RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi -Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la natur et de la vie
Département de Mathématiques et Informatiques
Ecole Doctorale

N° d'ordre : ....
N° série : ....

MÉMOIRE
Pour l'obtention du grade de
MAGISTER
SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Appliquées**
OPTION : **Théorie du contrôle**

Présenté par : **ACHICHI Ahlem**

Intitulé :

Détectabilité de certains systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

Soutenu le 11/06/2012 devant le jury :

Président	Marzoug DJBARNI	MC(A)	Univ Larbi Ben M'Hidi O.E.B
Rapporteur	Abdelhamid AYADI	Prof	Univ Larbi Ben M'Hidi O.E.B
Examinateur	Abdelkarim ALIOUCHE	MC(A)	Univ Larbi Ben M'Hidi O.E.B
Examinateur	Mohamed DALAH	MC(A)	Univ Mentouri Constantine

Remerciements

Grâce à mon Dieu le tout puissant, j'ai pu terminer ce travail.

Tous mes remerciements et respects les plus profonds aux mensieur «AYADI ABDELHAMID», professeur au département de mathématiques de l'université de Oum El Bouaghi qui m'ont guidé et encadré pour réaliser ce travail.

Mes sincères remerciements à Monsieur MARZOUG DJEBARNI, maître de conférences au département de mathématiques de l'université de Oum El Bouaghi, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.
Je tiens à remercier Monsieur ABDELKARIM ALIOUCHE, maître de conférences au département de mathématiques de l'université de Oum El Bouaghi, et MOHAMED DALAH, maître de conférences au département de mathématiques de l'université de constantine d'avoir examiné mon travail et d'être membres de mon jury, sans oublier tous me enseignants.
Tous ceux qui ont contribué à notre formation.
a tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs voeux et sentiments à toute ma famille, en particulier à mes parents.

Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception et sans oublier mes collègues de travail.

Table des matières

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
Γ	$= \partial\Omega$ la frontière de Ω.
H, U, V	espace de Hilbert.
A^*	adjoint de A.
γ_0	opérateur de trace.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	l'espace des fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordre k est contuine.
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact.
$L^p(\Omega)$	l'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$\mathfrak{D}(\Omega)$	l'espace des distributions.
$\nabla f(x)$	$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$, le gradient de la fonction f en $x \in \mathbb{R}^n$.
$W^{m,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
$H^m(\Omega)$	$= W^{m,2}(\Omega)$.
Δ	le Laplacian $\left(\Delta = \Sigma_{i=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$.
$Im(A)$	l'image de A.
p.p.	presque partout.
X,Y	espace de Banach

Introduction

Ce mémoire est intitulé détectabilité de certains systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

La détectabilité étant la propriété jouant un rôle primordial dans l'indentification et le contrôle optimal des équations aux dérivées partielles, c'est le domaine de prédilection pour une fonctionnelle.

Le système détectable considéré est a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu \qquad 0 \ < \quad t < T, \\ \qquad\qquad z(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

augmenté de l'équation de sortie :

$$y(t) = Cz(t), \ 0 \leq t \leq T_m. \tag{2}$$

tels que :

1. A engendre un C_0-Semi-groupe,
2. C$\in$ L(D(A)$\subset X; Y$) (X, Y sont des espaces de Hilber),
3. y(t) étant la fonction de sortie.

De tels systèmes apparaissent naturellement dans des problèmes de contrôle et détectabilité citons à titre d'éxemples :

*Des systèmes vibrants(l'equation des ondes).

*Dans l'electromagnétisme (l'equation de Maxwell).

*Dans la mécanique quantique (l'equation de Schrodinger).

*Des phénomènes thermiques (l'equation de la chaleur).

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on fait un rappel sur les éspaces fonctionnels, les opérateurs les C_0-Semi-groupes ainsi que les C_0-Semi-groupes avec les propriétés spéciales dont le contenu sont les C_0-Semi-groupes analytiques, différentiables, de contraction, et compacts, et le problème d'évolution.

Le deuxième chapitre on définit la controlabilité en dimension infinie, controlabilité exacte, faible et régional et quelques notions de l'actionneur.

Enfin, dans le troisième chapitre nous donnons les principes généraux qui concernent l'Observabilité, Stabilisabilité, et La détectabilité.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Espaces Fonctionnels

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière.

Soient X, Y deux espaces de Banach muni par les normes respectives $\| \,.\, \|_X$, $\| \,.\, \|_Y$, on désigne par $L(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1 :

$L^p(\Omega), p \in [1; +\infty[$.

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace défini par :

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}. \tag{1.1}$$

On note par :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

La norme correspondante.

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \{c, |f(x)| \leq \text{c } pp \text{ sur } \Omega\}.$$

Parmi tout ces espaces, $L^2(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx.$$

Ce dernier est également le produit de dualité entre $D(\Omega)$ (espace des fonctions $C^{\infty}(\Omega)$ et à support compact dans Ω), $D'(\Omega)$ (espace dual du $D(\Omega)$) dite espace des distributions.

1.1.2 L' espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.2 :

On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v/\ v \in L^2(\Omega)\,;\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,,\ 1 \leq i \leq n \right\} \tag{1.2}$$

muni du produit scalire

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(u\ v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx, \tag{1.3}$$

et de la norme

$$\|u\|_{1,\Omega} = \langle u, v \rangle_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Remarques 1.1 :

1) La dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ doit être prise au sens des distributions.

2) $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

3) $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact ($\hookrightarrow$injection continue).

Définition1.3 :

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermetur de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ c-à-d :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)},$$

avec $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On peut identifie le dual de $H_0^1(\Omega)$ à $H^{-1}(\Omega)$ qui est un sous espace de $D'(\Omega)$

$$H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega) \right).$$

Par conséconce

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue.

Théorème 1.1 : (Théorème de trace)[14]

Soit Ω un ouvert borné de class C^1, il existe un opérateur linéaire continue.

$$\gamma_0 \in L\left(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega)\right)$$

tel que $\gamma_0 u = u \mid_{\partial\Omega}$ pour tout $u \in C^1(\Omega)$

$L^2(\partial\Omega)$ est l'espace de fonction réelles, de carreé intégrable sur $\partial\Omega$.

Remarque 1.2 :

1) Le théorème (1.1) va nous donner une caractérisation du l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme suit :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega),\ \gamma_0 u = 0\right\} = \text{le noyau de } \gamma_0.$$

2) L'image de $H^1(\Omega)$ par l'application γ_0 est $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, muni de la norme quotient donnée par :

$$\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{\gamma_0 u = \varphi} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert, son dual est noté par $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, alor l'application :

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \text{ est surjective.}$$

1.1.3 L'espace $L^p(0, T, X)$:

Pour tout $T > 0$, on pose $Q = \Omega \times]0, T[$ le cylindre de frontière $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$.

Définition 1.4 :

Pour tout $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, on désigne par $L^p(0, T, X)$ l'espace des fonctions f fortement mesurables sur $]0, T[$ à valeur dans X tel que :

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(0,T,X)} < \infty. \tag{1.5}$$

C'est également un espace de Banach pour la norm (1.5).

Si X est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$, $L^2(0, T, X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_X \, dt \tag{1.6}$$

1.1.4 L'espace $W(0,T)$:

Soient U, V deux espaces de Hilbert séparables, U dense dans V avec injection continue.

On identifie V à son dual, alors si U' désigne le dual de U, V s'identifie a un sous espace de U' et l'on peut écrir $U \subset V \subset U'$.

Chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue.

On introduit l'espace $W(0,T)$.

$$W(0,T) = \left\{ y \;\; / \quad y \in L^2\left(0,T,U\right), \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2\left(0,T,U'\right) \right\}. \tag{1.7}$$

Qu'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|y\|_{W(0,T)} = \left(\|y\|^2_{L^2(0,T,U)} + \|y'\|^2_{L^2(0,T,U')} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Ces élément vérifiant la propriété suivant :

Lemme 1.1 :

Soit y fonction $y \in W(0,T)$ est aprés modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, est agale à une fonction continue de $[0,T] \longrightarrow V$.

En écrira en bref :

$$W(0,T) \subset C^0\left(0,T,V\right).$$

ou $C^0\left(0,T,V\right)$ l'espace de fonctions continues sur $[0,T]$ à valeur dans V,

munit du norme de la convergence uniforme.

1.2 Introduction à la théorie du semi-groupes

1.2.1 Définitions

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe.

Définition 1.1 :

Un operateur linéaire non borné dans H est un application

$$A : D(A) \subset H \to H$$

définie sur un domaine $D(A)$, (sous-espace vectoriel de H).

Son image noté :

$$Im(A) = \{y \in H, \exists x \in D(A), y = Ax\}.$$

Définition 1.2 :

$(A, D(A))$ est dit fermé si son graph

$$G(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$$

est fermé dans la topologie produit de $H \times H$.

Définition 1.3 :

L'ensemble résolvant de A est l'ensemble $\rho(A)$ de $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ soit inversible et d'inverse borné.

Pour $\lambda \in \rho(A)$, on not

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Définition 1. 4 :

Soit :

$$A : D(A) \subset U \longrightarrow V$$

où U et$V$ sont deux espaces de Hilbert avec $D(A)$ dense dans U.

L'opérateur adjoint $A^\star$ de A est définit par:

$$D(A^\star) = \{y \in V, \exists c \geq 0, |\langle y, Ay\rangle_V| \leq c\,\|x\|\,, \forall x D(A)\}.$$

$$\langle y, Ax\rangle_V = \langle A^\star y, x, \rangle_U\,, \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^\star).$$

Définition 1.5 :

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$,

A est dit auto-adjoint si :

$$D(A) = D(A^\star) \text{ et } A = A^\star.$$

A est symétrique si :

$$\langle x, Ay\rangle = \langle Ay, x\rangle\,,\ \forall x, y \in D(A).$$

Définition 1.6 :

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire dans H.

On dit que :

1) A est dissipatif si :

$$\langle Ax, x\rangle \leq 0, \forall x \in D(A). \tag{1.9}$$

2) A est maximal si :

$$Im(I - A) = H. \tag{1.10}$$

Lorsque A vérifie (1), on dit aussi souvent que $-A$ est monotone ou coersif.

