



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE  
LA VIE  
Département DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° D'ordre : .....

N° Série : .....

## Thèse

Pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EN MATHEMATIQUE**

Option: *Mathématiques Appliquées*

## Thème

**Théorèmes du point fixe commun  
dans les espaces métriques  
probabilistes**

*Présentée par :* **BENAOUA Leila**

*Devant le jury composé de :*

<i>Président :</i>	AYADI Abdelhamid	<i>Prof.</i>	<i>Univ. Oum El Bouaghi</i>
<i>Rapporteur :</i>	ALIOUCHE Abdelkrim	<i>Prof.</i>	<i>Univ. Oum El Bouaghi</i>
<i>Co-Rapporteur :</i>	MERAD Ahcene	<i>M.C.A.</i>	<i>Univ. Oum El Bouaghi</i>
<i>Examineurs :</i>	BOUSSEBOUA Moussedek	<i>Prof.</i>	<i>Univ. Oum El Bouaghi</i>
	ADJROUD Nacer	<i>M.C.A.</i>	<i>Univ. Khenchela</i>
	ARDJOUNI Abdelwaheb	<i>M.C.A.</i>	<i>Univ. Souk Ahras</i>
<i>Invité :</i>	GUESMIA Amar	<i>M.C.A.</i>	<i>Univ. Skikda</i>

*Soutenue le :* 28 / 06 / 2017

2016/2017

# Remerciements

*Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux.*

*<< Gloire à Toi ! Nous n'avons de savoir que ce que Tu nous as appris. Certes, c'est Toi l'Omniscient, le Sage >>. Sourate Al-Baqara verset 32.*

*O Allah ! Envoie la paix et la bénédiction sur Abraham, Ismaël, Isaac, Jacob, Moïse, Jésus, sur Mohamed le sceau des prophètes, ses compagnons, sa famille et tous ceux qui les suivent sur le bon chemin jusqu'au jour dernier. Amen.*

*Gloire à Dieu Le Tout Puissant qui m'a guidé par sa grandeur et fait en sorte que mes promesses deviennent une réalité par ce modeste travail.*

*Au terme de cette recherche je suis très heureux de pouvoir remercier tous ceux et celles qui m'ont accompagné et soutenu tout le long de cette aventure.*

*Je voudrais tout d'abord remercier très vivement et sincèrement mon encadreur Monsieur le Professeur **Abdelkrim ALIOUCHE** de m'avoir confié Ce sujet de thèse et qui m'a honoré d'avoir accepté de diriger ce travail, pour l'aide compétente qu'il m'a apporté, pour sa patience et son encouragement, pour ses conseils pratiques et scientifiques ainsi que pour l'inspiration et le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et son soutien qui m'a permis d'achever ce travail.*

*Je remercie tout spécialement le Professeur **MERAD AHCENE** pour avoir accepté de me co-encadrer et qui m'a honorés en acceptant d'être co-rapporteur de ce jury d'examen. Ses qualités scientifiques et votre intérêt pour la recherche sont pour moi une source de motivation supplémentaire pour la suite de ma carrière ... Vraiment merci Docteur.*

*Mon respect et mes vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur **Abdelhamid AYADI** pour ses conseils précieux. Vos qualités scientifiques et votre intérêt pour la recherche sont pour moi une source de motivation supplémentaire pour la suite de ma carrière et qui m'a honorés en acceptant d'être président de ce jury d'examen.*

*Je remercie très chaleureusement les Professeurs **BOUSSEBOUA Moussedek, ADJROUD Nacer** et **Abdelwaheb ARDJOUNI** d'avoir accepté de juger ce travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse, leurs présence dans ce Jury me fait un grand honneur. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale.*

*Au Professeur **GUESMIA Amar** qui m'a honoré d'accepter l'invitation. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale.*

*Je remercie tout spécialement **mes chers parents** pour ses prières, ses recommandations, et pour m'avoir activement apporté un soutien inconditionnel tout au long de mes études.*

*Ma meilleure appréciation et tout mon respect vénérable vont à **mes chers parents**. Que ce travail soit leur récompense tant méritée. Je vous aime énormément et je vous dédie cette thèse.*

*Enfin, je remercie particulièrement Mon marie **Dr. Taki Eddine OUSSAEIF** pour son pleine coopération et encouragement permanent, et mon cher frère **Sofiane BEKKAI** pour son aide à la vérification linguistique de cette thèse.*

## Résumé

Dans ce travail on a étudié divers problèmes de point fixe commun dans des espaces métriques probabilistes.

On a débuté dans un premier chapitre par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires qui nous aident dans la démonstration des résultats obtenus dans ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles et satisfont la propriété CLR (The Common Limit Range property) dans des espaces de Menger intuitionnistes.

Le troisième chapitre est destiné à prouver des théorèmes de point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles qui satisfont la propriété CLR et la relation implicite dans des espaces de Menger intuitionnistes.

Ensuite, le quatrième chapitre est voué à l'étude de théorème de point fixe commun pour des applications sous des conditions  $\phi$ -contractives dans les espaces métriques de Menger intuitionnistes avec application sur une équation intégrale non linéaire de Fredholm.

Enfin, dans le cinquième chapitre on étend le concept de la propriété (E.A), la propriété (CLR) et la propriété (JCLR) pour les applications couplées et on prouve un résultat qui fournit une généralisation du résultat de Zhong Xiao : « Jian-Zhong Xiao, Xing-Hua Zhu, Yin-Fang Cao. Common coupled fixed point results for probabilistic  $\phi$ -contractions in Menger spaces. *Nonlinear Analysis* 74(2011) 4589-4600 ».

**Mots clés :** Espace métrique probabiliste; Espace de Menger; Espace de Menger intuitionniste; Point fixe commun; Point fixe couplé commun; Condition  $\phi$  contractive; Relation implicite; Application faiblement compatible; Propriété CLR; t-norme de H-type; t-conorme of H-type; Propriété E.A.

## Abstract

In this work we study several problems of common fixed point in the probabilistic metric spaces.

We started by the recalls of some fundamental preliminary concepts and necessary tools.

The second chapter is devoted to the study of a common fixed point for pairs of weakly compatible mappings which satisfy the CLR property (The common limit Range property) in intuitionistic Menger spaces.

The third chapter is intended to achieve common fixed point theorems for pairs of weakly compatible mappings satisfying the CLR property and the implicit relation in intuitionistic Menger spaces.

Then, the fourth chapter is devoted to the study of the common fixed point theorem for mappings under  $\phi$ -contractive conditions in intuitionistic Menger metric spaces with application on a non-linear Fredholm integral equation.

Finally, in the fifth chapter we have extended the notions of E.A property, CLR property and JCLR property for coupled mappings in Menger metric space then using these notions to establish common coupled fixed point results for four self-mappings. Our work generalize the recent results of Jian-Zhong Xiao : « Jian-Zhong Xiao, Xing-Hua Zhu, Yin-Fang Cao. Common coupled fixed point results for probabilistic  $\phi$ -contractions in Menger spaces. *Nonlinear Analysis* 74(2011) 4589-4600 ».

**Keywords:** Probabilistic metric space; Intuitionistic Menger and Menger metric space; Common fixed point; Common coupled fixed point;  $\phi$ -contractive condition, Weakly compatible mapping; Implicit relation, t-norm of H-type; t-conorm of H-type; CLR property; E.A property.

## ملخص

يهدف هذه العمل إلى دراسة العديد من المسائل المختلفة حول النقطة الثابتة المشتركة في الفضاءات المترية الاحتمالية.

نبدأ بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية والأولية والأدوات المهمة المستعملة في هذا العمل.

الفصل الثاني يهدف الى دراسة النقطة المشتركة الثابتة من اجل زوجين من التطبيقات الضعيفة توافقيا و تحقق خاصية CLR في فضاءات مانجا الحدسية.

الفصل الثالث يرمي الى التوصل الى نظريات تخص النقطة المشتركة الثابتة من اجل زوجين من التطبيقات الضعيفة توافقيا و تحقق خاصية CLR و خاصية العلاقة الضمنية في فضاءات مانجا الحدسية.

بعد ذلك، الفصل الرابع خصص لدراسة النقطة الثابتة المشتركة لتطبيقات تحت شرط  $\Phi$  الانقباضية في فضاءات مانجا الحدسية مع تطبيقات على معادلات تكاملية غير خطية لفرد هولم.

أخيرا، في الفصل الخامس، نقوم بتطوير المفاهيم التالية: خاصية CLR، خاصية JCLR، خاصية E.A من اجل تطبيقات مقترنة في فضاءات مانجا و نستخدم هذه الخصائص من اجل تأسيس نتائج النقطة المشتركة الثابتة المقترنة من اجل أربعة تطبيقات. و يعتبر هذا العمل تعميم للنتائج الحالية المنشورة في مقال:

Jian-Zhong Xiao : « Jian-Zhong Xiao, Xing-Hua Zhu, Yin-Fang Cao. Common coupled fixed point results for probabilistic  $\phi$ -contractions in Menger spaces. Nonlinear Analysis 74(2011) 4589-4600 ».

### الكلمات المفتاحية:

الفضاءات المترية الاحتمالية، فضاءات مانجا الحدسية، فضاءات مانجا، النقطة الثابتة، النقطة الثابتة المشتركة، التطبيقات الضعيفة توافقيا، شرط  $\Phi$  الانقباضية، خاصية E.A، خاصية CLR.

# Table des matières

Introduction générale	3
<b>1 Espaces métriques probabilistes</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Notions de base . . . . .	8
1.2.1 Fonction de distribution de la distance . . . . .	8
1.2.2 Le modifié de la distance de Lévy . . . . .	9
1.2.3 Norme triangulaire et fonction triangle . . . . .	11
1.3 Espaces métriques probabilistes . . . . .	15
1.4 Propriétés topologiques . . . . .	17
1.4.1 Topologie . . . . .	17
1.4.2 Bolzano - Weierstrass . . . . .	21
1.4.3 Diamètre probabiliste . . . . .	22
1.5 Espaces métriques flous . . . . .	25
1.6 Espace de Menger intuitionniste . . . . .	28
1.6.1 Topologie induite par la métrique probabiliste intuitionniste . . . . .	31
1.7 Espaces métriques flous intuitionnistes . . . . .	35
1.8 Définitions de base . . . . .	38
1.8.1 Applications compatibles . . . . .	38
1.8.2 Applications faiblement compatibles . . . . .	38

1.8.3	La propriété (E.A) . . . . .	39
1.8.4	La propriété (CLR) . . . . .	39
1.8.5	Point fixe couplé . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Théorèmes de points fixe commun dans les espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la propriété CLR</b>	<b>43</b>
2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Résultats principaux . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Théorèmes de point fixe commun dans les espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la relation implicite</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Relations implicites . . . . .	58
3.3	Résultats principaux . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Théorèmes de point fixe couplé dans les espaces de Menger intuitionnistes avec application aux équations intégrales</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Résultats principaux . . . . .	72
4.3	Application aux équations intégrales . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Théorèmes de point fixe couplé pour des applications faiblement compatibles dans les espaces de Menger en utilisant la propriété CLR</b>	<b>99</b>
5.1	Introduction . . . . .	99
5.2	Résultats préliminaires . . . . .	99
5.3	Résultats principaux . . . . .	100
	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

# Introduction générale

«La théorie du point fixe» est un bon mélange d'analyse (pure et appliquée), de la topologie et de la géométrie. Les idées topologiques sont présentées dans presque tous les domaines des mathématiques d'aujourd'hui. Les théorèmes du point fixe donnent les conditions dans lesquelles les applications (simples ou à valeurs multiples) ont des solutions. Au cours des cinquante dernières années, la théorie du point fixe a été révélée comme un outil très puissant et important dans l'étude des phénomènes non linéaires. En particulier, les techniques du point fixe ont été appliquées dans une diversité de domaines tels que la biologie, la chimie, l'économie, l'ingénierie, la théorie des jeux et la physique.

*Souvent, les constructions physiques sont décrites par des systèmes mathématiques sur idéalisés dans un sens fondamental : des quantités ou des concepts qui sont par nature imprécis dans la situation réelle, sont traduits en termes précis dans le système abstrait. Un espace métrique abstrait sert fréquemment comme objet mathématique utile dans la modélisation des systèmes physiques, même si la distance entre deux points (objets) n'est plus un réel exact, mais plutôt une moyenne de processus de mesures ou une approximation de cette distance.*

En 1942 Menger [45] a généralisé la métrique par l'association d'une fonction de distribution avec chaque paire de points  $(x, y)$  d'un ensemble non vide que l'on note  $F_{x,y}$ . Cette idée a joué un rôle majeur dans le développement probabiliste de l'espace métrique. Elle a conduit à la naissance des espaces de Menger et par suite les espaces métriques probabilistes (brièvement PM-espace) comme une généralisation de l'espace métrique et qui trouvent leurs intérêt dans plusieurs domaines tels que la physique [59], [71]. Elle est également très importante dans l'analyse

fonctionnelle probabiliste, dans l'analyse non linéaire et leurs applications [83], [81]. De tels espaces ont été largement développés par Schweizer et Sklar [77, 78, 79, 91], Serstnev [74], Tardiff [72], Thorp [73] et plus tard par de nombreux auteurs dans des directions diverses. Ces recherches importantes touchent des questions primordiales au niveau du problème de point fixe dans les espaces métriques probabilistes.

La théorie du point fixe est l'une des célèbres théories classiques en mathématiques. Dernièrement, elle a connu un développement considérable à cause de ses applications énormes dans plusieurs branches de la science, en particulier, dans la théorie du contrôle, les systèmes dynamiques, la théorie des équations différentielles, la théorie du chaos, la théorie des jeux, ainsi dans l'intelligence artificielle et la programmation logique etc..., voir [86, 84].

La théorie du point fixe dans les espaces métriques probabilistes est une partie de l'analyse probabiliste qui est un domaine très dynamique dans la recherche mathématique. Cette théorie consiste à résoudre un problème très simple et élémentaire : pour une application  $f$  d'un ensemble non vide dans lui même  $X$  (espace métrique probabiliste, espace métrique ordinaire), un point fixe de  $f$  est un point  $x$  de  $X$  pour lequel  $f(x) = x$ . Un théorème fondamentale concernant les points fixes est celui de Banach [85]. Selon ce mathématicien, dans un espace métrique ordinaire complet  $X$  muni d'une métrique  $d$ , toute contraction  $f$ , i.e.,  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$  avec  $0 < k < 1$  pour tout  $x, y \in X$  admet un point fixe unique.

Par la suite, de nombreux chercheurs ont prouvé que la notion d'applications contractives définies précédemment dans les espaces métriques ordinaires, peut s'étendre aux espaces métriques probabilistes. En effet, en 1966 Sehgal [75] a introduit la définition d'application  $k$ -contractive dans les espaces métriques probabilistes. Quelques années plus tard, Sehgal et Bharucha-Reid [59] ont obtenu une version probabiliste du célèbre théorème de point fixe de Banach dans un espace de Menger complet sous la norme triangulaire  $Min$ , mais H. Sherwood [76] a montré que ce théorème n'est qu'un cas particulier plutôt qu'une règle, il a construit un espace de Menger complet et une application contractive au sens de Sehgal qui n'admet aucun point fixe. Ensuite, Radu [80] en 1985 a étendu le théorème de Sehgal et Bharucha-Reid à toute norme triangulaire continue de type  $H$ . En 1983, Hicks [82] a reformulé une nouvelle classe d'applications contractives distinctes que celles de Sehgal et qui vérifie la propriété du point fixe. Plusieurs travaux ont

été effectués dans ce sens, à citer par exemple, Ciric [87], Hadzic et al [24], Radu [90], Schweizer et al [55], ... etc. Cependant, la majorité des travaux publiés sont restreints aux espaces de Menger et les espaces métriques flous.

En 2001, Mbarki et al [88] ont obtenu un théorème de point fixe pour une classe plus large d'applications contractives dans un espace métrique probabiliste plus générale, ainsi, ils ont étendu ce résultat au semi-groupes inversibles à gauche.

Récemment, grâce à l'évolution des notions de la commutativité des applications (commutativité, commutativité faible, compatibilité, compatibilité faible...), les mathématiciens ont pu transformer le problème du point fixe au point fixe commun pour plus d'une application qui constitue pour nous un intérêt vitale. Parmi les divers résultats publiés, on peut se référer en particulier à Kumar et Pant [89], Mishra [47], Singh et al [93] et Singh et Pant [92]...etc.

Récemment, Park [49] a introduit la notion des espaces métriques flous intuitionnistes comme une généralisation des espaces métriques flous. Dans [39], la notion des espaces de Menger intuitionnistes est définie à l'aide de  $t$ -normes et  $t$ -conormes comme une généralisation des espaces de Menger [45]. Une topologie de Hausdorff est définie sur cet espace de Menger intuitionniste où chaque métrique induit une métrique probabiliste intuitionniste

Or, jusqu'à présent, tous les travaux effectués dans cette direction concernent les espaces métriques ordinaires, les espaces métrique flous et les espaces de Menger, ce qui nous a motivé d'aborder le cas des espaces métriques probabilistes intuitionnistes et particulièrement les espaces de Menger intuitionnistes.

La présente thèse comporte des résultats intéressants et originaux ayant faits l'objet de publication de trois articles scientifiques dans des revues internationales de renommée établie. Ceux-ci pourront être consultés selon les références citées dans la bibliographie.

La thèse est débutée par une introduction où on a présenté un historique sur les problèmes étudiés, l'intérêt et l'objectif du thème abordé. Elle est composée de cinq chapitres présentés comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail qui nous aident dans les démonstrations des résultats obtenus.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles et satisfont la propriété CLR (The common limit range property) dans des espaces de Menger intuitionnistes [7].

Le troisième chapitre est destiné à obtenir des théorèmes de point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles satisfaisant la propriété CLR et une relation implicite dans des espaces de Menger intuitionnistes [8].

Notre travail publié dans [9] sera détaillé dans le quatrième chapitre. Dans cette publication on trouve un théorème de point fixe commun pour des applications sous des conditions  $\phi$ -contractives dans les espaces de Menger intuitionnistes avec application à une équation intégrale non linéaire de type Fredholm.

Dans le cinquième chapitre, on donne le concept du propriété ( $E.A$ ), la propriété ( $CLR$ ) et la propriété ( $JCLR$ ) pour des applications couplées où on prouve un résultat qui fournit une généralisation du résultat de Zhong Xiao [69].

# Chapitre 1

## Espaces métriques probabilistes

### 1.1 Introduction

En 1942 K. Menger a proposé une généralisation probabiliste d'un espace métrique. Il a introduit la première définition d'un espace métrique probabiliste [45] (espace de Menger) qui a été amélioré par Schweizer et Sklar [77]. L'idée de Menger était de remplacer la distance entre deux points ( $d(p, q)$ ) par une fonction de distribution de distance ( $F_{pq}$ ) qui fait correspondre chaque réel positif  $t$ ; la probabilité que la distance entre les deux points  $p$  et  $q$  soit inférieure ou égale à  $t$ ; et qu'on la note par  $F_{pq}(t)$ , donc, il est évident d'avoir :

$$F_{pq}(t) = F_{qp}(t) \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } p, q \in M \quad (1.1)$$

$$F_{pq}(t) = 1 \text{ pour tout } t > 0 \Leftrightarrow p = q, \quad (1.2)$$

$$F_{pq}(0) = 0 \quad (1.3)$$

Comme la probabilité est comprise entre 0 et 1, alors

$$0 \leq F_{pq}(t) \leq 1 \quad (1.4)$$

Puisque la probabilité est croissante (au sens de l'inclusion), alors  $F_{pq}$  est croissante pour tous  $p, q \in M$ .

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions et résultats qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

## 1.2 Notions de base

### 1.2.1 Fonction de distribution de la distance

**Définition 1.1** Une fonction réelle positive  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  est dite fonction de distribution de la distance (f.d.d) si elle est croissante, continue à gauche sur  $]0, +\infty[$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f(+\infty) = 1$ .

On note par  $\Delta^+$  l'ensemble de toutes les f.d.d et par  $D^+$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $\Delta^+$  vérifiés  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ .

**Exemple 1.1** [77]

1. Pour  $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , l'unité à pas  $a$  est l'élément  $\epsilon_a$  de  $\Delta^+$  défini par :

$$\epsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq a, \text{ et } \text{si } 0 \leq a < +\infty \\ 1, & \text{si } a < x \leq +\infty. \end{cases}$$

et

$$\epsilon_\infty(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < +\infty, \\ 1, & x = +\infty. \end{cases}$$

2. Pour  $0 \leq a < b < +\infty$ , la distribution uniforme sur  $[a, b]$  est la fonction  $U_{ab} \in D^+$  définie par

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x < +\infty. \end{cases}$$

**Remarque 1.1** Notons d'abord que  $\epsilon_a$  est un élément de  $D^+$  pour  $a \in [0, +\infty[$ .

On munit  $\Delta^+$  de la relation d'ordre suivante :

$$f \leq g \text{ si et seulement si } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Alors  $\epsilon_a \leq \epsilon_b$  si et seulement si  $b \leq a$ , de plus  $\epsilon_0$  est l'élément maximal de  $\Delta^+$  et  $\epsilon_\infty$  est l'élément minimal.

Si  $\{f_i : i \in I\}$  est une famille d'éléments de  $\Delta^+$ , alors la fonction  $F$  définie par

$$F(t) = \sup \{f_i(t) : i \in I\}$$

est un élément de  $\Delta^+$ , par contre la fonction  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma(t) = \inf \{f_i(t) : i \in I\},$$

n'est pas forcément continue à gauche, donc en général elle n'est pas dans  $\Delta^+$ , il suffit de considérer la suite  $\left\{ \epsilon_{a+\frac{1}{n}} \right\}$ .

Comme une f.d.d est monotone, alors l'ensemble de ces points de discontinus est ou plus dénombrable. Donc, la convergence des suites dans  $\Delta^+$  la plus utile pour nous est la suivante :

**Définition 1.2** Une suite  $\{f_n\}$  de f.d.d est dite convergente faiblement vers une f.d.d  $f$  (on écrit  $\lim f_n = f$  ou bien  $f_n \rightarrow f$ ) si et seulement si la suite  $\{f_n(t)\}$  converge vers  $f(t)$  en tout point de continuité  $t$  de  $f$ .

Notons que la convergence faible n'implique pas la convergence en tout point de  $]0, +\infty[$ .

Par exemple : soit la suite des distributions uniformes  $\left\{ U_{a-\frac{1}{n}, a} \right\}$ , on peut vérifier aisément que  $\left\{ U_{a-\frac{1}{n}, a} \right\}$  converge faiblement vers  $\epsilon_a$ , mais, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $U_{a-\frac{1}{n}, a}(a) = 1 \neq 0 = \epsilon_a(a)$ .

### 1.2.2 Le modifié de la distance de Lévy

Le modifié de la distance de Lévy a été introduite par D. A. Sibley en 1971.

**Définition 1.3** *i.* Soient  $f, g \in \Delta^+$  et  $h \in ]0, 1]$ , on note par  $(f, g, h)$  la condition suivante :

$$0 \leq g(t) \leq f(t+h) + h, \quad \text{pour tout } t \in \left] 0, \frac{1}{h} \right[.$$

*ii.* La distance modifiée de Lévy est la fonction  $d_L$  définie sur  $\Delta^+ \times \Delta^+$  par

$$d_L(f, g) = \inf \{h : h \text{ vérifie } (f, g, h) \text{ et } (g, f, h)\}.$$

Remarquons que pour tous les éléments  $f$  et  $g$  de  $\Delta^+$ , 1 vérifie les deux conditions  $(f, g, 1)$  et  $(g, f, 1)$ , donc la fonction  $d_L$  est bien définie et  $d_L(f, g) \leq 1$ , de plus on a les résultats suivants.

**Proposition 1.1** [77]

*i.* Si  $d_L(f, g) = h > 0$ , alors on a  $(f, g, h)$  et  $(g, f, h)$ .

*ii.* Pour tout  $f \in \Delta^+$

$$\begin{aligned} d_L(f, \epsilon_0) &= \inf \{h : h \text{ vérifiant } (f, \epsilon_0, h)\} \\ &= \inf \left\{ h : \lim_{t \rightarrow h^+} f(t) > 1 - h \right\}. \end{aligned}$$

*iii.* pour tout  $t > 0$

$$f(t) > 1 - t \quad \text{si et seulement si } d_L(f, \epsilon_0) < t.$$

*iv.* Pour tout  $f$  et  $g$  dans  $\Delta^+$ , si  $f \leq g$  alors  $d_L(g, \epsilon_0) \leq d_L(f, \epsilon_0)$ .

Géométriquement,  $d_L(f, \epsilon_0)$  est l'abscisse du point d'intersection de la droite  $y = 1 - x$  et le graphe de  $f$  complété par des segments verticaux aux points de discontinuité.

**Lemme 1.1** [77] La fonction  $d_L$  est une distance sur  $\Delta^+$ .

D'abord on va énoncer un résultat de Schweizer et Sklar qui montre que la topologie de la convergence faible sur  $\Delta^+$  est métrisable.

**Lemme 1.2** [77] Soit  $(f_n)$  une suite de f.d.d et  $f \in \Delta^+$ , alors  $(f_n)$  converge faiblement vers  $f$  si et seulement si  $d_L(f_n, f) \rightarrow 0$ .

En 1977, Helly [43] a montré que de toute suite infinie de f.d.d, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. En combinant ce résultat avec le lemme 1.2 on obtient :

**Corollaire 1.1** *L'espace métrique  $(\Delta^+, d_L)$  est ccomplet. D'où l'on déduirai que l'espace  $(\Delta^+, d_L)$  est fermé et étant borné c'est donc un espace compact.*

### 1.2.3 Norme triangulaire et fonction triangle

L'origine des normes triangulaires (  $t$ -norme) était dans la théorie de l'espace métrique probabiliste K. Menger [45]. Il apparaît que les  $t$ -normes sont liées à des opérations essentielles dans plusieurs domaines, par exemple, les ensembles flous, la logique floue et ses applications. Elles sont étroitement liées à la théorie du point fixe et pour plus de détails on se réfère à [77], [36] et [23].

**Définition 1.4** *Une opération binaire  $T$  sur  $[0, 1]$  est dite une  $t$ -norme si pour tout  $a, b, c$  et  $d$  dans  $[0, 1]$  on a*

$$\begin{aligned}
 T(a, b) &= T(b, a) && : \text{la commutativité,} \\
 T(a, b) &\leq T(c, d) \quad \text{si } a \leq c, b \leq d && : \text{la croissance,} \\
 T(a, T(b, c)) &= T(T(a, b), c) && : \text{l'associativité,} \\
 T(a, 1) &= a, \\
 T(0, a) &= 0.
 \end{aligned}$$

Parmi les plus connues des  $t$ -normes, celles des exemples suivants :

**Exemple 1.2** [24]

1. La  $t$ -norme minimum, est définie par

$$T_M(a, b) = \min(a, b).$$

2. La  $t$ -norme produit  $T_P$ , est définie par

$$T_P(a, b) = ab$$

3. La  $t$ -norme de Luckasiewicz  $T_L$ , est définie par

$$T_L(a, b) = \max(a + b - 1, 0).$$

4. La  $t$ -norme de Weakest  $T_D$ , est définie par

$$T_D(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{si } \max(a, b) = 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

5. La famille des  $t$ -normes de Dombey  $(T_\lambda^D)_{\lambda \in [0, \infty]}$  est définie par

$$T_\lambda^D(a, b) = \begin{cases} T_D(a, b) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_M(a, b) & \text{si } \lambda = \infty \\ \left(1 + \left(\left(\frac{1-a}{a}\right)^\lambda + \left(\frac{1-b}{b}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{-1} & \text{si } \lambda \in ]0, \infty[ \end{cases}$$

6. La famille des  $t$ -normes de Schweizer-Sklar  $(T_\lambda^{SS})_{\lambda \in [-\infty, \infty]}$  est définie par

$$T_\lambda^{SS}(a, b) = \begin{cases} T_M(a, b) & \text{si } \lambda = -\infty, \\ (a^\lambda + b^\lambda - 1)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda \in ]-\infty, 0[, \\ T_P(a, b) & \text{si } \lambda = 0, \\ (\max(a^\lambda + b^\lambda - 1, 0))^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda \in ]0, \infty[, \\ T_D(a, b) & \text{si } \lambda = \infty. \end{cases}$$

7. La famille des  $t$ -normes de Aszél-Alsina  $(T_\lambda^{AA})_{\lambda \in [0, \infty]}$  est définie par

$$T_\lambda^{AA}(a, b) = \begin{cases} T_D(a, b) & \text{si } \lambda = 0, \\ T_M(a, b) & \text{si } \lambda = \infty, \\ e^{-(|\log a|^\lambda + |\log b|^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{si } \lambda \in ]0, \infty[. \end{cases}$$

8. La famille des  $t$ -normes de Sugeno-Weber  $(T_\lambda^{SW})_{\lambda \in [-1, \infty]}$  est définie par

$$T_\lambda^D(a, b) = \begin{cases} T_D(a, b) & \text{si } \lambda = -1, \\ T_P(a, b) & \text{si } \lambda = \infty, \\ \max\left(0, \frac{a+b-1+\lambda ab}{1+\lambda}\right) & \text{si } \lambda \in ]-1, \infty[. \end{cases}$$

**Remarque 1.2** Notons que pour toute  $t$ -norme  $T$ , on a  $T_D(a, b) \leq T(a, b) \leq \min(a, b)$ .

**Définition 1.5** Une  $t$ -norme  $T$  est dite

*i.* Continue à gauche si,  $T(a, b) = \sup \{T(u, v) : 0 < u < a, 0 < v < b\}$  pour tous  $a, b$  dans  $]0, 1]$ .

*ii.* Continue à droite si,  $T(a, b) = \inf \{T(u, v) : a < u < 1, b < v < 1\}$  pour tous  $a, b$  dans  $[0, 1[$ .

**Définition 1.6** Soient  $T$  une  $t$ -norme et  $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . On définit l'opération  $T(x_1, \dots, x_n)$  par :

$$T_{i=1}^0 x_i = 1, \quad T_{i=1}^n x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, \dots, x_n)$$

et pour toute suite  $\{x_n\}$  d'éléments de  $[0, 1]$

$$T_{i=1}^{+\infty} x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{i=1}^n x_i.$$

**Remarque 1.3** Notons que la limite  $\lim_{+\infty} T_{i=1}^n x_i$  existe toujours, puisque la suite  $(T_{i=1}^n x_i)$  est décroissante et minorée dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.3** 1.  $T_L(x_1, \dots, x_n) = \max(\sum_{i=1}^n x_i - (n-1), 0)$ .

2.  $T_M(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$ .

3.  $T_P(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ .

**Définition 1.7** Si  $T$  est une  $t$ -norme,  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors on définit la suite  $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$T^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ T(T^{n-1}(x), x) & \text{sinon.} \end{cases}.$$

**Définition 1.8** Une  $t$ -norme  $T$  est dite de type Hadzic (type  $H$ ), si la famille  $\{T^n(x)\}$  est équicontinue en  $x = 1$ , i.e.,

$$\forall \epsilon \in ]0, 1[ \quad \exists \lambda \in ]0, 1[ : t > 1 - \lambda \implies T^n(t) > 1 - \epsilon \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

**Remarque 1.4** Une triviale  $t$ -norme de type  $H$  est  $T_M$ , et il existe des  $t$ -normes non triviales de type  $H$  comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1.4** [24] Soient  $T$  une  $t$ -norme continue,  $m \in \mathbb{N}$  et

$$I_m = [1 - 2^{-m}, 1 - 2^{-m-1}].$$

On définit la  $t$ -norme  $\tilde{T}$  par

$$\tilde{T}(a, b) = \begin{cases} 1 - 2^{-m} + 2^{-m-1}T(2^{m+1}(a - 1 + 2^{-m}), 2^{m+1}(b - 1 + 2^{-m})) & \text{si } (a, b) \in I_m \times I_m, \\ T_M(a, b) & \text{si non} \end{cases}$$

On montre que la suite  $(\tilde{T}^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est équicontinue en  $x = 1$  donc  $\tilde{T}$  est de type  $H$ .

Pour les  $t$ -normes de type  $H$ , on a la caractérisation suivante :

**Théorème 1.1** [24] Soit  $T$  une  $t$ -norme. Alors

*i.* S'il existe une suite strictement croissante  $\{b_n\} \subset [0, 1[$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$  et  $T(b_n, b_n) = b_n$ , alors  $T$  est de type  $H$ .

