.9669	0.9777	0.9788	0.9909	1.0853
10	2	0.20	0.1777	0.5818	0.6925	0.7462	0.9180	1.2177
10	4	0.10	0.3986	0.9986	0.9993	0.9994	1.0002	1.6000
10	4	0.20	-0.2223	0.9792	0.9889	0.9911	1.0029	2.2001
50	2	0.05	0.7772	0.8781	0.8846	0.8900	0.9021	0.9922
50	2	0.10	0.3826	0.5674	0.6111	0.6421	0.6894	0.8426
50	4	0.05	0.6997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	1.2998
50	4	0.10	0.3946	0.9950	0.9953	0.9958	0.9966	1.5960
100	2	0.05	0.6733	0.7785	0.7805	0.79030	0.8025	0.8883
100	2	0.10	0.1416	0.3642	0.3697	0.4086	0.4562	0.6016

On remarque d'après le tableau ci-dessus que la méthode de Stein-Chen ne donne pas des bonnes bornes particulièrement quand n est petit (la borne supérieure peut dépasser 1 et l'inférieure peut être négative), mais cette méthode reste toujours valable et nécessaire pour établir les convergences en loi des suites de variables aléatoires binaires et indépendantes.

* On a aussi dans [25] , On à un théorème donne une borne supérieure et inférieure pour la fiabilité du système linéaire et circulaire.

Théorème 3.5 *Si la probabilité du panne de composant est inférieure à* $\frac{k}{k+1}$.

$$l_4 = bm^{n+1} - D < R_k(n,p) < aM^{n+1} + D = u_4.$$

$$M^n - (k-1)\,q^n < R_k(n,p)_C < M^{n+1} + (k-1)\,q^n.$$

où :

$$\begin{aligned} m &= 1 - \frac{pq^k}{(1-q^k)^k}, \quad M = 1 - pq^k, \qquad D = \frac{2(k-1)\,q^{n+2}}{p\,(k+(k+1)\,q)}. \\ b &= \frac{M^k - q^k}{M^k - (k+1)\,pq^k}, \quad a = \frac{m^k - q^k}{m^k - (k+1)\,pq^k}. \end{aligned}$$

Le tableau suivant donne des comparaisons entre les bornes inférieures du théorème précédent, la valeur exacte de la fiabilité du système et l_1, pour $k = 3$ et pour différents valeurs de q et n.

p	n	l_4	valeur réel $R_3(n,p)$	$l_1 = \left(1-q^k\right)^{n-k+1}$
0.90	10	0.9944968	1.0000000	0.9920279
0.90	50	0.9592124	0.9971999	0.9531108
0.90	100	0.9168622	0.9927083	0.9066044
0.93	10	0.9980613	1.0000000	0.9972592
0.93	50	0.9853909	0.9990189	0.9836680
0.93	100	0.969779	0.9974250	0.1991396
0.96	10	0.9996288	1.0000000	0.9994881
0.96	50	0.9971742	0.9998131	0.9757227
0.96	100	0.9941146	0.9995058	0.0899478
0.99	10	0.9999939	1.0000000	0.9999920
0.99	50	0.9999533	0.9999969	0.9996160
0.99	100	0.9999027	0.9999919	0.9630672

* On remarque que la borne inférieure l_4 donnée par ce théorème est meilleure que l_1.

* Outre les bornes citées précédemment un résultat intéressant est donné en 2000 dans [14] comme suit :

Théorème 3.6 *Si $1 < k < n$ et $0 < p < 1$, alors on a pour tout m $(k \leq m < n)$:*

$$R_k(m,p)\, R_k(n-m+k-1,p) < R_k(n,p) < R_k(m,p)\, R_k(n-m,p).$$

En appliquant ce théorème pour $m = k$ on obtient :

$$\left(1-q^k\right) R_k(n-1,p) < R_k(n,p) < \left(1-q^k\right) R_k(n-k,p).$$

et si on procède de la même manière on trouve :

$$\left(1-q^k\right)^{n-k+1} < R_k(n,p) < \left(1-q^k\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}.$$

et on remarque que : $\left(1-q^k\right)^{n-k+1}=l_1$, mais $\left(1-q^k\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}>u_1=\left(1-q^k+q^{k+1}\right)^{n-k+1}$.

* C'est à dire la borne supérieure u_1 est meilleure que celle donnée dans ce théorème.

* On a si : $k=4$, $n=10$ et $q=0.1$alors : $u_1=0.99937017$ et $u_4=0.99921038<u_1$.

Corollaire 3.1 *Si la probabilité du panne de composant est inférieure à $\frac{k}{k+1}$, les meilleurs bornes sont :*

$$l_4=bm^{n+1}-D<R_k\left(n,p\right)<aM^{n+1}+D=u_4.$$

Cas des composants non identiques

Ici nous conservons toujours l'hypothèse d'indépendance des composants mais on les suppose non nécessairement identiques, dans ce cas le calcule exacte de la fiabilité du système est très compliqué pour cette raison dans plusieurs travaux scientifiques [15] , [16] , [17] ,[18] [19] et [20] on démontrer des formules récursives permettant le calcul de celle-ci. Le plus souvent dans ce cas on s'est contenté d'encadrer la valeur de la fiabilité du système. Et comme précédemment nous rappelons ici quelques résultats importants concernant le calcul, l'encadrement de la fiabilité.

Formules récursives de la fiabilité On considère un système **"k-consécutifs-sur n"** où les composants sont supposés non nécessairement identiques. Donc ce cas la fiabilité du système est donnée par les formules récursives suivantes :

Théorème 3.7 *Pour $k\geq 1$ on a :* [16] :

$$R_k\left(n,p\right)=\begin{cases}1 & ,n\leq k-1\\ R_k\left(n-1,p\right)-R_k\left(n-k-1,p\right)p_{n-k}\prod\limits_{j=n-k+1}^{n}q_j & ,n\geq k\end{cases}$$

Si les composants sont identiques on obtient :

$$R_k\left(n,p\right)=\begin{cases}1 & ,n\leq k-1\\ R_k\left(n-1,p\right)-pq^kR_k\left(n-k-1,p\right) & ,n\geq k\end{cases}$$

Si dans le cas particulier $k \leq n \leq 2k$ *on a :*

$$R_k(n,p) = 1 - q^k - pq^k(n-k).$$

Théorème 3.8 *Pour* $k \geq 2$ *on a :* [18] :

$$F_k(n,p) = \begin{cases} 0 & , n \leq k-1 \\ \prod\limits_{j=1}^{n} & , n = k \\ \begin{array}{l} F_k(n-1,p) - p_{n-1}q_n F_k(n-2,p) \quad + \\ p_{n-k}F_k(n-k-1,p)\left(\prod\limits_{j=n-k+1}^{n} q_j\right) + \left(\prod\limits_{i=1}^{n-k} p_i\right)\left(\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} q_i\right) \end{array} & , n \geq k+1 \end{cases}$$

Si les composants sont identiques ($p = p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ *et* $q = 1-p$) *on obtient :*

$$F_k(n,p) = \begin{cases} 0 & , n \leq k-1 \\ q^n & , n = k \\ \begin{array}{l} F_k(n-1,p) - pqF_k(n-2,p) \quad + \\ q^k\left[pF_k(n-k-1,p) + p^{n-k}\right] \end{array} & , n \geq k+1 \end{cases}$$

Et dans le cas circulaire on a :

Théorème 3.9 *Pour* $k \geq 1$ *on a :* [20] :

$$R_k(j,p)_C = \begin{cases} 1 & , n \leq k-1 \\ 1 - \prod\limits_{j=1}^{n} q_j & , n = k \\ 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} q_i - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \prod\limits_{j=i-1}^{i+1} q_j & , n = k+1 \\ \begin{array}{l} p_n R_k(n-1,p) + q_n R_k(n-1,p)_C - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_{n-k+i} \\ \times \prod\limits_{j=i}^{n-k+i+1} q_j \ \times \ p_{i+1} R_k((i+2, n-k+i-1), p) \end{array} & , n > k+1 \end{cases}$$

Où ici $p_{n+i} = p_i$ pour $i \geq 0$ et $R_k\left((i+2, n-k+i-1), p\right)$ est la fiabilité du système ***"k-consécutifs-sur (n-k-2)"*** *linéaire constitué des composants $i+1, i+2, ...n-k+i-1$.*

Bornes de la fiabilité du système Si on se réfère aux travaux réalisés sur l'encadrement de la fiabilité du système et aux calculs numériques traitée, on trouve que les meilleures bornes dans ce cas sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.10 *Si $1 \leq k \leq n$, on a :* [21] :

$$\prod_{i=k}^{n}\left(1-\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\right) \leq R_k(n,p) \leq \left(1-\prod_{j=1}^{i} q_j\right)\prod_{i=k+1}^{n}\left(1-\frac{p_{i-k}\prod\limits_{j=i-k+1}^{i} q_j}{1-\prod\limits_{j=i-k}^{i-1} q_j}\right)$$

Si les composants sont identiques on obtient :

$$\left(1-q^k\right)^{n-k+1} \leq R_k(n,p) \leq \left(1-q^k\right)\left(1-\frac{pq^k}{1-q^k}\right)^{n-k}$$

Il est clair que la borne supérieure donnée par le théorème précédent dans le cas identiques est aussi meilleure que u_1. En effet, il suffit de voir que :

$$\left(1-q^k\right)\left(1-\frac{pq^k}{1-q^k}\right)^{n-k} \leq \left(1-q^k+q^{k+1}\right)^{n-k+1} = \left(1-pq^k\right)^{n-k+1} = u_1.$$

3.2.2 Système "k-consécutifs-sur n" Cas Markovien

Dans la section précédente l'hypothèse d'indépendance des composants du système a été toujours présente et elle à joué un rôle important dans les calculs.

