



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM ELBOUAGI

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et la Vie

Département de :
Mathématiques et Informatique

N° d'ordre :

Série :

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT en science**

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Par : HANNACHI Fareh

THÈME

ATTRACTEURS ETRANGES ET CHAOS

Soutenu publiquement le : 22/02/2018

Devant le Jury composé de :

Mr. Ayadi Abdelhamid prof à l'Université de Larbi ben Mhidi, Oum Elbouaghi	Président
Mr. Hamri Nasreddine prof à Centre universitaire de Mila	Examineur
Mr. Okba Zehrour MCA à l'Université de Larbi ben Mhidi, Oum Elbouaghi	Examineur
Mr. ZERAOULIA Elhadj prof à l'université de CHEIKH Larbi Tébessi, Tébessa	Rapporteur

Table des matières

Résumé	iv
Abstract	v
Résumé (Arabe)	vi
Remerciements	vii
Table des figures	viii
Introduction générale	xi
1 Notions préliminaires	1
1.1 Les systèmes dynamiques	1
1.1.1 Système dynamique à temps discret	1
1.1.2 Système dynamique à temps continu	5
1.2 Chaos	6
1.2.1 Définitions du chaos	6
1.3 Conclusion	8
2 Les attracteurs et les exposants de Lyapunov	9
2.1 Attracteurs et ensembles attractantes	9
2.1.1 Ensemble invariant	9
2.1.2 Ensemble attractant	9
2.1.3 Attracteurs	10
2.2 Les exposants de Lyapunov	12
2.2.1 Cas d'une application discrète unidimensionnelle.	12
2.2.2 Cas d'une application discrète multidimensionnelle	13
2.2.3 Cas d'une application continue multidimensionnelle	14

2.2.4	Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	16
2.2.5	Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur	17
2.3	Conclusion	18
3	Bifurcation et routes vers le chaos dans les systèmes à temps discrets	19
3.1	Introduction	19
3.1.1	Bifurcation noeud-col	19
3.1.2	Bifurcation trans-critique	21
3.1.3	Bifurcation en fourche	22
3.1.4	Bifurcations de doublement de période	24
3.1.5	Bifurcations de Neimark-Sacker	25
3.2	Routes vers le chaos	27
3.2.1	Par doublement de période	28
3.2.2	Par Intermittences	29
3.2.3	Quasi-périodicité	29
3.3	Conclusion	29
4	Les bifurcations bissectrice	30
4.1	Bifurcation bissectrice dans une application unidimensionnelle: Cas étudié de l'application VGH	30
4.1.1	Introduction	30
4.1.2	Description et quelques propriétés	30
4.1.3	Localisation de la bifurcation dans l'espace des paramètres	31
4.1.4	Explication géométrique de la bifurcation bissectrice	32
4.2	Bifurcation bissectrice en systèmes dynamiques discrets 2D: Cas étudié du système de Lozi	36
4.2.1	Description et quelques propriétés	36
4.2.2	Dynamique du système de Lozi: Attracteurs isolés et stabilité	37
4.2.3	Bifurcation bissectrice et ensembles attractants	38
4.2.4	Cycles de période 2	38
4.2.5	Cycles de période 4	40
4.2.6	Cycles de période 3	42
4.2.7	Cycles de période 5	43
4.3	Diagrammes de bifurcation	46

4.4	Explication géométrique des bifurcations bissectrices dans l'application de Lozi	49
4.5	Conclusion	52
5	Bifurcation de collision de frontière dans les systèmes 2-D linéaire par morceaux	53
5.1	Introduction	53
5.2	La forme normale de collision de frontière en 2D	54
5.3	Les types possibles de points fixes de la forme normale de l'application (5.1)	55
5.3.1	Le cas des déterminants positifs des deux côtés de la frontière	56
5.3.2	Le cas des déterminants négatifs des deux côtés de la frontière	59
5.3.3	Le cas du déterminant négatif à la gauche de la frontière et déterminant positif à droite de la frontière . . .	61
5.3.4	Le cas du déterminant positif à la gauche de la frontière et le déterminant négatif à droite de la frontière	62
5.3.5	Point fixe stable menant au point fixe stable plus des orbites périodiques étrangères	65
5.3.6	Bifurcations indésirables et dangereuses	67
5.4	Conclusion	69
6	Conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition des bifurcations bissectrices dans les systèmes générales 2-D linéaire par morceaux	70
6.1	Introduction	71
6.2	Concepts préliminaires	72
6.3	Existence et admissibilité des orbites de période 2	73
6.4	Existence et admissibilité des orbites de période 3	76
6.5	Le cas de $(n + 1)$ -periodique de la forme $R^n L$	88
6.6	Conclusion	92
6.7	Conclusion générale	92

Résumé

Dans ce travail, nous nous concentrerons sur les conditions d'apparition d'un type particulier de bifurcations dans le cas général d'une application 2D linéaire par morceaux, appelée bifurcations bissectrices. Ce type de bifurcation est médié par un ensemble infini d'orbites périodiques neutres stables, c'est-à-dire cycles avec multiplicateur égal à un. Nous avons utilisé la définition du rang des matrices des coefficients et des matrices complètes en fonction des mineurs pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles la bifurcation bissectrice se produit.

Mots clés: Système dynamique, chaos, attracteur étrange, bifurcation, bifurcation bissectrice, orbites périodiques neutres stables, rang d'une matrice.

Abstract

In this work, we will focus on the conditions for the occurrence of a special type of bifurcations in the general two-dimensional piecewise linear mapping called bisecting bifurcations. This kind of bifurcation is mediated by an infinite set of neutrally stable periodic orbits, i.e., cycles with multiplier unity. We used the definition of the rank of both coefficient and augmented matrices based on minors to find the necessary and sufficient conditions in which the bisecting bifurcation occurs.

Key words: Dynamic system, chaos, strange attractor, bifurcation, bisecting bifurcation, neutrally stable periodic orbits, rank of matrix.

Résumé (Arabe)

في هذا العمل نهتم بإيجاد الشروط اللازمة و الكافية لوجود (ظهور) نوع خاص و هام من التشعبات (التفرعات) يسمى التشعبات المنصفة في حالة الجملة المعممة الغير الخطية متعددة نطاق التعريف ذات بعدين. هذا النوع من التشعبات يحدث بواسطة مجموعات غير منتهية من المدارات الدورية الواحدة المستقرة. حيث إستخدما تعريف رتبة مصفوفة المعاملات الثابتة و المصفوفة الموسعة بدلالة المحددات الأصغرية لكل منهما لإيجاد الشروط اللازمة و الكافية لحدوث هذا النوع من التشعب.

كلمات مفتاحية:

جملة ديناميكية، فوضي، جاذب، تشعب، تشعبات منصفة، مدارات دورية و احادية مستقرة، رتبة مصفوفة.

DEDICACE

Je dédie ce travail à:

A la mémoire de mon défunt père

A ma très chère mère

A ma femme et mes enfants

A mes frères et ma sœur

A toute ma grande famille

A mes amis

Remerciements

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de cette thèse **Prof. Zeraoulia El Hadj**, professeur à l'Université de Tébessa, pour avoir encadré ce travail de thèse avec précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité.*

Merci pour la qualité du sujet, merci pour vos conseils et la confiance que vous m'avez accordée au cours des quatre ans.

Je tiens à exprimer mes grands remerciements envers les membres de jury pour leurs disponibilités

***Prof. Ayadi Abdelhamid**, professeur à l'Université de Larbi ben Mhidi, Oum Elbouaghi, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.*

***Prof. Hamri Nasreddine**, professeur à Centre universitaire de Mila et **Prof. Okba Zehrour**, maître de conférences à l'Université de Larbi ben Mhidi, Oum Elbouaghi pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.*

Mes remerciements vont bien entendu à toutes les personnes de département de mathématiques et tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Enfin, ces remerciements ne serait pas complets sans mentionner mes parents, ma femme, mes frères, mes amis.

Table des figures

Fig. 1.1-La trajectoire pour la récurrence (1.2) avec: $x_0 = 0.15$	2
Fig. 1.2-Diagramme de toile d'araignée de l'application logistique pour: $\lambda = 0.5$	3
Fig. 1.3-Diagramme de toile d'araignée de l'application logistique pour: $\lambda = 2$	4
Fig. 1.4-Diagramme de toile d'araignée de l'application logistique pour: $\lambda = 3.5$	4
Fig. 1.5-Illustration d'une trajectoire particulière du système de Lorenz.....	6
Fig. 1.6-L'évolution de x, y, z par rapport a t pour système de Lorenz avec: $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 2)$	7
Fig. 1.7-L'évolution de x, y, z par rapport a t pour système de Lorenz avec: $(x(0), y(0), z(0)) = (1.5, 0.5, 2.5)$	8
Fig. 2.1-Bassin d'attraction (en bleu) de l'attracteur de Hénon pour: $a =$ 1.4 et $b = 0.3$. L'attracteur est représenté en jaune.....	10
Fig. 2.2-L'attracteur étrange de Hénon pour: $a = 1.4, b = 0.3$	11
Fig. 2.3-L'attracteur étrange de Lorenz pour: $\delta = 10, \rho = 28, \beta =$ $8/3$	11
Fig. 2.4-Variations des Exposants de Lyapunov pour le système de Lorenz.....	16
Fig. 3.1-Diagramme de bifurcation noeud-col.....	20
Fig. 3.2-Diagramme de bifurcation transcritique.....	21
Fig. 3.3-Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique. b) sou-critique.....	23
Fig. 3.4-Diagramme de bifurcation de doublement de période.....	25
Fig. 3.5-Portrait de phase pour la bifurcation supercritique de Neimark- Sacker.....	27
Fig. 3.6-Portrait de phase pour la bifurcation soucritique de Neimark- Sacker.....	27
Fig. 3.7-Cascade de doublements de période pour l'application logistique.....	28

Fig. 4.1-Diagramme de toile d'araignée de $V^2(x)$ pour: $b = 1.6$ ($c = 1$, $r = 2$).....	33
Fig. 4.2-Diagramme de toile d'araignée de $V^2(x)$ pour: $b = 2$ ($c = 1$, $r = 2$).....	34
Fig. 4.3-Diagramme de toile d'araignée de $V^2(x)$ pour: $b = 2.4$ ($c = 1$, $r = 2$).....	34
Fig. 4.4-Diagramme de toile d'araignée de $V(x)$ pour: $b = 2$, $c = \sqrt{2}$, $r = 4$ et $x_0 = 0.3$	35
Fig. 4.5-Diagramme de toile d'araignée de $V(x)$ pour: $b = 2$, $c = \sqrt{2}$, $r = 4$ et $x_0 = 0.6$	35
Fig. 4.6-Les trajectoires de $V(x)$ pour deux conditions initiales $x_0 = 0.3$, $x_0 = 0.6$ et $b = 2$, $c = \sqrt{2}$, $r = 4$	36
Fig. 4.7-L'attracteur chaotique de Lozi pour: $a = 1.7$ et $b = 0.5$	37
Fig. 4.8-Un portrait de phase qui comprend les orbites de période 3 pour le système (4.14).....	43
Fig. 4.9-Diagramme de bifurcation pour $b = 0, 1$. Noter que les bifurca- tions bissectrices ont lieu à $a = 1 \mp b$	47
Fig. 4.10-Diagramme de bifurcation pour $a = 1, 5$. Noter que les bifurca- tions bissectrices ont lieu à $b = \mp(a - 1)$	48
Fig. 4.11-Comportement de l'application de Lozi dans l'espace de paramètre.....	49
Fig. 4.12-Surface définie par l'itération $f^{[4]}(x, y)$ obtenu à partir de (4.14) de Lozi, avec $a = 1, 5$ et $b = 0, 5$	49
Fig. 4.13-Représentation de deux surfaces $f(x, y)$ et $g(x, y)$ et ces projec- tions dans R^2	50
Fig. 4.14-Représentation de la surface $f^{[2]}(x, y)$. Les trajectoires de la toile d'araignée de deux conditions initiales différentes ($x_0 = 0, 3, 0, 7$ et $y_0 = b(1 - x_0)/a$) ont été représentées.....	52
Fig. 5.1-Diagramme de bifurcation pour le scénario A obtenu pour: $\tau_L =$ 1.2 , $\tau_R = 1.2$, $\delta_L = 0.5$, $\delta_R = 0.5$	57
Fig. 5.2-Diagramme de bifurcation pour le scénario B obtenu pour: $\tau_L =$ -1.35 , $\tau_R = -1.52$, $\delta_L = 0.5$, $\delta_R = 0.5$	59
Fig. 5.3-Diagramme de bifurcation pour le cas d'un point fixe stable lo- calement unique sur les deux côtés de la frontière obtenu pour $\tau_L = 0.20$, $\tau_R = 0.5$, $\delta_L = -0.75$, $\delta_R = -0.25$	60
Fig. 5.4-Diagramme de bifurcation pour le cas d'un point fixe stable lo- calement unique sur les deux côtés de la frontière obtenu pour $\tau_L = 0.25$, $\tau_R = 1.2$, $\delta_L = -0.5$, $\delta_R = 0.25$	62

Fig. 5.5– Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière obtenu pour:
 $\tau_L = 1.2, \tau_R = 0.5, \delta_L = 0.25, \delta_R = -0.25$63

Fig. 5.6–Aucune bifurcation ne se produit dans les régions ombragées lorsque μ est augmenté (diminué). Seulement le chemin du point fixe change au $\mu = 0$. (a) $0 < \delta_L < 1$ et $0 < \delta_R < 1$. (b) $-1 < \delta_L < 0$ et $-1 < \delta_R < 0$64

Fig. 5.7–Aucune bifurcation ne se produit dans les régions ombragées lorsque μ est augmenté (diminué). Seulement le chemin du point fixe change au $\mu = 0$. (a) $0 < \delta_L < 1$ et $-1 < \delta_R < 0$. (b) $-1 < \delta_L < 0$ et $0 < \delta_R < 1$65

Fig. 5.8–Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable plus un attracteur de période-4 à un point fixe stable plus un attracteur de période-3 obtenu pour: $\tau_L = 0.5, \tau_R = -1.22, \delta_L = 0.90, \delta_R = 0.36$66

Fig. 5.9–Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable menant à un point fixe stable plus un attracteur de période 7 obtenu pour:
 $\tau_L = 1.6, \tau_R = -1.4, \delta_L = 0.80, \delta_R = 0.6$67

Fig. 5.10–Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable menant au chaos pour: $\tau_L = 1.2, \tau_R = -2, \delta_L = 0.4, \delta_R = 0.5$68

Introduction générale

L'étude des systèmes dynamiques a débuté dans les mi-années 1600 avec les travaux de Newton sur les systèmes dans lesquels il y a des notions de déplacements ou de mouvements. Ils étaient dirigés par des lois simples et déterministes. Mais les travaux d'un mathématicien français Henri Poincaré ébranlèrent cette théorie qui faisait de l'univers un système géant muni de lois simples qu'il suffisait de trouver. Beaucoup plus tard la réflexion scientifique engendrée par ces travaux donnera naissance à la théorie de chaos. La théorie du chaos s'applique aux systèmes dynamiques. Ils sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle.

Au cours du XIXe siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. Le météorologue Edward Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, les systèmes répondant à cette propriété seront, à partir de 1975, dénommés systèmes chaotiques.

En termes généraux, la théorie de chaos décrit le comportement de certains systèmes dynamiques qu'est, les systèmes dont l'état évolue avec du temps que peut exhiber la dynamique qui est extrêmement sensible aux conditions initiales (populairement désignées sous le nom de papillon). L'un des principaux théories du chaos est la théorie des bifurcations car son importance pour décrire le comportement d'un système dynamique. La théorie de bifurcation est l'étude mathématique des changements qualitatifs ou topologiques de la structure d'un système dynamique. Une bifurcation survient lorsqu'une variation quantitative d'un paramètre du système engendre un changement qualitatif des propriétés d'un système tel que la stabilité, le nombre de points d'équilibre ou la nature des régimes permanents. Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeurs de

bifurcation et les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation sont montrées dans un diagramme de bifurcation. Plusieurs types de bifurcations se produisent dans différents types des systèmes dynamiques comme la bifurcation globale, la bifurcation locale, la bifurcation des collisions de frontière...etc.

Une autre spéciale et importante bifurcation est ce qu'on appelle bifurcation bissectrice. Ce type de bifurcation est étudié et décrit dans beaucoup de travaux liés aux systèmes linéaires par morceaux où l'espace d'état discret est divisé en deux ou plusieurs compartiments avec différentes formes fonctionnelles séparées par des frontières [19-20-21-22-23]. Cette bifurcation est médiée par des ensembles infinis d'orbites périodiques neutres stables, c'est-à-dire des cycles à unité multiplicatrice (multiplicateur égal à 1). La caractéristique principale de cette bifurcation est la présence d'un continuum de cycles neutre stable. Ainsi, au même point de bifurcation, l'attracteur dans l'espace de phase contient un ensemble infini d'orbites régulières. En fonction des paramètres le passage peut avoir lieu de régulier au régulier aussi bien qu'à régimes chaotiques.

Ce mémoire se présente comme suit:

Le premier chapitre a pour principal objectif d'introduire quelques notions sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré aux attracteurs et les exposants de Lyapunov.

Le troisième chapitre est consacré aux bifurcations et routes vers le chaos.

Le quatrième chapitre est consacré aux bifurcations bissectrices, nous donnons comme cas particulier en 1D l'étude de l'application VGH et comme cas particulier en 2D l'étude du système de Lozi.

Dans **le cinquième chapitre** nous donnons une idée générale aux bifurcations de collisions de frontière dans les systèmes 2D linéaires par morceaux.

Le sixième chapitre est consacré aux conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles la bifurcation bissectrice se produit dans le cas général d'un système 2D linéaire par morceaux donnés par:

$$N(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_L & 1 \\ -\delta_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x < 0 \\ \begin{pmatrix} \tau_R & 1 \\ -\delta_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x > 0 \end{cases}$$

CHAPITRE 0. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Où les quatre paramètres, $\tau_{L,R}$, $\delta_{L,R}$ peuvent prendre n'importe quelle valeur en \mathbb{R} en même temps et μ est un petit paramètre qui contrôle la bifurcation de collisions de frontière.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Les systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent dans l'espace et /ou de temps. Ces systèmes viennent de Biologies, Physique, Chimie, ou même des sciences sociales, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse. Ils sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle.

Définition 1.1.1 *Un système dynamique est une application continue $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant: $\varphi(0, x_0) = x_0, \varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$, où $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$.*

Un tel système dynamique présente deux aspects, son état et sa dynamique; c'est-à-dire son évolution en fonction du temps [1]. Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories:

- Système dynamique à temps discret,
- Système dynamique à temps continu.

1.1.1 Système dynamique à temps discret

Un système dynamique discret est un système d'équations algébriques récurrentes défini par:

$$x_{k+1} = F(x_k, \mu), \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Où $X(k) = x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k , $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres. F la fonction de récurrence définit la dynamique du système discret. Si nous associons à cette dynamique un état initial $x_0 = X(0)$ nous pourrions avoir une solution unique de F .

Exemple 1.1.1 La fonction polynôme de Chebychev d'ordre 2:

$$x_{k+1} = 2x_k^2 - 1 \tag{1.2}$$

où $X(k) = \{x_k\}_{k \geq 0}$ est réel.

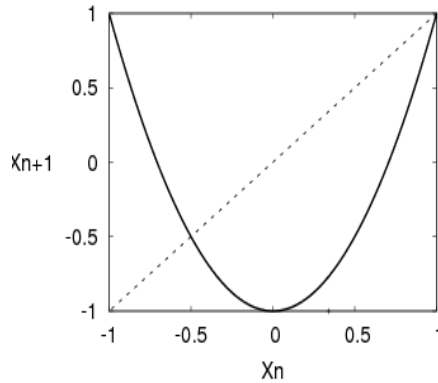


Fig. 1.1- La trajectoire pour la récurrence (1.2) avec $x_0 = 0.15$.

Définition 1.1.2 Un point fixe X^* est une point de l'espace d'état vérifiant $X^* = T(X^*)$.

Cycle d'ordre k

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la récurrence obtenue après k applications de T noté $T^{(k)}$.

Les k points $X_i^*, i = 1, 2, \dots, k$ avec $k > 1$, appartenant à un cycle d'ordre k vérifiant les deux relations:

$$\begin{aligned} X_i^* &= T^{(k)}(X_i^*) \\ X_i^* &\neq T^{(s)}(X_i^*) \text{ si } 0 < s < k \end{aligned}$$

avec:

$$T^{(k)} = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ fois}}$$

En dimension $N = 1$, le multiplicateur d'un point fixe X^* est $\lambda = T'(X^*)$ avec $T' = \frac{dT}{dx}$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre k ($X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$) est

$$\lambda = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*).$$

Un point fixe ou un cycle est dit:

- attractif(ou stable) si $|\lambda| < 1$.
- répulsif(ou instable) si $|\lambda| > 1$.

Exemple 1.1.2 (*La fonction logistique*).

On considère l'équation définie par la relation suivante:

$$x(n+1) = \lambda x(n)(1 - x(n)), \quad \lambda \in]0, 4[$$

On a $f(x) = \lambda x(1 - x)$ et $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$. Cette équation a deux points fixes

- o $\alpha = 0$. Il est attractif si $0 < \lambda < 1$.
- o $\alpha = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Il est attractif si $1 < \lambda < 3$.

Si $\lambda > 3$, ces deux points fixes sont répulsifs. Les trois cas sont représentés sur les Figures 1.2-1.4 pour: $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3.5$ respectivement.

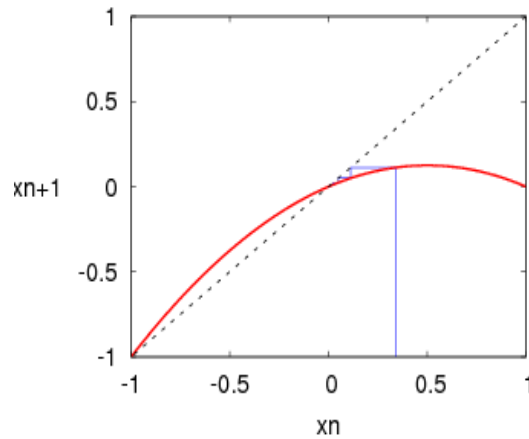


Fig. 1.2-Diagramme de toile d'araignée de l'application logistique pour: $\lambda = 0.5$.

