



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi



Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département des Mathématiques et Informatique

N° d'ordre :/2023

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Thème : Contrôle Optimal des Equations différentielles Ordinaires et Partielles

Présentée Par : **LAALA IMENE**

Soutenue le 26/ 06 /2023, devant le jury

Président	Prof. Ayadi Abdelhamid	Univ. Oum El Bouaghi
Rapporteur	Prof. Rezzoug Imad	Univ. Oum El Bouaghi
Examineur	Dr. Oussaeif Taki-Eddine	Univ. Oum El Bouaghi
Examinatrice	Dr. Merabti Nesrine Lamy	Univ. Oum El Bouaghi

Année universitaire : 2022 /2023

Remerciements

Avant de commencer à traiter les parties de notre travail, nous profitons de cette occasion pour présenter nos sincères remerciements :

Aux toutes personnes qui nous a aidés et qui a eu confiance en nos capacités.

Dans le cadre de notre recherche nous tenions à remercier en premier lieu dieu le tout puissant de nous avoir donné courage et santé pour achever ce travail.

Nos profonds remerciement vont à notre encadrant à l'université de Larbi Ben

M'hidi professeur I. Rezzoug, pour tout le temps qu'il nous a consacré, ses précieux directives, et pour la qualité de son suivi durant toute la période de notre recherche, et je le remercie particulièrement pour son attitude de frère envers moi, et je lui adresse également mes remerciements aux membres du comité de discussion estimé Prof. Ayadi AbdElhamid et Dr. Oussaeif Taki-

Eddine et Dr. Merabti Nesrine Lamy.

Nous tenons à remercier vivement tout le corps professoral et administratif de l'Université de Larbi Ben M'hidi.

Nos remerciements vont enfin à toutes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit de ma formation à l'université de

Larbi Ben M'hidi.

A mes parents pour leur amour et leur sacrifice.

A mon frère.

A mes respectueux formateurs, pour leur aide et leur soutien. Pour leur
encadrement et intérêt.

A mes amis(es) pour leur fidélité.

A toutes les personnes que j'aime et que je respect.

A tous ceux qui ont fait un effort pour m'aider d'organiser mon projet de
mémoire

Table des matières

Notations	3
Introduction	4
0.1 Exemples	5
0.2 Plan de travail	6
1 Notions préliminaires	7
1.1 Espaces	7
1.1.1 Espace $L^2(\Omega)$	7
1.1.2 Espace $H^1(\Omega)$	8
1.1.3 Espace $H_0^1(\Omega)$	8
1.2 Pendule	8
1.2.1 Pendule simple	8
1.2.2 Pendule inversé	11
2 Théorie du contrôle	13
2.1 Introduction aux semi-groupes	13
2.1.1 Semi-groupe fortement continues à l'origine	14
2.1.2 Théorème de Hille Yosida	15
2.1.3 Exemples	17
2.1.4 Application à la résolution de l'équation d'évolution	19
2.2 Contrôlabilité	21
2.2.1 Contrôlabilité en dimension finie	21
2.2.2 Contrôlabilité en dimension infinie	25
2.3 Contrôle optimal des systèmes linéaires	28

2.3.1	Contrôle temps-minimal	28
2.3.2	Problèmes linéaires quadratiques standards	35
3	Étude de quelques problèmes de contrôle	43
3.1	Contrôle d'une équation différentielle ordinaire	43
3.1.1	Exemple simple de contrôle pour une équation différentielle ordinaire . . .	43
3.1.2	Contrôle optimale d'une équation différentielle ordinaire	44
3.1.3	Contrôle d'un système d'équation différentielle ordinaire	47
3.1.4	Cas générale	50
3.1.5	Pendule inversé	51
3.1.6	Stabilité dans le plan de phase	58
3.2	Contrôle d'une équation différentielle partielle	59
3.2.1	Problème et présentation des étapes de la méthode	59
3.2.2	Description de la méthode HUM	60
3.2.3	Résultat	64
	Conclusion	67
	Références	68

Notations

Ω	Ouvert de \mathbb{R}^n .
$\overset{\circ}{\Omega}$	Intérieur de Ω .
Acc	Ensemble accessible.
$D(A)$	Domaine de définition de A .
$M_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices carrés d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} .
$\mathcal{SG}(M, w)$	Ensemble des \mathcal{C}_0 -semi-groupes telle que $\ S(t)\ \leq M \exp wt$.
$\rho(A)$	$\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe dans } \mathcal{F}(E)\}$: L'ensemble résolvant de A .
H	Hamiltonien.
J	Fonction de coût.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^k .
$\mathcal{L}(\mathcal{U}, E)$	Espace vectoriel des applications linéaires continues de \mathcal{U} dans E .
$\mathcal{F}(E)$	Algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans E .
t^*	Temps minimal.
$\sigma(A)$	Spectre de A .
w_0	$= \inf\{w \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } S(t) \leq M \exp wt\}$.
A_w	$= \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > w > w_0\}$.
$R(\lambda, A)$	Résolvant de A .
$\{A_w\}_{\lambda \in A_w}$	Approximation de Yosida de l'opérateur A .
θ	Dérivé matériel.
$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	Laplacien.
$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$	Gradient de la fonction f t.q., $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
$\frac{\partial y}{\partial v} = \overrightarrow{\nabla} y \cdot \overrightarrow{v}$	Dérivé normale de y .
$\ \cdot\ _E; \langle \cdot, \cdot \rangle$	Norme dans E ; Crochet de dualité.

Abréviation :

CNS : condition nécessaire et suffisante.

i.e. (c-à-d) : c'est à dire.

HUM : Hilbert Uniqueness Method.

inf : borne inférieure.

sup : borne supérieure.

lim : limite.

max : maximum.

cte : constante.

t.q : telle que.

Introduction

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné.

Un système dynamique est décrit par une équation qui modélise l'évolution d'un phénomène physique par rapport au temps, et qui est munie d'une donnée initiale.

Un système dynamique est dit continu s'il est écrit sous la forme :

$$\begin{cases} y(t) &= f(t, y(t)), t \in \mathbb{R}; \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Le phénomène physique $y(t)$ s'appelle l'état du système à l'instant t , tandis que la fonction $t \rightarrow y(t)$ s'appelle la trajectoire du système.

On suppose qu'à tout instant $t \geq t_0$, l'état $y(t)$ appartient à un espace vectoriel E . alors E s'appelle espace d'état.

Si E est de dimension finie, on dit que le système dynamique est de dimension finie, dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie, (dans ce cas le système s'appelle distribué).

Les systèmes de dimension finie sont décrits par des équations différentielles ordinaires (en abrégé : EDO), et modélisent des phénomènes physiques dits "localisés" tels le mouvement d'un solide ayant un nombre fini de degrés de liberté (c-à-d., la possibilité pour un système direction non contrainte), la croissance d'une population quand la densité géographique n'est pas considérée, etc. . .

L'application $f : (t, y) \rightarrow f(t, y)$ s'appelle la dynamique du système.

Si f ne dépend pas de la variable de temps, le système est dit autonome, dans ce cas, on peut toujours supposer que $t_0 = 0$, dans le cas contraire, le système est dit non autonome.

On suppose maintenant qu'on peut agir sur le système dynamique par une fonction u , alors, le système dynamique continu devient :

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t), u(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \quad (2)$$

La fonction u s'appelle le contrôle et l'espace vectoriel auquel appartient $u(t)$ noté \mathcal{U} s'appelle l'espace des contrôles.

Généralement la fonction de contrôle considérée $u(\cdot)$ est non continue (au mieux continue par morceaux), et peut être choisie sous certaines contraintes dans le cadre de réaliser certains objectifs :

- Amener le système d'un certain état à un autre état (**contrôlabilité**).

- Maintenir l'état d'un système dynamique très proche d'une position donnée (**stabilisation**).
- Minimiser une certaine fonction coût (**optimisation**).

0.1 Exemples

Exemple 0.1 (le système masse-ressort) Le système masse-ressort avec contrôle $u(\cdot)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} my''(t) + Ry(t) = u(t); t > 0, \\ y(t_0 = 0) = y_0, \\ y'(t_0 = 0) = y_1. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients constants.

Question : peut-on trouver au moins un contrôle $u(\cdot)$ tel que $y(T) = 0$? (contrôlabilité).

Exemple 0.2 (le système du pendule) Le système du pendule de masse m et de longueur l avec contrôle $u(\cdot)$ est donné par :

$$\begin{cases} ml^2y''(t) + mgl \sin y(t) = u(t), t > 0, \\ y(t_0 = 0) = y_0, \\ y'(t_0 = 0) = y_1. \end{cases} \quad (3)$$

y est l'angle du pendule formé avec la verticale.

y' est la vitesse angulaire.

Question : Comment stabiliser ce système non linéaire? (stabilisation).

Exemple 0.3 (le problème de la barque) Le mouvement d'une barque se déplaçant à vitesse constante sur une rivière où il y a un courant $c(y)$ est modélisé par :

$$\begin{cases} x'(t) = v \cos(u(t) + c(y(t))) & x(0) = 0, \\ y'(t) = v \sin(u(t)) & y(0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

où v est la vitesse et $u(t)$, l'angle de la barque par rapport à l'axe (o, x) , est le contrôle.

Question : Comment atteindre un point donné sur l'autre berge? (optimisation).

De manière plus générale, nous considérons des systèmes de contrôle sous la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), \forall t \in I \text{ un intervalle de } \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $y : t \in I \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 1$, décrit l'état du système.

$u : t \in I \rightarrow \mathbb{R}^m, m \geq 1$, est le contrôle.

et $f : t \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, décrit la dynamique du système.

0.2 Plan de travail

Ce travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques résultats préliminaires et des notions générales sur les espaces comme L^2 , H_0^1 et H^{-1} . Ensuite, nous avons abordé le pendule simple avec quelques propriétés associées et données aussi quelques notions sur le pendule inversé utilisé dans la suite de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les principes généraux qui concernant l'analyse des systèmes distribués plus précisément nous introduisons les opérateurs différentiels, l'étude de la théorie des semi-groupe et la contrôlabilité des systèmes localisés et distribués. Enfin, nous avons abordé la théorie du contrôle optimal permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement sous des contraintes pouvant porter sur la commande ou sur l'état du système.

Le dernier chapitre présente deux modèles des systèmes localisés et distribués. Dans les systèmes localisés, nous prenons comme exemple l'équation du pendule inversé.

En physique, un pendule inversé est un pendule simple. il présente une position d'équilibre instable s'il est maintenu verticale à 180, mais cette position est maintenue par un système de contrôle. C'est un problème de physique non linéaire.

Enfin, dans les systèmes distribués, nous avons pris comme exemple l'équation des ondes contrôlé, et pour déterminer ce contrôle (optimal), nous nous sommes appuyés sur la technique HUM (Hilbert Uniqueness Method) de J.L. Lions, dont les étapes sont détaillées dans le mémoire.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et notions de base. Ensuite on citera certains résultats nécessaires qui seront utilisés dans notre travail. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter les ouvrages suivants : [4, 2, 12].

1.1 Espaces

1.1.1 Espace $L^2(\Omega)$

Définition 1.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs réelles qui sont de carré intégrable au sens de l'intégrale de Lebesgue. On définit alors l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

et la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

comme le quotient de $L^2(\Omega)$ par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout. Ce quotient identifie donc les fonctions qui sont dans la même classe pour la relation d'équivalence " $f \sim g$ " ssi " f et g sont égales presque partout".

1.1.2 Espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , l'espace $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i : \overline{1 \cdots n} \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de u .

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx.$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

i.e., l'espace qui contient les fonctions et leurs dérivées appartient à $L^2(\Omega)$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.1.3 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n assez régulier. Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

En plus de la norme induite de celle de $H^1(\Omega)$, on munit $H_0^1(\Omega)$ par la norme équivalente donnée par

$$\|u\|_0 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H^{-1}(\Omega)$

$$H^{-1}(\Omega) = \text{dual topologique de } H_0^1(\Omega).$$

1.2 Pendule

1.2.1 Pendule simple

Introduction

En physique, le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse et inextensible, et oscillant sous l'effet de la pesanteur. Il s'agit du modèle de pendule pesant le

plus simple. Il est parfois appelé pendule de gravité idéal et à cause de sa nature relativement simple, il se prête à des études théoriques poussées sur le plan mathématique. Ces études ont trouvés plusieurs applications en physique théorique, notamment dans les systèmes harmoniques simples.

Sous l'effet de son poids, lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), le point matériel de masse m se déplace sur un arc de cercle (période de l'oscillation) : l'effet du poids tendant constamment à ramener le pendule vers sa position d'équilibre stable, celui-ci se met à osciller.

Énergie totale et équation du pendule

Dans cette mise en équation, le freinage du pendule dû à l'air ambiant est négligé.

On repère la position du pendule simple par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante, après avoir choisi une orientation positive. Cet angle s'appelle élongation angulaire. On note \vec{g} l'accélération due à la pesanteur.

Bilan des forces :

Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$

La tension \vec{T} de la tige, toujours perpendiculaire au mouvement circulaire de la masse G .

Dans ce modèle les autres forces sont oubliées, notamment les forces de frottement (dans la réalité, le pendule s'arrête d'osciller sous l'action des frottements).

Énergie mécanique du pendule :

Soit L la longueur du pendule, et soit $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ sa vitesse angulaire. La vitesse de la masse est alors $v = L\dot{\theta}$.

La somme de l'énergie cinétique du pendule et de son énergie potentielle de pesanteur, mesurée à partir du point le plus bas du pendule, vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta).$$

Cette énergie mécanique totale est constante au cours du mouvement. En effet, la tension de la tige est à tout instant perpendiculaire au mouvement circulaire de G , et ne produit aucun travail, et le travail du poids est pris en compte dans l'énergie potentielle. En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

On exclut la solution évidente, $\dot{\theta} = 0$, qui correspond au cas où le pendule est à l'arrêt. On divise alors par $mL^2\dot{\theta}$, ce qui donne l'équation suivante du mouvement :

$$\ddot{\theta} + w_0^2 \sin\theta = 0,$$

où l'on a posé $w_0^2 = \frac{g}{L}$.

L'équation dans le cas linéaire est $\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0$, avec $\sin \theta \simeq \theta$ au voisinage de zéro.

Période d'oscillation

Si l'énergie mécanique E du pendule au niveau E_0 où le pendule soit dans l'hauteur maximal c'est à dire quand $\theta = \theta_{\max}$ donc la vitesse angulaire ($\dot{\theta} = 0$) ce implique que $E_c = 0$ dans ce cas on obtient :

$$E = E_0 = mgL(1 - \cos \theta),$$

alors

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta) = mgL(1 - \cos \theta),$$

$$\frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} - mgL \cos \theta = -mgL \cos \theta_{\max},$$

qui se simplifie en :

$$\dot{\theta}^2 + 2\frac{g}{L}(\cos \theta_{\max} - \cos \theta) = 0,$$

pour $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{L}} \cdot \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}},$$

donc

$$\dot{\theta} = \sqrt{2w_0^2} \cdot \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}},$$

où

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}},$$

on calcul la période d'oscillation, on pose

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}},$$

$$T = \left| \int_0^{\theta_{\max}} f(\theta) d\theta \right| + \left| \int_{\theta_{\max}}^0 f(\theta) d\theta \right| + \left| \int_0^{-\theta_{\max}} f(\theta) d\theta \right| + \left| \int_{-\theta_{\max}}^0 f(\theta) d\theta \right|.$$

On concluons

$$T = 4 \int_0^{\theta_{\max}} f(\theta) d\theta = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}}.$$

$T = 4 * T_{osc}$ Telle que $T_{osc} = \int_0^{\theta_{\max}} f(\theta) d\theta$

1.2.2 Pendule inversé

En physique, un pendule inversé est un pendule simple. Il présente une position d'équilibre **instable** en position verticale, cette position est maintenue par un **système de contrôle**. C'est un problème de physique non linéaire.

Une application simple qui à la portée de tous est de faire tenir en équilibre un stylo sur son doigt. La seule différence étant que dans le cas du pendule inversé on ne bouge que dans le plan.

Dans la pratique l'étude du pendule inversé a de nombreux intérêts notamment en robotique.

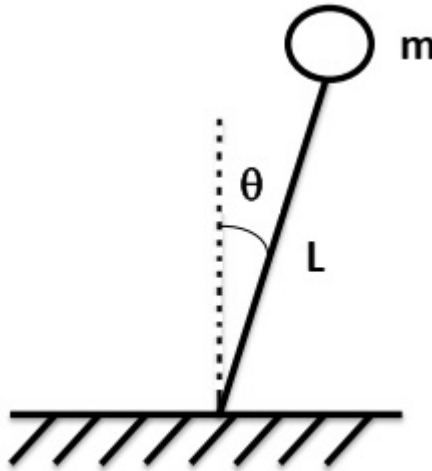


FIGURE 1.1 – Pendule inversé

La situation est exactement la même que celle décrite pour le pendule simple, en considérant une tige rigide mais de masse négligeable. On définit donc :

θ l'angle formé entre la tige et la verticale ;

m la masse du pendule ;

L la longueur de la tige ;

g l'accélération de la pesanteur ;

On note les dérivées temporelles par un point :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{ et } \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}.$$

On peut alors établir la période des oscillations :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}.$$

L'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}.$$

L'énergie potentielle de gravité :

$$E_p = mgL(1 + \cos \theta).$$

Si le pendule est laissé libre, on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique, $E = E_c + E_p$.