Malheureusement, dans la pratique cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. A titre d'exemple si on considère le système de transport du pétrole constitué de n pompes disposées linéairement, si une certaine pompe tombe en panne alors la pompe précédente supporte une plus grande charge d'assurer le pompage du pétrole et donc sa probabilité de panne peut être augmenté et donc ici nous avons une dépendance entre les pompes. Pour cette raison on trouve des travaux scientifiques qui traitent le Système "k-consécutifs-sur n" dont les composants sont dépendants.

Dans la présente section on considère le cas où les composants du système dépendent seulement de l'état du composant qu'il précède. Autrement dit les états des composants sont des variables aléatoires binaires formant une chaine de Markov à deux états, et nous rappelons ici deux résultats concernant le calcul de la fiabilité du système. Le premier est le cas où les états forment une chaine de Markov homogène dont les probabilités de transition sont identiques et on obtient ici une formule exacte de la fiabilité du système. Le deuxième c'est le cas où les probabilités de transition ne sont pas nécessairement identiques et dans ce cas la formule est récursive.

Ici nous avons besoin tout d'abord des notations suivantes :

$*$ $p = Pr\left[X_1 = 1\right]; q = 1 - p.$

$*$ $p_{i,0} = Pr\left[X_i = 1/X_{i-1} = 0\right]$, probabilité que le composant i fonctionne sachant que le précédent $(i-1)$ est en panne pour $i = 1, 2, ..., n$.

$*$ $p_{i,1} = Pr\left[X_i = 1/X_{i-1} = 1\right]$, probabilité que le composant i fonctionne sachant que le précédent $(i-1)$ fonctionne aussi pour $i = 1, 2, ..., n$; $q_{i,1} = 1 - p_{i,1}$.

$*$ $R_k(n)$: Fiabilité du système "k-consécutifs-sur n".

$*$ $[x]$: la partie entière de x.

Cas où les probabilités de transition sont identiques

On considère un système "k-consécutifs-sur n" dont les états des composants $X_1, X_2, ..., X_n$ forment une chaîne de Markov homogène avec :

$p_{i,0} = p_0$, $q_{i,0} = q_0$, $p_{i,1} = p_1$, $q_{i,1} = q_1$, pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors sous ces considérations on a le théorème suivant :

Théorème 3.11 *Pour $n \geq k$ on a :* [22] :

$$\begin{aligned}
R_k(n) &= pp_1^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(i,n-i)} M(i,m,\ k-1)\, M(n-i,m)\, p_0^m p_1^{n-i-m} q q_0^{i-m} q_1^{m-1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(i,n-i)} M(i,m,\ k-1)\, M(n-i,m)\, p_0^{m-1} p_1^{n-i-m} q_0^{i-m} q_1^{m} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{\min(i,n-i-1)} M(i,m,\ k-1)\, M(n-i,m+1)\, p_0^m p_1^{n-i-m-1} q_0^{i-m} q_1^{m} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{m=2}^{\min(i,n-i-1)} M(i,m,\ k-1)\, M(n-i,m-1)\, p_0^{m-1} p_1^{n-i-m+1} q q_0^{i-m} q_1^{m-1}
\end{aligned}$$

où : $M(i,m,\ k-1) = \sum_{r=2}^{\min\left(m,\left[\frac{i-m}{k-1}\right]\right)} \binom{m}{r} (-1)^r \binom{i-(k-1)r-1}{m-1}$ *pour* $i \geq m > 0$,

et $M(n-i,m) = \binom{n-i-1}{m-1}$ *pour* $n-i \geq m > 0$.

Démonstration

On peut consulter [22].

Cas où les probabilités de transition sont non identiques

Dans ce cas la fiabilité du système est donnée par la formule récursive suivante :

Théorème 3.12 [23], *Si $n < k$ on a :* $R_k(n) = 1$.

Si $n \geq k$ on a :

$$\begin{aligned}
R_k(n) &= R_k(n-1) + \frac{q_{n,0} q_{n-k+1,1}}{q_{n-k+1,0} q_{n-k,1}} \left(p_{n-k,1} - p_{n-k,0}\right) \left(R_k(n-1) - R_k(n-2)\right) \\
&\quad - \prod_{j=n-k+2}^{n} q_{j,0} \left(q_{n-k+1,1} p_{n-k,0}\right) R_k(n-k-1).
\end{aligned}$$

Remarque 3.2 *1) Si on suppose que les composants du système sont indépendant alors la for-*

mule donnée par ce dernier théorème se réduit au formule suivante :

$$R_k(n) = R_k(n-1) - p_{n-k} \prod_{j=n-k+1}^{n} q_j R_k(n-k-1)$$

2) Grâce à ce théorème on peut donner aussi une formule récursive pour la fiabilité du système dans le cas où les probabilités de transition sont identiques. Cette formule est comme suit :

$$R_k(n) = R_k(n-1) + (p_1 - p_0)(R_k(n-1) - R_k(n-2)) - q_0^{k-1} q_1 p_0 R_k(n-k-1).$$

Chapitre 4

Importance de structure des composants du système "k-consécutifs-sur n"

L'importance en fiabilité ou au sens de Birnbaum est la dérivée partielle de la fiabilité du système par rapport à la fiabilité des composants. Soit $p = (p_1, ..., p_n)$ un vecteur de fiabilités des composants d'un système donné. L'importance de la fiabilité du composant i est définie comme suit : [**24**] :

Définition 4.1 *L'importance en fiabilité (ou importance au sens de Birnbaum) du $i^{\text{ème}}$ composant $(i = 1, 2, ..., n)$ est donnée par la formule :*

$$I_k^n(i, p) = \frac{\partial R_k(n, p)}{\partial p_i}, i = 1, 2, ..., n.$$

L'importance de la fiabilité d'un composant est interprétée comme la probabilité que le composant est essentiel à la fiabilité du système. Cela signifie que le système fonctionne quand ce composant fonctionne et le système est en panne lorsque ce composant est en panne. L'importance de la fiabilité fournit une mesure quantitative de sorte que les concepteurs du système peuvent décider quels sont les composants méritent une attention particulière.

L'ampleur de l'importance de la fiabilité d'un composant dans un système donné dépend de deux facteurs :

Le premier est la fiabilité du reste des composants, et l'autre est la structure du système. L'effet du premier facteur est neutralisé lorsque tous les composants sont i.i.d avec une fiabilité de $\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, l'importance en fiabilité est appelée l'importance de structure qui en dictés l'effet de la position d'un élément particulier dans le système. Bien que de nombreux chercheurs ont discutés le système **"k-consécutifs-sur n"** au cours de la dernière décennie, mais très peu ont examinés les caractéristiques d'une importance structure. Le présent document est de discuter des caractéristiques d'une importance du structure associé à des composants du système **"k-consécutifs-sur n"**.

On considère un système **"k-consécutifs-sur n"** dont les composants sont supposés indépendants. Le but de la présente section est de donner les formules exactes [**24**] de l'importance de structure du $i^{ème}$ composant $(i = 1, 2, ..., n)$, et pour cela nous avons d'abord les définitions suivantes :

Définition 4.2 *Dans le cas où les composants sont identiques avec $p_i = p = \frac{1}{2}$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$, l'importance au sens de Birnbaum du $i^{ème}$ composant est dite dans ce cas importance de structure du composant i notée $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$.*

Lemme 4.1 *pour tout $i = 1, 2, ..., n$, on a :*

$$I_k^n\left(i,p\right) = \frac{R_k\left(i-1,p\right)R_k\left(n-i,p\right) - R_k\left(n,p\right)}{\left(1-p_i\right)}$$

Démonstration

On désigne par $R_k\left(n, 0_i, p\right)$ et $R_k\left(n, 1_i, p\right)$ la fiabilité du système sachant que le composant i est en panne, fonctionne respectivement. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_k\left(n,p\right) &= p_i R_k\left(n,1_i,p\right) + \left(1-p_i\right)R_k\left(n,0_i,p\right) \\ &= p_i R_k\left(i-1,p\right)R_k\left(n-i,p\right) + \left(1-p_i\right)R_k\left(n,0_i,p\right) \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$I_k^n(i,p) = \frac{\partial R_k(n,p)}{\partial p_i} = R_k(i-1,p)\, R_k(n-i,p) - R_k(n,0_i,p)\,, i = 1,2,...,n.$$

et comme on a :

$$R_k(n,0_i,p) = \frac{R_k(n,p) - p_i R_k(i-1,p)\, R_k(n-i,p)}{(1-p_i)}$$

on déduit que :

$$I_k^n(i,p) = \frac{R_k(i-1,p)\, R_k(n-i,p) - R_k(n,p)}{(1-p_i)}.$$

D'où le lemme.

Définition 4.3 [**24**] *La suite de Fibonacci d'ordre k est la suite de terme général noté $f_{k,n}$ donné par :*

$$f_{k,n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq k-1 \\ 1, & n = k \\ \sum\limits_{j=n-k}^{n-1} f_{k,j}, & n \geq k+1 \end{cases}$$

Les expressions explicites des termes de cette suite sont données par :

$$f_{k,n} = \begin{cases} 2^{n-k-1} & , k+1 \leq n \leq 2k \\ 2f_{k,n-1} - \ f_{k,n-k-1} & , n \geq k+2 \\ 2^{n-k-1} - (n-2k+1)2^{n-2k-2} & ,2k+1 \leq n \leq 3k+1 \end{cases}$$

Remarque 4.1 *D'après la formule de la fiabilité donnée par le théorème précédent, il est claire que le terme $f_{k,n+k+1}$ peut être interpréter comme le nombre de fois qu le système "k-consécutifs-sur n" fonctionne.*

4.1 Formules explicites de l'importance de structure via la suite de Fibonacci

Dans ce paragraphe, nous discutons le problème de l'importance de structure de chaque composant dans le système. Plus exactement, en utilisant les termes de la suite de Fibonacci on donne la formule explicite de $I_k^n(i,p)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Ensuite, suivant les valeurs de n et k on arrange ces importances.