Théorème 1 : [14]

$(A, D(A))$ est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert H.

On désigne $L(H)$ les applicationes linéaires bornées de H dans H.

1) A est fermé.

2) $\lambda > 0,\ (\lambda I - A)^{-1}$ est bijectif de $D(A)$ sur H et $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H)$

avec

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{L(H)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

3) $D(A)$ est dense dans H.

1.2.2 Définitions et propriétés des semi-groupes agissant dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \longrightarrow \|x\|_H$.

On désigne par $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H dans lui même.

$L(H)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|S\| = \underset{\|x\|_H=1}{Sup} \|Sx\|_H = \underset{x\neq 0}{Sup} \frac{\|Sx\|_H}{\|x\|_H}. \tag{1.11}$$

Définition d'un semi-group de classe C^0 :

Définition 1.1 :

Une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments $S(t) \in L(H)$ pour $t \geq 0$ forment un semi-groupe de classe C^0dans H.

(semi-groupe fortement continue dans H) si vérifie les conditions suivant :

1. $S(t+s) = S(t)S(s) \quad t, s > 0.$

2. $S(0) = I$ identité dans $L(H)$.

3. $\underset{t \longrightarrow o^+}{Lim} \|S(t)x - x\|_H = 0 \ \forall x \in H.$

Définition 1.2 :

La famille constitue un groupe de classe C^0 si 1 et 2 ont lieu avec s et t de signe quelconque.

Premières propriétés des semi-groupes de classe C^0 :

Proposition 1 :

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 sur H.

Alors :

1) $t \longrightarrow \|S(t)\|$ est bornée sur tout intervalle compact $[0, \alpha]$.

2) $\forall x \in X$, la fonction : $t \longrightarrow S(t)x$ est continue (a valeur dans H) sur $\mathbb{R}^+$.

3) Il existe des constantes réelles ω et M telles que :

$$\|S(t)\| \leq M \exp \omega t,$$

(noter que puisque $S(0) = I$ alors nécessairement $M \geq 1$).

Preve :

1) Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il existe $M_\alpha > 0$ telle que :

$$\|S(t)\| \leq M_\alpha , \quad \forall t \in [0, \alpha] \tag{1.12}$$

En effet, si l'assertion était inexact,

il existerait une suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \longrightarrow t_0$ telle que :

$$\|S(t_n)\| \geq n.$$

Alors d'après la théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus. Comme $\{S(t_n)\}_{t\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée,

il existe au moins $x_0 \in H$ tel que la suite $\{\|S(t_n)\,x_0\|_H\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée, ce qui est en contraction avec la troisième partie de la proposition 1.

2) Pour t fixé $t > 0$, $s > 0$ et $x \in H$ on a :

$$\|S(t+s)\,x - (t)\,x\| \leq \|S(t)\|\,\|S(t)\,x - x\|\,.$$

Donc :

$$\underset{s\longrightarrow 0^+}{Lim}\|S(s)\,x - x\| = 0,$$

implique

$$\underset{t\longrightarrow 0^+}{Lim}\|S(t+s)\,x - S(t)x\| = 0,$$

et la continuité à droite est prouvée.

Pour montrer la continuité à gauche, soit $0 < s < t$, on a :

$$\|S(t-s)\,x - S(t)x\| \leq \|S(t-s)\|\,\|S(s)\,x - x\| \leq M_\alpha\,\|S(s)\,x - x\|$$

d'où la continuité annoncée.

3) D'apres 1 $\|S(t)\| \leq M_1,\ \forall t \in [0,1]$, si maintenant t et quelconque

de partie entier m, on a :

$t = m + \tau$, $0 \leq \tau < 1$ et $S(t) = S(m)\,S(\tau) = [S(1)]^m\,S(\tau)$

donc :

$\|S(t)\| \leq \|S(1)\|^m\,\|S(\tau)\| \leq M_1^t$

$M_1 \leq M \exp \omega t$ avec $\omega = LogM_1$

Définissons à présent une catégorie de semi-groupe très utile par la suite.

Définition 1.3 :

Si$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de classe C^0 dans H, alors l'opérateur adjoint $\{S^\star(t)\}_{t\geq 0}$ est aussi un semi-groupe de classe C^0 dans H.

Définition 1.4 :

Si $\exists M \geq 0$, tel que $\|S(t)\| < M$ pour tout $t \geq 0$ le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est dit borné.

Définition 1.5 : «semi-groupe de contraction de classe C^0»

Un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C^0 est appelé semi-groupe de contraction de classe C^0 si l'on a :

$$\|S(t)\| < 1 \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0. \tag{1.13}$$

Définition 1.6 : «Type d'un semi-groupe»

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$un semi-groupe de classe C^0 dans H.

La borne inférieur ϖ de l'ensemble des ω (avec $\omega \in \mathbb{R}$) tels qu'il existe un nombre M_ω vérifiant :

$$\|S(t)\| \leq M_\omega \exp \omega t \quad , t \geq 0$$

est appelé «le type» d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

On remarque que le type ϖ du semi-groupe est indépendant du choix de la norme sur H.

Proposition 2 : [6]

Soit un semi-groupe de classe C^0 et ϖ son type, alors on a :

i) $\varpi = \underset{t \longrightarrow +\infty}{Lim} \frac{1}{t} Log \|S(t)\|$

ii) $r(S(t)) = \exp \varpi t$

ou $r(S(t))$ désigne le rayon spectrale de l'opérateur $S(t)$.

Définition 1.7 :

On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C^0 Dans H, l'opérateur A défini par :

$$Ax = \underset{h \longrightarrow 0^+}{Lim} \frac{S(h)x - x}{h} \quad \text{pour} \quad x \in D(A) \tag{1.14}$$

ou $D\left(A\right)$ est le domaine de définition, donné par :

$$D\left(A\right)=\left\{x\in H,\text{si }\underset{h\longrightarrow 0^{+}}{Lim}\frac{S\left(h\right)x-x}{h}\text{ existe}\right\}.$$

Le générateur infinitésimal de $\left\{S^{\star}\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ est $(A^{\star},D(A^{\star}))$.

Théorème 1 :

Soit $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^{0} sur H de générateur infinitésimal A.

Alors :

i) $D(A)$ est dense dans H.

ii) A est fermé.

iii) $\forall x\in D(A)$, $S\left(.\right)\in C^{1}\left(\left]0,+\infty\right[;H\right)\bigcap C\left(\left[0,+\infty\right[;D(A)\right)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}S(t)x=AS(t)x=S(t)Ax,\ \forall t\geq 0.$$

Preuve :

i) $D(A)$ est dense dans H.

Cela découle des remarques suivantes :

D'abord, pour tout $x\in H$ et tout $t\geq 0$,

$$\underset{h\longrightarrow 0}{Lim}\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}S(s)xds=S(t)x$$

qui est une conséquence immédiate de $S\left(.\right)x\in C\left(\left[0,+\infty\right[;H\right).$

En suite, pour tout $x\in H$ et pour tout $t>0$,

$$y=\int_{0}^{t}S\left(s\right)xds\in D(A).$$

En effet, par définition du générateur, il suffit de vérifier que :

$$\underset{h\longrightarrow 0}{Lim}\frac{1}{h}\left[S\left(h\right)y-y\right]\ \text{ existe.}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)y-y}{h} &= \frac{1}{h}\left(S(h)\int_0^t S(s)xds-\int_0^t S(s)xds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^t S(h+s)xds-\int_0^t S(s)xds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(s)xds-\int_0^t S(s)xds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} S(s)xds-\int_0^t S(s)xds\right).
\end{aligned}$$

Donc, d'après la remarque précédente, $\underset{h\longrightarrow 0}{Lim}\frac{1}{h}S(h)y-y=S(t)x-x$ et $\int_0^t S(s)xds\in D(A)$.

On a donc aussi $\frac{1}{t}\int_0^t S(s)xds\in D(A)$ et comme $x=\underset{h\longrightarrow 0}{Lim}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)xds$,

on déduit que $\overline{D(A)}=H$.

Remarquer au passage, que l'on a établi la formule

$A\int_0^t S(s)xds=S(t)x-x,\ x\in H,\quad \forall t\geq 0$

ii) A est fermé.

Soit $(x_n)\subset D(A)$ telle que :

$$x_n\longrightarrow x$$

et

$$Ax_n\longrightarrow y.$$

Admettons momentanément la propriété

$$x\in D(A)\implies S(t)x\in D(A),\ \forall t\geq 0. \tag{1.15}$$

Dans ce cas, on a :

$$A\int_0^t S(s)xds=\int_0^t S(s)Axds=S(t)x-x,\ x\in D(A)$$

pour tout $x\in D(A)$ et tout $t\geq 0$.

En particulier :

$$S(t)x_n-x_n=\int_0^t S(s)Ax_nds.$$

On en dédeuit par passage à la limite

$$S(t)\,x - x = \int_0^t S(s)yds.$$

Et en utilisant (i) que :

$$\underset{t \longrightarrow 0}{Lim} \frac{S(t)\,x - x}{t} = y$$

Par conséquent :

$$Ax = y.$$

Pour finir, il suffit de prouver (1.15).
Or

$$\begin{aligned} \underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \frac{S(h)\,S(t)x - S(t)x}{h} &= S(t)\,\underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \frac{S(t)\,x - x}{h} \\ &= S(t)\,Ax = AS(t)\,x. \end{aligned}$$

$iii)$ Soit $x \in D(A)$ et posons

$$y(t) = S(t)\,x.$$

Par un calcul qui a déjà été fait :
On a d'abord pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \frac{S(t+h)\,x - S(t)\,x}{h} \\ &= S(t)\,Ax. \end{aligned}$$

Et on sait que $S(.)\,Ax \in C([0. + \infty[\,, H)$.
Donc

$$y \in C^1(]0, +\infty[\,; H).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|y(t+h) - y(t)\|_{D(A)} &= |y(t+h) - y(t)| + |Ay(t+h) - Ay(t)| \\ &= |S(t)[S(h)\,x - x]| + |S(t)[S(h)\,Ax - Ax]|. \end{aligned}$$

D'où

$$\underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \|y(t+h) - y(t)\|_{D(A)} = 0 \text{ et } y \in C([0. + \infty[\,; D(A)).$$

Il découle immédiatement que :

Corollaire 1 :

Soit$\{S\,(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 sur H de générateur infinitésimal $(A, D(A))$.