*ii.* Si  $T$  est continue et de type  $H$ , alors il existe une suite  $\{b_n\}$  qui satisfait (i).

En 1962, A. N. Serstnev a introduit la notion suivante :

**Définition 1.9** On appelle fonction triangle sur  $\Delta^+$ , toute application  $\tau : \Delta^+ \times \Delta^+ \rightarrow \Delta^+$  commutative, associative, croissante et vérifiant

$$\tau(f, \epsilon_0) = f \quad \text{pour tout } f \in \Delta^+.$$

**Exemple 1.5** Soit  $T$  une  $t$ -norme. On définit les applications  $\mathbf{T}$  et  $\tau_T$  par

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(f, g)(t) &= T(f(t), g(t)), \\ \tau_T(f, g)(t) &= \sup \{T(f(u), g(v)) : u + v = t\},\end{aligned}$$

pour  $f, g \in \Delta^+$  et  $t \in [0, +\infty]$ .

Si  $T$  est continue à gauche, alors  $\mathbf{T}$  et  $\tau_T$  sont des fonctions triangles. De plus, pour toute fonction triangle  $\tau$ , on a  $\tau \leq \min$ .

**Lemme 1.3** [77] Si  $T$  est une  $t$ -norme continue, alors la fonction triangle  $\tau_T$  est uniformément continue sur  $(\Delta^+, d_L)$ .

### 1.3 Espaces métriques probabilistes

**Définition 1.10** Soit  $M$  un ensemble non vide. On appelle distance probabiliste sur  $M$  toute application  $F$  de  $M \times M$  dans  $\Delta^+$  et on écrit  $F_{pq}$  au lieu de  $F(p, q)$ .

**Définition 1.11** Soit  $M$  un ensemble non vide et  $F$  une distance probabiliste sur  $M$ . On dit que  $(M, F)$  est un espace semi-métrique probabiliste si les propriétés (1.1) et (1.2) sont vérifiées.

S'il existe une fonction triangle  $\tau$  qui satisfait l'inégalité triangulaire suivante

$$F_{pr} \geq \tau(F_{pq}, F_{qr}) \tag{1.5}$$

pour tous  $p, q$  et  $r$  dans  $M$ , alors le triplet  $(M, F, \tau)$  est dit un espace métrique probabiliste (e.m.p).

Un tel espace est dit de Menger s'il existe une  $t$ -norme  $T$  telle que  $\tau = \tau_T$  et on écrit seulement  $(M, F, T)$ , où  $(M, F)$  espace de Menger sous la  $t$ -norme  $T$  et dans ce cas l'inégalité triangulaire (1.5) devient

$$F_{pq}(t + s) \geq T(F_{pr}(t), F_{rq}(s)),$$

pour tous  $p, q, r$  dans  $M$  et  $t, s$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

**Exemple 1.6** Soit  $M = \mathbb{C}$ . Pour tout  $x, y \in M$  et  $t > 0$ , on pose

$$F_{xy}(t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)},$$

alors  $(M, F, T_p)$  est un espace de Menger. En effet

1. Il est évident que  $F_{xy} = F_{yx}$ .

2. Pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} x = y &\implies |x - y| = 0 \\ &\implies \frac{1}{\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)} = 1 \\ &\implies F_{xy}(t) = 1. \end{aligned}$$

Inversement, si pour tout  $t > 0$ ,  $F_{xy}(t) = 1$  alors  $\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) = 1$ , ce qui implique que  $|x - y| = 0$ , d'où  $x = y$ .

3. Pour  $x, y, z \in M$  et  $t, s > 0$

$$\begin{aligned} |x - z| \leq \frac{t+s}{t} |x - y| + \frac{t+s}{s} |y - z| &\implies \frac{|x-z|}{t+s} \leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s} \\ &\implies \exp\left(\frac{|x-z|}{t+s}\right) \leq \exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \exp\left(\frac{|y-z|}{s}\right) \\ &\implies F_{xz}(t+s) \geq F_{xy}(t) F_{yz}(s). \end{aligned}$$

L'exemple suivant montre que tout espace métrique ordinaire induit un espace métrique probabiliste.

**Exemple 1.7** ([85]) Soit  $(M, d)$  un espace métrique. On considère la fonction  $F$  définie sur  $M \times M$  par :

$$F_{pq}(t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(p, q)} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad \text{si } p \neq q \text{ et } F_{pp} = \epsilon_0 \quad \forall p \in M,$$

où  $k, m, n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(M, F, \mathbf{T}_p)$  est un espace métrique probabiliste.

**Exemple 1.8** [77]

1. Soit  $(M, d)$  un espace métrique,  $G$  une f.d.d. distincte de  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_\infty$  et  $\alpha \in [0, +\infty[$ . On définit

la fonction  $F$  sur  $M \times M$  par :

$$F_{pq}(t) = G\left(\frac{t}{(d(p, q))^\alpha}\right) \quad \forall t \in [0, \infty) \text{ si } p \neq q \text{ et } F_{pp} = \epsilon_0 \quad \forall p \in M.$$

Le 4-uplet  $(M, d, G, \alpha)$  est appelé espace  $\alpha$ -simple, de plus, pour tout  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $(M, F)$  est un espace de Menger sous toute  $t$ -norme.

2. On appelle espace de Wald tout espace de Menger sous la  $t$ -norm  $T_p$ .

**Exemple 1.9** [26] Soient  $(\Omega, \Sigma, P)$  un espace probabiliste et  $(S, d)$  un espace métrique séparable.

Soit  $M$  l'espace des classes d'équivalences  $\hat{X}$  des variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow S$ , i.e.,  $X, Y \in \hat{X}$  si et seulement si  $X = Y$  presque sûrement. Pour tout  $t > 0$  et  $\hat{X}, \hat{Y} \in M$ . On pose

$$F_{\hat{X}\hat{Y}}(t) = P\{\omega : \omega \in \Omega, d(X(\omega), Y(\omega)) < t\}.$$

Alors  $(M, F, T_L)$  est un espace de Menger.

## 1.4 Propriétés topologiques

### 1.4.1 Topologie

Plusieurs topologies différentes sont définies sur un espace métrique probabiliste, celles qui portent plus d'intérêt jusqu'à présent, sont la topologie forte et la  $(\epsilon, \lambda)$ -topologie.

#### La topologie forte

Soit  $(M, F)$  un espace semi-métrique probabiliste. Pour  $p \in M$  et  $t > 0$ , on note :

$$\begin{aligned} N_p(t) &= \{q \in M : F_{pq}(t) > 1 - t\} \\ &= \{q \in M : d_L(F_{pq}, \epsilon_0) < t\}, \\ N_p &= \{N_p(t) : t > 0\}, \\ \aleph &= \{N_p(t) : p \in M \text{ et } t > 0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $N_p(t) = M$  pour tout  $t > 1$ .

**Proposition 1.2** *i.* Pour  $t, s > 0$ , on a ou bien  $N_p(t) \subseteq N_p(s)$  ou bien  $N_p(s) \subseteq N_p(t)$ .

*ii.* Le système  $\mathfrak{N}$  vérifie le premier degré de la dénombrabilité.

**Preuve** *i.* Soit  $q \in N_p(t)$ , et  $s > t$  on a

$$\begin{aligned} F_{pq}(t) &> 1 - t \\ &> 1 - s \end{aligned}$$

comme

$$F_{pq}(s) \geq F_{pq}(t)$$

alors  $q \in N_p(s)$ , ce qui implique que  $N_p(t) \subseteq N_p(s)$ .

*ii.* La collection  $\left\{ N_p\left(\frac{1}{n}\right) : n = 1, 2, \dots \right\}$  est équivalente à la famille  $N_p$ . ■

**Lemme 1.4** [55] La fonction  $\delta : M \times M \rightarrow [0, +\infty[$  définie par

$$\delta(p, q) = d_L(F_{pq}, \epsilon_0)$$

est une semi-métrique sur  $M$  dont les boules ouvertes sont  $N_p(t)$ . Si de plus  $\tau \geq \tau_{T_L}$ , alors  $\delta$  est une métrique sur  $M$ .

**Lemme 1.5** [77] Soit  $(M, F, \tau)$  un espace métrique probabiliste dont la fonction triangle  $\tau$  est continue, alors la famille  $\mathcal{F}$  constituée par l'ensemble vide et la réunion quelconque des éléments de  $\mathfrak{N}$  définit une topologie de Hausdorff sur  $M$ , appelée la topologie forte.

Une conséquence immédiate est que la famille  $N_p$  est un système de voisinage de  $p$  pour la topologie forte  $\mathcal{F}$ .

Dans tout ce qui suit, quand on parlera d'un espace métrique probabiliste  $(M, F, \tau)$ , on suppose que  $\tau$  est continue.

**Lemme 1.6** Soit  $(M, F, \tau)$  un espace métrique probabiliste séparable. Alors la topologie forte  $\mathcal{F}$  vérifie le deuxième degré de la dénombrabilité.

**Preuve** Puisque  $(M, F, \tau)$  est séparable, il existe un ensemble  $A = \{a_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  dénombrable et dense dans  $M$ .

Soit  $O$  un ouvert et  $x \in O$ , alors il existe  $t > 0$  tel que  $N_x(t) \subset O$  et puisque  $A$  est dense dans  $M$ , il existe  $a_n \in N_x(t)$ , ce qui implique que  $d_L(F_{a_n x}, \epsilon_0) < t$ .

Posons  $\alpha = d_L(F_{a_n x}, \epsilon_0)$ , alors  $t - \alpha > 0$ .

$$\exists r > 0 : d_L(g, \epsilon_0) < r \implies d_L(\tau(F_{a_n x}, g), F_{a_n x}) < t - \alpha.$$

On peut choisir un entier naturel  $m$  tel que  $\frac{1}{m} \leq \min\{\frac{1}{n}, r\}$ , donc

$$\begin{aligned} y \in N_{a_n}\left(\frac{1}{m}\right) &\implies d_L(F_{a_n y}, \epsilon_0) < \frac{1}{m} \\ &\implies d_L(F_{a_n y}, \epsilon_0) < r \\ &\implies d_L(\tau(F_{a_n x}, F_{a_n y}), F_{a_n x}) < t - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_L(F_{xy}, \epsilon_0) &\leq d_L(\tau(F_{a_n x}, F_{a_n y}), \epsilon_0) \\ &\leq d_L(\tau(F_{a_n x}, F_{a_n y}), F_{a_n x}) + d_L(F_{a_n x}, \epsilon_0) \\ &< t - \alpha + \alpha \\ &< t \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $N_{a_n}\left(\frac{1}{m}\right) \subset N_x(t)$ . ■

**Définition 1.12** Soit  $\{p_n\}$  une suite dans un espace métrique probabiliste  $(M, F, \tau)$ . Alors

*i.*  $\{p_n\}$  est dite convergente vers un point  $p \in M$  si pour tout  $t > 0$ , il existe un entier positif  $N$  tel que

$$F_{p_n p}(t) > 1 - t \text{ pour tout } n \geq N,$$

et on écrit  $\lim p_n = p$  ou bien  $p_n \rightarrow p$ .

*ii.*  $\{p_n\}$  est dite une suite de Cauchy, si pour tout  $t > 0$  il existe un entier positif  $N$  tel que

$$F_{p_n p_m}(t) > 1 - t \text{ pour tout } m, n \geq N,$$

*iii*.  $(M, F, \tau)$  est dite un espace métrique probabiliste complet si toute suite de Cauchy dans  $M$  converge vers un point dans  $M$ .

**Lemme 1.7** [77] Soit  $\{p_n\}$  une suite dans un espace métrique probabiliste  $(M, F, \tau)$ . Alors

$$\lim p_n = p \text{ ssi } \lim d_L(F_{p_n p}, \epsilon_0) = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim p_n = p \text{ ssi } \lim \delta(p_n, p) = 0.$$

De même,  $\{p_n\}$  est de Cauchy si et seulement si

$$\lim d_L(F_{p_n p_m}, \epsilon_0) = 0.$$

**Lemme 1.8** [77] Soit  $(M, F, \tau)$  est un espace métrique probabiliste. On muni l'espace  $M \times M$  de la topologie produit de  $\mathcal{F}$ , alors l'application  $F$  est uniformément continue de  $M \times M$  vers  $\Delta^+$ .

Finissons ce paragraphe par une conséquence très utile du lemme précédent.

**Lemme 1.9** [77] Soient  $\{p_n\}$  et  $\{q_n\}$  deux suites dans  $M$ .

*i*. Si  $\lim p_n = p$  et  $\lim q_n = q$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_L(F_{p_n q_n}, F_{pq}) = 0$ , i.e.,  $\{F_{p_n q_n}\}$  converge faiblement vers  $F_{pq}$ .

*ii*. Si  $\{p_n\}$  et  $\{q_n\}$  sont de Cauchy dans  $M$ , alors  $\{F_{p_n q_n}\}$  est une suite de Cauchy dans  $(\Delta^+, d_L)$ .

### La $(\epsilon, \lambda)$ -topologie

Soit  $(M, F, \tau)$  un espace métrique probabiliste. On appelle  $(\epsilon, \lambda)$ -voisinage d'un élément  $p \in M$ , l'ensemble

$$N_P(\epsilon, \lambda) = \{q \in M : F_{pq}(\epsilon) > 1 - \lambda\}$$

pour  $\epsilon > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . Puisque  $N_p(t, t) = N_p(t)$  pour tout  $t > 0$  et  $N_P(\epsilon, \lambda) \subset N_p(\min(\epsilon, \lambda))$  pour tout  $\epsilon > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , alors le système des  $(\epsilon, \lambda)$ -voisinages est équivalent à  $\mathfrak{N}$ . Donc la topologie forte  $\mathcal{F}$  coïncide avec la  $(\epsilon, \lambda)$ -topologie engendrée par le système des  $(\epsilon, \lambda)$ -voisinages.

D'abord, donnons les définitions de la convergence des suites et des suites de Cauchy par rapport à la  $(\epsilon, \lambda)$ -topologie.

**Définition 1.13** Soit  $\{p_n\}$  une suite dans un espace métrique probabiliste  $(M, F, \tau)$ . Alors

i.  $\{p_n\}$  est dite convergente vers un point  $p \in M$  si pour tous  $\epsilon > 0$  et  $\lambda > 0$  il existe un entier positif  $N$  tel que

$$F_{p_n p}(\epsilon) > 1 - \lambda \text{ pour tout } n \geq N.$$

ii.  $\{p_n\}$  est dite une suite de Cauchy, si pour tous  $\epsilon > 0$  et  $\lambda > 0$  il existe un entier positif  $N$  tel que

$$F_{p_n p_m}(\epsilon) > 1 - \lambda \text{ pour tout } m, n \geq N.$$

### 1.4.2 Bolzano - Weierstrass

Dans tout ce qui suit,  $\tau$  est une fonction triangle continue sur  $\Delta^+$  et  $(M, F, \tau)$  désigne un espace métrique probabiliste.

**Définition 1.14** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $M$ . On dit que  $A$  vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, si de toute suite d'éléments de  $A$ , on peut extraire une sous suite convergente dans  $A$ .

**Théorème 1.2** [61] Soit  $A$  un sous-ensemble de  $M$  vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement d'ouverts de  $A$ . Alors :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall p \in A, N_p(\epsilon) \text{ est incluse au moins dans un } U_i.$$

**Théorème 1.3** [61] Soit  $A$  un sous-ensemble de  $M$  vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Alors,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe une suite finie  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'éléments de  $A$  telle que  $(N_{p_i}(\epsilon))_{1 \leq i \leq n}$  est un recouvrement de  $A$ .

**Corollaire 1.2** [61] Soit  $A$  une partie de  $M$ . Alors,  $A$  est compacte si et seulement si  $A$  vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

**Théorème 1.4** [61] Soit  $(p_n)_n$  une suite dans  $M$ . On suppose que

- i.*  $(p_n)_n$  est une suite de Cauchy ;
- ii.* il existe une sous-suite  $(p_{n_i})_n$  de  $(p_n)_n$  convergente vers  $p \in M$ .

Alors,  $p_n \rightarrow p$ .

### 1.4.3 Diamètre probabiliste

en 1968, R. Egbert a introduit la notion du diamètre probabiliste d'une partie non vide d'un espace métrique probabiliste.

**Définition 1.15** Soient  $(M, F, \tau)$  un espace métrique probabiliste et  $A$  un sous-ensemble non vide de  $M$ . On appelle diamètre probabiliste de  $A$ , la fonction  $D_A$  définie sur  $[0, +\infty]$  par :

$$D_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow x^-} \varphi_A(t) & \text{si } 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

où

$$\varphi_A(t) = \inf \{F_{pq}(t) : p, q \in A\}.$$

Il est clair que  $D_A$  est une f.d.d pour toute partie  $A$  non vide de  $M$ .

**Proposition 1.3** [77] Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides d'un espace métrique probabiliste  $(M, F, \tau)$ . Alors on a les propriétés suivantes :

- i.*  $D_A = \epsilon_0$  si et seulement si  $A$  se réduit à un point.
- ii.* Si  $A \subset B$  alors  $D_B \leq D_A$ .
- iii.* Si  $A = \{p, q\}$  alors  $D_A = F_{pq}$ .
- iv.*  $\forall p, q \in A, F_{pq} \geq D_A$ .
- v.* Si  $A \cap B \neq \emptyset$  alors  $D_{A \cup B} \geq \tau(D_A, D_B)$ .
- vi.*  $D_A = D_{\bar{A}}$ .

Le diamètre d'un ensemble non vide  $A$  dans un espace métrique ordinaire est fini ou infini ; en conséquence,  $A$  est borné ou non borné. Par contre, dans les espaces métriques probabilistes, il y a un troisième cas qui entre en jeu.

**Définition 1.16** Soient  $(M, F, \tau)$  un espace métrique probabiliste et  $A$  un sous-ensemble non vide de  $M$ . Alors  $A$  est dite :

- i. Borné si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} D_A(x) = 1$ . i.e.,  $D_A \in D^+$ .
- ii. Semi-borné, si  $0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} D_A(x) < 1$ .
- iii. Non borné, si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} D_A(x) = 0$ , i.e.,  $D_A = \epsilon_\infty$ .

**Exemple 1.10** Soit  $(M, d)$  un espace métrique ordinaire. Comme on a vu dans l'exemple 1.7,  $(M, F, \mathbf{T}_p)$  est un espace métrique probabiliste. De plus la topologie  $\mathcal{F}$  est équivalente à la topologie induite par la métrique  $d$ . Donc  $(M, F, \mathbf{T}_p)$  est complet si et seulement si  $(M, d)$  est complet.

Si  $A$  est un ensemble non vide de  $M$ , alors on peut vérifier facilement que

$$D_A(t) = \frac{t}{t + \text{diam}(A)} \text{ pour tout } t > 0,$$

avec

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(p, q) : p, q \in A\}.$$

**Remarque 1.5** Dans un espace métrique ordinaire, les boules sont des parties bornées, ce qui n'est pas le cas dans un espace métrique probabiliste.

**Exemple 1.11** Soit  $M = \{0, 1, 2, \dots\}$ . On définit sur  $M$  l'application  $F$  par

$$F_{nm} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 + \epsilon_{|n-m|}).$$

Il est facile de vérifier que  $(M, F)$  est un espace de Menger sous la  $t$ -norme  $T_M$  et  $N_0\left(\frac{3}{4}\right) = M$ .

Par contre  $D_{N_0\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 + \epsilon_\infty)$ . Donc  $N_0\left(\frac{3}{4}\right)$  est semi-bornée.

**Remarque 1.6** Dans un espace métrique probabiliste, il peut se produire que la réunion de deux ensembles bornés n'est pas un ensemble borné. Par exemple : Posons  $M = \{p, q\}$ ,  $F_{p,q} = \epsilon_\infty$ ,  $A = \{p\}$ ,  $B = \{q\}$ . Donc

$$D_A = D_B = \epsilon_0 \text{ et } D_{A \cup B} = \epsilon_\infty.$$

On conclut que  $A$  et  $B$  sont bornés, mais  $A \cup B$  est non borné.

**Lemme 1.10** [23] Soit  $(M, F)$  un espace de Menger muni d'une  $t$ -norme continue  $T$ . Alors toute partie compacte de  $M$  est bornée.

**Lemme 1.11** [66] Soit  $(M, F, \tau)$  un espace métrique probabiliste tel que  $\text{Ran}F \subset D^+$ . Alors toute suite de Cauchy est bornée.

**Preuve** Soit  $\{x_n\}$  une suite de Cauchy dans  $(M, F, \tau)$ . Posons  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  et  $\epsilon > 0$ . Alors pour tout  $t > 0$  il existe un entier naturel  $N$  tel que :

$$F_{x_n, x_m}(t) > 1 - \epsilon, \quad (1.6)$$

pour tous  $n, m > N$ .

D'autre part,  $F_{x_n, x_m} \in D^+$  (i.e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{x_n, x_m}(t) = 1$ )

Aussi,  $\forall \epsilon > 0, \exists T_0 > t$  tq  $\forall t' > T_0$  on a

$$F_{x_n, x_m}(t') > 1 - \epsilon \text{ pour tout } n, m > N. \quad (1.7)$$

D'après les inégalités (1.6) et (1.7), on a  $F_{x_n, x_m}(t') > 1 - \epsilon$  pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\varphi_A(t') > 1 - \epsilon.$$

Ensuite, pour  $s > t'$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi_A(s') &\geq \varphi_A(t') \\ &> 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

pour tout  $s'$  vérifie  $s > s' > t'$ . Faisons  $s' \rightarrow s$  on obtient

$$D_A(s) > 1 - \epsilon,$$

ce qui montre que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $s > 0$  tel que  $D_A(s) > 1 - \epsilon$ . Donc

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} D_A(s) = 1.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

### 1.5 Espaces métriques flous

Les concepts des ensembles flous et logique floue ont été introduits par le Professeur Lotfi Zadeh en 1965. Le succès de la recherche dans ces notions a été démontré dans une variété de champs tels que l'intelligence artificiel, l'informatique, le contrôle de l'ingénierie, des applications informatiques, la robotique et beaucoup plus. Nous présentons quelques résultats liés aux espaces métriques flous au sens de George et Veeramani qui est une modification de celle de Kramosil et Michalek dans le but d'obtenir une topologie de Hausdorff.

La notion d'espace métrique flou donnée par George et Veeramani a beaucoup d'avantages que de nombreuses notions et résultats classiques dans les espaces métriques ordinaires peuvent être étendues et généralisées à l'établissement des espaces métriques flous, par exemple : la convergence, suite de Cauchy, complétude...

**Définition 1.17** *Soit  $X$  un ensemble non vide. Un ensemble flou sur  $X$  est une application de  $X$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ .*

**Définition 1.18** *(Kramosil et Michalek [37]) Soient  $X$  un ensemble non vide et  $M$  un ensemble flou sur  $X^2 \times [0, \infty)$  et  $T$  une  $t$ -norme continue. On dit que le triplet  $(X, M, T)$  est un espace métrique flou si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous  $p, q, r \in X$  et  $t, s > 0$ .*

- i.*  $M(p, q, 0) = 0$ ,
- ii.*  $M(p, q, t) = 1$  pour tout  $t > 0$  si et seulement si  $p = q$ ,
- iii.*  $M(p, q, t) = M(q, p, t)$ ,
- iv.*  $T(M(p, q, t), M(q, r, s)) \leq M(p, r, t + s)$ ,
- v.*  $M(p, q, \cdot) : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$  est continue à gauche.

**Définition 1.19** (George et Veeramani [19]) Soient  $X$  un ensemble non vide et  $M$  un ensemble flou sur  $X^2 \times [0, \infty)$  et  $T$  une  $t$ -norme continue. On dit que le triplet  $(X, M, T)$  est un espace métrique flou si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout  $p, q, r \in X$  et  $t, s > 0$ .

- i.  $M(p, q, t) > 0$ ,
- ii.  $M(p, q, t) = 1$  pour tout  $t > 0$  si et seulement si  $p = q$ ,
- iii.  $M(p, q, t) = M(q, p, t)$ ,
- iv.  $T(M(p, q, t), M(q, r, s)) \leq M(p, r, t + s)$ ,
- v.  $M(p, q, \cdot) : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$  est continue.

**Exemple 1.12** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $M_d$  l'ensemble flou défini sur  $X^2 \times ]0, \infty[$  par :

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}. \quad (1.8)$$

Alors  $(X, M_d, T_p)$  est un espace métrique flou. Il est connu sous le nom d'espace métrique flou standard induit par l'espace métrique  $(X, d)$

**Exemple 1.13** Posons  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$  et pour tout  $t > 0$

$$M(p, q, t) = \begin{cases} \frac{p}{q} & \text{si } p \leq q, \\ \frac{q}{p} & \text{si } q \leq p. \end{cases} \quad (1.9)$$

Alors  $(X, M, T_L)$  est un espace métrique flou.

Notons que dans l'exemple 1.13 il n'existe aucune métrique  $d$  sur  $X$  qui vérifie (1.9).

De plus  $M$  n'est pas une métrique floue sous la  $t$ -norme  $T_M$ .

Dans un espace métrique flou (soit au sens de **K.M** soit au sens de **G.V**), la métrique floue  $M(p, q, \cdot)$  est une fonction croissante pour tout  $p$  et  $q$ . En effet :

Soient  $p, q \in M$  et  $t > s > 0$ , alors  $t = s + s'$  pour un certain  $s' > 0$ . Donc

$$\begin{aligned} M(p, q, t) &= M(p, q, s + s') \\ &\geq T(M(p, q, s), M(q, q, s')) \\ &= M(p, q, s). \end{aligned}$$

**Remarque 1.7** Soit  $(X, M, T)$  un espace métrique flou. Si on définit l'application  $F$  par  $F_{pq} = M(p, q, \cdot)$ , alors  $(X, F, T)$  est un espace de Menger.

Soit  $(X, M, T)$  un espace métrique flou au sens de George et Veeramani. Pour  $p \in X$ ,  $r \in ]0, 1]$  et  $t > 0$ , on appelle la boule ouverte de centre  $p$  et de rayon  $r > 0$  par rapport à  $t > 0$  l'ensemble

$$B(p, r, t) = \{q \in X : M(p, q, t) > 1 - r\},$$

et la boule fermée de centre  $p$  et de rayon  $r$  par rapport à  $t$  l'ensemble

$$B[p, r, t] = \{q \in X : M(p, q, t) \geq 1 - r\}.$$

Comme on a vu pour la  $(\epsilon, \lambda)$ -topologie, le système  $\{B(p, r, t) : p \in X, r \in ]0, 1], t > 0\}$  génère une topologie de Hausdorff sur  $X$ .

**Proposition 1.4** [20] Soit  $(X, M, T)$  un espace métrique flou au sens de George et Veeramani.

- i.*  $(X, M, T)$  est un espace de Hausdorff vérifiant le premier degré de la dénombrabilité.
- ii.* Toute boule ouverte est un ouvert.
- iii.* Toute boule fermée est un fermé.

**Remarque 1.8** Notons d'abord que  $\overline{B(p, r, t)} \subset B[p, r, t]$ , mais en générale, l'égalité est fausse, pour plus de détails, on se référera à [70]

**Définition 1.20** Soit  $(X, M, T)$  un espace métrique flou au sens de George et Veeramani.

- i.* Une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est dite convergente vers un point  $x \in X$  et on écrit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , si pour tout  $0 < r < 1$  et  $t > 0$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que :

$$M(x_n, x, t) > 1 - r \text{ pour tout } n \geq N.$$

- ii.* Une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est dite de Cauchy, si pour tout  $0 < r < 1$  et  $t > 0$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que :

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - r \text{ pour tout } n, m \geq N.$$

**Remarque 1.9** *On constate que*

*i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$  pour tout  $t > 0$ .*

*ii.  $\{x_n\}$  dans  $X$  est de Cauchy si et seulement si  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} M(x_n, x_m, t) = 1$  pour tout  $t > 0$ .*

**Définition 1.21** *Soit  $(X, M, T)$  un espace métrique flou au sens de George et Veeramani. On dit qu'une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est  $G$ -Cauchy (suite de Cauchy dans les espaces métriques flous au sens de Grabiec [22]), si pour tout  $0 < r < 1$  et  $t > 0$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que pour tout entier naturel  $p$ .*

$$M(x_n, x_{n+p}, t) > 1 - r \text{ pour tout } n \geq N.$$

**Définition 1.22** *Un espace métrique flou  $(X, M, T)$  est dit complet (respectivement  $G$ -complet), si toute suite de Cauchy (respectivement  $G$ -Cauchy) est convergente.*

George et Veeramani [19] ont donné un exemple d'espace métrique flou complet mais n'est pas  $G$ -complet, ce qui implique que la définition de suite  $G$ -Cauchy est plus faible que la définition de suite de Cauchy.

## 1.6 Espace de Menger intuitionniste

La notion des espaces de Menger intuitionniste est définie à l'aide de  $t$ -normes et  $t$ -conormes comme une généralisation des espaces de Menger [Menger [45]]. Une topologie de Hausdorff définie sur cet espace métrique probabiliste intuitionniste est montrée. En outre, la notion de suites de Cauchy est introduite et une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Menger intuitionniste est complet est donnée.

**Définition 1.23** *Une opération binaire  $S$  sur  $[0, 1]$  est dite une  $t$ -conorme si et seulement si*

pour tout  $a, b, c$  et  $d$  dans  $[0, 1]$  on a

$$\begin{aligned}
 S(a, b) &= S(b, a) && : \text{la commutativité,} \\
 S(a, b) &\leq S(c, d) && \text{si } a \leq c, b \leq d \quad : \text{la croissance,} \\
 S(a, S(b, c)) &= S(S(a, b), c) && : \text{l'associativité,} \\
 S(a, 0) &= a,
 \end{aligned}$$

**Remarque 1.10** Les notions de  $t$ -normes  $T$  et  $t$ -conormes  $S$  sont connus comme les squelettes axiomatiques qu'on utilise pour caractériser les intersections et les unions floues respectivement. Ces concepts ont été introduits initialement par Menger [45] dans son étude sur les espaces métriques statistiques. Plusieurs exemples de ces concepts ont été proposés par nombreux auteurs [52],[23],[25],[36],[51],[19],[46]. Dans [49], on a aussi :

- (a) Pour tout  $a, b \in (0, 1)$  avec  $a > b$ , il existe  $c, d \in (0, 1)$  tels que  $T(a, c) \geq b$ ,  $S(b, d) \leq a$ ;
- (b) Pour tout  $a \in (0, 1)$ , il existe  $b, c \in (0, 1)$  tels que  $T(b, b) \geq a$ ,  $S(c, c) \leq a$ .

**Définition 1.24** Une fonction de distribution de non-distance est une fonction  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue à droite, décroissante et  $\inf_{t \in \mathbb{R}} L(t) = 1$ ,  $\sup_{t \in \mathbb{R}} L(t) = 0$ .

On désigne par  $E$  la famille de toutes les fonctions de distribution de non-distance et par  $G$  une fonction spéciale de  $E$  définie par  $G(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq 0 \\ 0, & \text{si } t > 0 \end{cases}$ .

Si  $X$  est un ensemble non vide,  $L : X \times X \rightarrow E$  est appelé une non-distance probabiliste sur  $X$  et on note  $L(x, y)$  par  $L_{xy}$ .

**Définition 1.25** ([39]) Le triplet  $(X, F, L)$  est dit un espace métrique probabiliste intuitionniste si  $X$  est un ensemble arbitraire,  $F$  est une distance probabiliste et  $L$  est une non-distance probabiliste sur  $X$  satisfaisant aux conditions suivantes pour tout  $x, y, z \in X$  et  $t, s > 0$

- (IM-1)  $F_{xy}(t) + L_{xy}(t) \leq 1$ ,
- (IM-2)  $F_{xy}(0) = 0$ ,
- (IM-3)  $F_{xy}(t) = H(t)$  si et seulement si  $x = y$ ,
- (IM-4)  $F_{xy}(t) = F_{yx}(t)$ ;
- (IM-5) Si  $F_{xy}(t) = 1$  et  $F_{yz}(s) = 1$ , alors  $F_{xz}(t + s) = 1$ ,

$$(IM-6) L_{xy}(0) = 1,$$

$$(IM-7) L_{xy}(t) = G(t) \text{ si et seulement si } x = y,$$

$$(IM-8) L_{xy}(t) = L_{yx}(t)$$

$$(IM-9) \text{ Si } L_{xy}(t) = 0 \text{ et } L_{yz}(s) = 0, \text{ alors } L_{xz}(t+s) = 0.$$

**Définition 1.26** ([39]) Une 5-tuple  $(X, F, L, *, \diamond)$  est dit un espace métrique de Menger intuitionniste, si  $(X, F, L)$  est un espace métrique probabiliste intuitionniste et en outre, les inégalités suivantes sont valables pour tout  $x, y, z \in X$  et  $t, s > 0$

$$1) F_{xy}(t) * F_{yz}(s) \leq F_{xz}(t+s),$$

$$2) L_{xy}(t) \diamond L_{yz}(s) \geq L_{xz}(t+s),$$

où  $*$  est une  $t$ -norme continue et  $\diamond$  est une  $t$ -conorme continue.

les fonctions  $F_{xy}$  et  $L_{xy}$  dénotent le niveau de proximité et le niveau de non-proximité entre  $x$  et  $y$  par rapport à  $t$ .