Théorème 4.1 [**24**] *Pour tout $i = 1, 2, ..., n$, on a :*

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = I_k^n\left(n-i+1, \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration

D'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} I_k^n\left(n-i+1, \frac{1}{2}\right) &= 2\left[R_k\left(n-i, \frac{1}{2}\right) R_k\left(n-(n-i+1), \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= 2\left[R_k\left(n-i, \frac{1}{2}\right) R_k\left(i-1, \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 4.2 *Le théorème précédent signifie clairement que les importances de structure "k-consécutifs-sur n" des composants dans un système sont symétriques, par rapport au composant du centre du système. Donc grâce à cette propriété il suffit seulement de calculer la valeur de $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$ pour $i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.*

Maintenant, nous considérons un système "k-consécutifs-sur n" linéaire dont les composants sont identique avec $p_i = \frac{1}{2}$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Sous ces considérations on a le théorème suivant : [**24**] :

Théorème 4.2 $R_k(n,p) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}$.

Démonstration

Soit $A(n,k)$ l'évènement "le système "k-consécutifs-sur n" tombe en panne" alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
1 - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) &= \Pr\left(A(n,k)\right) = \Pr\left[A(n,k) \cap A(n-1,k)\right] + \Pr\left[A(n,k) \cap A^c(n-1,k)\right] \\
&= \Pr\left[A^c(n-1,k)\right] \\
&\quad + \Pr\left(X_{n-k} = 1\right) \Pr\left(X_{n-k+1} = X_{n-k+2} = ... = X_n = 0\right) \Pr \; \left[A^c(n-k-1,k)\right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$1 - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) = 1 - R_k\left(n-1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} R_k\left(n-k-1, \frac{1}{2}\right).$$

Alors on a :

$$R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) = R_k\left(n-1, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} R_k\left(n-k-1, \frac{1}{2}\right).$$

et donc :

1) Pour $0 \leq n \leq k-1$.

$$R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}.$$

car dans ce cas on a d'après les formules dans la définition précédente on a : $f_{k,n+k+1} = 2^n$.

2) Pour $n \geq k$,

Soit j le dernier composant qui fonctionne dans le système, Alors le système fonctionne si et seulement si $n-k+1 \leq j \leq n$, et le sous-système "k-consécutifs-sur $j-1$" fonctionne.

Donc :

Pour $k = n$,

$$\begin{aligned} R_k\left(k, \frac{1}{2}\right) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j+1n} R_k\left(j-1, \frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} f_{k,j+k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k} f_{k,2k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} f_{k,n+k+1}. \end{aligned}$$

Et pour $n > k$ on peut obtenir $R_k\left(n, p\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}$ par récurrence et ce grâce au formule dans la définition précédente.

Théorème 4.3 [**24**] *Pour tout* $i = 1, 2, ..., n$ *on a :*

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[2 f_{k,i+k} f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\right].$$

Démonstration

On a :

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = 2\left[R_k\left(n-i, \frac{1}{2}\right) R_k\left(i-1, \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right)\right]$$

Mais :

$$R_k\left(n, p\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} f_{k,n+k+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) &= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} f_{k,n-i+k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} f_{k,i+k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} f_{k,n+k+1}\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[2 f_{k,i+k} f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\right]. \end{aligned}$$

le théorème est donc démontré.

Lemme 4.2 *Pour* $1 \leq i \leq n-k$,

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \sum_{j=n-k}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} I_k^j\left(i, \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration

Pour $i \leq n-k$ on a d'après le théorème précédent et la définition de suite de Fibonacci, on trouve :

$$\begin{aligned}
2^{n-1} I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) &= 2 f_{k,i+k} f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1} \\
&= 2 f_{k,i+k} \sum_{j=n-i+1}^{n-i+k} f_{k,j} - \sum_{j=n+1}^{n+k} f_{k,j} = \sum_{j=n+1}^{n+k} \left(2 f_{k,i+k} f_{k,j-i} - f_{k,j}\right) \\
&= \sum_{j=n-k}^{n-1} \left(2 f_{k,i+k} f_{k,j-i+k+1} - f_{k,j+k+1}\right) \\
2^{n-1} I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) &= \sum_{j=n-k}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} I_k^j\left(i, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Théorème 4.4 [**24**] *Pour* $k+1 \leq n \leq 2k$ *on a :*

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{i}{2^k}, & 1 \leq i \leq n-k \\ \frac{n-k+2}{2^k}, & n-k < i \leq \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases}$$

où le $\left[\frac{n}{k}\right]$ *est la partie entière de* $\frac{n}{k}$.

Démonstration

Soient :

$W = \{(X_1, X_2, ..., X_n),\ X_j = 0$ ou 1, tel que le système "$k - consécutifs - sur\ n$" fonctionne$\}$.

$S_i = \{(X_1, X_2, ..., X_n),\ X_j = 0$ ou 1, tel que le deux systèmes "k-consécutifs-sur $(i-1)$" constitué des $(i-1)$ premiers composants et "k-consécutifs-sur $(n-i)$" constitué des $(n-i)$ derniers composants fonctionnent $\}$.

On a $card\left(W\right)=f_{k,n+k+1}$ et comme le composant i a deux états ou a $card\left(S_i\right)=2f_{k,i+k}f_{k,j-i+k+1}$.

Notons aussi que $W\subseteq S_i$ et d'autre part chaque élément dans S_i avec $X_i=1$ et aussi dans W.

Et soit $k+1\leq n\leq 2k$ alors :

Si $n-k<i\leq\left[\frac{n}{2}\right]$, dans ce cas chaque k composants consécutifs contenant le composant i qui causent la panne du système si leur i^{ème} composant est en panne.

Autrement dit :

$S_i-W=\left\{\left(X_1,X_2,...,X_n\right),\ X_j=0 \text{ ou } 1, \text{ tel que le système } "k-consécutifs-sur\ n" \text{est en panne}\right\}.$

Donc :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n card(S_i-W)=2\left[1-R_k\left(k,\frac{1}{2}\right)\right]\\
&= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}\right]\\
&= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}\right]\\
&= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[2^n-\left(n-k+2\right)2^{n-k-1}\right]\right]\\
&= \frac{n-k+1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Si : $1<i\leq n-k$ alors on a $k\leq n-i\leq 2k-1$, et donc :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= 2\left[R_k\left(n-i,\frac{1}{2}\right)R_k\left(i-1,\frac{1}{2}\right)-R_k\left(n,\frac{1}{2}\right)\right]\\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}f_{k,n-i+k+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}\right].
\end{aligned}$$

et comme : $2k+1\leq n-i+k+1\leq 3k$ et $2k+1\leq n+k+1\leq 3k+1$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i-1}\left[2^{n-i}-\left(n-i-k\right)2^{n-i-k-1}\right]\\
&\quad -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2^n-\left(n-k\right)2^{n-k-1}\right]\\
&= \frac{i}{2^k}.
\end{aligned}$$

Alors le théorème est démontré.

Outre, les formules citées précédemment il existe d'autres résultats très importants concernant l'importance de structure, nous les représentons ici sans démonstration et ce pour pouvoir les utiliser par la suite.

Lemme 4.3 [**24**] *Pour $n \geq 2k+1$ on trouve :*

1) Si $i \geq k+1$;

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left[I_k^{n-k-1}\left(i-k, \frac{1}{2}\right) - I_k^{n-k-1}\left(i, \frac{1}{2}\right)\right]$$

2)

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) = \sum_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\left[I_k^{n-j}\left(i, \frac{1}{2}\right) - I_k^{n-j}\left(i-j+1, \frac{1}{2}\right)\right]$$

Démonstration

(1) :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - 2f_{k,i+k+1}f_{k,n-i+k}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2f_{k,i+k}\left(2f_{k,n-i+k} - f_{k,n-i}\right) - 2\left(2f_{k,i+k} - f_{k,i}\right)f_{k,n-i+k}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2f_{k,i}f_{k,n-i+k} - 2f_{k,i+k}f_{k,n-i}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}2^{n-k-2}\left[I_k^{n-k-1}\left(i-k, \frac{1}{2}\right) - I_k^{n-k-1}\left(i, \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left[I_k^{n-k-1}\left(i-k, \frac{1}{2}\right) - I_k^{n-k-1}\left(i, \frac{1}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

(2) : d'après **(1),** on a :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - 2f_{k,i+k+1}f_{k,n-i+k}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2f_{k,i+k}\left(\sum_{j=1}^{k} f_{k,n-i+j}\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{k} f_{k,i+j}\right)f_{k,n-i+k}\right]
\end{aligned}$$

et si on applique le théorème 3.13 on trouve le résultat.

Si on utilise le lemme précédent, nous obtenons une plus généralisée à partir du théorème suivante :

Théorème 4.5 [**24**] *Pour* $s \geq 1$,

1) $I_k^n\left(i+s, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^{s} \left[I_k^{n-k-j}\left(i, \frac{1}{2}\right) - I_k^{n-k-j}\left(i+s-k-j, \frac{1}{2}\right)\right]$

2) $I_k^n\left(i+s, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \left[I_k^{n-j}\left(i+s-j, \frac{1}{2}\right) - I_k^{n-j}\left(i, \frac{1}{2}\right)\right].$

Démonstration

La démonstration est le même que la démonstration du lemme précédente.

