REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE LARBI BEN MHIDI D'OUM El BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT SCIENCES DE LA MATIERE

Thèse
Présentée pour obtenir le diplôme de
Doctorat En Sciences
Option
Physique Théorique

THEME

Traitement de Certains Problèmes de la Mécanique Quantique dans le Cadre des Algèbres Déformées

Présenté par: Hadj Moussa M’hamed

Soutenu le : 20/06/2019

Devant le Jury:

Président :	*Mme. C. Azizi*	*Professeur*	*Univ.Oum El Bouaghi*
Rapporteur :	*Mr. M. Merad*	*Professeur*	*Univ.Oum El Bouaghi*
Examinateurs :	*Mr. A. Boumali*	*Professeur*	*Univ.Tebessa*
	Mr. M. Aouachria	*Professeur*	*Univ. Batna 1*
	Mr. M. Falek .	*M.C.A*	*Univ-Biskra*

2018/2019

REMERCIEMENTS

Je remerciement d’abord et surtout Dieu qui m’a donné le courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur MERAD Mahmoud Professeur à Université d’Oum El Bouaghi qui m’a encadré avec bravoure pendant toute la période que j’ai passée pour réaliser cette thèse.

Je remercie également Madame AZIZI Cherifa Professeur à Université d’Oum El Bouaghi qui a accepté de présider le jury, Monsieur BOUMALI Abdelmalek Professeur à Université de Tebessa, Monsieur AOUACHRIA Mekki Professeur à Université de Batna 1, Monsieur FALEK Mokhtar maitre de conférence A à Université de Biskra de m’avoir honoré d’examiner mon travail.

Je remercie Monsieur Amir, chef du service de la poste graduation, pour son aide à régler certains détails administratifs.

Mes vifs remerciements vont à ma famille qui m’a soutenue et encouragée.

Je remercie infiniment mes amis qui m’ont aidé notamment Mr Hadj Benamane Youghorta, Mme Mattalah, Mr. A. Bencherchali , Languar Oumar , A.Rachid , M. Ali , Nabil , R.Yahia , Z. Elarbi et sa famme, a tous mes collègues à l’université de Blida, également Monsieur M. Slimane, Directeur du Lycée Sportif National qui m’a ouvert les portes de son lycée pour le bon déroulement de mon travail.

Merci enfin à tous ceux qui m’ont aidés de près ou de loin.

HADJ MOUSSA M’hamed

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Depuis la civilisation gréco-romaine, la physique a toujours constitué, tout comme les mathématiques, un socle important pour le développement et l'amélioration des conditions de vie de l'humanité et dans ce sens, les théories de la science physique ont ouvert des perspectives de recherche dans différents domaines, tels que la mécanique quantique relativiste, la théorie des cordes, la théorie des champs, ...etc.

Un des plus importants changements de point de vue de notre compréhension du monde physique est sans doute apparu avec les travaux de Albert Einstein, Henri Poincaré, W. Heisenberg, Minkowski et Snyder-de Sitter. Je rappelle leur travaux comme suit : En 1905 Albert Einstein a publie la théorie de la relativité restreinte [1], elle a été l'une des avancées majeures du 20ème siècle, puis en 1907, suite à des travaux initiés par Henri Poincaré qui considérait le temps comme étant imaginaire[2], Hermann Minkowski en 1908 donne une nouvelle formulation de la relativité restreinte, utilisant l'espace-temps qui porte aujourd'hui son nom[1], cet espace-temps de Minkowski est une variété différentielle M de dimension 4 qu'on peut décrire dans un certain système de coordonnées. En 1947, Snyder a introduit une formulation d'espace éponyme plus générale[3], qui a montré une possibilité de définir un modèle d'espace-temps déformé sans briser l'invariance de Lorentz. Il a proposé l'idée de la déformation des relations de commutation comme une façon d'éliminer les divergences de la théorie du champ quantique [3], cette déformation de l'espace met en œuvre une nouvelle constante fondamentale qui est la longueur minimale. Elle a également maintenu l'invariance de Lorentz en même temps que celle de Poincaré. Puis, elle a envisagé le champ électromagnétique dans un espace-temps déformé [4]. Snyder a commencé avec une approche géométrique projective de l'espace des moments de Snyder (ds) avec une échelle α proportionnelle à $\hbar/a$ [3] proche ou égale à l'échelle de Planck, et pour cela l'énergie et le moment d'une particule ont été identifiées aux coordonnées projectives non homogènes. Cette algèbre de Snyder a été le premier exemple de la géométrie non commutative à être proposé dans la littérature, basé sur une déformation de l'algèbre de Heisenberg, ce modèle implique, outre la vitesse de la lumière, deux autres constantes indépendantes de l'observateur ; l'énergie de Planck et le rayon de Snyder-de Sitter lié à la constante cosmologique [5]. Ledit modèle est aussi appelé la Relativité Doublement Spéciale (relativité spéciale déformée) (DSR) dans l'espace de Snyder, ou relativité tridimensionnelle [6.7]. Plusieurs caractéristiques intéressantes de ce modèle ont été discutées dans les articles [6.8.9.10], notons que Amelino-Camelia a récemment proposé la relativité spéciale déformée (DSR) [11, 12, 13]. Cette théorie est une nouvelle tentative pour aborder le problème de la gravité quantique et elle repose sur deux hypothèses fondamentales, à savoir le principe de la relativité et le postulat de l'existence de deux échelles indépendantes de l'observateur soient ; la vitesse identifiée à la vitesse de la lumière c, et la masse (ou longueur $= 1/k$) identifiée à l'énergie de Planck[14]. Cette théorie DSR est généralement associée à la déformation de la symétrie de Lorentz. Les modèles DSR sont réalisés en déformant l'invariance de Poincaré de la relativité restreinte [15]. Il y a certains modèles (DSR) qui peuvent être réalisés par l'identification de 4-impulsions avec certaines coordonnées sur un espace de Sitter (ds) ou anti-de Sitter (ads) d'impact [14, 16], peut être considéré le modèle de Snyder comme le premier d'entre eux. La théorie de la relativité restreinte basée sur le groupe de Snyder pourrait être conservée en présence d'une constante cosmologique non nulle. Il y a une autre étude sur la théorie de la relativité restreinte à constante cosmologique SR_{c,R}, liée à la longueur invariante [7, 17].

Les propriétés de l'espace de Snyder et sa dynamique, dans les cas non relativiste et relativiste, ont été examinés dans plusieurs articles et dans les contextes classique ou quantique[$18 - 19$], et la connexion des résultats dans l'espace de Snyder-de Sitter avec l'espace standard est éclairée par une carte explicite reliant notre modèle dynamique au modèle de particules relativiste libre habituel [5]. Aussi, il a été montré que l'espace est discrétisé [3, 20] et que les relations d'incertitude de Heisenberg déformées sont valides, ce qui implique une limite inférieure de longueur mesurable [18]. Les dynamiques classiques et quantiques sont modifiées par rapport aux résultats standards et les déviations d'ordre est l'énergie du système [18], et pour la symétrie d'espace de Snyder-de Sitter, il y'a lieu de se conférer aux références [5, 6].

Les objectifs d'introduire le modèle de Snyder-de Sitter sont : L'espace de Snyder est l'une des solutions de l'équation d'Einstein avec terme constant de la cosmologie, aussi la généralisation des résultats ordinaires obtenus dans la mécanique quantique, thermodynamique, ...etc. Également du fait que sa symétrie est maximale, il est préférable de comprendre les effets quantiques non triviaux qui se produisent dans une période de développement accéléré[21]. Notre univers a accéléré l'expansion et peut-être asymptotique à l'espace de Snyder avec une constante cosmologique positive. La cosmologie précise défie la physique à l'échelle cosmique de la relativité générale d'Einstein. Pour cela, il devrait exister une nouvelle cinématique de la physique à l'échelle cosmique.

Il y a une méthode intéressante de généraliser des algèbres déformés avec une longueur minimale consistant à les étendre d'un troisième paramètre invariant pouvant être interprété comme une constante cosmologique [22], et dans ce cadre, on doit noter que des relations de commutation déformées intégrant la constante cosmologique, pour certains choix spécifiques de paramètres de déformation, pourraient conduire à l'apparition de longueurs minimales, ainsi que d'un moment minimal [18].

Dans le domaine de la recherche, il y a beaucoup d'applications de l'algèbre de Snyder-de Sitter, soient entre autres :l'étude de l'oscillateur harmonique dans l'espace de Snyder dans les cas classique et quantique [23] ;l'oscillateur de Dirac dans l'espace de Snyder dans le cas non relativiste [22] ; l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau avec l'algèbre de Snyder-de Sitter [24] ; le problème de Kepler dans l'espace de Snyder [25] ; la théorie des champs scalaires dans l'espace-temps de Snyder[26] ; l'homogénéisation entre la Relativité Doublement Spéciale (DSR) dans le cas de l'espace énergie-impulsion et l'espace de Snyder à quatre dimensions [14, 16] ; les symétries de l'espace de Snyder-de Sitter et la dynamique des particules relativistes [5].

Les objectifs essentiels de ce travail sont : le traitement des problèmes de la mécanique quantique dans l'espace-temps courbé dans le cadre des algèbres déformés, pouvant constituer un nouveau type d'interaction entre la matière quantique et la gravitation dans le monde microscopique.