**Remarque 1.11** Dans l'espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$ ,  $F_{xy}$  est croissante et  $L_{xy}$  est décroissante pour tout  $x, y \in X$ .

**Remarque 1.12** ([39]) Tout espace de Menger  $(X, F, *)$  est un espace de Menger intuitionniste de la forme  $(X, F, 1 - F, *, \diamond)$  de telle sorte que la  $t$ -norme  $*$  et la  $t$ -conorme  $\diamond$  sont associés, voir [23], c'est à dire  $x \diamond y = 1 - (1 - x) * (1 - y)$  pour tout  $x, y \in X$ .

**Exemple 1.14** (Espace métrique probabiliste intuitionniste induit) Soit  $(X, d)$  un espace métrique. La métrique  $d$  induit une fonction de distribution de distance  $F$  définie par  $F_{xy}(t) = H(t - d(x, y))$  et une fonction de distribution de non-distance  $L$  définie par  $L_{xy}(t) = G(t - d(x, y))$  pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . Alors  $(X, F, L)$  est un espace métrique probabiliste intuitionniste. On appelle cet espace métrique probabiliste intuitionniste induit par une métrique  $d$  l'espace métrique probabiliste intuitionniste induit. Si  $t$ -norme  $T$  est  $T(a, b) = \min\{a, b\}$  et  $t$ -conorme  $S$  est  $S(a, b) = \min\{1, a + b\}$  pour tout  $a, b \in [0, 1]$  alors  $(X, F, L, T_M, S_M)$  est un espace de Menger intuitionniste.

**Remarque 1.13** Notons que l'exemple ci-dessus est valable même avec la  $t$ -norme  $T(a, b) = \min\{a, b\}$  et la  $t$ -conorme  $S(a, b) = \max\{a, b\}$  et donc  $(X, F, L, T, S)$  est un espace de Men-

ger intuitionniste par rapport à toute  $t$ -norme et  $t$ -conorme. Aussi notons que dans l'exemple précédent,  $t$ -norme  $T$  et  $t$ -conorme  $S$  ne sont pas associés.

**Définition 1.27** [65] Supposons que  $\inf_{0 < t < 1} \nabla(t, t) = 0$ . Une  $t$ -conorme  $\nabla$  est dite de type  $H$  si la famille des fonctions  $\{\nabla^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$  est équicontinue en  $t = 0$ , où

$$\nabla^1(t) = t\nabla t, \quad \nabla^{m+1}(t) = t\nabla(\nabla^m(t)), \quad m = 1, 2, \dots, t \in [0, 1] \quad (1.9)$$

La  $t$ -conorme  $\nabla_M = \max$  est un exemple de  $t$ -conorme de type  $H$ .

Evidemment,  $\nabla$  est une  $t$ -conorme de type  $H$  si et seulement si pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ , il existe  $\delta(\lambda) \in (0, 1)$  tel que  $\nabla^m(t) < \lambda$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , lorsque  $t < \delta$ .

### 1.6.1 Topologie induite par la métrique probabiliste intuitionniste

**Théorème 1.5** Soient  $(X, F, L)$  un espace métrique probabiliste intuitionniste,  $T, S$  des opérations binaires sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $[0, 1]$  satisfaisant  $T(a, b) \leq T(c, d)$  et  $S(a, b) \leq S(c, d)$  pour tout  $a, b, c, d \in [0, 1]$  tels que  $a \leq c, b \leq d$  et  $\sup_{t < 1} T(t, t) = 1, \inf_{t < 1} S(1 - t, 1 - t) = 0$ , respectivement. Alors la famille  $U = \{U_{\varepsilon, \lambda}\}_{\varepsilon > 0, \lambda \in (0, 1)}$  où

$$U_{\varepsilon, \lambda} = \{(x, y) \in X \times X : F_{xy}(\varepsilon) > 1 - \lambda \text{ et } L_{xy}(\varepsilon) < \lambda\}$$

est une base sur  $X \times X$  pour une uniformité Hausdorff.

**Remarque 1.14** Le théorème 1.5 est également vrai en particulier pour tous les espaces de Menger intuitionnistes dans lequel  $\sup_{t < 1} T(t, t) = 1$  et  $\inf_{t < 1} S(1 - t, 1 - t) = 0$ . Cependant, il est vrai pour les espaces métriques probabilistes intuitionnistes qui ne sont pas des espaces Menger intuitionnistes.

**Corollaire 1.3** Soit  $(X, F, L)$  un espace métrique probabiliste intuitionniste satisfaisant l'hypothèse du théorème 1.5. Alors les ensembles  $U_{\varepsilon, \lambda}(x) = \{y \in X : F_{xy}(\varepsilon) > 1 - \lambda \text{ et } L_{xy}(\varepsilon) < \lambda\}$  forment une base de voisinage pour une topologie de Hausdorff  $\tau_{(F, L)}$  (ou  $(\varepsilon - \lambda)$  topologie) sur  $X$ .

**Preuve** Ces ensembles sont des bases de voisinage pour la topologie uniforme sur  $X$  dérivé de  $U$ . ■

**Remarque 1.15** Selon le Corollaire 1.3, un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est ouvert si pour chaque  $x \in A$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda \in (0, 1)$  tel que  $U_{\varepsilon, \lambda}(x) = \{y \in X : F_{xy}(\varepsilon) > 1 - \lambda \text{ et } L_{xy}(\varepsilon) < \lambda\}$  est inclus dans  $A$ .

**Théorème 1.6** Si un espace métrique probabiliste intuitionniste satisfait l'hypothèse du théorème 1.5, la topologie déterminée par les ensembles  $U_{\varepsilon, \lambda}(x)$  est métrisable.

**Proposition 1.5** Soit  $(X, F, L)$  un espace métrique probabiliste intuitionniste satisfaisant l'hypothèse du théorème 1.5. Alors pour chaque  $x \in X, \varepsilon > 0, \lambda \in (0, 1)$ , on a  $U_{\varepsilon, \lambda}(x) = U_{\varepsilon, \lambda}^F(x)$ .

**Preuve** Il est clair que  $U_{\varepsilon, \lambda}(x) \subseteq U_{\varepsilon, \lambda}^F(x)$ . Supposons maintenant que  $y \in U_{\varepsilon, \lambda}^F(x)$ , alors  $F_{xy}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ . Ainsi, par la condition (1) de la définition 1.25,

$$1 \geq F_{xy}(\varepsilon) + L_{xy}(\varepsilon) > 1 - \lambda + L_{xy}(\varepsilon), \text{ par conséquent } L_{xy}(\varepsilon) < \lambda \text{ et donc } y \in U_{\varepsilon, \lambda}(x). \blacksquare$$

**Théorème 1.7** Soit  $(X, F, L)$  un espace métrique probabiliste intuitionniste satisfaisant l'hypothèse du théorème 1.5. Alors les topologies  $\tau_{(F, L)}$  et  $\tau_F$  coïncident sur  $X$ .

**Théorème 1.8** Soit  $(X, F, L)$  un espace métrique probabiliste intuitionniste satisfaisant l'hypothèse du théorème 1.5, alors la suite  $\{x_n\}$  est convergente vers  $x \in X$  et on écrit  $x_n \rightarrow x$  si et seulement si  $F_{x, x_n}(t) \rightarrow 1$  et  $L_{x, x_n}(t) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Preuve** Fixons  $t > 0$  et supposons que  $x_n \rightarrow x$  puis pour  $\lambda \in (0, 1)$ , il existe un entier  $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in U_{t, \lambda}(x)$  pour tout  $n \geq n_0$ . Alors  $1 - F_{xx_n}(t) < \lambda$  et  $L_{xx_n}(t) < \lambda$  et par conséquent  $F_{xx_n}(t) \rightarrow 1$  et  $L_{xx_n}(t) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Inversement, si pour chaque  $t > 0, F_{xx_n}(t) \rightarrow 1$  et  $L_{xx_n}(t) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ , il existe un entier  $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$  tel que  $1 - F_{xx_n}(t) < \lambda$  et  $L_{xx_n}(t) < \lambda$  pour tout  $n \geq n_0$ . Il s'ensuit que  $F_{xx_n}(t) > 1 - \lambda$  et  $L_{xx_n}(t) < \lambda$  pour tout  $n \geq n_0$ . Donc  $x_n \in U_{t, \lambda}(x)$  et  $x_n \rightarrow x$ . ■

**Définition 1.28** Soit  $(X, F, L, T, S)$  un espace de Menger intuitionniste avec  $\sup_{t < 1} T(t, t) = 1$  et  $\inf_{t < 1} S(1 - t, 1 - t) = 0$ .

(1) Une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est dite une suite de Cauchy si pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda \in (0, 1)$ , il existe un entier positif  $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda)$  tel que  $F_{x_n x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$  et  $L_{x_n x_m}(\varepsilon) < \lambda$  pour tout  $n, m \geq n_0$ .

(2) Un espace de Menger intuitionniste dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet.

**Théorème 1.9** Soit  $(X, F, L, T, S)$  un espace de Menger intuitionniste avec  $\sup_{t < 1} T(t, t) = 1$  et  $\inf_{t < 1} S(1 - t, 1 - t) = 0$ , tel que toute suite de Cauchy dans  $X$  a une sous-suite convergente alors  $(X, F, L, T, S)$  est complet.

**Preuve** Soient  $\{x_n\}$  suite de Cauchy et  $\{x_{n_i}\}$  sous-suite de  $\{x_n\}$  qui converge vers  $x$ . On démontre que  $x_n \rightarrow x$ . Soient  $t > 0$  et  $\varepsilon \in (0, 1)$ . On choisit  $\lambda \in (0, 1)$  tel que  $T(1 - \lambda, 1 - \lambda) \geq 1 - \varepsilon$  et  $S(\lambda, \lambda) \leq \varepsilon$ . Puisque  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy, il existe un entier positif  $n_0$  tel que  $F_{x_n x_m}(\frac{t}{2}) > 1 - \lambda$  et  $L_{x_n x_m}(\frac{t}{2}) < \lambda$  pour tout  $n, m \geq n_0$ . Comme  $x_{n_i} \rightarrow x$ , il existe un entier positif  $n_j$  tel que pour tout  $n_j > n_0$ , on a  $F_{x_{n_j} x}(\frac{t}{2}) > 1 - \lambda$  et  $L_{x_{n_j} x}(\frac{t}{2}) < \lambda$ . Alors si  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} F_{x_n x}(t) &\geq T\left(F_{x_n x_{n_j}}\left(\frac{t}{2}\right), F_{x_{n_j} x}\left(\frac{t}{2}\right)\right) > T(1 - \lambda, 1 - \lambda) \geq 1 - \varepsilon, \\ L_{x_n x}(t) &\geq S\left(L_{x_n x_{n_j}}\left(\frac{t}{2}\right), L_{x_{n_j} x}\left(\frac{t}{2}\right)\right) > S(\lambda, \lambda) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors,  $x_n \rightarrow x$  donc  $(X, F, L, T, S)$  est complet. ■

**Remarque 1.16** Un espace de Menger intuitionniste induit  $(X, F, L, T_M, S_M)$  est complet si  $(X, d)$  est complet.

**Lemme 1.12** Soit  $(X, F, L, T, S)$  un espace de Menger intuitionniste avec  $\sup_{t < 1} T(t, t) = 1$  et  $\inf_{t < 1} S(1 - t, 1 - t) = 0$ . Soient  $\{x_n\}, \{y_n\}$  deux suites dans  $X$  avec  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  respectivement. Alors

- (a)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t) \geq F_{xy}(t)$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t) \leq L_{xy}(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .
- (b) Si  $t > 0$  est un point continu de  $F_{xy}$  et  $L_{xy}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t) = F_{xy}(t)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t) = L_{xy}(t)$ .

**Preuve** Si  $t = 0$ , alors  $F_{x_n y_n}(0) = 0 = F_{xy}(0)$  et  $L_{x_n y_n}(0) = 1 = L_{xy}(0)$  pour tout  $n$ .

(a) Supposons que  $t > 0$  et  $0 < \varepsilon < t$  donné. En utilisant (1) et (2) de la définition 1.26, on trouve

$$\begin{aligned} F_{x_n y_n}(t) &\geq T(F_{x_n x}(\varepsilon/2), T(F_{xy}(t - \varepsilon), F_{yy_n}(\varepsilon/2))), \\ L_{x_n y_n}(t) &\geq S(L_{x_n x}(\varepsilon/2), S(L_{xy}(t - \varepsilon), L_{yy_n}(\varepsilon/2))); \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t) &\geq T(1, T(F_{xy}(t - \varepsilon), 1)) = F_{xy}(t - \varepsilon), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t) &\leq S(0, S(L_{xy}(t - \varepsilon), 0)) = L_{xy}(t - \varepsilon). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t) \geq F_{xy}(t) \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t) \leq L_{xy}(t).$$

(b) Fixons  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < t/2$ . Donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{aligned} F_{x_n y_n}(t) &\geq F_{x_n y_n}(t - \varepsilon) \geq T(F_{x_n x}(\varepsilon/2), T(F_{xy}(t - 2\varepsilon), F_{yy_n}(\varepsilon/2))), \\ L_{x_n y_n}(t) &\leq L_{x_n y_n}(t - \varepsilon) \leq S(L_{x_n x}(\varepsilon/2), S(L_{xy}(t - 2\varepsilon), L_{yy_n}(\varepsilon/2))); \\ F_{xy}(t + 2\varepsilon) &\geq F_{xy}(t + \varepsilon) \geq T(F_{x_n x}(\varepsilon/2), T(F_{x_n y_n}(t), F_{yy_n}(\varepsilon/2))), \\ L_{xy}(t + 2\varepsilon) &\leq L_{xy}(t + \varepsilon) \leq S(L_{x_n x}(\varepsilon/2), S(L_{x_n y_n}(t), L_{yy_n}(\varepsilon/2))) \end{aligned}$$

pour tout  $n \geq n_0$ . Lorsque  $n \rightarrow \infty$  on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t) &\geq T(1, T(F_{xy}(t - 2\varepsilon), 1)) = F_{xy}(t - 2\varepsilon), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t) &\leq S(0, S(L_{xy}(t - 2\varepsilon), 0)) = L_{xy}(t - 2\varepsilon); \\ F_{xy}(t + 2\varepsilon) &\geq T\left(1, T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t), 1\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t), \\ L_{xy}(t + 2\varepsilon) &\leq S\left(0, S\left(\lim_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t), 0\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t). \end{aligned}$$

Comme  $t > 0$  est un point continu de  $F_{xy}$  et  $L_{xy}$ , on déduit que  $F_{xy}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n y_n}(t)$  et  $L_{xy}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{x_n y_n}(t)$ . ■

## 1.7 Espaces métriques flous intuitionnistes

Atanassov [6] a introduit le concept des ensembles flou intuitionnistes comme une généralisation des ensembles flous. En 2004, Park [49] a généralisé la notion d'espace métrique flou donnée par George et Veeramani [[19]] à l'aide de  $t$ -normes continues et  $t$ -conormes continues et a introduit la notion d'espace métrique flou intuitionniste. Récemment, en 2006, Alaca et al [2], en utilisant l'idée des ensembles flous intuitionnistes, ont défini la notion d'espace métrique flou intuitionniste à l'aide de  $t$ -normes continues et  $t$ -conormes continues comme une généralisation de l'espace métrique flou au sens de Kramosil et Michalek [37].

**Définition 1.29** (Park [49]) *Une 5-tuple  $(X, M, N, *, \diamond)$  est dite un espace métrique flou intuitionniste si  $X$  est un ensemble arbitraire,  $*$  est une  $t$ -norme continue,  $\diamond$  est une  $t$ -conorme continue et  $M$  et  $N$  sont des ensembles flous sur  $X^2 \times [0, \infty)$  satisfaisant aux conditions suivantes pour tout  $x, y, z \in X$  et  $s, t > 0$ ,*

- (1)  $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$ ,
- (2)  $M(x, y, t) > 0$ ,
- (3)  $M(x, y, t) = 1$  ssi  $x = y$ ,
- (4)  $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ ,
- (5)  $M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t + s)$ ,
- (6)  $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  est continue,
- (7)  $N(x, y, t) > 0$ ,
- (8)  $N(x, y, t) = 0$  ssi  $x = y$ ,
- (9)  $N(x, y, t) = N(y, x, t)$ ,
- (10)  $N(x, y, t) \diamond N(y, z, t) \geq N(x, z, t + s)$ ,
- (11)  $N(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  est continue.

Donc  $(M, N)$  est appelé un espace métrique flou intuitionniste sur  $X$ . Les fonctions  $M(x, y, t)$  et  $N(x, y, t)$  désignent le niveau de proximité et le niveau de non-proximité entre  $x$  et  $y$  par rapport à  $t$ .

**Définition 1.30** (Alaca [2]) *Une 5-tuple  $(X, M, N, *, \diamond)$  est dite un espace métrique flou intuitionniste si  $X$  est un ensemble arbitraire,  $*$  est une  $t$ -norme continue,  $\diamond$  est une  $t$ -conorme*

continue et  $M$  et  $N$  sont des ensembles flou sur  $X^2 \times [0, \infty)$  satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tout  $x, y, z \in X$  et  $s, t > 0$ ,

- (1)  $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$  ;
- (2)  $M(x, y, 0) = 0$  ;
- (3)  $M(x, y, t) = 1$  ssi  $x = y$  ;
- (4)  $M(x, y, t) = M(y, x, t)$  ;
- (5)  $M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t + s)$  ;
- (6)  $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  est continue à gauche,
- (7)  $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$  ;
- (8)  $N(x, y, 0) = 1$ ,
- (9)  $N(x, y, t) = 0$  ssi  $x = y$ ,
- (10)  $N(x, y, t) = N(y, x, t)$ ,
- (11)  $N(x, y, t) \diamond N(y, z, t) \geq N(x, z, t + s)$ ,
- (12)  $N(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  est continue à droite,
- (13)  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, y, t) = 0$ .

Donc  $(M, N)$  est appelé un espace métrique flou intuitionniste sur  $X$ .  $M(x, y, t)$  et  $N(x, y, t)$  désignent le niveau de proximité et le niveau de non-proximité entre  $x$  et  $y$  par rapport à  $t$ .

**Remarque 1.17** Tout espace métrique flou intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  est un espace de Menger intuitionniste en considérant  $F : X \times X \rightarrow D$  et  $L : X \times X \rightarrow E$  définies par  $F_{xy}(t) = M(x, y, t)$  et  $L_{xy}(t) = N(x, y, t)$  pour tout  $x, y \in X$ .

Soit  $(X, M, N, *, \diamond)$  un espace métrique flou intuitionniste. Pour  $t > 0$ , la boule ouverte  $B(x, r, t)$  de centre  $x \in X$  et de rayon  $r : 0 < r < 1$  est définie par

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r \text{ et } N(x, y, t) < r\}.$$

Un sous ensemble  $A \subset X$  est dite ouverte si pour tout  $x \in A$ , il existe  $t > 0$  et  $0 < r < 1$  telle que  $B(x, r, t) \subset A$ . Soit  $\mathfrak{S}$  la famille de tous les sous-ensembles ouverts de  $X$ . Alors  $\mathfrak{S}$  est appelée la topologie induite sur  $X$  par la métrique flou intuitionniste  $(M, N)$ . Cette topologie

est Hausdorff et dénombrable. Dans [49], Park a prouvé que la famille des ensembles de la forme  $\{B(x, r, t) : x \in X, 0 < r < 1, t > 0\}$  est une base pour la topologie  $\mathfrak{S}$  sur  $X$ .

**Exemple 1.15** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On définit  $t$ -norme et  $t$ -conorme par  $a * b = \min\{a, b\}$  et  $a \diamond b = \max\{a, b\}$  respectivement. Soit

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \text{ et } N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}, \text{ pour tout } x, y \in X \text{ et } t > 0.$$

Alors  $(X, M, N, *, \diamond)$  est un espace métrique flou intuitionniste. Nous appelons cette métrique floue intuitionniste  $(M, N)$  induite par la métrique  $d$  la métrique floue intuitionniste standard. Il est évident que  $N(x, y, t) = 1 - M(x, y, t)$ .

**Définition 1.31** Soit  $(X, M, N, *, \diamond)$  un espace métrique flou intuitionniste. Alors

(1) la suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est dite convergente s'il existe  $x \in X$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x; t) = 0, \text{ pour tout } t > 0.$$

(2) la suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est dite une suite de Cauchy si pour toute  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon \text{ et } N(x_n, x_m; t) < \varepsilon, \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } n, m \geq n_0.$$

(3) L'espace métrique flou intuitionniste  $(X, M, N, *, \diamond)$  est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans  $X$  est convergente.

**Remarque 1.18** Dans l'espace métrique flou intuitionniste  $(X, M, N, *, \diamond)$ ,  $M(x, y, \cdot)$  est croissante et  $N(x, y, \cdot)$  est décroissante pour tout  $x, y \in X$ .

**Remarque 1.19** Il est facile de prouver que si  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, t_n \rightarrow t$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) = M(x, y, t) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, y_n, t_n) = N(x, y, t).$$

**Remarque 1.20** Dans l'espace métrique flou intuitionniste  $(X, M, N, *, \diamond)$ , si  $M(x, y, t) > 1 - r$  et  $N(x, y, t) < r$  pour tout  $x, y \in X, t > 0$  et  $0 < r < 1$ , on peut trouver  $0 < t_0 < t$  tel que  $M(x, y, t_0) > 1 - r$  et  $N(x, y, t_0) < r$ .

**Remarque 1.21** *Il est clair que si  $(X, M, N, *, \diamond)$  est un espace métrique flou intuitionniste, alors  $(X, M, *)$  est un espace métrique flou. Inversement, si  $(X, M, *)$  est un espace métrique flou, alors  $(X, M, 1 - M, *, \diamond)$  est un espace métrique flou intuitionniste où  $a \diamond b = 1 - [(1 - a) * (1 - b)]$  pour tout  $a, b \in [0, 1]$ .*

## 1.8 Définitions de base

### 1.8.1 Applications compatibles

**Définition 1.32** *Deux applications  $A$  et  $S$  d'un espace de Menger intuitionniste dans lui même sont dites compatibles si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{ASx_n, SAx_n}(t) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{ASx_n, SAx_n}(t) = 0, \text{ pour tout } t > 0,$$

pour toute suite  $\{x_n\} \subset X$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = z, \text{ pour un certain } z \in X.$$

**Définition 1.33** *Deux applications  $A$  et  $S$  d'un espace de Menger intuitionniste dans lui même sont dites non-compatibles s'il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ax_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Sx_n, z}(t) = 1$  pour un certain  $z \in X$ , mais pour un certain  $t > 0$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{ASx_n, SAx_n}(t) \neq 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_{ASx_n, SAx_n}(t) \neq 0$  ou l'une des limites n'existe pas.*

### 1.8.2 Applications faiblement compatibles

**Définition 1.34** ([34]) *Deux applications  $A$  et  $S$  d'un ensemble non vide  $X$  sont dites faiblement compatibles si elles commutent à leurs points de coïncidence, (i.e., si  $Ax = Sx$ ) pour un certain  $x \in X$  :  $ASx = SAx$ .*

**Remarque 1.22** *La compatibilité implique la compatibilité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général, voir [59], exemple 1.*

### 1.8.3 La propriété (E.A)

**Définition 1.35** ([34], [1]) *Soient  $A$  et  $S$  deux applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même. La paire  $(A, S)$  est tangentielle ou satisfait la propriété (E.A) s'il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que pour un certain  $z \in X$  on a*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Sx_n, z}(t) = 1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Sx_n, z}(t) = 0 \text{ pour tout } t > 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

**Remarque 1.23** *Si  $(A, S)$  est compatible, alors elle satisfait la propriété (E.A), mais il existe des applications qui ne sont pas compatibles et satisfont cette propriété.*

**Définition 1.36** ([41]) *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même. On dit qu'elles satisfont la propriété (E.A) commune s'il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que pour un certain  $z \in X$  et pour tout  $t > 0$  on a*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Sx_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{By_n, z}(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ty, z}(t) = 1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Sx_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{By_n, z}(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ty, z}(t) = 0., \end{aligned}$$

Si  $B = A$  et  $T = S$  dans cette définition, on obtient la définition de la propriété (E.A).

### 1.8.4 La propriété (CLR)

**Définition 1.37** ([64]) *Soient  $A$  et  $S$  deux applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même. La paire  $(A, S)$  satisfait la propriété "valeur limite commune" par rapport à  $S$  (brièvement  $CLR_S$  property), s'il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que (1.10) est vérifiée, où  $z \in S(X)$ .*

**Exemple 1.16** *Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste, où  $X = [0, \infty)$ , la  $t$ -norme  $*$  est définie par  $a * b = \min\{a, b\}$ , la  $t$ -conorme  $\diamond$  est définie par  $a \diamond b = \max\{a, b\}$  et*

$$F_{xy}(t) = H(t - |x - y|), \quad L_{xy}(t) = G(t - |x - y|)$$

pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . On définit les applications  $A$  et  $S$  de  $X$  dans  $X$  par :  $Ax = x + 4$ ,  $Sx = 5x$  Soit la suite  $\left\{ x_n = 1 + \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $X$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = Sx_n = 5$ , alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ax_n, 5}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Sx_n, 5}(t) = 1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ax_n, 5}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Sx_n, 5}(t) = 0 \text{ pour tout } t > 0, \end{aligned}$$

où  $5 \in S(X)$  et  $t > 0$ . Par conséquent, les applications  $A$  et  $S$  satisfont la propriété  $CLR_S$ .

D'après cet exemple, il est clair qu'une paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $(E, A)$  avec la fermeture du sous-espace  $S(X)$  vérifie toujours la propriété  $CLR_S$ .

**Définition 1.38** ([[30]]) Deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfont la propriété "common limit range" par rapport aux application  $S$  et  $T$  (brièvement,  $CLR_{ST}$  property), s'il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que pour tout  $t > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Sx_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{By_n, z}(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ty_n, z}(t) = 1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Sx_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{By_n, z}(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ty_n, z}(t) = 0, \end{aligned}$$

où  $z \in S(X) \cap T(X)$ .

**Remarque 1.24** Si  $B = A$  et  $T = S$  dans cette définition, on obtient la définition de la propriété  $CLR_S$ .

**Remarque 1.25** La propriété  $CLR_{ST}$  implique la propriété commune  $(E.A.)$ , mais la réciproque n'est pas vraie en général, voir [12], exemple 21.

**Proposition 1.6** ([[15]]) Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $(E.A.)$  commune et  $S(X)$  et  $T(X)$  sont deux sous-ensembles fermés de  $X$ , alors les paires satisfont aussi la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Définition 1.39** ([[12]]) Deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfont la propriété "the joint common limit range"

par rapport aux applications  $S$  et  $T$  (brièvement,  $JCLR_{ST}$  property), s'il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que pour tout  $t > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Sx_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{By_n, z}(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Ty_n, z}(t) = 1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ax_n, z}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Sx_n, z}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{By_n, z}(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{Ty_n, z}(t) = 0, \end{aligned}$$

où  $z = Su = Tu$ ,  $u \in X$ .

**Remarque 1.26** Si  $B = A$  et  $T = S$  dans cette définition, on obtient la définition de la propriété  $CLR_S$ .

**Définition 1.40** ([4]) Deux familles d'applications  $\{A_i\}$  et  $\{S_j\}$  commutent deux à deux si

- (1)  $A_i A_j = A_j A_i$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,
- (2)  $S_k S_l = S_l S_k$ ,  $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,
- (3)  $A_i S_k = S_k A_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 1.8.5 Point fixe couplé

**Définition 1.41** ([42]) Un élément  $x \in X$  est appelé un point fixe commun des applications  $f : X \times X \rightarrow X$  et  $g : X \rightarrow X$  si

$$x = f(x, x) = g(x)$$

**Définition 1.42** ([67]) Un élément  $(x, y) \in X \times X$  est appelé

- (i) un point fixe couplé de l'application  $f : X \times X \rightarrow X$  si

$$f(x, y) = x \text{ et } f(y, x) = y.$$

- (ii) un point de coïncidence couplé des applications  $f : X \times X \rightarrow X$  et  $g : X \rightarrow X$  si

$$f(x, y) = g(x) \text{ et } f(y, x) = g(y)$$

(iii) un point fixe commun couplé des applications  $f : X \times X \rightarrow X$  et  $g : X \rightarrow X$  si

$$x = f(x, y) = g(x) \quad \text{et} \quad y = f(y, x) = g(y)$$

**Définition 1.43** Soient  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger et  $f : X \times X \rightarrow X$  et  $g : X \rightarrow X$  deux applications. On dit que  $f$  et  $g$  sont faiblement compatibles (ou  $w$ -compatible) si elles commutent à leurs points de coïncidence couplés, i.e; si  $(x, y)$  est un point de coïncidence couplé de  $f$  et  $g$ , alors

$$g(f(x, y)) = f(g(x), g(y)) \quad \text{et} \quad g(f(y, x)) = f(g(y), g(x)).$$

**Définition 1.44** ([11]) Soient  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$ ,  $S : X \rightarrow X$  quatre applications. On dit les paires  $(B, S)$  et  $(A, T)$  ont un point de coïncidence couplé commun s'il existe  $a, b \in X$  tel que

$$B(a, b) = S(a) = T(a) = A(a, b) \quad \text{et} \quad B(b, a) = S(b) = T(b) = A(b, a).$$

## Chapitre 2

# Théorèmes de points fixe commun dans les espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la propriété CLR

### 2.1 Introduction

Il est intéressant d'étudier la théorie du point fixe commun des applications, cette problématique a été liée aux relations entre les applications : commutatives, compatibles, faiblement compatibles...etc. Le développement des notions de la commutativité des applications a été étendu dans des espaces métriques probabilistes par plusieurs mathématiciens. Par exemple, Singh et Pant [62] ont étendu la notion de commutativité faible (introduite par Sessa [60] dans les espaces métrique ordinaires), Mishra [47] a élargi la notion de compatibilité (introduite par Jungck [33] dans les espaces métrique ordinaires), or Singh et Jain [63] ont introduit le concept des applications faiblement compatibles dans les espaces de Menger.

En 2011, Sintunavarat et Kuman [64] ont obtenu que les notions de propriété  $(E.A)$  requière toujours la complétude (ou fermeture) des sous espaces pour l'existence du point fixe commun. Par conséquent, ils ont inventé l'idée de limite commune dans la propriété (dite CLR ) qui détend l'exigence de la complétude (ou fermeture) des sous-espaces. Recemment, Chauhan et al [12] ont défini la notion de  $JCLR_{ST}$  propriété qui ne requière pas la fermeture des sous espaces pour

l'existence des points fixes pour deux paires d'applications.

Etant donné quatre applications  $A, B, S$  et  $T$  d'un espace de Menger intuitionniste dans lui-même, dans ce chapitre on va démontrer quelques résultats concernant des théorèmes de point fixe commun entre  $A, B, S$  et  $T$  en utilisant ces propriétés. Nos théorèmes généralisent et améliorent les théorèmes dans [15], [13], [14], [18], [4], [44] et [58].

## 2.2 Résultats principaux

**Lemme 2.1** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui-même satisfaisant les conditions suivantes :*

- 1) [La paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $CLR_S$  ] ou [le pair  $(B, T)$  satisfait la propriété  $CLR_T$ ].
- 2)  $A(X) \subseteq T(X)$  ou  $B(X) \subseteq S(X)$ .
- 3)  $T(X)$  ou  $S(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ .
- 4) [ $B(y_n)$  converge pour toute suite  $\{y_n\}$  dans  $X$  quand  $T(y_n)$  converge ] ou [  $A(x_n)$  converge pour toute suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  quand  $S(x_n)$  converge].