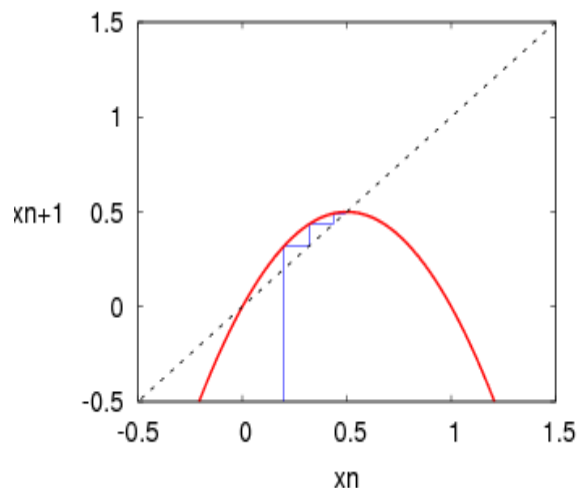


Fig. 1.3 –Diagramme de toile d’araignée de l’application logistique pour:
 $\lambda = 2$.

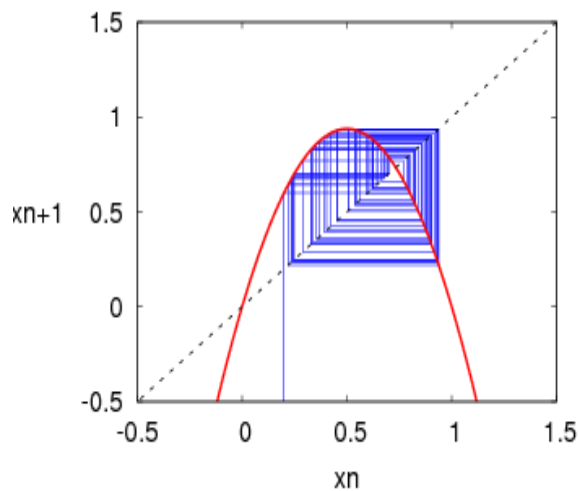


Fig. 1.4 –Diagramme de toile d’araignée de l’application logistique pour:
 $\lambda = 3.5$.

Remarque 1.1.1 *En dimension $N > 1$, pour discerner si un point fixe (ou un cycle) est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $DT(x) = J(x)$.*

- *Si toutes les valeurs propres sont à l’intérieur du disque unité, le point fixe (ou le cycle) est stable.*

• Si une de ces valeurs propres a un module plus grand que un, le point fixe (ou le cycle) est instable.

1.1.2 Système dynamique à temps continu

Un système dynamique à temps continu est décrit par un système d'équations différentielles:

$$X'(t) = G(X(t), t) \quad (1.3)$$

Où G de classe $C^1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit la dynamique du système continu.

Définition 1.1.3 Une solution de l'équation (1.3) est une application dérivable définie sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}^+$, $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$ et vérifiant, pour tout $t \in I$,

$$(t, x(t)) \in I \times \mathbb{R}^n$$

et

$$x'(t) = G(t, x(t)).$$

- A chaque couple $(X(0), t_0)$, nous pouvons associer une solution unique du système défini à l'aide de l'équation (1.3).

- Lorsque G dépend explicitement du temps (1.3) est dit non autonome, dans le cas contraire on dit que (1.3) est autonome.

Définition 1.1.4 Soit x_0 une condition initiale et $X(t, x_0)$ la solution de (1.3), l'ensemble des points $\{\forall t \in \mathbb{R}; (t, x_0)\}$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au x_0 à l'instant initial.

Définition 1.1.5 On appelle orbite du système (1.3) l'ensemble $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 1.1.3 (Le système de Lorenz) Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \delta(v - u), \\ \frac{dv}{dt} = -uw + \rho u - v, \\ \frac{dw}{dt} = uv - \beta w. \end{cases} \quad (1.4)$$

Où u, v et w sont les variables d'état du système, δ, ρ et β sont des paramètres réels. Les paramètres et les conditions initiales de l'équation (1.4) ont été choisis de la manière suivante: $\delta = 10$; $\rho = 28$; $\beta = 2.5$ avec $(u_0, v_0, w_0) = (1.5, 4.8, 19.5)$. Cette système est autonome car l'équation (1.4) n'a pas de dépendance explicite par rapport au temps t .

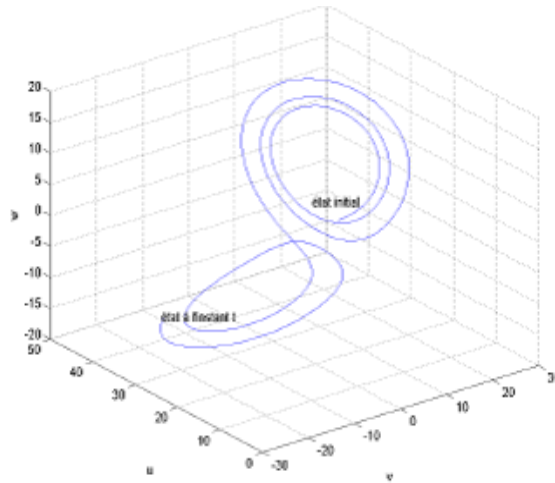


Fig. 1.5 – Illustration d'une trajectoire particulière du système de Lorenz.

Définition 1.1.6 Un point fixe (ou critique, ou singulier, ou stationnaire) de l'équation $x' = F(x)$ est un point X^* de l'espace de phase vérifiant $F(X^*) = 0$.

1.2 Chaos

La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques déterministes qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales", ce qui les rend non prédictibles en pratique sur le "long" terme. Le Chaos est défini généralement comme un comportement semblant aléatoire (ou imprévisible) d'un système dynamique défini par des équations déterministes.

1.2.1 Définitions du chaos

Il n'y a aucune définition standard du chaos néanmoins, les dispositifs du chaos incluent:

- La non-linéarité.** Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- La déterminisme.** Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plûtôt que probabilistes).
- La sensibilité aux conditions.** De très changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.

-L'imprévisible. En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

-L'irrégularité. Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

Définition 1.2.1 Soit un ensemble V . L'application $f : V \longrightarrow V$ est dite chaotique sur V si:

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topologiquement transitive.
3. Les points périodiques sont denses dans V .

Définition 1.2.2 (Devaney, 1989). L'application $f : J \longrightarrow J$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in J$ et un certain voisinage $V \subset J$ de x , il existe $y \in V$ tel que $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.

Définition 1.2.3 $f : V \longrightarrow V$ est dite topologiquement transitive si pour n'importe quelles paires d'ensembles ouverts $U, J \subset V$ il existe un nombre entier $k > 0$ tel que: $f^k(U) \cap J \neq \emptyset$.

Définition 1.2.4 Un sous-ensemble U de V est dense dans V si $\overline{U} = V$.

Définition 1.2.5 Un système dynamique a une dépendance sensible aux valeurs initiales si, quand on considère 2 valeurs initiales $x(0)$ et $y(0)$ qui sont proches l'une de l'autre, alors $x(k)$ et $y(k)$ peuvent être éloignés l'une de l'autre, i.e., pour chaque $\varepsilon > 0$, tel que $|x(0) - y(0)| < \varepsilon$, alors $\limsup_t |x(k) - y(k)| > \varepsilon$.

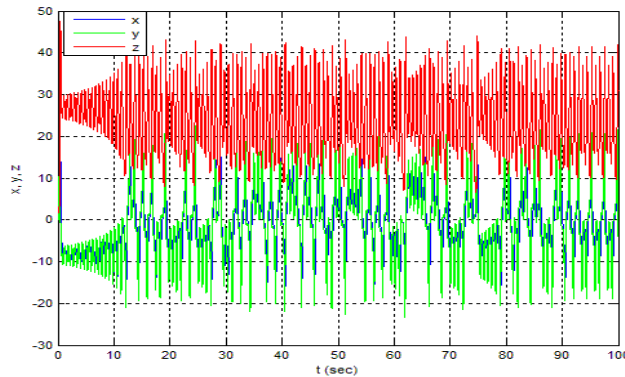


Fig. 1.6 – L'évolution de x, y, z par rapport à t pour le système de Lorenz avec: $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 2)$.

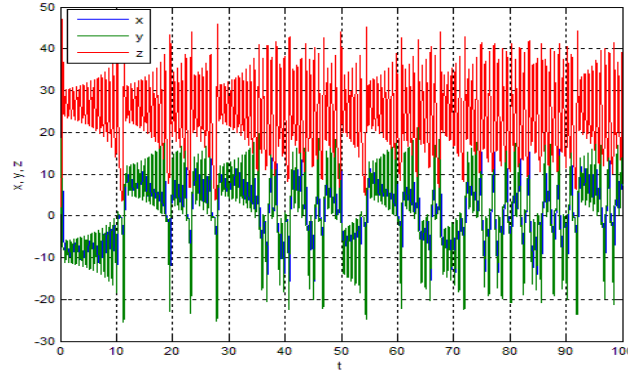


Fig. 1.7 – L'évolution de x, y, z par rapport à t pour le système de Lorenz avec: $(x(0), y(0), z(0)) = (1.5, 0.5, 2.5)$.

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous rapplons quelques notions fondamentaux qui caractirise les systèmes dynamiques dont nous présentons les différents types des systemes dynamiques (discrets et continus) et leurs propriétés caractéristiques, puis nous parlerrons sur la théorie du chaos qui traite des systèmes dynamiques déterministes qui présente un phénomène fondamentale d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales".

Chapitre 2

Les attracteurs et les exposants de Lyapunov

2.1 Attracteurs et ensembles attractantes

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phase qui attirent un grand nombre de solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs et ensembles attractantes. plus formellement:

2.1.1 Ensemble invariant

Définition 2.1.1 *Un ensemble $M \subset I$ est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution $x(t)$ du système différentiel associé au champ de vecteurs issu de M vérifie $x(t) \subset M$ pour tout t pour lequel cette solution est définie.*

2.1.2 Ensemble attractant

Définition 2.1.2 *Un ensemble invariant fermé A est un ensemble attractant s'il existe un voisinage U tel que:*

$$\begin{cases} F(U) \subset U \\ \forall x \in U, F^{(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \end{cases} \quad (2.1)$$

Définition 2.1.3 *Le bassin d'attraction (ou simplement le bassin) d'un ensemble attractif A est l'ensemble ouvert de tous les points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que:*

$$F^{(k)}(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A.$$

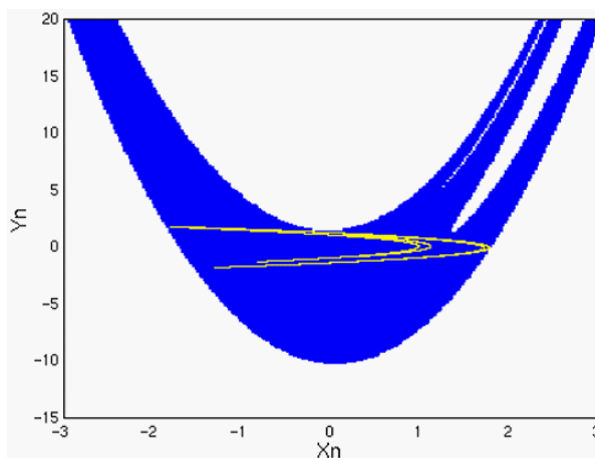


Fig. 2.1-Bassin d'attraction (en bleu) de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$. L'attracteur est représenté en jaune.

2.1.3 Attracteurs

Définition 2.1.4 *Un ensemble attractif est appelé attracteur lorsqu'il est topologiquement transitif.*

Définition 2.1.5 *Un ensemble A est un attracteur si:*

- 1) *Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.*
- 2) *$\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.*
- 3) *Il existe une orbite dense dans A .*

Différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs:

1-Attracteurs réguliers Ils caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques.

2. Attracteurs étrange (chaotiques) Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques. L'attracteur étrange se caractérise par:

1. La sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).

2. La dimension d de l'attracteur est fractale (non entières) avec $2 < d < n$ (ce qui justifie l'adjectif étrange).

3. L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

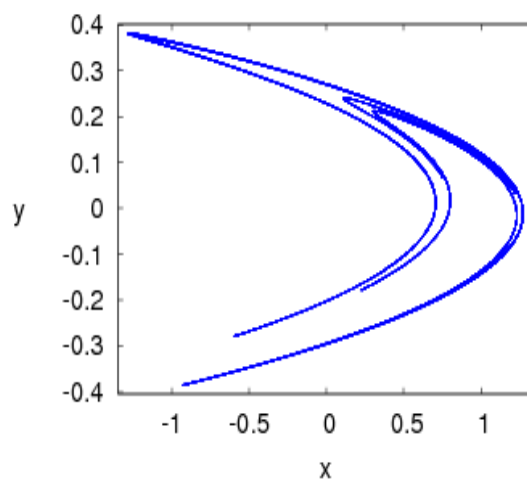


Fig. 2.2 –L'attracteur étrange de Hénon pour: $a = 1.4$, $b = 0.3$.

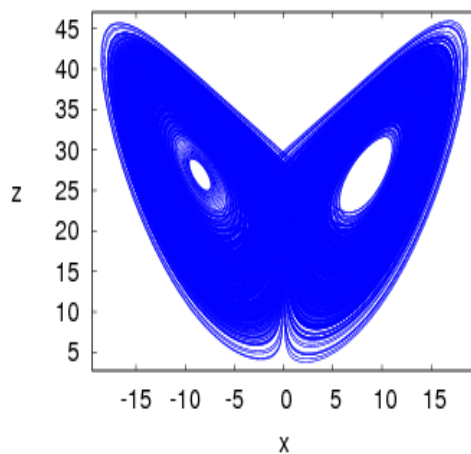


Fig. 2.3 –L'attracteur étrange de Lorenz pour: $\delta = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

2.2 Les exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée "exposant de Lyapunov" qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

2.2.1 Cas d'une application discrète unidimensionnelle.

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_n sur x_{n+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel que après n itérations on a:

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon e^{n\lambda} \text{ d'ou } n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a:

$$\begin{aligned} n\lambda &\cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

Finalement pour $n \rightarrow +\infty$ on a:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \tag{2.2}$$

avec la notation $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{dx_i}$.

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, il faut que $\lambda = \ln |f'(x^*)|$.

Exemple 2.2.1 (*L'application logistique*)

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i); \quad x_i \in [0, 4]$$

En appliquant la formule (2.3) pour calculer l'exposant de Lyapunov de f .

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |4(1 - 2x_i)| \end{aligned}$$

Soit: $\lambda = \ln 2 > 0$ d'ou le comportement est chaotique.

2.2.2 Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m définie par:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système m -dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type:

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe. Tout d'abord nous devons calculer les λ_i . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à:

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant:

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0} (x_0 - x'_0) \\ &\approx J(x_0) J(x_1) \dots J(x_n) (x_0 - x'_0) \\ &\approx \prod_{i=1}^n J(x_i) (x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=1}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0) (x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de f^n au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^t = P_n^{-1} J^n P_n$, D_m^t est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0))$, $i = 1, \dots, m$ de J^n .

On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

Pour le point d'équilibre x^* la formule (2.4) devient:

$$\lambda_i = \ln |u_i(x^*)|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

2.2.3 Cas d'une application continue multidimensionnelle

Pour un système différentiel de dimension n défini par f tel que:

$$\dot{x} = f(x(t)) \text{ tel que } t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

L'exposant de Lyapunov dans la direction i est donné par:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|x_i(t) - x'_i(t)\|}{\|x_i(t) - x_i(t)\|} \quad (2.5)$$

Exemple 2.2.2 *Le système de Lorenz*

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x), \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z. \end{cases} \quad (2.6)$$

Les exposants de Lyapunov du système (2.7) pour une condition initiale x_0 choisie sont:

$$\lambda_1 \simeq 2.16, \quad \lambda_2 \simeq 0.00, \quad \lambda_3 \simeq -32.40.$$

Différents algorithmes ont été développés pour calculer les exposants de Lyapunov, l'un des algorithmes utilisé pour le calcul est celui appelé algorithme de Wolf.

Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la dévergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont:

1. Changement du paramètre de contrôle,
2. Choix aléatoire d'une condition initiale,
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir courante à laquelle on ajoute une perturbation,
4. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires,
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence,
6. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné,
7. Retour au point (1),
8. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

Exemple 2.2.3 *Exposants de Lyapunov du système de Lorenz par l'algorithme de **Wolf***

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

Pour $\delta = 16.0$; $r = 45.92$; $b = 4.0$ on a $\lambda_1 = 1.4971$, $\lambda_2 = 0.0031274$, $\lambda_3 = -22.4445$ avec $\Delta t = 0.01$; le nombre de pas 10000.

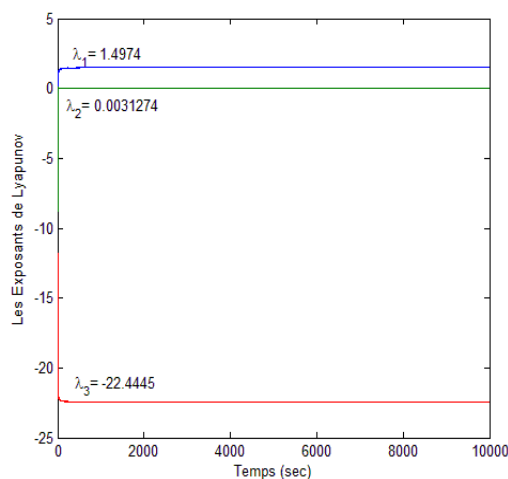


Fig. 2.4 – Variations des exposants de Lyapunov pour le système de Lorenz.

2.2.4 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Les différents types d'attracteurs d'un système de dimension n en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représentés dans le tableau ci-dessous.

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$
Cycle	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \dots \geq \lambda_n$
Attracteur étrange	$\lambda_1 > 0, \sum \lambda_i < 0$

Table.(1). Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

2.2.5 Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur

Le terme de dimension est souvent implicitement associé à celui de coordonnée, c'est à dire de variable nécessaire pour décrire la position d'un élément d'un ensemble. La dimension par définition est un nombre entier.

-Le point est une attracteur de dimension 0.

-La dimension d'une courbe fermé ou une ligne est 1.

Il ya un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

(a) **Dimension de Mori** : Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\bar{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs. La dimension de mori est donnée par la relation suivante:

$$D = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right)$$

(b) **Dimension de Kaplan et Yorke** : Soit j_0 un entier positif tel que:

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

La dimension de Kaplan et Yorke est donnée par la relation suivante:

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Il existe aussi d'autres dimensions fractales comme la dimension de Lyapunov, la dimension de Hausdorff, la dimension de corrélation.

Tous ces dimensions sont très proches les unes des autres et satisfèrent les propriétés suivantes:

1- Si $A \subset B$ alors $d(A) < d(B)$.

2- Si $A = \phi$ alors $d(A) = 0$.

3- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.

4- Si f est une application différentiable sur A alors $d(A) = d(f(A))$.

2.3 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux attracteurs et les exposants de Lyapunov. Dans la première partie, nous donnons quelques définitions sur les ensembles attractants et les différents types d'attracteurs et particulièrement aux attracteurs étranges (chaotiques), celles qui sont caractérisées par l'évolution des systèmes chaotiques. La deuxième partie est consacrée aux exposants de Lyapunov qui sont souvent utilisés pour déterminer si un système est chaotique ou non.

Chapitre 3

Bifurcation et routes vers le chaos dans les systèmes à temps discrets

3.1 Introduction

La théorie de bifurcation est l'étude mathématique des changements qualitatifs ou topologiques de la structure d'un système dynamique. Une bifurcation survient lorsqu'une variation quantitative d'un paramètre du système engendre un changement qualitatif des propriétés d'un système tel que la stabilité, le nombre de points d'équilibre ou la nature des régimes permanents. Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeurs de bifurcation. Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

3.1.1 Bifurcation noeud-col

Cette bifurcation est le mécanisme de base pour l'apparition et la disparition de points fixes. La forme prototypique (ou forme normale) d'une bifurcation en point de selle dans le cas 1D est:

$$x_{n+1} = \mu + x_n - x_n^2. \quad (3.1)$$

La valeur critique de μ est $\mu = \mu_c = 0$. On a les cas suivants:

CHAPITRE 3. BIFURCATION ET ROUTES VERS LE CHAOS DANS
LES SYSTÈMES À TEMPS DISCRETS

Pour $\mu > 0$; le système possède un attracteur en $x = \sqrt{\mu}$ et un point fixe instable en $x = -\sqrt{\mu}$,

Pour $\mu = 0$; le système possède un point fixe semi-stable en $x = 0$,

Pour $\mu < 0$; le système ne possède aucun point fixe,

En traçant la position des points fixes en fonction du paramètre de contrôle, on obtient le digramme de bifurcation de la Figure 3.1 qui est typique de ce type de bifurcation.

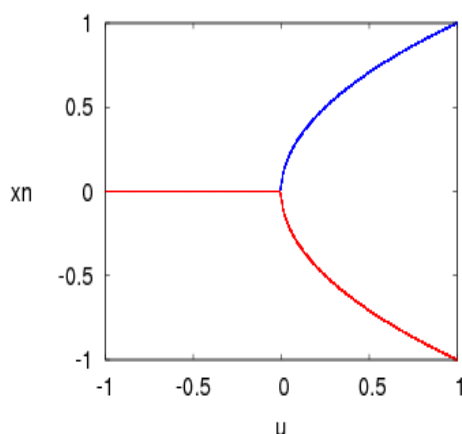


Fig. 3.1 –Diagramme de bifurcation en point de selle (noeud-col).

Théorème 3.1.1 Soit $f(x_n, \mu)$ une famille de fonctions ayant des dérivées partielles continues en x et en μ . Supposons qu'il existe un couple (x_0, μ_0) tel que le système

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu_0)$$

a un point fixe en x_0

$$f(x_0, \mu_0) = x_0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 1$$

Supposons aussi que:

$$f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0 \text{ et } f_{xx}(x_0, \mu_0) \neq 0$$

On dit alors que le système subit au point (x_0, μ_0) une bifurcation du type noeud-col.

Pour (3.1) l'origine $x_0 = 0$ est toujours un point fixe quelle que soit la valeur de μ . Calculons la dérivée de f on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = 1$. Ainsi, quand $\mu = \mu_0 = 0$ on a: $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ avec $f_\mu(0, 0) = 1$ et $f_{xx}(0, 0) = -2$.

Alors les conditions du théorème sont satisfaites et on a une bifurcation du type noeud-col.

3.1.2 Bifurcation trans-critique

Il y a une bifurcation trans-critique lorsque deux points fixes échangent leur nature (stable/instable). Quelle que soit la valeur du paramètre, le point fixe existe. En 1D la forme normale est:

$$x_{n+1} = (\mu + 1)x_n - x_n^2. \quad (3.2)$$

Elle possède un point fixe $x = 0$ pour toute valeur de μ . On a:

Pour $\mu < 0$, un point fixe instable $x = \mu$ et $x = 0$ est attracteur;

Pour $\mu = 0$; $x = 0$ absorbe le point fixe instable et devient semi-stable;

Pour $\mu > 0$; $x = 0$ est instable et il existe un attracteur en $x = \mu$.