Dans cette thèse, nous avons organisé notre travail selon la structure suivante : Le chapitre 2 est consacré au formalisme du modèle de Snyder-de Sitter. Au chapitre 3, on a exposé un calcul explicite des équations de Klein-

Gordon et Dirac avec l'algèbre de Snyder-de Sitter dans la représentation d'espace d'impulsion en présence des potentils scalaire et vectoriel linéaires. Au chapitre 4, l'algèbre de Snyder-de Sitter a été appliquée aux oscillateurs de Klein-Gordon et Dirac soumises à l'action du champ électrique uniforme pour déterminer les spectres d'énergie et les fonctions d'onde associées. Aussi, une étude de quelques propriétés des grandeurs physiques de la thermodynamique a été présentée. Dans le chapitre 5, nous avons traité le problème de l'oscillateur Bosonique de Duffin-Kemmer-Petiaux (DKP) dans le contexte de l'algèbre de Sitter (ds) et anti-de Sitter (ads), en présence d'un champ électrique uniforme. Nous avons calculé le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes puis nous avons déduit les cas particuliers, comme le cas de l'absence de la déformation et le cas du champ électrique nul. Le dernier chapitre est consacré à un récapitulatif des principaux résultats et aux conclusions générales.

Chapitre 2

Formalisme de la Mécanique Classique et Quantique Déformé

2.1 Formalisme Classique Déformé :

Récemment, la théorie de la déformation de structure algébrique a trouvé un grand nombre d'intérêts, représenté de nombreuses applications dans le domaine de la physique. Ses racines remontent à l'incapacité de la physique classique pour expliquer certains phénomènes macroscopiques. Mathématiquement décrit par une variété de Poisson M, et notons F (M). Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g défini sur le fibré cotangent $T\ ^{*}N$ à une variété M a été découvert par Siméon Denis Poisson en 1809[27]. Lagrange et Poisson l'ont employée pour résoudre le problème de variation des constantes d'intégration. Ils n'ont considéré cependant que le crochet des fonctions coordonnées, pas celui de deux fonctions quelconques, et n'ont pas mentionné la propriété la plus importante de ce crochet : l'identité de Jacobi, découverte par Carl Gustav Jacobi [28].

Dans la mécanique classique, le crochet de Poisson est antisymétrique et vérifie l'identité de Leibniz (c'est une dérivation) et qu'il satisfait à l'identité de Jacobi et écrit dans le système de coordonnées (q, p) sous la forme suivante :

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{2.1}$$

·Antisymétrie

$$\{f,g\} = -\{g,f\} \tag{2.2}$$

·La régle de Leibniz

$$\{f,gh\} = \{f,g\}\, h + g\, \{f,h\} \tag{2.3}$$

Où, $f,\ g\ ,\ h\ \in\ C^{\infty}(M)$
·Identité de Jacobi

$$\{\{f,g\}\ ,\ h\} + \{\{g,h\}\ ,\ f\} + \{\{h,f\}\ ,\ g\} = 0 \tag{2.4}$$

Considérons le modèle Snyder-de Sitter (SdS) non relativiste à N-dimensions. Ceci est défini sur un espace de phase 2N-Dimensional avec les coordonnées de position x_i et les coordonnées de moment p_i $(i = 1, ..., N)$, nous rappelons que le modèle de Snyder, dans sa limite classique, est basé sur les crochets de Poisson non canoniques. Cette l'algèbre classique de Snyder-de Sitter est donné par les formules suivantes [29] :

$$\{x_i, x_j\} = \beta^2 J_{ij} \tag{2.5}$$

$$\{p_i, p_j\} = \alpha^2 J_{ij} \tag{2.6}$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} + \alpha^2 x_i x_j + \beta^2 p_i p_j + 2\alpha\beta p_i x_j \tag{2.7}$$

L'algèbre (2.7) est compatible avec la symétrie de Lorentz standard[5].
où J_{ij} sont des générateurs des rotations définies comme suit :

$$J_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \tag{2.8}$$

Nous notons que le signe des constantes de couplages α^2 et β^2 est positive pour modèle Snyder-de Sitter (SdS) avec un rayon de sphère est

$\frac{1}{\alpha}$, et négative pour modèle anti-Snyder-de Sitter (aSdS) pour une pseudosphère[18], la constante de couplage $\beta^2 = -\frac{1}{k^2}$, où k est énergie de Planck et $\alpha^2 = -\frac{1}{R^2}$, où R est le rayon de Sitter [5] .

Dans les unités ordinaires, $\beta \sim \hbar/cM_{Pl} \sim 10^{-17}(s/Kg)^{1/2}$ [30] .

Dans la limite $k \to \infty$ on récupère l'algèbre d'une particule libre dans l'espace de Sitter, dans la limite $\alpha \to \infty$, on récupère l'algèbre de Snyder et lorsque α et k tendent vers l'infini, on retrouve l'algèbre habituelle.

Bien entendu, ces crochets de Poisson obéissent à l'identité de Jacobi et définissent donc une structure symplectique cohérente sur l'espace des phases.

Selon ces définitions, les J_{ij} obéissent aux crochets de Poisson habituels des générateurs du groupe de rotation à N-dimensions, tandis que x_i et p_i se transforment en N-vecteurs sous le même groupe. L'invariance de rotation est donc préservée. Cependant, l'invariance en translation, générée par le p_i, est réalisée de manière non linéaire sur l'espace de position [31, 15], comme il est évident de (2.7). Dans la limite $\alpha \to 0$, l'algèbre (2.7) se réduit à celle du modèle de Snyder non relativiste ordinaire, alors que pour $\beta \to 0$, il s'agit de l'algèbre de symétrie d'une sphère avec des coordonnées projectives.

Une autre possibilité est que le signe devant les constantes de couplage soit inversé, et donc

$$\{x_i, x_j\} = -\beta^2 J_{ij} \tag{2.9}$$

$$\{p_i, p_j\} = -\alpha^2 J_{ij} \tag{2.10}$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} - \alpha^2 x_i x_j - \beta^2 p_i p_j - 2\alpha\beta p_i x_j \tag{2.11}$$

Ceci peut être vu comme une continuation analytique du modèle précédent pour $\alpha \to i\alpha$ et $\beta \to i\beta$, appelé modèle anti-Snyder-de Sitter (aSdS) dans [18]. Notez qu'il n'est pas possible de faire la suite analytique d'une seule des constantes de couplage. De plus, dans ce cas, la borne $(\alpha x_k + \beta p_k)^2 < 1$ doit être imposée dans l'espace des phases [18], par analogie avec d'autres modèles dérivés de la relativité doublement spéciale. La limite $\alpha = 0$ correspond au modèle anti-Snyder non relativiste dans un espace plat[32] , alors que $\beta = 0$ est l'algèbre de symétrie d'un espace hyperbolique.

Les crochets de Poisson peuvent être obtenus à partir de ceux du modèle de Snyder à plat, avec les variables de position x_i et les variables de moment p_i [22].

$$\{x_i, x_j\} = \beta^2 (x_i p_j - x_j p_i) \tag{2.12}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \tag{2.13}$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} + \beta^2 p_i p_j \tag{2.14}$$

La métrique de la N-sphère peut être obtenue en l'intégrant dans un espace euclidien de dimension $(N+1)$, de coordonnées X_α , avec $\alpha = 1, ..., N$, sur laquelle est imposée la contrainte $X_\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$. Si on choisit les coordonnées projectives $x_i = X_i / (\alpha X_{N+1})$ pour paramétrer la sphère, sa métrique prend la forme :

$$g_{ij} = \frac{(1 + \alpha^2 x^2)\, \delta_{ij} - \alpha^2 x_i x_j}{(1 + \alpha^2 x^2)^2} \tag{2.15}$$

avec inverse

$$g^{ij} = \left(1 + \alpha^2 x^2\right) \left(\delta^{ij} + \alpha^2 x^i x^j\right) \tag{2.16}$$

Il est facile de voir que le groupe de symétrie de cette métrique est SO (N , 1), généré par les générateurs de rotation J_{ij}, et les générateurs de translation p_i, vérifiant l'algèbre (2.11) avec $\beta = 0$. L'algèbre admet l'opérateur de Casimir $p^2 - \frac{\alpha^2}{2} J^2$.