Alors :

Pour tout $x \in D\,(A)$ le système :

$$\begin{cases} y' = Ay. \\ y\,(0) = x, \end{cases}$$

A une unique solution $y \in C^1\,(]0, +\infty[\,; H) \bigcap C\,([0, +\infty[\,; D(A))$

donnée par :

$$y\,(t) = S\,(t)\,x.$$

On s'intéresse à présent à la réciproque du résultat précédent :

Étant donné un opérateur $(A, D(A))$,

et à quelles condition est - il générateur d'un semi-groupe de classe C^0 sur H ?

La réponse complète est donnée par le théorème de "Hille Yoshida" que nous énonçons sans démonstration.

Théorème 2 : «*HilleYoshida* » [7]

Soit $(A, D(A))$ un opérateur sur H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $D(A)$ est dense dans H et il existe $\omega \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $\lambda > \omega$,

l'opérateur $\lambda I - A$ est inversible (d'inverse borné) et que :

$$\|R_\lambda^m\,(A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

2. Alors $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0 vérifiant :

$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \exists M \geq 1, \|S\,(t)\|_{L(H)} \leq M \exp \omega t, \quad \forall t \geq 0$$

Un résultat très utilisé en pratique est le suivant :

Théorème 3 : «*Lumer-philips*» [7]

Soit A un opérateur linéaire, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur H.

2) A est maximal dissipatif.

3) $A^\star$ est maximal dissipatif.

Théorème 4 : «Cas auto-Adjoint» [6]

Soit $(A, D(A))$ un opérateur maximal dissipatif et symétrique sur un espace de Hilbert H.

Alors :

1) A est auto-Adjoint.

2) Pour tout $x \in H$, il existe une unique fonction

$$y \in C\left([0,+\infty[\,;H\right) \bigcap C\left(]0,+\infty[\,;D(A)\right) \bigcap C^1\left(]0,+\infty[\,;H\right)$$

solution de :

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ y\left(0\right) = x. \end{cases} \tag{1.16}$$

De plus

$$y \in C^{\infty}\left(]0,+\infty[\,;D(A^j)\right), \forall j \in \mathbb{N}.$$

Noter ici que par définition :

$$D(A^j) = \left\{y \in D\left(A^{j-1}\right); Ay \in D\left(A^{j-1}\right)\right\},$$

pour tout $j \geq 2$ avec $D\left(A^1\right) = D\left(A\right)$

1.2.3 Semi-groupes différentiables

On désigne par X un espace de Banach et $\{S\left(t\right)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés dans X.

Définition 1 :

Un semi-groupe $\{S\left(t\right)\}_{t\geq 0}$ de classe C^0 dans X est dit différentiable pour $t > t_0$.

Si pour tout $x \in X$, la fonction :

$$t \rightarrow S(t)x$$

est différentiable pour $t > t_0$.

Le semi-groupe $\{S\left(t\right)\}_{t\geq 0}$ est dit différentiable si $t_0 = 0$.

Notons si $S(t)x$ est différentiale pour tout $x \in X$ et $t > 0$, alors $D(A) = X$ et A est nécessairement un opérateur borné d'aprés le théorème du graphe fermé.

Remarquons qu'un semi-groupe nul pour $t > t_0$ est évidemment différentiable pour $t > t_0$ ce qui montre que cette notion de différentiabilité pour $t > t_0$ n'est pas fondamental.

Elle est utile simplement pour préparer l'étude des semi-groupes différentiable pour $t > t_0$ qui, eux, sont fondamentaux.

Proposition 1 : [20]

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 différentiable pour $t > t_0$ et A son générateur infinitésimal, dans X.

Alors :

i) Pour $t > t_0$,

$$S(t) : X \to D(A)$$

et

$$S'(A) = AS(t) : X \to X$$

sont des opérateurs bornés.

ii) Pour $t > t_0$, $tS(t)$ est continu dans $L(X)$.

iii) Pour $t > nt_0$, $t \to S(t)x$ est n fois différentiable pour chaque $x \in X$ et

$$S^{(n)}(t) = A^n S(t). \tag{1.17}$$

De plus, pour $t > (n+1)$, $t \to S^{(n)}(t)$ est continu dans $L(X)$.

Corollaire 1 : Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 différentiable pour $t > t_0$ dans X.

Si $t > (n+1)$ alors $t \to S^{(n)}(t)$ est différentiable au sens de $L(X)$.

Corollaire 2 : Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe différentiable pour dans X,

alors $t \to S(t)$ indéfiniment différentiable dans $L(X)$ pour $t > 0$.

Proposition 2 : [20] Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe différentiable A son générateur infinitésimal dans X.

Alors :

$$S^{(n)}(t) = \left[AS(\frac{t}{n})\right]^n = \left[S'(\frac{t}{n})\right]^n.$$

Remarque 1 : Un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est différentiable pour $(t > 0)$ si et seulement si :

$$S(t)X \subset D(A), \forall t > 0$$

(ou encore si et seulement si $AS(t)$ est un opérateur borné).

Si un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est différentiable pour $t > t_0$ alors :

pour tout $x \in X$,

$$S(t_1)x \in D(A)$$

pour tout $t > t_0$

Il en résulte que $S(t_1)X \subset D(A)$.

Si A n'est pas un opérateur borné, $S(t_1)$ ne peut donc pas avoir d'inverse.

Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ne peut donc pas être prolongé a un groupe.

1.2.4 Semi-groupes Holomorphes

Définition 1 :

Soit X un espace de Banach complex.

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$.

Un famille $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ d'elément $S(z) \in L(X)$ forme une semi-groupe dans X holomorphes dans Δ,

si elle vérifie les conditions suivantes :

i) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ pour tout $z_1,\, z_2 \in \Delta$.

ii)

$$S(0) = I \;\text{ identité dans }\; X. \tag{1.18}$$

iii) $\lim\limits_{z\to 0, z\in\Delta} S(z)x = x$ pour tout $x \in X$.

iv) L'application $z \in \Delta^* = \Delta / \{0\} \to S(z)x \in X$ est holomorphe $\forall x \in X$.

Nous allons étudier la possibilité pour un semi-groupe de classe C^0, $\{S(t)\}_{t>0}$ d'être prolongeable en un semi-groupe holomorphe dans un angle

"secteur angulaire" du type Δ.

(contenant le demi-axe réel positif).

Remarque 1 :

Comme la miltiplications par $exp(\omega t)$ d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t>0}$ est sons effet sur la possibilité.

Ou l'impossibilité d'éffectuer un tel prolongement, nous allons nous restrindre dans le début de cette section au cas de semi-groupe $\{S(t)\}_{t>0}$ uniformément bornés i.e. vérifiant :

$$\|S(t)\| \leq M. \tag{1.19}$$

Le résultat relatifs au cas générale des semi-groupes de classe C^0 se déduisent du classe C^0 uniformément bornés.

Remarque 2 :

Pour un semi-groupe vérifiant :

$$\|S(t)\| \leq M$$

nous voyons que l'opérateur R(p) défini par :

$$R(p)f = \int_0^\infty S(t)f\exp(-pt)dt$$

vérifie l'égualité :

$$\|R(p)\| \leq \frac{M}{\lambda}$$

pour tout

$$\lambda = R(p) > 0.$$

Cela entraîne que dans le dommaine $\sum_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta$ constantes positives quelconques, α et $\beta > 0)$ contenu dans le demi-plan complexe $Re\,(p) > 0$ défini par :

$$\sum_{\alpha,\beta} = \{(\lambda,\mu)\,,\ \lambda \geq \beta\,|\mu|\,, |p| > \alpha,\ p = \lambda + i\mu\}\,.$$

Il existe une constante $M_1 > 0$ (dépendant de $\alpha,\ \beta$ et $M_1 > M$) telle que :

$$\|Re\,(p)\| \leq \frac{M_1}{1+|p|}.$$

En effet dans $\sum_{\alpha,\beta}$, on a : $\lambda \geq m \overset{déf}{=} \alpha\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$donc :

$$\frac{\lambda}{m} \geq 1 \text{ et } |p| = \left(\lambda^2+\mu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda \equiv K\lambda$$

avec K et constante > 0,

donc :

$$1+|p| \leq \left(K+\frac{1}{m}\right)\lambda,$$

et finalement :

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{1+|p|}\left(K+\frac{1}{m}\right) \leq \frac{M_1}{1+|p|}.$$

Ainsi, à partir de l'inégalité $\|Re\,(p)\| \leq \frac{M}{\lambda}$, on obtient l'inégalité (apparemment) plus forte $\|Re\,(p)\| \leq \frac{M_1}{1+|p|}$en

restreignante le domaine de p, du demi-plan complexe $Re\,(p) > 0$, à $\sum_{\alpha,\beta}$.

Nous allons voir qu'il y a des cas ou le domaine dans lequel $R\,(p)$ vérifie une telle inégalité peut être étendu et contenir un demi-plan àdroite $\{p \in \mathbb{C}; Re\,(p) \equiv \lambda > \lambda_0\}$.

Théorème 1 : [20]

Soit $\{S\,(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0, uniformément bornés(i.e.vérifiant (1.19)) , A son générateur infinitésimal, dans X.

Les propriété suivantes sont équivalentes :

i) Si $p = \lambda + i\ \mu$,

$$\underset{|\mu|\longrightarrow\infty}{Lim} \sup\left(|\mu|\,\|R\,(1+i\mu)\|\right) < +\infty \left(\text{resp.} \sup_{\lambda>0,\ \mu\ \in\mathbb{R}} \left(|\mu|\,\|R\,(p)\|\right) < +\infty\right). \tag{1.20}$$

ii) Si $\rho\,(A) = \left\{p \in \mathbb{C};\ (A-pI)^{-1} \text{existe}\right\}$, il exite des constantes $a,\ b > 0,\ M_1 > 0$ $\left(\text{resp } \omega,\ 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, M\,'_1 > 0\right)$ telles que :

$$\rho\,(A) \supset \sum = \{p; Re\,(p) > a - b\,|Im\ p|\}$$

$$\left(\text{resp } \rho\,(A) \supset \sum_{0,\omega} = \left\{p, |\arg p| < \frac{\pi}{2}+\omega\right\}\right). \tag{1.21}$$

et pour $p \in \sum \left(\text{resp } \sum_{0,\omega}\right)$:

$$\|R(p)\| \leq \frac{M_1'}{1+|p|} \quad \left(\text{resp} \;\; \|R(p)\| \leq \frac{M_1'}{|p|}\right). \tag{1.22}$$

$iii)$ $\{S(t)\}$ est différentiable pour $t > 0$ et

$$\underset{t \longrightarrow 0}{Lim} \sup t \, \|AS(t)\| < +\infty. \tag{1.23}$$

$vi)$$\{S(t)\}$ est prolongeble en un semi-groupe holomorph dans un angle Δ contenant le demi-axe réel positif,

et $\{S(t)\}$ est uniformément borné d'un bas un (sous) angle du même type.