Si

$$\begin{aligned}
 & (1 + \alpha F_{Sx, Ty}(t)) F_{Ax, By}(t) > \alpha \min \{F_{Ax, Sx}(t) F_{By, Ty}(t), F_{Sx, By}(t) F_{Ax, Ty}(t)\} \\
 & + \min \left\{ \begin{array}{l} F_{Sx, Ty}(t), \sup_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \min \{F_{Ax, Sx}(t_1), F_{By, Ty}(t_2)\}, \\ \sup_{t_3+t_4=2t} \min \{F_{Sx, By}(t_3), F_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\} \\
 & (1 + \beta L_{Sx, Ty}(t)) L_{Ax, By}(t) < \beta \max \{L_{Ax, Sx}(t) L_{By, Ty}(t), L_{Sx, By}(t) L_{Ax, Ty}(t)\} \\
 & + \max \left\{ \begin{array}{l} L_{Sx, Ty}(t), \inf_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \max \{L_{Ax, Sx}(t_1), L_{By, Ty}(t_2)\}, \\ \inf_{t_3+t_4=2t} \max \{L_{Sx, By}(t_3), L_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tout  $x, y \in X$ ,  $t > 0$ , pour certains  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $1 \leq k < 2$ , alors les paires  $(A, S)$ ,  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Preuve** Supposons que la paire  $(A, S)$  vérifie la propriété  $(CLR_S)$  et  $T(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ .

la paire  $(A, S)$  vérifie la propriété  $(CLR_S)$ , alors, il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = z, \text{ où } z \in S(X).$$

Comme  $A(X) \subseteq T(X)$ , il existe une suite  $\{y_n\}$  dans  $X$  telle que  $Ax_n = Ty_n$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = z, \text{ où } z \in S(X) \cap T(X).$$

Ainsi  $Ax_n \rightarrow z$ ,  $Sx_n \rightarrow z$  et  $Ty_n \rightarrow z$ . Maintenant, on va montrer que  $By_n \rightarrow z$ .

Soient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{By_n, l}(t_0) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_{By_n, l}(t_0) = 0$ . On affirme que  $l = z$ .

On suppose que  $l \neq z$ . On démontre qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que

$$F_{z, l}\left(\frac{2}{k}t_0\right) > F_{z, l}(t_0) \text{ et } L_{z, l}\left(\frac{2}{k}t_0\right) < L_{z, l}(t_0). \quad (2.2)$$

Supposons le contraire. Alors, pour tout  $t > 0$ , on a

$$F_{z, l}\left(\frac{2}{k}t\right) \leq F_{z, l}(t) \text{ ou } L_{z, l}\left(\frac{2}{k}t\right) \geq L_{z, l}(t). \quad (2.3)$$

En utilisant (2.3) de façon répétée, on obtient

$$\begin{aligned} F_{z, l}(t) &\geq F_{z, l}\left(\frac{2}{k}t\right) \geq \dots \geq F_{z, l}\left(\left(\frac{2}{k}\right)^n t\right) \rightarrow 1 \text{ ou} \\ L_{z, l}(t) &\leq L_{z, l}\left(\frac{2}{k}t\right) \leq \dots \leq L_{z, l}\left(\left(\frac{2}{k}\right)^n t\right) \rightarrow 0; \end{aligned}$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on trouve  $F_{z, l}(t) = 1$  ou  $L_{z, l}(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ , ce qui contredit  $l \neq z$  et par conséquent (2.2) est prouvée.

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $t_0$  dans (2.2) est un point de continuité de  $F_{z, l}$  et  $L_{z, l}$ . Comme chaque fonction de distribution distance est continue à gauche et chaque fonction de distribution non-distance est continue à droite, (2.2) implique qu'il existe  $\epsilon > 0$  telle que (2.2) soit vérifiée pour tout  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0)$ .

Comme  $F_{z, l}$  est croissante et  $L_{z, l}$  est décroissante, l'ensemble des points discontinuité de  $F_{z, l}$

et  $L_{z,l}$  est un ensemble dénombrable au plus. Ainsi, lorsque  $t_0$  est un point de discontinuité de  $F_{z,l}$  et  $L_{z,l}$ , on peut choisir un point de continuité  $t_1$  du  $F_{z,l}$  et  $F_{z,l}$  dans  $(t_0 - \epsilon, t_0)$  pour remplacer  $t_0$ . En utilisant l'inégalité (2.1) avec  $x = x_n$ ,  $y = y_n$ , on obtient pour un certain  $t_0 > 0$

$$(1 + \alpha F_{Sx_n, Ty_n}(t_0)) F_{Ax_n, By_n}(t_0) > \alpha \min \left\{ \begin{array}{l} F_{Ax_n, Sx_n}(t_0) F_{By_n, Ty_n}(t_0), \\ F_{Sx_n, By_n}(t_0) F_{Ax_n, Ty_n}(t_0) \end{array} \right\} \\ + \min \left\{ \begin{array}{l} F_{Sx_n, Ty_n}(t_0), \\ \min \left\{ F_{Ax_n, Sx_n}(\epsilon), F_{By_n, Ty_n}\left(\frac{2}{k}t_0 - \epsilon\right) \right\}, \\ \min \{ F_{Sx_n, By_n}(2t_0 - \epsilon), F_{Ax_n, Ty_n}(\epsilon) \} \end{array} \right\}$$

et

$$(1 + \beta L_{Sx_n, Ty_n}(t_0)) L_{Ax_n, By_n}(t_0) < \beta \max \left\{ \begin{array}{l} L_{Ax_n, Sx_n}(t_0) L_{By_n, Ty_n}(t_0), \\ L_{Sx_n, By_n}(t_0) L_{Ax_n, Ty_n}(t_0) \end{array} \right\} \\ + \max \left\{ \begin{array}{l} L_{Sx_n, Ty_n}(t_0), \\ \max \left\{ L_{Ax_n, Sx_n}(\epsilon), L_{By_n, Ty_n}\left(\frac{2}{k}t_0 - \epsilon\right) \right\}, \\ \max \{ L_{Sx_n, By_n}(2t_0 - \epsilon), L_{Ax_n, Ty_n}(\epsilon) \} \end{array} \right\}$$

pour tout  $\epsilon \in \left(0, \frac{2}{k}t_0\right)$ . En faisant  $n \rightarrow +\infty$ , on a

$$F_{z,l}(t_0) + \alpha F_{z,l}(t_0) \geq \alpha F_{z,l}(t_0) + \min \left\{ F_{l,z}\left(\frac{2}{k}t_0 - \epsilon\right), F_{l,z}(2t_0 - \epsilon) \right\} \text{ et} \\ L_{z,l}(t_0) < \max \left\{ L_{l,z}\left(\frac{2}{k}t_0 - \epsilon\right), L_{l,z}(2t_0 - \epsilon) \right\}$$

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$F_{z,l}(t_0) \geq F_{z,l}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \text{ et } L_{z,l}(t_0) \leq L_{z,l}\left(\frac{2}{k}t_0\right)$$

ce qui contredit (2.2), donc on a  $z = l$ . Ainsi, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ . ■

**Remarque 2.1** *La réciproque du lemme 2.1 n'est pas vraie en général, voir l'exemple 2.1 ci-dessous.*

**Théorème 2.1** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant l'inégalité (2.1) du (lemme 2.1). Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  ont des points de coïncidence. De plus, si  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .*

**Preuve** Puisque les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} By_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = z,$$

où  $z \in S(X) \cap T(X)$ . Donc, il existe  $u, v \in X$  tels que  $Su = z$  et  $Tv = z$ .

Comme dans la preuve du lemme 2.1, on peut prouver que  $Au = Su = z$  en posant  $x = u$  et  $y = y_n$  dans l'inégalité (2.1). D'où  $u$  est un point de coïncidence de la paire  $(A, S)$ .

Maintenant, on affirme que  $Bv = Tv = z$ . Si  $z \neq Bv$ , on posant  $x = u$  et  $y = v$  dans l'inégalité (2.1), on obtient pour un certain  $t_0 > 0$

$$\begin{aligned} (1 + \alpha F_{Su, Tv}(t_0)) F_{Au, Bv}(t_0) &> \alpha F_{Bv, z}(t_0) + \min \left\{ F_{Bv, z} \left( \frac{2}{k} t_0 \right), F_{Bv, z}(2t_0) \right\} \text{ et} \\ (1 + \beta L_{Su, Tv}(t_0)) L_{Au, Bv}(t_0) &\leq \max \left\{ L_{Bv, z} \left( \frac{2}{k} t_0 \right), L_{z, Bv}(2t_0) \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_{z, Bv}(t_0) \geq F_{z, Bv} \left( \frac{2}{k} t_0 \right) \text{ et } L_{z, Bv}(t_0) \leq L_{z, Bv} \left( \frac{2}{k} t_0 \right),$$

ce qui contredit (2.2), donc  $Bv = Tv = z$ . Par conséquent,  $v$  est un point de coïncidence de la paire  $(B, T)$ . Puisque la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible et  $Au = Su$  on obtient  $Az = Sz$ .

Maintenant, on prouve que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Si  $z \neq Az$ , en appliquant l'inégalité (2.1) avec  $x = z$  et  $y = v$ , on trouve pour un certain  $t_0 > 0$

$$(1 + \alpha F_{Sz, Tv}(t_0)) F_{Az, Bv}(t_0) > \alpha (F_{Az, z}(t_0))^2 + \min \{ F_{Az, z}(t_0), F_{Az, z}(t_0) \}$$

et

$$(1 + \beta L_{Sz, Tv}(t_0)) L_{Az, Bv}(t_0) < \beta(L_{Az, z}(t_0))^2 + \max\{L_{Az, z}(t_0), L_{Az, z}(t_0)\}.$$

Donc

$$F_{Az, z}(t_0) > F_{Az, z}(t_0) \text{ et } L_{Az, z}(t_0) < L_{Az, z}(t_0),$$

ce qui est impossible, d'où  $Az = z = Sz$ , ce qui montre que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Comme la paire  $(B, T)$  est faiblement compatible, on obtient  $Bz = BTv = TBv = Tz$ . De la même manière, on peut prouver que  $z$  est un point fixe commun de  $B$  et  $T$  en posant  $x = y = z$  dans l'inégalité (2.1). Par conséquent,  $z$  est un point fixe commun de  $A, B, S$  et  $T$ . L'unicité de  $z$  suit facilement de l'inégalité (2.1). ■

**Remarque 2.2** *Le théorème 2.1 améliore et généralise le théorème 3.1 de [18].*

L'exemple suivant soutient notre théorème 2.1.

**Exemple 2.1** *Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste, où  $X = [3; 11[$ ,  $a * b = \min\{a, b\}$  et  $a \diamond b = \max\{a, b\}$  avec*

$$F_{xy}(t) = H(t - |x - y|), \quad L_{xy}(t) = G(t - |x - y|)$$

pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . On définit les applications  $A, B, S$  et  $T$  de  $X$  dans  $X$  par

$$Ax = \begin{cases} 3 & x \in \{3\} \cup ]5, 11[ \\ 10 & x \in ]3, 5] \end{cases}, \quad Bx = \begin{cases} 3 & x \in \{3\} \cup ]5, 11[ \\ 9 & x \in ]3, 5] \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 3 \\ 7 & \text{si } x \in ]3, 5] \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in ]5, 11[ \end{cases}, \quad Tx = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 3 \\ x+4 & \text{si } x \in ]3, 5] \\ x-2 & \text{si } x \in ]5, 11[ \end{cases}$$

On prend  $\{x_n = 3\}$ ,  $\left\{y_n = 5 + \frac{1}{n}\right\}$  ou  $\left\{x_n = 5 + \frac{1}{n}\right\}$ ,  $\{y_n = 3\}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Bx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_n = 3 \in S(X) \cap T(X)$ , alors, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ . Aussi,  $A(X) = \{3, 10\} \subsetneq ]3, 9[ = T(X)$  et  $B(X) = \{3; 9\} \subsetneq (\{7\} \cup ]3, 6]) =$

$S(X)$ . Ainsi, toutes les conditions du théorème 2.1 sont vérifiées et 3 est un point fixe commun unique de  $A, B, S$  et  $T$ . On remarque que toutes les applications sont discontinues au point 3. Dans cet exemple,  $S(X)$  et  $T(X)$  ne sont pas des sous-ensembles fermés de  $X$ .

**Lemme 2.2** Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant les conditions 1,2,3,4 du lemme 2.1 et

$$\begin{aligned}
 & (1 + \alpha F_{Sx, Ty}(t)) F_{Ax, By}(t) > \alpha \min \{F_{Ax, Sx}(t) F_{By, Ty}(t), F_{Sx, By}(t) F_{Ax, Ty}(t)\} \\
 & \quad + \min \left\{ \begin{array}{l} F_{Sx, Ty}(t), \sup_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \min \{F_{Ax, Sx}(t_1), F_{Sx, By}(t_2)\}, \\ \sup_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \min \{F_{By, Ty}(t_3), F_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\} \\
 & (1 + \beta L_{Sx, Ty}(t)) L_{Ax, By}(t) < \beta \max \{L_{Ax, Sx}(t) L_{By, Ty}(t), L_{Sx, By}(t) L_{Ax, Ty}(t)\} \\
 & \quad + \max \left\{ \begin{array}{l} L_{Sx, Ty}(t), \inf_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \max \{L_{Ax, Sx}(t_1), L_{Sx, By}(t_2)\}, \\ \inf_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \max \{L_{By, Ty}(t_3), L_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

pour tout  $x, y \in X$ ,  $t > 0$  pour certaines  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $1 \leq k < 2$ . Alors les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Preuve** Comme dans la preuve du lemme 2.1, il existe  $t_0 > 0$  tel que (2.2) soit vérifiée. En utilisant l'inégalité (2.4) avec  $x = x_n$ ,  $y = y_n$  et lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a pour tout  $\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{k}t_0\right)$

$$\begin{aligned}
 F_{z,l}(t_0) & \geq \min \left\{ 1, F_{l,z} \left( \frac{2}{k}t_0 - \varepsilon \right) \right\} = F_{l,z} \left( \frac{2}{k}t_0 - \varepsilon \right), \\
 L_{z,l}(t_0) & \leq \max \left\{ 0, L_{l,z} \left( \frac{2}{k}t_0 - \varepsilon \right) \right\} = L_{l,z} \left( \frac{2}{k}t_0 - \varepsilon \right)
 \end{aligned}$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$F_{z,l}(t_0) \geq F_{z,l} \left( \frac{2}{k}t_0 \right) \text{ et } L_{z,l}(t_0) \leq L_{z,l} \left( \frac{2}{k}t_0 \right)$$

ce qui contredit (2.2) et donc on a  $z = l$ . Ainsi, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ . D'une manière similaire, on peut démontrer que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$  si la paire  $(B, T)$  satisfait la propriété  $CLR_T$ ,  $B(X) \subseteq S(X)$  et  $S(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ . ■

**Théorème 2.2** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste dans lui même  $(X, F, L, *, \diamond)$  satisfaisant les inégalités (2.4) du lemme 2.2. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  ont des points de coïncidence. De plus, si  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles. alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .*

**Preuve** Comme dans la preuve du théorème 2.1, il existe  $u, v \in X$  tels que  $Su = z$  et  $Tv = z$ .

On montre que  $Au = Su = z$ . Si  $z \neq Au$ , en posant  $x = u$  et  $y = y_n$  dans l'inégalité (2.4) et en faisant  $n \rightarrow +\infty$ , on a pour tout  $\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{k}t_0\right)$

$$F_{Au,z}(t_0) \geq F_{Au,z}\left(\frac{2}{k}t_0 - \varepsilon\right) \text{ et } L_{Au,z}(t_0) \leq L_{Au,z}\left(\frac{2}{k}t_0 - \varepsilon\right).$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$F_{Au,z}(t_0) \geq F_{Au,z}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \text{ et } L_{Au,z}(t_0) \leq L_{Au,z}\left(\frac{2}{k}t_0\right),$$

ce qui contredit (2.2) et donc  $Au = Su = z$ . Par conséquent,  $u$  est un point de coïncidence de la paire  $(A, S)$ . Ensuite, on affirme que  $Bv = Tv = z$ . Si  $z \neq Bv$ , en posant  $x = u$  et  $y = v$  dans l'inégalité (2.4), on trouve pour un certain  $t_0 > 0$

$$\begin{aligned} (1 + \alpha F_{Su,Tv}(t_0)) F_{Au,Bv}(t_0) &> \alpha F_{z,Bv}(t_0) + F_{z,Bv}\left(\frac{2}{k}t_0 - \varepsilon\right) \text{ et} \\ (1 + \beta L_{Su,Tv}(t_0)) L_{Au,Bv}(t_0) &< L_{z,Bv}\left(\frac{2}{k}t_0 - \varepsilon\right), \end{aligned}$$

pour tout  $\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{k}t_0\right)$ . Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a

$$F_{z,Bv}(t_0) \geq F_{z,Bv}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \text{ et } L_{z,Bv}(t_0) \leq L_{z,Bv}\left(\frac{2}{k}t_0\right),$$

ce qui contredit (2.2) et donc  $Bv = Tv = z$ . D'où,  $v$  est un point de coïncidence de la paire  $(B, T)$ . Puisque la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible et  $Au = Su$  on obtient  $Az = Sz$ .

On prouve que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Si  $z \neq Az$ , en appliquant l'inégalité

(2.4) avec  $x = z$  et  $y = v$ , on obtient pour un certain  $t_0 > 0$

$$(1 + \alpha F_{Sz, Tv}(t_0)) F_{Az, Bv}(t_0) > \alpha (F_{Az, z}(t_0))^2 + \min \left\{ F_{Az, z}(t_0), F_{Az, z}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \right\}$$

et

$$(1 + \beta L_{Sz, Tv}(t_0)) L_{Az, Bv}(t_0) < \beta (L_{Az, z}(t_0))^2 + \max \left\{ L_{Az, z}(t_0), L_{Az, z}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \right\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{Az, z}(t_0) &> \min \left\{ F_{Az, z}(t_0), F_{Az, z}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \right\} = F_{Az, z}(t_0) \text{ et} \\ L_{Az, z}(t_0) &< \max \left\{ L_{Az, z}(t_0), L_{Az, z}\left(\frac{2}{k}t_0\right) \right\} = L_{Az, z}(t_0). \end{aligned}$$

ce qui est impossible et donc  $Az = z = Sz$ , ce qui montre que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Puisque la paire  $(B, T)$  est faiblement compatible, il vient que  $Bz = Tz$ . D'une manière similaire, on peut montrer que  $z$  est un point fixe commun de  $B$  et  $T$ . Alors,  $z$  est un point fixe commun de  $A, B, S$  et  $T$ .

L'unicité de  $z$  provient facilement de l'inégalité (2.4). ■

**Remarque 2.3** *Le théorème 2.2 améliore et généralise le théorème 3.2 de [18] et le théorème 2.1 de [4].*

Si  $B = A$  et  $T = S$  dans les théorèmes 2.1 et 2.2, on trouve un point fixe commun pour une paire d'applications.

En appliquant les théorèmes 2.1, 2.2, on déduit le point fixe commun pour quatre familles finies d'applications données par le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1** *Soient  $\{A_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{B_r\}_{r=1}^n$ ,  $\{S_k\}_{k=1}^p$  et  $\{T_h\}_{h=1}^q$  quatre familles finies d'applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même, où  $*$  est une  $t$ -norme continue et  $\diamond$  est une  $t$ -conorme continue avec  $A = A_1A_2\dots A_m$ ,  $B = B_1B_2\dots B_n$ ,  $S = S_1S_2\dots S_p$  et  $T = T_1T_2\dots T_q$  satisfont les inégalités (2.1) du lemme 2.1 ou les inégalités (2.4) du lemme 2.2. On suppose que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $(CLR_{ST})$ . Alors  $\{A_i\}_{i=1}^m$ ,*

$\{B_r\}_{r=1}^n$ ,  $\{S_k\}_{k=1}^p$  et  $\{T_h\}_{h=1}^q$  ont un point fixe commun unique à condition que les paires des familles  $(\{A_i\}_{i=1}^m, \{S_k\}_{k=1}^p)$ ,  $(\{B_r\}_{r=1}^n, \{T_h\}_{h=1}^q)$  commutent deux à deux.

En posant  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$ ,  $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$ ,  $S_1 = S_2 = \dots = S_p = S$  et  $T_1 = T_2 = \dots = T_q = T$  dans le corollaire 2.1, on trouve que  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique à condition que les paires  $(A^m, S^p)$  et  $(B^n, T^q)$  commutent deux à deux.

Dans la preuve du lemme suivant, on n'a pas besoin de prouver l'inégalité (2.2).

**Lemme 2.3** Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfont les conditions 1,2,3,4 du lemme 2.1 et

$$\begin{aligned}
 & (1 + \alpha F_{Sx, Ty}(t)) F_{Ax, By}(t) > \alpha \min \{F_{Ax, Sx}(t) F_{By, Ty}(t), F_{Sx, By}(t) F_{Ax, Ty}(t)\} \\
 & \quad + \min \left\{ \begin{array}{l} F_{Sx, Ty}(t), \sup_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \max \{F_{Ax, Sx}(t_1), F_{By, Ty}(t_2)\}, \\ \sup_{t_3+t_4=2t} \max \{F_{Sx, By}(t_3), F_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\} \\
 & (1 + \beta L_{Sx, Ty}(t)) L_{Ax, By}(t) < \beta \max \{L_{Ax, Sx}(t) L_{By, Ty}(t), L_{Sx, By}(t) L_{Ax, Ty}(t)\} \\
 & \quad + \max \left\{ \begin{array}{l} L_{Sx, Ty}(t), \inf_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \min \{L_{Ax, Sx}(t_1), L_{By, Ty}(t_2)\}, \\ \inf_{t_3+t_4=2t} \min \{L_{Sx, By}(t_3), L_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour tout  $x, y \in X$ ,  $t > 0$ , pour certains  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $1 \leq k < 2$ . Alors les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Preuve** Comme dans la preuve du lemme 2.1,  $Ax_n \rightarrow z$ ,  $Sx_n \rightarrow z$  et  $Ty_n \rightarrow z$ . Maintenant, on montre que  $By_n \rightarrow z$ . On affirme que  $l = z$ . On suppose que  $l \neq z$ . En utilisant l'inégalité (2.5) avec  $x = x_n$ ,  $y = y_n$ , et lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a pour tout  $\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{k}t_0\right)$

$$F_{z,l}(t_0) \geq 1 \text{ et } L_{z,l}(t_0) \leq 0$$

donc,  $z = l$ . Ainsi, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ . ■

**Théorème 2.3** Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant l'inégalité (2.5) du lemme 2.3. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  ont des points de coïncidence. De plus, Si  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles. alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .

**Preuve** Comme dans la preuve du théorème 2.1, il existe  $u, v \in X$  tels que  $Au = Su = Bv = Tv = z$ . D'où,  $u$  est un point de coïncidence de la paire  $(A, S)$  et  $v$  est un point de coïncidence de la paire  $(B, T)$ .

Puisque la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible et  $Au = Su$ , on obtient  $Az = Sz$ . Maintenant, on affirme que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Si  $z \neq Az$ , en appliquant l'inégalité (2.5) avec  $x = z$  et  $y = v$ , on a pour un certain  $t_0 > 0$

$$(1 + \alpha F_{Sz, Tv}(t_0)) F_{Az, Bv}(t_0) > \alpha (F_{Az, z}(t_0))^2 + \min \{F_{Az, z}(t_0), F_{Az, z}(t_0)\}$$

et

$$(1 + \beta L_{Sz, Tv}(t_0)) L_{Az, Bv}(t_0) \leq \beta (L_{Az, z}(t_0))^2 + \max \{L_{Az, z}(t_0), L_{Az, z}(t_0)\}.$$

Donc

$$F_{Az, z}(t_0) > F_{Az, z}(t_0) \text{ et } L_{Az, z}(t_0) < L_{Az, z}(t_0),$$

ce qui est impossible, ainsi  $Az = z = Sz$ , ce qui montre que  $z$  est un point fixe commun  $A$  et  $S$ .

Comme la paire  $(B, T)$  est faiblement compatible, on trouve  $Bz = Tz$ . De même, on peut prouver que  $z$  est un point fixe commun de  $B$  et  $T$  en posant  $x = y = z$  dans l'inégalité (2.5).

L'unicité du  $z$  provient facilement de l'inégalité (2.5). ■

Soit  $\Phi$  l'ensemble de toutes les fonctions croissantes et continues  $\varphi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$  telle que  $\varphi(t) > t$  pour tout  $t \in (0, 1]$  et  $\Psi$  l'ensemble de toutes les fonctions décroissantes et continues  $\psi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$  telle que  $\psi(t) < t$  pour tout  $t \in (0, 1]$ .

**Lemme 2.4** Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant les conditions 1,2,3,4 du lemme 2.1 et

$$\begin{aligned} (1 + \alpha F_{Sx, Ty}(t)) F_{Ax, By}(t) &\geq \alpha \min \{F_{Ax, Sx}(t) F_{By, Ty}(t), F_{Sx, By}(t) F_{Ax, Ty}(t)\} \\ &+ \varphi \left( \min \left\{ \begin{array}{l} F_{Sx, Ty}(t), \sup_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \min \{F_{Ax, Sx}(t_1), F_{By, Ty}(t_2)\}, \\ \sup_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \min \{F_{Sx, By}(t_3), F_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\} \right) \\ (1 + \beta L_{Sx, Ty}(t)) L_{Ax, By}(t) &\leq \beta \max \{L_{Ax, Sx}(t) L_{By, Ty}(t), L_{Sx, By}(t) L_{Ax, Ty}(t)\} \\ &\psi \left( \max \left\{ \begin{array}{l} L_{Sx, Ty}(t), \inf_{t_1+t_2=\frac{2}{k}t} \max \{L_{Ax, Sx}(t_1), L_{By, Ty}(t_2)\}, \\ \inf_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \max \{L_{Sx, By}(t_3), L_{Ax, Ty}(t_4)\} \end{array} \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

pour tout  $x, y \in X$ ,  $t > 0$ , pour certains  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $1 \leq k < 2$ , où  $\varphi \in \Phi$  et  $\psi \in \Psi$ . Alors les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Preuve** Elle résulte de la preuve du lemme 2.1. ■

**Remarque 2.4** Les lemmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 restent vrais si l'on suppose que la paire  $(B, T)$  satisfait la propriété  $CLR_T$ ,  $B(X) \subseteq S(X)$  et  $S(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ .

**Théorème 2.4** Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant l'inégalité (2.6) du lemme 2.4. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  ont des points de coïncidences. De plus, si  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .

**Preuve** Comme dans la démonstration du théorème 2.1,  $z = Au = Su = Bv = Tv$ . Comme la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible et  $Au = Su$  on trouve  $Az = Sz$ . Maintenant, on affirme que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Si  $z \neq Az$ , en appliquant l'inégalité (2.6) avec  $x = z$  et  $y = v$ , on obtient pour un certain  $t_0 > 0$

$$(1 + \alpha F_{S_z, T_v}(t_0)) F_{A_z, B_v}(t_0) \geq \alpha (F_{A_z, z}(t_0))^2 + \varphi \left( \min \left\{ F_{A_z, z}(t_0), \min \left\{ F_{A_z, z}(\epsilon), F_{A_z, z} \left( \frac{2}{k} t_0 - \epsilon \right) \right\} \right\} \right)$$

et

$$(1 + \beta L_{S_z, T_v}(t_0)) L_{A_z, B_v}(t_0) \leq \beta (L_{A_z, z}(t_0))^2 + \psi \left( \max \left\{ L_{A_z, z}(t_0), \max \left\{ L_{A_z, z}(\epsilon), L_{A_z, z} \left( \frac{2}{k} t_0 - \epsilon \right) \right\} \right\} \right).$$

pour tout  $\epsilon \in \left(0, \frac{2}{k} t_0\right)$ . Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$F_{A_z, B_v}(t_0) \geq \varphi(\min F_{A_z, z}(t_0)) > F_{A_z, z}(t_0)$$

$$L_{A_z, z}(t_0) \leq \psi(\max L_{A_z, z}(t_0)) < L_{A_z, z}(t_0)$$

ce qui est impossible, ainsi  $Az = z = Sz$ , ce qui montre que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ .

Comme la paire  $(B, T)$  est faiblement compatible, on obtient  $Bz = Tz$ . D'une manière similaire, on peut prouver que  $z$  est un point fixe commun de  $B$  et  $T$  en posant  $x = y = z$  dans l'inégalité (2.6). Donc,  $z$  est un point fixe commun de  $A, B, S$  et  $T$ . L'unicité du  $z$  suit facilement de l'inégalité (2.6). ■

**Remarque 2.5** *Le Théorème 2.4 améliore et généralise le théorème 3,2 de [13], le théorème 3.1 de [14], le théorème 1 de [53], le théorème 2.6 de [15] et les théorèmes 3.1, 3.2 de [44].*

**Remarque 2.6** *Dans les théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4, et d'une manière similaire, on peut prouver que  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$  si on suppose que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $JCLR_{ST}$  ou la propriété  $CLR_{AB}$  au lieu de la propriété  $CLR_{ST}$ .*

**Remarque 2.7** *Il est facile de voir que le théorème 2.1 reste vrai si on remplace*

$$\sup_{t_3+t_4=2t} \min \{F_{Sx,By}(t_3), F_{Ax,Ty}(t_4)\} \quad \text{et} \quad \inf_{t_3+t_4=2t} \max \{L_{Sx,By}(t_3), L_{Ax,Ty}(t_4)\}$$

dans l'inégalité (2.1) par

$$\sup_{t_3+t_4=2t} \max \{F_{Sx,By}(t_3), F_{Ax,Ty}(t_4)\} \quad \text{et} \quad \inf_{t_3+t_4=2t} \min \{L_{Sx,By}(t_3), L_{Ax,Ty}(t_4)\}$$

Aussi, les théorèmes 2.2 et 2.4 restent vrais si on remplace

$$\sup_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \min \{F_{By,Ty}(t_3), F_{Ax,Ty}(t_4)\} \quad \text{et} \quad \inf_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \max \{L_{By,Ty}(t_3), L_{Ax,Ty}(t_4)\}$$

dans les inégalités (2.4) et (2.6) par

$$\sup_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \max \{F_{By,Ty}(t_3), F_{Ax,Ty}(t_4)\} \quad \text{et} \quad \inf_{t_3+t_4=\frac{2}{k}t} \min \{L_{By,Ty}(t_3), L_{Ax,Ty}(t_4)\}$$

respectivement.

**Théorème 2.5** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant les conditions du lemme 2.1 ou lemme 2.2 ou lemme 2.3 ou lemma*

2.4. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .

**Preuve** En vertu des lemme 2.1, lemme 2.2, lemme 2.3 et lemme 2.4, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$ . D'où, il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} By_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = z,$$

où  $z \in S(X) \cap T(X)$ . Le reste de la preuve suit comme dans la preuve des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5. ■

**Remarque 2.8** Le théorème 2.5 améliore et généralise le théorème 3.3 de [14], le théorème 2.3 de [4]. et le théorème 2.8 de [15].

**Exemple 2.2** On garde  $A$  et  $B$  et on remplace  $S$  et  $T$  dans l'exemple 2.1 par les applications suivantes

$$Sx = \begin{cases} 3 & \text{if } x = 3 \\ 6 & \text{if } x \in ]3, 5] \\ \frac{x+1}{2} & \text{if } x \in [5, 11) \end{cases}, \quad Tx = \begin{cases} 3 & \text{if } x = 3 \\ 9 & \text{if } x \in ]3, 5[ \\ x-2 & \text{if } x \in [5, 11) \end{cases}$$

On a  $A(X) = \{3, 4\} \subset [3, 9] = T(X)$  et  $B(X) = \{3, 5\} \subset [3, 6] = S(X)$ . Ainsi, toutes les conditions du théorème 2.3 sont satisfaites et 3 est un point fixe commun unique de  $A, B, S$  et  $T$ . En outre, il est noté que le théorème 2.1 ne peut pas être utilisé dans le cadre de cet exemple tant que  $S(X)$  et  $T(X)$  sont des sous-ensembles fermés de  $X$ .

# Chapitre 3

## Théorèmes de point fixe commun dans les espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la relation implicite

### 3.1 Introduction

Dans la théorie du point fixe, les relations implicites sont utilisées comme un outil pour trouver le point fixe commun pour des applications impliqués. Plusieurs auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de points fixe commun dans différents espaces par les relations implicites, voir [5], [17], [21], [27], [38] et [50]. Inspiré par un travail due à Pope [50], on a remarqué que la preuve des théorèmes de point fixes communs via une relation implicite est une bonne idée, car il couvre plusieurs conditions contractifs plutôt d'une condition de contraction.