Le diagramme de bifurcation typique est donné à la Figure 3.2.

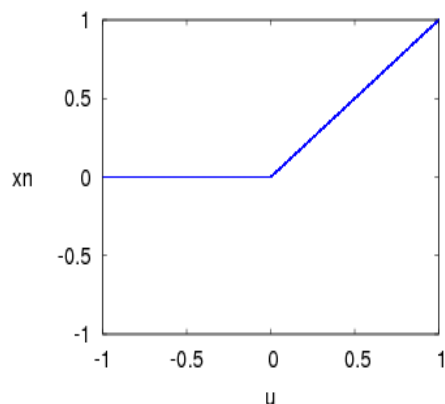


Fig. 3.2 –Diagramme de bifurcation transcritique.

Théorème 3.1.2 Soit $f(x_n, \mu)$ une famille de fonctions ayant des dérivées partielles continues en x et en μ . Supposons qu'il existe un couple (x_0, μ_0) tel que le système:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu_0)$$

a un point fixe en x_0

$$f(x_0, \mu_0) = x_0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 1$$

Supposons aussi que:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

On dit alors que le système subit au point (x_0, μ_0) une bifurcation du type transcritique.

Pour (3.2) l'origine $x_0 = 0$ est toujours un point fixe quelle que soit la valeur de μ . Calculons la dérivée de f on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = 1$. Ainsi, quand $\mu = \mu_0 = 0$ on a: $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ avec $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2$.

Alors les conditions du théorème sont satisfaites et on a une bifurcation du type transcritique.

3.1.3 Bifurcation en fourche

Les bifurcations en fourche existent dans des systèmes possédant une symétrie. De fait, les points fixes sont créés et disparaissent par paire. Il en existe deux types, les super-critiques (ou douces) (voir la Figure 3.3(a)) et les sous-critiques (ou dures) (voir la Figure 3.3(b)).

Dans 1D la forme normale pour la bifurcation en **fourche supercritique** est:

$$x_{n+1} = (\mu + 1)x_n - x_n^3. \quad (3.3)$$

Ce système est invariant dans une transformation $x \longrightarrow -x$.

pour $\mu > 0$, deux attracteurs existent pour $x = \pm\sqrt{\mu}$ et un point fixe instable existe pour $x = 0$;

En $\mu = 0$, les trois points fixes se fondent en un seul attracteur situé en $x = 0$;

pour $\mu < 0$, le système possède un seul point fixe attracteur en $x = 0$.

La forme normale pour la bifurcation en **fourche sous-critique** est:

$$x_{n+1} = (\mu + 1)x_n + x_n^3. \quad (3.4)$$

CHAPITRE 3. BIFURCATION ET ROUTES VERS LE CHAOS DANS
LES SYSTÈMES À TEMPS DISCRETS

Ce système est invariant dans une transformation $x \longrightarrow -x$. On a:

Pour $\mu < 0$, deux points fixes instables existent en $x = \pm\sqrt{\mu}$ et un attracteur existe en $x = 0$;

En $\mu = 0$, les trois points fixes se fondent en un seul point fixe instable situé en $x = 0$;

Pour $\mu > 0$, le système possède un seul point fixe instable en $x = 0$.

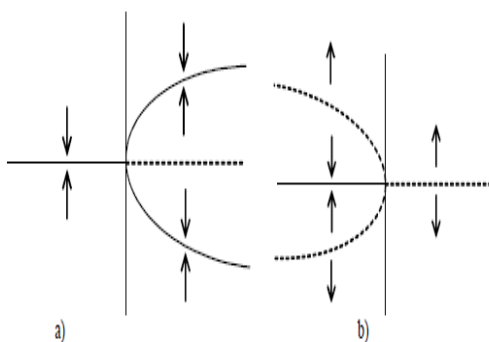


Fig. 3.3 –Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique. b) sou-critique.

Théorème 3.1.3 Soit $f(x_n, \mu)$ une famille de fonctions ayant des dérivées partielles continues en x et en μ . Supposons qu'il existe un couple (x_0, μ_0) tel que le système:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu_0)$$

a un point fixe en x_0

$$f(x_0, \mu_0) = x_0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 1$$

Supposons aussi que:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

On dit alors que le système subit au point (x_0, μ_0) une bifurcation du type fourche.

Pour (3.3) l'origine $x_0 = 0$ est toujours un point fixe quelle que soit la valeur de μ . Calculons la dérivée de f on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = 1$. Ainsi, quand

$\mu = \mu_0 = 0$ on a: $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ avec $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = -6 < 0$.

Alors les conditions du théorème sont satisfaites et on a une bifurcation du type **fourche supercritique**.

Pour (3.4) l'origine $x_0 = 0$ est toujours un point fixe quelle que soit la valeur de μ . Calculons la dérivée de f on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = 1$. Ainsi, quand $\mu = \mu_0 = 0$ on a: $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ avec $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = 6 > 0$.

Alors les conditions du théorème sont satisfaites et on a une bifurcation du type **fourche sous-critique**.

3.1.4 Bifurcations de doublement de période

Lorsqu'une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre) dans le cercle unité à -1 , on a alors une bifurcation de doublement de période (ou flip). Au lieu de cela, la perte de stabilité est typiquement associée à l'apparition ou à la disparition des orbites de la période deux près du point fixe. Le théorème qui suit détermine les conditions sous lesquelles un point de bifurcation (x_0, μ_0) où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = -1$ entraîne l'apparition des points périodiques.

Théorème 3.1.4 *Soit $f(x_n, \mu)$ une famille de fonctions ayant des dérivées partielles continues en x et en μ . Supposons qu'il existe un couple (x_0, μ_0) tel que le système:*

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu_0)$$

a un point fixe en x_0

$$f(x_0, \mu_0) = x_0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = -1$$

Supposons aussi que:

$$u(x_0, \mu_0) = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0,$$

$$v(x_0, \mu_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

On dit alors que le système subit au point (x_0, μ_0) une bifurcation de doublement de période.

Exemple 3.1.1 *Considérons l'application:*

$$x_{n+1} = -(\mu + 1)x_n - x_n^3. \quad (3.5)$$

L'origine $x_0 = 0$ est un point fixe quelle que soit la valeur de μ et on a: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = -(\mu + 1) - 3x^2$. Donc, quand $x = 0$ cela donne: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$. On calcule facilement les valeurs $u(0, 0)$ et $v(0, 0)$ définies dans le théorème on obtient:

$$u(0, 0) = -2, \quad v(0, 0) = -2.$$

On a donc une bifurcation de doublement de période. Le diagramme de bifurcation de cette application est donné à la Figure 3.4.

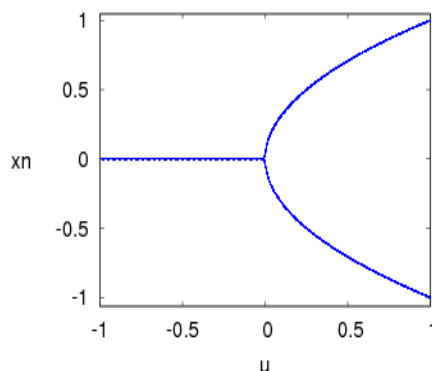


Fig. 3.4 –Diagramme de bifurcation de doublement de période.

3.1.5 Bifurcations de Neimark-Sacker

Soit la famille d'applications $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ appartenant à la classe C^2 et $F_\mu(x) = F(x, \mu)$. Une bifurcation de Neimark-Sacker (bifurcation discrète de Hopf), est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique discret perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2}(\mu) = r(\mu) e^{\pm i\theta(\mu)}$ de l'application linéarisée autour d'un point fixe x^* de l'application F_μ croisent le cercle unité i.e., la bifurcation de Neimark-Sacker se produit lorsque $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$ satisfaits aux conditions suivantes:

- i) $r(\mu_0) = 1, 0 < \theta(\mu_0) < \pi$ mais
- ii) $\frac{dr}{d\mu}(\mu_0) \neq 0$,
- iii) $e^{ik\theta(\mu_0)} \neq 1$, pour $k = 1, \dots, 4$.

Où μ_0 est le paramètre de bifurcation calculé au point de bifurcation et $r(\mu) = |\lambda_{1,2}(\mu)|$.

Exemple 3.1.2 *Considérons le système:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mu x_n (1 - y_n), \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (3.6)$$

où $\mu > \frac{5}{4}$, est le paramètre de bifurcation. Les points fixes de (3.6) sont: $p_1(0, 0)$, $p_2\left(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu}\right)$. La matrice jacobienne de (3.6) au point fixe p est:

$$J(p) = \begin{pmatrix} \mu(1-y) & -\mu x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Au point fixe p_2 devient:

$$J(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\mu + 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont:

$$\lambda_1(\mu) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - 5}, \quad \lambda_2(\mu) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - 5}.$$

Alors

$$\lambda_{1,2}(\mu) = r(\mu) e^{\pm i\theta(\mu)}$$

avec:

$$r(\mu) = \sqrt{\mu - 1}, \quad \theta(\mu) = \arctan(\sqrt{4\mu - 5}).$$

La condition: $r(\mu_0) = 1$ donne $\mu_0 = 2$ et ainsi $\theta(\mu_0) = \frac{\pi}{3}$. D'autre part:

$$\frac{dr}{d\mu}(\mu_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

$$e^{ik\theta(\mu_0)} = e^{ik\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \neq 1, \quad \text{pour } k = 1, \dots, 4 \text{ respectivement.}$$

D'après ce qui précède le système (3.6) subit une bifurcation de type de Neimark-Sacker.

IL existe deux types de bifurcation de Neimark-Sacker: l'une est qualifiée de **supercritique** (ou excitation douce), l'autre de **sous-critique** (ou excitation forte). Le portrait de phase pour la bifurcation supercritique de Neimark-Sacker est donné à la Figure 3.5.

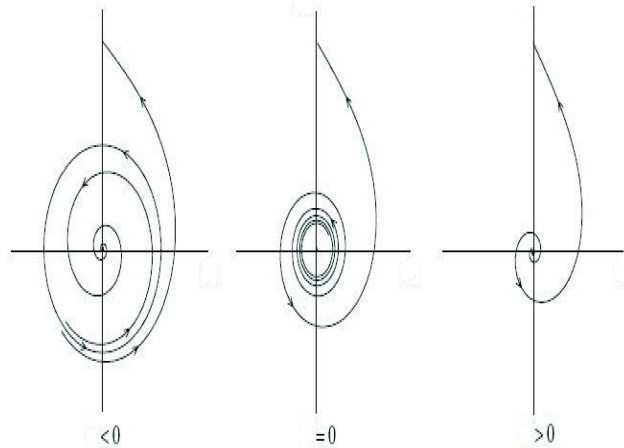


Fig. 3.5 –Portrait de phase pour la bifurcation supercritique de Neimark-Sacker.

Le portrait de phase pour la bifurcation **sous-critique** de Neimark-Sacker est donné à la Figure 3.6.

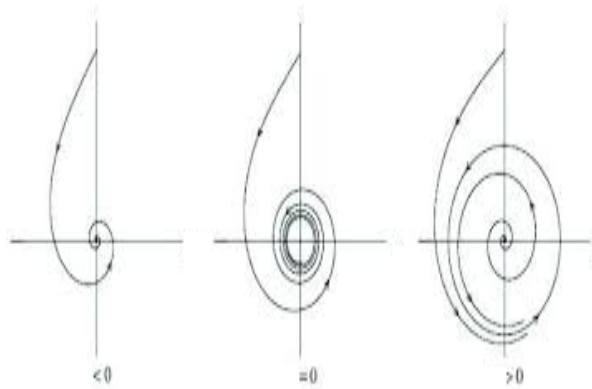


Fig. 3.6 –Portrait de phase pour la bifurcation **sous-critique** de Neimark-Sacker.

3.2 Routes vers le chaos

Plusieurs travaux décrivent les scénarios possibles pour qu'un système dynamique fasse une transition vers le chaos selon ces paramètres de contrôle. La variation continue d'un paramètre de contrôle du système mènent à des régimes dynamiques qualitativement différent.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. En général le passage vers le chaos peut suivre trois scénarios d'évolution définis ci-dessous.

3.2.1 Par doublement de période

En changeant un paramètre, la fréquence du régime, initialement périodique, est doublée consécutivement. Les doublements de fréquences deviennent de plus en plus proches, avec une tendance d'accumulation vers l'infini. C'est dans cet instant où le système devient chaotique. Un exemple de ce comportement est représenté par la suite logistique qui sera décrite postérieurement. Il a été étudié en particulier en dynamique de populations par R. May sur l'application logistique, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Selon la valeur du paramètre a , la suite converge soit vers un point fixe nul ou pas. Dès que a est plus grand que 3 le système bifurque, c'est à dire qu'il oscille entre 2 valeurs autour du point fixe. On parle de cycle attracteur de période 2. En continuant à augmenter a , ces 2 attracteurs s'écartent du point fixe jusqu'à ce qu'une nouvelle bifurcation ait lieu. Chaque point se dédouble et on obtient un cycle attracteur de période 4. On dit qu'il y a doublement de période. C'est à partir de cet exemple que Feigenbaum pressentit l'existence d'une forme d'universalité dans cette transition vers le chaos sous forme de cascade de doublement de période.

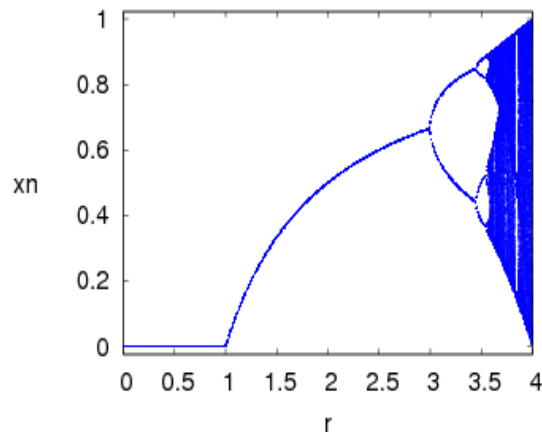


Fig. 3.7 – Cascade de doublements de période pour l'application logistique.

3.2.2 Par Intermittences

Il présente des apparitions erratiques du chaos qui reviennent vers un comportement périodique du système. Il se déstabilise brutalement, puis il s'éloigne de la valeur critique qui l'a amenée à un tel état, en continuant vers un comportement périodique puis en revenant successivement. Un exemple de ce comportement s'observe dans le système de Rössler. L'intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l'état périodique d'où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu'il n'y ait pas d'attracteur à proximité.

3.2.3 Quasi-périodicité

Il est illustrée par le modèle de Lorenz. Il résulte de la concurrence de différentes fréquences dans le système, de façon à osciller entre un état dans la limite de la périodicité, qui permet de transiter vers le chaos.

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens (1971). Elle a été confirmée par de nombreuses expériences. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnel le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas, les trajectoires couvrent la surface d'un tore. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos. Il existe aussi des systèmes qui passent directement de deux fréquences au chaos.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous donnons une idée générale sur les bifurcations dont nous présentons les plus connues bifurcations peut exister dans un système dynamique, puis nous présentons les différentes routes pour qu'un système dynamique fasse une transition vers le chaos.

Chapitre 4

Les bifurcations bissectrice

4.1 Bifurcation bissectrice dans une application unidimensionnelle: Cas étudié de l'application VGH

4.1.1 Introduction

Dans cette section, nous avons revisité l'application VGH unidimensionnelle dans le but de montrer qu'elle présente ce que nous appelons les bifurcations bissectrices: celles qui sont médiées par un ensemble infini d'orbites périodiques neutres et stables. Nous avons déterminé explicitement l'emplacement de certains ainsi que leurs éléments de cycle. Nous avons également expliqué leur existence en termes algébriques et géométriques.

4.1.2 Description et quelques propriétés

L'application VGH (Varley-Gradwell-Hassell) est une application unidimensionnelle lisse et discontinue proposée à l'origine dans des études sur l'écologie des populations [24, 25]. Il s'agit d'une application à trois paramètres composée d'une partie linéaire et d'une loi puissance:

$$x_{n+1} = \begin{cases} rx_n, & x_n \leq c, \\ rx_n^{1-b}, & x_n > c. \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $r, b > 1$ et $c > 0$. Lorsque $c = 1$, l'application est continu, discontinu sinon. Selon le choix des paramètres, l'application (4.1) présente un comportement régulier et chaotique et sa dynamique expose un certain nombre de phénomènes, dont les crises intérieures et l'intermittence induite par la crise [19].

4.1.3 Localisation de la bifurcation dans l'espace des paramètres

Dans cette section, nous montrons que pour l'application (4.1), la bifurcation bissectrice ne se produit que pour $b = 2$.

Nous commençons par introduire un changement de variables qui nous permettent de linéariser exactement l'application (4.1)

$$z = 2 \log(x)/\log(r); \quad \xi = 2 \log(c)/\log(r) \quad (4.2)$$

En termes de z et ξ , l'application (4.1) peut être jetée en forme linéaire suivante:

$$L(z) = \begin{cases} z + 2, & z \leq \xi, \\ (1 - b)z + 2, & z > \xi. \end{cases} \quad (4.3)$$

Cette version linéarisée permet l'approche algébrique suivante. Dans le nouveau forme $L(z)$, les éléments $\{z_1; z_2; \dots; z_T\}$ d'un cycle de période T satisfont:

$$z_n = \begin{cases} z_{n-1} + 2, & z_{n-1} \leq \xi, \\ (1 - b)z_{n-1} + 2, & z_{n-1} > \xi, \end{cases} \quad n = 2, \dots, T \quad (4.4)$$

$$z_1 = \begin{cases} z_T + 2, & z_T \leq \xi, \\ (1 - b)z_T + 2, & z_T > \xi. \end{cases} \quad (4.5)$$

Ces expressions peuvent être exprimées sous la forme:

$$\begin{cases} z_1 - \alpha_T z_T = 2, \\ z_n - \alpha_{n-1} z_{n-1} = 2, \end{cases} \quad n = 2, 3, \dots, T, \quad (4.6)$$

avec

$$\alpha_k = \begin{cases} -1, & z_k \leq \xi, \\ b - 1, & z_k > \xi. \end{cases} \quad (4.7)$$

Le système linéaire des équations (4.6) peut être exprimé sous forme matricielle

$$\sum_{j=1}^{j=T} A_{ij} z_j = 2; \quad i = 1, 2, \dots, T, \quad (4.8)$$

Où la matrice A est:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_{T-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_T \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Pour trouver un attracteur constitué d'un nombre infini de cycles limites de période T , nous avons besoin que le système des équations (4.6) soit compatible et indéterminé. Une condition nécessaire est donc $\det(A) = 0$. Le déterminant de la matrice A est:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^T \alpha_k + (-1)^{T+1} \quad (4.10)$$

Si le cycle a d de ses éléments satisfaisant $z_i > \zeta$ cela donne:

$$\det(A) = (-1)^{T-d} (b-1)^d + (-1)^{T+1} \quad (4.11)$$

Qui s'annule pour $b = 0$ et, si d est pair, aussi pour $b = 2$.

Puisque nous sommes seulement intéressés par $b > 1$, la seule solution possible est alors $b = 2$. C'est précisément la valeur trouvée à partir des diagrammes de bifurcation dans la section suivante. Il est important de noter que cette valeur de b et l'équation (4.3) implique une stabilité neutre pour tout cycle possible.

Dans la section suivante, nous montrerons explicitement que l'ensemble infini d'orbites périodiques existe.

4.1.4 Explication géométrique de la bifurcation bissectrice

Nous développons une explication heuristique pour l'émergence d'une bifurcation bissectrice basée sur le diagramme en toile d'araignée d'une application générale unidimensionnelle $f(x; p)$ avec un paramètre p . Notons qu'un

ensemble infini de trajectoires régulières de période n sera observé pour une valeur critique p_c de paramètre lorsque $f^{[n]}$ (le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'application f) a une pièce qui est **co-linéaire** avec la bissectrice. Par conséquent, le nom que nous utilisons pour ces bifurcations.

Plus explicitement, à la bifurcation, $f^{[n]}$ sera de la forme:

$$f^{[n]}(x; p_c) = \begin{cases} \dots, \dots, \\ x, & x \in (x_l, x_r), \\ \dots, \dots \end{cases} \quad (4.12)$$

Un exemple de ce phénomène dans l'application (4.1) est donné par son deuxième itéré:

$$V^{[2]}(x; p_c) = \begin{cases} r^2x, & x \leq \frac{c}{r}, \\ r^{2-b}x^{1-b}, & \frac{c}{r} < x \leq c, \\ r^{2-b}x^{(1-b)^2}, & c < x \leq \left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{1}{b-1}}, \\ r^2x^{1-b}, & x > \left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{1}{b-1}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Lorsque $b = 2$, la troisième pièce devient x et on a une bifurcation bissectrice médisée par un ensemble infini de cycles de limite de période-2 neutres stables, pourvu que $c < \sqrt{r}$. Ceci est illustré dans la Figure. 4.2.

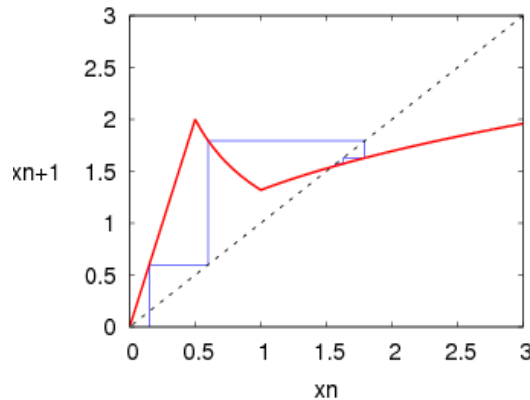


Fig. 4.1 –Diagramme de toile d'araignée de $V^2(x)$ pour: $b = 1.6$ ($c = 1$, $r = 2$).

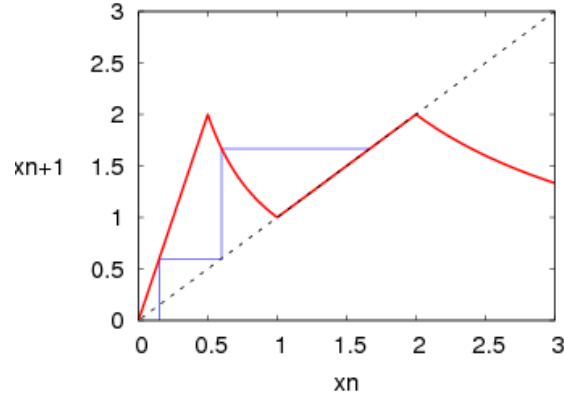


Fig. 4.2 –Diagramme de toile d’araignée de $V^2(x)$ pour: $b = 2$ ($c = 1, r = 2$).