L'action pour le modèle dynamique discuté dans [6, 31]qui donne l'algèbre de Snyder :

$$S = \int \left[\dot{x}.p - \left(\lambda_1 \frac{1}{2} p^2 + \lambda_2 x.p + \lambda_3 \frac{1}{2} x^2 \right) \right] d\tau \tag{2.17}$$

avec λ_1, λ_2 et λ_3 sont multiplicateurs de Lagrange qui imposent la contraintes.
L'Hamiltonien H et $\dot{x}$ et $\dot{p}$ sont :

$$H = \lambda_1 \frac{1}{2} p^2 + \lambda_2 x.p + \lambda_3 \frac{1}{2} x^2 \tag{2.18}$$

$$\dot{x} = \{x, H\} = \lambda_1 p + \lambda_2 x \tag{2.19}$$

$$\dot{p} = \{p, H\} = -\lambda_2 p - \lambda_3 x \tag{2.20}$$

Les crochets de Poisson pour les coordonnées polaires dans l'espace de Snyder à partir de (2.12) , (2.13) et (2.14) sont [30] :

$$\begin{aligned}
&\{\rho, p_\rho\} = 1 + \beta^2 \left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2}\right), \quad \{\theta, p_\theta\} = 1, \quad \{\rho, \theta\} = \beta^2 \frac{p_\theta}{\rho}, \quad \{\theta, p_\rho\} = \beta^2 \frac{p_\rho\ p_\theta}{\rho^2} \\
&\{t, p_t\} = -1 + \beta^2 p_t^2, \quad \{t, p_\rho\} = \beta^2 \left(p_t\ p_\rho + \frac{t p_\theta^2}{\rho^3}\right), \quad \{t, \rho\} = \beta^2 \left(t\ p_\rho - \rho\ p_t\right)\ , \\
&\{t, \theta\} = \beta^2 \frac{t\ p_\theta}{\rho^2}, \quad \{p_t, p_\rho\} = -\beta^2 \frac{p_t\ p_\theta^2}{\rho^3}, \quad \{p_t, p_\theta\} \{p_t, p_\rho\} = \{t, p_\theta\} = \{\rho, p_\rho\} = 0, \\
&\{\rho, p_t\} = \beta^2 p_t\ p_\rho, \quad \{\theta, p_t\} = \beta^2 \frac{p_t\ p_\theta}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

L'Hamiltonien est choisi comme dans la relativité restreinte

$$H = \frac{\lambda}{2} \left(-p_t^2 + p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + m^2\right) = 0 \tag{2.22}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange appliquant la contrainte de masse.

2.2 Formalisme Quantique Déformé

Dans le modéle non-relativiste de Snyder-de Sitter, l'algèbre de Heisenberg déformée est définie par les relations de commutations suivantes [22, 33] :

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \alpha_1 X_i X_j + \alpha_2 P_i P_j + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \left(X_i P_j + P_i X_j\right)\right) \tag{2.23}$$
$$[X_i, X_j] = i\hbar \alpha_2 \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [P_i, P_j] = i\hbar \alpha_1 \varepsilon_{ijk} L_k \tag{2.24}$$

où α_1, α_2 sont des petits paramètres positifs de déformation et L_k est la composante du moment cinétique, qui peut être exprimée par :

$$L_k = \varepsilon_{ijk} X_i P_j \tag{2.25}$$

On a aussi une autre formule :

$$J_{ij} = \varepsilon_{ijk} L_k = \frac{1}{2} \left(X_i P_j + P_j X_i - X_j P_i - P_i X_j \right) \tag{2.26}$$

satisfaisant l'algèbre habituelle :

$$[L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} P_k, \quad [L_i, X_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} X_k, \quad [L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k \tag{2.27}$$

Comme en mécanique quantique ordinaire, la relation de commutation (2.23) donne lieu à une relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta X_i \Delta P_j \geq \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} + \xi_{ij} + \alpha_1 \left(\Delta X_i \right)^2 + \alpha_2 \left(\Delta P_i \right)^2 - 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Delta X_i \Delta P_j \right), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.28}$$

où $\xi_{ij} = \left(\sqrt{\alpha_1} \left\langle X_i \right\rangle + \sqrt{\alpha_2} \left\langle P_j \right\rangle \right)^2 \geqslant 0$.

La relation (2.28) illustre l'apparition d'une longueur minimale non nulle en incertitudes de position et d'impulsion :

$$\left(\Delta X_i \right)_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha_2 \left(1 + \xi \right)}{1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}}, \quad \left(\Delta P_i \right)_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha_1 \left(1 + \xi \right)}{1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}} \tag{2.29}$$

Aucune incertitude minimale ne se produit lorsque α_1^2 et α_2^2 sont négatifs.

Dans ce cas, cependant une combinaison spécifique de coordonnées spatiales et cinétiques doit satisfaire une limite supérieure. Ceci peut être interprété comme le signe d'une dépendance de la géométrie à l'énergie[18] .

X_i et P_i sont réalisés dans l'espace cinétique par les transformations suivantes :

$$X_i = i\hbar\sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \partial_{p_i} + \lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{p_i}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \tag{2.30}$$

$$P_i = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \partial_{p_i} + (1 - \lambda) \frac{p_i}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \tag{2.31}$$

où p est varie dans le domaine $\left] -\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right[$ et λ est une constante réelle arbitraire.

De l'autre côté, on peut considérer les relations de commutation de Sitter qui peuvent être écrites dans la représentation de position comme suit :

$$X_i = (1-\mu)\,\frac{x_i}{\sqrt{1-\alpha_1 x^2}} - i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\sqrt{1-\alpha_1 x^2}\,\partial_{x_i} \tag{2.32}$$

$$P_i = -i\hbar\sqrt{1-\alpha_1 x^2}\,\partial_{x_i} + \mu\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{x_i}{\sqrt{1-\alpha_1 x^2}} \tag{2.33}$$

et μ ici, est un paramètre arbitraire.

Les opérateurs X_i et P_i sont symétriques pour la mesure $\frac{d^3p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p_i^2}}$,où $p_i^2 \langle \frac{1}{\alpha_2^2}$
.

Comme la relation d'incertitude de Heisenberg (2.28) représente une généralisation de la relation d'incertitude de longueur minimale avec deux paramètres de déformation, nous avons choisi de travailler dans la représentation en moment, afin de comparer notre résultats avec ceux obtenus dans la littérature.

En particulier, le modèle de Snyder peut être interprété comme un exemple de DSR [10] .Ce modèle est basé sur ces hypothèses a été appelé relativité restreinte triple (Triply special relativity TSR) [8], la (TSR) est basé sur l'algèbre générée par les positions x_μ, le moment p_μ et les générateurs de Lorentz $J_{\mu\nu}$. Les générateurs de Lorentz satisfont les relations de commutation habituelles de l'algèbre de Lorentz, selon les formules suivantes on pose $\hbar = c = 1$:

$$[J_{\mu\nu}, x_\lambda] = i\left(\eta_{\mu\lambda}x_\nu - \eta_{\nu\lambda}x_\mu\right) \tag{2.34}$$

$$[J_{\mu\nu}, p_\lambda] = i\left(\eta_{\mu\lambda}p_\nu - \eta_{\nu\lambda}p_\mu\right) \tag{2.35}$$

tandis que

$$[x_\mu, x_\nu] = i\beta^2 J_{\mu\nu} \tag{2.36}$$

$$[p_\mu, p_\nu] = i\alpha^2 J_{\mu\nu} \tag{2.37}$$

$$[x_\mu, p_\nu] = i\left[\eta_{\mu\nu} + \alpha^2 x_\mu x_\nu + \beta^2 p_\mu p_\nu + \alpha\beta\left(x_\mu p_\nu + p_\mu x_\nu - J_{\mu\nu}\right)\right] \tag{2.38}$$

μ et ν sont des paramètres prennent les valeurs 0, 1,2,3.

$J_{\mu\nu}$ et p_μ génèrent une sous-algèbre de Sitter ou anti-de Sitter (en fonction du signe de α^2) qui décrit les symétries espace-temps du modèle.

Les constantes de couplage α et β ont des dimensions inverse de longueur et inverse de masse respectivement. Ils sont généralement identifiés avec la racine carrée de la constante cosmologique, $\alpha \sim 10^{-24}$ cm, et l'inverse de la masse de Planck $\beta \sim 10^5$ g^{-1} . Dans ce qui suit, nous avons besoin $\alpha\beta \ll 1/\hbar$. La limite $\alpha \to 0$ donne le modèle de Snyder plat, et donc la limite $\beta \to 0$ donne l'algèbre de Heisenberg de la mécanique quantique dans un arrière-plan de de Sitter doté des coordonnées projectives.

La dualité du modèle d'échange de position et d'impulsion à travers $x_\mu \longleftrightarrow p_\mu$,$\alpha \longleftrightarrow \beta$ est également remarquable. De plus, comme cela a été reconnu dans[34] , la TSR peut être considéré comme une réalisation non linéaire d'un modèle introduit par Yang [35] .

Récemment, la cinématique et la dynamique du modèle de Snyder ont été étudiées dans sa version tridimensionnelle (non relativiste) pour les systèmes classiques et quantiques [32].

Les recherches ont montré que les propriétés physiques du modèle dépendent du signe de la constante de couplage apparaissant dans son algèbre. Pour une constante de couplage positif, les moments sont autorisés à prendre toute valeur réelle, mais dans la théorie quantique, une incertitude minimale existe dans les positions. Au contraire, dans le cas de la constante de couplage négatif, appelée anti-Snyder, le moment est limité, mais aucune incertitude minimale pour les positions ne se produit dans la théorie quantique[18].

Les composants de l'opérateur de moment cinétique défini comme suit :

$$L_i = i\varepsilon_{ijk} p_k \frac{\partial}{\partial p_j} \tag{2.39}$$

Les composants de l'opérateur de moment cinétique prennent la même forme que dans la représentation du moment cinétique en mécanique quantique ordinaire. Et en cas de position, les composants du moment angulaire sont données comme suit :

$$L_i = i\varepsilon_{ijk} \tilde{x}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} \tag{2.40}$$

où $\tilde{x}_j = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} p_j$

Chapitre 3

Résolution des équations de Klein-Gordon et de Dirac avec l'algèbre de Snyder-de Sitter

Il est bien connu que la théorie des champs quantiques est un point culminant indiscutable, bien que toujours en développement de la mécanique quantique et des lois de la relativité. Malgré le succès de ses prédictions expérimentales, elle doit encore faire face à des problèmes de divergence qui ne peuvent être éliminés que par une régularisation mathématique et des méthodes de renormalisation physique. Des approches ont été développées pour résoudre cette difficulté, parmi lesquelles le modèle de Snyder basé sur la géométrie non commutative. fournit un motif pour introduire une coupure efficace des ultraviolets. En plus de la constante universelle, la vitesse de la lumière, ce modèle importe deux autres constantes, l'énergie de Planck et le rayon Sitter qui est lié à la constante cosmologique [31], dont l'algèbre associée est caractérisée par une modification des relations de commutation canoniques des opérateurs de position et de moment.