Théorème 2 : [7]

Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe différentiable (pour $t > 0$) . Si :

$$\underset{t \longrightarrow 0}{Lim} \sup t \, \|AS(t)\| < \exp(-1).$$

Alors A est borné, et par coséquent $\{S(t)\}$ peut être étendu en un (semi)-groupe holomorph dans le plan complexe tout entier.

Théorème 3 : [7]

Soit A un opérateur fermé, de domaine dense dans un espace de Banach X.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$i)$$\exists a \in \mathbb{R}$, ω avec $0 \leq \omega < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{resp } 0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$, $M > 0$ telle que :

$$\rho(A) \supset \sum_{a,\omega} = \left\{p \in \mathbb{C}; |\arg(p-a)| \leq \frac{\pi}{2} + \omega\right\} \|R(p)\| < \frac{M}{1+|p|}, \;\; \forall p \in \sum_{a,\omega}, \tag{1.24}$$

$ii)$ A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ différentiable pour $t > 0$, vérifiant (1.23)

Exemple :Le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$

On considère

$$X = \left\{u; u \in L^2(\mathbb{R}^n), \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}. \tag{1.25}$$

On a que Δ ainsi défini est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

On a la :

Proposition 1 : [20] L'opérateur Δ de domaine défini par (1.25) est le générateue infinitésimale d'un semi-groupe holomorph, dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2 : [20]

Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert complexe X, et tel que l'opérateur $(-A)$ est borné inférieurement.

Alors le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ engendré par A s'étend en un semi-groupe holomorph $\{S(t)\}$ dans le demi plan $Rez > 0$

tel que, en désigne par $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ le groupe unitaire engendré par iA,

on ait pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$LimS(z)f = S_0(t)f, \forall f \in X.$$

Théorème 4 : [9]

Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans un espace de Banach complexe X, et tel que $(-A)$ vérifie la condition (1.24)

avec $a = 0$.

Alors le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal $(-A)$ vérifie:

1) $S(t) : X \longrightarrow D(A^\alpha) = (ImA^{-\alpha})$ pour tout $t > 0$ et tout $\alpha > 0$.

2) pour tout $x \in D(A^\alpha)$on a :

$$S(t)A^\alpha x = A^\alpha S(t)x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

3) pour tout $t > 0$ l'opérateur $A^\alpha S(t)$ est borné et

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} \exp(-\delta t), \alpha > 0.$$

4) pour $\alpha \in]0, 1]$ et $x \in D(A^\alpha)$ on a :

$$\|S(t)x - x\|_X \leq C_\alpha t^{-\alpha} \|A^\alpha x\|_X.$$

1.2.5 semi-groupes compact

Définition et premières propriétés

Définition 1 :

Un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\,\geq 0}$ de classe C^0 dans X un espace de Banach,
est dit compact pour tout $t > t_0$, si :
$S(t)$ est un opérateur compact dans X.
Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\,\geq 0}$ est dit compact si $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$.

Remarque 1 :

Si $S(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors en particulier l'identité I est un opérateur compact et X est nécessairement de dimention finie.

Proposition 1 : [20]

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0, dans X.
Si pour $t_0 > 0$ l'opérateur $S(t_0)$ est compact, alors $S(t)$ est compact pour $t \geq t_0$.

Théorème 1 : [20]

Soit $\{S(t)\}_{t\,\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0, dans X.
Si $\{S(t)\}$ est compact pour $t > t_0 > 0$, alors $t \longrightarrow S(t)$ est continue dans $L(X)$ pour $t > t_0$.

Caractérisation des semi-groupe compacts

Rappelons qu'il est d'usage de noter $R(\lambda, A)$ l'opérateur résolvant de A
qui est défini par :

$$R(\lambda, A) = (-A + \lambda I)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, S(t)\, dt.$$

pour $\lambda \in \rho(A)$.

Théorème 2 : [7]

Soit $\{S(t)\}$ un semi-groupe de classe C^0, et A son générateur infinitésimal.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{S(t)\}$ soit compact est que l'on ait :

$$\left\{\begin{array}{c} i)t \longrightarrow S(t) \text{ continue dans } \mathrm{L}(X). \\ \text{et} \\ ii)R(\lambda, A) \text{ compact pour tout } \lambda \in \rho(A). \end{array}\right. \tag{1.26}$$

Corollaire 1 :

Soit $\{S(t)\}$ un semi-groupe de classe C^0, A son générateur infinitésimal.

Si $R(\lambda, A)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(A)$ et si $t \longrightarrow S(t)$ est continue dans $L(X)$ pour $t > t_0$, alors $\{S(t)\}$ est compact pour $t > t_0$

Corolaire 2 :

Soit $\{S(t)\}$ un semi-groupe de classe C^0 tel que son générateur infinitésimal A soit borné.

Alors $\{S(t)\}$ est compact si et seulement si $R(\lambda, A)$ est compact pour tout $p \in \rho(A)$.

Remarque 2 :

La caractérisation des semi-groupes compacts donnée n'est pas satisfaisante en ce sens qu'elle ne caractérise pas un semi-groupe compact en termes des propriétés de son générateur infinitésimal A.

La raison de ceci est que l'on connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes ne faisant intervenir que les propriétés de A ou de $R(\lambda, A)$, qui assurent la continuité de $t \longrightarrow S(t)$ dans $L(X)$ pour $t > 0$ (la théorème de Hille Yoshida n'assure que la continuité de la fonction $t \longrightarrow S(t)\, x \in X$).

Une condition nécessaire pour que $t \longrightarrow S(t)$ soit continue dans $L(X)$ pour $t > 0$ est le théorème suivant :

Théorème 3 : [7]

Soit $\{S(t)\}$ un semi-groupe de classe C^0 et A son générateur infinitésimal.

Si $t \longrightarrow S(t)$ est continue dans $L(X)$ pour $t > 0$, alors il existe une fonction continue et croissant :

$$\Psi : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[\,,$$

telle que :

$$\{p; p = \lambda + i\ \mu, |\mu| \geq \Psi(|\lambda|)\} \subset \rho(A)\,, \tag{1.27}$$

et

$$\underset{|\mu| \longrightarrow +\infty}{Lim} \|R(p, A)\| = 0 \text{ pour tout réel } \lambda\,(p = \lambda + i\ \mu)\,. \tag{1.28}$$

Proposition 2 : [7]

Soit $\{S(t)\}$ un semi-groupe de classe C^0 et A son générateur infinitésimal.

Pour tout couple $\alpha, \beta, -\infty < \alpha \leq \beta < +\infty$, l'intersection de la bande

$$\{p = \lambda + i\ \mu; \alpha \leq \lambda \leq \beta\}$$

avec le spectre $\delta(A)$ de A contient au plus un nombre fini de valeurs propres de A.

Equations d'évolution

1 Données :

Soient V et H des espaces de Hilbert, V' est le dual de V, H' identifié à H et donc :

$$V \subset H \subset V'$$

On consider la famille des formes bilinéaires continues sur V :

$$\varphi, \psi \longrightarrow a(t; \varphi, \psi)$$

pour chaque $t \in \left]0, T\right[$.

Relativement à cette famille on suppose :

$$\forall \varphi, \psi \in V, \text{la fonction } \ t \longrightarrow a(t; \varphi, \psi) \text{ est mesurable sur } \left]0, T\right[\text{et}$$

$$|a(t; \varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\| \|\psi\| \tag{1.29}$$

et

Il existe λ tel que : $a(t;\varphi,\psi)+\lambda|\varphi|^2 \geq \alpha\|\varphi\|^2, \alpha>0, \forall\varphi\in V, t\in]0,T[.$ (1.30)

Pour chaque t, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} a(t;\varphi,\psi)=(A(t)\varphi,\psi), \\ A(t)\varphi\in V'. \end{array}\right. \tag{1.31}$$

la parenthèse désignant le produit scalaire V $'$et V.

On introduit l'espace $L^2(0,T;V)$ des fonctions $t\longrightarrow f(t)$ de $]0,T[\longrightarrow V$, mesurables et telle que :

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On définit de même $L^2(0,T;V')$ et note :

$$A(t)\in \pounds\left(L^2(0,T;V);\ L^2(0,T;V')\right). \tag{1.32}$$

i.e. : Si $f\in L^2(0,T;V)$, $A(t)f$ est la fonction $A(t)\,t\longrightarrow f(t)\in V'$

dont on vérifie qu'elle est mesurable et qui satisfait à :

$\|A(t)f(t)\|_{V'}\leq c\|f(t)\|_V$ (d'aprés (1.29)) d'ou (1.32).

Si f $\in L^2(0,T;V)$, on peut définir sa dérivée $\frac{df}{dt}$ de la facon suivante, on définit d'abord :

.

$$D'(]0,T[;V)=\pounds(D(]0,T[;V)) \tag{1.33}$$

espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans V ; donc si $f\in D'(]0,T[;V)$, pour tout $\varphi\in D(]0,T[)$, $f(\varphi)\in V$ est continue de $D(]0,T[)\longrightarrow V$.

On écrira (en notant les distributions comme des fonctions)

$$f(\varphi)=\int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt \tag{1.34}$$

intégrale généralisée à valeurs dans V.

On définit la dérivée $\frac{d\,f}{d\,t}$ par :

$$\varphi\longrightarrow\frac{df}{dt}(\varphi)=-f\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

ce qui définit bien une application linéaire continue de $D(]0,T[)\longrightarrow V$.