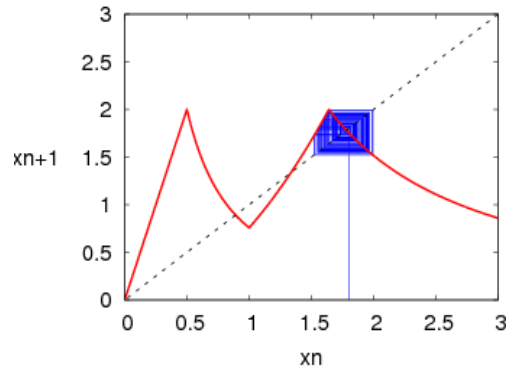


Fig. 4.3 –Diagramme de toile d’araignée de $V^2(x)$ pour: $b = 2.4$ ($c = 1, r = 2$).

Dans les trois cas, les mêmes trois conditions initiales ont été évaluées.

Les Figure. 4.1-4.3 représentent une séquence de trois tracés de diagramme de la toile d’araignée de $V^2(x)$ illustrant la bifurcation bissectrice de l’ordre au chaos. Lorsque $b = 1,6$, l’application présente un point fixe stable et toutes les trajectoires convergent vers ce point fixe. Lorsque $b = 2$, la troisième partie de l’application devient x , produisant un ensemble infini de points fixes de $V^2(x)$ (période 2 orbites de $V(x)$) c’est a dire que chaque condition initiale évolue vers un point fixe neutre stable différent de $V^2(x)$). Lorsque $b = 2,4$, l’application présente deux points fixes instables et la dynamique est chaotique.

En regardant les trois cas montrés dans l’ordre décroissant de b , nous pouvons voir comment ces deux points fixes instables entrent en collision avec les bords (les frontières) de l’application à $b = 2$.

En principe, plusieurs itérations de V peuvent avoir des pièces **co-linéaires** avec la bissectrice simultanément pour la même valeur de p_c . Dans de tels cas, les ensembles infinis de cycles de différentes périodes coexisteront quand $p = p_c$. C'est le cas de l'application (4.1). Lorsque $b = 2$ et $c > 1$, les cycles limites neutres stables peuvent présenter différentes périodes. Ceci est illustré sur les Figures. 4.4-4.6, où l'évolution dans le diagramme de la toile d'araignée et les trajectoires de deux conditions initiales différentes de $V(x)$ sont montrées pour $b = 2, r = 4$ et $c = \sqrt{2}$. L'une des trajectoires évolue vers un cycle limite de période 2 tandis que l'autre évolue vers un cycle limite de période 4.

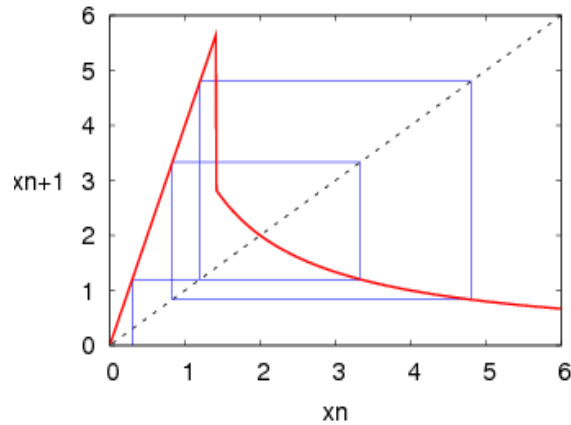


Fig. 4.4 –Diagramme de toile d'araignée de $V(x)$ pour: $b = 2, c = \sqrt{2}, r = 4$ et $x_0 = 0.3$.

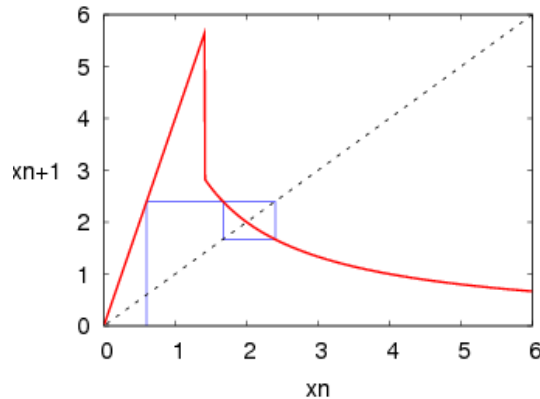


Fig. 4.5 –Diagramme de toile d'araignée de $V(x)$ pour: $b = 2, c = \sqrt{2}, r = 4$ et $x_0 = 0.6$.

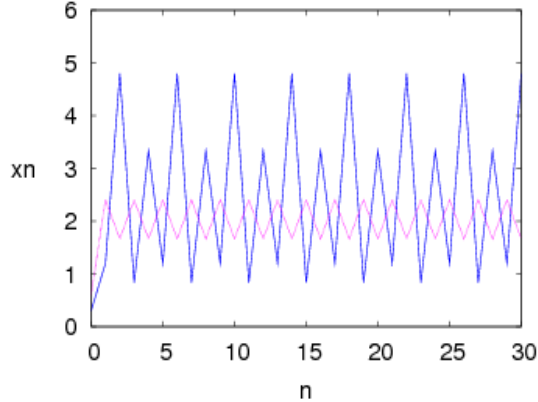


Fig. 4.6 –Les trajectoires de $V(x)$ pour deux conditions initiales $x_0 = 0.3$, $x_0 = 0.6$ et $b = 2$, $c = \sqrt{2}$, $r = 4$.

4.2 Bifurcation bissectrice en systèmes dynamiques discrets 2D: Cas étudiant du système de Lozi

En fonction des paramètres, le transit peut avoir lieu de régimes réguliers à réguliers ainsi qu'à des régimes chaotiques. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, dans les systèmes unidimensionnels, ce genre de transition se produit chaque fois qu'un morceau d'un itérateur de l'application devient **co-linéaire** avec la bissectrice dans le diagramme de la toile d'araignée pour une valeur de paramètre particulier. Nous allons étendre cette explication aux systèmes en deux dimensions. dans cette section, nous montrerons que le système de Lozi présente également des bifurcations bissectrices.

4.2.1 Description et quelques propriétés

Le système de Lozi est un modèle proposé en 1978 par le mathématicien René Lozi [2] pour le but de simplifier l'attracteur de Hénon. Il s'agit d'un système qui introduit des itérations dans le plan. Ces itérations sont définies par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - a|x_n| \equiv f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= bx_n \equiv g(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Où: $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. L'attracteur chaotique de Lozi est représenté sur la Figure 4.7 pour: $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

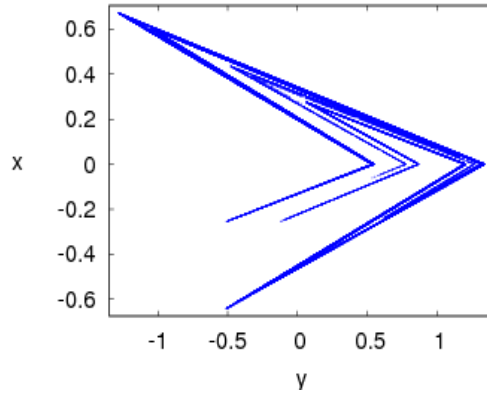


Fig. 4.7 –L'attracteur chaotique de Lozi pour: $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

4.2.2 Dynamique du système de Lozi: Attracteurs isolés et stabilité

Il est courant de commencer l'étude d'un système dynamique avec un catalogue de ses points fixes, attracteurs périodiques et ainsi de suite, en accordant une attention particulière à leur stabilité et l'évolution avec les paramètres du système. Nous commençons par collecter certaines de ces fonctionnalités pour le système (4.14).

Pour des considérations de stabilité, nous avons besoin de la matrice jacobienne de (4.14) donnée par:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -\text{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

L'application de Lozi n'a aucun point fixe si $a \leq b - 1$. Il a comme point fixe unique P_1 si $b - 1 < a \leq 1 - b$ et un point fixe additionnel, P_2 , si $a > 1 - b$, avec:

$$P_1 = \left(\frac{1}{1 + a - b}, \frac{b}{1 + a - b} \right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{1 - a - b}, \frac{b}{1 + a - b} \right). \quad (4.16)$$

En outre $J(P_1) = J_+$, $J(P_2) = J_-$. Par conséquent, seulement P_1 peut être stable et ceci se produit pour des systèmes avec les valeurs de paramètre (b, a)

à l'intérieur du triangle avec sommets $(1,0)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$ dans l'espace de paramètre.

Les cycles d'isolement de la période $T = 2$ existent pour $|b| < 1$, $a > 1 - b$. Leurs éléments sont (z_1, bz_2) et (z_2, bz_1) , avec:

$$z_1 = \frac{1 + a - b}{(1 - b)^2 + a}, \quad z_2 = \frac{1 - a - b}{(1 - b)^2 + a}. \quad (4.17)$$

4.2.3 Bifurcation bissectrice et ensembles attractants

Les points fixes et les cycles mentionnés ci-dessus sont des points isolés dans l'espace de phase. Cependant, pour des valeurs particulières des paramètres a et b , on peut aussi trouver des séries continues de points périodiques qui agissent comme des attracteurs pour certaines régions de l'espace des phases. Ceux-ci peuvent servir de médiateur aux bifurcations bissectrices comme nous l'avons décrit pour l'application unidimensionnelle (4.1). Nous suivrons l'approche algébrique que nous avons décrite ici pour localiser les valeurs a et b qui donnent lieu à des ensembles infinis de cycles limites. Nous résolvons d'abord les cas des périodes deux et quatre qui, à notre avis, illustrent suffisamment la procédure. Après cela, nous déterminons complètement les éléments des cycles. La période trois et cinq sont ensuite analysées de la même manière et montrées pour produire un modèle différent. La stabilité des cycles est également résolue. Des cycles périodiques d'ordre supérieur pourraient être étudiés sur la même ligne mais la méthode algébrique devient plus impliquée.

4.2.4 Cycles de période 2

Soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ un cycle de période-2 de (4.14). Ensuite, au lieu de (4.14), nous utilisons l'équation équivalente de différence de second ordre:

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + bx_{n-1} \quad (4.18)$$

De (4.18) et la condition de périodicité pour un orbit de période 2 on obtient:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - a|x_1| + bx_2, \\ x_1 = 1 - a|x_2| + bx_1. \end{cases} \quad (4.19)$$

i.e.,

$$AX = b \quad (4.20)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \text{asign}(x_1) & 1 - b \\ 1 - b & \text{asign}(x_2) \end{pmatrix}, X = {}^t(x_1, x_2), b = {}^t(1, 1). \quad (4.21)$$

Les 2 cycles correspondants de (4.14) seront $\{(x_1, bx_2), (x_2, bx_1)\}$.

Lorsque le système des équations (4.19) est compatible mais indéterminé, il existe une infinité de solutions et donc de périodes-2 cycles. D'un point de vue algébrique, cela signifie que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 1$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 1 \text{ si et seulement si } \det(A) = 0, \text{rang}(A/b) = 1 \quad (4.22)$$

i.e.,

$$a^2 \text{sign}(x_1) \text{sign}(x_2) = (1 - b)^2, \text{asign}(x_1) - (1 - b) = 0, (1 - b) - \text{asign}(x_2) = 0. \quad (4.23)$$

Qui donne les contraintes: $a > 0$ et $a = 1 - b$ ou $a = b - 1$. En conséquence, il existe deux familles à un paramètre de 2 cycles dans R^2 , $\{S_1, S_2\}$ et $\{U_1, U_2\}$ avec:

$$S_1 = (x, b(1 - ax)/a), S_2 = ((1 - ax)/a, bx), (0 < x < 1/a, b = 1 - a) \quad (4.24)$$

$$U_1 = (x, -b(1 + ax)/a), U_2 = (-(1 + ax)/a, bx), (-1/a < x < 0, b = 1 + a) \quad (4.25)$$

Pour la stabilité nous utilisons la matrice jacobienne.

Pour la famille S , nous avons:

$$J = J(S_1) J(S_2) = (J_+)^2 \quad (4.26)$$

Alors:

$$J = \begin{pmatrix} a^2 + b & -a \\ -ab & b \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Les valeurs propres de la matrice J sont:

$$\lambda_1 = \frac{a^2 + b + a\sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \lambda_2 = \frac{a^2 + b - a\sqrt{a^2 + 4b}}{2}. \quad (4.28)$$

Dans le cas critique, $a = 1 - b$, ils se réduisent aux valeurs 1 et $(1 - a)^2$, et donc ces orbites sont neutres stables quand $0 < a < 2$. Ensuite, le continuum qu'ils forment est un attracteur dans l'espace de phase.

4.2.5 Cycles de période 4

Soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ un cycle de période-4 de (4.14). De (4.18) et la condition de périodicité pour un orbit de période 4 on obtient:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - a|x_1| + bx_4, \\ x_3 = 1 - a|x_2| + bx_1, \\ x_4 = 1 - a|x_3| + bx_2, \\ x_1 = 1 - a|x_4| + bx_3. \end{cases} \quad (4.29)$$

i.e.,

$$AX = b \quad (4.30)$$

où

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} \text{asign}(x_1) & 1 & 0 & -b \\ -b & \text{asign}(x_2) & 1 & 0 \\ 0 & -b & \text{asign}(x_3) & 1 \\ 1 & 0 & -b & \text{asign}(x_4) \end{pmatrix}, \\ X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ b = {}^t(1, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (4.31)$$

Les 4 cycles correspondants de (4.14) seront $\{(x_1, bx_4), (x_2, bx_1), (x_3, bx_2), (x_4, bx_3)\}$. Lorsque le système des équations (4.29) est compatible mais indéterminé, il existe une infinité de solutions et donc de périodes-4 cycles.

Cela signifie que:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 3 \text{ ou } \text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 2. \quad (4.32)$$

1) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 3$ si et seulement si $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 3$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 2b^2 - b^4 + a^2b\alpha_1\alpha_2 + a^2b\alpha_1\alpha_4 + a^2b\alpha_2\alpha_3 + a^2b\alpha_3\alpha_4 + a^4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 1 = 0, \\
 a\alpha_3 - b + b^2 + b^3 + ab\alpha_1 + ab\alpha_3 + ab^2\alpha_1 - a^2\alpha_2\alpha_3 + a^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + a^2b\alpha_1\alpha_2 - 1 = 0, \\
 a\alpha_2 - b + b^2 + b^3 + ab\alpha_2 + ab\alpha_4 + ab^2\alpha_4 - a^2\alpha_1\alpha_2 + a^3\alpha_1\alpha_2\alpha_4 + a^2b\alpha_1\alpha_4 - 1 = 0, \\
 a\alpha_1 - b + b^2 + b^3 + ab\alpha_1 + ab\alpha_3 + ab^2\alpha_3 - a^2\alpha_1\alpha_4 + a^3\alpha_1\alpha_3\alpha_4 + a^2b\alpha_3\alpha_4 - 1 = 0, \\
 a\alpha_4 - b + b^2 + b^3 + ab\alpha_2 + ab\alpha_4 + ab^2\alpha_2 - a^2\alpha_3\alpha_4 + a^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + a^2b\alpha_2\alpha_3 - 1 = 0, \\
 \text{et} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 ab\alpha_1 + ab\alpha_3 + a^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0, \\
 \alpha_1\alpha_2a^2 - b^3 + b \neq 0, \\
 a\alpha_3b^2 + a\alpha_1 \neq 0, \\
 -\alpha_2\alpha_3a^2b - b^2 + 1 \neq 0, \\
 -\alpha_1\alpha_2a^2b - b^2 + 1 \neq 0, \\
 ab\alpha_2 + ab\alpha_4 + a^3\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \neq 0, \\
 \alpha_1\alpha_4a^2 - b^3 + b \neq 0, \\
 a\alpha_2b^2 + a\alpha_4 \neq 0, \\
 a\alpha_1b^2 + a\alpha_3 \neq 0, \\
 -\alpha_1\alpha_4a^2b - b^2 + 1 \neq 0, \\
 ab\alpha_1 + ab\alpha_3 + a^3\alpha_1\alpha_3\alpha_4 \neq 0, \\
 \alpha_3\alpha_4a^2 - b^3 + b \neq 0, \\
 \alpha_2\alpha_3a^2 - b^3 + b \neq 0, \\
 a\alpha_4b^2 + a\alpha_2 \neq 0, \\
 -\alpha_3\alpha_4a^2b - b^2 + 1 \neq 0, \\
 ab\alpha_2 + ab\alpha_4 + a^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \neq 0.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

où

$$\alpha_i = \text{sign}(x_i), \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ce qui donne les résultats suivants ;

- 1) Les contraintes sur les paramètres sont: $a = 1 + b$ et $0 < b < 1$, $1 < a < 2$.
- 2) Les éléments du cycle en fonction du paramater μ sont :

$$(x_1, bx_4), (x_2, bx_1), (x_3, bx_2), (x_4, bx_3) \quad (4.34)$$

telque:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = -\mu - (b + 1)B < 0, \\
 x_2 = \mu + 2B > 0, \\
 x_3 = -\mu < 0, \\
 x_4 = \mu - (b - 1)B > 0.
 \end{array} \right. \quad (4.35)$$

avec: $0 < \mu < 1$ et $B = \frac{1}{1+b^2}$.

La matrice jacobienne correspondante est:

$$J = (J_+ J_-)^2 = \begin{pmatrix} a^4 - 3a^2b + b^2 & a(2b - a^2) \\ -ab(2b - a^2) & b^2 - a^2b \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Dans le cas critique $a = 1 + b$ on a:

$$J = \begin{pmatrix} b^4 + b^3 + b^2 + b + 1 & -b^3 - b^2 - b - 1 \\ b(b^3 + b^2 + b + 1) & -b(b^2 + b + 1) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Les valeurs propres de J deviennent: $b^4, 1$. Par conséquent, ces orbites de période 4 sont neutres stables et leur union est un attracteur.

4.2.6 Cycles de periode 3

Soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ un cycle de période-3 de (4.14). De (4.18) et la condition de périodicité pour un orbit de période 3 on obtient:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - a|x_1| + bx_3, \\ x_3 = 1 - a|x_2| + bx_1, \\ x_1 = 1 - a|x_3| + bx_2. \end{cases} \quad (4.38)$$

i.e.,

$$AX = b \quad (4.39)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} \text{asign}(x_1) & 1 & -b \\ -b & \text{asign}(x_2) & 1 \\ 1 & -b & \text{asign}(x_3) \end{pmatrix}, \quad X = {}^t(x_1, x_2, x_3), \quad b = {}^t(1, 1, 1). \quad (4.40)$$

Les 3 cycles correspondants de l'application de Lozi seront :

$$\{(x_1, bx_3), (x_2, bx_1), (x_3, bx_2)\}$$

Nous avons déterminé qu'un ensemble infini de cycles de trois éléments n'existe que si $a = 1$ et $b = -1$. Cependant, dans ce cas, le rang des matrices des coefficients et complètes est égal à 1 et, par conséquent, on obtient

un continuum de solutions en fonction de deux paramètres. Les éléments du cycle sont donnés par $(\zeta, -\eta)$, $(1 - \zeta - \eta, -\zeta)$, $(\eta, -1 + \zeta + \eta)$, en fonction des paramètres ζ et η tel que: $\zeta > 0$, $\eta > 0$, $0 < \zeta + \eta < 1$.

Pour la stabilité nous utilisons la matrice jacobienne J . Nous avons:

$$J = J_+ J_+ J_+ = (J_+)^3$$

Alors:

$$J = \begin{pmatrix} -a^2 - 2b & a^2 + b \\ ba^2 + b^2 & -ab \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Pour $a = 1$ et $b = -1$ les valeurs propres de la matrice J devient $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Qui signifie la stabilité neutre double. D'où, l'ensemble des orbites de période-3 est bidimensionnel dans l'espace de phase. Un portrait de phase qui comprend les orbites de la période 3 est représenté sur la Figure 4.8. Les orbites de la période 3 remplissent complètement le triangle blanc au centre de la Figure 4.8, avec le sommet de l'angle droit à $(0, 0)$. Les sommets angulaires aigus sont situés à $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

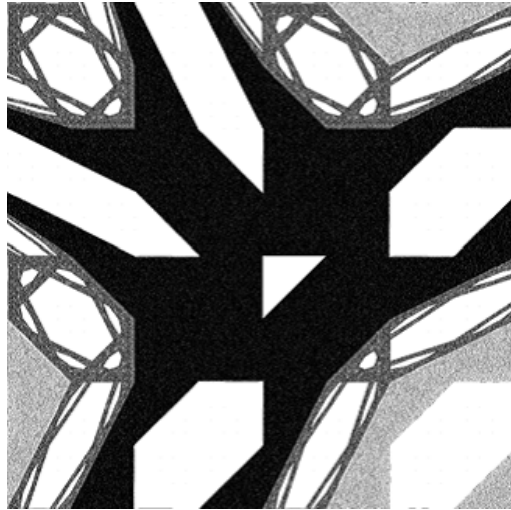


Fig. 4.8 –Un portrait de phase qui comprend les orbites de période 3 pour le système (4.14).

4.2.7 Cycles de période 5

Soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)\}$ un cycle de période-5 de (4.14). De (4.18) et la condition de périodicité pour un orbit de période 5 on

obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 - a|x_1| + bx_5, \\ x_3 = 1 - a|x_2| + bx_1, \\ x_4 = 1 - a|x_3| + bx_2, \\ x_5 = 1 - a|x_4| + bx_3, \\ x_1 = 1 - a|x_5| + bx_4. \end{array} \right. \quad (4.42)$$

i.e.,

$$AX = b \quad (4.43)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} \text{asign}(x_1) & 1 & 0 & 0 & -b \\ -b & \text{asign}(x_2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \text{asign}(x_3) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \text{asign}(x_4) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -b & \text{asign}(x_5) \end{pmatrix}, \\ X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad b = {}^t(1, 1, 1, 1, 1). \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Les 5 cycles correspondants de (4.14) seront:

$$\{(x_1, bx_5), (x_2, bx_1), (x_3, bx_2), (x_4, bx_3), (x_5, bx_4)\}. \quad (4.45)$$

Lorsque le système des équations (4.42) est compatible mais indéterminé, il existe une infinité de solutions et donc de périodes-5 cycles.

Cela signifie que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) < 5$, i.e., $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 4$ ou $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 3$.

Nous remarquons qu'au moins A et A/b sont de rang 3.

1) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 3$ si et seulement si $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) =$

3, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} b^5 - ab^2\alpha_1 + ab^2\alpha_2 + ab^2\alpha_3 - ab^2\alpha_4 + ab^2\alpha_5 + a^3b\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + a^3b\alpha_1\alpha_2\alpha_5 + \\ a^3b\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - a^3b\alpha_1\alpha_4\alpha_5 + a^3b\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + a^5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 1 = 0, \\ b - a\alpha_4 + b^2 + b^3 - b^4 - ab\alpha_2 + ab\alpha_4 - ab^2\alpha_1 - ab^3\alpha_1 + ab^2\alpha_3 + a^2\alpha_3\alpha_4 - a^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \\ a^2b^2\alpha_1\alpha_2 + a^2b\alpha_1\alpha_2 - a^2b\alpha_1\alpha_4 + a^2b\alpha_3\alpha_4 + a^3b\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + a^4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 1 = 0, \\ b + a\alpha_3 + b^2 + b^3 + b^4 - ab\alpha_1 + ab\alpha_3 - ab^2\alpha_2 - ab^2\alpha_5 + ab^3\alpha_5 - a^2\alpha_2\alpha_3 + a^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \\ a^2b^2\alpha_1\alpha_5 - a^2b\alpha_2\alpha_3 + a^2b\alpha_1\alpha_5 - a^2b\alpha_3\alpha_5 - a^3b\alpha_1\alpha_2\alpha_5 - a^4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 - 1 = 0, \\ b - a\alpha_2 + b^2 - b^3 - b^4 - ab\alpha_2 - ab\alpha_5 - ab^2\alpha_1 - ab^2\alpha_4 - ab^3\alpha_4 + a^2\alpha_1\alpha_2 - a^3\alpha_1\alpha_2\alpha_5 - \\ a^2b^2\alpha_4\alpha_5 + a^2b\alpha_1\alpha_2 + a^2b\alpha_2\alpha_4 + a^2b\alpha_4\alpha_5 - a^3b\alpha_1\alpha_4\alpha_5 + a^4\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5 + 1 = 0, \\ a\alpha_1 - b - b^2 - b^3 - b^4 + ab\alpha_1 + ab\alpha_4 - ab^2\alpha_3 - ab^3\alpha_3 - ab^2\alpha_5 - a^2\alpha_1\alpha_5 + a^3\alpha_1\alpha_4\alpha_5 - \\ a^2b^2\alpha_3\alpha_4 - a^2b\alpha_1\alpha_3 - a^2b\alpha_1\alpha_5 - a^2b\alpha_3\alpha_4 - a^3b\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - a^4\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - 1 = 0, \\ b - a\alpha_5 - b^2 - b^3 - b^4 - ab\alpha_3 - ab\alpha_5 + ab^2\alpha_2 + ab^3\alpha_2 - ab^2\alpha_4 + a^2\alpha_4\alpha_5 - a^3\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \\ a^2b^2\alpha_2\alpha_3 + a^2b\alpha_2\alpha_3 + a^2b\alpha_2\alpha_5 - a^2b\alpha_4\alpha_5 + a^3b\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + a^4\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 1 = 0. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

avec $\alpha_i = \text{sign}(x_i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ce qui donne les résultats suivants:

- 1) Les contraintes sur les paramètres sont: $b = -1$ et $a = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ ou $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.
- 2) Les éléments du cycle en fonction du paramater μ sont:

$$\{(x_1, bx_5), (x_2, bx_1), (x_3, bx_2), (x_4, bx_3), (x_5, bx_4)\}. \quad (4.47)$$

- Pour $b = -1$ et $a = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - \hat{t}_4 - \hat{t}_5 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \right), \\ x_2 = \hat{t}_4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \right) + \hat{t}_5 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, \\ x_3 = 1 - \hat{t}_5 - \hat{t}_4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \right), \\ x_4 = \hat{t}_4, \\ x_5 = \hat{t}_5. \end{array} \right. \quad (4.48)$$

-Pour $b = -1$ et $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ on obtient:

$$\begin{cases} x_1 = \hat{t}_5 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) - \hat{t}_4 + 1, \\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \hat{t}_5 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) - \hat{t}_4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}, \\ x_3 = \hat{t}_4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) - \hat{t}_5 + 1, \\ x_4 = \hat{t}_4, \\ x_5 = \hat{t}_5. \end{cases} \quad (4.49)$$

Avec \hat{t}_4 et \hat{t}_5 deux paramètres définissent la famille des orbites de la période 5 varient dans le pentagone des sommets

$$\{(\varphi^2; 0); (\varphi; 0); (\varphi^2; \varphi^2); (1; \varphi); (0; \varphi^2)\}$$

dans l'espace des paramètres, pour $\phi = a$, et varient dans le pentagone des sommets

$$\{(0; 0); (1; 0); (\phi; 1); (1; \phi); (0; 1)\}$$

pour $\varphi = -a$. Notez que: $\varphi = \phi - 1 = 1/\phi$. La matrice jacobienne correspondante est:

$$J = \begin{pmatrix} -a^4 - a^3b - 3a^2b - ab^2 - 2b^2 & a^3 + a^2b + 2ab + b^2 \\ b(a^4 + 3a^2b + b^2) & -ab(a^2 + 2b) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Qui devient $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $b = -1$ et $a = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ ou $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Dont les valeurs propres de J sont: 1, 1. Par conséquent, ces orbites de période 5 sont doubles neutres stables et leur union est un attracteur.

4.3 Diagrammes de bifurcation

Il est courant de résumer le comportement d'un système avec des paramètres variables au moyen de diagrammes de bifurcation. En principe, il existe deux façons un peu extrêmes de construire ces diagrammes. Le mode idéal pour procéder est clair: on détermine par une analyse théorique les points périodiques et leur stabilité et les trace en fonction d'un paramètre. Cela est souvent impossible à réaliser complètement et alors il faut recourir à une méthode plus expérimentale:

Itérer l'application pour un certain nombre de conditions initiales, jeter un transitoire dans les trajectoires et tracer ensuite un composant en fonction

du paramètre. Les limites inévitables de la dernière approche sont claires et il faut veiller particulièrement à identifier les résultats obtenus. En particulier, une barre densément remplie dans un diagramme est habituellement prise comme une signature du chaos.

Dans l'application (4.14), lorsque des conditions initiales suffisantes sont considérées pour la simulation numérique, les continus de 2 et 4 cycles décrits ci-dessus peuvent agir comme attracteur et apparaître aussi comme ligne verticale dans le diagramme de bifurcation. Ceci est clairement visible sur la Figure 4.9 pour b fixé à 0, 1. Pour construire ce diagramme, une attention particulière a été accordée pour balayer un grand nombre de conditions initiales. Pour chaque trajectoire, un transitoire suffisamment important est rejeté. En outre, si une composante augmente au-delà d'un seuil donné, la trajectoire est considérée comme non bornée.

La Figure 4.9 présente une bifurcation de la période 1 à la période 2 pour $a = 0,9$ et une autre de la période 2 au chaos pour $a = 1,1$. Ce diagramme numériquement obtenu illustre clairement que ces deux bifurcations sont médusées par les phénomènes décrits en sous-sections 4.2.4 et 4.2.5 respectivement. Une autre caractéristique de la Figure 4.9 est que dans les intervalles approximatifs $1.1 < a < 1.237$ et $1.237 < a < 1.406$, les trajectoires sautent entre les bandes chaotiques d'une manière cyclique, avec des périodes 4 et 2 respectivement.

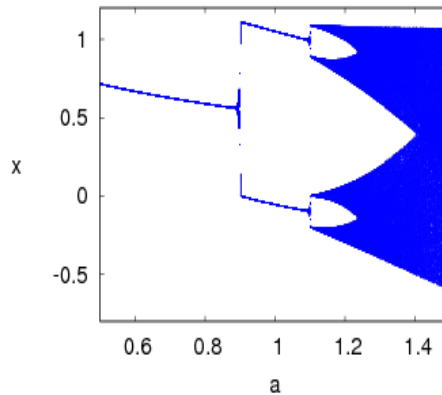


Fig. 4.9 –Diagramme de bifurcation pour: $b = 0, 1$. Noter que les bifurcations bissectrices ont lieu à $a = 1 \mp b$.

De même, dans la Figure 4.10, pour $a = 1,5$ fixé, deux bifurcations se produisent à $b = 0,5$, à nouveau médusées par le même mécanisme. Le système est chaotique pour $b = 0,1$ et $a > 1,1$ dans la figure 4.9, et $a =$

1,5 et $-0,5 < b < 0,5$ dans la Figure 4.10. La présence de ces segments verticaux correspondant aux attracteurs décrits composés d'ensembles infinis d'orbites périodiques est la caractéristique la plus saillante du phénomène que nous traitons ici. Nous l'appelons bifurcation bissectrice pour des raisons qui apparaîtront clairement dans la section suivante. Finalement, le saut cyclique entre les bandes chaotiques du diagramme a lieu avec les périodes 2 et 4 à gauche et à droite de la Figure 4.10, respectivement.

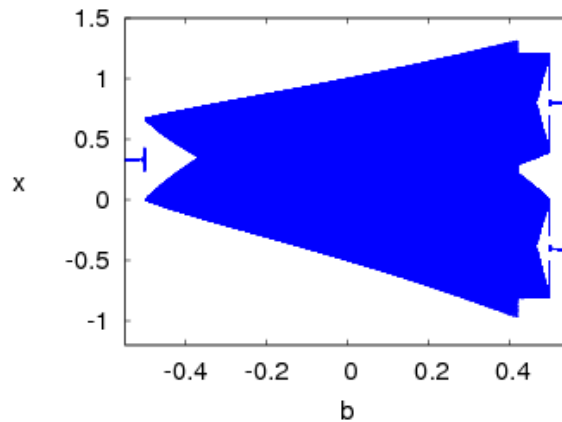


Fig. 4.10 –Diagramme de bifurcation pour: $a = 1,5$. Noter que les bifurcations bissectrices ont lieu à $b = \mp(a - 1)$.

Nous rassemblons les informations discutées jusqu'à ici dans la Figure 4.11 où le comportement de l'application Lozi dans différentes régions de l'espace des paramètres est indiqué. Les trajectoires ne sont pas bornées pour $|b| > 1$. Des simulations numériques indiquent que c'est également le cas pour les parties nord et sud du diagramme. L'identification de la zone chaotique a été réalisée en calculant numériquement les exposants de Lyapunov [28]; Ainsi, le bord supérieur du chaos est approximatif. Les points fixes stables de L et $L^{[2]}$ sont inclus dans les graphiques. La variété des comportements que les trajectoires de (4.14) peuvent développer [41].

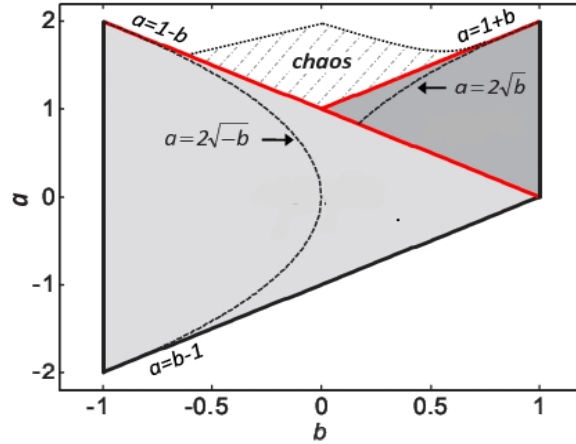


Fig. 4.11 –Comportement de l’application de Lozi dans l’espace du paramètre.

4.4 Explication géométrique des bifurcations bissectrices dans l’application de Lozi

Nous développons ici une généralisation pour l’application de Lozi, bien que l’illustration graphique soit plus impliquée. La Figure 4.12 représente la surface $f^{[4]}(x; y)$ et permet d’apprécier comment la forme simple de $f(x; y)$ en (4.14) devient convolutive après itération.

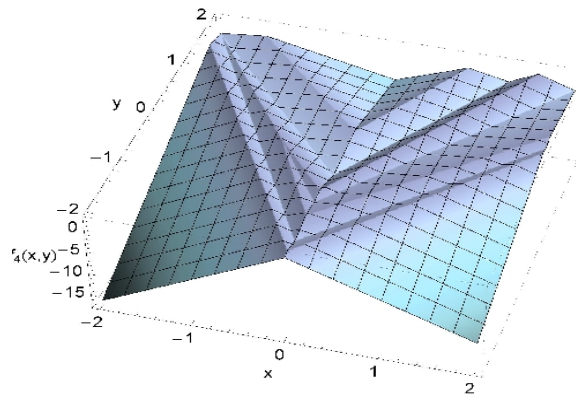


Fig. 4.12 –Surface définie par l’itération $f^{[4]}(x, y)$ obtenu à partir de (4.14), avec $a = 1,5$ et $b = 0,5$.

Notons que pour (4.14), l'existence d'une bifurcation bissectrice dans la variable x implique sa présence dans le variable y , et vice-versa. Cela est dû au fait que y est juste une version d'une itération retardée et redimensionnée de x . Cette observation facilitera la conception et l'interprétation de certains diagrammes tridimensionnels.

D'un point de vue algébrique, on trouvera une infinité de limites cycles de période n si:

$$F^{[n]}(x; y) = x; G^{[n]}(x; y) = y; \quad (4.51)$$

Pour une gamme de valeurs $(x; y)$, comme illustré pour $n = 2$ à 5 dans la section 2. Il s'agit clairement de l'état du point fixe étendu à un ensemble continu de points dans l'espace de phase. En outre, la condition (4.51) ne s'agit là que d'une condition nécessaire pour l'observation de l'infinité des cycles de limite car sa stabilité n'est pas assurée par elle.

Dans une généralisation bidimensionnelle, on peut visualiser $f^{[n]}(x; y)$ et $g^{[n]}(x; y)$ comme surfaces auxquelles un point $p(X_m; y_m)$ du plan de phase est projetée vers le haut afin de trouver les nouveaux $x_{m+1} = f^{[n]}(x_m; y_m)$ et $y_{m+1} = g^{[n]}(x_m; y_m)$ sur l'axe vertical. Cette procédure est illustrée à la Figure 4.13 pour le cas particulier $n = 1$.

Dans la Figure 4.13. Le plan horizontal représente ici le plan de phase et l'axe vertical est commun pour les deux surfaces $f^{[n]}(x; y)$ et $g^{[n]}(x; y)$, qui ont été esquissées seulement partiellement.

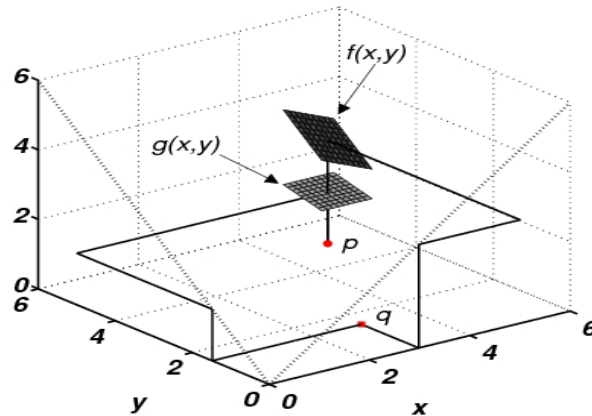


Fig. 4.13 –Représentation de deux surfaces $f(x, y)$ et $g(x, y)$ et ces projections dans \mathbb{R}^2 .

En utilisant la technique du diagramme en toile d'araignée, les valeurs x_{m+1} et y_{m+1} sont renvoyées au plan de phase.

Ainsi, la valeur x_{m+1} est d'abord projetée vers le bissecteur $f^{[n]}(x; 0) = x$, puis vers le bas jusqu'à l'axe des x . De même, y_{m+1} est d'abord projeté vers le bissecteur $g^{[n]}(0; y) = y$ puis vers le bas jusqu'à l'axe y . Cela donne le point $q(X_{m+1}; y_{m+1})$ sur le plan de phase dans la Figure 4.13.

Considérons maintenant la condition (4.51) en termes géométriques. La présence dans une application bidimensionnelle d'une bifurcation médiée par un ensemble infini de cycles neutres stables implique l'existence d'un segment, ou ensemble de segments, dans le plan de phase dont les projections vers le haut sur les surfaces $f^{[n]}(x; y)$ et $g^{[n]}(x; y)$ sont contenues respectivement dans les plans bissecteurs $f^{[n]}(x; y) = x$ et $g^{[n]}(x; y) = y$. Cette explication justifie le nom bifurcation bissectrice que nous avons donnée au phénomène dont nous discutons.

Dans le cas de l'application de Lozi, f et g permettent de trouver des solutions explicites pour la condition (4.51), au moins pour des valeurs basses de n . Dans la bifurcation se produisant à $a = 1 - b$ avec $a > 0$. Les limites cycles au point de bifurcation sont tous des cycles de période 2, c'est-à-dire des points fixes de $L^{[2]}(x; y)$. Dans la Figure 4.14, nous avons représenté la surface $f^{[2]}(x; y)$ et la procédure de toile d'araignée généralisée décrite ci-dessus. Par souci de clarté, toute représentation analogue concernant $g^{[2]}(x; y)$ a été omise. Le graphique a été généré pour $b = 0,1$ et $a = 0,9$. Toute condition initiale $(x_0; y_0)$ débarque, après un certain transitoire, sur le segment $y = b(1 - ax)/a$ avec $0 < x < 1/a$ (ligne rouge sur la Figure 4.14). Chaque point de ce segment est un point fixe de $L^{[2]}(x; y)$. Lorsqu'elles sont projetées sur la surface $f^{[2]}(x; y)$, elles parcourent le plan bissecteur $f^{[2]}(x; y) = x$, puis reviennent à leur position dans le plan de phase. Comme ce segment est invariant sous la transformation $L^{[2]}(x; y)$, tout point du segment est un élément d'un cycle de période-2 de $L(x; y)$.

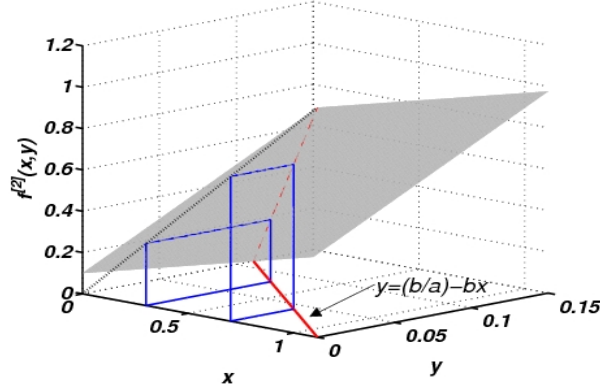


Fig. 4.14 –Représentation de la surface $f^{[2]}(x, y)$. Les trajectoires de la toile d'araignée de deux conditions initiales différentes ($x_0 = 0, 3, 0, 7$ et $y_0 = b(1 - x_0)/a$) ont été représentées.

À partir d'une perspective géométrique tridimensionnelle, nous trouverons un ensemble infini de cycles limites de période n à partir de (4.14) lorsque les projections sur le plan de phase des deux courbes produites par les intersections de:

i) La surface $f^{[n]}(x; y)$ et le plan bissecteur $z = x$ et ; *ii*) La surface $g^{[n]}(x; y)$ et le plan bissecteur $z = y$, se superposent dans une certaine plage des variables x, y . Chaque fois que l'intersection n'est pas un segment linéaire mais une zone, le système a deux orbites neutres et stables, ce qui est le cas des orbites période-3 et période-5 que nous avons étudiées.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons deux études pour deux systèmes dynamiques, l'une est l'application VGH unidimensionnelle et l'autre est l'application de Lozi en deux dimensions dans le but de montrer que les deux peuvent présenter ce que nous appelons les bifurcations bissectrices: celles qui sont méditées par un ensemble infini d'orbites périodiques neutres et stables. Nous avons déterminé explicitement l'emplacement de certains ainsi que leurs éléments de cycle. Nous avons également expliqué leur existence en termes algébriques et géométriques.

Chapitre 5

Bifurcation de collision de frontière dans les systèmes 2-D linéaire par morceaux

5.1 Introduction

De nombreux problèmes liés à l'ingénierie et à la science appliquée nous permettent d'envisager des systèmes linéaires par morceaux où l'espace d'état discret est divisé en deux ou plusieurs compartiments avec différentes formes fonctionnelles séparées par des frontières [3]. On sait que, pour les systèmes dynamiques par morceaux, nous pouvons en général distinguer deux types de bifurcations : l'une comprend les bifurcations qui se produisent dans des systèmes dynamiques lisses (locaux, liés aux valeurs propres traversant le cercle de l'unité ou globales, par exemple la bifurcation homoclinique), tandis que l'autre est la bifurcation de collision de frontière [5], [6]. Cette bifurcation se produit lorsqu'un point fixe (ou une orbite périodique) entre en collision avec la frontière (la bordure) entre deux régions dans lesquelles la fonction change sa définition. Le terme bifurcation de collision frontalière a été inventé et utilisé pour la première fois par Nusse et Yorke dans [5]. Cette bifurcation a été étudiée dans la littérature russe sous le nom de C bifurcations par Feigin [36], [37]. Les résultats de Feigin ont été introduits dans la littérature occidentale dans [38]. Un simple type de bifurcation de collision de frontière consiste en la transition directe d'une orbite périodique à une autre avec la même période. Cependant, des phénomènes plus compliqués sont également possibles,

y compris les bifurcations multipliant les périodes, et la transition directe de la périodicité au chaos [3], [4]. Le phénomène des bifurcations de collision de frontière a été observé à la fois numériquement et expérimentalement dans de nombreux systèmes, dans des applications telles que des appareils électroniques de puissance [10], [39], [40] et dans des études d'impact de pâturage dans les oscillateurs mécaniques [42], [43].

Nous considérons un système par morceaux lisse bidimensionnel général $g(x^*, y^*)$ dépend d'un paramètre simple ρ . Soit Γ_ρ , donné par

$x^* = g(y^*, \rho)$ dénoter une courbe lisse qui divise le plan de phase (frontière) en deux régions R_L et R_R .

Le système est donné par:

$$g(x^*, y^*, \rho) = \begin{cases} g_1(x^*, y^*, \rho), & x \in R_L \\ g_2(x^*, y^*, \rho), & x \in R_R. \end{cases} \quad (5.1)$$

On le suppose que les deux fonctions g_1 et g_2 sont continus et ont les dérivés continus. Le système (5.1) est continue mais son dérivé est discontinu à la frontière Γ_ρ . On le suppose encore que les dérivés partiels unilatéraux à la frontière sont finis. Nous étudions les bifurcations de ce système pendant que le paramètre ρ est varié.

Étant donné que la structure locale des bifurcations de collision de frontière dépend uniquement des propriétés locales du système dans le voisinage de la frontière, nous étudions les bifurcations de collision de frontière à l'aide de "formes normales": les approximations linéaires par morceaux dans le voisinage de la frontière.