Ceci implique l'apparition d'une longueur minimale non nulle dans les incertitudes de position et de moment. A l'échelle de la mécanique classique et de la mécanique quantique, un avantage particulier a été observé dans le cadre en discussion. A savoir, les équations mécaniques classiques et quantique décrivant les mouvements libres sont exactement résoluble, comme c'est aussi le cas du mouvement dans le potentiel de l'oscillateur harmonique $[18-32]$. Les symétries conformation-Poincaré déformées cohérentes avec l'espace de Snyder-de Sitter sont étudiées dans [31]. La trajectoire classique, la quantification semi-classique et le problème de Kepler sont discutés dans [23, 25]. Le cas de l'oscillateur de Dirac dans le modèle de Snyder a été étudié dans [23] et une solution exacte de l'oscillateur bosonique unidimensionnel pour les particules de spin 1 et spin 0 avec le modèle de Snyder-de Sitter est présentée par [24]. D'autre part, dans la littérature, une interaction de grande importance a trouvé de nombreuses applications dans divers domaines de la physique, qui est l'interaction du potentiel linéaire. Il a été établi pour décrire phénoménologiquement les interactions de gluons non perturbatives [36], et a joué un rôle majeur dans la description des théories des confinements entre quarks statiques dans la théorie pure de Yang-Mills [37]. En outre, il est nécessaire dans le domaine scalaire cosmologique en relativité générale et dans la théorie de Kaluza-Klein comme les cinq dimensions [38, 39] et d'une manière générale pour les phénomènes liés au confinement $[40-44]$. Le but principal dans ce chapitre est de clarifier le phénomène de confinement à travers la résolution des équations de Klein-Gordon (K-G) et de Dirac $(1+1)$ dimensionnelles avec potentiels linéaire scalaire et vectoriel dans l'espace des impulsions dans le cadre du modèle de Snyder-de Sitter déformé en premier lieu. D'autre part, nous montrerons que le problème admet des solutions analytiques exactes et qu'un potentiel linéaire unidimensionnel pour le système relativiste dans un espace déformé peut être équivalent au potentiel trigonométrique de Rosen-Morse dans un espace régulier. Ce chapitre est organisé comme suit : dans Sect. 2, nous fournissons le formalisme de la mécanique quantique dans le modèle de Snyder-de Sitter déformé dans la représentation de l'impulsion. En Sect. 3, en utilisant la représentation de l'espace de mouvement, nous résolvons exactement l'équation K-G, les spectres d'états liés sont déterminés et la fonction d'onde d'espace de mouvement correspondante est obtenue et exprimée en termes de polynômes de Romonovski. En Sect. 4, nous suivons les mêmes étapes de la section précédente, nous résolvons exactement l'équation de Dirac dans le cadre du modèle de Snyder-de Sitter déformé. Les valeurs propres d'énergie et les fonctions propres de moment correspondantes sont déterminées.

Dans cette section, on expose un bref rappel de l'algèbre de Heisenberg déformée dans le modèle de Snyder-de Sitter dont les coordonnées de position et de moment respectivement $\widehat{x}$ et $\widehat{p}$ sont définies comme suit [18, 22, 33]

$$\widehat{x} = \widehat{\chi} + \lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \widehat{\mathcal{P}} \tag{3.1}$$

$$\widehat{p} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \widehat{\chi} + (1 - \lambda) \widehat{\mathcal{P}} \tag{3.2}$$

où, $\widehat{\chi}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$ sont defіné par

$$\begin{aligned} \widehat{\chi} =& i\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \\ \widehat{\mathcal{P}} =& \frac{p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

ces opérateurs satisfie la relation de commutation deformé [18, 22, 24]

$$[x, p] = i[1 + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 p^2 + \alpha_1 \alpha_2 (xp + px)], \tag{2.4}$$

Les grendeurs Δx et Δp, sont liées entre elles par inégalité, établie par Heisenberg. pour déterminer cette relation, nous utilisons la fonction sivante :

$$\phi(x) = (x + i\kappa p)\, \psi\,(x)\,, \tag{3.5}$$

où κ est un paramètre réal.
alors

$$\langle \phi \mid \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^* \phi(x) dx, \tag{3.6}$$

on remplace la dernière relation, on obtient comme suit

$$\langle \phi \mid \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\,(x)^* \,(x - i\kappa p)\,(x + i\kappa p)\, \psi\,(x)\, d^3x, \tag{3.7}$$

après les calcule, on obtient

$$\langle \phi \mid \phi \rangle = \langle p^2 \rangle \kappa^2 + i \langle [x, p] \rangle \kappa + \langle x^2 \rangle \tag{3.8}$$

La relation de commutation (3.4) donne l'incertitude de la relation de Heisenberg à l'apparition d'une longueur minimale non nulle dans les incertitudes de position et de moment comme la forme suivante [22] :

nous avons la dernière relation, est une équation de deuxième dégré, quand je résoudrs l'équation suivante :

$$\langle p^2\rangle\kappa^2 + i\langle[x,p]\rangle\kappa + \langle x^2\rangle = 0 \tag{3.9}$$

on a trois cas, selon la signe de déscriminant delta (Δ)

$\Delta\langle 0$ (n'y a pas des solutions), $\Delta = 0$ (il y a des racines sont doublés et réales), $\Delta\rangle 0$ (on a deux racines sont complexes conjuguées), l'incertitude de la relation de Heisenberg est réalisé pour le premier cas, où $\Delta\langle 0$, la relation obtenue être comme suit :

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{1}{2}(1+(\alpha_1\langle x\rangle+\alpha_2\langle p\rangle)^2+\alpha_1^2(\Delta x)^2+\alpha_2^2(\Delta p)^2-2\alpha_1\alpha_2\Delta x\Delta p), \tag{3.10}$$

où α et β sont deux constantes de couplage et nous distinguons deux types de sous-algèbre. Lorsque $\alpha^2 > 0$, et $\beta^2 > 0$, cette algèbre déformée est caractérisée par l'existence à la fois d'une longueur minimale et d'un moment minimal et s'appelle modèle de Snyder-de Sitter (SdS)) et pour $\alpha^2 < 0$,et $\beta^2 < 0$, elle est appelée modèle anti-Snyder-de Sitter (aSdS) et aucune restriction[3].

3.1 Resolution de l'équation de Klein-Gordon avec modèle de Snyder-de Sitter

La dynamique de la particule de Klein-Gordon en (1 + 1) dimension sans spin de masse m, en présence d'un potentiel scalaire S (x) et d'un potentiel vectoriel V (x) dans le cadre du modèle de Snyder-de Sitter est régie par cette équation : on met $\hbar$ = c = 1

$$\left[p^2 + (m + S(x))^2\right]\psi = \left[E - V(x)\right]^2\psi, \tag{3.11}$$

où le potentiel scalaire $S(x)$ et vectoriel $V(x)$ sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} S(x) =& \gamma\widehat{x} \\ V(x) =& \mu\widehat{x}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous remplaçons $S(x)$ et $V(x)$ dans l'équation de Klein-Gordon, nous obtenons sur l'expression suivante :

$$\left[p^2 + (m + \gamma\ \hat{\chi} + \gamma\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\hat{\mathcal{P}})^2\right]\psi = \left[E - \mu\hat{\chi} - \mu\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\hat{\mathcal{P}}\right]^2\psi, \tag{3.13}$$

nous calculons $p^2\psi$ comme suit :
nous avous :

$$p^2\psi = p.(p\psi) = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\hat{\chi} + (1-\lambda)\,\hat{\mathcal{P}}\right).\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\hat{\chi}\psi + (1-\lambda)\,\hat{\mathcal{P}}\psi\right) \tag{3.14}$$

après les calculs directs, nous obtenons sur l'expression suivante :

$$p^2\psi = \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\hat{\chi}^2 + (1-\lambda)^2\,\hat{\mathcal{P}}^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,(1-\lambda)\left(\hat{\chi}\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right)\right)\psi \tag{3.15}$$

et ainsi que on a :

$$\left[m + \gamma\ \hat{\chi} + \gamma\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\hat{\mathcal{P}}\right]^2\psi = \left[\begin{array}{c} \gamma^2\hat{\chi}^2 + \gamma^2\lambda^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\hat{\mathcal{P}}^2 + \gamma^2\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\hat{\chi}\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right) + \\ +2m\gamma\chi + 2m\gamma\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\hat{\mathcal{P}} + m^2 \end{array}\right]\psi \tag{3.16}$$

et pour l'autre terme on a :

$$\left[E - \mu\ \hat{\chi} - \mu\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\hat{\mathcal{P}}\right]^2\psi = \left[\begin{array}{c} \mu^2\hat{\chi}^2 + \mu^2\lambda^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\hat{\mathcal{P}}^2 + \mu^2\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\hat{\chi}\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right) \\ -2\mu E\hat{\chi} - 2\mu E\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\hat{\mathcal{P}} + E^2 \end{array}\right]\psi \tag{3.17}$$

on remplace les relations (3.15), (3.16), (3.17) dans l'équation (3.13), on obtien la relation suivante :

$$\begin{aligned}&\big[(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \gamma^2 - \mu^2)\widehat{\chi}^2 + ((1-\lambda)^2 + \lambda^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(\gamma^2 - \mu^2))\widehat{\mathcal{P}}^2 + \big(\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\gamma^2 - \mu^2)) - \\ &\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\lambda)\big)(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi}) + 2(m\gamma + \mu E)\widehat{\chi} + 2\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m\gamma + \mu E)\widehat{\mathcal{P}} + \\ &m^2 - E^2\big]\psi(p) = 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Afin de réduire l'équation différentielle (3.18) à une forme plus simple et de préserver la symétrie des opérateurs, pour éviter les valeurs propres complexes, on élimine le terme $(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi})$ par la fixation de la valeur du paramètre λ comme suit :

on pose

$$\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\gamma^2-\mu^2\right)-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\lambda)=0 \tag{3.19}$$

pour cela, on trouve la relation suivante :

$$\lambda=\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}, \tag{3.20}$$

avec $\alpha_1^2+\alpha_2^2\gamma^2\neq\alpha_2^2\mu^2$.