Alors, on obtient :

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2 \sin \theta = 0.$$

Chapitre 2

Théorie du contrôle

2.1 Introduction aux semi-groupes

Nous avons considéré des problèmes de Cauchy de type :

Trouver y tels que

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \Lambda y, t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

y_0 donnée dans un espace fonctionnel convenable E .

- Si $\Lambda = a$, avec a est une constante donnée, alors la solution de problème (2.1) est donnée par :

$$y(t) = \exp(at)y_0,$$

telle que $\exp(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$.

- Si $\Lambda = A$, avec A est une matrice d'ordre $n \times n$ (bien sur “opérateur borné”), alors la solution de problème (2.1) est donnée par :

$$y(t) = \exp(At)y_0,$$

telle que $\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.

Dans ce cas noté $\exp(At) = S_1(t)$ avec $y(t) = S_1(t)y_0$.

- Le dernier cas, si $\Lambda = A$, avec A est un opérateur “linéaire non borné” par exemple dans espace de Banach ($E = L^2(\mathbb{R}^n)$), on constaté que la solution de problème (2.1) est donnée par la formule

$$y(t) = S_2(t)y_0; t \in \mathbb{R},$$

où $S_2(t)$ est un opérateur **borné** dans E , vérifiant certaines des propriétés de l'exponentielle "exp(At)" ci-dessous, et plus précisément :

$$\begin{cases} S_2(0) = I, \\ S_2(t+s) = S_2(t) \cdot S_2(s), \\ \lim_{t \rightarrow 0} S_2(t)y_0 = y_0, \forall y_0 \in E. \end{cases}$$

Remarque 2.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons constaté que l'ensemble $\{S_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ à les propriétés d'une groupe.

Pour plus de détails et des preuves pour les théorèmes, les lemmes, les propositions revenir au livre de A. Pazy [13].

2.1.1 Semi-groupe fortement continues à l'origine

Définition 2.1 Soit E un espace de Banach, une famille d'opérateurs linéaires bornés $S(t) : E \rightarrow E$ dépendantes du paramètre $t \geq 0$ forment un semi-groupe si :

$$\begin{cases} S_2(0) = I, \\ S(t+s) = S(t) \cdot S(s), \forall t, s \geq 0. \end{cases}$$

Définition 2.2 Semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est dite fortement continues à l'origine (ou bien semi-groupe de classe C_0) si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0; \forall x \in E.$$

Définition 2.3 Soit un $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semi-groupe sur E , le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire non borné A défini par :

$$A : D(A) \subset E \rightarrow E$$

$$D(A) = \left\{ x \in E \text{ telle que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} x \text{ existe} \right\},$$

où,

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A),$$

$D(A)$ est le domaine de définition de A .

Proposition 2.1 Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in SG(M, w)$ et A son générateur infinitésimal, alors :

- 1) $\forall x \in D(A), S(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$.
- 2) $D(A)$ est un sous espace vectorielle dense dans E , $(\overline{D(A)}) = E$.
- 3) L'opérateur A est fermé.

Théorème 2.1 (L'unicité de l'engendrement) Soient deux C_0 -semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A , alors :

$$T(t) = S(t); (\forall)t \geq 0.$$

Lemme 2.1 (Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe) Soit $S(t)$ un semi-groupe fortement continues alors il existe $M \geq 1$ et $w \in \mathbb{R}$ telle que

$$\|S(t)\| \leq M \exp wt, \forall t \geq 0.$$

Définition 2.4 (Type d'un semi-groupe) On appelle type d'un semi-groupe $S(t)$ le nombre w_0 définie par :

$w_0 = \inf \{w \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } S(t) \leq M \exp wt \text{ pour } t \geq 0\}$

$$w_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t},$$

on a semi-groupe important.

Si $\forall t \geq 0$ on a $\|S(t)\| \leq M$ le semi-groupe $S(t)$ est dite borné.

Si $\forall t \geq 0$ on a $\|S(t)\| \leq 1$ le semi-groupe $S(t)$ est dite contraction.

2.1.2 Théorème de Hille Yosida

Transformation de LaPlace d'un C_0 -semi-groupe

Dans la suite, pour $w \geq 0$ nous désignerons par A_w l'ensemble :

$$A_w = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda > w > w_0\}.$$

Soit $\lambda \in A_w$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, w)$ nous avons

$$\|S(t)\| \leq M \exp wt, t \geq 0. M \geq 1, w \geq 0,$$

et on voit que

$$\|\exp(-\lambda t)S(t)x\| \leq \exp(-\lambda t) \|S(t)\| \|x\| \leq M \exp -(\lambda - w)t \|x\|; \forall x \in E.$$

définissons l'application $R_\lambda : E \rightarrow E$ par

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)x dt.$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus on a :

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)x dt \leq \frac{M}{\lambda - w} \|x\|; \forall x \in E.$$

D'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 2.5 L'opérateur $R : A_w \rightarrow \mathcal{F}(E)$

$$R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) dt,$$

s'appelle la transformation de Laplace du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Théorème 2.2 Si λ est telle que $\lambda > w_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) dt$ existe, et

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) x dt = R(\lambda, A)x.$$

Étude de la croissance de la Résolvante

On a que $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda > w > w_0$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) x dt$ est convergente. Alors, on peut définir l'opérateur borné $R(\lambda) : E \rightarrow E$; $R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \exp S(t) x dt$.

Et que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}; n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque 2.2 1) $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \leq w_0\}$.

2) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > w_0\}$.

Approximation généralisée de Yosida

Lemme 2.2 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

1) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.

2) Il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $A_w \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_w$; on a

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}; n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors pour tout $\lambda \in A_w$, nous avons

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x; \forall x \in E.$$

De plus $\lambda A R(\lambda, A) \in \mathcal{F}(X)$

Et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda A R(\lambda, A)x = Ax; \forall x \in D(A)$.

Remarque 2.3 On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda A R(\lambda, A)$ sont des approximation pour l'opérateur non borné A . C'est le motif pour lequel on introduit le théorème suivante.

Théorème 2.3 La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A_w} \subset \mathcal{F}(E)$; où :

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

S'appelle l'approximation généralisé de Hille Yosida de l'opérateur A .

Théorème de Hille Yosida

Le Théorème de Hille Yosida est un résultat très important des semi-groupe de classe \mathcal{C}_0 . Il s'agit de célèbre théorème de Hille Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateur qui soit générateur de \mathcal{C}_0 -semi- groupes.

Théorème 2.4 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{SG}(M, w)$ si et seulement si :*

1) *A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.*

2) *$\exists w \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $A_w \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_w$, on a :*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

2.1.3 Exemples

Exemple 2.1 *Considérons l'équation d'advection qui décrit les phénomènes du transport :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.2)$$

on cherche les solutions dans l'espace de Banach $E = L^2(\mathbb{R})$.

1- *On écrivons le problème (2.2) sous forme abstraite, en posant $y(t) = v(\cdot, t)$:*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), t \geq 0, \\ y(0) = f, \end{cases}$$

où

$$A = -\frac{d}{dx},$$

avec le domaine de définition

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{y \in L^2(\mathbb{R}), y' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

On remarque que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(\cdot+t) - y}{t} = y'$ dans D' . Ainsi $y \in L^2$ appartient au domaine du générateur infinitésimal de S_t si la dérivée au sens des distributions y' est également dans L^2 , autrement dit $D(A) = H^1(\mathbb{R})$ et $Ay = y'$.

2- *On considère l'application :*

$$(S(t)f)(x) = f(x - t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Montrons que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un \mathcal{C}_0 -semi-groupe :

✓ $(S(0)f)(x) = f(x - 0) = f(x) = (If)(x)$, donc

$$S_0 = S(0) = I.$$

✓ $(S(t+s))(x) = f(x + (-t-s)) = f(x-t) \cdot f(x-s)$, donc

$$(S_{s+t}f)(x) = (S_s f)(x) \cdot (S_t f)(x).$$

“car le composé de deux translation est une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des deux translation”.

✓ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S_t f)(\cdot) - (If)(\cdot)\|_{L^2} = 0$,

car si $y \in D$, on a : $\|(S_t f)(\cdot) - (If)(\cdot)\|_{L^2} \leq t \|y'\|$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0, et si $y \in L^2$, on choisit $y_n \in D \rightarrow y \in L^2$.

Exemple 2.2 Soit $\mathcal{T}(t) = \exp(-wt)S(t)$, $\forall t \geq 0$. Et E un espace de Banach et $\{s(t)_{t \geq 0}\}$ un C_0 -semi-groupe sur E et A son générateur infinitésimal par lequel il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telle que

$$\|S(t)\| \leq M \exp(-wt), \forall t \geq 0.$$

1- Montrons que $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe :

✓ $\mathcal{T}(0) = \exp(-w \cdot 0)S(0) = I$,

✓ $\mathcal{T}(t+s) = \exp(-w(t+s))S(t+s) = \exp(-wt) \cdot \exp(-ws)S(t) \cdot S(s)$
 $= \exp(-wt)S(t) \cdot \exp(-ws)S(s)$
 $= \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{T}(s).$

✓ $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{T}(t)x = x$ puisque

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(t)x - x\| &= \|\exp(-wt)(S(t)x - x) + (\exp(-wt) - 1)x\| \\ &\leq \underbrace{\|\exp(-wt)\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|(S(t)x - x)\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|\exp(-wt) - 1\|}_{\rightarrow 0} \|x\|, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{T}(t)x = x.$$

Evidemment $\mathcal{T}(t)$ est un opérateur **linéaire**, et en plus on a :

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq M, \forall t \geq 0,$$

donc $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ est un opérateur **uniformément borné**.

Alors $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ est un **d'opérateur linéaire bornée sur E** .

2- On détermine le générateur infinitésimal de $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ et son domaine de définition :

Soit A le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Si B est le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$.

Pour tout $x \in D(A)$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(h)x - x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(-wt)S(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\exp(-wt) - 1)S(h)x}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= -wx + Ax = (A - wI)x, \end{aligned}$$

d'où il résulte que $x \in D(B)$ et $Bx = (A - wI)x$.

Soit $x \in D(B)$. Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp \mathcal{T}(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\exp(wh) - 1)\mathcal{T}(h)x}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(h)x - x}{h} \\ &= wx + Bx = (B + wI)x, \end{aligned}$$

d'où il vient que $x \in D(A)$ et $Ax = (B + wI)x$,

par conséquent $D(B) = D(A)$ et $B = A - wI$.

En plus, pour tout $x \in E$ et tout $t > 0$:

$$B \int_0^t \mathcal{T}(h)x ds = \mathcal{T}(h)x - x,$$

(où B est le générateur infinitésimal $\mathcal{T}(t)$).

En remplaçant $\mathcal{T}(t) = \exp(-wt)S(t)$ et $B = A - w$ par leurs valeurs on obtient le résultat suivant :

$$(A - wI) \int_0^t \exp(-ws)S(s)x ds = \exp(-wt)S(t)x - x.$$

2.1.4 Application à la résolution de l'équation d'évolution

Problème de Cauchy homogène

Soit E un espace de Banach et $f : [0, T] \rightarrow E$, continue et bornée.

Soit le problème différentielle

$$\begin{cases} y' - Ay = 0, \\ y_0 = 0, y_0 \in D(A). \end{cases} \quad (2.3)$$

$(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $\forall y_0 \in D(A)$, la fonction

$$y(t) = S(t)y_0,$$

est l'unique solution de problème (2.3), pour prouver l'existence on a :

$\{S(t)_{t \geq 0}\}$ est différentiable en t :

$$\frac{d}{dt}S(t)y_0 = AS(t)y_0 = S(t)Ay_0, \forall t \geq 0 \text{ et } y_0 \in D(A),$$

en effet $y' = \frac{dy}{dt}(S(t)y_0) = AS(t)y_0 = Ay$ et $y(0) = S(0)y_0 = Iy_0 = y_0$.

Et pour prouver l'unicité on suppose que le problème (2.3) admet une autre solution notée $v(t)$.

Posons $F(s) = S(t-s)v(s)$; comme $v(s) \in D(A)$.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(s) &= -AS(t-s)v(s) + S(t-s)v'(s) \\ &= -AS(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s) \\ \frac{d}{dt}F(s) &= 0; 0 \leq s \leq t. \end{aligned}$$

Donc $F(s)$ est une fonction constante pour $0 \leq s \leq t$.

En particulier $F(0) = F(t)$, alors

$F(0) = S(t-s)v(0) = S(t)y_0 = y(t)$, et $F(t) = S(0)v(t) = Iv(t) = v(t)$. Alors $y(t) = v(t)$, d'où l'unicité de la solution.

Problème de Cauchy non homogène

Soit le problème suivante

$$\begin{cases} y' - Ay = f, t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où t représente le temps, $t > 0$.

La solution de ce problème est donnée par la formule de “**Duhamel**” :

$$y(t) = y_0S(t) + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

En effet, soit maintenant $g(s) = S(t-s)y(s)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -A(t-s)y(s) + S(t-s)y'(s) \\ &= -AS(t-s)y(s) + S(t-s)(Ay(s) + f(s)) \\ \frac{dg}{ds} &= S(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Alors par l'intégration on obtient :

$$g(t) - g(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Donc cette dernière égalité donne

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Remarque 2.4 On remarque que la solution classique existe si et seulement si la donnée initiale est dans $D(A)$, ce qui est restrictif, mais le second membre de l'égalité précédente a un sens sous des hypothèses plus faibles. On va modifier le concept de "mild solution".

2.2 Contrôlabilité

2.2.1 Contrôlabilité en dimension finie

L'objectif de cette section est l'étude de la contrôlabilité d'un système linéaire de dimension finie, i.e. : des systèmes définis sur un espace d'état de dimension finie (\mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) est donné par des équations linéaires.

La contrôlabilité est la propriété de pouvoir trouver au moins un contrôle dit entrée telle que la solution du système contrôlé peut atteindre n'importe quel état final en temps fini prédéfini :

$$\forall y_0, y_d \in E, \exists t \in [0, T], \exists u \in L^2(0, T, \mathcal{U}) : y(t, y_0, u) = y_d.$$

Cette propriété peut être directement vérifiée par des outils algébriques ou bien démontrée.

Pour plus de détails et des preuves pour les théorèmes, les lemmes, les propositions revenir au livre de J.L. Lions [8] et les ouvrages suivants : [17, 18, 9].

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Considérons le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \forall t \in I, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

et on suppose que : $A(t) \in M_n(\mathbb{R}), B(t) \in M_{n,m}(\mathbb{R}), y_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, sont des matrices linéaires et bornées $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, y(\cdot) \in E = \mathbb{R}^n$ est l'état (E l'espace d'état), $u(\cdot) \in L^2(0, T, \mathcal{U})$ est le contrôle ($\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ espace de contrôle).

La solution unique de (2.5) est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} y(t) &= S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)B(s)u(s)ds \\ &= S(t)y_0 + \int_0^t S(t)S^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $S(t) = \exp(At)$ est la matrice résolvante du système linéaire homogène $y' = Ay$, i.e. :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = AS(t), \\ S(0) = I. \end{cases}$$

Cette application dépend de u . Donc si on change la fonction u , on obtient une autre trajectoire $t \rightarrow y(t)$ dans \mathbb{R}^n , voir le Fig. 2.1.

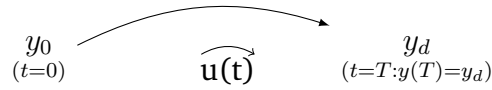


FIGURE 2.1 – Contrôlabilité

Ensemble accessible (ensemble atteignable)

Considérons le système de contrôle linéaire (2.5).

Définition 2.6 On appelle l'ensemble accessible et on note $Acc(y_0, T)$ l'ensemble des points atteignable à partir de y_0 en un temps $T > 0$ est :

$$Acc(y_0, T) = \{y_d \in \mathbb{R}^n; \exists u \in L^2([0, T], \Omega) : y(t, y_0, u) = y_d\},$$

autrement dit $Acc(y_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.5) au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u , pour la cohérence on pose $Acc(y_0, 0) = \{y_0\}$.

Remarque 2.5 1) Le système (2.5) est contrôlable à un instant T si et seulement si, tous les points de \mathbb{R}^n sont accessibles, i.e., $Acc(y_0, T) = \mathbb{R}^n$.

2) Si $y(0) = y_0 = 0$, d'après (2.6) $y(t) = \int_0^t S(t-s)B(s)u(s)ds$.

Définition 2.7 Le système contrôlé $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t)$ est dit contrôlable en temps T si pour tous $y_0, y_d \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie y_0 et y_d en temps T , i.e.

$$\forall y_0, y_d \in \mathbb{R}^n, \exists u : [0, T] \rightarrow \Omega : y(t, y_0, u) = y_d,$$



FIGURE 2.2 – Trajectoire de contrôlabilité

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Cas sans contrainte sur le contrôle : condition de Kalman Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 2.5 On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle).

Le système $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps t (quelconque) si et seulement si

$$\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n,$$

la matrice

$$K = [B, AB, \dots, A^{n-1}B],$$

est appelée la matrice de contrôlabilité de Kalman, $\text{rang } K = n$ appelle condition de Kalman.

Remarque 2.6 La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de y_0 , autrement dit si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis y_0 alors il est contrôlable en tout temps depuis tout points.