Le but de ce chapitre est de démontrer des théorèmes de points fixe commun pour deux paires des applications faiblement compatibles dans des espaces de Menger intuitionnistes en utilisant le propriété  $CLR_{ST}$  via une relation implicite. Des exemples illustratifs sont également donnés pour soutenir nos principaux résultats. Comme application, on donne un théorème de point fixe commun pour six applications et de quatre familles finies des applications dans des espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la notion de "deux à deux commutent". Nos théorèmes généralisent les théorèmes de [3], [5], [15], [16], [17], [21], [27], [28], [31], [32], [44], [48] et [64]. On

corrige également des erreurs dans l'article [28] qui ne sont pas corrigées dans [29].

## 3.2 Relations implicites

Soit  $F_6$  l'ensemble de toutes les fonctions  $\varphi : [0, 1]^6 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : [0, 1]^6 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\varphi$  semi-continue inférieurement,  $\psi$  semi-continue supérieurement sur  $[0, 1]^6$  et satisfont aux conditions suivantes :

- (i)  $\varphi(u, 1, u, 1, 1, u) < 0$  pour tout  $u \in (0, 1)$ ,
- (ii)  $\varphi(u, 1, 1, u, u, 1) < 0$  pour tout  $u \in (0, 1)$ ,
- (iii)  $\varphi(u, u, 1, 1, u, u) < 0$  pour tout  $u \in (0, 1)$ ,
- (a)  $\psi(v, 0, v, 0, 0, v) > 0$  pour tout  $v \in (0, 1)$ ,
- (b)  $\psi(v, 0, 0, v, v, 0) > 0$  pour tout  $v \in (0, 1)$ ,
- (c)  $\psi(v, v, 0, 0, v, v) > 0$  pour tout  $v \in (0, 1)$ .

### Exemple 3.1

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1 - g(\min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}), \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1 - h(\max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}),\end{aligned}$$

où  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction croissante et continue telle que  $g(t) > t$  pour tout  $t \in (0, 1)$  et  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction décroissante et continue telle que  $h(t) < t$  pour tout  $t \in (0, 1)$ .

### Exemple 3.2

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1 - a \min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1 - b \max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\},\end{aligned}$$

où  $a > 1$  et  $0 < b < 1$ .

**Exemple 3.3**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= (1 + pt_2)t_1 - p \min\{t_3t_4, t_5t_6\} - g(\min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}), \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= (1 + qt_2)t_1 - q \max\{t_3t_4, t_5t_6\} - h(\max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}),\end{aligned}$$

où  $p, q \geq 0$ ,  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction croissante, semi-continue inférieurement telle que  $g(t) > t$  pour tout  $t \in (0, 1)$  et  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction décroissante et semi-continue supérieurement telle que  $h(t) < t$  pour tout  $t \in (0, 1)$ .

**Exemple 3.4**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - c_1 \min\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - c_2 \min\{t_3t_6, t_4t_5\} - c_3t_5t_6, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - b_1 \max\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - b_2 \max\{t_3t_6, t_4t_5\} - b_3t_5t_6\end{aligned}$$

où  $c_1, c_2, c_3 > 0$ ,  $c_1 + c_2 \geq 1$ ,  $c_1 + c_3 \geq 1$ ,  $b_1, b_2, b_3 > 0$ ,  $b_1 + b_2 < 1$  et  $b_1 + b_3 < 1$ .

**Exemple 3.5**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^3 - a \min\{t_1^2t_2, t_1t_3t_4, t_5^2t_6, t_5t_6^2\}, a > 1, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^3 - b \max\{t_1^2t_2, t_1t_3t_4, t_5^2t_6, t_5t_6^2\}, 0 < b < 1,\end{aligned}$$

**Exemple 3.6**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - a_1 \min\{t_2^2, t_5^2, t_6^2\} - a_2 \frac{t_3}{t_3 + t_5}, a_1 \geq 1 \text{ et } a_2 > 0, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - b_1 \max\{t_2^2, t_5^2, t_6^2\} - b_2 \frac{t_3}{t_3 + t_5}, 0 < b_1 < 1 \text{ et } b_2 \geq 0.\end{aligned}$$

**Exemple 3.7**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^3 - a \frac{t_3^2t_4^2 + t_5^2t_6^2}{t_2 + t_3 + t_4}, a \geq 2. \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^3 - b \frac{t_3^2t_4^2 + t_5^2t_6^2}{t_2 + t_3 + t_4}, 0 < b < 1.\end{aligned}$$

**Exemple 3.8**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - a \frac{t_2^2 + t_3^2 + t_4^2}{t_5 + t_6}, \quad a \geq 1, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - b \frac{t_2^2 + t_3^2 + t_4^2}{t_5 + t_6}, \quad 0 < b < 1.\end{aligned}$$

**Exemple 3.9**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^3 - a \frac{t_3^2 t_4^2}{t_2 + t_5 + t_6}, \quad a \geq 3, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^3 - b \frac{t_3^2 t_4^2}{t_2 + t_5 + t_6}, \quad b > 0.\end{aligned}$$

**Exemple 3.10**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - a_1 \min\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - b_1 \frac{t_5}{t_5 + t_6}, \quad a_1 \geq 1 \text{ et } b_1 > 0, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= t_1^2 - a_2 \max\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - b_2 \frac{t_5}{t_5 + t_6}, \quad 0 < a_2 < 1 \text{ et } b_2 > 0.\end{aligned}$$

**Exemple 3.11**

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= \int_0^{t_1} \phi(t) dt - g\left(\int_0^{\min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}} \phi(t) dt\right), \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= \int_0^{t_1} \phi(t) dt - h\left(\int_0^{\max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}} \phi(t) dt\right),\end{aligned}$$

où  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction croissante et semi-continue inférieurement telle que  $g(t) > t$  pour tout  $t \in (0, 1)$ ,  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction décroissante et semi-continue supérieurement telle que  $h(t) < t$  pour tout  $t \in (0, 1)$  et  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction intégrable au sens de Lebesgue qui est sommable et satisfait

$$0 < \int_0^\epsilon \phi(s) ds < 1 \quad \text{pour tout } 0 < \epsilon < 1.$$

**Exemple 3.12**

$$\begin{aligned}
 \varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= \left( \int_0^{t_1} \phi(s) ds \right)^p - a_1 \left( \int_0^{t_2} \phi(s) ds \right)^p \\
 &\quad - b_1 \min \left\{ \int_0^{t_3} \phi(s) ds, \int_0^{t_4} \phi(s) ds, \left( \int_0^{t_3} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^{t_5} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \\
 &\quad \left. \left( \int_0^{t_5} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{t_6} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^p, \\
 \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= \left( \int_0^{t_1} \phi(s) ds \right)^p - a_2 \left( \int_0^{t_2} \phi(s) ds \right)^p \\
 &\quad - b_2 \max \left\{ \int_0^{t_3} \phi(s) ds, \int_0^{t_4} \phi(s) ds, \left( \int_0^{t_3} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^{t_5} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \\
 &\quad \left. \left( \int_0^{t_5} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{t_6} \phi(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^p,
 \end{aligned}$$

où  $a_1 > 0$ ,  $b_1 \geq 1$ ,  $a_2, b_2 > 0$ ,  $a_2 + b_2 < 1$ ,  $p > 0$  et  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une application intégrable au sens de Lebesgue qui est sommable et satisfait

$$0 < \int_0^\epsilon \varphi(s) ds < 1 \quad \text{pour tout } 0 < \epsilon < 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi(s) ds = 1.$$

**Exemple 3.13**

$$\begin{aligned}
 \varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= G(t_1) - g(G(\min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\})) \\
 \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= G(t_1) - h(G(\max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}))
 \end{aligned}$$

où  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction croissante, semi-continue inférieurement telle que  $g(t) > t$  pour tout  $t \in (0, 1)$ ,  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction décroissante et semi-continue supérieurement telle que  $h(t) < t$  pour tout  $t \in (0, 1)$  et  $G : R_A^+ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait :

- (i)  $G(0) = 0$  et  $G(t) > 0$  pour tout  $t \in (0, A)$ ,  $A \in (0, \infty]$ ,  $R_A^+ = [0, A)$ ,
- (ii)  $G$  est croissante sur  $R_A^+$  et

(iii)  $G$  est continue.

On définit  $\Phi[0, A] = \{G : G \text{ satisfait (i)-(iii)}\}$ .

**Exemple 3.14**

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= (G(t_1))^p - a_1(G(t_2))^p \\ &\quad - b_1 \min\{G(t_3), G(t_4), (G(t_3))^{\frac{1}{2}} \cdot (G(t_5))^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad (G(t_5))^{\frac{1}{2}} \cdot (G(t_6))^{\frac{1}{2}}\}^p, \\ \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) &= (G(t_1))^p - a_2(G(t_2))^p \\ &\quad - b_2 \max\{G(t_3), G(t_4), (G(t_3))^{\frac{1}{2}} \cdot (G(t_5))^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad (G(t_5))^{\frac{1}{2}} \cdot (G(t_6))^{\frac{1}{2}}\}^p, \end{aligned}$$

où  $a_1 > 0$ ,  $b_1 \geq 1$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_2 + b_2 < 1$ ,  $p > 0$  et  $G \in \Phi[0, A]$ .

Les exemples suivants ont été donnés par [68],

- 1) Soit  $G(t) = t$ , alors  $G \in \Phi[0, A]$  pour tout  $A \in (0, +\infty]$ .
- 2) On suppose que  $\phi$  est positive et intégrable au sens de lebesgue sur  $[0, A]$  et vérifie

$$\int_0^\epsilon \phi(t) dt > 0 \text{ pour tout } \epsilon \in (0, A).$$

Soit  $G(t) = \int_0^t \phi(s) ds$ , alors  $G \in \Phi[0, A]$ .

- 3) On suppose que  $\psi$  est positive et intégrable au sens de lebesgue sur  $[0, A]$  et vérifie

$$\int_0^\epsilon \psi(t) dt > 0 \text{ pour tout } \epsilon \in (0, A)$$

et  $\phi$  est positive et intégrable au sens de lebesgue sur  $[0, \int_0^A \psi(s)ds)$  et vérifie

$$\int_0^\epsilon \phi(t)dt > 0 \text{ pour tout } \epsilon \in (0, \int_0^A \psi(s)ds).$$

Soit  $G(t) = \int_0^t \psi(s)ds$ , alors  $G \in \Phi[0, A)$ .

4) Si  $H \in \Phi[0, A)$  et  $G \in \Phi[0, H(A - 0))$ , alors la fonction composée  $G \circ H \in \Phi[0, A)$ . Par exemple, soit  $L(t) = \int_0^{G(t)} \phi(s)ds$ , alors  $L \in \Phi[0, A)$ ,  $G \in F[0, A)$  et  $\phi$  est positive et intégrable au sens de lebesgue sur  $\Phi[0, G(A - 0))$  et satisfait

$$\int_0^\epsilon \phi(t)dt > 0 \text{ pour tout } \epsilon \in (0, G(A - 0)).$$

**Lemme 3.1** ([68]) *Soit  $A \in (0, +\infty]$  et  $G \in \Phi[0, A)$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(\epsilon_n) = 0$  pour tout  $\epsilon_n \in R_A^+$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ .*

### 3.3 Résultats principaux

**Lemme 3.2** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant les conditions suivantes*

- 1) *La paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $CLR_S$  ou Le pair  $(B, T)$  satisfait la propriété  $CLR_T$ .*
- 2)  *$A(X) \subseteq T(X)$  ou  $B(X) \subseteq S(X)$ .*
- 3)  *$T(X)$  ou  $S(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ .*
- 4)  *$B(y_n)$  converge pour toute suite  $\{y_n\}$  dans  $X$  quand  $T(y_n)$  converge ou  $A(x_n)$  converge pour toute suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  quand  $S(x_n)$  converge.*

*Si*

$$\begin{aligned} \varphi (F_{Ax,By}(t), F_{Sx,Ty}(t), F_{Ax,Sx}(t), F_{By,Ty}(t), F_{Sx,By}(t), F_{Ax,Ty}(t)) &\geq 0, \\ \psi (L_{Ax,By}(t), L_{Sx,Ty}(t), L_{Ax,Sx}(t), L_{By,Ty}(t), L_{Sx,By}(t), L_{Ax,Ty}(t)) &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

pour tout  $x, y \in X$ ,  $t > 0$  et  $\varphi, \psi \in F_6$ . Alors les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Preuve** Supposons que le paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $CLR_S$  et  $T(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ . Alors, il existe une suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = z, \text{ où } z \in S(X).$$

Puisque  $A(X) \subseteq T(X)$ , il existe une suite  $\{y_n\}$  dans  $X$  telle que  $Ax_n = Ty_n$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = z \text{ et } z \in S(X) \cap T(X).$$

Ainsi  $Ax_n \rightarrow z$ ,  $Sx_n \rightarrow z$  et  $Ty_n \rightarrow z$ . D'après la condition (4),  $B(y_n)$  converge aussi.

Maintenant, on montre que  $By_n \rightarrow z$ . Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{By_n,l}(t_0) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_{By_n,l}(t_0) = 0$ . On affirme que  $l = z$ . On suppose que  $l \neq z$ . En utilisant l'inégalité (3.1) avec  $x = x_n$ ,  $y = y_n$ , on trouve

$$\begin{aligned} \varphi (F_{Ax_n,By_n}(t), F_{Sx_n,Ty_n}(t), F_{Ax_n,Sx_n}(t), F_{By_n,Ty_n}(t), F_{Sx_n,By_n}(t), F_{Ax_n,Ty_n}(t)) &\geq 0, \\ \psi (L_{Ax_n,By_n}(t), L_{Sx_n,Ty_n}(t), L_{Ax_n,Sx_n}(t), L_{By_n,Ty_n}(t), L_{Sx_n,By_n}(t), L_{Ax_n,Ty_n}(t)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\varphi (F_{z,l}(t), F_{z,z}(t), F_{z,z}(t), F_{l,z}(t), F_{z,l}(t), F_{z,z}(t)) \geq 0,$$

$$\psi (L_{z,l}(t), L_{z,z}(t), L_{z,z}(t), L_{l,z}(t), L_{z,l}(t), L_{z,z}(t)) \leq 0$$

$$\begin{aligned}\varphi(F_{z,l}(t), 1, 1, F_{l,z}(t), F_{z,l}(t), 1) &\geq 0, \\ \psi(L_{z,l}(t), 0, 0, L_{l,z}(t), L_{z,l}(t), 0) &\leq 0,\end{aligned}$$

ce qui contredit (ii) et (b). Par conséquent  $z = l$ . Ainsi, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

D'une manière similaire, on peut prouver que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$  si on suppose que le paire  $(B, T)$  satisfait la propriété  $CLR_T$ ,  $B(X) \subseteq S(X)$  et  $S(X)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ . ■

**Remarque 3.1** *La réciproque du lemme 3.2 n'est pas vraie en général, voir l'exemple 17 ci-dessous.*

**Théorème 3.1** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant l'inégalité (3.1) du lemme 3.2. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  ont des points de coïncidence. De plus, si  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .*

**Preuve** Puisque les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ , il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} By_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = z,$$

où  $z \in S(X) \cap T(X)$ . Donc, il existe  $u, v \in X$  tels que  $Su = z$  et  $Tv = z$ .

Comme dans la preuve du lemme 3.2, on peut prouver que  $Au = Su = z$  en posant  $x = u$  et  $y = y_n$  dans l'inégalité (3.1). Ainsi,  $u$  est un point de coïncidence de la paire  $(A, S)$ . Maintenant, on affirme que  $Bv = Tv = z$ . Sinon, en posant  $x = u$  et  $y = v$  dans l'inégalité (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(F_{Au,Bv}(t), F_{Su,Tv}(t), F_{Au,Su}(t), F_{Bv,Tv}(t), F_{Su,Bv}(t), F_{Au,Tv}(t)) &\geq 0, \\ \psi(L_{Au,Bv}(t), L_{Su,Tv}(t), L_{Au,Su}(t), L_{Bv,Tv}(t), L_{Su,Bv}(t), L_{Au,Tv}(t)) &\leq 0\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi(F_{z,Bv}(t), 1, 1, F_{Bv,z}(t), F_{z,Bv}(t), 1) &\geq 0, \\ \psi(L_{z,Bv}(t), 0, 0, L_{Bv,z}(t), L_{z,Bv}(t), 0) &\leq 0\end{aligned}$$

ce qui contredit (ii) et (b). D'où  $Bv = Tv = z$ . Par conséquent,  $v$  est un point de coïncidence du paire  $(B, T)$ . Puisque la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible et  $Au = Su$ , on obtient  $Az = Sz$ .

Maintenant, on affirme que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Si  $z \neq Az$ , en appliquant l'inégalité (3.1) avec  $x = z$  et  $y = v$ , on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(F_{Az,Bv}(t), F_{Sz,Tv}(t), F_{Az,Sz}(t), F_{Bv,Tv}(t), F_{Sz,Bv}(t), F_{Az,Bv}(t)) &\geq 0, \\ \psi(L_{Az,Bv}(t), L_{Sz,Tv}(t), L_{Az,Sz}(t), L_{Bv,Tv}(t), L_{Sz,Bv}(t), L_{Az,Bv}(t)) &\leq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(F_{Az,z}(t), F_{Az,z}(t), 1, 1, F_{Az,z}(t), F_{Az,z}(t)) &\geq 0, \\ \psi(L_{Az,z}(t), L_{Az,z}(t), 0, 0, L_{Az,z}(t), L_{Az,z}(t)) &\leq 0\end{aligned}$$

ce qui contredit (iii) et (c), donc  $Az = z = Sz$ , ce qui montre que  $z$  est un point fixe commun de  $A$  et  $S$ . Comme la paire  $(B, T)$  est faiblement compatible, on a  $Bz = BTv = TBv = Tz$ . On peut prouver d'une manière similaire que  $z$  est un point fixe commun de  $B$  et  $T$  en posant  $x = y = z$  dans l'inégalité (3.1). D'où,  $z$  est un point fixe commun de  $A, B, S$  et  $T$ . L'unicité de  $z$  suit facilement de l'inégalité (3.1). ■

**Remarque 3.2** *La conclusion du théorème 3.1 reste vraie si on suppose que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $JCLR_{ST}$  ou la propriété  $CLR_{AB}$  au lieu de la propriété  $CLR_{ST}$ .*

Maintenant, on donne un exemple pour soutenir notre théorème 3.1.

**Exemple 3.15** *Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste, où  $X = (0, 9]$ ,  $a * b = \min\{a, b\}$  et  $a \diamond b = \max\{a, b\}$  avec*

$$F_{xy}(t) = H(t - |x - y|), \quad L_{xy}(t) = G(t - |x - y|)$$

### Chapitre 3. Théorèmes de point fixe commun dans les espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la relation implicite

---

pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . On définit les applications  $A, B, S$  et  $T$  de  $X$  dans  $X$  par

$$Ax = \begin{cases} 1-x & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases}, \quad Bx = \begin{cases} x & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 9 & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases},$$

$$Sx = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases}, \quad Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ \frac{3}{4} & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases}$$

et  $\varphi, \psi : [0, 1]^6 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - g(\min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}),$$

$$\psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - h(\max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}),$$

où  $g(s) = \sqrt{s}$ ,  $h(s) = s^2$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Considérons les suites  $\left\{x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right\}$  et  $\left\{y_n = \frac{1}{2}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $X$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} By_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = \frac{1}{2} \in S(X) \cap T(X),$$

Alors, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ . Notons que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles en  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, toutes les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées et  $\frac{1}{2}$  est un point fixe commun unique de  $A, B, S$  et  $T$ . On remarque que toutes les applications sont discontinues à leur point fixe commun  $\frac{1}{2}$ . En outre

$$A(X) = [\frac{1}{2}, 1) \cup \{0\}, \quad B(X) = (0, \frac{1}{2}] \cup \{9\},$$

$$S(X) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup \{1\}, \quad T(X) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Par conséquent,  $A(X) \not\subseteq T(X)$  et  $B(X) \not\subseteq S(X)$ . Aussi,  $A(X), B(X), S(X)$  et  $T(X)$  ne sont pas des sous-ensembles fermés de  $X$ .

**Théorème 3.2** Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant les conditions du lemme 3.2. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont fai-

### Chapitre 3. Théorèmes de point fixe commun dans les espaces de Menger intuitionnistes en utilisant la relation implicite

---

blement compatible, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .

**Preuve** Comme dans la preuve du lemme 3.2, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $\text{CLR}_{ST}$ . Donc, il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} By_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ty_n = z,$$

où  $z \in S(X) \cap T(X)$ . La suite de la preuve suit comme dans la preuve du théorème 3.1. ■

**Exemple 3.16** Dans le cadre de l'exemple 3.15, on remplace les applications  $A, B, S$  et  $T$  par les applications suivantes

$$Ax = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ \frac{3}{4} & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases}, \quad Bx = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{4} & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases},$$

$$Sx = \begin{cases} x & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases}, \quad Tx = \begin{cases} 1-x & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 9] \end{cases}.$$

Alors

$$A(X) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\} \subset \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] = T(X) \quad \text{et} \quad B(X) = \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \subset \left[ 0, \frac{1}{2} \right] = S(X).$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 3 sont vérifiées et  $\frac{1}{2}$  est un point fixe commun unique de  $A, B, S$  et  $T$ . En outre, le théorème 3.2 ne peut pas être utilisé dans le cadre de cet exemple tant que  $S(X)$  et  $T(X)$  sont des sous-ensembles fermés de  $X$ .

**Remarque 3.3** Si  $B = A$  et  $T = S$  dans les théorèmes 3.1 et 3.2, on obtient un point fixe commun pour une paire des applications.

Maintenant, on utilise la définition 1.40 pour prouver un théorème de point fixe commun pour six applications dans l'espace de Menger intuitionniste.

**Théorème 3.3** Soient  $A, B, S, R, T$  et  $H$  des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même satisfaisant les conditions suivantes :

(1) Les paires  $(A, SR)$  et  $(B, TH)$  vérifient la propriété  $CLR_{SRT H}$ .

(2) Il existe  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $(F_6)$  telles que

$$\begin{aligned} \varphi(F_{Ax,By}(t), F_{SRx,THy}(t), F_{Ax,SRx}(t), F_{By,THy}(t), F_{SRx,By}(t), F_{Ax,THy}(t)) &\geq 0, \\ \psi(L_{Ax,By}(t), L_{SRx,THy}(t), L_{Ax,SRx}(t), L_{By,THy}(t), L_{SRx,By}(t), L_{Ax,THy}(t)) &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . Alors les paires  $(A, SR)$  et  $(B, TH)$  ont des points de coïncidence. De plus,  $A, B, S, R, T$  et  $H$  ont un point fixe commun unique dans  $X$  lorsque les deux paires  $(A, SR)$  et  $(B, TH)$  commutent deux à deux, c'est-à-dire,  $AS = SA, AR = RA, SR = RS, BT = TB, BH = HB$  et  $TH = HT$ .

**Preuve** Puisque  $(A, SR)$  et  $(B, TH)$  commutent deux à deux, alors les deux paires sont faiblement compatibles. D'après le théorème 3.1  $A, B, SR$  et  $TH$  ont un point fixe commun unique  $z$  dans  $X$ . On montre que  $z$  est un point fixe commun unique pour les applications  $A, B, S, R, T$  et  $H$ .

Si  $z \neq Rz$ , en appliquant l'inégalité (3.2) avec  $x = Rz$  et  $y = z$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(F_{ARz,Bz}(t), F_{SR(Rz),THz}(t), F_{ARz,SR(Rz)}(t), F_{Bz,THz}(t), F_{SR(Rz),Bz}(t), F_{ARz,THz}(t)) &\geq 0, \\ \psi(L_{ARz,Bz}(t), L_{SR(Rz),THz}(t), L_{ARz,SR(Rz)}(t), L_{Bz,THz}(t), L_{SR(Rz),Bz}(t), L_{ARz,THz}(t)) &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(F_{Rz,z}(t), F_{Rz,z}(t), 1, 1, F_{Rz,z}(t), F_{z,Rz}(t)) &\geq 0, \\ \psi(L_{Rz,z}(t), L_{Rz,z}(t), 0, 0, L_{Rz,z}(t), L_{z,Rz}(t)) &\leq 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit (iii) et (c). Alors,  $z = Rz$  et donc  $S(Rz) = Sz = z$ . D'une manière similaire, on peut prouver que  $z = Hz$  et  $T(Hz) = Tz = z$ . D'où,  $z = Az = Bz = Sz = Rz = Tz = Hz$  et  $z$  est un point fixe commun unique de  $A, B, S, R, T$  et  $H$ . ■

Comme une application du théorème 3.1, on donne le résultat suivant pour quatre familles finies des applications.

**Corollaire 3.1** Soient  $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_r\}_{r=1}^n, \{S_k\}_{k=1}^p$  et  $\{T_h\}_{h=1}^q$  quatre familles finies des applications d'un espace de Menger intuitionniste  $(X, F, L, *, \diamond)$  dans lui même, où  $*$  est une  $t$ -norme continue et  $\diamond$  est une  $t$ -conorme avec  $A = A_1 A_2 \dots A_m, B = B_1 B_2 \dots B_n, S = S_1 S_2 \dots S_p$

et  $T = T_1 T_2 \dots T_q$  satisfont l'inégalité (3.1) du lemme 3.2. Supposons que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$ . Alors  $\{A_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{B_r\}_{r=1}^n$ ,  $\{S_k\}_{k=1}^p$  et  $\{T_h\}_{h=1}^q$  ont un point fixe commun unique dans  $X$  à condition que les paires des familles  $(\{A_i\}_{i=1}^m, \{S_k\}_{k=1}^p)$  et  $(\{B_r\}_{r=1}^n, \{T_h\}_{h=1}^q)$  commutent deux à deux.

**Remarque 3.4** Posons  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$ ,  $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$ ,  $S_1 = S_2 = \dots = S_p = S$  et  $T_1 = T_2 = \dots = T_q = T$  dans le corollaire 3.1, on obtient que  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$  à condition que les paires  $(A^m, S^p)$  et  $(B^n, T^q)$  commutent deux à deux.

**Remarque 3.5** Dans l'article [28] page 5, l'inégalité

$$(\Phi_3) : \Phi(u, 1, u, 1, u, u) < 0$$

devrait être

$$\Phi(u, u, 1, 1, u, u) < 0$$

parce que dans la page 8, les auteurs ont écrit : si  $At \neq t$ , puis en utilisant l'inégalité 3.1, on trouve

$$\Phi(F_{At, Bv}(x), F_{St, Tv}(x), F_{St, At}(x), F_{Tv, Bv}(x), F_{St, Bv}(x), F_{Tv, At}(x)) \geq 0,$$

où

$$\Phi(F_{At, t}(x), 1, F_{At, t}(x), 1, F_{At, t}(x), F_{At, t}(x)) \geq 0.$$

Cette inégalité est incorrecte car  $F_{St, Tv}(x) = F_{At, t}(x)$  et  $F_{St, At}(x) = F_{At, At}(x) = 1$ .

# Chapitre 4

## Théorèmes de point fixe couplé dans les espaces de Menger intuitionnistes avec application aux équations intégrales

### 4.1 Introduction

Dans [11], Bhaskar et Lakshmikantham ont introduit la notion du point fixe couplé et les applications monotones mixtes et ont donné quelques théorèmes de point fixe couplé. Bhaskar et Lakshmikantham [11] ont appliqué ces résultats pour étudier l'existence et l'unicité du solution pour les problèmes périodiques de valeur-limite. Aussi, Lakshmikantham et Ćirić [40] ont introduit le concept du point de coïncidence couplé et ont prouvé certains théorèmes de point fixe commun couplé. Sedghi et al [57] ont donné un théorème de point fixe couplé pour des contractions dans des espaces métriques flous.

D'autre part, les équations intégrales se posent dans de nombreux problèmes scientifiques et techniques. Une grande classe de problèmes aux limites peut être convertie à des équations intégrales deVolterra ou Fredholm.

Les modèles de physique mathématique comme les problèmes de diffraction, diffusion en mécanique quantique, la cartographie des conformal et de vagues d'eau ont également contribué à la création des équations intégrales. De nombreuses autres applications en sciences et en génie

sont décrites par les équations intégrales ou des équations intégro-différentielles. Le modèle de croissance des populations de Volterra, les espèces biologiques vivant ensemble, la propagation des poissons stockés dans un nouveau lac et le rayonnement du chaleur font partie de nombreux domaines qui sont décrits par des équations intégrales.

Les équations intégrales se posent souvent dans l'électrostatics, les problèmes électromagnétiques, les problèmes de diffusion électromagnétiques et dans la propagation des ondes acoustiques et de elastical.

Dans cet article, on montre un théorème de point fixe commun pour des applications sous des conditions  $\phi$ -contractives dans les espaces de Menger intuitionnistes. Comme application de notre résultat, on étudie l'existence et l'unicité de la solution pour une équation intégrale non linéaire de Fredholm. On donne également un exemple pour valider notre résultat.

## 4.2 Résultats principaux

Dans cette section,  $L$  et  $F$  sont supposées satisfaire aux conditions  $\sup_{t>0} F_{x,y}(t) = 1$  et  $\inf_{t>0} L_{x,y}(t) = 0$  pour tout  $x, y \in X$ . Si  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction telle que  $\phi(0) = 0$ , alors  $\phi$  est appelée une fonction jauge. Si  $t \in \mathbb{R}_+$ , alors  $\phi^n(t)$  désigne la n-ième itération de  $\phi(t)$  et  $\phi^{-1}(\{0\}) = \{t \in \mathbb{R}_+ : \phi(t) = 0\}$ .

En utilisant la continuité de  $*$ ,  $\diamond$  et [[?], Lemme 1], on obtient le résultat suivant.

**Lemme 4.1** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  et  $F_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Supposons que  $\sup \{F(t) : t > 0\} = 1$  et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0; F_n(g_n(t)) \geq *^{2n}(F(t)) \text{ pour tout } t > 0.$$

*Si chaque  $F_n$  est croissante, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = 1$  pur tout  $t > 0$ .*

**Lemme 4.2** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  et  $L_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Supposons que :  $\inf \{L(t) : t > 0\} = 0$  et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0; L_n(g_n(t)) \leq \diamond^{2n}(L(t)), \text{ pour tout } t > 0$$

Si chaque  $L_n$  est décroissante, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(t) = 0$ , pour tout  $t > 0$ .

**Preuve** Fixons  $t > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $t_0 > 0$  tel que  $L(t_0) < \varepsilon$ . Puisque  $g_n(t_0) \rightarrow 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $g_n(t_0) < t$  pour tout  $n \geq k$ . Par monotonie, on a

$$L_n(t) \leq L_n(g_n(t_0)) \leq \diamond^{2n}(L(t_0)) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq k$$

On déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(t) = 0$ . ■

**Théorème 4.1** Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste avec une  $t$ -norme continue  $*$  de type  $H$  et une  $t$ -conorme  $\diamond$  continue de type  $H$ . Soient  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  une fonction vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ ,  $T : X \times X \rightarrow X$ ,  $g : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant  $T(X \times X) \subseteq g(X)$  et pour tout  $t > 0$ ,  $x, y, u, v \in X$

$$\begin{aligned} F_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) &\geq F_{g(x),g(u)}(t) * F_{g(y),g(v)}(t) \\ L_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) &\leq L_{g(x),g(u)}(t) \diamond L_{g(y),g(v)}(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Supposons que  $T(X \times X)$  est complet et que  $g$  et  $T$  sont faiblement compatibles, alors  $g$  et  $T$  ont un point fixe commun unique  $x^*$  dans  $X$ , c'est à dire  $x^* = T(x^*, x^*) = g(x^*)$ .