nous utilisons la relation (3.20), la dernière équation eq. (3.18) dans l'espace d'impulsion sa devient,

$$\begin{aligned}&\big[(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\gamma^2-\mu^2)\widehat{\chi}^2+((1-\lambda)^2+\lambda^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(\gamma^2-\mu^2))\widehat{\mathcal{P}}^2\\&+2(m\gamma+\mu E)\widehat{\chi}+2\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m\gamma+\mu E)\widehat{\mathcal{P}}\\&+m^2-E^2\big]\psi(p)=0.\end{aligned} \tag{3.21}$$

on a

$$(1-\lambda)^2+\lambda^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\left(\gamma^2-\mu^2\right)=\frac{\alpha_2^2\left(\gamma^2-\mu^2\right)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} \tag{3.22}$$

et aussi

$$2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda=2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} \tag{3.23}$$

nous remplacons les relations (3.22) et (3.23) dans l'équation (3.21) ,cette equation se obtient :

$$
\begin{aligned}
&\big[(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\gamma^2-\mu^2)\widehat{\chi}^2+\frac{\alpha_2^2\,(\gamma^2-\mu^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\widehat{\mathcal{P}}^2\\
&+2(m\gamma+\mu E)\widehat{\chi}+2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}(m\gamma+\mu E)\widehat{\mathcal{P}}\\
&+m^2-E^2\big]\psi(p)=0.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

nous utilisons la relation (3.3), on trouve

$$
\chi^2\psi=\chi.\left(\chi\psi\right)=\left(i\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\frac{d}{dp}\right)\left(i\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\frac{d\psi}{dp}\right)
\tag{3.25}
$$

après les calcules, nous trouvons comme suit :

$$
\chi^2\psi=\chi.\left(\chi\psi\right)=-\left(1-\alpha_2^2p^2\right)\frac{d^2\psi}{dp^2}+\alpha_2^2p\frac{d\psi}{dp}
\tag{3.26}
$$

et ainsi que :

$$
\widehat{\mathcal{P}}^2\psi=\widehat{\mathcal{P}}.\left(\widehat{\mathcal{P}}\psi\right)=\frac{p^2}{1-\alpha_2^2p^2}\psi
\tag{3.27}
$$

nous remplacons les relation (3.3), (3.25), et (3.26) dans l'équation (3.24), on obtien la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
&\big[\frac{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}{\alpha_2^2}(1-\alpha_2^2p^2)\frac{d^2}{dp^2}+\big(\,[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]\,p+\\
&2i(m\gamma+\mu E)\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\big)\frac{d}{dp}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\frac{p^2}{1-\alpha_2^2p^2}+\\
&2\frac{\alpha_1\alpha_2(m\gamma+\mu E)}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}+m^2-E^2\big]\psi(p)=0.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

on a une forme simplifiée, maintenant en introduisant le changement du variable suivant :

$$
q=-\frac{1}{\alpha_2}\cos^{-1}(\alpha_2p),
\tag{3.29}
$$

pour ce changement, nous obtenons sur l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
&\big[-\frac{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}{\alpha_2^2}\frac{d^2}{dq^2}+2i(m\gamma+\mu E)\frac{d}{dq}+\\
&\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\cot^2(\alpha_2 q)+\frac{2\alpha_1(m\gamma+\mu E)}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\cot(\alpha_2 q)+\\
&m^2-E^2\big]\psi(q)=0,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où l'intervalle de nouveau changement variable est : $q \in]-\propto, +\propto[$.

Pour éliminer la première dérivée, on joue le rôle d'une phase, donc nous faisons cette substitution,

$$\psi(q)=f(q)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big) \tag{3.31}$$

pour ce changement, on besoin les calcules suivantes :

pour la première dérivée on a :

$$\begin{aligned}
&2i\,(m\gamma+\mu E)\,\frac{d}{dq}\left[f(q)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big)\right]=\\
&2i\,(m\gamma+\mu E)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big)\frac{df(q)}{dq}\\
&-\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}f\,(q)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

pour la deuxième dérivée on a :

$$\begin{aligned}
&-\frac{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}{\alpha_2^2}\frac{d^2}{dq^2}\left[f(q)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big)\right]=\\
&-2i\,(m\gamma+\mu E)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big)\frac{df(q)}{dq}\\
&+\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}f\,(q)\exp\big(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\big)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

maintenant on remplace les relations (3.32) et (3.33) dans l'equation différentielle (3.30) on obtient sur l'équation suivante en fonction de $f(q)$,

$$\Big[-\frac{d^2}{dq^2}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot^2(\alpha_2 q)+2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2 q)$$
$$-\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\Big]f(q)=0, \tag{3.34}$$

nous avons :

$$\cot^2(\alpha_2 q)=\frac{1}{\sin^2(\alpha_2 q)}-1=csc^2(\alpha_2 q)-1 \tag{3.35}$$

quand nous remplacons la relation (3.35) dans l'équation différentielle (3.34) , on obtien la forme en fonction $csc^2(\alpha_2 q)$ et $\cot(\alpha_2 q)$, comme suit

$$\Big[\frac{d^2}{dq^2}-\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}csc^2(\alpha_2 q)-2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2 q)$$
$$+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}-\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\Big]f(q)=0, \tag{3.36}$$

la dernière équation qui peut être mis sous forme d'équation de type Schrödinger, avec un potentiel trigonométrique de Rosen-Morse sous forme suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dq^2}-A_1 csc^2(\alpha_2 q)-D\cot(\alpha_2 q)+\epsilon\right]f(q)=0, \tag{3.37}$$

cette équation est exprimé des termes de $csc^2(\alpha_2 q)$ et A_1, D et ϵ , qui sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} \\ D &= \frac{2\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\epsilon=\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}-\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}. \quad (3.39)$$

Maintenant, pour résoudre l'équation ci-dessus eq. (3.37), nous utilisons l'expression suivante,

$$f\left(q\right)=(1+y^2)^{(\beta-1)}\Big(\exp(-\alpha\cot^{-1}(y))\Big)g(y), \quad (3.40)$$

où $y=\cot(\alpha_2 q)$, les paramètres α et β sera déterminé plus tard.

par manière de la substitution donnée par l'équation (3.40), l'équation différentielle (3.37) pour $g(y)$ réduira aux polynômes de Romanovski $R_n^{(k,l)}(y)$,

$$\begin{aligned}&\Big[(1+y^2)\frac{d^2}{dy^2}+2\Big((2\beta-1)y+\alpha\Big)\frac{d}{dy}+\\&\frac{\Big(\alpha^2-4(\beta-1)^2+\frac{\epsilon}{\alpha_2^2}\Big)+\Big(4\alpha(\beta-1)-\frac{D}{\alpha_2^2}\Big)y}{1+y^2}+\\&4(\beta-1)^2+2(\beta-1)-\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\Big]g(y)=0.\end{aligned} \quad (3.41)$$

Comme il est bien connu dans la littérature, il existe une méthode appelée Sturm-Liouville pour résoudre des équations différentielles de second ordre, qui est utilisée par plusieurs auteurs [45]. De sorte que notre équation différentielle (3.41) coïncide avec celle vérifiant les polynômes de Romanovski $R_n^{(k,l)}(y)$ [46] , où $k=2-2\beta$, et $l=2\alpha$.

$$S_1(y)\frac{d^2R_n^{(k,l)}(y)}{dy^2}+t(y)\frac{dR_n^{(k,l)}(y)}{dy}+\Omega_n R_n^{(k,l)}(y)=0, \quad (3.42)$$

où

$$S_1(y)=1+y^2,\ \ t(y)=2\Big((2\beta-1)y+\alpha\Big). \quad (3.43)$$

Il est maintenant facilement de fixer les paramètres α et β dans les conditions suivantes,

$$4\alpha(\beta-1)-\frac{D}{\alpha_2^2}=0 \quad (3.44)$$

$$\alpha^2-4(\beta-1)^2+\frac{\epsilon}{\alpha_2^2}=0 \quad (3.45)$$

et

$$\Omega_n = -n\Big[\frac{dt(y)}{dy} + \frac{1}{2}(n-1)\frac{d^2S_1(y)}{dy^2}\Big] =$$
$$4(\beta-1)^2 + 2(\beta-1) - \frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}. \qquad (3.46)$$

on a :

$$\frac{d^2S_1(y)}{dy^2} = 2, \text{ et } \frac{dt(y)}{dy} = 2(2\beta-1) \qquad (3.47)$$

Après un calcul simple, en utilisant les relations (3.43) et (3.46) , nous trouvons

$$\beta_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1+4\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}} \qquad (3.48)$$

$$\alpha_n = \frac{2\alpha_1(m\gamma+\mu E_n)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2\left[-2n-1\pm\sqrt{1+4\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}}\right]}, \qquad (3.49)$$

en imposant $\mu^2-\gamma^2 \leq \frac{1}{4}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2$ pour éviter les valeurs propres complexes.