Contrôlabilité régulière Soit $B(b_1; b_2; \dots; b_m)$ le système $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$ est régulièrement contrôlables si et seulement si

$$\begin{cases} \text{rang}[b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1] = n, \\ \vdots \\ \text{rang}[b_m, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_m] = n. \end{cases}$$

Exemple 2.3 Considérons le système d'écrit par :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

on a : $\dim A = n = 2$, le système (2.7) est contrôlable car $\text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -10 \end{bmatrix} = 2$

puisque $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Le système (2.7) est régulièrement contrôlable car :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} &= 2 \text{ psq } \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = 2 \neq 0, \\ \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} &= 2 \text{ psq } \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Cas avec contrainte sur le contrôle Dans le théorème précédent on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Cependant en adaptant le théorème on obtient aisément le résultat suivant : Sous la condition de Kalman précédente, si $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, alors l'ensemble accessible $Acc(y_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $\exp(tA)y_0$.

Corollaire 2.1 Les propriétés de contrôlabilité sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A . Par exemple il est clair que si :

- 1) La condition de Kalman est satisfaite,
- 2) Ω sous espace de \mathbb{R}^m , $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$,
- 3) Toutes les valeurs propres de la matrice A sont des partie réelle strictement négative (i.e., la matrice A est stable), alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini.

Théorème 2.6 Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^m compact, $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$. Considérons le système (2.5) et $u \in \Omega$. Alors

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m); y(t, y_0, u) = 0,$$

si et seulement si la condition de Kalman est satisfaite et toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle négative ou nulle (n'est pas strictement négative).

Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes (instationnaires)

Les deux théorèmes donnent une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas instationnaire.

Théorème 2.7 Le système $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice :

$$C(T) = \int_0^T S^{-1}(t)B(t)^*(S^{-1}(t))^* dt,$$

dite matrice de contrôlabilité (**Gramien de Contrôlabilité**) est inversible.

Remarque 2.7 Dans ce cas, la condition de contrôlabilité est dépend de T (ce qui est faux dans le cas stationnaire) et on a : $G(T) = G^*(T)$, et $y^*G(T)y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, i.e. $G(T)$ est une matrice carré réelle symétrique positive.

Théorème 2.8 Considérons le système :

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t),$$

supposons que $A \in \mathcal{C}^{n-2}(0, T, M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}^{n-1}(0, T, M_{n,m}(\mathbb{R}))$ et définissant la suite $(M_k(t))_{0 \leq k \leq n-1}$ par :

$$\begin{cases} M_0(t) = B(t), \\ M_{K+1}(t) = A(t)M_k(t) - \frac{d}{dt}M_k(t) \quad K = \overline{0, n-2}, \end{cases}$$

considérons pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $\tilde{K}(t)$ de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ définit par :

$$\tilde{K}(t) = [M_0(t), M_1(t), \dots, M_{n-1}(t)],$$

alors : si $\text{rang} \tilde{K}(t) = n$ donc le système est contrôlable en temps T .

Remarque 2.8 Si A et B matrice constantes alors $\forall t \in [0, T]$, $\tilde{K}(t) = K(t)$ (matrice de Kalman).

Exemple 2.4 Soit le système $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t)$, où

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a : $\dim A = n = 2$. Est-ce-que $\text{rang}[M_0(t) \ M_1(t)] = 2$?.

$$\begin{aligned} M_0(t) &= B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \\ M_1(t) &= A(t)M_0(t) - \frac{d}{dt}M_0(t) \\ &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} = 2 \text{ psq } \det \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \text{ donc le système est contrôlable.}$$

2.2.2 Contrôlabilité en dimension infinie

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \in D(A), \end{cases} \quad (2.8)$$

où $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans un espace de Hilbert E . Soit \mathcal{U} un espace de Hilbert et B est un opérateur dans $\mathcal{L}(\mathcal{U}, E)$, B excite le système pour modifier l'état (chercher un état convenable). On suppose que $u \in L^2([0, T]; \mathcal{U})$.

La fonction $y \in E$ est dite l'état du système (2.8) et u est le **contrôle**.

Les espaces \mathcal{U} et E sont appelés respectivement espace des contrôles et espace des états.

Le principe de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états $y_0 \in E$ et $y_d \in E$ du système (2.8), existe-t-il une fonction u (appelée **contrôle**) permettant de passer (en un sens à définir précisément) de l'état y_0 à l'état y_d en un temps fixé $T > 0$? Le terme "passer" peut-être interprété de différentes manières, par exemple il peut signifier que la valeur à l'instant $t = T$ de la solution qui part de l'état y_0 à l'instant $t = 0$ soit exactement égale à y_d , auquel cas on parle de contrôlabilité exacte ; mais il peut aussi signifier que la valeur de cette solution à l'instant T soit suffisamment proche de y_d , sans nécessairement lui être égale, auquel cas on parle de contrôlabilité approchée. Les notions de contrôlabilité peuvent également différer selon la forme des cibles y_d que l'on cherche à atteindre, par exemple on peut ne chercher à atteindre que l'état nul $y_d = 0$, auquel cas on parle de contrôlabilité nulle. Ces différents concepts de contrôlabilités définissent plus précisément de la façon suivante :

Contrôlabilité exacte (même notion en dimension finie)

Définition 2.8 On dit que le système (2.8) est exactement contrôlable au temps $T > 0$, si pour tout $y_d \in E$ il existe $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ tel que $y_u(T) = y_d$.

$$\forall y_d \in E, \exists u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \text{ t.q. } y_u(T) = y_d.$$

Contrôlabilité nulle (Contrôlabilité à zéro)

Définition 2.9 Le système (2.8) est dit exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement s'il est possible de ramener tous les points dans l'espace E à l'origine au temps T via un **contrôle** u c-à-d.

$$\forall y_d \in E, \exists u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \text{ t.q. } y_u(T) = 0.$$

Remarque 2.9 La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité nulle, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

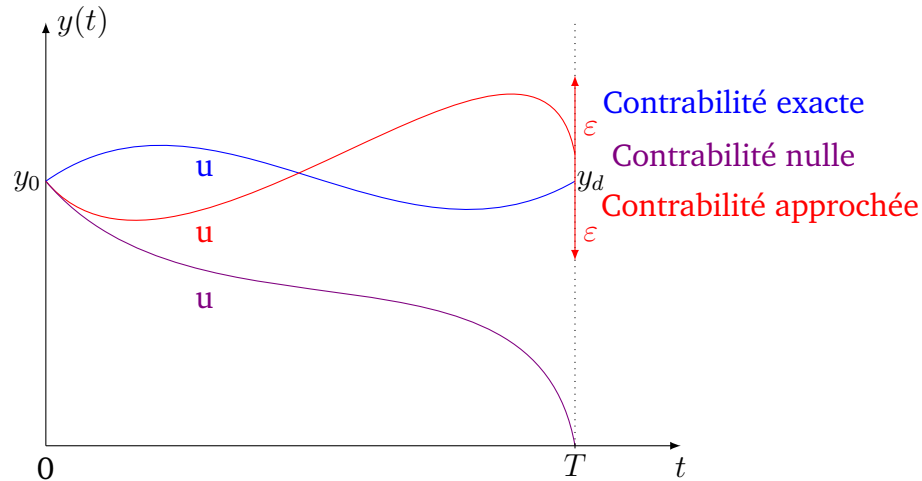


FIGURE 2.3 – Différents concepts de contrôlabilité

Contrôlabilité approchée (Contrôlabilité faible)

Définition 2.10 Nous dirons que le système (2.8) est faiblement (approximativement) contrôlable sur $[0, T]$ si pour tout $y_d \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe **un contrôle** $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ réalisant

$$\|y_u(T) - y_d\|_E < \varepsilon.$$

Opérateur de contrôlabilité L_T

On sait que la solution de (2.8) s'écrit

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

On peut donc, introduire l'opérateur

$$\begin{cases} L_T : L^2([0, T]; \mathcal{U}) \longrightarrow E \\ u \mapsto \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds. \end{cases}$$

On remarque que L_T peut aussi être comme $L_T u = y(T; 0, u)$, c'est-à-dire comme la solution, à l'instant T , du problème correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (**contrôle**) Bu .

Proposition 2.2 *i) Le système (2.8) est exactement contrôlable ssi L_T est surjective c.à.d.*

$$\text{Im}L_T = E.$$

ii) Le système (2.8) est faiblement contrôlable ssi

$$\overline{ImL_T} = E.$$

Preuve. i) Le système (2.8) est exactement contrôlable.

$$\Leftrightarrow \forall y_0, y_d \in E, \exists u \in (L^2[0, T]; \mathcal{U}) : y_d = y_u(T) = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-t)Bu(s)ds$$

$$\Leftrightarrow L_T \text{ est surjectif ou } ImL_T = E.$$

ii) Le système (2.8) est faiblement contrôlable

$$\Leftrightarrow \forall y_0, y_d \in E, \varepsilon > 0, \exists u \in (L^2[0, T]; \mathcal{U}) : \|y_u(T) - y_d\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0, y_d \in E, \varepsilon > 0, \exists u \in (L^2[0, T]; \mathcal{U}) : \|S(T)y_0 + L_T u - y_d\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall y_0, y_d \in E, \varepsilon > 0, \exists u \in (L^2[0, T]; \mathcal{U}) : \|L_T u - (S(T)y_0 - y_d)\| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \overline{ImL_T} = E. \blacksquare$$

2.3 Contrôle optimal des systèmes linéaires

En général, dans la modélisation des différents phénomènes réels, les systèmes non linéaires sont plus significatifs que les systèmes linéaires. Cependant, ils sont plus difficiles à manipuler. Pour cette raison, on passe dans plusieurs cas à la linéarisation autour d'un point d'équilibre. Par cette approche on obtient un système linéaire plus facile à étudier et des résultats locaux valables au voisinage de ce point d'équilibre, d'où l'importance des systèmes linéaires.

Dans cette section, on discute l'existence et l'unicité des contrôles optimaux pour les systèmes linéaires. On commence d'abord par le problème de temps optimalité. Puis on tourne vers le problème de contrôle optimal pour une fonction coût linéaire quadratique.

Enfin, on considère les coûts intégrales convexes quelconques. Les résultats de cette partie sont basés sur le principe du maximum de Pontryagin (PMP). Ici, la condition initiale et le temps final sont fixés et on n'impose aucune contrainte sur la trajectoire de la solution.

Pour plus d'informations, vous pouvez voir les références [17, 18, 9, 8, 19, 11].

2.3.1 Contrôle temps-minimal

Dans cette section on discute la notion du temps-minimal (dit aussi temps optimal) pour les systèmes linéaires. On commence par définir le **temps minimal** et le **contrôle temps-minimal** (dit **optimal**) et donner les conditions fondamentales pour qu'ils existent.

Puis on donne une caractérisation des contrôles optimaux. Précisément, on montre qu'un contrôle optimal est extrémal et par suite il vérifie une condition suffisante pour assurer l'unicité du contrôle minimal.

Existence d'un contrôle temps-minimal

Soit le système linéaire autonome :

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + Bu(t), \forall t \geq t_0, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

et soient les conditions suivantes :

(C₁) Les matrices $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont constantes et à coefficients réels finis.

(C₂) Le contrôle $u : [t_0, +\infty) \rightarrow \Omega$ est mesurable et localement borné avec Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^m **non vide, compact et contient zéro dans son intérieur**.

Remarque 2.10 Dans le cas des contraintes sur le contrôle u ($u(t)$ appartient à un sous ensemble de Ω). Donc, dans la suite, notre but est d'**atteindre l'origine** en temps minimal (le plus petit possible).

Il faut d'abord s'assurer que l'origine est atteignable depuis toute condition initiale, c'est à dire que pour toute condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps $T > t_0$ et un contrôle $u(t) \in \Omega$ pour $t \in [t_0, T]$ tel que $y(T, y_0, u) = 0$.

Supposons alors que le système (2.9) est contrôlable à zéro. Remarquons, que le temps final T n'est pas forcément unique !

On cherche alors le plus petit temps supérieur à t_0 , noté t^* , tel qu'il existe un contrôle $u(t) \in \Omega$ pour $t \in [t_0, t^*]$ tel que $y(t^*, y_0, u) = 0$ et

$$\begin{aligned} t^* &= \inf\{T > t_0 \mid y(T, y_0, u) = 0; u(t) \in \Omega, t \in [t_0, T]\} \\ &= \inf\{T > t_0 \mid 0 \in \text{Acc}(T)\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $\text{Acc}(T)$ est l'ensemble accessible depuis y_0 à l'instant T . Ce temps dit minimal ou optimal existe et est unique.

Théorème 2.9 Soit le système linéaire autonome (2.9) et supposons que les conditions (C₁) et (C₂) sont vérifiées. Si le système (2.9) est contrôlable à zéro en temps fini(s) $T > t_0$, alors il existe un temps-minimal $t^* \in [t_0, T]$ et au moins un contrôle optimal $u^*(t) \in \Omega$ pour $t \in [t_0, t^*]$ tel que $y(t^*, y_0, u^*) = 0$.

Puisqu'en dimension finie, la **contrôlabilité à zéro est équivalente à la contrôlabilité exacte**, alors le théorème précédent peut être modifié comme suit :

Théorème 2.10 Soit le système linéaire autonome (2.9) et supposons que les conditions (C₁) et (C₂) sont vérifiées. Si le système (2.9) est contrôlable vers un point $y_d \in \mathbb{R}^n$ en temps-minimal $t^* \in [t_0, T]$ et au moins un contrôle optimal $u^*(t) \in \Omega$ pour $t \in [t_0, t^*]$ tel que $y(t^*, y_0, u^*) = y_d$.

Dans les deux théorèmes précédents, le but est d'atteindre un point cible.

Dans le cas général, le but devient d'atteindre un ensemble cible, noté $G(t)$, tel que :

(C_3) pour tout $t > t_0$, $G(t)$ est compact, non vide et varie continûment par rapport à t .

Dans ce cas, on a le résultat suivant :

Théorème 2.11 *Soit le système linéaire autonome (2.9) et supposons que les conditions $(C_1), (C_2)$ et (C_3) sont vérifiées. S'il existe un contrôle $u(t) \in \Omega$ pour $t \in [t_0, T]$ ramenant y_0 vers $G(T)$ pour certain $T > t_0$, alors il existe un temps-minimal $t^* \in [t_0, T]$ et au moins un contrôle optimal $u^*(t) \in \Omega$ pour $t \in [t_0, t^*]$ tel que $y(t^*, y_0, u^*) \in G(t^*)$.*

On peut même aller plus loin et constaté que les théorème précédents restent vrais dans le cas des systèmes linéaires non autonomes. Pour ceci il suffit de remplacer la condition (C_1) par :

(C'_1) Les matrices $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont intégrables sur tout intervalle fini.

Finalement on note que pour le même temps-minimal t^* , il peut existe plusieurs contrôles optimaux $u^* \in \Omega, t \in [t_0, t^*]$, ramenant la trajectoire $y(\cdot, y_0, u^*)$ vers la cible en même temps t^* . Ceci prouver que le contrôle temps-minimal n'est pas forcément unique !.

Contrôle extrémal et principe du maximum

Soit le système (2.9). D'après la définition du temps-optimal, t^* est le premier moment pour lequel la cible y_d (qui peut être nulle, non nulle, un point ou un ensemble) appartient à l'ensemble accessible $Acc(t^*)$. comme y_d est fixé et $Acc(t)$ varie continûment par rapport au temps, on conclut que **l'état final y_d se trouve sur la frontière de $Acc(t^*)$ et pas dans son intérieur.**

Ce résultat peut être démontré en utilisant la proposition suivante.

Proposition 2.3 *Soit le système linéaire (2.9) et soit y_d un état final fixé. Supposons que le système (2.9) est contrôlable vers y_d et que t^* est le premier temps pour lequel la solution du (2.9) atteint y_d . Alors y_d peut être séparé de l'ensemble accessible $Acc(t^*)$ par un hyperplan non nul de \mathbb{R}^n .*

Clairement si y_d se trouve à l'intérieur de $Acc(t^*)$ alors la proposition précédente devient fausse. Cette information sur la position du y_d par rapport à $Acc(t^*)$ conduit à la notion des **contrôles extrémaux**.

Définition 2.11 *On appelle contrôle extrémal tout contrôle $u(t) \in \Omega$ défini sur $[t_0, T]$ tel que la solution du système (2.9) associé à u atteint la frontière de $Acc(T)$ à l'instant T .*

Puisque pour le temps minimal t^* et ses contrôles optimaux correspondants, notés u^* , on a :

$$y(t^*, y_0, u^*) = y_d \in \partial Acc(t^*),$$

où $\partial Acc(t^*)$ désigne la frontière de $Acc(t^*)$, **alors tous les contrôles optimaux sont extrémaux**. La réciproque n'est pas toujours vrai !.

Théorème 2.12 Soit le système linéaire (2.9). Supposons que $t^* > t_0$ est le premier temps pour lequel la solution du système (2.9) atteint la cible y_d . Soit $u^*(t) \in \Omega$ défini sur $[t_0, t^*]$ un contrôle optimal, alors u^* est extrémal.

Le résultat suivante donne une caractérisation des contrôles extrémaux appelée principe du maximum :

Théorème 2.13 (Principe du maximum) Soit le système linéaire (2.9). Supposons que les conditions (C_1) et (C_2) sont vérifiées. Alors $u(t) \in \Omega$ défini pour $t \in [t_0, T]$ est extrémal si et seulement si, pour presque tout $s \in [t_0, T]$:

$$\langle p(s), Bu(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \max_{v \in \Omega} \langle p(s), Bv \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.11)$$

où $p(\cdot)$ est une solution non nulle du système adjoint de (2.9) donné par

$$\begin{cases} p'(t) &= -p(t)A^*, \forall t \geq t_0, \\ p(T) &= p_T, \end{cases}$$

où p_T est vecteur unitaire normal à l'hyperplan séparant (au sens large) $y(T, y_0, u)$ de $Acc(T)$, extérieur à $Acc(T)$ dans sa frontière $\partial Acc(T)$.