* D'ordonner l'importance du structure, les théorèmes (4.14) et (4.15) fournissent des outils pour une comparaison directe entre l'importance structure pour deux composants, pour comparer l'importance structure pour deux composants côté de l'autre, le théorème ci-dessous offrir une autre perspective en examinant la relation entre la suite de Fibonacci et le système "k-consécutifs-sur n"

Théorème 4.6 [**24**] , *Soient* $a_{k,i} = \frac{f_{k,i+1}}{f_{k,i}}$ *et* $n \geq 3$. *Alors on a pour* $1 \leq i \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$,

$$I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow a_{k,i+k} > a_{k,n-i+k}$$

Démonstration

($\Longrightarrow$) pour $n \geq 3$:

D'après le théorème précédent on a :

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\right].$$

et on a :

$$I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow f_{k,i+k+1}f_{k,n-i+k} > f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1}$$

alors on trouve :

$$\frac{f_{k,i+k+1}}{f_{k,i+k}} > \frac{f_{k,n-i+k+1}}{f_{k,n-i+k}}$$

et si $a_{k,i} = \frac{f_{k,i+1}}{f_{k,i}}$ on a que : $a_{k,i+k} = \frac{f_{k,i+k+1}}{f_{k,i+k}}$ et $a_{k,n-i+k} = \frac{f_{k,n-i+k+1}}{f_{k,n-i+k}}$
Alors le théorème est démontré.

4.2 L'arrangement des importances de structure

dans cette section, les propositions 1 jusqu'à 5 résument l'arrangement des importances de structure pour différentes valeurs de k, alors on conclu que l'arrangement des importances de structure du système est affectée principalement par la valeur de k.

Comme indiqué dans l'introduction, l'importance structure constitue un indice important pour les postes de composant dans un système **"k-consécutifs-sur n"** donné. La connaissance de l'arrangement des importances de structure pour un système **"k-consécutifs-sur n"** permet de comprendre la position des composants qui sont plus cruciales pour la fiabilité du système.

Par le biais de la discussion dans cette section, il peut être généralement conclu que les éléments placés à k et $n-k+1$ ont la plus grande importance structure, tandis que les composants positionné à 1 et n ont la moindre importance structure.

Proposition 1 énonce les cas les plus simples pour le système **"k-consécutifs-sur n",** quand $k = 1$ et $k = n$.

Lorsque $k = 1$, le système **"k-consécutifs-sur n"** devient un système en série. D'autre part, lorsque $k = n$, le système **"k-consécutifs-sur n"** devient un système en parallèle. Soit pour un système en série ou d'un système en parallèle, l'importance structure de chaque composants du système sont égaux.

Proposition 4.1 [**24**] , *Pour un système "$k-consécutifs-sur\ n$", si $k = 1$ ou $k = n$,*

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = I_k^n\left(j, \frac{1}{2}\right) \quad pour \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

* Pour obtenir l'arrangement des importances de structure, on remarque que les trois derniers théorèmes et les deux lemmes nous donnent des outils pour comparer directement les importances

de structure de deux composants. Dans la proposition suivante on donne suivant les valeurs de n et k l'arrangement des importances de structure.

Proposition 4.2 [**24**] , *Si* $k = 2$ *où* $1 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$,

$$I_2^n\left(2i-1,\frac{1}{2}\right) < I_2^n\left(2i+1,\frac{1}{2}\right) < I_2^n\left(2i,\frac{1}{2}\right) \;\; et \;\; I_2^n\left(2i,\frac{1}{2}\right) > I_2^n\left(2i+2,\frac{1}{2}\right).$$

Démonstration

À cause de la propriété symétrique de l'importance de structure des composants qui déclaré dans le théorème (4.11), $I_2^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$'s seront examiné seulement pour $1 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

On démontre le théorème pour $i = 1$,

$$\left[I_2^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_2^n\left(3,\frac{1}{2}\right) < I_2^n\left(2,\frac{1}{2}\right)\right].$$

1) On a si $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} I_2^n\left(2,\frac{1}{2}\right) - I_2^n\left(1,\frac{1}{2}\right) &= 2\left[R_2\left(n-2,\frac{1}{2}\right)R_2\left(1,\frac{1}{2}\right) - R_2\left(n,\frac{1}{2}\right)\right] \\ &\quad -2\left[R_2\left(n-1,\frac{1}{2}\right)R_2\left(0,\frac{1}{2}\right) - R_2\left(n,\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= 2\left[R_2\left(n-2,\frac{1}{2}\right)R_2\left(1,\frac{1}{2}\right) - R_2\left(n-1,\frac{1}{2}\right)R_2\left(0,\frac{1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

et on a :

$$R_2\left(0,\frac{1}{2}\right) = f_{2,3} = f_{2,1}+f_{2,2} = 0+1 = 1, et\ R_2\left(1,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)f_{2,4} = \left(\frac{1}{2}\right)(f_{2,2}+f_{2,3}) = \left(\frac{1}{2}\right)2 = 1.$$

alors on trouve :

$$I_2^n\left(2,\frac{1}{2}\right) - I_2^n\left(1,\frac{1}{2}\right) = 2\left[R_2\left(n-2,\frac{1}{2}\right) - R_2\left(n-1,\frac{1}{2}\right)\right] > 0.$$

2) Si $n \geq 5$, on applique le lemme (3.3) , on trouve :

$$I_2^n\left(3,\frac{1}{2}\right) - I_2^n\left(2,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)\left[I_2^{n-2}\left(1,\frac{1}{2}\right) - I_2^{n-2}\left(2,\frac{1}{2}\right)\right].$$

d'après le théorème (4.16), pour que :

$$\left[I_2^{n-2}\left(2,\frac{1}{2}\right) > I_2^{n-2}\left(1,\frac{1}{2}\right)\right],$$

il faut vérifier que $a_{2,3} > a_{2,n-1}$, c'est à dire : $\frac{f_{2,4}}{f_{2,3}} > \frac{f_{k,n}}{f_{k,n-1}}$,

$$\begin{aligned}\frac{f_{2,4}}{f_{2,3}} &> \frac{f_{k,n}}{f_{k,n-1}} \iff \frac{2}{1} > \frac{f_{2,n}}{f_{2,n-1}} = \frac{f_{2,n-2}+f_{2,n-1}}{f_{2,n-3}+f_{2,n-2}} \\ &\iff 2f_{2,n-3}+f_{2,n-2} > f_{2,n-1}\end{aligned}$$

et on a que $f_{k,n-1} = f_{k,n-2} + f_{k,n-3}$, implique que $f_{2,n-1} < f_{2,n-2} + 2f_{k,n-3}$.

d'où le résultat.

* On démontre le théorème pour $i = 2$,

$$\left[I_2^{n}\left(3,\frac{1}{2}\right) < I_2^{n}\left(5,\frac{1}{2}\right) < I_2^{n}\left(4,\frac{1}{2}\right)\right]$$

3) Et si $n \geq 7$, on applique le lemme (3.3) , on trouve :

$$I_2^{n}\left(4,\frac{1}{2}\right) - I_2^{n}\left(3,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)\left[I_2^{n-2}\left(2,\frac{1}{2}\right) - I_2^{n-2}\left(3,\frac{1}{2}\right)\right]$$

d'après le théorème (4.16), pour que $\left[I_2^{n-2}\left(3,\frac{1}{2}\right) < I_2^{n-2}\left(2,\frac{1}{2}\right)\right]$ il faut vérifier que $a_{2,4} < a_{2,n}$, c'est à dire vérifier que : $\frac{f_{2,5}}{f_{2,4}} < \frac{f_{k,n+1}}{f_{k,n}}$,

$$\begin{aligned}\frac{f_{2,5}}{f_{2,4}} &< \frac{f_{k,n+1}}{f_{k,n}} \iff \frac{3}{2} < \frac{f_{2,n+1}}{f_{2,n}} = \frac{f_{2,n}+f_{2,n-1}}{f_{2,n}} \\ &\iff f_{2,n} < 2f_{2,n-1}\end{aligned}$$

et on a que $f_{2,n} = 2f_{2,n-2} - f_{k,n-3}$, implique que $f_{2,n} - f_{k,n-2} < 0$.

d'où le résultat.

* Par l'induction, on conclu :

$$I_k^{n}\left(i,\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} I_2^{n}\left(2i,\frac{1}{2}\right) > I_2^{n}\left(2i-1,\frac{1}{2}\right) & \text{si} \quad n \geq 4i-1 \\ I_2^{n}\left(2i,\frac{1}{2}\right) > I_2^{n}\left(2i+1,\frac{1}{2}\right) & \text{si} \quad n \geq 4i+1 \end{cases}$$

4) Selon le théorème (4.15) :

$$I_2^n\left(i+1,\frac{1}{2}\right)-I_2^n\left(i,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[I_2^{n-1}\left(i+1,\frac{1}{2}\right)-I_2^{n-1}\left(i,\frac{1}{2}\right)\right]$$

Quand remplace i par $2i-1$ on trouve :

$$I_2^n\left(2i+1,\frac{1}{2}\right)-I_2^n\left(2i-1,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[I_2^{n-1}\left(2i,\frac{1}{2}\right)-I_2^{n-1}\left(2i-1,\frac{1}{2}\right)\right]>0,\ \text{pour } n\geq 4i.$$

Quand remplace i par $2i$ on trouve :

$$I_2^n\left(2i+2,\frac{1}{2}\right)-I_2^n\left(2i,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[I_2^{n-1}\left(2i+1,\frac{1}{2}\right)-I_2^{n-1}\left(2i,\frac{1}{2}\right)\right]<0,\ \text{pour } n\geq 4i+2.$$

Proposition 4.3 [**24**] , *Si* $2k=n$ *où* $2k=n+1$,

$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right)<...<I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$$

Démonstration

il suffit montrer que : $I_k^n\left(i+1,\frac{1}{2}\right)>I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$ pour $1\leq i\leq k-1$, à partir du théorème (4.14)

* dans cette proposition il est constaté que les éléments 1 à k ont d'importance structure placée dans l'ordre croissant. De même, lorsque $2k>n+1$, les composants 1 à $n-k+1$ et les composants k à n ont d'importance structure placée dans un ordre croissant qui est prouvé dans la proposition suivante :

Proposition 4.4 [**24**] , *Si* $2k>n+1$,

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) &< I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right)<...<I_k^n\left(n-k+1,\frac{1}{2}\right)\\
I_k^n\left(n-k+1,\frac{1}{2}\right) &= I_k^n\left(n-k+2,\frac{1}{2}\right)=...=I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)\\
I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right) &> ...>I_k^n\left(n-1,\frac{1}{2}\right)>I_k^n\left(n,\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Démonstration

La démonstration est le même que la démonstration de la proposition précédente.