**Preuve** Comme  $T(X \times X) \subseteq g(X)$ , il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$gx_{n+1} = T(x_n, y_n) \text{ et } gy_{n+1} = T(y_n, x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

En utilisant (4.1) et (4.2), on a

$$\begin{aligned} F_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi(t)) &= F_{T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(x_n, y_n)}(\phi(t)) \geq F_{g(x_{n-1}), g(x_n)}(t) * F_{g(y_{n-1}), g(y_n)}(t) \\ L_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi(t)) &= L_{T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(x_n, y_n)}(\phi(t)) \leq L_{g(x_{n-1}), g(x_n)}(t) \diamond L_{g(y_{n-1}), g(y_n)}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

et

$$\begin{aligned} F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi(t)) &= F_{T(y_{n-1},x_{n-1}),T(y_n,x_n)}(\phi(t)) \geq F_{g(x_{n-1}),g(x_n)}(t) * F_{g(y_{n-1}),g(y_n)}(t) \quad (4.4) \\ L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi(t)) &= L_{T(y_{n-1},x_{n-1}),T(y_n,x_n)}(\phi(t)) \leq L_{g(x_{n-1}),g(x_n)}(t) \diamond L_{g(y_{n-1}),g(y_n)}(t) \end{aligned}$$

Il résulte de (4.3) et (4.4) que

$$\begin{aligned} &F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^n(t)) * F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^n(t)) \\ &\geq *^2(F_{gx_{n-1},gx_n}(\phi^{n-1}(t)) * F_{gy_{n-1},gy_n}(\phi^{n-1}(t))) \\ &\geq \dots \geq *^{2n}(F_{gx_0,gx_1}(t) * F_{gy_0,gy_1}(t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^n(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^n(t)) \\ &\leq \diamond^2(L_{gx_{n-1},gx_n}(\phi^{n-1}(t)) \diamond L_{gy_{n-1},gy_n}(\phi^{n-1}(t))) \\ &\leq \dots \leq \diamond^{2n}(L_{gx_0,gx_1}(t) \diamond L_{gy_0,gy_1}(t)) \end{aligned}$$

Soient  $E_n(t) = F_{gx_n,gx_{n+1}}(t) * F_{gy_n,gy_{n+1}}(t)$  et  $P_n(t) = L_{gx_n,gx_{n+1}}(t) \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(t)$ . Alors

$$\begin{aligned} E_n(\phi^n(t)) &\geq *^2(E_{n-1}(\phi^{n-1}(t))) \geq \dots \geq *^{2n}(E_0(t)). \\ P_n(\phi^n(t)) &\leq \diamond^2(P_{n-1}(\phi^{n-1}(t))) \leq \dots \leq \diamond^{2n}(P_0(t)). \end{aligned}$$

Puisque  $\phi^n(t) \rightarrow 0$ ,  $\sup_{t>0} E_0(t) = 1$  et  $\inf_{t>0} P_n(t) = 0$ , D'après les lemmes 4.1 et 4.2, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(t) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) = 0$$

Comme  $\min\{F_{gx_n,gx_{n+1}}(t), F_{gy_n,gy_{n+1}}(t)\} \geq E_n(t)$  et  $\max\{L_{gx_n,gx_{n+1}}(t), L_{gy_n,gy_{n+1}}(t)\} \leq P_n(t)$ ,

on trouve pour tout  $t > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{gx_n, gx_{n+1}}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{gy_n, gy_{n+1}}(t) = 1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{gx_n, gx_{n+1}}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{gy_n, gy_{n+1}}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0$ , il existe  $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi^{n_0+1}(t) < \phi^{n_0}(t) < t$ . Ensuite, on montre par induction que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $b_k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{aligned} &F_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) * F_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) \\ &\geq *^{b_k} (F_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_n, gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t))) \end{aligned} \quad (4.6)$$

et

$$\begin{aligned} &L_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) \diamond L_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) \\ &\leq \diamond^{b_k} (L_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_n, gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t))) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Elle est évidente pour  $k = 0$  car  $F_{gx_n, gx_n}(\phi^{n_0}(t)) = F_{gy_n, gy_n}(\phi^{n_0}(t)) = 1$  et  $L_{gx_n, gx_n}(\phi^{n_0}(t)) = L_{gy_n, gy_n}(\phi^{n_0}(t)) = 0$ . Supposons que (4.6) et (4.7) sont vraies pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque  $\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t) > 0$ , D'après (1) et (2) dans la définition (1.26) on a

$$\begin{aligned} F_{gx_n, gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t)) &= F_{gx_n, gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t) + \phi^{n_0+1}(t)) \\ &\geq F_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * F_{gx_{n+1}, gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

et

$$\begin{aligned} L_{gx_n, gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t)) &= L_{gx_n, gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t) + \phi^{n_0+1}(t)) \\ &\leq L_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gx_{n+1}, gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Il résulte de (4.1), (4.6) et (4.7) que

$$\begin{aligned}
 & F_{gx_{n+1},gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) & (4.10) \\
 = & F_{T(x_n,y_n),T(x_{n+k},y_{n+k})}(\phi^{n_0+1}(t)) \\
 \geq & F_{gx_n,gx_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) * F_{gy_n,gy_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) \\
 \geq & *^{b_k} (F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & L_{gx_{n+1},gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) & (4.11) \\
 = & L_{T(x_n,y_n),T(x_{n+k},y_{n+k})}(\phi^{n_0+1}(t)) \\
 \leq & L_{gx_n,gx_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+k}}(\phi^{n_0}(t)) \\
 \leq & \diamond^{b_k} (L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)))
 \end{aligned}$$

Maintenant, à partir de (4.8), (4.9), (4.10) et (4.11) il vient

$$\begin{aligned}
 & F_{gx_n,gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) & (4.12) \\
 \geq & F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * \left( *^{b_k} \left( \begin{array}{l} F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \\ *F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \end{array} \right) \right)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & L_{gx_n,gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) & (4.13) \\
 \leq & L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond \left( \diamond^{b_k} \left( \begin{array}{l} L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \\ \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \end{array} \right) \right)
 \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned} & F_{gy_n,gy_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) \\ \geq & F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * \left( *^{b_k} \left( \begin{array}{c} F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \\ *F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \end{array} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

et

$$\begin{aligned} & L_{gy_n,gy_{n+k+1}}(\phi^{n_0+1}(t)) \\ \leq & L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond \left( \diamond^{b_k} \left( \begin{array}{c} L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \\ \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \end{array} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

En utilisant (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15) on conclut que

$$\begin{aligned} & F_{gx_n,gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t)) * F_{gy_n,gy_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t)) \\ \geq & F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \\ & * \left[ *^{2b_k} (F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t))) \right] \\ = & *^{2b_k+1} (F_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t))). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & L_{gx_n,gx_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+k+1}}(\phi^{n_0}(t)) \\ \leq & L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \\ & \diamond \left[ \diamond^{2b_k} (L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t))) \right] \\ = & \diamond^{2b_k+1} (L_{gx_n,gx_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_n,gy_{n+1}}(\phi^{n_0}(t) - \phi^{n_0+1}(t))). \end{aligned}$$

Comme  $b_{k+1} = 2b_k + 1 \in \mathbb{N}$ , (4.6) et (4.7) sont vérifiées pour  $k + 1$ . Par conséquent, il existe  $b_k \in \mathbb{N}$  tel que (4.6) soit vérifiée pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Maintenant, on prouve que  $\{T(x_n, y_n)\}$  et  $\{T(y_n, x_n)\}$  sont des suites de Cauchy dans  $X$ . Soient  $t > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0$ , il existe  $n_1 = n_1(t) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\phi^{n_1+1}(t) < \phi^{n_1}(t) < t.$$

Si  $\{ *^n : n \in \mathbb{N} \}$  est équicontinue en 1 et  $*^n(1) = 1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\text{si } s \in (1 - \delta, 1], \text{ alors } *^n(s) > 1 - \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (4.16)$$

Si  $\{ \diamond^n : n \in \mathbb{N} \}$  est équicontinue en 0 et  $\diamond^n(0) = 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\text{si } s \in [0, \delta), \text{ alors } \diamond^n(s) < \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (4.17)$$

D'après (4.5), on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{gy_n, gy_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) &= 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{gy_n, gy_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Comme  $*$  est continue, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$ ,

$$F_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) * F_{gy_n, gy_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) > 1 - \delta$$

$$L_{gx_n, gx_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) \diamond L_{gy_n, gy_{n+1}}(\phi^{n_1}(t) - \phi^{n_1+1}(t)) < \delta$$

Ainsi, d'après (4.6), (4.7), (4.16) et (4.17), on obtient

$$F_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) * F_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) > 1 - \varepsilon$$

$$L_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \diamond L_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) < \varepsilon$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque

$$\begin{aligned} & \min \{ F_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)), F_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \} \\ & > F_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) * F_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \max \{ L_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)), L_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \} \\ & < L_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \diamond L_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \min \{ F_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)), F_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \} &> 1 - \varepsilon \\ \max \{ L_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)), L_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Par monotonie de  $F$  et  $L$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \min \{ F_{gx_n, gx_{n+k}}(t), F_{gy_n, gy_{n+k}}(t) \} \\ & \geq \min \{ F_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)), F_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \} \\ & > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \max \{ L_{gx_n, gx_{n+k}}(t), L_{gy_n, gy_{n+k}}(t) \} \\ & \leq \max \{ L_{gx_n, gx_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)), L_{gy_n, gy_{n+k}}(\phi^{n_1}(t)) \} \\ & < \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $\{gx_n\}$  et  $\{gy_n\}$ , i.e.,  $\{T(x_n, y_n)\}$  et  $\{T(y_n, x_n)\}$  sont des suites de Cauchy dans  $X$ . Comme  $T(X \times X)$  est complet et  $T(X \times X) \subseteq g(X)$ , il existe  $a, b \in X$  tel que  $\{T(x_n, y_n)\}$

converge vers  $ga$  et  $\{T(y_n, x_n)\}$  converge vers  $gb$ . Ensuite, on prouve que  $ga = T(a, b)$  et  $gb = T(b, a)$ . Soit  $t > 0$ , puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0$ , il existe  $n_2 = n_2(t) \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi^{n_2}(\phi(t)) < \phi(t)$ . En utilisant (1) et (2) dans la définition (1.26) et (4.1), on trouve

$$\begin{aligned}
 & F_{T(a,b),ga}(\phi(t)) \tag{4.18} \\
 & \geq F_{T(a,b),T(x_{n_2}, y_{n_2})}(\phi^{n_2+1}(t)) * F_{T(x_{n_2}, y_{n_2}),ga}(\phi(t) - \phi^{n_2+1}(t)) \\
 & \geq F_{ga, gx_{n_2}}(\phi^{n_2}(t)) * F_{gb, gy_{n_2}}(\phi^{n_2}(t)) * F_{T(x_{n_2}, y_{n_2}),ga}(\phi(t) - \phi^{n_2+1}(t)).
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & L_{T(a,b),ga}(\phi(t)) \tag{4.19} \\
 & \leq L_{T(a,b),T(x_{n_2}, y_{n_2})}(\phi^{n_2+1}(t)) \diamond L_{T(x_{n_2}, y_{n_2}),ga}(\phi(t) - \phi^{n_2+1}(t)) \\
 & \leq L_{ga, gx_{n_2}}(\phi^{n_2}(t)) \diamond L_{gb, gy_{n_2}}(\phi^{n_2}(t)) \diamond L_{T(x_{n_2}, y_{n_2}),ga}(\phi(t) - \phi^{n_2+1}(t))
 \end{aligned}$$

Notons que  $gx_n \rightarrow ga, gy_n \rightarrow gb$  et  $\{T(x_{n_2}, y_{n_2})\} \rightarrow ga$ . Ainsi, en faisant  $n \rightarrow +\infty$  dans (4.18) et (4.19), on obtient

$$\begin{aligned}
 F_{T(a,b),ga}(\phi(t)) & \geq 1 * 1 = 1 \\
 L_{T(a,b),ga}(\phi(t)) & \leq 0 \diamond 0 = 0
 \end{aligned}$$

Par induction, on trouve

$$\begin{aligned}
 F_{T(a,b),ga}(\phi^n(t)) & \geq 1 \\
 L_{T(a,b),ga}(\phi^n(t)) & \leq 0
 \end{aligned}$$

En utilisant (IM-3) et (IM-7) on a  $ga = T(a, b)$ . De même, on peut prouver que  $gb = T(b, a)$ .

Prochainement, on prouve que si  $(a^*, b^*) \in X \times X$  est un autre point de coïncidence couplé de  $g$  et  $T$ , alors  $ga = ga^*$  et  $gb = gb^*$ . En effet, en appliquant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned}
 F_{ga, ga^*}(\phi(t)) & = F_{T(a,b),T(a^*, b^*)}(\phi(t)) \geq F_{ga, ga^*}(t) * F_{gb, gb^*}(t) \\
 F_{gb, gb^*}(\phi(t)) & = F_{T(b,a),T(b^*, a^*)}(\phi(t)) \geq F_{ga, ga^*}(t) * F_{gb, gb^*}(t)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{ga,ga^*}(\phi(t)) &= L_{T(a,b),T(a^*,b^*)}(\phi(t)) \leq L_{ga,ga^*}(t) \diamond L_{gb,gb^*}(t) \\ L_{gb,gb^*}(\phi(t)) &= L_{T(b,a),T(b^*,a^*)}(\phi(t)) \leq L_{ga,ga^*}(t) \diamond L_{gb,gb^*}(t) \end{aligned}$$

Il en découle que

$$F_{ga,ga^*}(\phi(t)) * F_{gb,gb^*}(\phi(t)) \geq *^2(F_{ga,ga^*}(t) * F_{gb,gb^*}(t))$$

et

$$L_{ga,ga^*}(\phi(t)) * L_{gb,gb^*}(\phi(t)) \geq *^2(L_{ga,ga^*}(t) * L_{gb,gb^*}(t)).$$

Par induction, on obtient

$$\begin{aligned} &\min \{ F_{ga,ga^*}(\phi^n(t)), F_{gb,gb^*}(\phi^n(t)) \} \\ &\geq F_{ga,ga^*}(\phi^n(t)) * F_{gb,gb^*}(\phi^n(t)) \\ &\geq *^{2n}(F_{ga,ga^*}(t) * F_{gb,gb^*}(t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\max \{ L_{ga,ga^*}(\phi^n(t)), L_{gb,gb^*}(\phi^n(t)) \} \\ &\leq L_{ga,ga^*}(\phi^n(t)) \diamond L_{gb,gb^*}(\phi^n(t)) \\ &\leq \diamond^{2n}(L_{ga,ga^*}(t) \diamond L_{gb,gb^*}(t)) \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 4.1 et lemme 4.2 et (IM – 3) et (IM – 7) que  $ga = ga^*$  et  $gb = gb^*$ . Ceci montre que  $g$  et  $T$  ont un point couplé de coïncidence unique.

Maintenant, on montre que  $ga = gb$ . En appliquant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} F_{ga,gy_n}(\phi(t)) &= F_{T(a,b),T(y_{n-1},x_{n-1})}(\phi(t)) \geq F_{ga,gy_{n-1}}(t) * F_{gb,gx_{n-1}}(t) \\ F_{gb,gx_n}(\phi(t)) &= F_{T(b,a),T(x_{n-1},y_{n-1})}(\phi(t)) \geq F_{gb,gx_{n-1}}(t) * F_{ga,gy_{n-1}}(t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

et

$$\begin{aligned} L_{ga,gy_n}(\phi(t)) &= L_{T(a,b),T(y_{n-1},x_{n-1})}(\phi(t)) \leq L_{ga,gy_{n-1}}(t) \diamond L_{gb,gx_{n-1}}(t) \\ L_{gb,gx_n}(\phi(t)) &= L_{T(b,a),T(x_{n-1},y_{n-1})}(\phi(t)) \leq L_{gb,gx_{n-1}}(t) \diamond L_{ga,gy_{n-1}}(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Soient

$$\begin{aligned} F_n(t) &= F_{gb,gx_n}(t) * F_{ga,gy_n}(t) \text{ et} \\ L_n(t) &= L_{gb,gx_n}(t) \diamond L_{ga,gy_n}(t). \end{aligned}$$

D'après (4.20) et (4.21), il vient

$$\begin{aligned} F_n(\phi^n(t)) &\geq *^2(F_{n-1}(\phi^{n-1}(t))) \geq \dots \geq *^{2n}(F_0(t)). \\ L_n(\phi^n(t)) &\leq \diamond^2(L_{n-1}(\phi^{n-1}(t))) \leq \dots \leq \diamond^{2n}(L_0(t)) \end{aligned}$$

En appliquant les lemmes 4.1 et 4.2, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(t) = 0$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{gb,gx_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{ga,gy_n}(t) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{gb,gx_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{ga,gy_n}(t) = 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\{gx_n\}$  converge vers  $ga$  et  $\{gy_n\}$  converge vers  $gb$ , on trouve  $gb = ga = u$ . Comme  $T$  et  $g$  sont  $w$ -compatibles, on obtient

$$gu = g(ga) = g(T(a, b)) = T(ga, gb) = T(u, u).$$

ce qui implique que  $(u, u)$  est un point de coïncidence couplé de  $T$  et  $g$ . Donc  $T$  et  $g$  ont un point couplé unique de coïncidence, d'où,  $gu = ga$ . Enfin, on démontre l'unicité du point fixe commun de  $T$  et  $g$ . Soit  $v \in X$  tel que  $v = gv = T(v, v)$ . En utilisant (4.1), on a

$$\begin{aligned} F_{u,v}(\phi(t)) &= F_{T(u,u),T(v,v)}(\phi(t)) \\ &\geq F_{gu,gv}(t) * F_{gu,gv}(t) = *^2(F_{u,v}(t)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{u,v}(\phi(t)) &= L_{T(u,u),T(v,v)}(\phi(t)) \\ &\leq L_{gu,gv}(t) \diamond L_{gu,gv}(t) = \diamond^2(L_{u,v}(t)). \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} F_{u,v}(\phi^n(t)) &\geq *^{2n}(F_{u,v}(t)) \\ L_{u,v}(\phi^n(t)) &\leq \diamond^{2n}(L_{u,v}(t)) \end{aligned}$$

En appliquant les Lemmes 4.1,4.2 et (IM-3),(IM-7) on trouve que  $u = v$ . Ce qui achève à la démonstration. ■

**Théorème 4.2** *Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste avec une  $t$ -norme continue  $*$  de type  $H$  et une  $t$ -conorme continue  $\diamond$  de type  $H$ . Soient  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  une fonction vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = \infty$  pour tout  $t > 0$  et  $T : X \times X \rightarrow X$  et  $g : X \rightarrow X$  deux applications telles que  $T(X \times X) \subseteq g(X)$  et pour tout  $t > 0, x, y, u, v \in X$ .*

$$\begin{aligned} F_{T(x,y),T(u,v)}(t) &\geq F_{g(x),g(u)}(\phi(t)) * F_{g(y),g(v)}(\phi(t)) \\ L_{T(x,y),T(u,v)}(t) &\leq L_{g(x),g(u)}(\phi(t)) \diamond L_{g(y),g(v)}(\phi(t)) \end{aligned} \tag{4.22}$$

*Supposons que  $T(X \times X)$  est complet et que  $g$  et  $T$  sont faiblement compatibles, alors  $g$  et  $T$  ont un point fixe commun unique  $x^* \in X$ , c'est à dire  $x^* = T(x^*, x^*) = g(x^*)$ .*

**Preuve** Comme  $T(X \times X) \subseteq g(X)$ , on peut construire deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$

telles que

$$gx_{n+1} = T(x_n, y_n) \text{ et } gy_{n+1} = T(y_n, x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.23)$$

En appliquant (4.22) et (4.23) on a

$$\begin{aligned} F_{gx_n, gx_{n+1}}(t) &= F_{T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(x_n, y_n)}(t) \\ &\geq F_{g(x_{n-1}), g(x_n)}(\phi(t)) * F_{g(y_{n-1}), g(y_n)}(\phi(t)) \\ L_{gx_n, gx_{n+1}}(t) &= L_{T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(x_n, y_n)}(t) \\ &\leq L_{g(x_{n-1}), g(x_n)}(\phi(t)) \diamond L_{g(y_{n-1}), g(y_n)}(\phi(t)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

et

$$\begin{aligned} F_{gy_n, gy_{n+1}}(t) &= F_{T(y_{n-1}, x_{n-1}), T(y_n, x_n)}(t) \\ &\geq F_{g(x_{n-1}), g(x_n)}(\phi(t)) * F_{g(y_{n-1}), g(y_n)}(\phi(t)) \\ L_{gy_n, gy_{n+1}}(t) &= L_{T(y_{n-1}, x_{n-1}), T(y_n, x_n)}(t) \\ &\leq L_{g(x_{n-1}), g(x_n)}(\phi(t)) \diamond L_{g(y_{n-1}), g(y_n)}(\phi(t)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Maintenant, soient  $E_n(t) = F_{gx_n, gx_{n+1}}(t) * F_{gy_n, gy_{n+1}}(t)$  et  $P_n(t) = L_{gx_n, gx_{n+1}}(t) \diamond L_{gy_n, gy_{n+1}}(t)$ . En utilisant (4.24) et (4.25) on obtient  $E_{n+1}(t) \geq E_n(\phi(t))$  et  $P_{n+1}(t) \leq P_n(\phi(t))$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} E_{n+1}(t) &\geq *^2(E_n(\phi(t))) \geq \dots \geq *^{2n}(E_1(\phi^n(t))) \\ P_{n+1}(t) &\leq \diamond^2(P_n(\phi(t))) \leq \dots \leq \diamond^{2n}(P_1(\phi^n(t))) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{gx_0, gx_1}(t) * F_{gy_0, gy_1}(t) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} L_{gx_0, gx_1}(t) * L_{gy_0, gy_1}(t) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = \infty$  pour chaque  $t > 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_1(\phi^n(t)) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_1(\phi^n(t)) = 0$ .

D'après le lemme 4.1 et lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(t) &= 1 \quad \text{pour tout } t > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) &= 0 \quad \text{pour tout } t > 0\end{aligned}\tag{4.27}$$

Pour tout  $t > 0$  fixe et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = \infty$ , il existe  $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi^{n_0+1}(t) < \phi^{n_0}(t) < t$ .

De même, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) = \infty$ , il existe  $m_0 = m_0(t) \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi^{m_0}(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) > \phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)$ . D'après (4.24), on trouve

$$\begin{aligned}F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}}(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) &\geq E_{n+m_0}(\phi(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) \\ &\geq \dots \geq *^{2m_0}(E_n(\phi^{m_0}(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))) \\ &\geq *^{2m_0}(E_n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) \\ L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}}(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) &\leq P_{n+m_0}(\phi(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) \\ &\leq \dots \leq \diamond^{2m_0}(P_n(\phi^{m_0}(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))) \\ &\leq \diamond^{2m_0}(P_n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))\end{aligned}\tag{4.28}$$

Ensuite, on montre par induction que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $b_k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{aligned}F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}}(\phi^{n_0+1}(t)) &\geq *^{b_k}(E_n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) \\ L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}}(\phi^{n_0+1}(t)) &\leq \diamond^{b_k}(P_n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))\end{aligned}\tag{4.29}$$

et

$$\begin{aligned}F_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}}(\phi^{n_0+1}(t)) &\geq *^{b_k}(E_n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) \\ L_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}}(\phi^{n_0+1}(t)) &\leq \diamond^{b_k}(P_n(\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))\end{aligned}\tag{4.30}$$

C'est une évidence pour  $k = 0$  puisque  $F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0}}(\phi^{n_0+1}(t)) = F_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0}}(\phi^{n_0+1}(t)) = 1$  et  $L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0}}(\phi^{n_0+1}(t)) = L_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0}}(\phi^{n_0+1}(t)) = 0$ .

Supposons que (4.29) et (4.30) sont vraies pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant (4.22), (4.29), (4.28) et  $(IM - 5)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0+1}(t)) \\
 &= F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t) + \phi^{n_0}(t)) \\
 &\geq F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) * F_{gx_{n+m_0+1}, gx_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0}(t)) \\
 &= F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) * F_{T(x_{n+m_0}, y_{n+m_0}), T(x_{n+m_0+k}, y_{n+m_0+k})} (\phi^{n_0}(t)) \\
 &\geq F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) * \left( F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \right) \\
 &\geq F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) * (*^{2b_k} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))) \\
 &\geq *^{2m_0} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) * (*^{2b_k} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))) \\
 &= *^{2(m_0+b_k)} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0+1}(t)) \\
 &= L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t) + \phi^{n_0}(t)) \\
 &\leq L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) \diamond L_{gx_{n+m_0+1}, gx_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0}(t)) \\
 &= L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) \diamond L_{T(x_{n+m_0}, y_{n+m_0}), T(x_{n+m_0+k}, y_{n+m_0+k})} (\phi^{n_0}(t)) \\
 &\leq L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) \diamond \left( L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \right) \\
 &\leq L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+1}} (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) \diamond (\diamond^{2b_k} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))) \\
 &\leq \diamond^{2m_0} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))) \diamond (\diamond^{2b_k} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))) \\
 &= \diamond^{2(m_0+b_k)} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t))).
 \end{aligned}$$

De même, on peut prouver que  $F_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0+1}(t)) \geq *^{2(m_0+b_k)} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))$  et  $L_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k+1}} (\phi^{n_0+1}(t)) \leq \diamond^{2(m_0+b_k)} (E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)))$ .

Comme  $b_{k+1} = 2(m_0 + b_k) \in \mathbb{N}$ , (4.29) est vraie pour  $k + 1$ . Par conséquent, il existe  $b_k \in \mathbb{N}$  tel que (4.29) est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Soient  $t > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse  $\{*^n : n \in \mathbb{N}\}$  est équicontinu au 1 et  $*(1) = 1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\text{si } s \in (1 - \delta, 1], \text{ on a } *^n(s) > 1 - \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (4.31)$$

et  $\{\diamond^n : n \in \mathbb{N}\}$  est équicontinu au 0 et  $\diamond(0) = 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\text{si } s \in [0, \delta), \text{ on a } \diamond^n(s) < \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (4.32)$$

D'autre part, à partir de (4.20)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) = 0$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n > N_0$ ,

$E_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) \in (1-\delta, 1]$  et  $P_n (\phi^{n_0+1}(t) - \phi^{n_0}(t)) \in [0, \delta)$ . D'où, il résulte de (4.29), (4.30), (4.31) et (4.32) que

$$\begin{aligned} F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) &> 1 - \varepsilon \\ L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout  $n > N_0$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ . A partir de (4.17) et (4.18), on trouve

$$\begin{aligned} &\min \left\{ F_{gx_{n+m_0+n_0+1}, gx_{n+m_0+n_0+1+k}}(t), F_{gy_{n+m_0+n_0+1}, gy_{n+m_0+n_0+1+k}}(t) \right\} \\ &\geq *^{2n_0+1} \left( F_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) * F_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \right) \\ &> 1 - \varepsilon \\ &\max \left\{ L_{gx_{n+m_0+n_0+1}, gx_{n+m_0+n_0+1+k}}(t), L_{gy_{n+m_0+n_0+1}, gy_{n+m_0+n_0+1+k}}(t) \right\} \\ &\leq \diamond^{2n_0+1} \left( L_{gx_{n+m_0}, gx_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \diamond L_{gy_{n+m_0}, gy_{n+m_0+k}} (\phi^{n_0+1}(t)) \right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci implique que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} F_{gx_m, gx_{m+k}}(t) &> 1 - \varepsilon \quad \text{and} \quad F_{gy_m, gy_{m+k}}(t) > 1 - \varepsilon \\ L_{gx_m, gx_{m+k}}(t) &< \varepsilon \quad \text{and} \quad L_{gy_m, gy_{m+k}}(t) < \varepsilon \end{aligned}$$

où  $m > N_0 + n_0 + m_0 + 1$ . Alors,  $\{gx_n\}$  et  $\{gy_n\}$ , i.e.,  $\{T(x_n, y_n)\}$  et  $\{T(y_n, x_n)\}$  sont des suites de Cauchy. Comme  $T(X \times X)$  est complet et  $T(X \times X) \subseteq g(X)$ , il existe  $(a, b) \in X \times X$  tels que  $\{T(x_n, y_n)\}$  converge vers  $ga$  et  $\{T(y_n, x_n)\}$  converge vers  $gb$ .

Ensuite, on montre que  $ga = T(a, b)$  et  $gb = T(b, a)$ . D'après (IM - 5) et (4.22), on a pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} F_{T(a,b), T(x_n, y_n)}(t) &\geq F_{ga, gx_n}(\phi(t)) * F_{gb, gy_n}(\phi(t)) \\ L_{T(a,b), T(x_n, y_n)}(t) &\leq L_{ga, gx_n}(\phi(t)) \diamond L_{gb, gy_n}(\phi(t)). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} gx_n = ga$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} gy_n = gb$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$  dans (4.33), on trouve

$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n, y_n) = T(a, b)$ . Notons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n, y_n) = ga$ , on obtient  $T(a, b) = ga$ . De même, on peut prouver que  $T(a, b) = gb$ .

Soient  $u = ga$  et  $v = gb$ . Comme  $g$  et  $T$  sont faiblement compatibles, on a

$$\begin{aligned} gu &= g(ga) = g(T(a, b)) = T(ga, gb) = T(u, v) \\ gv &= g(gb) = g(T(b, a)) = T(gb, ga) = T(v, u). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ce qui montre que  $(u, v)$  est un point de coïncidence couplé de  $g$  et  $T$ .

Maintenant, on montre que  $gu = ga$  et  $gv = gb$ . En utilisant (4.22), on trouve

$$\begin{aligned} F_{gu, gx_n}(t) &= F_{T(u,v), T(x_{n-1}, y_{n-1})}(t) \geq F_{gu, gx_{n-1}}(\phi(t)) * F_{gv, gy_{n-1}}(\phi(t)) \\ L_{gu, gx_n}(t) &= L_{T(u,v), T(x_{n-1}, y_{n-1})}(t) \leq L_{gu, gx_{n-1}}(\phi(t)) \diamond L_{gv, gy_{n-1}}(\phi(t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{gv, gy_n}(t) &= F_{T(v,u), T(y_{n-1}, x_{n-1})}(t) \geq F_{gv, gy_{n-1}}(\phi(t)) * F_{gu, gx_{n-1}}(\phi(t)) \\ L_{gv, gy_n}(t) &= L_{T(v,u), T(y_{n-1}, x_{n-1})}(t) \leq L_{gv, gy_{n-1}}(\phi(t)) \diamond L_{gu, gx_{n-1}}(\phi(t)) \end{aligned}$$

Soient  $F_n(t) = F_{gu, gx_n}(t) * F_{gv, gy_n}(t)$  et  $L_n(t) = L_{gu, gx_n}(t) \diamond L_{gv, gy_n}(t)$ . Alors on obtient

$$\begin{aligned} F_n(t) &\geq *^2(F_{n-1}(\phi(t))) \geq \dots \geq *^{2n}(F_0(\phi^n(t))) \\ L_n(t) &\leq \diamond^2(L_{n-1}(\phi(t))) \leq \dots \leq \diamond^{2n}(L_0(\phi^n(t))). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = \infty$  et  $*$ ,  $\diamond$  sont continues, on a

$$*^{2n}(F_0(\phi^n(t))) = *^{2n}(F_{gv, gx_0}(\phi^n(t)) * F_{gu, gy_0}(\phi^n(t))) \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

et

$$\diamond^{2n}(L_0(\phi^n(t))) = \diamond^{2n}(L_{gv, gx_0}(\phi^n(t)) \diamond L_{gu, gy_0}(\phi^n(t))) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Ce qui montre que  $F_n(t) \rightarrow 1$  et  $L_n(t) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , d'où, on a  $gu = ga$  et  $gv = gb$ .

Par conséquent, on trouve  $gu = u$  et  $gv = v$ . Maintenant, à partir de (4.34) il en résulte que  $u = gu = T(u, v)$  et  $v = gv = T(v, u)$ .

Enfin, on démontre que  $u = v$ . En effet, d'après (4.22), on a pour tout  $t > 0$ ,

$$F_{u,v}(t) = F_{T(u,v), T(v,u)}(t) \geq F_{gu, gv}(\phi(t)) * F_{gv, gu}(\phi(t)) = *^2(F_{u,v}(\phi(t))).$$

$$L_{u,v}(t) = L_{T(u,v), T(v,u)}(t) \leq L_{gu, gv}(\phi(t)) \diamond L_{gv, gu}(\phi(t)) = \diamond^2(L_{u,v}(\phi(t))).$$

Par induction, on peut obtenir  $F_{u,v}(t) \geq *^{2n}(F_{u,v}(\phi^n(t)))$  et  $L_{u,v}(t) \leq \diamond^{2n}(L_{u,v}(\phi^n(t)))$ .

Soit  $n \rightarrow +\infty$  et notant que  $\phi^n(t) \rightarrow \infty; n \rightarrow +\infty$ , on a  $F_{u,v}(t) = 1$  et  $L_{u,v}(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ , i.e.,  $u = v$ . Donc,  $u$  est un point fixe commun de  $g$  et  $T$ .