Le vecteur ligne $p(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint et la condition finale $p(T) = p_T$ est dite condition de transversalité.

Finalement, on note que tous les résultats précédents sont vrais dans le cas des systèmes linéaires autonomes et non autonomes. Ils sont aussi vrais si la cible $G(t)$ n'est pas réduit en un seul point.

Unicité du contrôle temps-minimal

D'après les sections précédentes, un contrôle optimal n'est pas unique. De plus, si un contrôle $u^*(t) \in \Omega$ est optimal alors il vérifie le principe du maximum, mais la réciproque n'est pas vraie. Dans cette section on donne une condition supplémentaire pour que le principe du maximum soit suffisant aussi bien que nécessaire pour la temps-optimalité et aussi pour que le contrôle optimal soit unique.

Définition 2.12 Le système linéaire (2.9) est dit **normal** si tout deux contrôles extrémaux $u_1(t) \in \Omega$ et $u_2(t) \in \Omega$ définis sur $[t_0, T]$ tels que

$$y(T, y_0, u_1) = y(T, y_0, u_2) = y_1 \in \partial Acc(T),$$

coïncident presque partout, c'est à dire $u_1(t) = u_2(t)$ pour presque tout $t \in [t_0, T]$.

Proposition 2.4 Soit le système linéaire autonome (2.9) et soit $u(t) \in \Omega$, $t \geq t_0$, avec Ω compact et convexe presque partout. Le système linéaire (2.9) est normal si et seulement si, pour tout v arête de Ω ,

$$\text{rang}[Bv, ABv, \dots, A^{n-1}Bv] = n.$$

une arête est un segment reliant deux sommets de Ω . Comme un cas particulier, on peut vérifier que si Ω est strictement convexe, alors Ω n'a pas d'arête. Par suite, le système (2.9) est normal.

Le théorème suivant montre que si le système linéaire est normal alors on a une équivalence entre les notions de contrôle optimal, contrôle extrémal et principe du maximum. De plus le contrôle optimal est unique.

Théorème 2.14 Soit le système linéaire (2.9) et supposons que les conditions (C_1) et (C_2) sont vérifiées et que le système (2.9) est normal pour tout $t > t_0$. Alors pour tout $y_d \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique contrôle extrémal $u^*(t)$ reliant y_0 à y_d en temps t^* . De plus $u^*(t)$ est l'unique contrôle optimal et t^* est le temps minimal.

Remarque 2.11 Notons ici que la condition de normalité est suffisante pour garantir l'unicité du contrôle optimal mais elle n'est pas nécessaire, c'est à dire le contrôle optimal peut être unique même si le système n'est pas normal.

Exemple 2.5 Soit $T = 2\pi$ et $\mathcal{U} = [-1, 1]$. On considère le système de contrôle linéaire d'un oscillateur harmonique suivant :

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = u(t), t \in [0, T], \\ (y(0), y'(0)) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.12)$$

où $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction de contrôle de ce système.

Supposons qu'on cherche un contrôle qui transfère le point $y_0 = (1, 0)^t$ au point final $y_d = (0, 0)^t$ au temps T . Avec la minimisation de la fonctionnelle (énergie) $J(u) = \int_0^T u^2(t) dt$.

1. On pose $Y = (y, y')^t$. Alors, le système (2.12) se met sous la forme $Y' = AY + Bu$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour étudier la contrôlabilité de ce système on utilise la condition de Kalman

$$C(A, B) = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

le rang de cette matrice est maximal, d'où la contrôlabilité.

3. On détermine la Grammienne de contrôlabilité, on a d'abord calculer e^{tA} , on obtient :

$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on trouve que :

$$\begin{aligned} G &= G(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{(2\pi-s)A^T} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 s & -\sin s \cos s \\ -\sin s \cos s & \cos^2 s \end{pmatrix} ds \\ &= \pi I_2. \end{aligned}$$

4. Le contrôle $\bar{u}(t)$ qui transfère le système de l'état initiale $y(0) = y_0$ à un autre état y_1 dans le temps fini T est donnée par :

$$\bar{u}(t) = B^t S^t(2\pi - t)y = B^t S^t(2\pi - t)y = B^t S^t(2\pi - t) \underbrace{y(2\pi, y_0, u)}_{=y_1}. \text{ Donc,}$$

$$\bar{u}(t) = B^t S^t(2\pi - t)y_1 = B^t S^t(2\pi - t)\{S(2\pi)y_0 + \int_0^{2\pi} S(2\pi - t)Bu(t)dt\}.$$

Et on a : $y_1 = S(2\pi)y_0 + Lu$ donc $y_1 - S(2\pi)y_0 = Lu$.

$$\text{Donc } G^{-1}\{y_1 - S(2\pi)y_0\} = G^{-1}Lu = (L^t)^{-1}L^{-1}Lu = (L^t)^{-1}u = y.$$

$$\text{Finalement } \bar{u}(t) = B^t S^t(2\pi - t)y = B^t S^t(2\pi - t)G^{-1}\{y_1 - S(2\pi)y_0\}.$$

$$G^{-1}\{y_1 - S(2\pi)y_0\} = \frac{-1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\bar{u}(t) = \frac{-1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) & -\sin(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) & \cos(2\pi - t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\pi} \sin t$$

est le contrôle désiré.

5. Supposons que $u \in L^\infty(]0, T[, \mathcal{U})$ et que T n'est plus fixé. Alors on souhaite rejoindre l'origine avec un contrôle $u(\cdot)$ en **temps-minimal** : on a les valeurs propres de matrice A : $\lambda_{1,2} = \pm i$ et on a $0 \in \overbrace{[-1, 1]}$, la partie réelle des valeurs propres de A est nulle et $[-1, 1]$ est compact et le couple (A, B) satisfait le critère de Kalman. Donc, on déduit tout point du système peut être conduit à l'origine en temps fini. Et en plus, on observe que l'intervalle $[-1, 1]$ est compact, donc on déduit qu'il existe une trajectoire **temps-optimal**.

Exemple 2.6 Soit le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} y'''(t) = -6y''(t) - 12y'(t) - 8y(t) + u(t), t \in [0, T], \\ (y(0), y'(0), y''(0)) = (y_0, y_1, y_2), \end{cases} \quad (2.13)$$

avec $T > 0$ fixé et $u \in L^2(0, T, \mathbb{R})$ un contrôle. 1. On a $t \in [0, T]$ et on a $Y(t) = (y(t), y'(t), y''(t))^t$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . On écrit le système précédent sous la forme

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + Bu(t), t \in [0, T], \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons ici que $Y(0) = Y_0 = (y_0, y_1, y_2)^t$.

2. Pour étudier la contrôlabilité de ce système on utilise la condition de Kalman

$$C(A, B) = [B, AB, A^2B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 24 \end{pmatrix},$$

le rang de cette matrice est maximal, d'où la contrôlabilité.

3. On détermine les valeurs propres de A telle que T n'est pas fixé et que $u \in L^\infty(0, T, [-1, 1])$, on a

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 \\ \det(A - \lambda I_3) &= (\lambda + 2)^3 = 0, \end{aligned}$$

d'où $\lambda = -2$ est la seule valeur propre de A qui est de multiplicité trois et est réelle négative. D'après tout ce qui précède, l'ensemble de contraintes $\Omega = [-1, 1]$ contient à zéro dans son intérieur, la condition de Kalman est vérifiée et la seule valeur propre de A est réelle négative. Donc le système (2.14) est **contrôlable à zéro en temps fini**.

4. L'intervalle $\Omega = [-1, 1]$ est compact, et d'après 3. On conséquent qu'il existe au moins un contrôle temps-minimal.

5. Si oui décrire le principe du maximum vérifié par ce contrôle optimal. On conclut :

Soit $t^* \in [0, T]$ le temps-minimal et soit $u^*(t) \in [-1, 1]$, $t \in [0, t^*]$, un contrôle optimal.

Soit $y^*(\cdot) = y(\cdot, y_0, u^*)$ la solution correspondante à u^* , alors on a

$$\begin{cases} y'^*(t) = Ay^*(t) + Bu^*(t), & t \in [0, T], \\ y^*(t) = y_0, \quad y^*(t^*) = (0, 0, 0)^t, \end{cases}$$

et son système adjointe est

$$\begin{cases} p'(t) = -A^*p(t), & t \in [0, T], \\ p(t) = p_T, \end{cases}$$

où $p_T \in \mathbb{R}^3$ est une condition de transversalité et

$$-A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout contrôle $v \in [-1, 1]$ et presque tout $s \in [0, t^*]$, on a :

$$\langle p(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \max \langle p(s), Bv \rangle_{\mathbb{R}^3},$$

telle que $p(s)$ est la solution de système adjointe.

Rappelons que $B = (0, 0, 1)^t$, alors $u^*(s) = y_{\{p_3(s) > 0\}} = \text{signe}(p_3(s))$ avec $p_3(s)$ est la troisième composante du vecteur $p(s)$.

2.3.2 Problèmes linéaires quadratiques standards

Dans cette section, le critère à minimiser n'est plus le temps final nécessaire pour atteindre un cible prédéfinie, mais plutôt un critère quelconque de forme quadratique.

Le choix de cette forme n'est pas aléatoire, il est issu de plusieurs phénomènes physiques où on cherche à minimiser le carré des distances ou des erreurs.

Dans ce qui suit, on va donner des conditions nécessaires pour l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal qui minimise le coût quadratique donné. Puis, on va présenter le principe du maximum et vérifier qu'il est bien suffisant aussi que nécessaire pour l'optimisation. On va aussi introduire le Hamiltonien et les contrôles en feedback construits à partir des équation de Riccati. On va donner un exemple pour voir l'application des résultats obtenus.

Existence et unicité du contrôle optimal

Soit le système différentiel autonome suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \forall t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

On suppose dans la suite que

(C₁) Les matrices $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont constantes et à coefficients réels finis.

(C₂) Le contrôle $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega$ est mesurable et localement borné avec Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^m qui est **non vide, fermé et convexe (ensemble admissible)**.

(C₃) Le temps final $t_0 < T < \infty$ est fixé mais l'état final $y(T) \in \mathbb{R}^n$ est libre (il n'est pas fixé à l'avance). Par suite, pour tout contrôle $u(t) \in \Omega$ et toute condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution du système (2.15) atteint un point final quelconque $y(T, y_0, u)$ à l'instant final fixé T .

On voit clairement que dans cette section on ne s'intéresse plus au problème de contrôlabilité. Sinon, si le point final $y(T, y_0, u) = y_d$ est fixé, on suppose de plus que le système (2.15) est contrôlable.

Soit $u(t) \in \Omega$ un contrôle et $y(t) = y(t, y_0, u)$ la solution correspondante à u .

On définit la fonctionnelle $J : L^2(0, T, \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$J(u) = \langle y(T), M_0 y(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_{t_0}^T (\langle y(s), M_1 y(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle u(s), M_2 u(s) \rangle_{\mathbb{R}^m}) ds,$$

puisque pour tout x et y dans \mathbb{R}^n , $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x^t y$, alors

$$J(u) = y^t(T) M_0 y(T) + \int_{t_0}^T (y^t(s) M_1 y(s) + u^t(s) M_2 u(s)) ds. \quad (2.16)$$

La fonctionnelle J est appelée fonction coût. En tenant compte à sa forme, J est de type quadratique. Pour que J soit bien définie on impose les conditions suivantes :

(C_4) Les matrices $M_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $M_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont symétriques et positives, c'est à dire, pour $i = 0, 1$, $M_i = M_i^t$ et toutes les valeurs propres de M_i sont positives ou nulles (ou semi définie positives).

(C_5) La matrice $M_2 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est symétrique définie positive, c'est à dire $M_2 = M_2^t$ et toutes les valeurs propres de M_2 sont strictement positives.

Proposition 2.5 *Sous les conditions (C_4) et (C_5), la fonction coût donnée par (2.16) est bien définie, continue, strictement convexe et coercive.*

Rappelons les définitions des propriétés précédents. On a :

Définition 2.13 - *J est dite continue si et seulement si pour tout deux contrôles u_1 et u_2 dans $L^2(0, T, \Omega)$ tels que $u_1 \longrightarrow u_2$ alors $J(u_1) \longrightarrow J(u_2)$.*

- *J est dite convexe si et seulement si pour tout deux contrôles u_1 et u_2 dans $L^2(0, T, \Omega)$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a*

$$J(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2) \leq \lambda J(u_1) + (1 - \lambda) J(u_2).$$

Si l'inégalité précédente est stricte alors J est dite strictement convexe.

- *J est dite coercive si et seulement si pour tout contrôle $u \in L^2(0, T, \Omega)$ tel que $\|u\|_{L^2(0, T, \Omega)} \longrightarrow +\infty$ alors $J(u) \longrightarrow +\infty$.*

Exemple 2.7 - *Si $M_0 = 0$, $M_1 = \frac{1}{2} I_n$ et $M_2 = \frac{c}{2} I_n$ avec $c > 0$ une constante donnée, alors*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \frac{c}{2} \int_{t_0}^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt,$$

cette forme modélise l'énergie consommée et bien-sûr on a intérêt à la minimiser.

- *Si $M_0 = I_n$, $M_1 = 0$ et $M_2 = \frac{c}{2} I_n$ avec $c > 0$ une constante donnée, alors*

$$J(u) = \|y(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \frac{c}{2} \int_{t_0}^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt,$$

cette forme contenant la valeur finale de $y(\cdot)$ est intéressant si $y(\cdot)$ modélise quelque chose qu'on considère comme mauvaise ou pas assez bonne.

Maintenant, en supposant que toutes les conditions $(C_1) - (C_5)$ sont satisfaites, on peut montrer l'existence d'un contrôle unique $u^* \in L^2(0, T, \Omega)$ qui avec sa solution correspondante $y^*(t) = y(t, y_0, u^*)$ minimise le coût J , c'est à dire :

$$\min_{u \in L^2(0, T, \Omega)} J(u) = J(u^*).$$

Ce contrôle est dite contrôle optimal (pour le coût J sous la contrainte (2.15)).

Théorème 2.15 Soit le système linéaire (2.15) et soit le coût quadratique (2.16). Supposons que toutes les conditions $(C_1) - (C_5)$ sont vérifiées. Alors il existe un unique contrôle optimal minimisant le coût J .

Notons que dans la condition (C_2) on a imposé des contraintes sur le contrôle u . Dans le cas contraire, il suffit de remplacer (C_2) par la condition de coercivité suivante :

(C'_2) Le contrôle u est dans $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ et il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout contrôle $u \in L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$:

$$\int_{t_0}^T u^t(s) M_2 u(s) ds \geq k \int_{t_0}^T u^t(s) u(s) ds.$$

Théorème 2.16 Soient le système linéaire (2.15) et le coût quadratique (2.16). Supposons que les conditions

$(C_1), (C'_2), (C_3) - (C_5)$ sont toutes vérifiées. Alors il existe un unique contrôle optimal minimisant le coût J .

Dans certains cas l'observation final $y^t(T) M_0 y(T)$ est donnée sous une forme plus générale par $\phi_0(y(T))$ où $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Précisément, on a :

$$J(u) = \phi_0(y(T)) + \int_{t_0}^T (y^t(s) M_1 y(s) + u^t(s) M_2 u(s)) ds. \quad (2.17)$$

Pour garantir l'existence d'un contrôle optimal, on suppose que ϕ_0 satisfait une des conditions suivantes :

(C_6) $\phi_0(\cdot)$ est continue sur \mathbb{R}^n et il existe une constante réelle c telle que $\phi_0(y) > c$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Ou bien

(C'_6) La fonction ϕ_0 est continue et est convexe sur \mathbb{R}^n .

Théorème 2.17 Soit le système linéaire (2.15) et soit le coût quadratique (2.17). Supposons que toutes les conditions $(C_1) - (C_5)$ sont vérifiées. Si de plus une des conditions (C_6) ou (C'_6) est satisfaite, alors il existe au moins un contrôle optimal minimisant le coût J .

Si de plus la fonction ϕ_0 est strictement convexe ou bien elle est convexe et de classe C^1 , alors ce contrôle optimal est unique.

Notons ici que tous les résultats précédents nécessitent que le temps final T soit fini.

On dit que le problème de minimisation est à horizon fini. Si horizon est infini, exactement si $T = +\infty$, il suffit de remplacer la condition (C_3) par :

(C'_3) La matrice M_0 (respectivement la fonction ϕ_0) est nulle et le système (2.15) est contrôlable en temps (fini) quelconque $t_1 > t_0$.

Théorème 2.18 Soit le système linéaire (2.15) et soit le coût quadratique (2.16) (ou bien (2.17)). Supposons que toutes les conditions $(C_1), (C_2)$ ou bien $(C'_2), (C'_3), (C_4)$ et (C_5) sont vérifiées. Alors il existe un unique contrôle optimal minimisant le coût :

$$J(u) = \int_{t_0}^{+\infty} (y^t(s)M_1y(s) + u^t(s)M_2u(s))ds.$$

Finalement on note que tous les résultats précédents restent valable dans le cas des systèmes linéaires non autonomes. Il suffit juste de remplacer (C_1) par : (C'_1) Les matrices $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont continues sur $[0, T]$.