5.2 La forme normale de collision de frontière en 2D

Il a été démontré qu'une forme normale pour un système donné par (5.1) au voisinage d'un point fixe sur la frontière peut être exprimée en [5, 18, 32]

$$N(x, y) = \begin{cases} A_L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x < 0 \\ A_R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Avec:

$$A_L = \begin{pmatrix} \tau_L & 1 \\ -\delta_L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_R = \begin{pmatrix} \tau_R & 1 \\ -\delta_R & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Où μ est un paramètre et $\tau_{L,R}$, $\delta_{L,R}$ sont les traces et les déterminants des matrices correspondantes du système linéarisé dans les deux sous-régions R_L et R_R donné par:

$$\begin{aligned} R_L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \in \mathbb{R}\} \\ R_R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

évaluée au point fixe:

$$P_L = \left(\frac{\mu}{1 - \tau_L + \delta_L}, -\frac{\delta_L \mu}{1 - \tau_L + \delta_L} \right) \in R_L \quad (5.5)$$

(avec les valeurs propres λ_{1L} , λ_{2L}) et au point fixe et au point fixe

$$P_R = \left(\frac{\mu}{1 - \tau_R + \delta_R}, -\frac{\delta_R \mu}{1 - \tau_R + \delta_R} \right) \in R_R \quad (5.6)$$

(avec les valeurs propres λ_{1R} , λ_{2R}), respectivement. La stabilité des points fixes est déterminée par les valeurs propres de la matrice Jacobienne correspondante, c'est-à-dire,

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}. \quad (5.7)$$

Dans les régions R_L et R_R le système (5.1) est lisse, et la frontière entre elles est donnée par:

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y \in \mathbb{R}\} \quad (5.8)$$

5.3 Les types possibles de points fixes de la forme normale de l'application (5.1)

Les types possibles de points fixes de la forme normale du système (5.1) sont donnés par les éléments suivants:

(1) Pour un déterminant positif:

(1-a) Pour $2\sqrt{\delta} < \tau < (1 + \delta)$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $0 < \lambda_{1L}, \lambda_{2L} < 1$, et le point fixe est un attracteur régulier.

(1-b) Pour $\tau > (1 + \delta)$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $0 < \lambda_{1L} < 1$, $\lambda_{2L} > 1$, et le point fixe est une selle régulière.

(1-c) Pour $-(1 + \delta) < \tau < -2\sqrt{\delta}$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $-1 < \lambda_{1L} < 0$, $-1 < \lambda_{2L} < 0$, et le point fixe est un attracteur flip.

(1-d) Pour $\tau < -(1 + \delta)$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $-1 < \lambda_{1L} < 0$, $\lambda_{2L} < -1$, et le point fixe est une sellette flip.

(1-e) Pour $0 < \tau < 2\sqrt{\delta}$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres complexes $|\lambda_{1L}|, |\lambda_{2L}| < 1$, et le point fixe est une spirale dans le sens des aiguilles d'une montre.

(1-g) Pour $-2\sqrt{\delta} < \tau < 0$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres complexes $|\lambda_{1L}|, |\lambda_{2L}| < 1$, et le point fixe est une spirale anti-horaire.

(2) Pour un déterminant négatif:

(2-a) Pour $-(1 + \delta) < \tau < (1 + \delta)$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $-1 < \lambda_{1L} < 0$, $0 < \lambda_{2L} < 1$, et le point fixe est un attracteur flip.

(2-b) Pour $\tau > 1 + \delta$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $\lambda_{1L} > 1$, $-1 < \lambda_{2L} < 0$, et le point fixe est une sellette flip.

(2-c) Pour $\tau < -(1 + \delta)$, alors la matrice jacobienne a deux valeurs propres réelles $0 < \lambda_{1L} < 1$, $\lambda_{2L} < -1$, et le point fixe est une sellette flip.

Ensuite, nous résumons les cas connus dans lesquels un point fixe localement unique avant que la frontière rapporte, après la frontière, soit un nouveau point fixe localement unique, soit un attracteur de période-2 localement unique. La discussion commence par le cas où les déterminants du système sont positifs des deux côtés de la frontière, suivis du cas où les déterminants sont négatifs des deux côtés de la frontière, se terminant par les cas dans lesquels les déterminants des deux côtés de la frontière sont des signes opposés.

5.3.1 Le cas des déterminants positifs des deux côtés de la frontière

Scénario A: (Point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière).

Si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L > 0, \delta_R > 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < (1 + \delta_R), \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Alors un point fixe stable persiste lorsque le paramètre de bifurcation μ est augmenté (ou diminué) par l'intermédiaire du zéro.

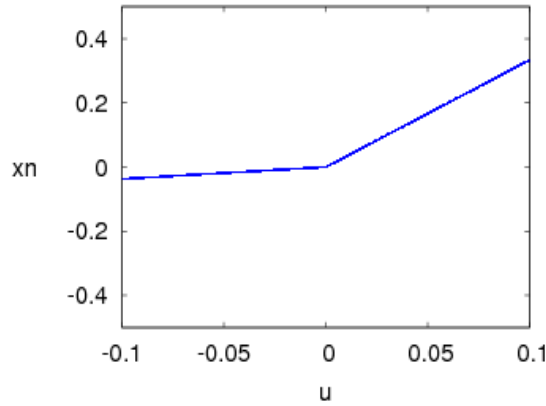


Fig. 5.1 –Diagramme de bifurcation pour le scénario A obtenu pour:
 $\tau_L = 1.2, \tau_R = 1.2, \delta_L = 0.5, \delta_R = 0.5$.

Pour la gamme de paramètres donnée par (5.9), un point fixe stable produit un point fixe stable après le passage de la frontière avec ou sans orbites périodiques étrangères émergeant du point critique. Ces cas sont les suivants:

(1) Si $2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < (1 + \delta_L)$, $-(1 + \delta_R) < \tau_R < -2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur régulier rapporte un attracteur flip.

(2) Si $2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < (1 + \delta_L)$, $2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < (1 + \delta_R)$, alors un attracteur régulier rapporte un attracteur régulier.

(3) Si $-(1 + \delta_L) < \tau_L < -2\sqrt{\delta_L}$, $-(1 + \delta_R) < \tau_R < -2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur flip rapporte un attracteur régulier.

(4) Si $-(1 + \delta_L) < \tau_L < -2\sqrt{\delta_L}$, $-(1 + \delta_R) < \tau_R < -2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur flip rapporte un attracteur flip.

(5) Si $2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < (1 + \delta_L)$, $-2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < 2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur régulier rapporte un attracteur en spirale.

(6) Si $-2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < 2\sqrt{\delta_L}$, $2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < (1 + \delta_R)$, alors un attracteur en spirale rapporte un attracteur régulier.

**CHAPITRE 5. BIFURCATION DE COLLISION DE FRONTIÈRE DANS
LES SYSTÈMES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX**

(7) If $-(1+\delta_L) < \tau_L < -2\sqrt{\delta_L}$, $-2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < 2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur flip rapporte un attracteur en spirale.

(8) If $-2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < 2\sqrt{\delta_R}$, $-(1+\delta_R) < \tau_R < -2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur en spirale rapporte un attracteur flip.

(9) If $0 < \tau_L < 2\sqrt{\delta_L}$, $-2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < 0$, alors un attracteur en spirale dans le sens des aiguilles d'une montre rapporte un attracteur en spirale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

(10) If $-2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < 0$, $0 < \tau_R < 2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur en spirale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre rapporte un attracteur en spirale dans le sens des aiguilles d'une montre.

(11) If $0 < \tau_L < 2\sqrt{\delta_L}$, $0 < \tau_R < 2\sqrt{\delta_R}$, alors un attracteur en spirale dans le sens des aiguilles d'une montre rapporte un attracteur en spirale dans le sens des aiguilles d'une montre.

(12) If $-2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < 0$, $-2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < 0$, alors un attracteur en spirale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre rapporte un attracteur en spirale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Notez que des orbites périodiques étrangères se produisent aux bifurcations dans les cas (9) et (10). Pour les cas (5), (6), (11) et (12), il n'existe pas d'exemples connus, mais aucune preuve n'a encore été signalée que des orbites périodiques étrangères ne se produisent pas. Pour les cas (1) à (4), les orbites périodiques étrangères ne peuvent pas apparaître, c'est-à-dire que les points fixes des deux côtés de la frontière sont localement uniques et stables. Cela se produit lorsque le point fixe passe de (1) un attracteur régulier à un attracteur flip, (2) un attracteur régulier à un attracteur régulier, (3) un attracteur flip à un attracteur régulier, et (4) un attracteur flip à un attracteur flip, comme μ est varié à travers sa valeur critique.

Scénario B: (Bifurcation de collision de frontière de doublement de période supercritique).

Dans ce cas, il existe deux régions dans l'espace de paramètres où se produit la bifurcation de collision de frontière de doublement de période, c'est-à-dire qu'un point fixe stable localement unique mène à un point fixe instable plus une orbite de période-2 attractive localement unique. Ce scénario est divisé en scénario B1 et Scénario B2 comme suit:

Scénario B1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L > 0, \delta_R > 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < -2\sqrt{\delta_L} \\ \tau_R < -(1 + \delta_R) \\ \tau_R \tau_L < (1 + \delta_R)(1 + \delta_L). \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Scénario B2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L > 0, \delta_R > 0 \\ 2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ \tau_R < -(1 + \delta_R) \\ \tau_R \tau_L > -(1 - \delta_R)(1 - \delta_L). \end{array} \right. \quad (5.11)$$

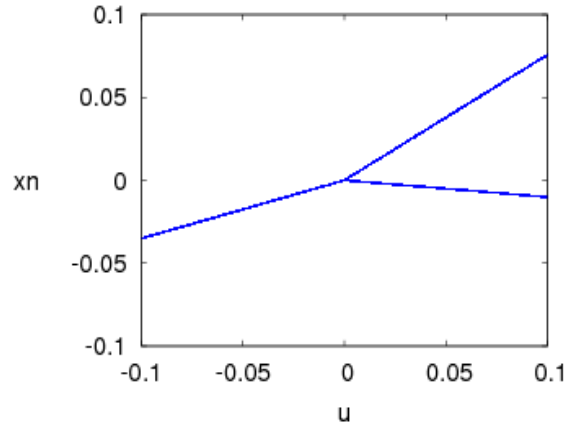


Fig. 5.2 –Diagramme de bifurcation pour le scénario B obtenu pour:
 $\tau_L = -1.35, \tau_R = -1.52, \delta_L = 0.5, \delta_R = 0.5$.

5.3.2 Le cas des déterminants négatifs des deux côtés de la frontière

Si les déterminants des deux côtés de la frontière sont négatifs, alors si le point fixe est stable, il est localement unique. La condition d'un point fixe

stable localement unique sur les deux côtés de la frontière est donnée dans le scénario C ci-dessous:

Scénario C: (Point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière).

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L < 0, \delta_R < 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < (1 + \delta_R), \end{array} \right. \quad (5.12)$$

alors un point fixe stable localement unique conduit à un point fixe stable localement unique comme μ est augmenté à zéro.

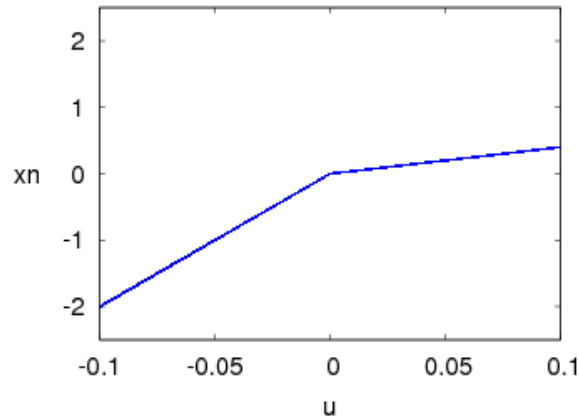


Fig. 5.3 –Diagramme de bifurcation pour le cas d'un point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière obtenu pour: $\tau_L = 0.20$, $\tau_R = 0.5$, $\delta_L = -0.75$, $\delta_R = -0.25$.

Scénario D: (Bifurcation de collision de frontière de doublement de période supercritique).

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L < 0, \delta_R > 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ \tau_R < -(1 + \delta_R) \\ \tau_R \tau_L < (1 + \delta_R)(1 + \delta_L) \\ \tau_R \tau_L > -(1 - \delta_R)(1 - \delta_L). \end{array} \right. \quad (5.13)$$

alors un point fixe stable localement unique à la gauche de la frontière pour $\mu < 0$ croise la frontière et devient instable, et une orbite de période 2 localement unique est née lorsque μ est augmenté à zéro, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une condition pour une collision de frontière de doublement de période supercritique sans des orbites périodiques étrangères.

5.3.3 Le cas du déterminant négatif à la gauche de la frontière et déterminant positif à droite de la frontière

Si le déterminant est négatif à la gauche de la frontière, i.e., $\delta_R < 0$, alors les valeurs propres sont réelles. Si le déterminant est positif à la droite de la frontière, i.e., $\delta_R > 0$, alors les valeurs propres sont réelles si $\tau_R^2 > 4\delta_R$. Ainsi, une condition suffisante pour avoir un point fixe localement unique conduisant à un point fixe localement unique lorsque μ est varié à travers la valeur critique est donné comme suit:

Scénario E: (Point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière).

Cela se produit si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L < 0, \delta_R > 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < (1 + \delta_R) \\ \tau_R^2 > 4\delta_R. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Le **scénario E** est montré dans la Figure 5.4.

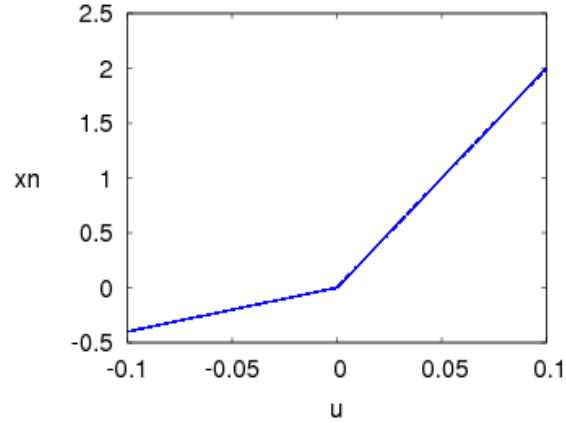


Fig. 5.4 –Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière obtenu pour:
 $\tau_L = 0.25, \tau_R = 1.2, \delta_L = -0.5, \delta_R = 0.25$.

Les conditions (5.14) peuvent être divisées en deux cas suivants :

Scénario E1: cela se produit si

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L < 0, \delta_R > 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < -2\sqrt{\delta_R}. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Scénario E2: cela se produit si

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L < 0, \delta_R > 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ 2\sqrt{\delta_R} < \tau_R < (1 + \delta_R). \end{array} \right. \quad (5.16)$$

5.3.4 Le cas du déterminant positif à la gauche de la frontière et le déterminant négatif à droite de la frontière

Si le déterminant est négatif à droite de la frontière, i.e., $\delta_R < 0$, alors les valeurs propres sont réelles. Si le déterminant est positif à la gauche de

la frontière, i.e., $\delta_L > 0$, alors les valeurs propres sont réelles si $\tau_L^2 > 4\delta_L$. Ainsi, une condition suffisante pour avoir un point fixe localement unique conduisant à un point fixe localement unique lorsque μ est varié à travers la valeur critique est donné comme suit:

Scénario F: (Point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière).

Cela se produit si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L > 0, \delta_R < 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < (1 + \delta_R) \\ \tau_L^2 > 4\delta_L. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Le **scénario F** est montré dans la Figure 5.5.

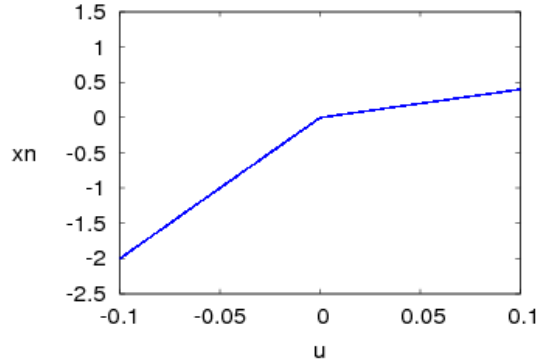


Fig. 5.5 –Diagramme de bifurcation pour le cas d'un point fixe stable localement unique sur les deux côtés de la frontière obtenu pour:

$$\tau_L = 1.2, \tau_R = 0.5, \delta_L = 0.25, \delta_R = -0.25.$$

Les conditions (5.17) peuvent être divisées en deux cas suivants:

Scénario F1: cela se produit si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L > 0, \delta_R < 0 \\ 2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < (1 + \delta_R). \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Scénario F2: cela se produit si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_L > 0, \delta_R < 0 \\ -(1 + \delta_L) < \tau_L < -2\sqrt{\delta_L} \\ -(1 + \delta_R) < \tau_R < (1 + \delta_R). \end{array} \right. \quad (5.19)$$

En fait, il n'existe pas de conditions connues pour les doublements de collision de frontière supercritique qui se produisent sans EBO lorsque les déterminants des deux côtés de la frontière sont des signes opposés. Les scénarios **A-F** sont présentés dans les Figures 5.6 et 5.7, i.e., les gammes de paramètre dans l'espace $(\tau_L, \delta_L, \tau_R, \delta_R)$ tels que les points fixes sont des attracteurs uniques des deux côtés de la frontière (dans ces Figures, δ_L et δ_R sont fixes, tandis que τ_L et τ_R sont des variables).

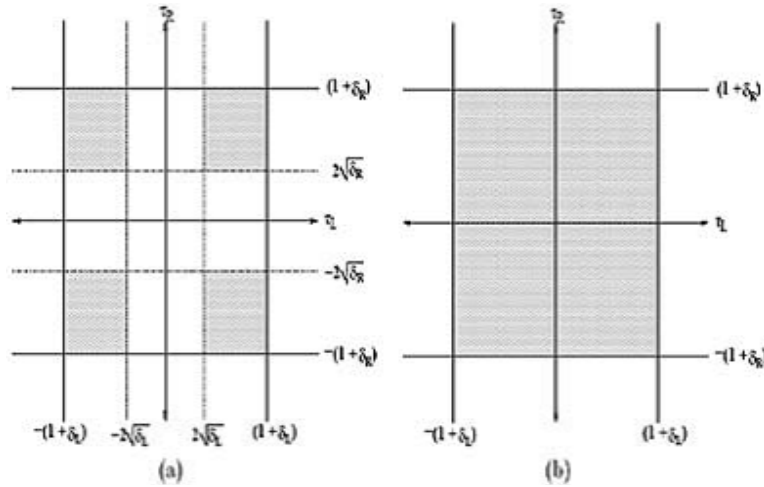


Fig. 5.6-Aucune bifurcation ne se produit dans les régions ombragées lorsque μ est augmenté (diminué). Seulement le chemin du point fixe change au $\mu = 0$. (a) $0 < \delta_L < 1$ et $0 < \delta_R < 1$. (b) $-1 < \delta_L < 0$ et $-1 < \delta_R < 0$.

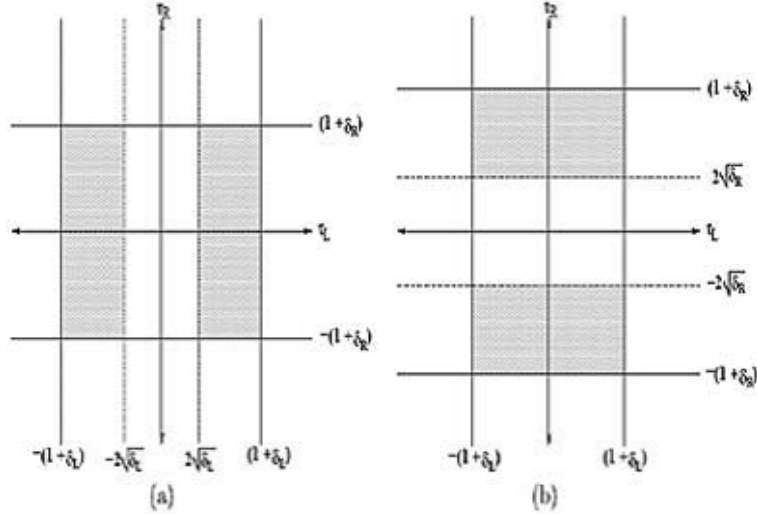


Fig. 5.7-Aucune bifurcation ne se produit dans les régions ombragées lorsque μ est augmenté (diminué). Seulement le chemin du point fixe change au $\mu = 0$. (a) $0 < \delta_L < 1$ et $-1 < \delta_R < 0$. (b) $-1 < \delta_L < 0$ et $0 < \delta_R < 1$.

5.3.5 Point fixe stable menant au point fixe stable plus des orbites périodiques étrangères

Il y a certaines bifurcations de frontière-collision qui, tout en n'entraînant pas un effondrement catastrophique du système, peuvent mener au comportement du système indésirable [Banerjee & Grebogi (1999), Banerjee et al. (2000)], i.e., le cas d'un point fixe stable menant à un point fixe stable plus des orbites périodiques étrangères, celui-ci peut montrer les bifurcations multiples d'attracteur de chaque côté de la frontière ou des deux côtés de la frontière en plus des points fixes stables. Les conditions pour ce cas ne sont pas actuellement disponibles. Un premier exemple de cette situation est le cas d'un point fixe stable plus un attracteur de période-4 à un point fixe stable plus un attracteur de période-3 lorsque μ est augmenté par zéro. Cette situation est montrée par l'application:

$$N(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.50 & 1 \\ -0.90 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x < 0 \\ \begin{pmatrix} -1.22 & 1 \\ -0.36 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x > 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

et représenter sur la Figure 5.8. Dans ce cas, le point fixe pour $\mu < 0$ est en attelage en spirale et pour $\mu > 0$ est un attracteur à bascule.

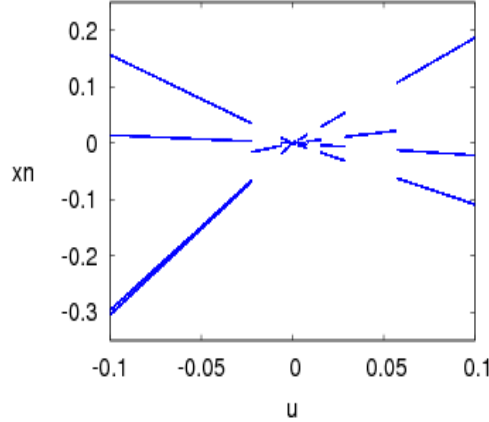


Fig. 5.8 –Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable plus un attracteur de période-4 à un point fixe stable plus un attracteur de période-3 obtenu pour: $\tau_L = 0.5, \tau_R = -1.22, \delta_L = 0.90, \delta_R = 0.36$.