Pour déterminer les expressions du spectre d'énergie et la fonction d'onde, nous utilisons les relations (3.39) et (3.45), on a ,

$$\epsilon = \frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} + \frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} - \frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]} =$$
$$\alpha_2^2\left[4(\beta-1)^2-\alpha^2\right] \qquad (3.50)$$

Après les calcules nous obtonons sur la forme de la relation de l'énergie en fonction de θ_n et β_n comme suivante :

$$
\begin{aligned}
E_n^{\pm} &= -\frac{m\gamma\mu\theta_n}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)+\mu^2\theta_n} \\
&\pm \frac{m\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]+\mu^2\theta_n}\Big[\frac{\gamma^2\mu^2(\theta_n)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}- \\
&\Big(1+\frac{\mu^2\theta_n}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\Big)\Big(\frac{\gamma^2\theta_n}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}+\frac{\gamma^2-\mu^2}{m^2\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}- \\
&\frac{4\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right](\beta_n-1)^2}{m^2}-1\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

où

$$
\theta_n = \alpha_2^2 + \frac{\alpha_1^2}{4\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2(\beta_n-1)^2}. \tag{3.52}
$$

Maintenant, la forme du spectre d'énergie, on peut l'avoir tester ; en utilisant la limite $\alpha_1 \to 0$, alors : $\theta_n = \alpha_2^2$, et, $\beta_n = -\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_2^4(\gamma^2-\mu^2)}}$. Nous obtenons le même résultat de l'équation de Klein-Gordon avec la présence d'une longueur minimale [42] [43],

$$
\lim_{\alpha_1\to 0} E_n^{\pm} = -\frac{m\mu}{\gamma}\pm\frac{\gamma^2-\mu^2}{\gamma}\sqrt{\alpha_2^2(n^2+n+\frac{1}{2})\pm\alpha_2^2(n+\frac{1}{2})\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_2^4(\gamma^2-\mu^2)}}}, \tag{3.53}
$$

et quand nous étudions la limite $\alpha_2 \to 0$, on obtient :

$$
\lim_{\alpha_2\to 0}\left(\lim_{\alpha_1\to 0} E_n^{+}\right) = -\frac{m\mu}{\gamma} \pm \frac{(\gamma^2-\mu^2)^{\frac{3}{4}}}{\gamma}\sqrt{2n+1}, \tag{3.54}
$$

ce resultat coïncide exactement avec le résultat de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vectoriel dans un espace régulier par [40] .

par les relations (3.31) et (3.40), nous aurons la forme finale de la fonction d'onde dans la première variable p comme suit :

$$\psi(q) = f(q)\exp\left(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)]}\right)\right) \tag{3.55}$$

$$\text{où } f(q) = (1+y^2)^{(\beta-1)}\Big(\exp(-\alpha\cot^{-1}(y))\Big)g(y), \tag{3.56}$$

après les calcules, on obtien sur la forme de la fonction d'onde en fonction de polynômes de Romanovski comme suivante :

$$\begin{gathered}\psi_n(p) = C_n\Big(1-\alpha_2^2p^2\Big)^{(1-\beta_n)}\times \\ \Big[\exp\Big(\alpha_n - i\frac{(m\gamma+\mu E_n)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Big)\cos^{-1}(\alpha_2 p)\Big]R_n^{(k_n,l_n)}\Big(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\Big)\end{gathered} \tag{3.57}$$

où C_n est la constante de normalisation.

Pour déterminer C_n , nous utilisons la condition de normalisation

$$\int_{-\frac{1}{\alpha_2}}^{+\frac{1}{\alpha_2}} \frac{dp}{\sqrt[2]{1-\alpha_2^2P^2}}\psi_n^*(p)\,\psi_n(p) = 1, \tag{3.58}$$

maintenant, on remplace $\psi_n(p)$ et $\psi_n^*(p)$ dans la relation (3.58), puis on change le variable comme suit :

$$q = \frac{\alpha_2 p}{\sqrt[2]{1-\alpha_2^2P^2}} \tag{3.59}$$

nous utilisons la relation d'orthogonalité des polynômes de Romanovski [46],

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(k_n,l_n)}(x)\,R_m^{(k_n,l_n)}(x)\,R_n^{(k_n,l_n)}(x)\,dx = \delta_{mn}, \tag{3.60}$$

où la fonction de poids $w^{(k_n,l_n)}(x)$ est donné comme suit :

$$w^{(k_n,l_n)}(x) = \left(1+x^2\right)^{-k_n}\exp(l_n tg^{-1}(x)). \tag{3.61}$$

Après des calculdes, et changements des variables, nous trouvons :

$$C_n = \sqrt{\alpha_2} \tag{3.62}$$

3.2 Resolution de l'équation de Dirac avec modèle de Snyder-de Sitter

Dans cette section, nous suivons les mêmes étapes que le premier cas sans spin pour examiner l'équation de Dirac (1+1)-dimensionnelle avec le potentiel scalaire $S(x)$ et vectoriel $V(x)$ sont linéaires, dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter, nous considérons l'équation de Dirac défini comme suit, (on pose $\hbar = c = 1$),

$$[(E - V(x)) - \sigma_2 p - \sigma_3 (m + S(x))] \psi = 0, \tag{3.63}$$

où, nous avons remplacé les matrices de Dirac par les matrices de Pauli σ_2 et σ_3 sont données par

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

Pour résoudre l'équation de Dirac, nous utilisons l'expréssion suivante :

$$\psi = \Big\{ (E - V(x)) + \sigma_2 p + \sigma_3 \Big[m + S(x) \Big] \Big\} \phi. \tag{3.65}$$

Par un calcul direct, à partir des relations (3.63) et (3.65), nous trouvons l'équation de Dirac avec sa forme quadratique,

$$\Big\{ \Big[E - V(x) \Big]^2 - p^2 - \Big[m + S(x) \Big]^2 + \Big[p, \sigma_3 S(x) + V(x) \Big] \sigma_2 \Big\} \phi = 0 \tag{3.66}$$

qui est similaire à celle de l'équation de Klein-Gordon avec un terme d'interaction de spin supplémentaire et $\Big[p, \sigma_3 S(x) + V(x) \Big]$ est le commutateur entre p et $(\sigma_3 S(x) + V(x))$.

Pour résoudre eq.(3.66), nous utilisons les relations (3.1) , (3.2) et (3.12), alors l'équation (3.66) sera convertie en :

$$\begin{aligned} &\Big\{ (\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \gamma^2 - \mu^2) \widehat{\chi}^2 + \Big((1-\lambda)^2 + \lambda^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} (\gamma^2 - \mu^2) \Big) \widehat{\mathcal{P}}^2 + \\ &\Big(\lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\gamma^2 - \mu^2) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1-\lambda) \Big) \Big(\widehat{\chi} \widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}} \widehat{\chi} \Big) + 2(m\gamma + \mu E) \widehat{\chi} + \\ &2\lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (m\gamma + \mu E) \widehat{\mathcal{P}} + \frac{i(\gamma\sigma_3 + \mu)\sigma_2}{1 - \alpha_2^2 p^2} + m^2 - E^2 \Big\} \phi = 0. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Nous imposons une condition pour éliminer le terme $(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi})$ qui fixe la valeur du paramètre arbitraire λ comme indiqué dans la section précédente, nous trouvons la même valeur que celle de l'équation (3.21), et l'équation (3.67) aura ce formulaire :

$$\begin{aligned}&\Big[-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\alpha_2^2}(1-\alpha_2^2p^2)\frac{d^2}{dp^2}+\\&\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)p+2i(m\gamma+\mu E)\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\right)\frac{d}{dp}\\&+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\frac{p^2}{1-\alpha_2^2p^2}+2\frac{\alpha_1\alpha_2(m\gamma+\mu E)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\\&+\frac{i(\gamma\sigma_3+\mu)\sigma_2}{1-\alpha_2^2p^2}+m^2-E^2\Big]\phi(p)=0.\end{aligned}\tag{3.68}$$

En utilisant l'ancien changement de variable eq.(3.31), on a la transformation suivante

$$\phi(q)=\xi(q)\exp\left(i\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\right),\tag{3.69}$$

L'équation(3.68) devient,

$$\begin{aligned}&\Big[-\frac{d^2}{dq^2}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot^2(\alpha_2q)+2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2q)\\&+\frac{i\alpha_2^2(\gamma\sigma_3+\mu)\sigma_2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]\sin^2(\alpha_2q)}-\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\\&\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Big]\xi(q)=0,\end{aligned}\tag{3.70}$$

et qui peut être exprimé en termes de $csc(\alpha_2q)$

$$\begin{aligned}&\Big[-\frac{d^2}{dq^2}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}csc^2(\alpha_2q)\\&+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\sqrt{\gamma^2-\mu^2}\csc^2(\alpha_2q)\Sigma+2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2q)\\&-\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}-\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Big]\xi(q)=0\end{aligned}\tag{3.71}$$

où Σ est la matrice donnée par $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma+\mu}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}} \\ \frac{\gamma-\mu}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}} & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres de la matrice sont $\sigma^{\pm} = \pm 1$.