Théorème 4.7 [24] , *Pour un système "$k-consécutifs-sur\ n$" on a : Si* $3 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$,

(a)

(1)
$$I_k^n\left(1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2, \frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(k, \frac{1}{2}\right).$$

(2)
$$I_k^n\left(k+1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+2, \frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(2k, \frac{1}{2}\right).$$

(3)
$$I_k^n\left(2k+1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k+2, \frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(3k-1, \frac{1}{2}\right).$$

(4)
$$I_k^n\left(3k, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k, \frac{1}{2}\right).$$

(5)
$$I_k^n\left(1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k+1, \frac{1}{2}\right).$$

en plus,

(6)
$$I_k^n\left(jk, \frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(jk+1, \frac{1}{2}\right) \quad \textit{pour } j = 1,2,3. \textit{ et } I_k^n\left(k-1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+1, \frac{1}{2}\right).$$

(b) *Pour* $2k+2 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$,

$I_k^n\left(2k, \frac{1}{2}\right)$ *: est la borne supérieure et* $I_k^n\left(2k+1, \frac{1}{2}\right)$ *: est la borne inférieure de* $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$*'s, alors :*
$$I_k^n\left(2k+1, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k, \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration

(a) :

(1) si $1 \leq i \leq k-1$, $R_k(i) = 1$, puis
$$I_k^n\left(i+1, \frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = 2\left[R_k\left(n-i-1, \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n-i, \frac{1}{2}\right)\right] > 0.$$

Donc :

$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(k-1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right).$$

avec lemme (4.3) ,

$$I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left[I_k^{n-j}\left(k+1-j,\frac{1}{2}\right) - I_k^{n-j}\left(k,\frac{1}{2}\right)\right] < 0,$$

et d'après le théorème (4.13) :

$$I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(k-1,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2\left(f_{k,2k+1}f_{k,n} - f_{k,2k-1}f_{k,n-1}\right)\right] > 0.$$

D'où,

$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(k-1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right).$$

(2) si $k+1 \leq i \leq 2k-1$, $R_k(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i f_{k,i+k+1}$, alors : $2k+2 \leq i+k+1 \leq 2k$, donc :

$$R_k(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i f_{k,i+k+1} = 2^i - (i-k+2)2^{i-k-1}$$

on a :

$$\begin{aligned} I_k^n\left(i+1,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\begin{array}{c} \left(2^i - (i-k+2)2^{i-k-1}\right)\left(2f_{k,n-i+k-1} - f_{k,n-i-1}\right) \\ -\left(2^{i-1} - (i-k+1)2^{i-k-2}\right)\left(2f_{k,n-i+k} - f_{k,n-i}\right) \end{array}\right] \\ I_k^n\left(i+1,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &> 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(2k-1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right).$$

en plus :

$$I_k^n\left(k+2,\frac{1}{2}\right)-I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left[I_k^{n-j}\left(k+2-j,\frac{1}{2}\right)-I_k^{n-j}\left(k,\frac{1}{2}\right)\right]<0.$$

alors : $I_k^n\left(k+2,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$, Par l'induction, on conclu : $I_k^n\left(k+j,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$, $\forall j\geq 1$. Donc :

$$I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right).$$

alors on trouve :

$$\begin{aligned}I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) &< I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right)<...<I_k^n\left(k-1,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right)\\ &< ...<I_k^n\left(2k-1,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

(3) si $2k+1\leq i\leq 3k-1$,similaire à la démonstration précédente, on peut déduire que $I_k^n\left(i+1,\frac{1}{2}\right)>I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$, donc :

$$I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(2k+2,\frac{1}{2}\right)<...<I_k^n\left(3k-1,\frac{1}{2}\right).$$

et on a que : $I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$,alors on trouve :

$$I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)-I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left[I_k^{n-k-1}\left(k,\frac{1}{2}\right)-I_k^{n-k-1}\left(2k,\frac{1}{2}\right)\right]>0.$$

et on a aussi,

$$I_k^n\left(2k+2,\frac{1}{2}\right)-I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left[I_k^{n-j}\left(2k+2-j,\frac{1}{2}\right)-I_k^{n-j}\left(2k,\frac{1}{2}\right)\right]<0.$$

qui implique que : $I_k^n\left(2k+2,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)$, Par l'induction, on trouve que :

$$I_k^n\left(2k+j,\frac{1}{2}\right)<I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right), \forall j\geq 1,\ \text{et } 2k+j\leq\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

alors on résulte :

$$I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(k+2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(3k-1,\frac{1}{2}\right).$$

(4) on a que :

$$I_k^n\left(2k+j,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right), \forall j \geq 1, \text{ et } 2k+j \leq \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

alors :

$$I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right).$$

en plus,

$$I_k^n\left(3k+1,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left[I_k^{n-k-1}\left(3k,\frac{1}{2}\right) - I_k^{n-k-1}\left(2k,\frac{1}{2}\right)\right] < 0.$$

alors : $I_k^n\left(3k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right)$.

(b) d'après **(a,4),** on a :

$$I_k^n\left(2k+j,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right), \forall j \geq 1, \text{ et } 2k+j \leq \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

qui montre que $I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)$ est la borne supérieure de $I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$'s, Pour $2k+2 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Maintenant, pour montrer que $I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)$ est la borne inférieure de $I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$'s, on utilise le théorème (4.15) :

$$I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left[I_k^{n-j}\left(3k-j,\frac{1}{2}\right) - I_k^{n-j}\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)\right] > 0.$$

qui implique que : $I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right)$.

et d'après **(a,3)** on résulte :

$$I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(3k-1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right).$$

Par l'induction, on peut conclure que $I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)$ est la borne inférieure de $I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$'s, pour $2k+2 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Remarque 4.3 *A cause de la symétrie de l'importance de la structure qui étudier dans le théorème* (4.1), *on remarque que* $I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)$, $I_k^n\left(n-2k+1,\frac{1}{2}\right)$ *et* $I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)$, $I_k^n\left(n-2k,\frac{1}{2}\right)$ *sont les bornes supérieures et inférieures de* $I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$*'s, respectivement.*

Exemple 4.1 *Pour une autre illustration, examinons le cas* $k = 3$*. c'est le système* $"3-consécutifs-sur\ n"$, *alors l'arrangement des importances de cette structure est comme suit :*

$$I_3^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(2,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(4,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(5,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(7,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(10,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(8,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(i,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_3^n\left(i,\frac{1}{2}\right) < \ldots < I_3^n\left(9,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(6,\frac{1}{2}\right) < I_3^n\left(3,\frac{1}{2}\right). \ pour\ 11 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Le théorème précédent confirme que pour $k = 1$ ou $k = n$ ou $k \geq \frac{n}{2}$ les importances de structure sont complètement arrangées. Cependant, pour les autres valeurs de k l'arrangement est partiel.

Nous avons les exemples numériques suivants : on considère un système $"k-consécutifs-sur$ $14"$ avec k=2, k=7, k=12. Alors on a :

$$\begin{aligned}
R_2\left(14,\frac{1}{2}\right) &= 0.06024170\\
R_7\left(14,\frac{1}{2}\right) &= 0.96484275\\
R_{12}\left(14,\frac{1}{2}\right) &= 0.99951172
\end{aligned}$$

et les importances de structure des composants sont données dans le tableau suivant :

i	$I_2^{14}\left(i, \frac{1}{2}\right)$	$I_7^{14}\left(i, \frac{1}{2}\right)$	$I_{12}^{14}\left(i, \frac{1}{2}\right)$
1	0.02844238	0.00781250	0.00024414
2	0.06359863	0.01562500	0.00048828
3	0.05017090	0.03125000	0.00097656
4	0.05529785	0.03125000	0.00097656
5	0.05334473	0.03906250	0.00097656
6	0.05407715	0.04687500	0.00097656
7	0.05407715	0.05468750	0.00097656
8	0.05383301	0.05468750	0.00097656
9	0.05407715	0.04687500	0.00097656
10	0.05334473	0.03906250	0.00097656
11	0.05529785	0.03125000	0.00097656
12	0.05017090	0.02343750	0.00097656
13	0.06359863	0.01562500	0.00048828
14	0.02844238	0.00781250	0.00024414

On peut facilement vérifier que les résultats du théorème précédent sont réalisés dans ces trois exemples.

Chapitre 5

Loi limite du temps de panne

5.1 Cas des composants non identiques

Dans cette section on désigne par $T_i(i = 1, 2, ..., n)$ le temps de panne du $i^{ème}$ composant et par F_i sa distribution de panne, c à d $F_i(t) = \Pr[T_i \leq t]$ pour $t \geq 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$. le temps de panne du système noté Z_n est donné par :

$$Z_n = \min_{1 \leq j \leq n-k+1} \max_{j \leq i \leq j+k-1} T_i.$$

On définit $P_j(t) = \prod_{i=j}^{j+k-1} F_i(t)$, $j = 1, 2, ..., n-k+1$. $P(t) = \max_{1 \leq i \leq n} F_i(t)$ et $\lambda(t) = \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t)$.

Sous ces considérations et en utilisant la méthode de Stein-Chen on obtient :

Théorème 5.1 [**26**]

$$|\Pr(Z_n \leq t) - (1 - \exp(-\lambda(t)))| \leq (2k-1) p^k(t) + (2k-2) p(t)$$

Démonstration

Soit t fixé et soit considérer la variable aléatoire X_j, $j = 1, \ldots, n-k+1$, qui prend la valeur 1 si et seulement si tous les composants $j, j+1, \ldots, j+k-1$ sont en panne et prend la valeur 0 dans tous les autre cas, et soit la variable aléatoire $X = \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j$. Il est clair que le système tombe en panne si et seulement si $X > 0$.