Donc :

$$\frac{df}{dt} \in D'\left(]0,T[\,;V\right).$$

On dit que :

$$f_n \longrightarrow f \text{ dans } D'\left(]0,T[\,;V\right).$$

Si

$$f_n\left(\varphi\right) \longrightarrow f\left(\varphi\right),\ \forall \varphi \in D\left(]0,T[\right).$$

Alors :

$$\frac{df_n}{dt} \longrightarrow \frac{df}{dt} \quad \text{dans} \quad D'\left(]0,T[\,;V\right).$$

Si $f \in L^2\left(0,T\right)$, on définit $f\left(\varphi\right)$ par (1.34) (intégrale de Lebesgue usuelle à valeurs dans V) et $\varphi \longrightarrow f\left(\varphi\right)$ est continue de $D\left(]0,T[\right) \longrightarrow V$.

On définit donc ainsi $\tilde{f} \in D'\left(]0,T[\,;V\right)$ et une application linéaire $\tilde{f} \longrightarrow f$ de $L^2\left(0,T;V\right) \longrightarrow D'\left(]0,T[\,;V\right)$

qui est continue et biunivoque ; on identifie donc $\tilde{f}$ à f et l'on a :

$$L^2\left(0,T;V\right) \subset D'\left(]0,T[\,;V\right). \tag{1.35}$$

Alors pour $f \in L^2\left(0,T;V\right)$ on peut donc définir

$$\frac{d\,f}{d\,t} \in D'\left(]0,T[\,;V\right).$$

On introduit alors :

$$W(0,t) = \left\{ f : f \in L^2(0,t,V), \frac{d\,f}{d\,t} \in L^2\left(0,T;V'\right) \right\}. \tag{1.36}$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{W(0,T)} = \left(\int_0^T \|f\left(t\right)\|^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{df}{dt} \right\|_{V'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.37}$$

Théorème 1 : [9]

Tout fonction $f \in W\left(0,T\right)$ est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $]0,T[\longrightarrow H$

On écrira en breuv :

$$W(0,T) \subset C^0(]0,T[\,;H) \text{ espace des fonctions continues de }]0,T[\longrightarrow H \tag{1.38}$$

Problème d'évolution :

On considère le problème d'évolution :

Trouver $y \in W(0,T)$ telle que :

$$A(t)\,y + \frac{dy}{dt} = f, \; f \;\text{ donné dans }\; L^2(0,T;V'), \tag{1.39}$$

et

$$y(0) = y_0, \; y_0 \text{ donné dans } \; H. \tag{1.40}$$

Théorème 2 : [9]

Si l'on suppose que (1.29) (1.30) ont lieu, le problème (1.39) (1.40) admet une solution unique dans $W(0,T)$

Quelque exemples : Les notations seront les suivantes :

$$\begin{cases} Q = \Omega \times]0,T[\,, \quad \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \\ \sum = \Gamma \times]0,T[\end{cases} \tag{1.41}$$

Γ : frontière de Ω,

$\sum$: frontière latérale de Q.

Exemple 1 : Soient $a_{i\,j}$ des fonctions données dans Q avec :

$$\begin{cases} a_{i\,j} \in L^\infty(Q)\,, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i\,j}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha\left(\xi_1^2 + ... + \xi_n^2\right), \alpha > 0, \xi_i \in \mathbb{R}, p.p.\text{dans } Q \end{cases} \tag{1.42}$$

Pour $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ on pose :

$$a(t;\varphi,\psi) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j}(x,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dx. \tag{1.43}$$

Prenons $V = H_0^1(\Omega)$

On est dans les conditions d'application du théorème qui donne : existe $y \in W(0,T)$ unique vérifiant

$$A\left(t\right)y+\frac{\partial\, y}{\partial\, t}=f \quad \text{dans } Q \ \text{ ou} A\left(t\right)y=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i\,j}\left(x,t\right)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right), \tag{1.44}$$

avec

$$y\left(x,0\right)=y_0\left(x\right) \ \text{ dans } \Omega. \tag{1.45}$$

La condition<<$y\in W\left(0,T\right)$>> signifie :

$$y\in L^2\left(0,T;V\right),\frac{\partial\, y}{\partial\, t}\in L^2\left(0,T;V'\right).$$

Mais si $y\in L^2\left(0,T;V'\right)$ et satisfait à (1.44) alors $\frac{\partial y}{\partial t}$ est dans $L^2\left(0,T;V'\right)$.

On peut donc garder seulement dans l'énoncé la condition <<$y\in L^2\left(0,T;V\right)$>>

ou encore :

$$\begin{cases} y,\ \frac{\partial\, y}{\partial\, x_j}\in L^2\left(Q\right), \\ \quad y=0 \text{ sur } \sum. \end{cases} \tag{1.46}$$

En résumé :

Sous l'hypothèse (1.42) il existe y unique satisfaisant à(1.44) (1.45) (1.46) lorsque f est donné $L^2\left(0,T;V'\right)$ et $y_{\,0}$ est donné $L^2\left(\Omega\right)$.

Exemple 2 : Même notations que dans l'exemple précédent mais avec $V=H^1\left(\Omega\right)$.

Pour ne pas commettre d'erreur dans l'interprétation de V', il est alors préférable de remplacer (1.39) par la forme équivalente :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}y\left(t\right),\psi\right)+a\left(t;y\left(t\right),\psi\right)=\left(f\left(t\right),\psi\right) \quad \forall\psi\in V. \tag{1.47}$$

Prenons :

$$f=f\left(x,t\right) \ \text{ donnée dans } L^2\left(Q\right), \tag{1.48}$$

et en définissons

$$\left(f\left(t\right),\psi\right)=\int_{\Omega}f\left(x,t\right)\psi\left(x\right)dx,\ \ \psi\in V.$$

On obtient ainsi en particulier un élément de $L^2\left(0,T;V'\right)$ et (1.47) s'interprète alors ainsi formellement

$$\frac{\partial y}{\partial t}+A\left(t\right)y=f \quad \text{dans } Q, \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v_A}=0 \text{ sur } \sum, \tag{1.50}$$

$$y\,(x,0) = y_0\,(x) \quad \text{sur } \Omega. \tag{1.51}$$

Remarque : Les problème (1.44) (1.45) (1.46) et (1.49) (1.50) (1.51) sont des problèmes mixtes (au sens de J. Hadamard)

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial\, t} + A\,(t)$ est un opérateur parabolique du deuxième ordre. On doit se donner, pour définir un problème aux limites bien posé :

(i) La codition initiale (1.45) ou (1.51).

(ii) Une condition aux limites sur la frontière latérale $\sum$; dans (1.50) c'est une condition de Dirichlet et c'est une condition de Neumann dans (1.50) ; il y a évidamment de nombreuses autres possibilités.

Chapitre 2

La contrôlabilité en dimension infinie

2.1 Systèmes considérés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (n=1, 2, 3,.pour les applications) de frontièr Γ réguliére, et soit $T > 0$ considérons le système donné de façon formelle par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y(t) = Ay(t) + Bu(t) & 0 < t < T, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

ou A génèrateur d'un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur l'espace d'etat

$$X = L^2(\Omega), B \in \pounds(U, X),$$

avec U est un espace de Hilbert séparable (espace de contrôle) et $u \in L^2(0, T; U)$.
L'opérateur A fournit la dynamique du système tandis que l'opérateur B nous renseigne sur la nature des actionneurs qui existent le système ainsi que sur leur localisation.

Si A est auto-adjoint à résolvante compact alors le système (2.1) admet une solution faible unique sera notée
$y_u(t)$ continue sur $[0, T]$ et donnée par :

$$y_u(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds.$$

Le problème de la contrôlabilité consiste à trouver un contôrle $u \in L^2(0, T; U)$ permet de transférer l'état y_0 vers un état désiré choisi à priori y_d.

2.1.1 Contrôlabilité exacte, faible et régionale

Définition 2.1 :

Le système (2.1) est dit contrôlable dans X sur $[0;T]$ si :

$$\forall y_d \in X \ \exists u \in L^2(0,T;U)$$

tel que :

$$y_u(T) = y_d.$$

Proposition 2.1 : (Contrôlabilité exacte)[19]

Le système(2.1) est exactement contrôlable dans X sur $[0;T]$ si et seulement si :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \text{ telque } \|y^\star\|_{X^\star}. \leq \gamma \|B^\star S^\star(.)\, y^\star\|_{L^2(0,T;U)} \forall y^\star \in X.$$

Pour montrer cette proposition on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1 : [4]

Soient $V,\ W,\ Z$ des espaces de Banach réflixifs, et $F \in \pounds(V,Z), G(W,Z)$ alors on a l'equivalence entre

1) $ImF \subset ImG$.

2) $\exists \gamma > 0$ tel que $\|F^\star z^\star\|_{V^\star} \leq \gamma \|G^\star z^\star\|_{W^\star}, \forall z^\star \in Z^\star$.

2.1.2 Contrôlabilité faible

Définition 2.2 :

Le système (2.1) est dit faiblement contrôlable dans X sur $[0,T]$ si :

$$\forall y_d \in X \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ u \in L^2(0,T;U)$$

tel que :

$$\|y_u(T) - y_d\|_X \leq \varepsilon.$$

Soit l'opérateur H défini par :

$$\begin{array}{ccl} H & : & L^2(0,T;U) \longrightarrow X, \\ u & \longrightarrow & Hu = \int_0^T S(T-s)\, Bu(s)\, ds. \end{array}$$

On a donc :

$$y_u(T) = S(T)\, y_0 + Hu.$$

Proposition 2.2 : [11]

Les propriétés suivant sont équivalentes :

Le système (2.1)est faiblement contrôlable.

1) $\overline{ImH} = X$

2) $Ker\ H^\star = KerHH^\star = \{0\}$

3) Si le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est analytique on a :

$$\overline{\underset{n\ \in \mathbb{N}}{\cup} Im\left(A^n S(s)\, B\right)} = X \forall s \in \left]0, T\right[.$$

Remarque 2.1 :

Pour les systèmes localiés les concepts d'exacte et faible contrôlabilité, sont identiques.

Définition 2.3 :

Soit : $G \subset X$ un ensemble non vide convexe et fermé.