Pour résoudre l'équation (3.71), nous posons la solution comme suit :

$$\xi(q) = u_\sigma \eta_\sigma(q) \tag{3.72}$$

où u_σ est un vecteur propre à deux composantes de la matrice Σ avec la valeur propre σ,

nous avons les valeurs propres σ^+, σ^- et les vecteurs propres correspendants V_1 et V_1 respectivement, sont données comme suit :

$$\sigma^+ = +1 \text{ et } V_1 = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma-\mu}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}} \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

$$\sigma^- = -1 \text{ et } V_2 = K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{(\gamma-\mu)}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}} \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

où, K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires.

pour utiliser les relations (3.71), (3.72) on obtient sur l'équation différentielle suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} - A_2 csc^2(\alpha_2 q) - D\cot(\alpha_2 q) + \epsilon\right]\eta_\sigma(q) = 0, \tag{3.75}$$

où

$$A_2 = \frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} + \sigma\frac{\alpha_2^2\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} \tag{3.76}$$

$$D = \frac{2\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma + \mu E)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} \tag{3.77}$$

et

$$\epsilon = \frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} + \frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} - \frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}. \tag{3.78}$$

Cette dernière équation (3.75) a la même forme que (3.37) sauf que A_1 est transformé au A_2 , pour cela nous suivons les mêmes étapes que celle de Klein-Gordon et par un calcul direct, nous obtenons l'expression de l'énergie comme suit :

$$E_n^{\pm} = -\frac{m\gamma\mu\pi_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2) + \mu^2\pi_n} \pm \frac{m\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2) + \mu^2\pi_n}\Big[\frac{\gamma^2\mu^2(\pi_n)^2}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} - \Big(1 + \frac{\mu^2\pi_n}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\Big) \Big(\frac{\gamma^2\pi_n}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]} + \frac{\gamma^2-\mu^2}{m^2\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]} - \frac{4\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right](\tau_n-1)^2}{m^2} - 1\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.79}$$

où

$$\tau_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1 + 4\left[\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} + \sigma\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\right]}, \tag{3.80}$$

qui peut être écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$\tau_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{\sigma}{4} \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} \tag{3.81}$$

et

$$\rho_n = \frac{2\alpha_1(m\gamma + \mu E_n)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2\left(-2n - 1 \pm \sqrt{1 + 4\left[\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} + \sigma\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\right]}\right)} \tag{3.82}$$

$$\pi_n = \alpha_2^2 + \frac{\alpha_1^2}{4\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2(\tau_n-1)^2}. \tag{3.83}$$

au ce niveau, on peut étudier les cas limites, pour $\alpha_1 \to 0$, on a : $\pi_n = \alpha_2^2$,et $\tau_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{\sigma}{4} \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}$, nous trouvons le même résultat dans le cas de longueur minimale pour l'équation de Dirac [47] , où :

$$\lim_{\alpha_1\to 0} E_n^{\pm} = -\frac{m\mu}{\gamma} \pm \frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)^2 n^2 \pm 2(\gamma^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}} n}, \tag{3.84}$$

et aussi, quand $\alpha_2 \to 0$, on obtient :

$$\lim_{\alpha_2\to 0}\left(\lim_{\alpha_1\to 0} E_n^+\right) = -\frac{m\mu}{\gamma} \pm \frac{1}{\gamma}\sqrt{2(\gamma^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}n}, \tag{3.85}$$

qui est le même résultat dans le cas ordinaire [48].

De la même manière que dans la section précédente, nous pouvons déterminer la solution de l'équation (3.68) comme suit :

$$\begin{aligned}\phi_n(p) = u_\sigma\Big(1-\alpha_2^2p^2\Big)^{(1-\tau_n)}\Big[exp\Big(i\frac{\alpha_2(m\gamma+\mu E_n)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\\ -\rho_n\Big)\cot^{-1}\big(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\big)\Big]\times R_n^{(k_n,l_n)}\big(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\big).\end{aligned} \tag{3.86}$$

Pour déduire l'expression du spineur des états-liés, on utilise les relations (3.65) et (3.86), et par un calcul direct, on obtient la solution finale en terme de l'ancienne variable (p) sous forme condensée,

$$\begin{aligned}(\psi_{n\sigma}^1)(p) = C_n'\Big\{\Big[-\sigma\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{(\gamma-\mu)}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}+i(\gamma-\mu)\Big]\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\frac{d}{dp}\\ +\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Big[\alpha_1\alpha_2(\gamma-\mu)-\sigma i\alpha_2^2(\gamma-\mu)\sqrt{\gamma^2-\mu^2}\Big]\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\\ +m+E_n\Big\}Q_n(p),\end{aligned} \tag{3.87}$$

et

$$\begin{aligned}(\psi_{n\sigma}^2)(p) = C_n'\Big\{\Big[\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\sigma i\sqrt{\gamma^2-\mu^2}\Big]\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\frac{d}{dp}\\ -\sigma\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Big[\alpha_1\alpha_2\sqrt{\gamma^2-\mu^2}+i\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\Big]\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}+\\ \frac{(\gamma-\mu)}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}(E_n-m)\Big\}Q_n(p),\end{aligned} \tag{3.88}$$

où

$$Q_n(p) = \left(1-\alpha_2^2 p^2\right)^{(1-\tau_n)} \left[exp\left(i\frac{\alpha_2(m\gamma+\mu E_n)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} - \rho_n\right)\cot^{-1}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right)\right]\times$$
$$R_n^{(k_n,l_n)}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right), \tag{3.89}$$

et $C_n^{'}$ est la constante de normalisation.

nous notons qu'il est également possible d'étudier le même problème dans l'espace de position, en utilisant ces relations suivantes,

$$X = (1-\nu)\frac{x}{\sqrt{1-\alpha_1 x^2}} - i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\sqrt{1-\alpha_1 x^2}\partial_x, \tag{3.90}$$

$$P = -i\hbar\sqrt{1-\alpha_1 x^2}\partial_x + \nu\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{x}{\sqrt{1-\alpha_1 x^2}}, \tag{3.91}$$

où ν est un paramètre arbitraire , car il est également possible de généraliser ce travail dans les cas à deux et trois dimensions en introduisant les formes généralisées suivantes [18],

$$\widehat{x}_i = \widehat{\chi}_i + \lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\widehat{\mathcal{P}}_i \tag{3.92}$$

$$\widehat{p}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\widehat{\chi}_i + (1-\lambda)\widehat{\mathcal{P}}_i, \tag{3.93}$$

où $\widehat{\chi}_i$ et $\widehat{\mathcal{P}}_i$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_i =& i\sqrt{1-\alpha_2^2 p_k^2}\frac{\partial}{\partial p_i} \\ \widehat{\mathcal{P}}_i =& \frac{p_i}{\sqrt{1-\alpha_2^2p_k^2}}, \end{aligned}. \tag{3.94}$$

seule la situation de ce domaine en trois dimensions peut sembler un peu compliquée, car en plus du terme centrifuge du moment orbital et du couplage spin-orbite pour le cas du système spineur, il existe des corrections d'interaction supplémentaires qui dépendent de la déformation les paramètres α_1 et α_2 , qui pourraient être interprétés comme une interaction du moment dipolaire électrique avec le moment magnétique et rendant les calculs si excessivement difficiles.

Dans ce travail, nous avons démontré un calcul explicite des équations relativistes de Klein-Gordon et Dirac soumises à des potentiels vectoriels et scalaires linéaires dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter déformé en utilisant la représentation de l'espace de moment. En utilisant certaines transformations, nous avons montré qu'un potentiel linéaire unidimensionnel pour le système relativiste dans un espace déformé peut être équivalent au potentiel de Rosen-Morse trigonométrique dans un espace régulier. Ces transformations utilisées ici sont exactement semblables à celles utilisées en relativité générale, en opposition à une transformation galiléenne additive qui peut être interprétée comme un opérateur de traduction non additif responsable de la dilatation et de la contraction [49] .

Dans les deux cas, il est montré que le problème admet des solutions analytiques exactes exprimées en termes de polynômes de Romanovski. Le spectre d'énergie exact est déterminé en fonction de deux paramètres de déformation $\alpha_1$et α_2 , et il varie directement avec les puissances dans n, qui explique le phénomène de confinement dans notre étude dans le cadre du modèle de Snyder-de Sitter déformé, comme dans le cas non commutatif. Les cas limites pour $\alpha_1 \to 0$ et $\alpha_2 \to 0$ sont étudiés et les résultats obtenus sont en parfait accord avec ceux de la littérature.

Enfin, il serait intéressant d'étudier la généralisation de notre étude pour le cas de deux et trois dimensions, comme le cas du champ électromagnétique à potentiel scalaire confinant. Ce travail est actuellement en cours.