Principe du maximum et Hamiltonien

Dans ce qui, le but est de généraliser le principe du maximum donné dans le cas de temps-minimal vers le cas des coûts quadratiques. Pour simplifier la discussion on suppose qu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle u , i.e., $\Omega = \mathbb{R}^m$, et il n'y a pas non plus de contrainte sur l'état final $y(T)$ qui se présente dans la fonction du coût J comme une pénalisation (On utilise la fonction J pour éliminer les contraintes). Donc la condition (C'_2) est imposée.

La première étape est de vérifier qu'un contrôle optimal pour un coût quadratique est extrémal pour l'espace atteignable. Pour ceci, on regroupe le système (2.15) et la dérivée par rapport au temps de la fonction coût dans un seul système dit **système augmenté**.

Clairement le système augmenté est défini dans \mathbb{R}^{n+1} contenant tout suite, l'ensemble accessible $\tilde{A}(t)$ devient un ensemble de \mathbb{R}^{n+1} contenant tout les point finaux $(J(u), y(T))$.

Cette approche amène à considérer tout contrôle optimal pour J comme un contrôle extrémal pour $\tilde{A}(t)$.

La deuxième étape est de montrer qu'un contrôle extrémal vérifie une condition de maximisation dite principe du maximum et vice versa. En gardant les mêmes notations que dans la section précédente, on note ici que le vecteur adjoint $p(\cdot) = (p_0, p(\cdot))$ doit être un vecteur de \mathbb{R}^n .

Dans ce cas on prend $p_0 = -\frac{1}{2}$ et on admet le résultat suivant : Principe du maximum de Pontryagin.

Théorème 2.19 (Principe du maximum de pontryagin) Soit le système linéaire (2.15) et soit le coût quadratique (2.16) (ou bien (2.15)). Un contrôle $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ est extrémal si et seulement si, pour presque tout $s \in [t_0, T]$,

$$-\frac{1}{2}u^t(s)M_2u(s) + \langle p(s), Bu(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \max_{v \in \Omega} \left\{ -\frac{1}{2}v^t M_2 v + \langle p(s), Bv \rangle_{\mathbb{R}^n} \right\},$$

où $p(s) \in \mathbb{R}^n$ est une solution non nulle de l'équation adjointe :

$$p'(t) = y^t(t)M_1 - p(t)A^*, \quad t \in [t_0, T],$$

avec $p(T) = -M_0y(T)$ vérifie une condition de transversalité. De plus, pour presque tout $t \in [t_0, T]$, le contrôle extrémal u est donné par :

$$u(t) = M_2^{-1}B^*p^t(t). \quad (2.18)$$

Dans la dernière étape on utilise le fait que le système augmenté défini par (2.15) et (2.16) ou bien par (2.15) et (2.17) avec la condition que ϕ_0 est convexe et de classe C^1 est normal dans \mathbb{R}^{n+1} . **Ce qui permet au principe du maximum d'être une condition nécessaire et suffisante d'optimalité et confirme l'unicité du contrôle optimal aussi.**

Théorème 2.20 Soit le système linéaire (2.15) et soit le coût quadratique (2.16) (ou bien (2.17) avec ϕ_0 convexe et de classe C^1). Alors sous les conditions $(C_1), (C'_2), (C_3) - (C_5)$, il existe un unique contrôle optimal pour le coût J . De plus $u^* \in L^2(t_0, T, \mathbb{R}^m)$ est optimal pour le coût J si et seulement si u^* est extrémal pour $\tilde{A}(t)$. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un vecteur $p(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que, pour presque tout $t \in [t_0, T]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} y^*(t) = Ay^*(t) + Bu^*(t), \quad y^*(t_0) = y_0, \\ p'(t) = y^{*t}(t)M_1 - p(t)A^*, \quad p(T) = p_T, \\ -\frac{1}{2}u^{*t}(s)M_2u^*(s) + \langle p(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \max_{v \in \mathbb{R}^m} \left\{ -\frac{1}{2}v^t M_2 v + \langle p(s), Bv \rangle_{\mathbb{R}^n} \right\}, \\ u^*(t) = M_2^{-1}B^*p^t(t), \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où $y^*(\cdot) = y(\cdot, y_0, u^*) \in \mathbb{R}^n$ est la solution du système (2.15) correspondante à u^* .

Ces relations peuvent être données autrement en utilisant la fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dite **Hamiltonienne**, définie pour tout $t \in [t_0, T]$ par le produit scalaire dans \mathbb{R}^{n+1} entre $p(t) = (p_0, p(t)) = (-\frac{1}{2}, p(t))$ est le système augmenté.

Précisément :

$$\begin{aligned} H(y(t), p(t), u(t)) &= \left\langle p_0, \frac{\partial J}{\partial t}(u) \right\rangle_{\mathbb{R}} + \langle p(t), Ay(t) + Bu(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\frac{1}{2}(y^t(t)M_1y(t) + (u^t(t)M_2u(t))) + p(t)(Ay(t) + Bu(t))^t. \end{aligned}$$

Alors le vecteur $u(t)$ est la solution du problème :

$$\frac{\partial}{\partial u} H(y(t), u(t), p(t)) = 0.$$

Ainsi, pour tout $0 \leq t \leq T$ fixé, la fonction $u \rightarrow H(y(t), u(t), p(t))$ atteint son maximum en $u = R^{-1}B^*p(t)$. Autrement dit, le contrôle optimal u réalise le maximum instantané de cette fonction.

En utilisant le Hamiltonien, le principe du maximum (2.19) devient équivalent à

$$\begin{cases} y'^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(y^*(t), p(t), u^*(t)) = Ay^*(t) + Bu^*(t), & y^*(t_0) = y_0, \text{ (équation d'état)} \\ p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(y^*(t), p(t), u^*(t)) = (y^*)^t(t)M_1 - p(t)A^*, & p(T) = p_T, \text{ (équation adjointe)} \\ \frac{\partial H}{\partial u}(y^*(t), p(t), u^*(t)) = 0, & \text{(condition d'optimalité)} \end{cases}$$

pour presque tout $t \in [t_0, T]$ avec $y^*(\cdot) = y(\cdot, y_0, u^*) \in \mathbb{R}^n$ la solution de système (2.15) correspondante à u^* .

Remarque 2.12 Dans le cas de contraintes sur le contrôle u , tous les résultats et les relations donnés ci-dessus restent valables sauf (2.18) et par suite sauf $\frac{\partial H}{\partial u}(y^*(t), p(t), u^*(t)) = 0$.

Contrôle optimal en boucles fermées (feedback)

Restons dans le cas sans contraintes sur u . Donc le système d'optimalité (2.19) avec $T < \infty$ et soit le coût (2.16). Alors sous les conditions $(C_1), (C'_2), (C_3) - (C_5)$, il existe un unique contrôle optimal $u^* \in L^2(t_0, T, \mathbb{R}^m)$ pour le coût J donné par :

$$u^*(t) = M_2^{-1}B^*R(t)y^*(t), \quad t \in [t_0, T],$$

avec $y^*(\cdot)$ la solution unique du système (2.15) correspondante à u^* , d'où

$$\begin{cases} y'^*(t) = (A + BM_2^{-1}B^*R(t))y^*(t), & t \in [t_0, T], \\ y^*(t_0) = y_0, \end{cases}$$

et $R : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la solution unique de l'équation matricielle non linéaire de type Riccati suivante :

$$\begin{cases} R'(t) = M_1 - A^*R(t) - R(t)A - R(t)BM_2^{-1}B^*R(t), t \in [t_0, T], \\ R(T) = -M_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

De plus le minimum du coût J est donné par :

$$\min_{u \in L^2(t_0, T, \mathbb{R}^m)} J(u) = J(u^*) = -y_0^t R(t_0) y_0.$$

Proposition 2.6 *La matrice $R(t_0)$ est symétrique négative. Si de plus M_0 ou bien M_1 est définie positive alors $R(t_0)$ est définie négative.*

Dans le cas d'horizon infini, on suppose que $\phi_0 = 0$ et on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.21 *Soit le système linéaire (2.15) avec $T = +\infty$ et soit le coût quadratique (2.17). Supposons que toutes les conditions (C_1) , (C'_2) , (C'_3) , (C_4) et (C_5) sont vérifiées.*

Supposons de plus que M_1 est définie positive. Alors il existe un unique contrôle optimal $u^ \in L^2(t_0, T, \mathbb{R}^m)$ pour le coût J donné par :*

$$u^*(t) = M_2^{-1} B^* R y^*(t), \quad t \in [t_0, +\infty],$$

avec $y^*(\cdot)$ la solution unique du système

$$\begin{cases} y'^*(t) = (A + BM_2^{-1}B^*R)y^*(t), t \in [t_0, +\infty], \\ y^*(t) = y_0, \end{cases} \quad (2.21)$$

et $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la matrice constante solution unique de l'équation :

$$M_1 - A^*R - RA - RBM_2^{-1}B^*R = 0. \quad (2.22)$$

Le minimum du coût J est donné par :

$$\min_{u \in L^2(t_0, T, \mathbb{R}^m)} J(u) = J(u^*) = -y_0^t R y_0.$$

De plus le système (2.21) est globalement asymptotiquement stable.

Parmi les avantages du théorème précédent c'est qu'en résolvant l'équation de Riccati, on obtient directement la solution optimale $y^*(t)$ et aussi le contrôle optimale u^* sous une forme explicite, dite en boucles fermées ou bien feedback. Cette forme est très pratique dans certains problèmes comme celui de stabilisation. Notons que tout ces résultats sont obtenus sans résolution du système adjoint. Ce qui est un autre avantage de l'utilisation des équations de Riccati. Cependant, dans le cas général, il est très compliqué de résoudre ces équations analytiquement. Par suite, on doit utiliser les méthodes numériques pour estimer la solution voulue.

Exemple 2.8 Soit l'équation différentielle dans \mathbb{R} suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = u(t), t \in [0, 1], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On veut trouver le contrôle optimale $u^* \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^m)$ qui minimise le coût : $J(u) = y^2(1) + \int_0^1 u^2(s) ds$ et donné la valeur $J(u^*)$.

On a : $n = 1, A = 0, B = 1, M_0 = 1, M_1 = 0, M_2 = 1$ et le temps final $T = 1$.

Soit $p_0 = -\frac{1}{2}$. Par suit, le système d'optimalité est le suivant :

$$\begin{cases} y^*(t) = Ay^*(t) + Bu^*(t), y^*(t_0) = y_0, \\ p'(t) = y^{*t}(t)M_1 - p(t)A^*, p(T) = -M_0y^*(T), \\ u^*(t) = M_2^{-1}B^*p^t(t). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} y^*(t) = u^*(t), t \in [0, 1], y^*(0) = y_0, \\ p'(t) = 0, p(1) = -y^*(1), \\ u^*(t) = p(t), t \in [0, 1]. \end{cases}$$

On a : $p'(t) = 0$ donc $p(t)$ est une fonction constante pour l'intervalle $[0, 1]$, par conséquent $p(t) = cte = p(1) \implies p(t) = -y^*(1)$.

Et on a : $u^*(t) = p(t) = -y^*(1)$.

On a : $y'^*(t) = u^*(t) \implies \int dy^*(t) = \int u^*(t)dt \implies \int dy^*(t) = - \int y^*(1)dt$

Donc $y^*(t) = -y^*(1)t + k$

Comme $y^*(0) = y_0 \implies k = y_0$. Donc $y^*(t) = -y^*(1)t + y_0$.

$y^*(1) = -y^*(1) + y_0 \implies y^*(1) = \frac{y_0}{2}$.

On déduit que $p(t) = -\frac{y_0}{2}$ et $u^*(t) = -\frac{y_0}{2}, \forall t$.

On a : $y^*(t) = -y^*(1)t + y_0 = -\frac{y_0}{2}t + y_0 \implies y^*(t) = y_0(-\frac{t}{2} + 1)$.

On a : $u^*(t) = M_2^{-1}B^tR(t)y^*(t), \forall t, t \in [0, 1]$.

$u^*(t_0) = M_2^{-1}B^tR(t_0)y^*(t_0) \implies -\frac{y_0}{2} = R(t_0)(-\frac{t_0}{2} + 1)y_0$ donc $R(t_0) = -\frac{1}{2}$.

De plus le minimum du coût J est donné par :

$$\min_{u \in L^2(t_0, T, \mathbb{R}^m)} J(u) = J(u^*) = -y_0^t R(t_0) y_0 = \frac{y_0^2}{2}.$$

Chapitre 3

Étude de quelques problèmes de contrôle

3.1 Contrôle d'une équation différentielle ordinaire

3.1.1 Exemple simple de contrôle pour une équation différentielle ordinaire

Soit $y(t)$ la température d'une petite objet, contrôlé la température de son environnement, $u(t)$, supposons qu'initialement l'objet à température y_0 et que le transfert de chaleur a lieu un taux constante α .

Ce phénomène peut être modélisé par le système d'équation différentielle ordinaire suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha(u(t) - y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Si nous pouvons contrôler la température ambiante $u(t)$, nous pourrions demander à ce que l'objet atteigne une température donnée à l'instant $t = T$, $y(T) = y_d$. Existe-t-il un contrôle ?

Peut-on le calculer ?

L'équation (3.1) admet une solution explicite :

$$y(t) = y_0 \exp(-\alpha t) + \alpha \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha s) u(s) ds. \quad (3.2)$$

Remplaçant, la solution $y(T) = y_d$ on obtient :

$$y(T) = y_0 \exp(-\alpha T) + \alpha \exp(-\alpha T) \int_0^T \exp(\alpha s) u(s) ds = y_d,$$

donc

$$y_0 + \alpha \int_0^T \exp(\alpha s) u(s) ds = \exp(\alpha T) y_d,$$

donc

$$\alpha \int_0^T \exp(\alpha s) u(s) ds = \exp(\alpha T) y_d - y_0.$$

Il existe un nombre infini de solutions, $u(t)$ à cette équation. Par exemple, pour un contrôle constante $u(t) = u_0$, on calcul facilement que

$$\alpha u_0 \int_0^T \exp(\alpha s) ds = \exp(\alpha T) y_d - y_0,$$

par l'intégration en trouve

$$\alpha u_0 \left(\frac{1}{\alpha} \exp(\alpha T) - \frac{1}{\alpha} \right) = \exp(\alpha T) y_d - y_0,$$

donc

$$u(s) = u_0 = \frac{\exp(\alpha T) y_d - y_0}{\exp(\alpha T) - 1}.$$

On vérifie que le contrôle trouvé est bien celui qui conduit à $y(T) = y_d$:

$$\begin{aligned} y(T) &= y_0 \exp(-\alpha T) + \alpha \exp(-\alpha T) \int_0^T \exp(\alpha t) u(t) dt \\ y(T) &= y_0 \exp(-\alpha T) + \alpha \exp(-\alpha T) \int_0^T \exp(\alpha t) \frac{\exp(\alpha T) y_d - y_0}{\exp(\alpha T) - 1} dt \\ y(T) &= y_0 \exp(-\alpha T) + \alpha \exp(-\alpha T) \left(\frac{\exp(\alpha T) y_d - y_0}{\exp(\alpha T) - 1} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \exp(\alpha T) - \frac{1}{\alpha} \right) \\ y(T) &= y_0 \exp(-\alpha T) + \frac{\exp(\alpha T) y_d - y_d - y_0 + \exp(-\alpha T) y_0}{\exp(\alpha T) - 1} \\ y(T) &= y_0 \exp(-\alpha T) + \frac{(\exp(\alpha T) - 1) y_d + (\exp(-\alpha T) - 1) y_0}{\exp(\alpha T) - 1} \\ y(T) &= y_0 \exp(-\alpha T) + \frac{(\exp(\alpha T) - 1) y_d - \exp(-\alpha T) (\exp(\alpha T) - 1) y_0}{\exp(\alpha T) - 1}, \end{aligned}$$

donc

$$y(T) = y_0 \exp(-\alpha T) + y_d - y_0 \exp(-\alpha T),$$

finalement

$$y(T) = y_d.$$

3.1.2 Contrôle optimale d'une équation différentielle ordinaire

Cherchons le contrôle, $u(t)$, qui minimise la norme $L^2(0, T)$,

$$E_u(T) = \int_0^T |u(t)|^2 dt.$$

Un tel contrôle existe et il est unique, la fonction de contrôle prend la forme

$$u(t) = r_0 \exp(\alpha(t - T)) \text{ où } r_0 = 2 \frac{y_d - \exp(-\alpha T)y_0}{1 - \exp(-2\alpha T)}.$$

On peut calculer cette contrôle "optimale" par deux méthodes :

1- Première méthode : méthode de **Grammienne de contrôlabilité**

$$\begin{aligned} G &= G(0, T) = \int_0^T \exp((T-t)A)BB^* \exp((T-t)A^*)dt \\ &= \int_0^T \exp(-\alpha(T-t))\alpha^2 \exp(-\alpha(T-t))dt \\ &= \alpha^2 \int_0^T \exp(-2\alpha(T-t))dt \\ &= \alpha^2 \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(-2\alpha(T-t)) \right]_0^T \\ &= \alpha^2 \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \exp(-2\alpha T) \right] \\ &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \exp(-2\alpha T), \end{aligned}$$

donc

$$G = G(0, T) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \exp(-2\alpha T).$$

Et on a le contrôle optimale est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} u^*(t) &= B^*S^*(T-t)y = B^*S^*(T-t)y(T, y_0, u) \\ &= B^*S^*(T-t) \left\{ S(T)y_0 + \underbrace{\int_0^T S(T-t)Bu(t)dt}_{Lu} \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$\bar{y}_d = S(T)y_0 + Lu \implies y_d - S(T)y_0 = Lu,$$

alors

$$\begin{aligned} G^{-1}(y_d - S(T)y_0) &= G^{-1}Lu = (LL^*)^{-1}Lu \\ &= (L^*)^{-1}L^{-1}Lu = (L^*)^{-1}u = y. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 u^* &= B^* S^*(T-t)y = B^* S^*(T-t)y \\
 u^*(t) &= B^* S^*(T-t)G^{-1}(y_d - S(t)y_0) \\
 u^*(t) &= \alpha \exp(-\alpha(T-t)) \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \exp(-2\alpha T)} (y_d - \exp(-\alpha T)y_0) \\
 u^*(t) &= \alpha \exp(-\alpha(T-t)) \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \exp(-2\alpha T)} (y_d - \exp(-\alpha T)y_0) \\
 u^*(t) &= 2 \exp(-\alpha(T-t)) \frac{1}{1 - \exp(-2\alpha T)} (y_d - \exp(-\alpha T)y_0) \\
 u^*(t) &= 2 \frac{y_d - \exp(-\alpha T)y_0}{1 - \exp(-2\alpha T)} \exp(\alpha(t-T)).
 \end{aligned}$$

2- Deuxième méthode : **Principe du maximum de Pontryagin**

On a l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases}
 y'(t) = -\alpha y(t) + \alpha u(t), t \in [0, T] \\
 y(0) = y_0,
 \end{cases}$$

On veut trouver le contrôle optimale $u^* \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ qui minimise le coût :

$$E_u(T) = \int_0^T |u(t)|^2 dt \text{ et donné la valeur } J(u^*).$$

On a : $n = 1, A = -\alpha, B = \alpha, M_0 = 0, M_1 = 0, M_2 = 1$ et le temps final T .