On dit que le système (2.1) est exactement contrôlable d'une manière élargie dans G sur $[0;T]$ si :

$$\exists u \in L^2(0,T;U),$$

tel que :

$$y_u(T) \in G,$$

et on a contrôlabilité faiblement élargie dans G sur $[0;T]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists u \in L^2(0,T;U)\, \exists y \in G$$

tel que :

$$\|y_v(T) - y\|_X \leq \varepsilon.$$

2.1.3 Notion de l'actionneur

les actionneurs peuvent être de natur, de forme et de conceptions divers, ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés a l'intérieur du domaine Ω ou sur sa frontière Γ.

Définition 3.1 :

Soit D un partie non vide, fermée de Ω et $g \in L^2(D)$,

on appelle actioneur zon le couple (D, g) ou :

1- D représente le support de l'actionneur.

2- g représente la reparation spetiale.

Pour l'actionneur ponctuel ou frontière la définition reste la même.

Nous palerons : Actionneur zone frontière (Γ_0, g) ou $\Gamma_0 \in \Gamma$ et $g \in L^2(\Gamma_0)$

actionneur ponctuel (b, S_b) ou $b \in \Omega$ ou $b \in \Gamma$.

Définition 3.2 :

On dit que (D, g) ou (b, S_b) est stratégique si le système qu'il excite est faiblement contôlable.

Dans le cas de plusieure actionneurs $(D_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ ou (b_i, S_{b_i}).

On dira que la suite des actionneurs est stratégique si :

Le système qu'ils excitent est faiblement contrôlable.

2.1.4 Contrôlabilité régionale

Soit ω sous-domaine de Ω non vid et $y_d \in y_u(T)|_\omega$.

Le problème de la contrôllabilité régionale consiste à savoir s'il on peut trouver un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ premettant

d'amener le système (2.1) de y_0 à y_d sur la région ω.

L'etat residuel sur Ω/ω est sans importance.

Définitions et propriétés :

Définition 4.1 :

Le système (2.1) est dit exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur ω si :

pour tout

$$y_d \in L^2(\omega),$$

il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;u)$ tel que :

$$y_u(T) = y_d,$$

sur ω $\left(\forall y_d, \forall \varepsilon > 0, \exists u_\varepsilon \in L^2(0,T;u), \text{tel que } \|y_u(T)|_\omega - y_d\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon\right)$

ou $y_u(T)|_\omega$désine la restriction de $y_u(T)$ sur ω.

Le système sera aussi dit ω-exactement (ω-faiblement) contrôlable.

Remrques :

Les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'a l'état atteint sur la région ω.

Le contrôle u dépend de la variable de temps et la région ω.

Pour l'étude de la contrôlabilité régionale exacte et faible, sans perte de généralité on peut supposer que $y_0 = 0$

Soit $\chi_\omega : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\omega)$ définie par $\chi_\omega y = y|_\omega$

L'adjoint de χ_ω est $\chi_\omega^\star : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$.

$$(\chi_\omega^\star)(y) = \begin{cases} y(x) & x \in \omega, \\ 0 & x \in \Omega/\omega. \end{cases}$$

Proposition 4.1 : [19]

Le système (2.1) ω-exactement (resp faiblement) contrôlable si et seulement si :

$$Im\chi_\omega H + L^2(\omega) \quad (\text{resp.}\overline{Im\chi_\omega H} = L^2(\Omega)).$$

proposition 4.2 : [19]

1) Le système (2.1) ω-exactement contrôlable si et seulement si :

$$Ker\chi_\omega + ImH = L^2(\Omega). \tag{2.2}$$

2)Le système (2.1) est ω-faiblement contrôlable si et seulement si :

$$Ker\chi_\omega + \overline{ImH} = L^2(\Omega). \tag{2.3}$$

Remarque :

On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlable mais qui ne sont pas contrôlable sur tout le domaine, ceci est illustré par le contre-exemple suivant :

Contre-exemple : Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,t) + \chi_{[a,b]}u(t) \text{ sur }]0,1[]0,1[, \\ y(x,0) = 0 \quad \text{sur}]0,1[, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 \quad \text{sur}]0,T[. \end{cases} \tag{2.4}$$

Corollaire 4.1 :

Le système (2.4) n'est pas contrôlable sur $\Omega =]0;1[$ mais il peut être contrôlable sur une région $[\alpha, \beta]$ pour α, β convonablement choisis.

2.1.5 Contrôlablilité régionale et actionneurs

Dans cette section on fait apparaître le lien entre la Contrôlablilité régionale et la structure d'actionneurs.

Soit (D, g) l'actionneur de support D et de réparation spetiale g, qui exciter le système (2.1).

Définition 4.2 :

On dit que l'actionneur (D, g) est régionalement stratégique sur ω (ω-stratégique) si le système qu'il ´excité est ω-faiblement contrôlable.

On considéré que l'on a une suite $(D_i, g_i)_{i\ =1,p}$d'actionneurs excittent un système, avec D_i, fermée et bornée et

$$D_iD_j = \emptyset, \forall i \neq j,$$

ou

$$\begin{cases} D_i \subset \Omega, \text{dans le cas interne} \\ D_i = \{b_i\} \text{dans le cas ponctuel interne ou frontiére} \\ D_i = \Gamma_i = \Gamma \text{ au cas zone frontiére} \\ g_i \in L^2(D_i)\text{cas ponctuel} \\ g_i = \delta_{b_i}\text{cas zone} \end{cases}$$

Définition 4.3 :

La suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i\ =1,p}$ est dit ω-stratégique si le système qu'ils existent est ω-faiblement contrôlable.

On suppose qu'il existent un système complet de fonctions propres

$$(\varphi_{i,j})\, i = 1, \infty, j = 1, r_i.$$

de $L^2\left(\omega\right)$ telles que $\varphi_{i,j} \in L^2(\Omega)$ et λ_i les valeures propres associées de multiplicité r_i.

Et supposons aussi que $sup\ r_i = r < \infty$.

Sous ces hypothèses nous avons :

Théoréme 4.1 : [4]

Le système est régionalement faiblement contrôlable si et seulement si :

1) $p \geq r$.

2) $Rang\ G_n = r_n$, $\forall n = 1, \infty$

ou :

$$G_n = \left(G_n\right)_{i,j} \quad 1 \leq i \leq p \ \ , 1 \leq i \leq r_n,$$

avec :

$$\left(G_n\right)_{i,j} = \begin{cases} \left\langle \varphi_{n,j}, g_i \right\rangle_{D_i} \text{cas zone interne ou frontiére,} \\ \varphi_{nj}\left(b_i\right) \text{ cas ponctuel interne ou frontiére.} \end{cases}$$

Remarque :

De ce théorème le nombre d'actionneurs est au moins égale à :

$$r = \sup_n r_n$$

pour que le système soit contrôlable sur une régione ω.

Chapitre 3

Observabilité, Stabilisabilité, Détectabilité et capteurs

Nous considérons le système décrit par l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu & 0 < t < T. \\ z(0) = 0, & \end{cases} \tag{S}$$

Ou A engendre un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et B est linéaire borné de l'espace de contrôle U dans l'espace d'etat H.

3.1 Notion de capteur

Pour tout système, on se donne, généralement, les moyens de superviser son évolution. L'intermédiaire physique qui permet de recueillir des informations sur le système et son évolution est le "capteur".

Comme pour les actionneurs, on peut envisager divers types des capteurs.

Ainsi, si Ω représente la configuration géométrique du système modélisé par (S), des informations peuvent être recueillies :

◊ Dans des zones $D_i \subset \Omega$ ou $D_i \subset \partial\Omega$,

◊ en des poits $x_i^m \in \Omega$ ou $x_i^m \in \partial\Omega$,

◊ suivant des lines $L_i \subset \Omega$, ou $L_i \subset \partial\Omega$.

Le premier cas correspond à une lecture directe sur une partie D_i du domaine Ω.

Le deuxième cas représenter, par exemple, le cas d'une information fournie par un thermo-couple.

Enfin, le dernier cas est celui, par exemple, d'une lecture par miroir pivotant.

Mais, le plus souvent, les capteurs sont de type ponctuel.

Dans le cas des capteurs zones, nous supposons évidemment, dans ce qui suit, que le support D_i du capteur est d'intérieur non vid.

Definition 1 :

Soit D_i fermé $\subset \Omega$, et $f_i \in L^2(D_i)$.

On appelle capteur zone le couple (D_i,f_i) où :

-D_i représente le support du capteur.

- f_i définit la répartition spatiale de l'information sur D_i.

Definition 2 :

Soit $x_i^m \in \Omega$, on appelle capteur ponctuel le couple $(x_i^m, \delta_{x_i^m})$. où $\delta_{x_i^m}$ est la masse de Dirac au poit x_i^m.

Les capteurs ponctuels correspondent souvent dans les systemes de diffusion à des thermocouples.

Remarque 1 :

Dans le cas d'informations recueillies sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω, les définitions sont identiques avec $f_i \in L^2(F_i)$ où $F_i \subset \partial\Omega$ pour le cas zone, et $x_i^m \in \partial\Omega$ pour le cas ponctuel frontière.

Fonction de sortie :

Supposons que, sur le système (S), nous recueillons des mesures pendant l'intervalle de temps $[0.T_m]$ par l'intermédiaire de q capteurs $(D_i,f_i)_{1 \leq i \leq q}$.

La fonction de sortie est :

$$y(t) = Cz(t),\ 0 \leq t \leq T_m \qquad (E)$$

avec les hypothèses :

$C \in L(H,R^q)$ (dans le cas non borné, il faut supposer que $D(C)$ est contenu dans H et qu'il est invariant par le semi-group $\{S(t)\}_{t \geq 0}$).

$$y \in L^2(0,T;R^q)$$

y est une fonction vectorielle définie sur $[0.T_m]$ par :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f_1, z(t) \rangle_{L^2(D_1).} \\ . \\ . \\ . \\ \langle f_q, z(t) \rangle_{L^2(D\ q).} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Si A possède un système orthonormé complet de fonctions propres (Φ_n) , alors on a :

$$z(t) = \sum_n z_{\ n}(t)\,\Phi_n$$

et donc $y(t)$ est un vecteur de dimension q dont la composante d'indice i est donnée par :

$$y_i(t) = \sum_n z_{\ n}(t)\,\langle f_i, \Phi_n \rangle_{L^2(D_i)}$$

pour $i = 1, ..., q$.