On remarque que :

$$E(X_j) = P_j(t), j = 1, \ldots, n-k+1, \text{ et } E(X) = \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) = \lambda(t).$$

Appliquant le théorème 2 de Barbour et Eagleson [27] nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\left|\Pr(Z_n \leq t) - (1 - \exp(-\lambda(t)))\right| &\leq \min\left(1, \frac{1}{E(X)}\right) \sum_{j=1}^{n-k+1} \left[P_j^2(t) + \sum_{i=j-k+1}^{j+k-1} [P_j(t) P_i(t)] + E(X_i X_j)\right] \\
&\leq \frac{1}{E(X)} \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) p^k(t)\right) + \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t)\right)(2k-2) p^k(t) \\ + \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} E(X_j)\right)(2k-2) p(t) \end{array}\right] \\
&\leq (2k-1) p^k(t) + (2k-2) p(t).
\end{aligned}$$

* cette inégalité nous permet d'établir la loi limite du temps de panne du système.

* Nous présentons maintenant un théorème de la limite qui peut être facilement prouvé en utilisant le théorème précédente, mais avant de l'énoncer nous avons besoin de préparation.

Alors on précise les conditions suivantes :

(a) Soient les nombres positifs λ_i, α_i et les fonctions ϕ_i tel que $F_i(t) = (\lambda_i t)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i} \phi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ pour $0 \leq t \leq \delta$, où δ est un nombre positif.

(b) On suppose que $\underset{t \to +\infty}{lim} \phi_i(t) = 0$, uniformément en i.

(c) $\underset{i \to +\infty}{lim} \lambda_i(t) = \lambda$.

Sous ces conditions on a :

Théorème 5.2 [**26**] *. On a :*

(1) Si $\alpha = \inf \alpha_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots.,$ *alors*

$$\underset{n \to +\infty}{lim} \Pr\left[n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right] = 1 - \exp\left[-(\lambda t)^{\alpha k}\right].$$

(2) Si $\alpha > 0$ et pour tout $i = 1, 2, ...$, il existe j avec $i \leq j \leq i + k - 1$ tel que $\alpha_i > \alpha$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \Pr \left[n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t \right] = 0.$$

Démonstration

Pour la démonstration, il suffit de montrer que la borne donnée par la méthode de Stein-Chen (au temps $t_n = tn^{-\frac{1}{k\alpha}}$) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et ce n'est pas difficile de prouver que la limite donnée dans le théorème précédente tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En outre, il est facile de dériver que le $\lambda(t) \to (\lambda t)^{\alpha k}$ quand n tend vers $+\infty$ dans le cas *(1)*, tandis que $\lambda(t) \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ dans le cas *(2)*.

* Ce théorème veut dire que sous les conditions *(a), (b) et (c)*, quand le nombre de composants tend vers l'infini la variable aléatoire $n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de Weibull *($Weib(\alpha k, \lambda)$)*, ce qui nous permet en pratique d'approximer la fiabilité du système par une loi de Weibull quand n est suffisamment grand. On peut facilement montrer que le théorème précédent est applicable dans les deux exemples suivants.

Exemple 5.1 *On suppose le $i^{\text{ème}}$ composant a pour distribution de panne la distribution de Weibull donnée par :*

$$F_i(t) = 1 - \exp\left[-(\lambda_i t)^\alpha\right] = (\lambda_i t)^\alpha + t^\alpha \circ (1), \quad \text{où} \lim_{n \to +\infty} \lambda_i = \lambda.$$

Exemple 5.2 *On considère une distribution mixte Weibull et gamma. (λ_i) et (μ_i) sont deux suites de nombres positifs qui convergent vers λ et $\lambda (\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}}$ respectivement. et soient les distributions de panne des composants données par :*

$$F_{2i-1}(t) = 1 - \exp\left[-(\lambda_i t)^\alpha\right] = (\lambda_i t)^\alpha + t^\alpha \circ (1),$$

$$F_{2i}(t) = \int_0^t \frac{\mu_i^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} e^{-[\mu_i s]} ds = \frac{\mu_i^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + t^\alpha \circ (1).$$

Remarque 5.1 *Si on note par Z_n^C le temps de panne d'un système "$k - consécutifs - sur\ n$"*

Circulaire, alors on a d'après [**26**] :

$$\Pr\left(Z_n \leq t\right) \leq \Pr\left(Z_n^C \leq t\right) \leq \Pr\left(Z_n \leq t\right) + \sum_{j=n-k+2}^{n} \prod_{i=j}^{j+k-1} F_i\left(t\right).$$

et par conséquent sous les conditions (a), (b) et (c) on a :

$$\underset{n\rightarrow+\infty}{lim} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n^C \leq t\right) = \underset{n\rightarrow+\infty}{lim} \Pr\left[n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right].$$

c'est à dire le théorème précédente est vrai même pour un système circulaire.

5.2 Cas des composants identiques

Dans ce paragraphe nous allons présenter un résultat concernant le temps de panne d'un système qui généralise le système "$k - consécutifs - sur - n$" à savoir le système "$k - parmi - m - consécutifs - sur - n$".

On définit un système "$k - parmi - m - consécutifs - sur - n$", comme un système qui comporte n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi m composants consécutifs sont en panne. On remarque que pour $m = k$ ou $m = n$ on obtient un système "$k - consécutifs - sur - n$", "$k - sur - n$" respectivement. Ici nous avons démontré que sous quelques conditions sur la loi de panne commune des composants la loi limite du temps de panne du système est toujours de Weibull.

Alors, On considère ici un système "$k - parmi - m - consécutifs - sur - n$", les composants sont supposés indépendants et de même distribution de panne $F(t)$ c à d pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

On définit d'abord les quantités suivantes :

* $A\left(t\right) = \binom{m-1}{k-1} F^k\left(t\right)\left[1 - F\left(t\right)\right]^{m-k}.$

* $B\left(t\right) = \sum_{h=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{h} F^{h+1}\left(t\right)\left[1 - F\left(t\right)\right]^{m-h-1}.$

* $D_n\left(t\right) = \left(n - m + 1\right) B\left(t\right).$

* $W\left(t\right) = 1 + 2m(l-1)A\left(t\right) + 2a(m-1)(2m-k+1)\frac{F(t)}{[1-F(t)]^{m-k}}.$

Où $a = \dfrac{\max\limits_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \dbinom{m-1}{h}}{\dbinom{m-1}{k-1}}$ et l est un entier positif.

Sous les considérations ci-dessus on a le résultat suivant :

Théorème 5.3 *Pour tout entier $l \geq 1$ tel que $m \leq lm \leq n$, on a :*

$$\frac{1}{W(t)}\left(\left[\frac{n}{ml}\right]-1\right) mlA(t) \leq \Pr(Z_n \leq t) \leq D_n(t)$$

Démonstration

Soit E_i l'évènement : “ le composant i tombe en panne et au moins $(k-1)$ composants parmis $i+1, i+2, i+3, ..., i+m-1$ sont en panne”, pour $i = 1, 2, ..., n-m+1$, alors on a :

$$\Pr(Z_n \leq t) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n-m+1} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-m+1} \Pr(E_i) = D_n(t).$$

Maintenant, soit t fixé et soit la variable aléatoire $Y_j(t)$, $j = 1, 2, ..., n-m+1$, qui prend la valeur 1 si et seulement si le composant j tombe en panne et il existe exactement $(k-1)$ composants en panne parmi les composants $j+1, j+2, j+3, ..., j+m-1$ et la valeur 0 dans les autres cas. En posant $Y(t) = \sum\limits_{i=1}^{n-m+1} Y_j(t)$, On remarque que le système tombe en panne si $Y(t) > 0$.

Il est clair que : $E(Y_j) = A(t)$ et $E(Y) = (n-m+1)A(t) \leq D_n(t)$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Pr(Z_n \leq t) &= \Pr(Y(t) > 0) \geq \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n}{ml}\right]-1} \bigcup_{j=iml+1}^{(i+1)ml} [Y_j(t) = 1]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{ml}\right]-1} \Pr\left(\bigcup_{j=iml+1}^{(i+1)ml} [Y_j(t) = 1]\right)
\end{aligned}$$

En applique l'inégalité de "Chung-Erdos" on obtient :

$$\begin{aligned}
\Pr\left(Z_n \leq t\right) &\geq \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{ml}\right]-1} \frac{\left(\sum\limits_{j=iml+1}^{(i+1)ml} \Pr\left(Y_j=1\right)\right)^2}{\sum\limits_{j=iml+1}^{(i+1)ml} \Pr\left(Y_j=1\right) + \sum\limits_{u\neq v} \Pr\left(Y_u=1, Y_v=1\right)} \\
&\geq \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{ml}\right]-1} \frac{\left(mlA\left(t\right)\right)^2}{\left[mlA\left(t\right)\right] + 2m\left(l-1\right)mlA^2\left(t\right) + 2lm\left(2m-k+1\right)\left(m-1\right)C^{te}F^{k+1}\left(t\right)} \\
&= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{ml}\right]-1} \frac{\left(\left[\frac{n}{ml}\right]-1\right)mlA\left(t\right)}{1+2m\left(l-1\right)A\left(t\right)+2(2m-k+1)\left(m-1\right)aF\left(t\right)\left[1-F\left(t\right)\right]^{m-k}}
\end{aligned}$$

où $C^{te} = \max\limits_{k-1\leq h\leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}$.

En posant :

$$W(t) = 1+2m\left(l-1\right)A\left(t\right)+2(2m-k+1)\left(m-1\right)a\frac{F\left(t\right)}{\left[1-F\left(t\right)\right]^{k-m}}$$

on obtient :

$$\Pr\left(Z_n \leq t\right) \geq \frac{1}{W(t)}\left(\left[\frac{n}{ml}\right]-1\right)mlA\left(t\right)$$

d'où le résultat.