Le deuxième exemple est donné par le cas d’un point fixe stable à un point fixe stable plus un attracteur de période-7 affiché par l’application:

$$N(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1.6 & 1 \\ -0.80 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x < 0 \\ \begin{pmatrix} -1.4 & 1 \\ -0.6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x > 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

et montré dans la Figure 5.9. Dans ce cas, le point fixe pour $\mu < 0$ est attiré en spirale et pour $\mu > 0$ est également attiré en spirale avec un sens de rotation opposé.

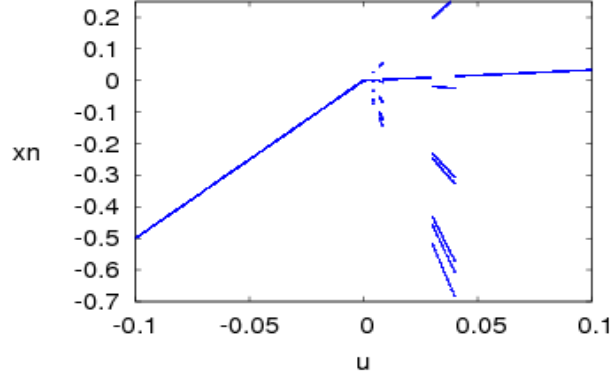


Fig. 5.9 –Diagramme de bifurcation pour le cas d’un point fixe stable menant à un point fixe stable plus un attracteur de période-7 obtenu pour:
 $\tau_L = 1.6, \tau_R = -1.4, \delta_L = 0.80, \delta_R = 0.6$.

5.3.6 Bifurcations indésirables et dangereuses

« Les bifurcations dangereuses » considérées commencent par un système fonctionnant à un point fixe stable d’un côté de la frontière, disant le côté gauche. Les principales « bifurcations dangereuses » pouvant résulter d’une collision de frontière sont les suivantes:

Bifurcation de paires de frontière-collision

Cela se produit si:

$$\begin{cases} -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ \tau_R > (1 + \delta_R) \end{cases} \quad (5.22)$$

où un point fixe stable et un point fixe instable fusionnent et disparaissent lorsque μ est augmenté par zéro. C’est analogue aux bifurcations de noeud col dans les systèmes lisses. Dans ce cas, les trajectoires du système divergent pour des valeurs positives de μ car des attracteurs local n’existent pas.

Bifurcation de collision de frontière de doublement de période sous-critique

Cela se produit si:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1 + \delta_L) < \tau_L < (1 + \delta_L) \\ \tau_R < -(1 + \delta_R) \\ \tau_R \tau_L > (1 + \delta_R)(1 + \delta_L). \end{array} \right. \quad (5.23)$$

où une bifurcation d'un point fixe stable et d'une orbite de period-2 instable à la gauche de la frontière à un point fixe instable à la droite de la frontière se produit lorsque μ est augmenté par zéro. Ce type de bifurcation n'est pas classifié comme «bifurcation dangereuse», il est indésirable dans quelques applications.

Point fixe stable menant au chaos:

If

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{\delta_L} < \tau_L < 1 + \delta_L \\ \tau_R < -(1 + \delta_R). \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Il y a une bifurcation d'un point fixe (attracteur de period-1) à un attracteur chaotique lorsque μ est augmenté par zéro. Cet attracteur chaotique est robuste. ce cas est montré dans la Figure 5.10.

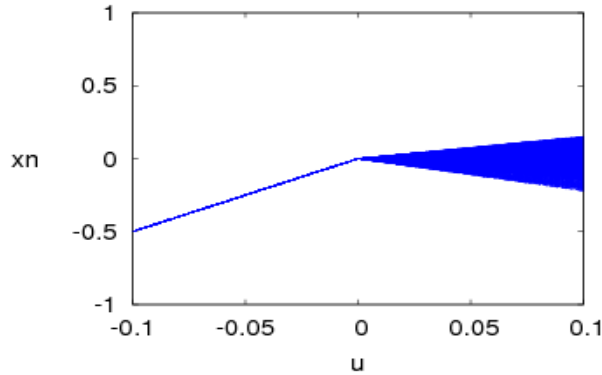


Fig. 5.10 –Diagramme de bifurcation pour le cas d'un point fixe stable menant au chaos pour: $\tau_L = 1.2, \tau_R = -2, \delta_L = 0.4, \delta_R = 0.5$.

Dans ce cas-ci: le comportement du système change directement au chaos (sans bifurcation par intermittence ou par doublement de période) quand un cycle de limite perd sa stabilité. Voir [Ohnishi et Inaba (1994)] pour plus de détails.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous étudions les bifurcations de collision de frontière à l'aide de "formes normales": les approximations linéaires par morceaux dans le voisinage de la frontière. Nous résumons les cas connus et les scénarios possibles pour ce type de bifurcation selon le signe des déterminants des deux côtés avec les diagrammes de bifurcations obtenus pour des valeurs particulières des paramètres.

Chapitre 6

Conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition des bifurcations bissectrices dans les systèmes générales 2-D linéaire par morceaux

Dans ce chapitre, nous concentrerons sur les conditions pour l'apparition d'un type particulier de bifurcations dans le cas général d'un système 2-D linéaire par morceaux appelés bifurcations bissectrices. Ce type de bifurcation est médié par un ensemble infini d'orbites périodiques neutres stables, c'est-à-dire des cycles à unité multiplicatrice. Nous avons utilisé la définition du rang des matrices des coefficients et complètes sur la base des mineurs pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles la bifurcation bissectrice se produit. Ce chapitre est comme suit; après une brève introduction à la définition de l'application considérée, nous avons fourni quelques concepts préliminaires sur le rang et les déterminants mineurs d'une matrice, puis nous avons déterminé explicitement les conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition de la bifurcation bissectrice et puis nous avons donné une généralisation de cette méthode au cas de l'orbite $R^n L$.

6.1 Introduction

Les systèmes linéaires par morceaux sont une classe attrayante de systèmes non linéaires en raison de ses applications réelles en sciences et en ingénierie [11-12]. L'analyse et le contrôle des systèmes linéaires par morceaux ont été étudiés dans de nombreux travaux (par exemple [13]). On a trouvé de grands systèmes physiques et techniques qui sont mieux représentés par des systèmes par morceaux. Voir par exemple [14-15-16-17] où l'espace d'état discret est divisé en deux ou plusieurs compartiments avec différentes formes fonctionnelles séparées par des frontières.

Considérons la forme normale d'un système linéaire par morceaux en 2D donnée dans [18] par:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} A_L \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x_i < 0 \\ A_R \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & x_i > 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

avec:

$$A_L = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_R = \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Où les quatre paramètres, $\tau_1, \tau_2, \delta_1, \delta_2$ peuvent prendre n'importe quelle valeur en \mathbb{R} en même temps, μ est un petit paramètre qui contrôle la bifurcation de collisions de frontière.

La bifurcation se produit à $\mu = 0$. Cependant, pour $\mu \neq 0$, la structure de la dynamique de (6.1) est indépendante de la grandeur de μ . Dans cette étude, nous avons limité notre attention à un type particulier de bifurcation appelé bifurcations bissectrices. Ce type de bifurcation présenté dans de nombreux travaux [19-20-21-22-23]. Ce type de bifurcation est caractérisé par la présence d'un continuum de cycles neutres stables. On note qu'une matrice a rang p si au moins un mineur d'ordre p n'est pas nul et que tous les mineurs strictement supérieurs de l'ordre p sont zéros.

Le but principal de ce chapitre est de donner une généralisation des travaux donnés dans [19-20] pour le cas de l'application linéaire 2-D par morceaux donnés par (6.1). Pour étudier les orbites de (6.1), il est utile de considérer les séquences symboliques, $S : \mathbb{N} \rightarrow \{L, R\}$. On peut associer une telle séquence de symboles à n'importe quelle orbite de (6.1) en mettant: $S_i = L$ si $x_i < 0$ et $S_i = R$ si $x_i > 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Notons que si l'on considère

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

une orbite périodique O_S du système (6.1) alors la séquence symbolique S d'un cycle de période n est donnée par $S_0 \dots S_{n-1}$.

Pour un point initial (x_0, y_0) , un calcul simple conduit à:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = J_S \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + M_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \quad (6.3)$$

où:

$$\begin{cases} J_S = \prod_{i=1}^n A_{S_{n-i}} \\ M_S = I + A_{S_{n-1}} + A_{S_{n-1}}A_{S_{n-2}} + \dots + A_{S_{n-1}}A_{S_{n-2}} \dots A_{S_1} \end{cases} \quad (6.4)$$

Rappelons qu'en raison de la linéarité des fonctions du système, la matrice jacobienne de la fonction itérative n ième est responsable pour la stabilité de l'orbite n -périodique O_S .

6.2 Concepts préliminaires

Dans cette section, nous donnerons quelques clarifications sur quelques concepts utilisés dans ce chapitre.

Définition 6.2.1 Pour une $n \times n$ matrice A , soit A_{ij} la matrice obtenue en omettant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A . La matrice A_{ij} est appelée matrice cofactrice, et son déterminant est appelé mineur de A .

Définition 6.2.2 Le rang d'une matrice A est égal à la dimension de la plus grande sous-matrice carrée de A qui a un déterminant non nul. Une matrice est dite de rang r si et seulement si elle a au moins une sous-matrice d'ordre r avec un déterminant non nul mais n'a pas de sous-matrices d'ordre supérieur à r avec des déterminants non nuls.

Théorème 6.2.1 Considérons le système $Ax = b$, avec, les tailles de b , A , et A/b sont $n \times 1$, $n \times n$, et $n \times (n+1)$, respectivement. Alors, les possibilités de résoudre ce système sont les suivantes:

(1) $Ax = b$ est incompatible (c'est-à-dire, aucune solution n'existe) si et seulement si $\text{rang}(A) < \text{rang}(A/b)$.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

(2) $Ax = b$ a une solution unique si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = n$.

(3) $Ax = b$ a une infinité de solutions si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) < n$. Où n est le nombre d'inconnues et A , A/b sont la matrice des coefficients et la matrice complète respectivement.

6.3 Existence et admissibilité des orbites de période 2

Dans cette section, nous cherchons des conditions pour l'existence et l'admissibilité des orbites de période-2 orbits pour (6.1). Puisque le système est linéaire de chaque côté; les orbites de période 2 (resp. Période supérieure) ne peuvent pas exister avec tous les points de L ou tous les points de R . Cependant, dans certaines parties de l'espace des paramètres; une orbite de période 2 peut exister avec un point en L et un point en R .

Proposition 6.3.1 Une orbite de période -2 du type LR existe si l'une des conditions des deux ensembles est vérifiée:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\tau_2 - (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) < 0 \\ \mu(\tau_1 + \delta_1 + 1) > 0, \\ \mu(\tau_2 + \delta_2 + 1) < 0. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\tau_2 - (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) > 0 \\ \mu(\tau_1 + \delta_1 + 1) < 0, \\ \mu(\tau_2 + \delta_2 + 1) > 0. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Preuve. Soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ un cycle de période 2 du type LR du système (6.1). Nous pouvons écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

*CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX*

où:

$$x_1 < 0, \quad x_2 > 0 \quad (6.8)$$

De (6.7) on obtient le système donné par:

$$\begin{cases} -\tau_1 x_1 + (1 + \delta_2) x_2 = \mu, \\ (1 + \delta_1) x_1 - \tau_2 x_2 = \mu. \end{cases} \quad (6.9)$$

avec la condition (6.8), i.e.,

$$AX = b \quad (6.10)$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} -\tau_1 & 1 + \delta_2 \\ 1 + \delta_1 & -\tau_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

on a:

$$\det A = \tau_1 \tau_2 - (1 + \delta_1)(1 + \delta_2). \quad (6.12)$$

Si $\det A \neq 0$, le système a une solution (x_1, x_2) donnée par:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 + \delta_2 \\ \mu & -\tau_2 \end{vmatrix}}{\tau_1 \tau_2 - (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)} = \frac{\mu(\tau_2 + \delta_2 + 1)}{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - \tau_1 \tau_2} \text{ et négatif.} \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\tau_1 & \mu \\ 1 + \delta_1 & \mu \end{vmatrix}}{\tau_1 \tau_2 - (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)} = \frac{\mu(\tau_1 + \delta_1 + 1)}{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - \tau_1 \tau_2} \text{ et positif.} \end{cases} \quad (6.13)$$

Alors il existe toujours une orbite de la période -2 dans une certaine région de l'espace des paramètres. Cela implique que:

1) Si $\det A < 0$, alors une orbite période -2 existe si

$$\begin{cases} \mu(\tau_1 + \delta_1 + 1) > 0, \\ \mu(\tau_2 + \delta_2 + 1) < 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

2) Si $\det A > 0$, alors une orbite période -2 existe si

$$\begin{aligned} \mu(\tau_1 + \delta_1 + 1) &< 0, \\ \mu(\tau_2 + \delta_2 + 1) &> 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

■

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Remarque 6.3.1 1) Une preuve similaire peut être utilisée pour l'orbite RL.
2) Si $\det A = 0$, le système a une infinité de solutions (infinité des orbites de période-2) ou pas de solution.

Proposition 6.3.2 Pour $\mu \neq 0$ et si les conditions suivantes sont vraies:

$$\begin{cases} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) = \tau_1\tau_2, \\ \tau_1 = -(\delta_1 + 1), \\ \tau_2 = -(\delta_2 + 1), \\ \tau^2 - 4\delta > 0, \\ |\delta_1\delta_2| < 1. \end{cases} \quad (6.16)$$

avec $\tau = \text{tr}(J_{LR})$, $\delta = \det(J_{LR})$, Alors, le système (6.1) a un ensemble infini d'orbites de période-2 neutres stables.

Preuve. Le système a une infinité de solutions, si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 1 < 2$, i.e., $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, i.e.,

$$\begin{cases} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) = \tau_1\tau_2, \\ \mu(\tau_1 + \delta_1 + 1) = 0, \\ \mu(\tau_2 + \delta_2 + 1) = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

quand $\mu \neq 0$ on obtient:

$$\begin{cases} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) = \tau_1\tau_2, \\ \tau_1 = -(\delta_1 + 1), \\ \tau_2 = -(\delta_2 + 1). \end{cases} \quad (6.18)$$

Par conséquent, il y a deux familles à un paramètre de 2 cycles dans \mathbb{R}^2 , $\{P_1, P_2\}$ et $\{S_1, S_2\}$ tel que:

$$P_1 = \left(x_1, -\delta_2 \left(\frac{\mu + \tau_1 x_1}{\delta_2 + 1} \right) \right), \quad P_2 = \left(\frac{\mu + \tau_1 x_1}{\delta_2 + 1}, -\delta_2 x_1 \right)$$

**CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX**

pour tout $x_1 < 0$, $\delta_2 \neq -1$.

$$S_1 = \left(\frac{\mu + \tau_2 x_2}{\delta_1 + 1}, -\delta_2 x_2 \right), S_2 = \left(x_2, -\delta_1 \left(\frac{\mu + \tau_2 x_2}{\delta_1 + 1} \right) \right)$$

pour tout $x_2 > 0$, $\delta_1 \neq -1$. Pour la stabilité, on utilise la matrice jacobienne qui est donnée par:

$$J_{LR} = J_R J_L = \begin{pmatrix} \tau_1 \tau_2 - \delta_1 & \tau_2 \\ -\tau_1 \delta_2 & -\delta_2 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Le polynôme caractéristique est: $p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta$ avec $\tau = tr(J_R J_L)$, $\delta = \det(J_R J_L)$, alors:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\tau_1 \tau_2 - \delta_1 - \delta_2) \lambda + \delta_1 \delta_2 \quad (6.20)$$

Si $\tau^2 - 4\delta > 0$ alors il existe deux valeurs propres réelles données par:

$$\lambda_1 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}, \lambda_2 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2} \quad (6.21)$$

Pour $\tau_1 = -(\delta_1 + 1)$ et $\tau_2 = -(\delta_2 + 1)$ les deux valeurs propres se réduisent aux valeurs 1 et $\delta_1 \delta_2$. Alors les orbites ci-dessus sont neutres stables quand

$$|\delta_1 \delta_2| < 1. \quad (6.22)$$

Enfin, si les deux conditions données dans (6.18) et (6.22) sont vraies, alors le système (6.1) a un ensemble infini d'orbites de période-2 neutres stables.

■

6.4 Existence et admissibilité des orbites de période 3

Pour ce cas, tous les types possibles sont : *RRL* ou *LLR* ou *LRR* ou *RLL* ou *RLR* ou *LRL* ou *LLL* ou *RRR*. *RRL*, *LRR*, *RLR*, (respectivement, *LLR*, *LRL*, *RLL*) représente le même cas dans une représentation binaire, et *LLL*, *RRR* ne sont pas possibles car il n'y a pas d'orbites de période 3 dans un système linéaire. Ensuite, il existe deux orbites de période 3 des types *RRL* et *LLR*.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Proposition 6.4.1 *Les conditions pour l'existence d'un ensemble infini d'orbites périodiquement neutres stables du type RRL par rapport à μ sont les suivantes:*

1) *Pour $\mu = 0$, les conditions sont les suivantes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \tau^2 - 4\delta > 0, \\ |\delta_1 \delta_2^2| < 1, \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_2 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 \delta_1 + \tau_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - (\delta_2)^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } (\tau_2)^2 - \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2 \delta_1 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.23)$$

2) *Pour $\mu \neq 0$, les conditions sont les suivantes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 - \delta_2 + \tau_1 + \tau_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_2 + 1 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 - \delta_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 + \delta_2 \tau_1 + 1 = 0, \\ \delta_2^2 - \delta_2 + \tau_2 + \tau_2^2 + \delta_2 \tau_2 + 1 = 0, \\ \tau^2 - 4\delta > 0, \\ |\delta_1 \delta_2^2| < 1, \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_2 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 \delta_1 + \tau_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - (\delta_2)^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } (\tau_2)^2 - \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2 \delta_1 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.24)$$

avec $\tau = \text{tr}(J_{RRL})$, $\delta = \det(J_{RRL})$.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Preuve. Pour l'orbite RRL , nous avons:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu. \end{cases} \quad (6.25)$$

où

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \text{ et } x_3 < 0 \quad (6.26)$$

Ceci donne le système des équations:

$$\begin{cases} x_1 = \tau_1 x_3 - \delta_2 x_2 + \mu \\ x_2 = \tau_2 x_1 - \delta_1 x_3 + \mu \\ x_3 = \tau_2 x_2 - \delta_2 x_1 + \mu \end{cases} \quad (6.27)$$

avec les conditions (6.26). Le système linéaire des équations (6.27) peut-être exprimé sous la forme matricielle comme suit:

$$AX = b \quad (6.28)$$

avec:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \delta_2 & -\tau_1 \\ -\tau_2 & 1 & \delta_1 \\ \delta_2 & -\tau_2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Nous avons:

$$\det(A) = \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1. \quad (6.30)$$

Le système a infinité de solutions comme période-3 cycles si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) < 3$. Au moins A et A/b sont avec $\text{rang}=1$ parce que le premier mineur de A (égal à 1) $\neq 0$, alors nous avons deux cas: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 1$ ou $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 2$.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Cas 1: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 2$ est possible si et seulement si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \mu (\delta_2 \delta_1 - \delta_2 + \tau_1 + \tau_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_2 + 1) = 0, \\ \mu (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 + \delta_2 \tau_1 + 1) = 0, \\ \mu (\delta_2^2 - \delta_2 + \tau_2 + \tau_2^2 + \delta_2 \tau_2 + 1) = 0, \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_2 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 \delta_1 + \tau_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - (\delta_2)^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } (\tau_2)^2 - \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2 \delta_1 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.31)$$

Nous étudions deux cas: $\mu = 0$ ou $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$, alors $\text{rank}(A) = \text{rank}(A/B) = 2$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_2 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 \delta_1 + \tau_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - (\delta_2)^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } (\tau_2)^2 - \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2 \delta_1 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.32)$$

*CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX*

Si $\mu \neq 0$, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 2$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 - \delta_2 + \tau_1 + \tau_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_2 + 1 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 - \delta_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 + \delta_2 \tau_1 + 1 = 0, \\ \delta_2^2 - \delta_2 + \tau_2 + \tau_2^2 + \delta_2 \tau_2 + 1 = 0, \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_2 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 \delta_1 + \tau_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - (\delta_2)^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1 \tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } (\tau_2)^2 - \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2 \delta_1 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.33)$$

La stabilité des périodiques-3 orbites pour chaque cas peut être obtenue par les valeurs propres de la matrice jacobienne $J_L J_R J_R$, où

$$J_{RRL} = J_L J_R^2 = \begin{pmatrix} -\tau_1 \delta_2 - \tau_2 \delta_2 + \tau_1 \tau_2^2 & \tau_1 \tau_2 - \delta_2 \\ \delta_1 \delta_2 - \tau_2^2 \delta_1 & -\tau_2 \delta_1 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Le polynôme caractéristique correspondant est $p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta$ avec $\tau = \tau_1 \tau_2^2 - \tau_2 \delta_1 - \tau_2 \delta_2 - \tau_1 \delta_2$, $\delta = \delta_1 \delta_2^2$. Si $\tau^2 - 4\delta > 0$, il existe deux valeurs propres réelles:

$$\lambda_1 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2} \quad (6.35)$$

Pour les conditions (6.32) et (6.33) eux réduisent aux valeurs 1 et $\delta_1 \delta_2^2$, et par conséquent les orbites sont neutres stables quant $|\delta_1 \delta_2^2| < 1$.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Cas 2: On a $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 1$ si et seulement si $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \mu (\delta_2 \delta_1 - \delta_2 + \tau_1 + \tau_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_2 + 1) = 0, \\ \mu (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 + \delta_2 \tau_1 + 1) = 0, \\ \mu (\delta_2^2 - \delta_2 + \tau_2 + \tau_2^2 + \delta_2 \tau_2 + 1) = 0, \\ 1 + \delta_2 \tau_2 = 0, \\ \delta_1 - \tau_1 \tau_2 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 + \tau_1 = 0, \\ -\tau_2 - (\delta_2)^2 = 0, \\ 1 + \tau_1 \delta_2 = 0, \\ \delta_2 - \tau_1 \tau_2 = 0, \\ (\tau_2)^2 - \delta_2 = 0, \\ -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_2 \delta_1 = 0, \\ (1 + \tau_2) \mu = 0, \\ (\delta_2 - 1) \mu = 0, \\ (-\tau_1 - \delta_1) \mu = 0, \\ (1 - \delta_2) \mu = 0, \\ (\delta_2 + \tau_2) \mu = 0, \\ (-\tau_1 - 1) \mu = 0, \\ (-\tau_2 - \delta_2) \mu = 0, \\ (1 + \tau_2) \mu = 0, \\ (\delta_1 - 1) \mu = 0. \end{array} \right. \quad (6.36)$$

Nous étudions deux cas: $\mu = 0$ or $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$, alors $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ 1 + \delta_2 \tau_2 = 0, \\ \delta_1 - \tau_1 \tau_2 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 + \tau_1 = 0, \\ -\tau_2 - \delta_2^2 = 0, \\ 1 + \tau_1 \delta_2 = 0, \\ \delta_2 - \tau_1 \tau_2 = 0, \\ (\tau_2)^2 - \delta_2 = 0, \\ -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_2 \delta_1 = 0. \end{array} \right. \quad (6.37)$$

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Si $\mu \neq 0$, alors $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \delta_2^2 + (\tau_1 + \tau_2) \delta_2 - \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 - \delta_2 + \tau_1 + \tau_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_2 + 1 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 - \delta_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 + \delta_2 \tau_1 + 1 = 0, \\ \delta_2^2 - \delta_2 + \tau_2 + \tau_2^2 + \delta_2 \tau_2 + 1 = 0, \\ 1 + \delta_2 \tau_2 = 0, \\ \delta_1 - \tau_1 \tau_2 = 0, \\ \delta_2 \delta_1 + \tau_1 = 0, \\ -\tau_2 - \delta_2^2 = 0, \\ 1 + \tau_1 \delta_2 = 0, \\ \delta_2 - \tau_1 \tau_2 = 0, \\ \tau_2^2 - \delta_2 = 0, \\ -\tau_2 - \delta_1 \delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_2 \delta_1 = 0, \\ 1 + \tau_2 = 0, \\ \delta_2 - 1 = 0, \\ -\tau_1 - \delta_1 = 0, \\ 1 - \delta_2 = 0, \\ \delta_2 + \tau_2 = 0, \\ -\tau_1 - 1 = 0, \\ -\tau_2 - \delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_2 = 0, \\ \delta_1 - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (6.38)$$

Cela ne se produit que pour:

$$\tau_1 = \tau_2 = -1 \text{ et } \delta_1 = \delta_2 = 1. \quad (6.39)$$

Ce cas n'est pas important car le système sera linéaire. ■

Proposition 6.4.2 *Les conditions pour l'apparition d'un ensemble infini d'orbites périodiques 3 neutres stables du type LLR par rapport à μ sont les suivantes:*

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

1) Pour $\mu = 0$ les conditions sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau^2 - 4\delta > 0, \\ |\delta_2\delta_1^2| < 1, \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tau_1\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_2 + \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1 + \delta_1^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1^2 - \delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_1 - \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1\delta_2 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.40)$$

2) Pour $\mu \neq 0$ les conditions sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau_1 - \delta_1 + \tau_1^2 + \delta_1^2 + \tau_1\delta_1 + 1 = 0, \\ \tau_1 - \delta_2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau_2 - \delta_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\delta_2 + \delta_1\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau^2 - 4\delta > 0, \\ |\delta_2\delta_1^2| < 1, \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tau_1\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_2 + \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1 + \delta_1^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1^2 - \delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_1 - \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1\delta_2 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.41)$$

avec $\tau = \text{tr}(J_{LLR})$, $\delta = \det(J_{LLR})$.