Dans le cas où les capteurs sont de type ponctuel, nous avons :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n z_{\ n}(t)\,\Phi_n(x_1^m) \\ . \\ . \\ . \\ \sum_n z_{\ n}(t)\,\Phi_n(x_q^m) \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

3.2 Notion d'observabilité :

L'état d'un système distribué ne peut pas être directement mesuré d'un poit de vue physique. Le problème qui se pose alors est celui de la reconstruction d'un tel état à partir des mesures effectuées sur le système pendant un intervalle de temps donné : c'est le problème de l'observabilité.

Mais, connaissant la dinamique du système et la fonction de commande, il suffit de pouvoir reconstruire l'état initial z(0).

Par ailleurs, les systèmes considéré étant linéaires, la solution du système s'obtient en ajoutant au régime libre avec $z\ (0) \neq 0$ (a déterminer), le régime forcé correspondant à une entrée u et un état initial nul.

Nous pouvons donc supposer, pour résoudre le problème de l'observabilité, que le système est autonome.

La connaissance de l'état initial est nécessaire pour démarrer tout algorithme de contrôle sur le système. Habituellement, on laisse le système en évolution libre pendant un certain intervalle de temps $[0.T_m]$ pendant le quel on effectue des mesures par l'intermédiaire des capteurs.

Ensuite, on utilise ces mesures pour la reconstruction de l'état initial.

La longueur de l'intervalle $[T_m, Tc]$ est fonction du volume des calculs à effectuer et des moyens dont on dispose pour le faire.

Donc, pour un système donné, on peut supposer que $(Tc - T_m)$ est fixé.

Mais alors comment localliser l'intervalle $[T_m, Tc]$ dans $[0.T]$.

Toutes les simulations effectuées sur divers types des systèmes montrent, de facon attendue, que :

- La précision sur l'état initial estimé $z(0)$ croit avec T_m.

-L'énergie dépensée sur l'intervalle de commande $[Tc, T]$ est une fonction décroissant de $T - T\ _c$.

Supposons donc que q capteurs fournissent des informations sur le systéme (S), supposé autonome, pendant l'intervalle de mesure $[0.T_m]$.

Nous avons :

$$y(t) = Cs(t)z(0) = K(t)z(t). \tag{3.3}$$

Le problème de l'observabilité revient donc à celui de l'éxistence d'un opérateur :

$$G : Y \longrightarrow H$$

tel que :

$$z(0) = Gy.$$

L'équation (3.3) fait apparaitre l'opérateur K.

$$K : H \longrightarrow L^2\left(0, T_m; O\right) = Y,$$

K est linéaire borné, et il est facile de voir que :

$$K^\star : L^2\left(0, T_m; O'\right) \longrightarrow X',$$

est donné par :

$$K^{\star}z = \int_{0}^{T_m} S^{\star}(t)\, C^{\star} z(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Comme pour la controlabilité, la différence avec le cas des systèmes localisés vient du fait que, sous certaines condition, nous ne pourrons pas observer n'importe quel état initial z_0 , mais observer des états aussi proches de z_0 qu'on le souhaite.

Introduisons alors les définitions suivantes :

Définition 3 : Exacte observabilité

Le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) est dit exactement observable sur $[0.T_m]$ si :

$$H' \subset Im\,(K^{\star})\,.(3.5)$$

Définition 4 : Faible observabilité :

Le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) est dit faiblement observable sur $[0.T_m]$ si :

$$Ker(K) = \{0\}\,. \tag{3.6}$$

Remarque 2 :

On peut également parler d'éxacte observabilité dans l'éspace $H \subset H_1$,
quand $H'_1 \subset Im\,(K^{\star})$

dans la suite, nous parlerons indiffèremment de système (S) observable ou bien paire $(A, C$ $)$ observable.

Propriete 1 : caratérisation de l'exacte observabilité.

Le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) est exactement observable sur $[0.T_m]$ si et selement si :

$$\exists\gamma > 0 telque : \|z_0\|_X < \gamma \, \|Kz_0\|_{L^2(0,T_m;R^{\,q}\,)} \tag{3.7}$$

pour tout z_0 dans H.

Propriete 2 : caratérisation de la faible observabilité.

Il y équivalence entre :

(a) . (S), (E) faiblement observable.

(b) . $\overline{Im(K^\star)} = I\overline{m(K^\star K)} = H'$.

(c) . $\overline{\underset{0 \leq t \leq T}{\cup} Im\left(S^\star\left(t\right)C^\star\right)} = X'$.

En fait, nous avons un résultat de caractirisation identique à celui de la propriété :

Propriete 3 : Reconstruction de l'état initial.

Le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) est exactement (respectivement faiblement) observable sur $[0.T_m]$ si et seulement si l'opérateure N $(N = K^\star K)$ est défini positif (respectivement positif).

3.2.1 Capteurs strategiques :

Comme pour la notion de controlabilité, nous allons voir que l'observabilité d'un système peut être affectée par le choix des capteurs (nombre, localisation, répartition spatiale).

Considérons toujour le système (S) :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu & 0 < t < T, \\ \qquad z(0) = 0. \end{cases} \tag{S}$$

augmenté de l'équation de sortie (E) :

$$y(t) = Cz(t), 0 \leq t \leq T_m. \tag{E}$$

où les diver paramètres vérifient les même hypothèses qu'au paragraphe précédent.

Et soit :

Ω le domaine géométrique du système modélisé par (S).

D une partie fermée de Ω où $\partial\Omega$ sa frontière, et $f \in L^2(D)$.

$[0, T_m]$ un intervalle de mesure.

Supposons que les mesures sont faites par l'intermédiaire du seul capteur (D, f).

Ainsi, d'après (1.2) :

$$y(t) = \langle f, z(t)\rangle_{L^2(D).}$$

et si un système orthonomé complet de fonctions propres pour A, nous avons :

$$y(t) = \sum_n z_n(t) \langle f, \Phi_n \rangle_{L^2(D)} .$$

Définition 5 :Capteur stratégique

Nous dirons que le capteur (D, f) est stratégique si le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) correspondante est faiblement observable sur $[0.T_m]$.

Remarqe :

La définition est la même dans le cas de capteur ponctuel, avec D réduit au point x^m et $f = \delta_{x^m}$.

Dans le cas q capteurs, nous dirons que :

La suite de capteurs $(D_i, f_i)_{1 \leq i \leq q}$ est stratigique si le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) correspondante est faiblement observable sur $[0.T_m]$.

Pour les systèmes à paramètres répartis, la notion d 'exacte observabilité est,

en général, trop forte.

C'est pourquoi nous avons adopté celle de faible observabilité pour la définition des capteurs stratégique.

3.3 Stabilisabilité et détectabilité

3.3.1 Notions de stabilisabilité et de détectabilité

Une des considérations les importans dans l'analyse et le contrôle des systèmes est celle de la stabilisabilité.

Considérons le système (S) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu & 0 < t < T, \\ z(0) = 0. & \end{cases} \tag{S}$$

où A vérifie l'hypothèse (H_3), A est auto-adjoint, à résolvant compacte et engendre un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur H.

Definition 1 : Semi-groupe exponentiellement stable.

Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives M et ω telles que :

$$\|S(t)\| \leq M \exp(-\omega t) \quad , t \geq 0. \tag{3.8}$$

Notans que si $\{S(t)\}_{t\ \geq 0}$ est un semi-groupe exponentiellement stable alors, pour tout Z_0 dans H, la solution du système autonome :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} = AZ, \\ Z(0) = Z_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Vérifie :

$$\|Z(t)\| = \|S(t)Z_0\| \leq M \exp(-\omega t) \|Z_0\| .$$

3.3.2 Stabilisabilité

Définition 2 : Stabilisabilité.

Le système (S) est stabilisable (ou la paire (A, B) est stabilisable) s'il existe un contrôl en contre réaction :

$$u = -FZ \tag{3.10}$$

tel que $(A - BF)$ engendre un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\ \geq 0}$ exponentiellement stable.

Remarque 1 :

Le contrôle défini en (3.3) est un contrôle en retour d'état, et sa mise en oevre nécessite la connaissance de l'état du système pour $t > 0$. Ceci est peu vraisemblable d'autant plus que l'estimation de l'état par utilisation des informations fournies par les capteurs nécessite, pour de tel système, beaucoup de temps pendant lequel le système peut subir des perturbation.

Dans la théorie des systèmes linéaires de dimension finie nous savons qu'il y a une certaine équivalence entre la contrôlabilité et la stabilisabilité .

En dimension infinie, pour les systèmes de nature distribuée, la situation est beaucoup plus complexe.

Toute fois, on démontre que si l'on peut atteindre l'état nul, dans l'espace d'état H à l'instant T, par un certain contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ alors il est toujours possible de stabiliser le système.

Rappelons que l'état $\{0\}$ peut être atteint si :

$$\{0\} \subset Im(H). \tag{3.11}$$

où $H : L^2(0,T;U) \longrightarrow H$ est défini par :

$$Hu = \int_0^T S\left(T-\tau\right) Bu\left(\tau\right) d\tau,$$

et (3.4) est equivalent à proprité (1.1)

$\exists \gamma > 0$ tel que

$$\left\|B^\star S^\star\left(.\right) Z\right\|_{L^2(0,T;U')} \geq \gamma \left\|S^\star\left(T\right) Z^\star\right\| \tag{3.12}$$

pour tout $Z^\star \in H^{'}$

Pour les systèmes paraboliques, en général, la condition (3.5) est beaucoup moins restrictive que celle de l'éxacte contrôlabilité.

Voyons maintenant une caractérisation de stabilisabilité via la structur des actionneurs.

Stabilisabilité et actionneurs

Les notations sont celles utilisées précédemment :

$(\Phi_{n\,j})$ désine la base de fonctions propres de A et (λ_n) les valeurs propres associées, λ_n étant de multiplicité r_n.

Nous avons une caractérisation de la stabilisabilité par le choix des actionneurs, comparable au résultat de la proposition (1.2) concernant la controlabilité.