Soit $p_0 = -\frac{1}{2}$. On a le système :

$$\begin{cases}
 y'^*(t) = -\alpha y^*(t) + \alpha u^*(t), t \in [0, T], y^*(0) = y_0, \\
 p'(t) = M_1(y^*(t))^t - A^* P(t) = \alpha p(t), \text{ avec } p(T) = p_T \\
 u^*(t) = M_2^{-1} B^* p^t(t) = \alpha p(t).
 \end{cases}$$

Si $M_0 \neq 0 \implies p(T) = p_T = -y(T)M_0$.

On a $P'(t) = \alpha P(t) \implies \int \frac{dp(t)}{p(t)} = \alpha \int dt \implies p(t) = k \exp(\alpha t)$

$$p(T) = k \exp(\alpha T) = p_T \implies k = p_T \exp(-\alpha T),$$

donc

$$p(t) = p_T \exp(-\alpha t) \exp(\alpha t) \implies p(t) = p_T \exp \alpha(t - T),$$

et on a

$$u^*(t) = \alpha p_T \exp \alpha(t - T).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 y^*(t) &= y_0 S(T) + \int_0^T S(t-s) B u^*(s) ds \\
 &= y_0 \exp(-\alpha t) + \int_0^T \exp(-\alpha(t-s)) \alpha^2 p_T \exp \alpha(s-T) ds \\
 &= y_0 \exp(-\alpha t) + \alpha^2 p_T \exp(-\alpha t) \exp(-\alpha T) \int_0^T \exp(2\alpha s) ds \\
 &= y_0 \exp(-\alpha t) + \alpha^2 p_T \exp(-\alpha t - \alpha T) \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(2\alpha s) \right]_0^T \\
 &= y_0 \exp(-\alpha t) + \alpha^2 p_T \exp(-\alpha t - \alpha T) \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(2\alpha T) - \frac{1}{2\alpha} \right] \\
 &= y(T) = y_d = y_0 \exp(-\alpha t) + \alpha^2 p_T \exp(-\alpha T) \exp(-\alpha T) \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(2\alpha T) - \frac{1}{2\alpha} \right],
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 p_T &= \frac{y_d - y_0 \exp(-\alpha t)}{\alpha^2 \exp(-2\alpha T) \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(2\alpha T) - \frac{1}{2\alpha} \right]} \\
 p_T &= \frac{y_d - y_0 \exp(-\alpha t)}{\frac{1}{2}\alpha(1 - \exp(-2\alpha T))}.
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 u^*(t) &= \alpha p_T \exp \alpha(t-T) \\
 u^*(t) &= \alpha \frac{y_d - y_0 \exp(-\alpha t)}{\frac{1}{2}\alpha(1 - \exp(-2\alpha T))} \exp(\alpha(t-T)) \\
 u^*(t) &= 2 \frac{y_d - y_0 \exp(-\alpha t)}{(1 - \exp(-2\alpha T))} \exp(\alpha(t-T)).
 \end{aligned}$$

Remarque 3.1 Un contrôle existe pour tout $T > 0$, les états initiaux et finaux sont arbitraires.

3.1.3 Contrôle d'un système d'équation différentielle ordinaire

Le cas d'un système, pour y une fonction vectorielle de dimension n , s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où A est une matrice carrée ($n \times n$), B est une matrice rectangulaire ($n \times m$), et u est le contrôle de dimension m .

Lorsque A est **diagonalisable**, chaque mode propre peut être contrôlé arbitrairement.

Solution sans contrôle, avec contrôle constant et avec contrôle optimal

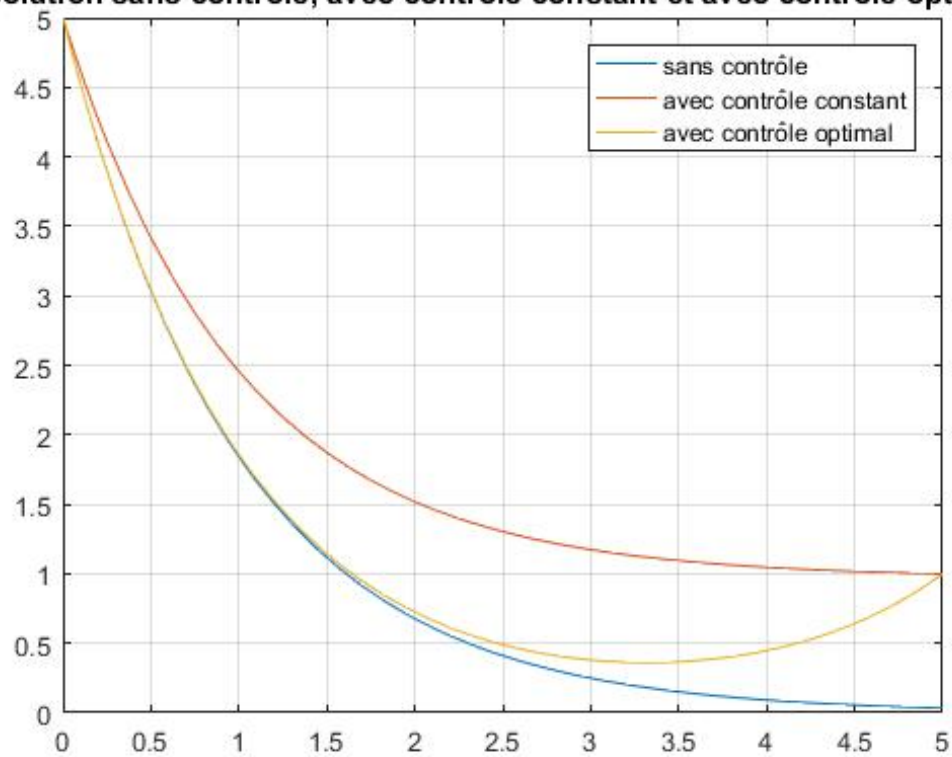


FIGURE 3.1 – Solution sans et avec contrôles

Théorème 3.1 Un système $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$, est dite contrôlable si la matrice de contrôlabilité $\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ est de rang égal à n , l'ordre du système.

Lorsque c'est le cas, on peut contrôler le système à l'aide d'un contrôle de rétroaction linéaire $u = -Ky$, ceci permet d'écrire

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$

$$y'(t) = Ay + B(-Ky)$$

$$y'(t) = (A - BK)y$$

$$y'(t) = A_c y.$$

Et l'on peut placer les valeurs propres de la matrice A_c dans le demi-espace $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Exemple 3.1 (Le pendule simple) (voir le Fig. 3.2) Considérons l'équation pour un pendule simple :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0.$$

Il est facile de voir que :

- 1- L'énergie totale, $E = \frac{1}{2} |\theta'|^2 + |1 - \cos\theta|$ est constante pour tout temps.
- 2- Le pendule monte jusqu'à $\theta_{\max}(\theta' = 0)$ où $1 - \cos\theta_{\max} = E$, puis retombe vers $\theta = 0$.
- 3- Période de l'oscillation est (de zéro à θ_{\max} est un quart de période)

$$T_{\text{osc}} = \frac{T}{4} = \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{(2E - 2(1 - \cos\theta))^{\frac{1}{2}}}.$$

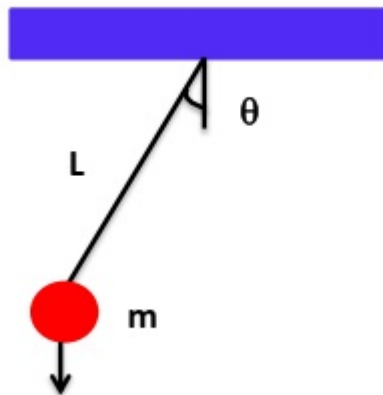


FIGURE 3.2 – Le pendule simple

Pour le modèle de pendule simple. Soit l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' + \alpha^2 y = 0$. Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} y' = w, \\ w' = -\alpha^2 y, \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = w', \\ y'' + \alpha^2 y = 0. \end{cases}$$

L'équation s'écrit en forme d'un système comme suite :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \iff y' = Ay.$$

Et les valeurs propre de la matrice A sont obtenue par $\det(A - \lambda I) = 0$. donc $\lambda_1 = \alpha i$, $\lambda_2 = -\alpha i$.

Le système est **marginale**ment stable-il oscille périodiquement, sans cesse.

Supposons qu'un pendule oscille selon une période T . Il peut être avantageux, pour étudier un tel système oscillant, de le faire relativement à cette période T . On peut considérer cette opération comme une sorte de normalisation de la mesure par rapport à la période.

3.1.4 Cas générale

En générale, pour des oscillation non linéaire $y'' + V'(y) = 0$, l'énergie E , l'amplitude y_{\max} et la période T sont définies par :

$$E = \frac{1}{2}(y')^2 + V(y).$$

On a

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(y')^2 + V(y) \\ 2E &= (y')^2 + 2V(y) \\ 2E - 2V(y) &= (y')^2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{y_{\max}} dt &= \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{(2E - 2V(y))^{\frac{1}{2}}} \\ T_{\text{osc}} &= \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{(2E - 2V(y))^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

et

$$T = 4T_{\text{osc}}.$$

A fin d'obtenir l'énergie, on multiplie l'équation par y' et l'on intègre.

L'énergie est cinétique plus que potentiel.

Lorsque l'énergie cinétique est nulle, l'oscillation est pleine amplitude :

$$E = V(y_{\max}).$$

On a

$$\begin{aligned} y'' + V'(y) &= 0 \\ y'y'' + y'V'(y) &= 0 \\ \int y'y'' + \int y'V'(y) &= 0 \\ \frac{1}{2}(y')^2 + V(y) &= E = V(y_{\max}). \end{aligned}$$

On s'intéresse ici au contrôle par rétroaction **"feedback"** d'un système instable.

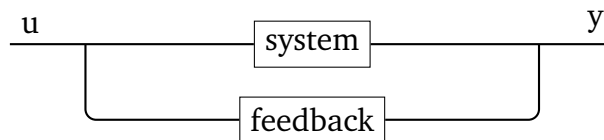


FIGURE 3.3 – Contrôle par rétroaction

Quelques exemples d'application sont :

Le pilot automatique d'un avion .

La surveillance d'un réacteur nucléaire.

Le contrôle des processus chimiques .

Le thermostat d'un système de chauffage.

3.1.5 Pendule inversé

Le problème physique considérés est celui du pendule inversé, pouvant modéliser par exemple, une fusée sur une rampe de lancement ou une prothèse de jambe. Au temps continu, on a l'équation suivant :

$$y'' - \alpha^2 y = 0, \quad \text{où } \alpha = \frac{g}{L},$$

avec $\sin y \simeq y$, celle-ci est réécrite sous la forme d'un système d'équations de premier ordre

$$\begin{cases} y' = w \\ w' = \alpha^2 y, \end{cases}$$

où, y représente la position angulaire, w la vitesse angulaire et u la commande de rétroaction que l'on veut calculer.

On peut montrer que la solution (équation sans contrôle) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha t) & \frac{1}{\alpha} sh(\alpha t) \\ \alpha sh(\alpha t) & ch(\alpha t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

On a le système $y' = Ay$ et $y(0) = y_0$, la solution de ce système est donnée par $y = y_0 \exp(tA)$.

On calcule $\exp(tA)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha^2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - \alpha^2. \end{aligned}$$

On a $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \alpha^2 = 0$, donc le spectre est : $sp(A) = \{\alpha, -\alpha\}$.

Les vecteurs propres :

Pour $\lambda_1 = \alpha$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha x \\ \alpha^2 x = \alpha y \end{cases}, \text{ le vecteur propre}$$

associé à la valeur propre α est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = -\alpha$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\alpha x \\ \alpha^2 x = -\alpha y \end{cases}, \text{ le vecteur}$$

propre associé à la valeur propre $-\alpha$ est $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } D = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\exp(-\alpha)}{\alpha} & \frac{\exp(\alpha)}{\alpha} \\ \exp(-\alpha) & \exp(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} ch(\alpha t) & \frac{1}{\alpha} sh(\alpha t) \\ \alpha sh(\alpha t) & ch(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

Est qu'elle coût sans limite

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \infty \right).$$

Stabilisation par un contrôle

1- On commence par l'écriture de système $y'' - \alpha^2 y = u$ sous forme matricielle.

On a :

$$\begin{cases} y' = w \\ w' = \alpha^2 y + u \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = w' \\ y'' - \alpha^2 y - u = 0. \end{cases}$$

L'équation s'écrit en forme d'un système comme suit :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \iff y' = Ay + Bu,$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2- En suite, on examine la stabilité du système (sans contrôle) : les valeurs propres sont la solution de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \alpha^2 = 0$.

Donc $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$, on déduit que le système est instable.

3.1- Pour la condition initiale suivante $y(0) = 0.01$ et $w(0) = 0$ et on pose $\alpha = 1$ et l'intervalle d'intégration $[0; 15]$. Alors, la solution et les trajectoires (y et w) du pendule simple, non-amorti sont représentée dans la Fig. 3.6.

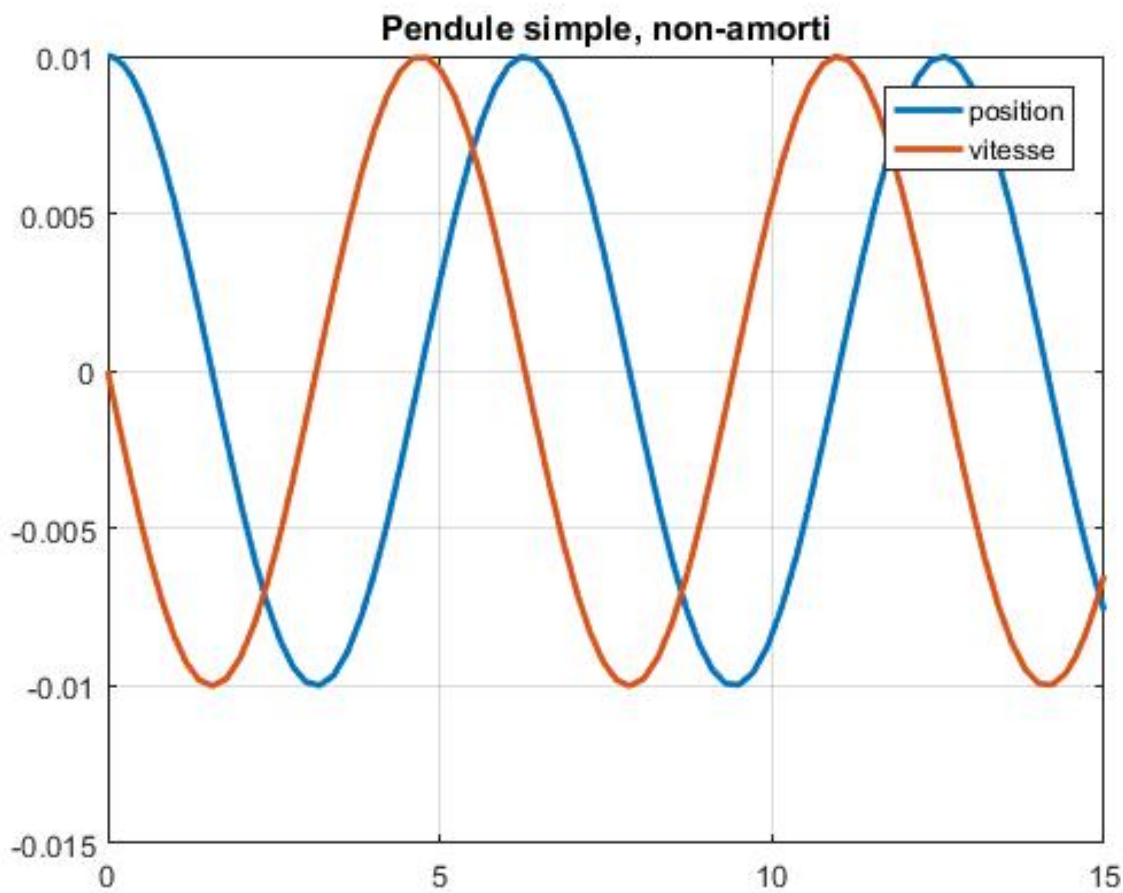


FIGURE 3.4 – La solution et les trajectoires (y et w)

3.2- Pour la condition initiale suivante $y(0) = 0.01$ et $w(0) = 0$ et on pose $\alpha = 1$ et l'intervalle d'intégration $[0; 4]$. Alors, la solution et les trajectoires (y et w) du pendule inversé, non-amorti sont représentée dans la Fig. 3.5.