La preuve de l'unicité de  $u$  est similaire à la preuve de l'unicité dans le théorème 4.1. Ce qui achève la démonstration. ■

Dans les théorème 4.1 et 4.2, si  $gx = x$  pour tout  $x \in X$ , on obtient les corollaires suivants.

**Corollaire 4.1** *Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste avec une  $t$ -norme continue  $*$  de type  $H$  et une  $t$ -conorme continue  $\diamond$  de type  $H$ . Soient  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  une fonction vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$  et  $T : X \times X \rightarrow X$  une application satisfaisant l'inégalité suivante*

$$F_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) \geq F_{x,u}(t) * F_{y,v}(t)$$

$$L_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) \leq L_{x,u}(t) \diamond L_{y,v}(t)$$

pour tout  $t > 0, x, y, u, v \in X$ . Supposons que  $T(X \times X)$  est complet. Alors  $T$  a un point fixe unique  $x^* \in X$ , c'est à dire,  $x^* = T(x^*, x^*)$ .

**Corollaire 4.2** *Soit  $(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste avec une  $t$ -norme continue  $*$  de type  $H$  et une  $t$ -conorme continue  $\diamond$  de type  $H$ . Soient  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  une fonction satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = \infty$  pour tout  $t > 0$  et  $T : X \times X \rightarrow X$  vérifiant l'inégalité suivante*

$$F_{T(x,y),T(u,v)}(t) \geq F_{x,u}(\phi(t)) * F_{y,v}(\phi(t))$$

$$L_{T(x,y),T(u,v)}(t) \leq L_{x,u}(\phi(t)) \diamond L_{y,v}(\phi(t))$$

pour tout  $t > 0, x, y, u, v \in X$ . Supposons que  $T(X \times X)$  est complet. Alors  $T$  a un point fixe unique  $x^* \in X$ , c'est à dire,  $x^* = T(x^*, x^*)$ .

Maintenant, on illustre le théorème 4.1 par l'exemple suivant :

**Exemple 4.1** *Soient  $X = [0, \frac{1}{8}] \cup \{\frac{1}{4}\}$ ,  $x * y = \min(x, y)$  et  $x \diamond y = \max(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$ . On définit  $F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + |x - y|}$  et  $L_{x,y}(t) = \frac{|x - y|}{t + |x - y|}$  pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . Alors*

$(X, F, L, *, \diamond)$  un espace de Menger intuitionniste, mais il n'est pas complet. On définit les deux applications  $g : X \rightarrow X$  et  $T : X \times X \rightarrow X$  par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{16}\right] \\ x & \text{si } x \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right) \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

et

$$T(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{16} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{128} & \text{si } x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il est facile de voir que  $g$  et  $T$  ne commutent pas puisque  $g\left(T\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right) \neq T\left(g\left(\frac{1}{4}\right), g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ ,  $T(X \times X) \subseteq g(X)$  et  $T(X \times X)$  est complet. Soit  $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  définie par

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & t = 1 \\ \frac{t}{2}, & t \neq 1 \end{cases}$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Les équations  $T(x, y) = g(x)$  et  $T(y, x) = g(y)$ , nous donne  $(x, y) = (0, 0)$  et on a  $gT(0, 0) = T(g0, g0)$ , ce qui implique que  $T$  et  $g$  sont faiblement compatibles. Les inégalités suivantes sont faciles à vérifier

$$\begin{aligned} \frac{t}{X+t} &\geq \min \left\{ \frac{t}{Y+t}, \frac{t}{Z+t} \right\}, \\ \frac{X}{X+t} &\leq \max \left\{ \frac{Y}{Y+t}, \frac{Z}{Z+t} \right\}, \\ X &\leq \max \{Y, Z\}, \quad \forall X, Y, Z \geq 0, t > 0. \end{aligned}$$

Par la définition de  $F, L, \phi$  et le résultat ci-dessus, on peut obtenir l'inégalité (4.1)

$$F_{T(x,y), T(u,v)}(\phi(t)) \geq F_{g(x), g(u)}(t) * F_{g(y), g(v)}(t)$$

et

$$L_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) \leq L_{g(x),g(u)}(t) \diamond L_{g(y),g(v)}(t)$$

Ce qui est équivalent à

$$2|T(x,y) - T(u,v)| \leq \max\{|gx - gu|, |gy - gv|\}. \quad (**)$$

Maintenant, on vérifie l'inégalité (\*) pour  $t \neq 1$ ; on doit considérer les quatre cas suivants :

**Cas 1 :** Soient  $x \neq \frac{1}{4}$  et  $u \neq \frac{1}{4}$ . Dans ce cas, il y a quatre possibilités :

**Cas 1.1 :** Soit  $x \in \left[0, \frac{1}{16}\right]$ , alors on a

$$\begin{aligned} 2|T(x,y) - T(u,v)| &= 2\left|\frac{x}{16} - \frac{u}{16}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{x}{4} - \frac{u}{4}\right| \\ &< \left|\frac{x}{4} - \frac{u}{4}\right| \\ &\leq \max\left\{\left|\frac{x}{4} - \frac{u}{4}\right|, \left|\frac{y}{4} - \frac{v}{4}\right|\right\} \\ &\leq \max\{|gx - gu|, |gy - gv|\} \quad \text{pour tout } y, v \in X \end{aligned}$$

Donc, (\*) est vérifiée.

**Cas 1.2 :** Soient  $x \in \left[0, \frac{1}{16}\right]$  et  $u \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$ . Alors

$$\begin{aligned} 2|T(x,y) - T(u,v)| &= 2\left|\frac{x}{16} - \frac{u}{16}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{x}{4} - \frac{u}{4}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|x - \frac{u}{4}\right| \\ &\leq \max\left\{\left|x - \frac{u}{4}\right|, \left|\frac{y}{4} - \frac{v}{4}\right|\right\} \\ &\leq \max\{|gx - gu|, |gy - gv|\} \quad \text{pour tout } x, u, v, v \in X \end{aligned}$$

**Cas 1.3 :** Soient  $x \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$  et  $u \in \left[0, \frac{1}{16}\right]$ . Ce cas est similaire au cas 1.2.

**Cas 1.4 :** Soient  $x \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$  et  $u \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$ . Alors

$$\begin{aligned}
 2|T(x, y) - T(u, v)| &= 2\left|\frac{x}{16} - \frac{u}{16}\right| \\
 &= \frac{1}{2}\left|\frac{x}{4} - \frac{u}{4}\right| \\
 &\leq \left|\frac{x}{4} - \frac{u}{4}\right| \\
 &\leq \max\left\{|x - u|, \left|\frac{y}{2} - \frac{v}{2}\right|\right\} \\
 &\leq \max\{|gx - gu|, |gy - gv|\} \quad \text{pour tout } x, u, y, v \in X
 \end{aligned}$$

**Cas 2 :** Soient  $x = \frac{1}{4}$  et  $u = \frac{1}{4}$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}
 2|T(x, y) - T(u, v)| &= 2\left|\frac{x}{128} - \frac{u}{128}\right| \\
 &= 0 \\
 &\leq \max\left\{\left|g\left(\frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{4}\right)\right|, |gy - gv|\right\} \quad \text{pour tout } y, v \in X
 \end{aligned}$$

**Cas 3 :** Soient  $x = \frac{1}{4}$  et  $u \neq \frac{1}{4}$ . Alors on a

**Cas 3.1 :** Si  $u \in \left[0, \frac{1}{8}\right]$ , alors

$$\begin{aligned}
 2|T(x, y) - T(u, v)| &= 2\left|T\left(\frac{1}{2}, y\right) - T(u, v)\right| \\
 &= 2\left|\frac{1}{128} - \frac{u}{16}\right| \\
 &= \left|\frac{1}{64} - \frac{u}{8}\right| \\
 &\leq \left|\frac{1}{8} - u\right| \\
 &\leq \left|\frac{1}{4} - \frac{u}{4}\right| \\
 &\leq \max\left\{\left|g\left(\frac{1}{4}\right) - gu\right|, |gy - gv|\right\} \quad \text{pour tout } y, v \in X
 \end{aligned}$$

**Cas 3.2.** Si  $u \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$ , alors

$$\begin{aligned}
 2|T(x, y) - T(u, v)| &= 2 \left| \frac{1}{128} - \frac{u}{16} \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{64} - \frac{u}{8} \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{8} - u \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{4} - u \right| \\
 &\leq \max \left\{ \left| g\left(\frac{1}{4}\right) - gu \right|, |gy - gv| \right\} \text{ pour tout } y, v \in X
 \end{aligned}$$

**Cas 4.**  $x \neq \frac{1}{4}$  et  $u = \frac{1}{4}$ . Ce cas est similaire au 3<sup>ème</sup> cas. Il est facile de voir que  $(0, 0)$  est un point de coïncidence couplé de  $g$  et  $T$ . Aussi  $g$  et  $T$  sont faiblement compatibles en  $(0, 0)$ . D'après le théorème 4.1, on conclue que  $g$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ . Il est évident dans cet exemple que  $0$  est le point fixe commun unique de  $g$  et  $T$  dans  $X$ .

### 4.3 Application aux équations intégrales

Comme une application des théorèmes (4.1), on étudie l'existence et l'unicité de la solution à une équation intégrale de Fredholm non linéaire.

On considère l'équation intégrale suivante :

$$x(p) = \int_a^b (K_1(p, q) + K_2(p, q)) [f(q, x(q)) + g(q, x(q))] dq + h(p), \quad (4.35)$$

pour tout  $p \in I = [a, b]$ .

Soit  $\Theta$  désigne l'ensemble de toutes les fonctions  $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  vérifiant

(i<sub>θ</sub>)  $\theta$  est croissante,

(ii<sub>θ</sub>)  $\theta(p) \leq p$ .

On suppose que les fonctions  $K_1, K_2, f, g$  satisfont les conditions suivantes.

- (i)  $K_1(p, q) \geq 0$  et  $K_2(p, q) \leq 0$  pour tout  $p, q \in I$ ,  
(ii) Il existe  $\theta \in \Theta$  telle que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $x \geq y$ , on a

$$0 \leq f(q, x) - f(q, y) \leq \lambda\theta(x - y) \quad (4.36)$$

et

$$-\mu\theta(x - y) \leq g(q, x) - g(q, y) \leq 0, \quad (4.37)$$

(iii)

$$\max\{\lambda, \mu\} \sup_{p \in I} \int_a^b [K_1(p, q) - K_2(p, q)] dq \leq \frac{1}{8} \quad (4.38)$$

Considérons l'équation intégrale (4.35) avec  $K_1, K_2 \in C(I \times I, \mathbb{R})$  et  $h \in C(I, \mathbb{R})$ . Supposons que l'Assomption 1 est satisfaite, alors l'équation intégrale (4.35) a une solution unique dans  $C(I, \mathbb{R})$ .

**Preuve** Soit  $X = C(I, \mathbb{R})$ . Il est facile de vérifier que  $(X, F, L, *, \diamond)$  est un espace de Menger

intuitionniste complet pour

$$F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + |x - y|} \text{ et } L_{x,y}(t) = \frac{|x - y|}{t + |x - y|} \text{ pour tout } x, y \in X \text{ et } t > 0$$

avec  $x * y = \min(x, y)$  et  $x \diamond y = \max(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$ .

On définit maintenant l'application  $T : X \times X \rightarrow X$  par

$$T(x, y)(p) = \int_a^b K_1(p, q) [f(q, x(q)) + g(q, y(q))] dq + \int_a^b K_2(p, q) [f(q, y(q)) + g(q, x(q))] dq + h(p) \quad (4.39)$$

pour tout  $p \in I$  et  $\phi(t) = \frac{t}{2}$  pour tout  $t > 0$ . Maintenant, pour tout  $x, y, u, v \in X$ , en utilisant

(4.36) et (4.37), on obtient

$$\begin{aligned}
 & T(x, y)(p) - T(u, v)(p) \tag{4.40} \\
 = & \int_a^b K_1(p, q) [f(q, x(q)) + g(q, y(q))] dq \\
 & + \int_a^b K_2(p, q) [f(q, y(q)) + g(q, x(q))] dq \\
 & - \int_a^b K_1(p, q) [f(q, u(q)) + g(q, v(q))] dq \\
 & - \int_a^b K_2(p, q) [f(q, v(q)) + g(q, u(q))] dq \\
 = & \int_a^b K_1(p, q) [f(q, x(q)) - f(q, u(q)) + g(q, y(q)) - g(q, v(q))] dq \\
 & + \int_a^b K_2(p, q) [f(q, y(q)) - f(q, v(q)) + g(q, x(q)) - g(q, u(q))] dq \\
 = & \int_a^b K_1(p, q) [(f(q, x(q)) - f(q, u(q))) - (g(q, v(q)) - g(q, y(q)))] dq \\
 & - \int_a^b K_2(p, q) [(f(q, v(q)) - f(q, y(q))) - (g(q, x(q)) - g(q, u(q)))] dq \\
 \leq & \int_a^b K_1(p, q) [\lambda\theta(x(q) - u(q)) + \mu\theta(v(q) - y(q))] dq \\
 & - \int_a^b K_2(p, q) [\lambda\theta(v(q) - y(q)) + \mu\theta(x(q) - u(q))] dq
 \end{aligned}$$

Puisque la fonction  $\theta$  est croissante on a

$$\theta(x(q) - u(q)) \leq \theta(|x(q) - u(q)|)$$

et

$$\theta(v(q) - y(q)) \leq \theta(|v(q) - y(q)|),$$

D'après (4.40) et compte tenu du fait que  $K_2(p, q) \leq 0$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 & |T(x, y)(p) - T(u, v)(p)| \tag{4.41} \\
 & \leq \int_a^b K_1(p, q) [\lambda\theta(|x(q) - u(q)|) + \mu\theta(|v(q) - y(q)|)] dq \\
 & \quad - \int_a^b K_2(p, q) [\lambda\theta(|v(q) - y(q)|) + \mu\theta(|x(q) - u(q)|)] dq \\
 & \leq \int_a^b K_1(p, q) [\max\{\lambda, \mu\}\theta(|x(q) - u(q)|) + \max\{\lambda, \mu\}\theta(|v(q) - y(q)|)] dq \\
 & \quad - \int_a^b K_2(p, q) [\max\{\lambda, \mu\}\theta(|v(q) - y(q)|) + \max\{\lambda, \mu\}\theta(|x(q) - u(q)|)] dq
 \end{aligned}$$

En utilisant (4.39), on trouve

$$\begin{aligned}
 & |T(x, y) - T(u, v)| \tag{4.42} \\
 & \leq \max\{\lambda, \mu\} \int_a^b [K_1(p, q) - K_2(p, q)] dq. [\theta(|x(q) - u(q)|) + \theta(|v(q) - y(q)|)] \\
 & \leq \max\{\lambda, \mu\} \sup_{p \in I} \int_a^b [K_1(p, q) - K_2(p, q)] dq. [\theta(|x(q) - u(q)|) + \theta(|v(q) - y(q)|)] \\
 & \leq \frac{\theta(|x - u|) + \theta(|v - y|)}{8},
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$2|T(x, y) - T(u, v)| \leq \frac{\theta(|x - u|) + \theta(|v - y|)}{4} \tag{4.43}$$

Comme  $\theta$  est croissante, on a

$$\begin{aligned}
 \theta(|x - u|) & \leq \theta(|x - u|) + \theta(|y - v|), \tag{4.44} \\
 \theta(|y - v|) & \leq \theta(|x - u|) + \theta(|y - v|),
 \end{aligned}$$

et à l'aide de (ii<sub>θ</sub>) on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\theta(|x - u|) + \theta(|y - v|)}{2} & \leq \theta(|x - u| + |y - v|) \tag{4.45} \\
 & \leq |x - u| + |y - v| \\
 & \leq 2 \max\{|x - u|, |y - v|\},
 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\theta(|x-u|) + \theta(|y-v|)}{4} \leq \max\{|x-u|, |y-v|\} \quad (4.46)$$

Ainsi, d'après (4.43) et (4.46), on trouve

$$2|T(x,y) - T(u,v)| \leq \max\{|x-u|, |y-v|\} \quad (4.47)$$

Maintenant, d'après (4.47) et (\*\*), il en résulte que

$$\begin{aligned} F_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) &= F_{T(x,y),T(u,v)}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2} + |T(x,y) - T(u,v)|} \\ &= \frac{t}{t + 2|T(x,y) - T(u,v)|} \\ &\geq \frac{t}{t + \max\{|x-u|, |y-v|\}} \\ &\geq \min\left\{\frac{t}{t + |x-u|}, \frac{t}{t + |y-v|}\right\} \\ &\geq \min\{F_{x,u}(t), F_{y,v}(t)\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) &= L_{T(x,y),T(u,v)}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{|T(x,y) - T(u,v)|}{\frac{t}{2} + |T(x,y) - T(u,v)|} \\ &= \frac{2|T(x,y) - T(u,v)|}{t + 2|T(x,y) - T(u,v)|} \\ &\leq \frac{\max\{|x-u|, |y-v|\}}{t + \max\{|x-u|, |y-v|\}} \\ &\leq \max\left\{\frac{|x-u|}{t + |x-u|}, \frac{|y-v|}{t + |y-v|}\right\} \\ &\leq \max\{L_{x,u}(t), L_{y,v}(t)\} \end{aligned}$$

C'est ainsi

$$F_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) \geq F_{x,u}(t) * F_{y,v}(t)$$

et

$$L_{T(x,y),T(u,v)}(\phi(t)) \leq L_{x,u}(t) \diamond L_{y,v}(t)$$

qui sont les conditions (4.1), Donc toutes les hypothèses de corollaire 4.1 sont satisfaites et  $T$  a un point fixe unique  $a \in X$ , c'est à dire  $a = T(a, a)$  et  $a \in C(I, \mathbb{R})$  est la solution unique de l'équation intégrale (4.35). ■

# Chapitre 5

## Théorèmes de point fixe couplé pour des applications faiblement compatibles dans les espaces de Menger en utilisant la propriété CLR

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne le concept de la propriété  $(E.A)$ , la propriété  $(CLR)$  et la propriété  $(JCLR)$  pour les applications couplées et on prouve un résultat qui fournit une généralisation du résultat de Zhong Xiao [69].

### 5.2 Résultats préliminaires

**Lemme 5.1** *Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger. Pour chaque  $\lambda \in (0, 1]$ , on définit la fonction  $d_\lambda : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  par*

$$d_\lambda(x, y) = \inf \{t > 0 : F_{x,y}(t) > 1 - \lambda\}. \quad (***)$$

*Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (1)  $d_\lambda(x, y) < t$  ssi  $F_{x,y}(t) > 1 - \lambda$ ;
- (2)  $d_\lambda(x, y) = d_\lambda(y, x)$  pour tout  $x, y \in X$  et  $\lambda \in (0, 1]$ ;
- (3)  $d_\lambda(x, y) = 0$  pour tout  $\lambda \in (0, 1]$  ssi  $x = y$ .

**Lemme 5.2** Soient  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger et  $\{d_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$  une famille de pseudo-métriques sur  $X$  définie par (\*\*\*) . Si  $\Delta$  est une  $t$ -norme de type  $H$ , alors pour chaque  $\lambda \in (0, 1]$ , il existe  $\mu \in (0, \lambda]$  tel que pour tout  $m \in \mathbb{Z}_+$ ,

$$d_\lambda(x_0, x_m) \leq \sum_{i=0}^{m-1} d_\mu(x_i, x_{i+1}), \text{ pour tout } x_0, x_1, \dots, x_m \in X.$$

### 5.3 Résultats principaux

Maintenant, on introduit les concepts suivants.

**Définition 5.1** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger. Les applications  $A : X \times X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  vérifient la propriété  $E.A$  s'il existe deux suites  $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$  telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = x \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = y \end{aligned}$$

pour certains  $x, y \in X$ .

**Définition 5.2** Soient  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger et  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$ ,  $S : X \rightarrow X$  quatre applications. Les deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $E.A$  s'il existe des suites  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{x'_n\}, \{y'_n\} \in X$  telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(y'_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = y \end{aligned}$$

pour  $x, y \in X$ .

**Définition 5.3** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger. Les applications  $A : X \times X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  vérifient la propriété  $CLR_S$  s'il existe des suites  $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$  telles que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = Sx \quad \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = Sy\end{aligned}$$

pour  $x, y \in X$ .

**Définition 5.4** Soient  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger et  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$ ,  $S : X \rightarrow X$  quatre applications. Les deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$  s'il existe des suites  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{x'_n\}, \{y'_n\} \in X$  telles que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(y'_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = y\end{aligned}$$

où  $x, y \in S(X) \cap T(X)$ .

Jian-Zhong Xiao [69] a prouvé le résultat suivant :

**Théorème 5.1** Soient  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger complet avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de type  $H$  telle que  $\Delta \geq \Delta_p$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant

$$F_{A(x,y), A(u,v)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{Tx, Tu}(t), F_{Ty, Tv}(t))]^{1/2}$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$ , où  $A(X \times X) \subseteq T(X)$ ,  $T$  est continue et commute avec  $A$ . Alors, il existe  $u \in X$  unique telle que  $u = Tu = A(u, u)$ .

On donne maintenant notre résultat principal qui fournit une généralisation du théorème 5.1.

**Théorème 5.2** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de type  $H$  telle  $\Delta \geq \Delta_p$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) <$

$+\infty$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant les conditions suivantes :

(1)

$$F_{A(x,y),A(u,v)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{Sx,Su}(t), F_{Sy,Sv}(t))]^{1/2} \quad (5.1)$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$

(2) Le paire  $(A, S)$  est faiblement compatible.

(3) Le paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $CLR_S$ .

Alors  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé dans  $X$ . En outre,, il existe un point unique  $x \in X$  tel que  $x = A(x, x) = S(x)$ .

**Preuve** Puisque  $A$  et  $S$  satisfont la propriété  $CLR_S$ , il existe des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(p), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = S(q) \quad (5.2)$$

pour certains  $x, y \in X$ .

**Etape 1.** On montre que  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé. Puisque  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  tel que  $\varphi^{n_0}(t) < t$ . En appliquant (5.1), on obtient

$$\begin{aligned} F_{A(x_n, y_n), A(p, q)}(t) &\geq F_{A(x_n, y_n), A(p, q)}(\varphi^{n_0}(t)) \\ &\geq [\Delta(F_{S(x_n), S(p)}(\varphi^{n_0-1}(t)), F_{S(y_n), S(q)}(\varphi^{n_0-1}(t)))]^{1/2} \\ &\geq [F_{S(x_n), S(p)}(\varphi^{n_0-1}(t)) F_{S(y_n), S(q)}(\varphi^{n_0-1}(t))]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

En faisant  $n \rightarrow \infty$  dans (5.3), on trouve  $F_{S(p), A(p, q)}(t) = 1$ , c'est à dire,  $A(p, q) = S(p) = x$ . De même, on a  $S(q) = A(q, p) = y$ . Comme la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible, il s'ensuit que  $A(x, y) = S(x)$  et  $A(y, x) = S(y)$ . D'où  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé.

**Etape 2.** On montre que  $S(x) = y, S(y) = x$ . En utilisant (5.1), on a

$$\begin{aligned} F_{S(x_n),S(y)}(\varphi(t)) &= F_{A(x_n,y_n),A(y,x)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{S(x_n),S(y)}(t), F_{S(y_n),S(x)}(t))]^{1/2} \\ &\geq [F_{S(x_n),S(y)}(t) F_{S(y_n),S(x)}(t)]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

De même, on obtient

$$F_{S(x),S(y_n)}(\varphi(t)) \geq [F_{S(x_n),S(y)}(t) F_{S(y_n),S(x)}(t)]^{1/2} \quad (5.5)$$

Posons  $Q_n(t) = F_{S(x_n),S(y)}(t) F_{S(y_n),S(x)}(t)$ . En utilisant (5.4) et (5.5), on trouve  $Q_n(\varphi(t)) \geq Q_{n-1}(t)$ , donc

$$Q_n(\varphi^n(t)) \geq Q_{n-1}(\varphi^{n-1}(t)) \geq \dots \geq Q_0(t). \quad (5.6)$$

En outre, à partir de (5.4) - (5.6), il en résulte que

$$F_{S(x_n),S(y)}(\varphi^n(t)) \geq [Q_0(t)]^{1/2}; \text{ et } F_{S(x),S(y_n)}(\varphi^n(t)) \geq [Q_0(t)]^{1/2} \quad (5.7)$$

Il est évident que  $[Q_0(t)]^{1/2} \in D^+$  puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ . D'après (5.7) et le lemme 4.1, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(y) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = S(x).$$

ce qui montre que  $S(x) = y$  et  $S(y) = x$ . Alors  $A(x, y) = y$  et  $A(y, x) = x$ .

**Etape 3.** On va montrer que  $x = y$ . En appliquant (5.1) on a

$$F_{x,y}(\varphi(t)) = F_{A(y,x),A(x,y)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{S(y),S(x)}(t), F_{S(x),S(y)}(t))]^{1/2} \geq F_{x,y}(t). \quad (5.8)$$

D'après (5.8), on obtient  $F_{x,y}(\varphi^n(t)) \geq F_{x,y}(t)$ . En utilisant le lemme 4.1, on trouve  $F_{x,y}(t) = 1$ , i.e.,  $x = y$ . L'unicité de  $x$  découle de (5.1). ■

**Théorème 5.3** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  est une application  $t$ -norme de type  $H$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ,  $\varphi(t) < t$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X, S : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant les conditions

*suivantes :*

(1)

$$F_{A(x,y),A(u,v)}(\varphi(t)) \geq [F_{Sx,Su}(t) F_{Sy,Sv}(t)]^{1/2} \quad (5.9)$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$

(2) Le paire  $(A, S)$  est *w-compatible*.

(3) Le paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $CLR_S$ .

Alors  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé dans  $X$ . En outre, il existe un point unique  $x \in X$  tel que  $x = A(x, x) = S(x)$ .

**Preuve** Puisque  $A$  et  $S$  satisfont la propriété  $CLR_S$ , il existe des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(p) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = S(q) \quad (5.10)$$

pour certains  $x, y \in X$ .

**Etape 1.** On montre que  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé. En appliquant (5.9) et  $\varphi(t) < t$ , on obtient

$$\begin{aligned} F_{S(x_n),A(p,q)}(t) &\geq F_{S(x_n),A(p,q)}(\varphi(t)) = F_{A(x_n,y_n),A(p,q)}(\varphi(t)) \\ &\geq [F_{S(x_n),S(p)}(t) F_{S(y_n),S(q)}(t)]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Laisant  $n \rightarrow \infty$  dans (5.11), on trouve  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = A(p, q)$ . Donc,  $S(p) = A(p, q) = x$ . De même, on peut montrer que  $S(q) = A(q, p) = y$ .

Puisque la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible, il résulte que :  $A(x, y) = S(x)$  et  $A(y, x) = S(y)$ .

**Etape 2 :**

On montre que  $S(x) = y, S(y) = x$ .

En fait, à partir de (5.9), on a

$$F_{S(x_n),S(y)}(\varphi(t)) = F_{A(x_n,y_n),A(y,x)}(\varphi(t)) \geq [F_{S(x_n),S(y)}(t) F_{S(y_n),S(x)}(t)]^{1/2} \quad (5.12)$$

De même, on a

$$F_{S(x),S(y_n)}(\varphi(t)) \geq [F_{S(x_n),S(y)}(t) F_{S(y_n),S(x)}(t)]^{1/2} \quad (5.13)$$

Supposons que  $Q_n(t) = F_{S(x_n),S(y)}(t) F_{S(y_n),S(x)}(t)$ . Par (5.12) et (5.13), on obtient

$$Q_n(\varphi^n(t)) \geq Q_{n-1}(\varphi^{n-1}(t)) \geq \dots \geq Q_0(t).$$

$$F_{S(x_n),S(y)}(\varphi^n(t)) \geq [Q_0(t)]^{1/2}; \text{ et } F_{S(x),S(y_n)}(\varphi^n(t)) \geq [Q_0(t)]^{1/2}$$

Puisque  $[Q_0(t)]^{1/2} \in D^+$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ , par le lemme 4.1 on conclue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(y) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = S(x).$$

Cela montre que  $S(x) = y$  et  $S(y) = x$ . Donc,  $A(x, y) = y$  et  $A(y, x) = x$ .

**Etape 3 :**

Enfin, on démontre que  $x = y$ .

Par (5.9), on a

$$F_{x,y}(\varphi(t)) = F_{A(y,x),A(x,y)}(\varphi(t)) \geq [F_{S(y),S(x)}(t) F_{S(x),S(y)}(t)]^{1/2} \geq F_{x,y}(t). \quad (5.14)$$

De (5.14), on a  $F_{x,y}(\varphi^n(t)) \geq F_{x,y}(t)$ . En utilisant le lemme (4.1), on obtient  $F_{x,y}(t) = 1$ , i.e.,  $x = y$ . L'unicité de  $x$  découle de (5.9). Ceci termine la preuve. ■

**Théorème 5.4** *Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  est une application  $t$ -norme de type  $H$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ,  $\varphi(t) < t$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $S : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant les conditions suivantes :*

(1)

$$F_{A(x,y),A(u,v)}(t) \geq \min \{F_{Sx,Su}(\varphi(t)), F_{Sy,Sv}(\varphi(t))\} \quad (5.15)$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$ .

(2) *Le paire  $(A, S)$  est  $w$ -compatible.*

(3) *Le pair  $(A, S)$  satisfont la propriété  $(CLR_S)$ .*

Alors  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé en  $X$ . En outre, il existe un point unique  $x \in X$  tel que  $x = A(x, x) = S(x)$ .

**Preuve** Comme  $A$  et  $S$  satisfont la propriété  $(CLR_S)$ , il existe des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(p), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = S(q) \quad (5.16)$$

pour certains  $x, y \in X$ .

**Etape 1 :**

On montre que  $A$  et  $S$  ont un point de coïncidence couplé.

De (5.15) et (5.16), on trouve

$$F_{S(x_n), A(p, q)}(t) = F_{A(x_n, y_n), A(p, q)}(t) \geq \min \{F_{S(x_n), S(p)}(\varphi(t)), F_{S(y_n), S(q)}(\varphi(t))\} \quad (5.17)$$

Laisant  $n \rightarrow \infty$  dans (5.17), on obtient  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = A(p, q)$ . Donc,  $S(p) = A(p, q) = x$ .

De même, on peut montrer que  $S(q) = A(q, p) = y$ .

Comme le paire  $(A, S)$  est faiblement compatible, il résulte que :  $A(x, y) = S(x)$  et  $A(y, x) = S(y)$ .

**Etape 2 :**

On montrer que  $S(x) = y, S(y) = x$ .

En fait, à partir de (5.15), on a

$$F_{S(x_n), S(y)}(t) = F_{A(x_n, y_n), A(y, x)}(t) \geq \min \{F_{S(x_n), S(y)}(\varphi(t)), F_{S(y_n), S(x)}(\varphi(t))\} \quad (5.18)$$

De même, on a

$$F_{S(x), S(y_n)}(t) \geq \min \{F_{S(x_n), S(y)}(\varphi(t)), F_{S(y_n), S(x)}(\varphi(t))\} \quad (5.19)$$

Supposons que  $M_n(t) = \min \{F_{S(x_n), S(y)}(t), F_{S(y_n), S(x)}(t)\}$ . De (5.18) et (5.19) on trouve

$$M_n(t) \geq M_{n-1}(\varphi(t)) \geq \dots \geq M_0(\varphi^n(t)).$$

De  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = +\infty$ , on obtient

$$M_0(\varphi^n(t)) = \min \{F_{S(x_0), S(y)}(t), F_{S(y_0), S(x)}(t)\} \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

Cela montre que  $M_n(t) \rightarrow 1$  comme  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(y) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = S(x).$$

Par conséquent  $S(x) = y$  et  $S(y) = x$ .

**Etape 3 :**

Enfin, on démontre que  $x = y$ .

Par (5.15), on a

$$F_{x,y}(t) = F_{A(y,x), A(x,y)}(t) \geq \min \{F_{S(y), T(x)}(\varphi(t)), F_{S(x), T(y)}(\varphi(t))\} = F_{x,y}(\varphi(t)). \quad (5.20)$$

A partir (5.20), on a  $F_{x,y}(t) \geq F_{x,y}(\varphi^n(t))$ . On laisse  $n \rightarrow \infty$ , on trouve  $F_{x,y}(t) = 1$ , i.e.,  $x = y$ . L'unicité de  $x$  découle de (5.15). Ceci achève la preuve du théorème 5.4. ■

Maintenant on donne une autre généralisation du théorème 1.