Nous donnerons dans les théorèmes suivants la limite de la distribution de probabilité de la variable aléatoire $a^{-1}\left(n,k\right)Z_n$ où $a\left(n,k\right)$ est une fonction convenablement choisie. Alors, on a :

Théorème 5.4 *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} nF^k\left(a\left(n,k\right)t\right) = \Delta\left(t\right),\ 0 \leq \Delta\left(t\right) \leq 1,$ *avec* $a\left(n,k\right) \to 0,$ *quand* $n \to +\infty,$ *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right)Z_n \leq t\right) = \binom{m-1}{k-1}\Delta\left(t\right)$$

Démonstration

Il est bien clair que si :

$$\lim_{n\to+\infty} nF^k\left(a\left(n,k\right)t\right) = \Delta\left(t\right)$$

alors :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} D_n\left(a\left(n,k\right)t\right) = \binom{m-1}{k-1}\Delta\left(t\right)$$

donc, d'une part on a :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right)Z_n \leq t\right) \leq \binom{m-1}{k-1}\Delta\left(t\right)$$

D'autre part on utilise le théorème de gauche du théorème précédente pour $l = l_n$ tel que $l_n \to +\infty$ et $\frac{l_n}{n} \to 0$, quand $n \to +\infty$ (par exemple $l_n = c\log n, c > 0$). Alors on obtient :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} W\left(a\left(n,k\right)t\right) = 1$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right)Z_n \leq t\right) &\geq \underset{n\to+\infty}{lim}\left(\left[\frac{n}{ml}\right]-1\right) mlA\left(a\left(n,k\right)t\right) \\ &\geq \binom{m-1}{k-1}\Delta\left(t\right) \end{aligned}$$

Alors on trouve que :

$$\binom{m-1}{k-1}\Delta\left(t\right) \leq \underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right)Z_n \leq t\right) \leq \binom{m-1}{k-1}\Delta\left(t\right)$$

Et donc on a le résultat.

Théorème 5.5 *Si* $\underset{n\to+\infty}{lim} nF^k\left(a\left(n,k\right)t\right) = \underset{n\to+\infty}{lim} l_nF^k\left(a\left(l_n,k\right)t\right) = \Delta\left(t\right),\ 0 \leq \Delta\left(t\right) \leq 1,$*tel que* $a\left(n,k\right) \to 0,$ *quand* $n \to +\infty,$ *pour* $l_n = c\log n, c > 0.$ *Alors on a*

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right)Z_n \leq t\right) = \begin{cases} 1-\exp\left[-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\right] & ,t > 0, \alpha > 0. \\ 0 & ,t \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration

On considère un système composé de n blocs disposés en parallèles, chaque bloc contient l_n composants disposés en séries $\left(l_n \geq m\right)$. La fiabilité de chaque composants est : $\overline{F^k\left(t\right)} =$

$1-F^k(t)$. Alors, on a ici un système "séries-parallèle" homogène sa fiabilité est donnée par la formule suivante :

$$R_n(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\overline{F^k(t)}^{l_n}\right)$$

Il est que si :

$$V(t)=\lim_{n\to+\infty} n\overline{F^k(\alpha_n t+\beta_n)}^{l_n} \text{ avec } \alpha_n>0,\ \beta_n\geq 0.$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(\alpha_n t+\beta_n)=1-\exp(-V(t))$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\overline{F^k(\alpha_n t+\beta_n)}^{l_n} &= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[l_n\log\left(1-F^k(\alpha_n t+\beta_n)\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\exp -l_n\left[F^k(\alpha_n t+\beta_n)+\circ\left(F^k(\alpha_n t+\beta_n)\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\exp -l_n\left[F^k(\alpha_n t)+\beta_n F^k(\varsigma)+\circ\left(F^k(\alpha_n t)+\beta_n F^k(\varsigma)\right)\right]
\end{aligned}$$

où $\alpha_n t<\varsigma<\alpha_n t+\beta_n$.

En choisissant $\alpha_n=a(n,k)$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} nF^k(a(n,k)t)=\lim\limits_{n\to+\infty} l_nF^k(a(l_n,k)t)$, $\beta_n=1$ et $l_n=c\log n$, avec $c=F^{-k}(\varsigma), \varsigma>0$. on obtient :

$$V(t)=\exp-[\Delta(t)+\circ(\Delta(t))].$$

Et d'après la deuxième partie du théorème1 [28] on a :

$$V(t)=\begin{cases}\exp[-t^{\alpha}] & ,t>0,\alpha>0.\\ 0 & ,t\leq 0.\end{cases}$$

Donc :

$$\Delta(t)+\circ(\Delta(t))=t^{\alpha},\ \text{pour } t\geq 0,\alpha>0.$$

Alors :

$$1-\exp(\Delta(t)),\ \text{pour } t\geq 0,$$

Par conséquent

$$-\Delta(t) = \log(1 - t^{\alpha}) = -t^{\alpha} - \circ(t^{\alpha}).$$

En enfin ; pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \binom{m-1}{k-1}\Delta(t) &= \binom{m-1}{k-1}t^{\alpha} + \binom{m-1}{k-1}\circ(t^{\alpha}) \\ &= 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\right) \end{aligned}$$

et en appliquant le théorème précédente on obtient notre résultat.

Remarque 5.2 *Le théorème précédente montre que pour un système* "$k{-}parmi{-}m{-}consécutifs{-}sur-n$" *quand les composants possèdent une même loi de panne $F(t)$, alors pour toute loi $F(t)$ et sous quelque conditions, on peut approcher la fiabilité du système par un terme exponentiel. Autrement dit, pour toute loi $F(t)$ le temps de panne du système converge en loi vers une loi de Weibull.*

** Dans le corollaire suivant nous donnerons la loi limite du panne d'un système "$k - consécutifs - sur - n$", alors on a :

Corollaire 5.1 *Si* $\underset{n\to+\infty}{lim} nF^{k}(a(n,k)t) = \underset{n\to+\infty}{lim} l_n F^{k}(a(l_n,k)t) = \Delta(t)$, $0 \leq \Delta(t) \leq 1$,*tel que* $a(n,k) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *pour* $l_n = c\log n, c > 0$. *Alors on a :*

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t\right) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-t^{\alpha}\right] & ,t > 0, \alpha > 0. \\ 0 & ,t \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration

Il suffit de prendre $m = k$ dans le théorème précédent.

Remarque 5.3 *Un cas particulier de notre résultat est donné comme suit :*

** Si $F(t) =$ Weibull $(\lambda t, \beta)$ c à d pour tout $i = 1, 2, ..., n$:*

$$F(t) = (\lambda t)^{\beta} + \circ(t)^{\beta}$$

et dans ce cas : $a(n,k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$. *Donc ici nous avons obtenu une généralisation de ce cas.*

5.2.1 Exemples numériques

1) Soit $F = Weibull\ (\lambda t, \beta)$ i.e.

$$F(t) = (\lambda t)^{\beta} + \circ (t)^{\beta}$$

on prend $a(n,k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$. Alors on a :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} nF^{k}\left(a(n,k)\,t\right) = \underset{n\to+\infty}{lim} l_n F^{k}\left(a(l_n,k)\,t\right) = t^{k\beta} + t^{k\beta}\circ(1)$$

Donc :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}(n,k)\,Z_n \leq t\right) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\right), \alpha = k\beta > 0.$$

c à d : $\lambda n^{\frac{1}{\alpha}} Z_n \to Weibull\left(\binom{m-1}{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\right)$, quand $n \to +\infty$.

* le Tableau 1 donne un exemple numérique du cas $F(t) = (\lambda t)^{\beta} + \circ (t)^{\beta}$, tel que $\beta = \lambda = 1$, et $k = m = 2$. Les colonnes du tableau donnent les valeurs $G_n(t) = \Pr\left(a^{-1}(n,k)\,Z_n \leq t\right)$ où $a(n,k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$ pour $n = 5, 10, 15, ..., 35$. et on pose $G(t) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{k}\right)$.

n	$t = 0.5$	1	1.5	2	2.5	3	3.5
5	0.1351	0.3686	0.5760	0.7281	0.8302	0.8955	0.9361
10	0.1601	0.4372	0.6682	0.8195	0.9070	0.9539	0.9777
15	0.1713	0.4691	0.7091	0.8564	0.9340	0.9713	0.9880
20	0.1779	0.4887	0.7337	0.8772	0.9482	0.9795	0.9923
25	0.1824	0.5023	0.7505	0.8909	0.9569	0.9842	0.9945
30	0.1858	0.5126	0.7630	0.9008	0.9628	0.9872	0.9959
35	0.1884	0.5207	0.7727	0.9081	0.9671	0.9893	0.9967
$G(t) = 1 - \exp(-t^2)$	0.2211	0.6321	0.8946	0.9816	0.9980	0.9998	0.9999

Tableau 1

* Soit $F(t) = 1 - \exp(-t)$, on prend $a\,(n,k) = n^{-\frac{1}{k}}$, on obtient le Tableau 2 .

n	m	k	$a\,(n,k)$	t	$G_n\,(t)$	$G\,(t)$
5	3	2	0.447	1.55	0.992	0.991
5	3	2	0.447	0.23	0.105	0.100
10	5	3	0.464	1.49	1	0.999
10	5	3	0.464	0.22	0.068	0.061
10	5	5	0.794	0.87	0.798	0.392
50	10	5	0.457	1.51	1	0.999
50	10	5	0.457	0.23	0.078	0.077
50	30	2	0.141	0.74	1	0.999
100	3	2	0.1	1.05	0.891	0.889
100	10	2	0.1	1.05	1	0.999

Tableau 2

2) Si $F(t)$ est la distribution gamma, c à d :

$$F(t) = \int_0^t \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)} s^{\beta-1} e^{-[\mu s]} ds = \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta + t^\beta \circ (1)\,.$$