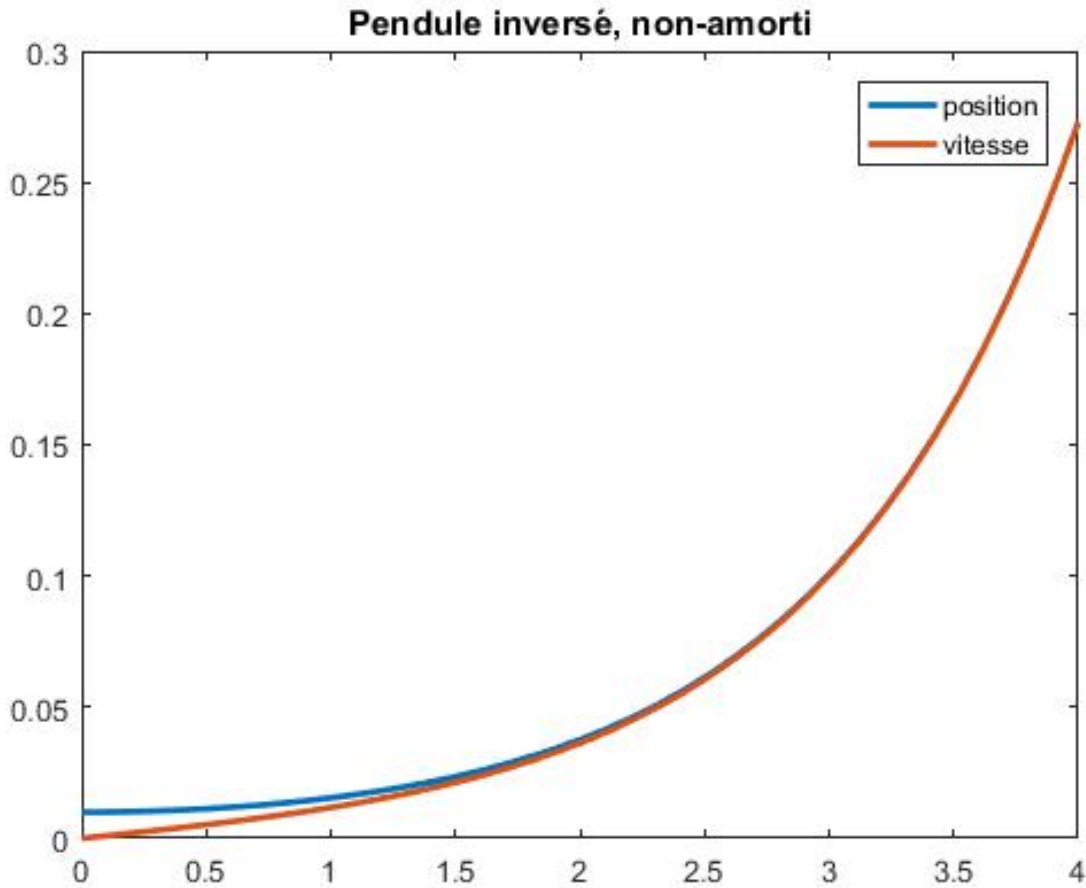


FIGURE 3.5 – La solution et les trajectoires (y et w)

4- Pour stabiliser le système il faut vérifier que le système du pendule inversé est contrôlable (i.e. on utilise le critère de Kalman)

$$C(A, B) = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

le rang de cette matrice est maximal, d'où la contrôlabilité.

5- Comme le système est contrôlable on peut stabiliser ce système à l'aide d'un contrôle rétroaction linéaire $u = -Ky$, avec $K = (K_1, K_2)$, qui placer les valeurs propres (les pôles) da la matrice

du système à $-0.5 \pm 0.5i$ (comme exemple)

$$y' = Ay + Bu$$

$$y' = Ay + B(-Ky)$$

$$y' = (A - BK)y,$$

la matrice du système est

$$\begin{aligned} A_c &= A - BK, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - K_1 & -K_2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \alpha^2 - K_1 & \lambda + K_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + K_2\lambda - \alpha^2 + K_1.$$

Pour avoir des racines $-0.5 \pm 0.5i$, ce qui donne $K_2 = 1$, $K_1 = 0.5 + \alpha^2$, donc $K = (0.5 + \alpha^2, 1)$.

6- Pour la condition initiale suivante $y(0) = -0.06$ et $w(0) = 0.35$ et on pose $\alpha = 1$ et l'intervalle d'intégration $[0; 15]$. Alors, la solution et les trajectoires (y et w) du pendule inversé, avec contrôle sont représentée dans la Fig. 3.6.

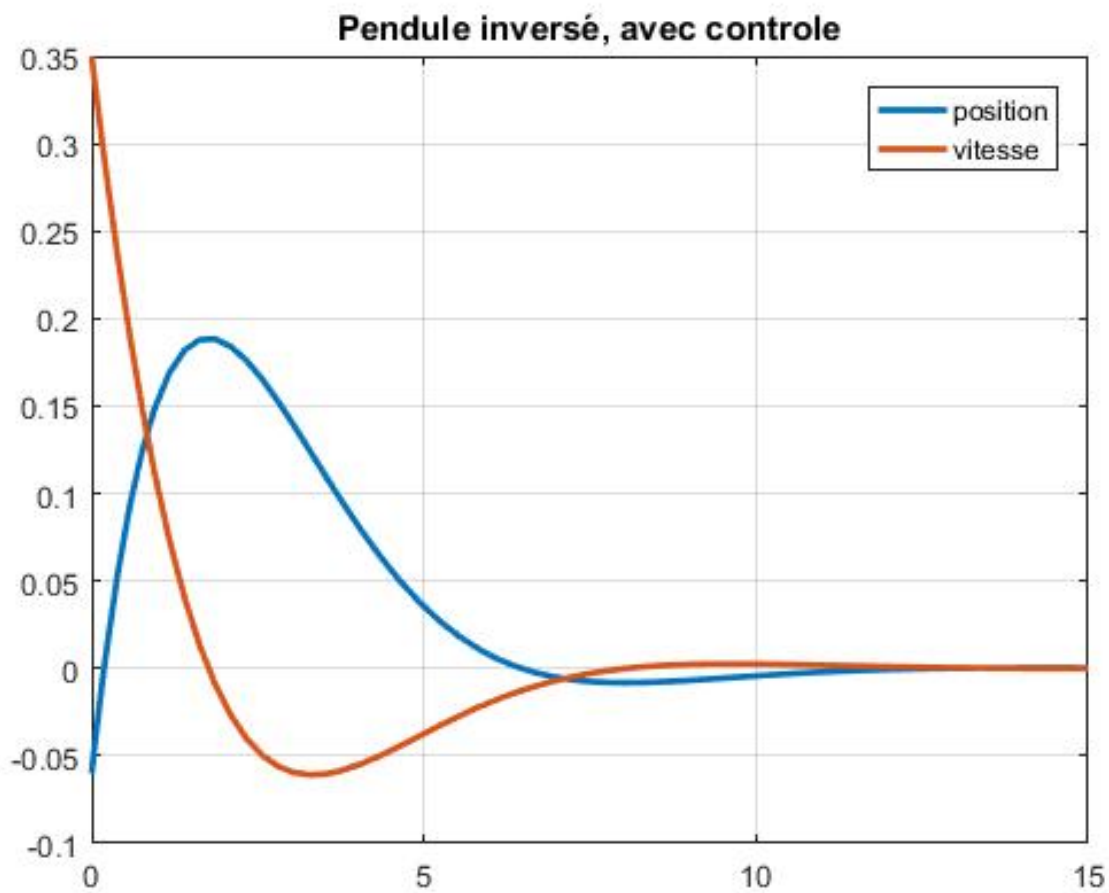


FIGURE 3.6 – La solution et les trajectoires (y et w)

7- Pour la fonction $\frac{y^2}{2} - \cos x - 1.5 = 0$ et le domaine $[-6; +6] \times [-6; +6]$. Alors, le plan de phase est représenté dans la Fig. 3.4.

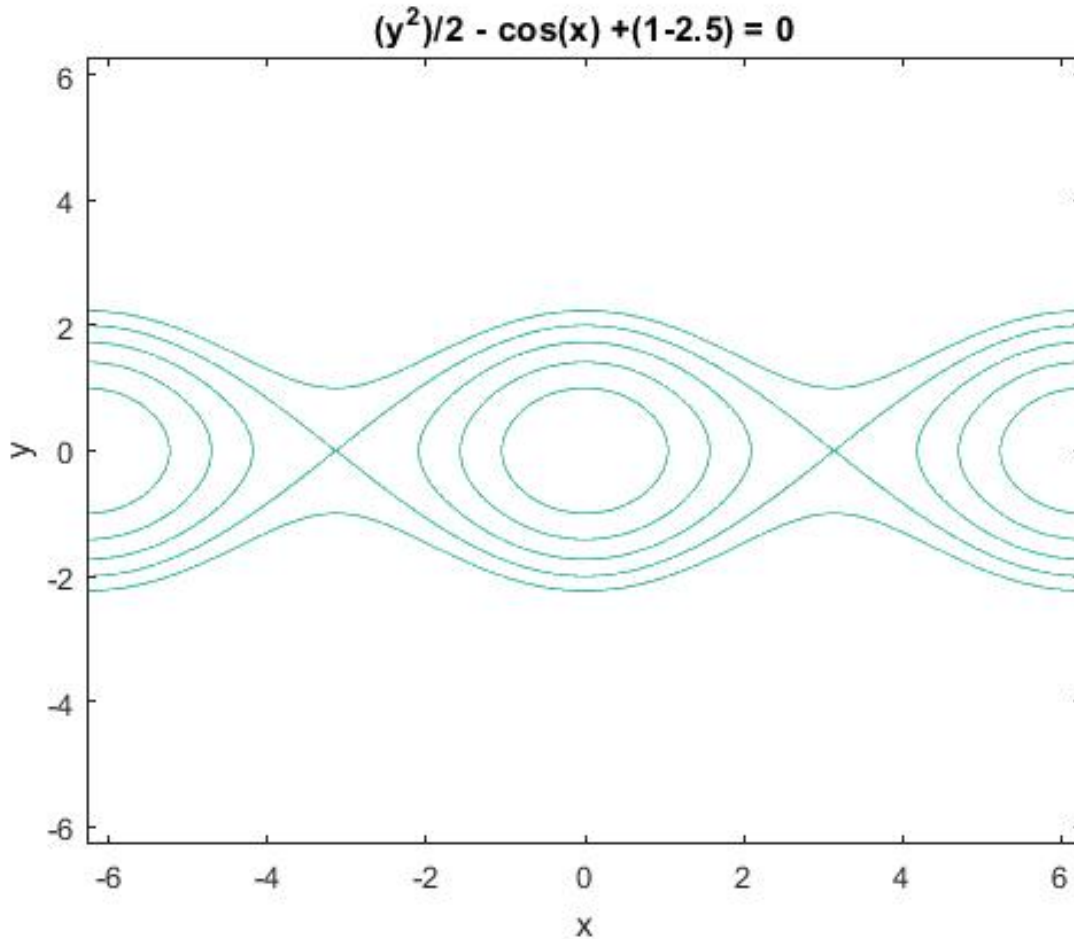


FIGURE 3.7 – Plan de phase

3.1.6 Stabilité dans le plan de phase

Dans le cas générale, la stabilité d'un système d'équations différentielles ordinaires $y' = F(y)$ est obtenue de l'examen des valeurs propres de la matrice de stabilité linéaire, $S_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$

et l'on examine S_L aux points critiques y^* qui vérifient $F(y^*) = 0$.

La stabilité linéaire implique la stabilité du système non linéaire dans un voisinage des points critiques.

Exemple 3.2 Dans le cas linéaire précédent on a :

$$y' = F(y) = Ay + Bu \iff \begin{cases} y' = w \\ w' = \alpha^2 y + u \end{cases},$$

on choisit $F_1 = y' = w$, $F_2 = w' = \alpha^2 y + u$, $y_1 = y$ et $y_2 = w$. Alors la matrice de stabilité est

$$S_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Maintenant nous allons voir, comment calculer un tel contrôle dans un cadre plus générale pour les EDP (les équations de type onde).

3.2 Contrôle d'une équation différentielle partielle

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode HUM (pour Hilbert Uniqueness Method) développée par J. L. Lions dans son livre [8] sur l'exemple modèle de l'équation des ondes avec une action du type Dirichlet sur la frontière. L'idée est de définir une semi-norme, qui est une norme lorsqu'un théorème d'unicité est vérifié. On construit alors un espace de Hilbert par complétion grâce à cette norme. D'où le nom de la méthode.

3.2.1 Problème et présentation des étapes de la méthode

Le problème de contrôle que l'on a choisi d'étudier est le suivant : soit Ω un ouvert connexe non vide borné de \mathbb{R}^n où $n \geq 1$. Son bord Γ est supposé régulier de classe C^2 . On choisit $T > 0$. On note $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Remarque 3.2 Dans les applications, c'est rare de trouver des systèmes qui l'on peut contrôler sur tout le bord. Pour cette raison nous considérons l'action du contrôle uniquement sur une partie du bord, alors on prend $\Gamma_0 \subset \Gamma$ avec $\Gamma_0 \neq \emptyset$.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 \text{ dans } Q \text{ avec } Q = \Omega \times (0, T), \\ y = u(x, t) \text{ pour } (x, t) \in \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \text{ et } y(x, t) = 0 \text{ pour } (x, t) \in \Sigma \setminus \Sigma_0, \\ y(x, 0) = y^0, \quad y'(x, 0) = y^1 \text{ pour } x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

L'objectif est de ramener le système à l'équilibre en un temps fini T , ce qui s'écrit de la manière suivante : soient $T > 0$, et des condition initiales $\{y^0, y^1\}$ données dans un espace convenable

(à déterminer), on cherche un contrôle u défini sur Σ_0 tel que la solution y du problème (3.3) vérifie $y(\cdot, T) = y'(\cdot, T) = 0$? (i.e. on cherche la contrôlabilité nulle).

Autrement dit, il s'agit d'étudier l'existence d'un contrôle u qui ramène le système à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ au temps $T > 0$.

Remarque 3.3 On dit que l'état $\{0, 0\}$ est un état d'équilibre du système car une fois que la solution $y = y(u)$ atteint cet état, elle reste dans cet état si on n'introduit aucune autre action sur la frontière du système.

Remarque 3.4 Le système d'évolution (3.3) est hyperbolique. En conséquence, la vitesse de propagation des ondes est finie et donc, la contrôlabilité exacte du système exige que le temps $T > 0$ soit suffisamment grand. Autrement dit, si T est "trop petit" à cause de la vitesse finie de propagation des ondes, aucune action sur la frontière latérale Σ du système n'est perçue dans "les points de Ω qui sont loin de Γ ".

3.2.2 Description de la méthode HUM

Dans ce paragraphe on présente les lignes générales de la méthode HUM qui est utilisée pour la résolution du problème de la contrôlabilité exacte, dans une version adaptée au système (3.3) considéré ci-dessus.

Les points essentiels de la méthode sont :

- (a) L'obtention de critère d'unicité pour le système homogène associé.
- (b) La construction - par des procédés de complétion - d'espaces hilbertiens adaptés à la structure du système.

On désignera cette méthode par HUM.

Le programme suivant décrit les étapes fondamentales de l'application de la méthode HUM à la résolution du problème de la contrôlabilité exacte du système (3.3).

Etape 1 :

On commence par considérer le **problème homogène (3.4)** associé au problème de contrôle précédent (3.3) i.e. on se donne des conditions initiales $(\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ (où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact inclus dans ω). Alors le problème homogène est :

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 \text{ pour } (x, t) \in Q, \\ \phi = 0 \text{ pour } (x, t) \in \Sigma, \\ \phi(x, 0) = \phi^0, \quad \phi'(x, 0) = \phi^1 \text{ pour } x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Il connu que le problème (3.4) admet une solution unique.

Cela motive à chercher un contrôle de la forme $u = \frac{\partial \phi}{\partial v}$ et ϕ vérifie l'équation homogène (3.4).

Mais quelle serait la condition initiale ?

Etape 2 :

On résout ensuite le **problème rétrograde (adjoint)** associé au problème de contrôle (3.3) :

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = 0 \text{ pour } (x, t) \in Q, \\ \psi(x, T) = \psi'(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \psi(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial v} \text{ sur } \Sigma_0, \\ 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \end{cases} \quad (3.5)$$

où v désigne le vecteur normal extérieur à Ω et " $\frac{\partial}{\partial v}$ " la dérivée dans cette direction "le flux".

Le système rétrograde (3.5) est un problème aux limites non-homogène, car on a une condition final $\psi(T) = \psi'(T) = 0$ dans Ω et des condition aux limites non-homogène. Cela ne change pas le caractère "bien posé" du système, qui admet donc une solution unique ψ .