**Corollaire 5.1** *Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de  $H$ -type et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ,  $\varphi(t) < t$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X, S : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant les conditions suivantes:*

(1)

$$F_{A(x,y), A(u,v)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{Sx, Su}(t), F_{Sy, Sv}(t))]^{1/2}$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$ .

(2) *Le paire  $(A, S)$  est  $w$ -compatible.*

(3) *Le paire  $(A, S)$  satisfait la propriété (E.A).*

*Si  $S(X)$  est un sous-espace fermé de  $X$ , alors  $A$  et  $S$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .*

**Preuve** Puisque  $A$  et  $S$  satisfont la propriété (E.A), il existe des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = y$$

pour certains  $x, y \in X$ .

Il résulte de  $S(X)$  étant un sous-espace fermé de  $X$  que  $x = S(p)$ ,  $y = S(q)$  pour certains  $p, q \in X$  et alors  $A$  et  $S$  satisfont la propriété  $(CLR_S)$ . D'après le théorème 5.2, on obtien que  $A$  et  $S$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ . ■

**Corollaire 5.2** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de  $H$ -type et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ,  $\varphi(t) < t$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X, S : X \rightarrow X$  deux applications satisfaisant les conditions de corollaire 5.1. Supposons que  $A(X \times X) \subseteq S(X)$ , si le rang de l'une des applications  $A$  et  $S$  est un sous-espace fermé de  $X$ , alors  $A$  et  $S$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .

**Preuve** Elle s'ensuit immédiatement du Corollaire 5.1. ■

En prenant  $S = I_X$  dans le théorèm 5.2, on obtien le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  est une application  $t$ -norme de type  $H$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ,  $\varphi(t) < t$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$  une application satisfaisant les conditions suivantes :

(1)

$$F_{A(x,y),A(u,v)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{x,u}(t), F_{y,v}(t))]^{1/2}$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$ .

(2) il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{aligned}$$

pour certains  $x, y \in X$ . Alors, il existe un unique  $z \in X$  tel que  $z = A(z, z)$ .

Maintenant, on démontre les théorème 5.2,5.3,5.4 pour quatre applications satisfaisant la propriété  $(CLR_{ST})$  avant de prouver nos principaux théorèmes, on commence par le lemme suivant.

**Lemme 5.3** *Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de type  $H$  avec  $\Delta \geq \Delta_p$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  quatre applications satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) *Le paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $CLR_S$  ou (le paire  $(B, T)$  satisfait la propriété  $CLR_T$ ).*

(2)  *$A(X \times X) \subseteq T(X)$  (ou  $B(X \times X) \subseteq S(X)$ ).*

(3)  *$T(X)$  (ou  $S(X)$ ) est un sous-espace complet de  $X$ .*

(4)  *$B(x'_n, y'_n)$  converge pour toutes les suites  $\{x'_n\}$  et  $\{y'_n\}$  dans  $X$  quand  $T(x'_n), T(y'_n)$  convergent (ou  $A(x_n, y_n)$  converge pour toutes les suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  quand  $S(x_n), S(y_n)$  convergent).*

(5)

$$F_{A(x,y),B(u,v)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{Sx,Tu}(t), F_{Sy,Tv}(t))]^{1/2} \quad (5.21)$$

pour tout  $x, y, u, v \in X$  et  $t > 0$ . Alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$ .

**Preuve** Supposons que la paire  $(A, S)$  satisfait la propriété  $(CLR_S)$ , alors il existe  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = a \in S(X) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = b \in S(X). \end{aligned}$$

Comme  $A(X \times X) \subseteq T(X)$ , où  $T(X)$  est complet, pour chaque  $\{x_n\}, \{y_n\}$  dans  $X$  correspond deux suites  $\{x'_n\}$  et  $\{y'_n\}$  dans  $X$  telles que

$$A(x_n, y_n) = T(x'_n) \text{ et } A(y_n, x_n) = T(y'_n)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = a \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = b, \text{ où } a, b \in S(X) \cap T(X).\end{aligned}$$

Maintenant, on prouve que  $B(x'_n, y'_n) \rightarrow a$  et  $B(y'_n, x'_n) \rightarrow b$ .

Puisque  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  tel que  $\varphi^{n_0}(t) < t$ .

Ainsi, à partir de (5.21) on obtient

$$\begin{aligned}F_{A(x_n, y_n), B(x'_n, y'_n)}(t) &\geq F_{A(x_n, y_n), B(x'_n, y'_n)}(\varphi^{n_0}(t)) \\ &\geq \left[ \Delta \left( F_{S(x_n), T(x'_n)}(\varphi^{n_0+1}(t)), F_{S(y_n), T(y'_n)}(\varphi^{n_0+1}(t)) \right) \right]^{1/2} \\ &\geq \left[ F_{S(x_n), T(x'_n)}(\varphi^{n_0+1}(t)) F_{S(y_n), T(y'_n)}(\varphi^{n_0+1}(t)) \right]^{1/2}\end{aligned} \quad (5.22)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans (5.22), on trouve  $\lim_{n \rightarrow \infty} B(x'_n, y'_n) = a$ . De même, on peut montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B(y'_n, x'_n) = b$ .

Ainsi, les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  satisfont la propriété  $(CLR_{ST})$ . ■

**Théorème 5.5** *Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de type  $H$  avec  $\Delta \geq \Delta_p$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  quatre applications satisfaisant l'inégalité (5.21) du lemme 5.4. Si les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$ , alors  $(A, S)$  et  $(B, T)$  chacune a un point de coïncidence. De plus, si les deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont faiblement compatibles, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun unique dans  $X$ .*

**Preuve** Comme les deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$ , il existe quatre suites  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{x'_n\}$  et  $\{y'_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(x'_n, y'_n) = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(y'_n, x'_n) = b.\end{aligned} \quad (5.23)$$

où  $a, b \in S(X) \cap T(X)$ . Donc, il existe des points  $r, s, p, q \in X$  tels que :

$$S(r) = a, S(s) = b, T(p) = a \text{ et } T(q) = b.$$

**Etape 1.** On montre que  $B(p, q) = T(p)$  et  $B(q, p) = T(q)$ . Puisque  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$ , on trouve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  tel que  $\varphi^{n_0}(t) < t$ . En utilisant (5.21), on obtient

$$\begin{aligned} F_{T(x'_n), B(p, q)}(t) &\geq F_{T(x'_n), B(p, q)}(\varphi^{n_0}(t)) = F_{A(x_n, y_n), B(p, q)}(\varphi^{n_0}(t)) \\ &\geq \left[ \Delta \left( F_{S(x_n), T(p)}(\varphi^{n_0-1}(t)), F_{S(y_n), T(q)}(\varphi^{n_0-1}(t)) \right) \right]^{1/2} \\ &\geq \left[ F_{S(x_n), T(p)}(\varphi^{n_0-1}(t)) F_{S(y_n), T(q)}(\varphi^{n_0-1}(t)) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans (5.24), on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = B(p, q)$ . D'après (5.23), on trouve  $T(p) = B(p, q) = a$ . De même, on peut montrer que  $T(q) = B(q, p) = b$ . Puisque la paire  $(B, T)$  est faiblement compatible, on a  $T(p) = B(p, q) = a$  ce qui implique que  $T(a) = B(a, b)$ . D'une manière similaire on obtient  $T(b) = B(b, a)$ .

Maintenant, on montre que :  $S(r) = A(r, s)$  et  $S(s) = A(s, r)$ .

Puisque  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  tel que  $\varphi^{n_0}(t) < t$ . Ainsi, à partir de (5.21) on obtient

$$\begin{aligned} F_{A(r, s), S(x_n)}(t) &\geq F_{A(r, s), S(x_n)}(\varphi^{n_0}(t)) = F_{A(r, s), B(x'_n, y'_n)}(\varphi^{n_0}(t)) \\ &\geq \left[ \Delta \left( F_{S(r), T(x'_n)}(\varphi^{n_0-1}(t)), F_{S(s), T(y'_n)}(\varphi^{n_0-1}(t)) \right) \right]^{1/2} \\ &\geq \left[ F_{S(r), T(x'_n)}(\varphi^{n_0-1}(t)) F_{S(s), T(y'_n)}(\varphi^{n_0-1}(t)) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

En faisant  $n \rightarrow \infty$  dans (5.25), on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = A(r, s)$ . D'après (5.23),  $S(r) = A(r, s) = a$ . De même, on peut montrer que  $S(s) = A(s, r) = b$ . Puisque la paire  $(A, S)$  est faiblement compatible, il s'ensuit que  $A(a, b) = S(a)$  et  $A(b, a) = S(b)$ .

**Etape 2.** On affirme que  $Ta = b, Tb = a$  et  $Sa = b, Sb = a$ . A partir de (5.21), on a

$$\begin{aligned} F_{T(y'_n),Ta}(\varphi(t)) &= F_{A(y_n,x_n),B(a,b)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{S(y_n),T(a)}(t), F_{S(x_n),T(b)}(t))]^{1/2} \\ &\geq [F_{S(y_n),T(a)}(t) F_{S(x_n),T(b)}(t)]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

De même, on a

$$F_{T(x'_n),Tb}(\varphi(t)) \geq [F_{S(x_n),T(b)}(t) F_{S(y_n),Ta}(t)]^{1/2} \quad (5.27)$$

Posons  $Q_n(t) = F_{S(x_n),T(b)}(t) F_{S(y_n),Ta}(t)$ . En utilisant (5.26) et (5.27), on obtient  $Q_n(\varphi(t)) \geq Q_{n-1}(t)$ . Par conséquent

$$Q_n(\varphi^n(t)) \geq Q_{n-1}(\varphi^{n-1}(t)) \geq \dots \geq Q_0(t). \quad (5.28)$$

En outre, à partir de (5.26)-(5.28), il en résulte que

$$F_{T(y'_n),Ta}(\varphi^n(t)) \geq [Q_0(t)]^{1/2} \quad \text{et} \quad F_{T(x'_n),Tb}(\varphi^n(t)) \geq [Q_0(t)]^{1/2} \quad (5.29)$$

Il est évident que  $[Q_0(t)]^{1/2} \in D^+$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ , d'après (5.29) et le lemme 4.1 on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = Ta \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = Tb.$$

Ce qui montre que  $Ta = b$  et  $Tb = a$ . Donc  $B(a,b) = b$  et  $B(b,a) = a$ . De même, on peut montrer que  $Sa = b$  et  $Sb = a$ . Donc  $A(a,b) = b$  et  $A(b,a) = a$ .

**Etape 3.** On prouve que  $a = b$ . En appliquant (5.21) on a

$$F_{a,b}(\varphi(t)) = F_{A(b,a),B(a,b)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{S(b),T(a)}(t), F_{S(a),T(b)}(t))]^{1/2} \geq F_{a,b}(t). \quad (5.30)$$

D'après (5.30), on trouve  $F_{a,b}(\varphi^n(t)) \geq F_{a,b}(t)$ . En utilisant le lemme 4.1, on obtient  $F_{a,b}(t) = 1$ , i.e.,  $a = b$ .

**Théorème 5.6** Soit  $(X, F, \Delta)$  un espace de Menger avec  $\Delta$  une application  $t$ -norme de type  $H$  avec  $\Delta \geq \Delta_p$  et  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) <$

$+\infty$  pour tout  $t > 0$ . Soient  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  quatre applications satisfaisant les conditions (1) - (5) du lemme 5.4. Si les deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont  $w$ -compatibles, alors  $A, B, S$  et  $T$  ont un point fixe commun couplé unique dans  $X$ .

**Preuve** En vertu du lemme 5.4, les deux paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  vérifient la propriété  $CLR_{ST}$ . Donc, il existe des suites  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{x'_n\}$  et  $\{y'_n\}$  dans  $X$  telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(x'_n, y'_n) = a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(y'_n, x'_n) = b, \end{aligned}$$

où  $a, b \in S(X) \cap T(X)$ . Le reste de la preuve suit comme dans la démonstration du théorème 5.5. ■

De même, on peut démontrer le théorème 5.5 pour quatre applications en utilisant la propriété  $CLR_{ST}$ .

Maintenant, nous présentons un exemple qui démontre la validité de l'hypothèse et le degré d'utilité de nos résultats.

**Exemple 5.1** Soient  $X = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$  et  $F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + |x - y|}$  pour tout  $x, y \in X$  et  $t > 0$ . Alors  $(X, F, \Delta)$  est un espace de Menger, mais il n'est pas complet. On définit les applications  $A : X \times X \rightarrow X$ ,  $B : X \times X \rightarrow X$ ,  $T : X \rightarrow X$  et  $S : X \rightarrow X$  par

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (1, 1) \\ \frac{x^2 + y^2}{6} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1), \end{cases} \\ B(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (x, y) = (1, 1) \\ \frac{x + y}{2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1), \end{cases} \\ S(x) &= \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2}{3} & \text{si } x \neq 1, \end{cases} \\ T(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x \neq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

Il est noté que  $A(X \times X) = [0, \frac{1}{12}] \not\subseteq T(X) = [0, \frac{1}{2}]$ ,  $B(X \times X) = [0, \frac{1}{2}] \not\subseteq S(X) = [0, \frac{1}{12}]$  et  $T(X)$  et  $S(X)$  sont complets

On prouve que  $A, B, S$  et  $T$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ . On considère les suites  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{x'_n\}$  et  $\{y'_n\}$  dans  $X$  définies par

$$x_n = \frac{1}{2n}, y_n = \frac{1}{3n}, x'_n = \frac{1}{4n} \text{ et } y'_n = \frac{1}{5n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(x'_n, y'_n) = 0 \in S(X) \cap T(X), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(y'_n, x'_n) = 0 \in S(X) \cap T(X). \end{aligned}$$

alors  $A, B, S$  et  $T$  satisfont la propriété  $CLR_{ST}$ .

Ensuite, on va montrer que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont  $w$ -compatibles. On a

1.  $A(x, y) = S(x)$  et  $A(y, x) = S(y)$  ssi  $x = y = 0$ , puisque  $A(S(0), S(0)) = S(A(0, 0))$ , donc les applications  $A$  et  $S$  sont  $w$ -compatibles,

2.  $B(x, y) = T(x)$  et  $B(y, x) = T(y)$  ssi  $x = y = 0$ , puisque  $B(T(0), T(0)) = T(B(0, 0))$ , donc les applications  $B$  et  $T$  sont  $w$ -compatibles.

Enfin, on va démontrer que pour tout  $x, y, u, v \in X$ , on a

$$F_{A(x,y), B(u,v)}(\varphi(t)) \geq [\Delta(F_{Sx, Tu}(t), F_{Sy, Tv}(t))]^{1/2},$$

Soit  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  définie par  $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Pour tout  $x, y, u, v \in X$ , on distingue les cas suivants :

**Cas 1.**  $(x, y) \neq (1, 1)$  et  $(u, v) \neq (1, 1)$ . On a

$$\begin{aligned}
 F_{A(x,y),B(u,v)}(kt) &= \frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2} + \left| \frac{x^2+y^2}{6} - \frac{u+v}{2} \right|} \\
 &= \frac{t}{t + \left| \left( \frac{x^2}{3} - u \right) + \left( \frac{y^2}{3} - v \right) \right|} \\
 &\geq \frac{t}{t + \left| \frac{x^2}{3} - u \right|} \\
 &\geq \min \{ F_{Sx,Tu}(t), F_{Sy,Tv}(t) \}
 \end{aligned}$$

**Cas 2.**  $(x, y) \neq (1, 1)$  et  $(u, v) = (1, 1)$ . On a

$$\begin{aligned}
 F_{A(x,y),B(u,v)}(kt) &= \frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2} + \left| \frac{x^2+y^2}{6} - \frac{1}{2} \right|} \\
 &= \frac{t}{t + \left| \frac{x^2+y^2}{3} - 1 \right|} \\
 &\geq \frac{t}{t + \left| \frac{x^2}{3} - \frac{1}{2} \right|} \\
 &\geq \min \{ F_{Sx,Tu}(t), F_{Sy,Tv}(t) \}
 \end{aligned}$$

**Cas 3.**  $(x, y) = (1, 1)$  et  $(u, v) \neq (1, 1)$ . On a

$$\begin{aligned}
 F_{A(x,y),B(u,v)}(kt) &= \frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2} + \left| \frac{x+y}{2} \right|} \\
 &= \frac{t}{t + |x + y|} \\
 &\geq \frac{t}{t + \left| x - \frac{1}{12} \right|} \\
 &\geq \min \{ F_{Sx,Tu}(t), F_{Sy,Tv}(t) \}
 \end{aligned}$$

**Cas 4.**  $(x, y) = (1, 1)$  et  $(u, v) = (1, 1)$ . On a

$$\begin{aligned} F_{A(x,y),B(u,v)}(kt) &= \frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{t}{t + \frac{1}{2}} \\ &\geq \min \{F_{Sx,Tu}(t), F_{Sy,Tv}(t)\} \end{aligned}$$

D'où, toutes les hypothèses du théorème 5.5 sont vérifiées et  $(0, 0)$  est l'unique point fixe commun couplé de  $A, B, S$  et  $T$ .

# Conclusion

Dans cette thèse on a pu parvenir aux résultats suivants :

1. Obtenir des théorèmes de point fixe commun pour des paires d'applications faiblement compatibles satisfaisant la propriété CLR dans les espaces de Menger intuitionnistes.

2. Obtenir des théorèmes de point fixe commun pour des paires d'applications faiblement compatibles qui satisfont la propriété CLR et une relation implicite dans des espaces de Menger intuitionnistes.

3. Obtenir des théorèmes de point fixe couplé dans les espaces de Menger intuitionnistes avec application aux équations intégrales

4. Obtenir des théorèmes de point fixe commun couplé pour des applications faiblement compatibles dans les espaces de Menger en utilisant la propriété CLR.

On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns :

Théorèmes de point fixe commun pour des applications faiblement compatibles dans les espaces de Menger non-Archimédiens utilisant la propriété CLR et avec application aux systèmes dynamiques..

# Bibliographie

- [1] M. Aamri, D. El Moutawakil, some new common fixed point theorems under strict contractive conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 270 (2002), 181-188.
- [2] C. Alaca, D. Turkoglu and C. Yildiz, Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos Solitons and Fractals*, vol. 29, no.5, pp.1073-1078, 2006.
- [3] J. Ali, M. Imdad and D. Bahuguna, Common fixed point theorems in Menger spaces with common property (E.A), *Comput. Math. Appl.*, 60 (2010), 3152–3159.
- [4] J. Ali, M. Imdad, D. Mihet and M. Tanveer, Common fixed points of strict contractions in Menger spaces. *Acta Math. Hung.* 132 (4) (2011), 367–386.
- [5] A. Aliouche, Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces via properties, *Albanian J. Math.*, 67 (4) (2010), 67-77.
- [6] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst.*, 20 (1986), 87–96.
- [7] L. Ben Aoua and A. Aliouche, Common fixed point theorems in intuitionistic menger spaces using CLR property, *Malaya J. Mat.* 3(4)(2015) 368–381.
- [8] L. Ben Aoua and A. Aliouche, Impact of  $(CLR_{ST})$  property and existence of fixed points theorem using implicit relation in intuitionistic Menger metric spaces, *Afrika Matematika*, Submitted at 09/11/2015 (under review)
- [9] L. Ben Aoua and A. Aliouche, A common coupled fixed point theorem in intuitionistic Menger metric space , *Mathematica Moravica*, 20 (2) (2016).

- [10] L. Ben Aoua and A. Aliouche, Coupled fixed point theorems for weakly compatible mappings along with *CLR* property in Menger metric spaces, *Carpathian Math. Publ.*, 2016, 8 (2).
- [11] T. G. Bhaskarv & Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. *Nonlinear Anal.* 65 (7) (2006),1379-1393.
- [12] S. Chauhan, W. Sintunavarat and P. Kumam, Common Fixed Point Theorems for Weakly Compatible Mappings in Fuzzy Metric Spaces Using (JCLR) Property, *Appl. Math.*, 3 (2012), 976-982.
- [13] S. Chauhan, S. Bhatnagar and S. Radenović, Common fixed point theorems for weakly compatible mappings in fuzzy metric spaces, *Le Matematiche*, Vol. LXVIII (2013) – Fasc. I, pp. 87–98.
- [14] S. Chauhan, S. Dalal, W. Sintunavarat and J. Vujakovic, Common property (E.A) and existence of fixed points in Menger spaces, *J. Inequal. Appl.*, 2014, Article No. 56.
- [15] S. Chauhan, M. A. Khan and W. Sintunavarat, Common Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces Satisfying  $\phi$ -Contractive Condition with Common Limit Range Property, *Abstract Appl. Anal.*, Volume 2013, Article ID 735217, 14 pages.
- [16] S. Chauhan, I. Beg and B. D Pant, Impact of  $CLR_{ST}$  property and existence of fixed points using implicit relations, *J. Indian Math. Soc.*, 81 (2014), 45–59.
- [17] S. Chauhan, M. Imdad, W. Sintunavarat and Y. Shen, Unified fixed point theorems for mappings in fuzzy metric spaces via implicit relations, *J. Egypt. Math. Soc.*, 23 (2015), 334–342.
- [18] J. -X. Fang and Y. Gao, Common fixed point theorems under strict contractive conditions in Menger spaces, *Nonlinear Anal.*, 70 (2009), 184–193.
- [19] A. George and P. Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy sets and systems*, 64 (1994), 395–399.
- [20] A. George and P. Veeramani, On some results of analysis for fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 90 (1997), 365-368.

- [21] D. Gopal, M. Imdad and C. Vetro, Impact of Common Property (E.A.) on Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Appl.*, Volume 2011, Article ID 297360, 14 pages doi :10.1155/2011/297360.
- [22] M. Grabiec, Fixed points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 27(1988),385-389.
- [23] O. Hadzić and E. Pap, *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.
- [24] O. Hadzic., E. Pap and M.Budinčević, Countable extension of triangular norms and their applications to the fixed point theory in probabilistic metric spaces, *Kybernetika*, vol 38 (2002), No. 3, pp. 363-382.
- [25] O. Hadzić, E. Pap and V. Radu, Generalized contraction mapping principles in probabilistic metric spaces, *Acta Math. Hungar.*, 2003,101 (1/2), 131-148.
- [26] O. Hadzić, E. Pap and M. Budinčević, A generalization of Tardiff's fixed point in probabilistic metric spaces and applications to random equations,*Fuzzy Sets and Systems* 156 (2005) 124-134.
- [27] M. Imdad and J. Ali, A general fixed point theorem in fuzzy metric spaces via an implicit function, *J. Appl. Math. Inform.*, 26 (3–4) (2008) 591–603.
- [28] M. Imdad, M. Tanveer and M. Hasan, Some common fixed point theorems in Menger PM spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 2010, Article ID 819269, 14 pages. DOI :10.1155/2010/819269.
- [29] M. Imdad, M. Tanveer and M. Hasan, Erratum to "Some common fixed point theorems in Menger PM spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 2011.
- [30] M. Imdad, B. D. Pant and S. Chauhan, Fixed point theorems in Menger spaces using the  $(CLR_{ST})$  property and applications, *J. Nonlinear Anal. Optim.*, 3 (2), 225–237 (2012).
- [31] M. Imdad, J. Ali and M. Hasan, Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces employing common property (E.A.), *Math. Comput. Model.*, 55 (3–4) (2012) 770–778.
- [32] M. Imdad, S. Chauhan and M. A. Khan, Existence and uniqueness of a common fixed point under a limit contractive condition, *J. Inequal. Appl.*, 2013.

- [33] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, *Inter. J. Math. & Math. Sci.*, 9 (1986), 771–773.
- [34] G. Jungck, Common fixed points for non continuous non self maps on non metric spaces, *Far East J. Math. Sci.*, 4 (1996), 199–215.
- [35] J. L. Kelley, *General topology*, Princeton, 1955.
- [36] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, *Triangular Norms*. (Trends in Logic 8.) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000.
- [37] O. Kramosil and J. Michalek, Fuzzy metric and statistical spaces, *Kybernetika*, 11 (1975), 326–334.
- [38] S. Kumar and S. Chauhan, Common fixed point theorems using implicit relation and property (E.A) in fuzzy metric spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 5 (1) (2013), pp. 107–114.
- [39] S. Kutukcu, A. Tuna, and A. T. Yakut, Generalized contraction mapping principle in intuitionistic Menger spaces and application to differential equations, *Appl. Math. & Mech.*, 28(6) (2007), 799–809.
- [40] V. Lakshmikantham and L. Ćirić, Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Anal.*, 70 (2009), no.12, 4341–4349.
- [41] Y. Liu, Jun Wu and Z. Li, Common fixed points of single-valued and multi-valued maps, *Inter. J. Math. Math. Sci.*, 19 (2005), 3045–3055.
- [42] Y. Liu, Z. Li, Coincidence point theorems in probabilistic and fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 58–70.
- [43] M. Loève, *Probability Theory*, 4th ed., 1 (1977), (2(1978)), New York ; Springer-verlag.
- [44] S. Manro and C. Vetro, Common fixed point theorems in Fuzzy Metric Spaces employing CLRS and JCLRST properties, *Facta Universitatis (NIS)*, Ser. Math. Inform. Vol. 29, No 1 (2014), 77–90
- [45] K. Menger, Statistical metric. *Proc. Nat. acad. Sci. U.S.A.*, 28 (1942), 535–537.
- [46] D. Mihet, A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, 144 :431–439.

- [47] S. N. Mishra. Common fixed points of compatible mappings in probabilistic metric spaces. *Math. Japon.*, 36 (1991), 283–289.
- [48] B. D. Pant, S. Chauhan and H. Sahper, Common fixed point theorems for weakly compatible mappings in Menger spaces via common limit range property, *Mathematica*, Tome 55 (78), No 2, 2013, pp. 159–171.
- [49] J. H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos Solitons and Fractals*, 22 (2004), 1039–1046.
- [50] V. Popa, Some fixed point theorems for compatible mappings satisfying an implicit relation, *Demonstratio Math.*, 32 (1999), 157–163.
- [51] V. Radu, Some remarks on the probabilistic contractions on fuzzy Menger spaces, *Automat. Comput. Appl. Math.*, 2002, 11(1), 125–131.
- [52] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 313–334.
- [53] B. Schweizer and A. Sklar, Probabilistic metric spaces. Elsevier, North-Holland, New York, 1983.
- [54] Schweizer B. and Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, North-Holland series in probability and Applied Mathematics. 5 (1983).
- [55] B. Schweizer, H. Sherwood and R. M. Tardiff, contraction on probabilistic metric spaces : examples and counter examples, *Stochastica XII-1* (1988), 5–17.
- [56] B. Schweizer and, A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 673–675.
- [57] S. Sedghi, I. Altun and N. Shobe, Coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces. *Nonlinear Anal.*, 72 (2010), no.3-4, 1298–1304.
- [58] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche, A common fixed point theorem for weakly compatible mappings in fuzzy metric spaces. *Gen. Math.*, 18 (3) (2010), 3–12.
- [59] V. M. Sehgal and A.T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings in PM-spaces, *Math. System Theory*, 6 (1972), 97–102.
- [60] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 32 (46) (1982), 149–153.

- [61] K. Shams and S. M. Vaezpour, Topological Properties of Probabilistic Metric Spaces, Int. J. Math. Anal., Vol 1, 2007.
- [62] S. L. Singh and P. D. Pant, Common fixed points of weakly commuting mappings on non-Archimedean Menger spaces, Vikram Math. J., 6 (1986), 27-31.
- [63] B. Singh and S. Jain, A fixed point theorem in Menger space through weak compatibility, J. Math. Anal. Appl. 301 (2005), 439–448.
- [64] W. Sintunavarat and P. Kumam, Common fixed point theorems for a pair of weakly compatible mappings in Fuzzy Metric Spaces, J. Appl. Math., Vol. 2011, Article ID 637958, pp. 14, DOI : 10.1155/2011/637958.
- [65] Sumitra, Coupled Fixed point theorem for weakly compatible mappings in intuitionistic fuzzy metric spaces. International Journal of Computer Applications '(0975-8887),50(23) (2012),28-32.
- [66] I. Tahiri, A. Mbarki and A. Ouahab,  $(f, g)$ -Boyd-Wong Contraction Mappings in Probabilistic Metric Space, Appl. Math. Sciences, Vol.7, 2013, no.13, 623-632.
- [67] N. Wairojjana, W. Sintunavarat and P. Kuman. Common tripled fixed point theorems for w-compatible mappings along with the  $CLR_g$  property in abstract metric spaces, Journal of Inequalities and Applications (2014),2014 :133.
- [68] X. Zhang, Common fixed point theorems for some new generalized contractive type mappings, J. Math. Anal. Appl., 333 (2) (2007), 780-786.
- [69] Jian-Zhong Xiao, Xing-Hua Zhu and Yin-Fang Cao. Common coupled fixed point results for probabilistic  $\varphi$ -contractions in Menger spaces. Nonlinear Analysis 74 (2011) 4589-4600.
- [70] Efe H., Round Fuzzy Metric Spaces , International Mathematical Forum, 2, 2007 , no.35,1717-1721
- [71] S. Stevens, Measurment psychophisics and untility in measurment definition and theory, C. West Churchman and P-Rtoosh eds., (1959), 18-63.
- [72] R. M. Tardiff, Topologies for probabilistic metric spaces, Pacific J. Math. 65 (1976) 233-251.I.
- [73] E. Thorp., Generalized topologies for statistical metric spaces, Fund. Math. 51 (1962) 9-21.

- [74] Serstnev A. N., On a probabilistic generalization of metric spaces, Kazan. Gos. Univ.Ucen. Zap. 124 (1964) 3-11.
- [75] V. M. Sehgal, Some fixed point theorems in functional analysis and probability, Ph.D. Thesis, Wayne State University, Detroit, MI, 1966.
- [76] H. Sherwood, Complete probabilistic metric space, Z. Whrscheinlichkeitstheorie verw Geb, 22, (1971) ; 117-28.
- [77] Schwezier B. and Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, North-Holland series in probability and Applied Mathematics. 5 (1983).
- [78] Schwezier B. and Sklar A., Statistical metric spaces arising from sets of random variables in Euclidean n spaces, Theory Prob. Appl., 7 (1962) 447-456.
- [79] B. Schwezier and A. Sklar, Triangle inequalities in a class of statistical metric spaces, J. London Math. Soc., 38 (1963) 401-406.
- [80] V. Radu, Some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, Stability Problems for Stochastic Models (Verna, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1233, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 125-133.
- [81] M. A. Khamsi and V. Y. Kreinovich, Fixed point theorems for dissipative mappings in complete probabilistic metric space, Math. Jap. 44 (1996), 513-520.
- [82] T. L. Hicks, "Fixed point theory in probabilistic metric spaces", Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad 13 (1983), 63-72.
- [83] S.S. Chang, Y. J. Cho and S. M. Kang, Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces, Nova Science Publishers, Inc. New York, 2001.
- [84] M. Benchohra and S. K. Ntouyas, On second order differential inclusions with periodic boundary conditions. Acta Mathematica Univ. Comeniana LXIX, 173-181, (2000).
- [85] S. Banach, sur les operations dans les ensembles abstraites et leurs applications, Fund. Math. 3(1922), 133-181.
- [86] H. Amann, Order structures and fixed points, ATTI 20, Sem. Anal. Funz. Appl. (1977)..
- [87] L. Ciric, Solving the Banach fixed point principle for nonlinear contractions in probabilistic metric spaces, Nonlinear Anal., 72, (2010), pp. 2009-2018.

- [88] M. El Amrani, A. Mbarki and B. Mehdaoui., Nonlinear contractions and Semigroups in General complete probabilistic Metric spaces, *PanAmerican Math. J.*, 11 (4) (2001), 79-87.
- [89] S. Kumar and P. D. Pant, Some common fixed point theorems for mappings satisfying a new contraction condition in Menger spaces, *Varahmihir J. Math. Sci.* 5 (2005), 227-234. MR2204665.
- [90] V. Radu, Some fixed point theorems in PM spaces, *Lectures Notes in Mathematics*, vol. 1233, 1967, pp. 125-133.
- [91] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 313-334.
- [92] S. L. Singh and P. D. Pant, Common fixed point theorems for commuting mappings in probabilistic metric spaces, *Honam Math. J.*, 5 (1983), 139-150.
- [93] S. L. Singh, S. N. Mishra and B. D. Pant, General fixed point theorems in probabilistic metric and uniform space, *Indian J. Math.*, 29 (1987), 9-21.