On prend : $a\,(n,k) = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\mu^{k\beta} n}\right)^{\frac{1}{k\beta}}$, donc on trouve :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} nF^k\,(a\,(n,k)\,t) = \underset{n\to+\infty}{lim} l_n F^k\,(a\,(l_n,k)\,t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} \circ (1)$$

Alors on a :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \Pr\left(a^{-1}\,(n,k)\,Z_n \le t\right) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^\alpha\right), \alpha = k\beta > 0.$$

Si on prend : $\mu = 1$ et $\beta = 2$, on a $F(t) = 1 - \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$, $a\,(n,k) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2k}}$ et $G\,(t) =$

$1-\exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{2k}\right)$. on obtient le Tableau 3.

n	m	k	$a(n,k)$	t	$G_n(t)$	$G(t)$
5	3	2	0.795	2.19	0.992	0.999
5	3	2	0.795	0.34	0.105	0.026
10	5	3	0.764	2.37	1	0.999
10	5	3	0.764	0.36	0.068	0.023
10	5	5	0.851	1.64	0.798	0.999
50	10	5	0.724	2.25	1	0.999
50	10	5	0.724	0.40	0.078	0.013
50	30	2	0.447	1.05	1	1
100	3	2	0.376	1.50	0.891	0.999
100	10	2	0.376	1.50	1	1

Tableau 3

3) Si **:** $F(t)=(\lambda t)^{\beta}+t^{\beta}\circ(1)+t^{\beta}\Psi(t)$, avec $\underset{n\to+\infty}{lim}\Psi(t)=0.$
on prend : $a(n,k)=\frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$. Donc on a :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} nF^{k}(a(n,k)t)=\underset{n\to+\infty}{lim} l_nF^{k}(a(l_n,k)t)=t^{k\beta}+t^{k\beta}\circ(1)$$

Et alors :

$$\underset{n\to+\infty}{lim}\Pr\left(a^{-1}(n,k)Z_n\leq t\right)=1-\exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\right),\alpha=k\beta>0.$$

Conclusion

Dans ce travail nous avons présentés les modèlesf "k- consécutifs-sur-n" à travers quelques résultats concernant le calcul de la fiabilité du système, puis le calcul et l'arrangement des importances de structure des composants ont été étudiés en détail dans ce mémoire. Ainsi, nous avons établi des résultats concernant le comportement asymptotique du temps de panne du système. Nous avons adopté dans ce mémoire des références citées dans la bibliographie générale qui se trouve à la fin de ce mémoire et nous avons extrait quelques résultats pour une approche globale et soutenue dans ce domaine.

Notons aussi que nous avons traité ici seulement le cas linéaire unidimensionnel et non réparable de ces modèles. Nous signalons que beaucoup de problèmes utiles pour mieux présenter ces modèles restent ouverts et nous citons ici quelques uns de ces problèmes qui nous semblent très importants :

– L'étude des versions bidimensionnelle et tridimensionnelle du système "k-consécutifs -sur-n" : On les définit comme suit : un système "k-consécutifs -sur-n" bidimensionnel (tridimensionnel resp.) est un système formé de n^2 *(*n^3 *resp.) composants disposés suivant une grille carrée (cubique resp.) de cotés n et il tombe en panne si et seulement si au moins k sous-grille carrées (cubiques resp.) de coté n non chevauchées tombent en panne. Une sous grille est en panne si et seulement si tous ces composants sont en panne.*

– Le cas réparable du système "k-consécutifs -sur-n» : Le cas des systèmes réparables pose un grand problème pour les chercheurs.

– Le cas des composants dépendants : En pratique l'hypothèse d'indépendance des composants n'est pas toujours vérifiée. Donc il est intéressant d'étudier le cas où les composants sont dépendants.

Bibliographie

[1] Christiane Cocozza-Thivent "Processus stochastiques et fiabilité des systèmes", Springer. Mathématiques et Applications, Directeurs de la collection : J.M. Ghidaglia et X. Guyon (1983).

[2] Barlow. R.E, and Procchan, F."Statistical theory of reliability and life testing : Probability Models", FLORIDA STATE UNIV TALLAHASSEE (1975).

[3] Jean-Louis BON "Fiabilité des systèmes : Méthodes mathématiques", Masson, Paris, (1995).Techniques Stochastiques.

[4] Chiang, D.T, Nui, S.C., "Reliability of consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-30 Apr (1981), pp 87-89.

[5] C Derman,. G. J. lieberman and S. M. Ross, ”On the consecutive-k-out-of-n system”, IEEE. Trans. Reliability. ,Vol R-31 Apr (1982), pp 57-63.

[6] Bollinger R C, "Direct computation for consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-31 Dec (1982) ,pp 444-446.

[7] H. W. Gould, Combinatorial Identities, revised edition, Harner, New york, 1962.

[8] Derman,E C., Lieberman, G.J., Ross, S.M., ”On the consecutive-k-out-of-n : F system”, IEE. Trans. Reliab., Vol R-31 Apr (1982) pp 57-63.

[9] Hwang F. K., ”Simplified Reliabilities for Consecutive–k-out-of-n systems” SIAM J Alg. Disc. Meth. vol.7, N 2, april (1986).pp 258-264.

[10] **Chang H W, Chen R J, Hwang F K, "the structural Birnbaum Importance of Consecutive-k systems" , Journal of Combinatorial Optimization , 6 , (2002), pp 183-197.**

[11] **Fu, J.C., "Bounds for reliability of a large consecutive-k-out-of-n : F systems with unequal component reliability", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-35, Aug (1986a) pp 316-319.**

[12] **Chrysaphinou, O, Papastavridis, S.G., " Limit disribution for a consecutive k-out-of-n : F system", Adv. Appl. Probab., vol 22, (1990b), pp 491-493.**

[13] **Chao, M.T., Fu, J.C., Koutras, M.V., "Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F & related systems", IEEE. Trans. Reliab., vol 44, (1995), pp 120-127.**

[14] **Muselli, M., " Useful inequalities for longest run distribution", Statistics & Probability letters, vol. 46, (2000), pp 239-249.**

[15] **Hwang F. K., "Fast solutions for consecutive-k-out-of-n : F systems",IEEE. Trans. Reliab., vol R-31, Dec (1982) pp 447-448.**

[16] **Shantikumar, J.G."recursive algorithm to evaluate the reliability of a consecutive k-out-of-n F system" IEEE Trans. Reliab. vol R-31 Dec.(1982),pp 442-443**

[17] **Bollinger R C, "An algorithm for direct computation in consecutive-k-outof-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-35 No 5, Dec (1986) , pp611-612.**

[18] **Papastavridis, S.G., " Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE Trans. Reliab., Vol R-35, No 5 December (1986), pp 613-615.**

[19] **Wu, J.S., Chen, R.J., " Efficient algorithm for reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,vol-42, No 1, March (1993) pp 163-164.**

[20] **Hwang F. K, "An O (nk)-time algorithm for computing the reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system" IEEE. Trans. Reliab. ,vol-42, No 1, March (1993) pp 161-162.**

[21] **Jun Cai, ”Reliability of a large Consecutive-k-out-of-r-from-n :F System with Unequal Component-Reliability”, IEEE Transactions On Reliability, Vol.43,No.1, March (1994) , pp 107-111.**

[22] **Ge, G. P., Wang, L. S "Exact reliability formula of a consecutive-k-out-of-n : F systems with homogeneous markov dependence" IEEE Trans. on Reliab. Vol 39, No 5, Decem. (1990),pp 600-602.**

[23] **Papastavridis , S G , Lambiris M, "Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system for Markov-Dependent components" IEEE Trans. Reliab. Vol 36, No 1, Apr (1987), pp 78-79.**

[24] **Fen-Hui Lin, Way Kuo, Frank Hwang, ”Structure importance of consecutive k-out-of-n systems”, Operations Research Letters, 25, (1999), pp 101-107.**

[25] **Papastavridis, S.G., ” Upper and Mower Bounds for the Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F systems”, IEEE Trans. Reliab., Vol R-35, No 5 December (1986), pp 607-610.**

[26] **Ourania Chryssaphinou ; Stavros G. Papastavridis, "Simplified Reliabilities for Consecutive-k-out-of-n systems", Advances in Applied Probability., Vol. 22, No. 2. Jun (1990), pp. 491-493.**

[27] **Barboura, . D.,Eaglesong,. K. "Poisson convergence for dissociated statistics".J. R. Statist. Soc. B 46,397-402.**

[28] **Krzyztof Klowrocki,”The classes of asymptotic reliability functions for seriesparallel & parallel-series systems”, Reliability Engineering and System Safety.46, (1994), pp179-188.**

Résumé

L'objet de notre travail est l'étude des systèmes binaires, et plus précisément, les systèmes k-consécutifs-sur-n. Ces systèmes sont constitués de n composants disposés linéairement, ou circulairement, et sont définis comme suit : ils tombent en panne si et seulement si il y a au moins k composants consécutifs qui tombent en panne.

Nous avons commencé par exposer, d'une façon brève, notions générales sur la fiabilité puis la fiabilité des systèmes complexes.

Puis nous avons traité le système k-consécutifs-sur-n en détail, où nous avons proposé des formules exactes, récursives et l'encadrement de la fiabilité dans deux cas, le cas où les composants sont indépendants identiques et non identiques et le cas où les états de composants forment une chaine de Markov homogène dont les probabilités de transition sont identiques ou non nécessairement identiques. Ensuite, nous avons élaboré l'importance en fiabilité de système et discuterons l'importance de structure des composants, puis, le calcul et l'arrangement des importances de structure des composants

Enfin, une partie qui porte sur la loi limite du temps de panne du système k-consécutifs-sur-n.

Dans chaque partie, nous avons traité des exemples, illustrant les résultats obtenus.

Mots clés : Fiabilité, Fiabilité des systèmes complexes, Systèmes k-consécutifs-sur-n, Importance des composants, Introduction de la fiabilité. Suite de Fibonacci. Importance de structure, Loi limite, Formules de la fiabilité.