On définit l'opérateur linéaire $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ qui, à (ϕ^0, ϕ^1) de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ associé

$$\Lambda(\phi^0, \phi^1) = \{(\psi'(0), -\psi(0))\}. \quad (3.6)$$

Etape 3 : Construction d'un espace de Hilbert F par complétion.

De même que la solution du problème (3.4) pour les données initiales (ϕ^0, ϕ^1) est notée ϕ , on note ζ la solution du même problème (3.4) avec les données initiales (ζ^0, ζ^1) .

Lemme 3.1 (voir [8]) Avec les notations ci-dessus et Σ_0 défini au début du paragraphe, on a, pour $(\phi^0, \phi^1, \zeta^0, \zeta^1)$ dans $(\mathcal{D}(\Omega))^4$

$$\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\zeta^0, \zeta^1) \rangle = \int_{\Omega} [\psi'(0)\zeta^0 - \psi(0)\zeta^1] dx = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \psi}{\partial v}(x, t) \frac{\partial \zeta}{\partial v}(x, t) d\Sigma, \quad (3.7)$$

et en particulier

$$\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1) \rangle = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial v}(x, t) \right|^2 d\Sigma, \quad (3.8)$$

où $d\Sigma = d\Gamma dt$ désigne la mesure associée a la variété Σ , $d\Gamma$ étant celle qui correspond à Γ .

Théorème 3.2 (voir [8]) Si ϕ est la solution du problème (3.4) pour un couple de données initiales (ϕ^0, ϕ^1) dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et si elle satisfait la condition

$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Sigma_0, \quad (3.9)$$

alors $\phi(x, t) = 0, \forall (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$.

Remarque 3.5 Ce critère d'unicité est vraie par le théorème de Holmgren [5, 7] (le théorème de Mizohata [10] pour les problèmes paraboliques).

Lemme 3.2 Si le théorème d'unicité est vérifié, alors la semi-norme définie pour (ϕ^0, ϕ^1) dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma_0)}, \quad (3.10)$$

est une norme et on note F l'espace de Hilbert qui est le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour cette norme.

Notons que la valeur de ψ sur Σ_0 dans le problème rétrograde (3.5) a été choisie de sorte que l'on obtienne maintenant une norme. On a ainsi construit une structure adaptée à notre système.

Proposition 3.1 Si le Théorème d'unicité est vérifié, l'opérateur linéaire Λ défini par (3.6) se prolonge de manière unique en un F sur son dual F' .

Preuve. Si on note $(\cdot, \cdot)_F$ le produit scalaire à la norme $\|\cdot\|_F$, il découle de (3.7)

$$|\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1) \rangle| = |((\phi^0, \phi^1), (\zeta^0, \zeta^1))_F| \leq \|(\phi^0, \phi^1)\|_F \cdot \|(\zeta^0, \zeta^1)\|_F, \quad (3.11)$$

ceci, pour (ϕ^0, ϕ^1) et (ϕ^0, ϕ^1) dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Remarquons que

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset F \implies F' \subset (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))',$$

et $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))' = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Par le théorème de densité-continuité, on déduit de (3.11) que l'on peut prolonger Λ en un opérateur linéaire continu de F dans F' .

On applique le théorème de représentation de Riez : à tout élément (f, g) de $F' = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, est associé un élément unique (ϕ^0, ϕ^1) de F tel que, pour tout (ζ^0, ζ^1) de F'

$$\langle (f, g), (\zeta^0, \zeta^1) \rangle = ((\phi^0, \phi^1), (\zeta^0, \zeta^1))_F,$$

alors par définition, $\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (f, g)$. Ainsi Λ est bijective continue de F dans F' .

Théorème des isomorphismes de Banach permet de conclure que Λ est un isomorphisme de F dans F' . ■

Etape 4 : conclusion

Comme Λ est un isomorphisme de F dans F' , l'équation

$$\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (y^1, -y^0), \quad (3.12)$$

a une solution unique (ϕ^0, ϕ^1) dans F pour tout couple données initiales (y^0, y^1) tel que $(y^1, -y^0) \in F'$.

D'autre part, l'opérateur Λ a été défini par l'application (3.6), donc $\psi'(0) = y^1$ et $\psi(0) = y^0$ où ψ désigne la solution du problème (3.5).

On choisit le contrôle u par

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial v} \text{ sur } \Sigma_0.$$

On remarque que $\psi = \psi(x, t)$ et $y = y(x, t)$ sont deux solutions du même problème non-homogène. Alors, d'après l'unicité de la solution du problème (3.3), (3.5) on a $y(x, t) = \psi(x, t), \forall (x, t) \in Q$ avec $\psi'(0) = y^1$ et $\psi(0) = y^0$.

De (3.9), on déduit que

$$y(x, T) = y'(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

On voit que $y = y(u)$ satisfait la condition $y(., T) = y'(., T) = 0$.

Finalement, on a construit un contrôle u qui donne la contrôlabilité exacte.

Théorème 3.3 (Théorème de contrôlabilité "abstrait")

Soit $T > 0$ tel que le théorème d'unicité soit vérifié. On peut alors définir l'espace F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_F$ introduite dans (3.10). Alors, pour tout couple de données initiales (y^0, y^1) tel que $(y^1, -y^0) \in F'$, il existe un contrôle $u \in L^2(\Sigma_0)$ tel que la solution y du problème (3.3) satisfait à $y(., T) = y'(., T) = 0$.

Preuve. Soit (y^0, y^1) tel que $(y^1, -y^0) \in F'$, alors on choisit comme condition initiale du problème (3.4)

le couple (ϕ^0, ϕ^1) de F qui est la solution unique de $\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (y^1, -y^0)$.

Le problème (3.4) admet une solution unique ϕ et on choisit ce ϕ pour écrire le problème rétrograde (3.5). On a alors une unique solution ψ au problème (3.5).

Choisit enfin $u = \frac{\partial \phi}{\partial v}$. Alors, comme, par définition de Λ , on a

$$\Lambda(\phi^0, \phi^1) = ((\psi'(0), -\psi(0)),$$

cela signifie que $y^0 = \psi(., 0)$ et $y^1 = \psi'(., 0)$. Autrement dit, ψ est solution du problème (3.4) admet une unique solution. Donc $y = \psi$ et on a, en particulier, $y(., T) = y'(., T) = 0$.

Notons que u a bien la régularité souhaitée puisque

$$(\phi^0, \phi^1) \in F \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial v} \in L^2(\Sigma_0).$$

■

La prochaine étape est de caractériser les espaces F et F' comme des espaces de Sobolev.

3.2.3 Résultat

Le résultat que l'on vient de démontrer est la contrôlabilité exacte des données $\{y^1, -y^0\} \in F'$ avec un contrôle u donné par :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \text{ sur } \Sigma_0,$$

où ϕ désigne la solution de (3.4) associée aux données $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ vérifiant (3.12).

Maintenant, on va caractériser les espaces F et F' , notons que, si on considère $\phi^1 \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi^0 \in L^2(\Omega)$. Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq \underbrace{C(T+1)}_{C_1} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2, \quad (3.13)$$

$\forall \phi$ solution faible de (3.4).

Comme F est le complété par rapport à la norme définie par le côté droite de l'inégalité (3.13), alors on déduit que $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \in F$.

Pour prouve que $F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on a besoin de prouver l'inégalité inverse suivant : il existe une constante C_2 tel que

$$C_2 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt. \quad (3.14)$$

Supposons que nous avons prouvé (3.14). Puis, avec (3.13) on obtient que :

$$\exists C_1, C_2 > 0 : C_1 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F^2 \leq C_2 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2, \quad (3.15)$$

nous permettra d'identifier l'espace F par

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

et par conséquent son dual est

$$F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

L'inégalité (3.14) est appelée l'inégalité inverse qui permette en même temps d'obtenir à un résultat d'unicité du type du théorème 3.2 (Théorème d'unicité) et a frontière d'obtenir des informations supplémentaires sur l'espace des données dans lequel la contrôlabilité exacte a lieu.

Alors, pour tout couple de données initiale $\{y^1, -y^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ il existe un unique $\{\phi^1, \phi^0\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et par suite, on résoudre le problème (3.4), ce qui donne $\phi = \phi(x, t)$ avec un contrôle $u = u(x, t)$ donné par $u = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$. D'après la régularité de la solution ultra faible, on déduit que $u \in L^2(\Sigma)$ (ceci est une propriété de régularité cachée des solution faible de l'équation des ondes).

L'inégalité inverse (3.14) n'est pas en général vraie.

Exemple 3.3 Soit le problème de contrôle (3.3), mais pour simplifier, on le récrit en dimension 1 en faisant le choix $\Omega = (0; 1)$ et $\Gamma_0 = \{1\}$.

$$\begin{cases} y_t'' - y_x'' = 0, & \text{pour } (x, t) \in (0; 1) \times (0, T), \\ y(1, t) = u, y(0, t) = 0, & \forall t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0, y'(x, 0) = y^1, & \text{pour } x \in (0; 1), \end{cases} \quad (3.16)$$

et le problème homogène associé est

$$\begin{cases} \phi_t'' - \phi_x'' = 0, & \text{pour } (x, t) \in (0; 1) \times (0, T), \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0, & \forall t \in (0, T), \\ \phi(x, 0) = \phi^0, \phi'(x, 0) = \phi^1, & \text{pour } x \in (0; 1). \end{cases} \quad (3.17)$$

D'après (3.15) on a :

$$C_1 \|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^T |\phi_x(1, t)|^2 dt \leq C_2 \|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2.$$

La formulation abstraite de (3.17) est :

$$\begin{aligned} \Phi_t(t) + A\Phi(t) &= 0, \forall t \in (0, T), \\ \Phi(0) &= \Phi^0, \end{aligned}$$

où $\Phi(t) = (\phi(\cdot, t), z(\cdot, t))$ avec $z(x, t) = \phi'(x, t)$.

La fonction Φ appartient au domaine de l'opérateur A défini par

$$D(A) = H_0^1(0; 1) \times L^2(0; 1) \longrightarrow L^2(0; 1) \times H^{-1}(0; 1),$$

$$\Phi = (\phi, z) \longrightarrow A\Phi = (-z, -\partial_x^2 \phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de Laplace $-\partial_x^2$ est un opérateur non borné défini de $H_0^1(0; 1)$ dans $H^{-1}(0; 1)$ comme suit :

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 &: H_0^1(0; 1) \subset H^{-1}(0; 1) \longrightarrow H^{-1}(0; 1), \\ \phi &\longrightarrow -\partial_x^2 \phi : \psi \longrightarrow \langle -\partial_x^2 \phi, \psi \rangle_{H^{-1}(0; 1), H_0^1(0; 1)} = \int_0^1 \phi_x \psi_x, \forall \phi, \psi \in H_0^1(0; 1). \end{aligned}$$

Lemme 3.3 Les valeurs propres de l'opérateur A défini ci-dessus sont $\lambda_n = in\pi, n \in \mathbb{Z}^*$. Les fonctions propres associées sont

$$\Phi^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_n} \\ -1 \end{pmatrix} \sin(n\pi x), n \in \mathbb{Z}^*.$$

Elles forment une base orthonormée de $H_0^1(0; 1) \times L^2(0; 1)$.

Théorème 3.4 (Contrôlabilité pour le problème en dimension 1 : (3.16))

Soit $T > 2$. Pour tout couple de données initiales $(y^0, y^1) \in L^2(0; 1) \times H^{-1}(0; 1)$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T)$ tel que la solution y du problème (3.16) satisfait à $y(., T) = y'(., T) = 0$.

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme précédent 3.3.

Conclusion

Ce mémoire est généralement consacré à l'étude des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes localisés et distribués. Le but de ce travail est de faire une petite introduction à la théorie du contrôle, domaine à cheval entre les mathématiques et l'ingénierie. En particulier ce travail s'est porté sur l'étude du pendule inversé.

Ce genre de contrôles appelées feedback sont largement utilisées dans les problèmes de stabilisation (comme perspectives de recherche).

Nous avons également étudié le problème de contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes lorsque le contrôle est appliqué à la frontière. La méthode utilisée est la méthode d'unicité hilbertienne "la méthode HUM" introduite par J.L.Lions. Cette méthode se base sur un critère d'unicité et des inégalités d'énergie qui caractérisent l'espace des données initiales.

Bibliographie

- [1] A. Benaoua et al. Unique solvability of a Dirichlet problem for a fractional parabolic equation using energy-inequality method. MFAT. V26. N03. PP. 216-226. 2020.
- [2] H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer. 2010. DOI 10.1007/987-0-387-70914-7.
- [3] A. Boutolout. Contrôlabilité régionale, Cible frontière et contrôlabilité du gradient dans les systèmes distribués. Thèse de Doctorat. Université Moulay Ismail 2000.
- [4] H. Brezis. Analyse fonctionnelle : Théorie et application. Masson 1987.
- [5] J. Klamka. Controllability of dynamical systems, Kluwer, Academie Publishers, 1990.
- [6] T. Laib et al. Instantaneous sentinel for the identification of the pollution terme in Navier Stokes systems. Proyecciones. V40. N6. PP. 1489-1505. 2021.
- [7] J.L. Lions, Controllability, Penalty and stiffness, Anal, Nor, Serie 4, Tome 25, N3-4. PP. 547-610, 1997.
- [8] J.L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Vol. 1 et 2, Masson, RMA, paris, 1988.
- [9] F. Z. Mokkedem. Introduction à la théorie du contrôle. Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. 2019.
- [10] S. Mizohata. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Se. Univ. Kyoto, Série A, Vol 131, pp 219-239, 1958.
- [11] K. Nachi. Contrôle optimal des EDO linéaires. Université Oran 1. 2020.
- [12] A. Pecker. Dynamique des structures et des ouvrages. Edition 2006.
- [13] A. Pazy. Semigroupes of linear operators and applications to partial differential equations. Springer verlag, New York, Berlin, 1983.

-
- [14] I. Rezzoug et al. Pollution detection for the singular linear parabolic equation. *J. Appl. Math. & Informatics* Vol 41(3), 647-656. 2023.
- [15] I. Rezzoug et al. Regularization of a class of ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semi-groups. *PJM*. V11, N1. PP. 485-495. 2022
- [16] I. Rezzoug and T.E. Oussaeif. Solvability of a solution and controllability of partial fractional differential systems. *JIM*. V24. N5. PP 1175-1200. 2021.
- [17] I. Rezzoug. Étude théorique et numérique des problèmes d'identification des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Thèse de Doctorat. Université oum el Boughi. 2014.
- [18] I. Rezzoug. Identification d'une partie de la frontière inconnue d'une membrane. Thèse de Magister. Université oum el Boughi. 2009.
- [19] E. Trélat. contrôle optimal : Théorie et applications. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6). 2013
- [20] E.H. Zerrik, A. Afifi, A. EL Jai. Systèmes dynamiques, Analyse régionale des systèmes linéaires distribués. Tome 2, Presses Universitaires de Perpignan, 2008.

الملخص : درسنا في هذه المذكرة مسألة المراقب الأمثل للمسائل المحلية والموزعة، وعرضنا حالتين :
في الحالة الأولى : يتم تطبيق التحكم على معادلة النواس المقلوب حيث يتم استنتاج الشرط الضروري للأمثلة من مبدأ التعظيم لبونترياجين ويتم حل مسألة النواس البسيط أو المقلوب بطريقة رونج كوتا. يتم عرض النتائج العددية التي تم الحصول عليها على الماتلاب.
في الحالة الثانية : ندرس مسألة المراقب الدقيق لمعادلة الأمواج، حيث دالة المراقبة مطبقة على الحافة. الطريقة المستخدمة هي طريقة الوجدانية الهيلبرتية HUM التي أنشأها ج.ل. ليونص. هذه الطريقة تركز على نظرية الوجدانية و على متراجحات الطاقة التي تشخص فضاء المعطيات الابتدائية.
الكلمات المفتاحية : النواس المقلوب ، معادلة الموجة ، طريقة HUM ، التحكم ، المراقب الأمثل، الاستقرار.

Abstract : Our work aims to study the optimal control problem of localized and distributed systems, two cases will be presented :

The first case deals with the control applied on the inverted pendulum equation. The necessary condition of optimality is deduced from Pontryagin's maximum principle, while the simple or inverted pendulum problem is resolved with Runge Kutta's method. The numerical results are presented in MATLAB.

The second case studies the exact controllability of the wave equation and the control applied on the boundary. The method used is the Hilbert uniqueness method "HUM method" introduced by J.L. Lions. This method is based on uniqueness criterion and energy inequalities that characterize the space of the initial data.

Keywords : Inverted pendulum, Wave equation, HUM method, Controllability, Optimal control, Stability.

2010 Mathematics Subject Classification : 35L05, 93B05, 49J15, 49J20, 49J25, 34D20, 93D20.

Résumé : Dans ce mémoire, on étudie le problème du contrôle optimal pour des problèmes localisés et distribués, on a présenté deux cas :

Dans le premier cas : le contrôle est appliqué à l'équation du pendule inversé. La condition nécessaire d'optimalité est déduite du principe du maximum de Pontryagin et on résout le problème du pendule simple ou inversé avec la méthode de Runge Kutta. Les résultats numériques obtenus sont présentés sur MATLAB.

Dans le deuxième cas : on étudie le problème de contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes avec un contrôle appliqué sur le bord. La méthode utilisée est la méthode d'unicité hilbertienne «la méthode HUM» introduite par J.L. Lions. Cette méthode se base sur un critère d'unicité et des inégalités d'énergie qui caractérisent l'espace des données initiales.

Mot clés : Pendule inversé, Equation d'onde, Méthode HUM, Contrôlabilité, Optimal contrôle, Stabilité.