Preuve. L'orbite LLR est une orbite de période 3 avec deux points dans le côté gauche et un point dans le côté droite. Supposons que cette orbite

*CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX*

ait les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Pour calculer l'emplacement du point fixe (x_1, y_1) on doit résoudre la condition $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2) \mapsto (x_3, y_3) \mapsto (x_1, y_1)$. D'autres points sont également trouvés. En utilisant la forme normale (6.1), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu. \end{array} \right. \quad (6.42)$$

où

$$x_1 < 0, x_2 < 0 \text{ et } x_3 > 0. \quad (6.43)$$

i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \delta_1 x_2 - \tau_2 x_3 = \mu \\ -\tau_1 x_1 + x_2 + \delta_2 x_3 = \mu \\ \delta_1 x_1 - \tau_1 x_2 + x_3 = \mu \end{array} \right. \quad (6.44)$$

Avec les conditions (6.43). Nous obtenons le système linéaire:

$$AX = b \quad (6.45)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 & -\tau_2 \\ -\tau_1 & 1 & \delta_2 \\ \delta_1 & -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

On a:

$$\det(A) = -\tau_2 \tau_1^2 + \tau_1 \delta_1 + \delta_2 \tau_1 + \delta_2 \delta_1^2 + \tau_2 \delta_1 + 1 \quad (6.47)$$

Le système a infinité de solutions comme période-3 cycles si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) < 3$. Au moins A et A/b sont avec $\text{rang} = 1$ à cause du premier mineur de A (égal à 1) $\neq 0$.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Cas 1: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 1$ si et seulement si $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \mu(\tau_1 - \delta_1 + \tau_1^2 + \delta_1^2 + \tau_1\delta_1 + 1) = 0, \\ -\mu(\tau_1 - \delta_2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 + 1) = 0, \\ \mu(\tau_2 - \delta_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\delta_2 + \delta_1\delta_2 + 1) = 0, \\ 1 + \tau_1\delta_1 = 0, \\ \delta_2 - \tau_1\tau_2 = 0, \\ \tau_2 + \delta_1\delta_2 = 0, \\ \mu(\tau_1 + 1) = 0, \\ \mu(\delta_1 - 1) = 0, \\ \mu(\delta_2 + \tau_2) = 0, \\ \tau_1 + \delta_1^2 = 0, \\ 1 + \tau_2\delta_1 = 0, \\ \delta_1 - \tau_1\tau_2 = 0, \\ \mu(1 - \delta_1) = 0, \\ \mu(\delta_1 + \tau_1) = 0, \\ \mu(1 + \tau_2) = 0. \\ \tau_1^2 - \delta_1 = 0, \\ -\tau_1 - \delta_1\delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_1\delta_2 = 0, \\ \mu(-\tau_1 - \delta_1) = 0, \\ \mu(1 + \tau_1) = 0, \\ \mu(\delta_2 - 1) = 0. \end{array} \right. \quad (6.48)$$

Nous étudions deux cas: $\mu = 0$ or $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$, $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ 1 + \tau_1\delta_1 = 0, \\ \delta_2 - \tau_1\tau_2 = 0, \\ \tau_2 + \delta_1\delta_2 = 0, \\ \tau_1 + \delta_1^2 = 0, \\ 1 + \tau_2\delta_1 = 0, \\ \delta_1 - \tau_1\tau_2 = 0, \\ \tau_1^2 - \delta_1 = 0, \\ -\tau_1 - \delta_1\delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_1\delta_2 = 0. \end{array} \right. \quad (6.49)$$

*CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX*

Si $\mu \neq 0$, alors $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A/b) = 1$, si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau_1 - \delta_1 + \tau_1^2 + \delta_1^2 + \tau_1\delta_1 + 1 = 0, \\ \tau_1 - \delta_2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau_2 - \delta_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\delta_2 + \delta_1\delta_2 + 1 = 0, \\ 1 + \tau_1\delta_1 = 0, \\ \delta_2 - \tau_1\tau_2 = 0, \\ \tau_2 + \delta_1\delta_2 = 0, \\ \tau_1 + 1 = 0, \\ \delta_1 - 1 = 0, \\ \delta_2 + \tau_2 = 0, \\ \tau_1 + \delta_1^2 = 0, \\ 1 + \tau_2\delta_1 = 0, \\ \delta_1 - \tau_1\tau_2 = 0, \\ 1 - \delta_1 = 0, \\ \delta_1 + \tau_1 = 0, \\ 1 + \tau_2 = 0, \\ \tau_1^2 - \delta_1 = 0, \\ -\tau_1 - \delta_1\delta_2 = 0, \\ 1 + \tau_1\delta_2 = 0, \\ -\tau_1 - \delta_1 = 0, \\ 1 + \tau_1 = 0, \\ \delta_2 - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (6.50)$$

La solution est:

$$\tau_1 = -1, \tau_2 = -1, \delta_1 = 1, \delta_2 = 1 \quad (6.51)$$

Ce cas n'est pas important car le système sera linéaire.

CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX

Cas 2: On a $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 2$, si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \mu(\tau_1 - \delta_1 + \tau_1^2 + \delta_1^2 + \tau_1\delta_1 + 1) = 0, \\ \mu(\tau_1 - \delta_2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 + 1) = 0, \\ \mu(\tau_2 - \delta_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\delta_2 + \delta_1\delta_2 + 1) = 0, \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tau_1\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_2 + \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1 + \delta_1^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1^2 - \delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_1 - \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1\delta_2 \neq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.52)$$

Nous étudions deux cas: $\mu = 0$ or $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2$ si et seulement si;

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tau_1\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_2 + \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1 + \delta_1^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1^2 - \delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_1 - \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1\delta_2 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.53)$$

**CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX**

Si $\mu \neq 0$, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A/b) = 2$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1\delta_1 + \tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1 - \tau_1^2\tau_2 + \delta_1^2\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau_1 - \delta_1 + \tau_1^2 + \delta_1^2 + \tau_1\delta_1 + 1 = 0, \\ \tau_1 - \delta_2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 + 1 = 0, \\ \tau_2 - \delta_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\delta_2 + \delta_1\delta_2 + 1 = 0, \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tau_1\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_2 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_2 + \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1 + \delta_1^2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_2\delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } \delta_1 - \tau_1\tau_2 \neq 0, \\ \text{ou } \tau_1^2 - \delta_1 \neq 0, \\ \text{ou } -\tau_1 - \delta_1\delta_2 \neq 0, \\ \text{ou } 1 + \tau_1\delta_2 \neq 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.54)$$

La condition de stabilité des orbites est donnée par les valeurs propres de la matrice composite $J = J_R J_L J_L$, qui réduisent à la valeur 1 et $\delta_2\delta_1^2$. Par conséquent les orbites périodiques-3 de type *LLR* sont neutres stables quand $|\delta_2\delta_1^2| < 1$. ■

Remarque 6.4.1 *La forme continue des orbites périodiques-3 de type *RRL* (ou *LLR*) est un attracteur dans l'espace de phase.*

6.5 Le cas de $(n + 1)$ -périodique de la forme $R^n L$

Une orbite périodique $R^n L$ est une orbite $(n+1)$ -périodique avec n points dans le côté droite et un point dans le côté gauche. Nous avons le système de $n + 1$ équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \\ \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \end{array} \right. \quad (6.55)$$

*CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX*

où

$$x_i > 0, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad \text{et} \quad x_{n+1} < 0. \quad (6.56)$$

On obtient le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \delta_2 x_n - \tau_1 x_{n+1} = \mu, \\ x_2 - \tau_2 x_1 + \delta_1 x_{n+1} = \mu, \\ x_3 - \tau_2 x_2 + \delta_2 x_1 = \mu, \\ x_4 - \tau_2 x_3 + \delta_2 x_2 = \mu, \\ \dots \\ x_n - \tau_2 x_{n-1} + \delta_2 x_{n-2} = \mu, \\ x_{n+1} - \tau_2 x_n + \delta_2 x_{n-1} = \mu. \end{array} \right. \quad (6.57)$$

Avec la condition (6.56). La forme matricielle du système (6.57) est donnée

par:

$$AX = b \quad (6.58)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{n+1, n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \delta_2 & -\tau_1 \\ -\tau_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \delta_1 \\ \delta_2 & -\tau_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \delta_2 & -\tau_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \delta_2 & -\tau_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_2 & -\tau_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_2 & -\tau_2 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})^T \\ \\ b = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)^T \mu \end{array} \right. \quad (6.59)$$

La matrice jacobienne correspondant à l'orbite $R^n L$ est donnée par:

$$J_{R^n L} = A_L (A_R)^n \quad (6.60)$$

*CHAPITRE 6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
POUR L'APPARITION DES BIFURCATIONS BISSECTRICES DANS
LES SYSTÈMES GÉNÉRALES 2-D LINÉAIRE PAR MORCEAUX*

Maintenant, si $\tau_2^2 - 4\delta_2 > 0$, alors la matrice A_R a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 . Pour prendre les puissances de A_R , nous utilisons la forme normale de Jordan pour la matrice A_R . On obtient alors $A_R^n = PJ^nP^{-1}$, où

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 - \tau_2 & \lambda_2 - \tau_2 \end{pmatrix} \\ J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 - \tau_2 & -1 \\ -\lambda_1 + \tau_2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (6.61)$$

Ensuite nous avons:

$$A_R^n = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n(\lambda_2 - \tau_2) - \lambda_2^n(\lambda_1 - \tau_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1^n(\lambda_1 - \tau_2)(\lambda_2 - \tau_2) - \lambda_2^n(\lambda_1 - \tau_2)(\lambda_2 - \tau_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2^n(\lambda_2 - \tau_2) - \lambda_1^n(\lambda_1 - \tau_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

Donc:

$$I - J_{R^nL} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1^n \tau_2^2 - \lambda_2^n \tau_2^2 - \lambda_1 \tau_1 \lambda_2^n + \lambda_1^{n+1} \lambda_2 - \lambda_1^{n+1} \tau_2 + \lambda_1^n \tau_1 \lambda_2 - \lambda_1^n \tau_1 \tau_2 \\ \quad - \lambda_1 \lambda_2^{n+1} + \lambda_1 \lambda_2^n \tau_2 + \tau_1 \lambda_2^n \tau_2 - \lambda_1^n \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2^{n+1} \tau_2, \\ \xi_2 = -(\lambda_1^{n+1} + \lambda_1^n \tau_1 - \tau_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n \tau_2 - \lambda_2^{n+1} + \lambda_2^n \tau_2), \\ \xi_3 = \delta_1 (\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2 + \lambda_1^n \tau_2 - \lambda_2^n \tau_2), \\ \xi_4 = \lambda_1 - \lambda_2 + \delta_1 \lambda_1^n - \delta_1 \lambda_2^n. \end{array} \right. \quad (6.64)$$

et donc:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(I - J_{R^nL}) & (6.65) \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1^n \tau_2^2 - \lambda_2^n \tau_2^2 + \lambda_1^n \delta_1 - \lambda_2^n \delta_1 - \lambda_1 \tau_1 \lambda_2^n + \lambda_1^{n+1} \lambda_2 \\ -\lambda_1^{n+1} \tau_2 + \lambda_1^n \tau_1 \lambda_2 - \lambda_1^n \tau_1 \tau_2 - \lambda_1 \lambda_2^{n+1} + \lambda_1 \lambda_2^n \tau_2 + \tau_1 \lambda_2^n \tau_2 \\ -\lambda_1^n \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2^{n+1} \tau_2 + \lambda_1^{n+1} \lambda_2^n \delta_1 - \lambda_1^n \lambda_2^{n+1} \delta_1 \end{pmatrix}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous montrons que certains cas du système général à 2 dimensions linéaires par morceaux présentent des bifurcations bissectrices: celles qui sont médiées par un ensemble infini d'orbites périodiques neutres stables. Nous avons déterminé explicitement les conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition de la bifurcation bissectrice et nous avons donné une généralisation de cette méthode au cas de l'orbite $R^n L$.

6.7 Conclusion générale

La théorie des bifurcations est l'une des théories principales des systèmes dynamiques, car son importance pour décrire le comportement pour ces systèmes. L'analyse et le contrôle des systèmes linéaires par morceaux ont été étudiés dans nombreux travaux. Dans ce genre des systèmes dynamiques l'espace d'état discret est divisé en deux ou plusieurs compartiments avec différentes formes fonctionnelles séparées par des frontières. Le but essentiel dans ce travail est de donner une généralisation des travaux donnés dans [19-20] pour le cas de l'application linéaire 2D par morceaux donnés par (6.1). Le travail de cette thèse est constitué de 6 chapitres. Le premier est un chapitre préliminaire contient les notions fondamentales concernant les systèmes dynamiques (discrets et continus) et le deuxième est consacré aux attracteurs et les exposants de Lyapunov. Ensuite, nous donnons une idée générale sur les bifurcations et les routes vers le chaos dans un système à temps discret. Dans le quatrième chapitre, nous considérons deux études de deux applications, dont le but de montrer que les deux peuvent présenter ce que nous appelons les bifurcations bissectrices. Le cinquième chapitre, est une idée générale sur les bifurcations de collisions de frontière dans les systèmes 2D linéaires par morceaux dont nous étudions ce genre de bifurcation à l'aide des approximations linéaires par morceaux dans le voisinage de la frontière appelons "formes normales". Le sixième chapitre est le travail principal de cette thèse qui est consacré aux conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition de la bifurcation bissectrice dans le cas général d'un système à 2 dimensions linéaires par morceaux données par (6.1), celles qui sont médiées par des ensembles infinis d'orbites périodiques neutres stables. Nous avons déterminé explicitement les conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition de ce type de bifurcation sur la base de la définition du rang des

matrices des coefficients et des matrices complètes en fonction des mineurs, puis, nous avons donné une généralisation de cette méthode au cas de l'orbite $R^n L$.

Bibliographie

- [1] P. Maneville. Systèmes dynamiques et chaos. Ecole polytechnique, Palaiseau. 1999.
- [2] R. Lozi. Un Attracteur étrange du type (?) de l'attracteur de Hénon. Journal de Physique. Colloque C5, 39 (1978): 9-10.
- [3] Z. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde. Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems. World scientific, Singapore. 2003.
- [4] Z. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, S. Banerjee. Transitions from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map. Phys. Rev. E, 77 (2008): 1-9.
- [5] H. Nusse, J. Yorke. Border-collision bifurcation including period two to period three for piecewise smooth systems. Physica D, 57 (1992): 39–57.
- [6] H. Nusse, J. Yorke. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps. Int. J. Bif. Chaos, 5 (1995): 189-207.
- [7] I. Djellit, I. Boukemara. Dynamics of a three parameter-family of piecewise maps. Facta Universitatis, 20 (2007): 85-92.
- [8] I. Sushko, A. Agliari, L. Gardini. Bistability and border-collision bifurcations for a family of unimodal piecewise smooth maps. Disc. Cont. Dyn. Syst., 5 (2005): 881-897.
- [9] D. Aharonov, R. L. Devaney, U. Elias. The dynamics of a piecewise linear map and its smooth approximation. Int. J. Bif. Chaos, 7 (1997): 351-372.
- [10] P. S. Linsay. Period doubling and chaotic behavior in a driven an harmonic-oscillator. Physical Review Letters, 47 (1981): 1349-1352.
- [11] J. Schweizer, M. Hasler. Multiple access communication using chaotic signals. In Circuits & System. Connecting the World. IEEE International Symposium, 3 (1996): 108-111.

-
- [12] A. Abel, A. Bauer, K. Kerber, W. Schwarz. Chaotic codes for CDMA application. Proc. ECCTD, 97 (1997): 306-311.
- [13] M. K. J. Johansson. Piecewise linear control systems: A computational approach. Springer, Berlin. 2003.
- [14] S. Banerjee, G. C. Verghese. Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Attractors, Bifurcations, Chaos, and Nonlinear Control. IEEE Press, New York. 2001.
- [15] S. Banerjee, S. Parui, A. Gupta. Dynamical Effects of Missed Switching in Current-Mode Controlled dc-dc Converters IEEE Trans. Circuits & Systems-II, 51 (2004): 649-654.
- [16] R. Rajaraman, I. Dobson, S. Jalali. Nonlinear Dynamics and Switching Time Bifurcations of a Thyristor Controlled Reactor Circuit, IEEE Trans. Circuits & Systems-I, 43 (1996): 1001-1006.
- [17] T. K. Tse. Complex Behavior of Switching Power Converters. CRC Press, Boca Raton. 2003.
- [18] S. Banerjee, C. Grebogi. Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps. Physical Review E. 59 (1999): 4052-4061.
- [19] V. Botella-Soler, J. Oteo, J. Ros. Dynamics of a map with a power-law tail. J. Phys A. Math. Theor. 42 (2009): 385101
- [20] V. Botella-Soler, J. Castelo, J. Oteo, J. Ros. Bifurcations in the Lozi map. J. Phys A. Math. Theor. 44 (2011): 305101.
- [21] K. Matsuyama. Growing through cycles. Econometrica. 67 (1999): 335-347.
- [22] V. Avrutin, M. Schanz. On multi-parametric bifurcations in a scalar piecewise-linear map. Nonlinearity. 19 (2006): 1875-1906.
- [23] V. Avrutin, M. Schanz. On the fully developed bandcount adding scenario. Nonlinearity. 21 (2008): 1077-1103.
- [24] G. Varley, G. Gradwell, M. Hassell. Insect population ecology : an analytical approach. Blackwell, Oxford. 1993.
- [25] R. May, G. Oster. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. American Naturalist. 110 (1976): 573-599.
- [26] R. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, New York. 1989.

- [27] S. Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag, New York. 2003.
- [28] K. Alligood, T. Sauer, J. Yorke. Chaos – An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York. 1997.
- [29] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series. *Physica D*, 16 (1985): 285–317.
- [30] C. Sparrow. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. Springer-Verlag, New York. 1982.
- [31] I. Boukemara, I. Djellit. Some Global Bifurcations in Piecewise Maps. *Int. J. Non. S*, 14 (2012): 193–200.
- [32] S. Banerjee, P. Ranjan, C. Grebogi. Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps — theory and applications in switching circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 47 (2000): 633–643.
- [33] Y. A. Kuznetsov. Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, New York. 1998.
- [34] S. W. Wiggins. Global Bifurcations and Chaos. Springer-Verlag, New York. 1988.
- [35] J. Hale, H. Kocak. Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, New York. 1991.
- [36] M. I. Feigin. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems. *Prikladnaya Matematika i Mechanika*, 34 (1970): 861–869.
- [37] M. I. Feigin. The increasingly complex structure of the bifurcation tree of a piecewise-smooth system. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 59 (1995): 853–863.
- [38] M. di Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan, M. E. Homer. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 10 (1999): 1881–1908.
- [39] J. H. B. Deane, D. C. Hamill. Instability, subharmonics, and chaos in power electronic systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 5 (1990): 260–268.
- [40] G. H. Yuan, S. Banerjee, E. Ott, J. A. Yorke. Border collision bifurcations in the buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 45 (1998): 707–716.

- [41] E. Zeraoulia, J. C. Sprott. A new simple 2-D piecewise linear map. *J. Syst. Sci. Complexity*. 23 (2010): 379–389.
- [42] A. B. Nordmark. Non-periodic motion caused by grazing incidence in impact oscillators. *Journal of Sound and Vibration*. 145 (1991): 279–297.
- [43] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys. Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: A unified analytical framework. *Physical Review Letters*. 86 (2001): 2553–2556.
- [44] E. Zeraoulia, J. C. Sprott. *Robust chaos and its applications*. World Scientific, Singapore. 2011.
- [45] F. Hannachi, E. Zeraoulia. Necessary and Sufficient Conditions for the Occurrence of Bisecting Bifurcations in the General 2D Piecewise-Linear Mapping. *Int. J. Bif. Chaos*, 27 (2017): 1750079.