La différence réside dans le fait que l'on ne s'intéresse qu'à la partie du système correspondant au spectre de A à partie réelle positive.

Proposition : [2]

Supposons que le système (S) est existé par p actionneurs zones $(\Omega_i, q_i)_{1 \leq i \leq p}$ et que le spectre de A compt J valeurs propres non négatives. Alors le système (S) est stabilisable si et seulement si :

i) $p \geq \sup\limits_{1 \leq\, n\, \leq\, J} (r_n)$.

$ii)$ $rg(G_n) = r_n$ pour tout $n = 1, 2, ..., J$

où $(G_n)_{ij} = \langle q_i, \Phi_{nj} \rangle_{L^2\ (\Omega_i\ )}$ avec $i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., r_n$.

3.4 Détectabilité

La détectabilité est, en quelque sorte, la notion duale de celle de la stabilisabilité.

Considérons le système (S) :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu & 0 < \quad t < T, \\ \qquad z(0) = 0. \end{cases} \tag{S}$$

augmenté de l'équation de sortie (E) :

$$y(t) = Cz(t),\ 0 \leq t \leq T_m \tag{(E)}$$

Nous supposons toujours que les divers paramètres vérifient les hypothèses $(H_1)\,(H_2)\,(H_3)$.

Introduisons la définition suivante :

3.4.1 Définition : Détectabilité.

Le système (S) augmenté de l'équation de sortie (E) est dit détectable

(où la paire (A, C) est détectable s'il éxiste un opérateur :

$$K : O \longrightarrow H$$

tel que $(A - KC)$ engendre un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\ \geq 0}$ exponentiellement stable.

Il ne peut pas paraitre clair que la notion de détectabilité est importante pour un système.

La motivation essentielle de cette notion tient au fait que, pour un système détectable, il est possible de construire un estimateur asymptotique de l'état.

En effet, si on considère le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = Aw + Bu \quad + K\,(y - Cw) & 0 < t < T, \\ \qquad w(0) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

alors l'erreur $e = z - w$ satisfait :

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial t} = (A - KC)\,e, \\ \quad w\,(0) = 0. \end{cases}$$

et comme, par définition de la détectabilité, le semi-groupe $\{S_K(t)\}_{t\ \geq 0}$ est exponentiellement stable, alors :

$$\|e\,(t)\| = \|S_K(t)e_0\| \longrightarrow 0 \text{ quan } dt \longrightarrow \infty.$$

Evidemment l'estimateur défini en (3.13) est de dimension infinie.

Par ailleurs, on montre qu 'il ya détectabilité si le système est exactement observable à l'instant T, cela se traduit par

$\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\|CS\,(.)\,z\|_{L^2(0,T;O\ )} \geq \gamma\,\|S\,(T)\,z\|_H$$

pour tout z de H.

Ici encore, cette notion est moins restrictive que l'exacte observabilité caractérisée par (3.7).

3.4.2 Détectabilité et capteurs :

Les hypothèses sont celle qui ont été rappelées au paragraphe précédent.

Par dualité, nous avons une caractérisation de la détectabilité par la structure des capteurs.

Proposition :[2]

Supposons que des informations sont recueillies sur le système par l'intermédiaire de q capteurs zone $(D_i, f_i)_{1 \leq i \leq q}$ et que le spectre de A compt J valeurs propres non négatives.

Alors le système (S) augment de l'équation de sortie (E) est détectable si et seulement si :

$i)$ $q \geq \sup\limits_{1 \leq n \leq J} (r_n)$.

$ii)$ $rg\,(G_n) = r_n$,pour tout n=1,..,3

où $(G_n)_{ij} = \langle f_{J,} \Phi_{nJ} \rangle_{L^2(D_J)}$ avec i=1,...,r$_n$ et j= 1,...,q.

Remarquons que, dans les propositions de caractérisation (1) et (2), la différence essentielle avec les propositions de caractérisation des capteurs et des actionneurs stratégique vient du fait que l'on ne s'intéresse, dans ce cas, à rendre stratégique les actionneurs et les capteurs que pour la partie instable du système.

Détectabilité régionale

Ici on étend les résultats usuels sur la détectabilité au cas régionale.

Plus précisément, on s'intéresse au problème de l'estimation asymptotique régionale de l'état seulement sur une région donnée ω de Ω.

Soit p_ω l'opérateur restriction :

$$z \in L^2(\Omega) \longrightarrow p_\omega z = z_{|\omega} \in L^2(\omega).$$

Définition :

Le système (S) est dit régionalement détectable dans ω (ou $\omega-$détectable) s'il existe un opérateur :

$$H_\omega : O \longrightarrow L^2(\omega)$$

tel que : $(AH_\omega C)$ génère un semi-groupe fortement continu $(\Phi_{H_\omega}(t))_{t\geq 0}$ qui est exponentiellement stable sur $L^2(\omega)$.

$$\exists M_\omega, \alpha_\omega > 0 \text{ telque } \|p_\omega z(t)\|_{L^2(\omega)} \leq M_\omega \exp(-\alpha_\omega t). \tag{3.14}$$

Il est clair qu'un système qui est détectable, est $\omega-$ détectable.

Un système qui est $\omega-$ détectable est ω_1- détectable, pour tout $\omega_1 \subset \omega$

Bibliographie

[1] A. Ayadi et M Djebarni ; *Pollution terms estimation in parabolic system with incomplete data,* Far Est J. Math .Sci.(FJMS). Pushpa Publishing House (2005).

[2] A El Jai -A.J.Pritchard : *Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systémes distribués* Masson. RMA 3. Paris (1986).

[3] A.El Jai E Zerrik et K Ztot ; Systèmes Dynamiques *Analyse et controle des systèmes localisés,* (*2008*).

[4] Afifi. L. A El Jai et E Zerrik ; Systèmes dynamique *Analyse regional des systèmes distribués linéaires (2008).*

[5] A. Hareux ; *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéarire,* Laboratoire d'analyse Numérique, Prépublication No. 78010, Université Paris 7 (1978).

[6] A. Hareux ; *Semi-groupes linéaires et équations d'évolutions linéaire périodiques,* Publication du Laboratoire d'analyse Numérique No. 78011, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978).

[7] A. Pazy ; *Semi Groupe of lineare operator and application to partial differential equation.* Springer (1983).

[8] Berhaile Amel Memoir Controlabilité Frontiere D un système Parapolique. Constantine (2003).

[9] Benabdalla Assia Memoir *Une Introduction àla théorie De Control université de Provence CMI (2005).*

[10] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch ; *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves form the boundary,* SIAM. J. Control Optimal, 30 (1992), 1024-1065.

[11] E.H.Zerrik : Analyse regionale des systèmes distribués .Th.Univ Mouhamed 6 Maroc (1993).

[12] Foughali Amel Memoir Controlabilité Régionale Des systèmes a Paramate Distribue Constantine (2003).

[13] H.Reinhard *Equations aux dérivées partielles- introduction -Bordas .Paris (1991).*

[14] H. Bresis ; *Analyse fonctionnelle théorie et application,* Masson Paris. (1983).

[15] Hiroki Tanabe ; *Equation of evolution,* Pitman landon sanfrancisco, Melbourne (1979).

[16] I. Lasiecka et D. Tataru ; *Uniform boundary stabilization of semlinear wave equations with nonlinear boundary damping,* J. Diff. Inte. Equa, 6 (1993), 507-533.

[17] I. Lasiecka et R. Triggiani ; *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions,* Appl. Math. Optim, 25 (1992), 189-224.

[18] J.L.Lions Sentinelles Pour Les Systèmes Distribuès à Donnèes Incomplétes RMA Paris (1992).

[19] J-L.Lions *Controlabilité Exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués Tom 1* Masson Paris (1988).

[20] J-L-Lions et Robert Dautray *Analyse matimatique et calcul numérique T8 Masson (1988).*

[21] S. W. Taylor ; *A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability,* J. Comput. Appl. Math, 114 (2000), 23-40.

[22] S.Barnett and R.G.Camiron *Introdiction to mathematical Control Theory Bradford october (1984).*

[23] V. Komornik ; *Exact controllability and stabilization. The multiplier methode.* Masson John Willey. Paris, (1994).

Résumé :

Dans ce travail, nous considérons le système

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu \quad ; \quad 0 < \quad t < T. \\ \qquad z(0) = 0, \end{cases} \tag{S}$$

augmenté de l'équation de sortie (E) :

$$y(t) = Cz(t),\ 0 \leq t \leq T_m. \tag{E}$$

On cherche d'un modèle détectable dans un domaine bidimensionnelle et trouver les controls qui rendrent le système étudié détectable, par le biais d'analyse régionale des systèmes distribués et à travers la théorie de contrôlabilité.

On essaie de dégager une méthode de détectabilité régional.

Mots clés :

Evolution systèmes, Controlabilité, Observabilité stabilisabilité, détectabilité.

Abstract :

In this work we consider the following system

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu \quad ; \quad 0 < t < T. \\ z(0) = 0, \end{cases} \tag{S}$$

and

$$y(t) = Cz(t), 0 \leq t \leq T_m. \tag{E}$$

In this work we search for a model two dimensional domain detectabl and find the controls that the system studied rendrent detectable though regional analysis of distributed of controlability, we try to identify a method regional detectable.

This work consist to study som systems undetectable or detectable systems for the sicentific and industrial.

Key word :

Evolutionary system, Controlability, Observability, Stabilisability, Detectability.

ملخّص

في هذّا العمل نعتبر النظام :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Az + Bu \qquad ; \qquad 0 < t < T. \\ \qquad\qquad z(0) = 0, \end{cases} \tag{S}$$

مرفق بمعادلة الخروج

$$y(t) = Cz(t), 0 \leq t \leq T_m. \tag{E}$$

و نبحث عن نموذج في مجال ثنائي البعد لكشف النظام و المجال و ايجاد المراقبة التي تجعل النظام قابل للّكشف باستعمال التحليل الاقليمي و النظم توزيعية من خلال نظريات المراقبة .
و نحاول ايجاد نموذج قابل للّكشف الاقليمي .

الكلمات الافتتاحية
نظم تغيري، مراقبة، ملاحظة، استقرارية، قابلية الكشف .