En général, par l'équation hypergéométrique généralisée suivante,

$$\left(ax^2+bx+c\right)\frac{d^2y_n\left(x\right)}{dx^2}+\left(dx+e\right)\frac{dy_n\left(x\right)}{dx}-\left(n\left(n-1\right)+2n\left(p-1\right)\right)y_n\left(x\right)=0 \tag{3.95}$$

on pose

$a=c=1$, $b=0$, $d=2\left(1-p\right)$ et $e=q$, on obtient les polynômes de Romanovski $R_n^{(p,q)}\left(x\right)$, l'équation différentielle comme [50]

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2R_n^{(p,q)}\left(x\right)}{dx^2}+\left(2\left(-p+1\right)x+q\right)\frac{dR_n^{(p,q)}\left(x\right)}{dx}-\left(n\left(n-1\right)+2n\left(1-p\right)\right)R_n^{(p,q)}\left(x\right)=0 \tag{3.96}$$

et la correspondance avec la représentation de Rodrigues est donnée par,

$$R_n^{(p,q)}(x) = \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(1+x^2\right)^n w(x)\right) \tag{3.97}$$

avec la fonction de poids $w(x)$ est

$$w(x) = \left(1+x^2\right)^{-p}\exp\left(q\tan^{-1}(x)\right) \tag{3.98}$$

Nous avons aussi l'équation différentielle vérifiée par les polynômes de Jacobi $P_n^{(u,v)}(x)$ comme suit :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_n^{(u,v)}(x)}{dx^2}+(u-v-(u+v+2)\,x)\frac{dP_n^{(u,v)}(x)}{dx}-(n+u+v+1)\,P_n^{(u,v)}(x)=0 \tag{3.99}$$

Par la complexification de l'argument, $x \to ix$ dans Eq.(3.99), et comparons les deux équations, nous en déduisons les paramètres suivants.

$$u = -p - i\frac{q}{2} \ \ , \ v = u^* \tag{3.100}$$

et la relation entre les polynômes de Romanovski et les polynômes de Jacobi complexes, diffère au plus par un facteur de phase, comme suit :

$$R_n^{(p,q)}(x) = i^n P_n^{\left(-p-i\frac{q}{2},-p+i\frac{q}{2}\right)}(ix) \tag{3.101}$$

ou par la façon inverse

$$P_n^{(p,q)}(x) = -\left(i^n\right) R_n^{\left(i(p-q),\frac{1}{2}(p+q)+1\right)}(ix) \tag{3.102}$$

Maintenant, nous utilisons cette relation entre les polynômes de Jacobi $P_n^{(u,v)}(ix)$ et la fonction hypergéométrique F comme la forme suivante [51] :

$$P_n^{(u,v)}(ix) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(v+2)}{\Gamma(v-n+2)}F\left(-n, n+1+2\operatorname{Re}v; 1+v; \frac{1+ix}{2}\right) \tag{3.103}$$

on obtient cette nouvelle relation :

$$R_n^{(p,q)}(x) = \frac{(-i)^n}{n!}\frac{\Gamma\left(-p+i\frac{q}{2}+2\right)}{\Gamma\left(-p+i\frac{q}{2}-n+2\right)}F\left(-n, n+1-2p; 1-p+i\frac{q}{2}; \frac{1+ix}{2}\right) \tag{3.104}$$

Chapitre 4

Oscillateurs Klein-Gordon et Dirac avec le modèle de Snyder généralisé

En général, la dynamique de certains systèmes physiques est modélisée par des algèbres déformées, par exemple, la description des excitations de graphène à basse énergie et la vitesse de Fermi est basée sur une déformation de l'algèbre de Heisenberg qui rend le collecteur de moment proportionnel au pseudo-spin [52]. La dynamique des systèmes à masses variables dans les hétérostructures semiconductrices est formulée par l'algèbre quadratique déformée [53], il y a aussi le mouvement d'un atome d'impureté ^{3}He dans le liquide de Bose, où une algèbre de Heisenberg déformée est suggérée [54]. et dans le contexte de la gravitation quantique, les algèbres de Heisenberg généralisées ont été proposées [55, 56] ...etc.

En outre, au cours des dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour étudier certains problèmes de mécanique quantique dans le contexte du modèle Snyder-de Sitter. Ce modèle est caractérisé par une modification des relations de commutation canoniques des opérateurs de position et de moment, ce qui implique l'apparition d'une longueur minimale non nulle dans les incertitudes de position et de moment.

L'opérateur des coordonnées de position $\hat{x}$ et l'opérateur des coordonnées d'impulsion $\hat{p}$ sont définis comme suit [18][22]

$$\widehat{x} = \widehat{\chi} + \lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \widehat{\mathcal{P}} \tag{4.1}$$

$$\widehat{p} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \widehat{\chi} + (1-\lambda) \widehat{\mathcal{P}} \tag{4.2}$$

où, $\widehat{\chi}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$ sont définis par

$$\begin{cases} \widehat{\chi} = i\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}\frac{\partial}{\partial p} \\ \widehat{\mathcal{P}} = \frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}} \end{cases} \tag{4.3}$$

et λ est un paramètre arbitraire.

Ces opérateurs satisfont la relation de commutation déformée dans une dimension [18][22]

$$[x, p] = i[1 + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 p^2 + \alpha_1 \alpha_2 (xp + px)] \tag{4.4}$$

et cette relation de commutation donne lieu à la relation d'incertitude de Heisenberg à l'apparition d'une longueur minimale non nulle dans les incertitudes de position et de moment comme suit [22] :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}(1 + (\alpha_1 \langle x \rangle + \alpha_2 \langle p \rangle)^2 + \alpha_1^2 (\Delta x)^2 + \alpha_2^2 (\Delta p)^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \Delta x \Delta p) \tag{4.5}$$

où α et β sont deux constantes de couplage et nous distinguons deux types de sous-algèbre. Lorsque $\alpha^2, \beta^2 > 0$, cette algèbre déformée est caractérisée par l'existence à la fois d'une longueur minimale et d'une impulsion minimale et est appelée modèle de Snyder-de Sitter (SdS)) et pour $\alpha^2, \beta^2 < 0$,il est appelé modèle anti-Snyder-de Sitter (aSdS) et aucune restriction ne se pose [3].

D'autre part, dans ce cadre de solutions certains problèmes ont été trouvés, par exemple, la solution des équations classiques et quantique pour la particule libre et de l'oscillateur harmonique est explicitement donnée dans les modèles de Snyder-de Sitter et anti-Snyder [18] [23] [33] [32]. La trajectoire classique, la quantification semi-classique et le problème de Kepler sont discutés par [25] , le cas de l'oscillateur de Dirac dans le modèle de Snyder a été considéré dans[22] , et la solution exacte des équations de Klein-Gordon et de Dirac avec l'algèbre de Snyder-de Sitter est présentée par [57] .

Notre but dans le travail présent est de résoudre les oscillateurs harmoniques relativistes unidimensionnels (avec un spin 0, 1/2) soumis exactement à un champ électrique avec le modèle de Snyder-de Sitter dans l'espace de moment, connu sous le nom d'effet Stark confiné quantique. D'autre part, c'est de voir l'influence de cette déformation sur les propriétés des systèmes comme phénomène de confinement, valeur énergétique du décalage de Stark et propriétés thermodynamiques.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons les relations principales de la mécanique quantique sur le modèle de Snyder-de Sitter, où nous donnons la solution exacte de l'équation de l'oscillateur de Klein-Gordon avec un champ électrique uniforme. Le cas de l'oscillateur de Dirac à un champ électrique uniforme est traité dans la section 3. La section 4 est construit la conclusion finale.

4.1 Resolution de l'oscillateur de Klein-Gordon en présence d'un champ électrique uniforme avec le modèle de Snyder-de Sitter

Dans l'espace régulier, l'oscillateur de Klein-Gordon soumis à un champ électrique dans un espace à une dimension (1+1) est défini par : on pose ($\hbar = c = 1$)

$$\left[(\hat{p} + im\omega\hat{x})(\hat{p} - im\omega\hat{x}) + m^2 - (E - q\varepsilon\hat{x})^2\right]\psi = 0 \tag{4.6}$$

où q est la charge électrique et ε est l'intensité du champ électrique.

Maintenant, en utilisant la représentation (4.1) et (4.2), l'équation (4.6) peut être écrite dans le modèle de Snyder-de Sitter comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2\right)\hat{\chi}^2 + \left((1-\lambda)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\lambda^2\right)\widehat{\mathcal{P}}^2 \\ + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\lambda - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\lambda)\right)\left(\hat{\chi}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right) \end{array} \right.$$

$$\left. +2q\varepsilon E\hat{\chi} + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}q\varepsilon E\lambda\widehat{\mathcal{P}} - \frac{m\omega}{1 - \alpha_2^2 p^2} + m^2 - E^2 \right\}\psi(p) = 0, \tag{4.7}$$

Maintenant pour simplifier l'équation différentielle (4.7) et assurer la symétrie du système, on élimine le terme $\left(\hat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right)$ par fixation de la valeur de λ comme suit :

$$\lambda=\frac{\alpha_{_1}^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}. \tag{4.8}$$

Alors l'équation (4.7) devient :

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)\left(1-\alpha_{_2}^2P^2\right)}{\alpha_{_2}^2}\frac{d^2}{dp^2}\right.\\&+\left[\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)p+2iq\varepsilon E\sqrt{1-\alpha_{_2}^2P^2}\right]\frac{d}{dp}+\frac{\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P^2}{1-\alpha_{_2}^2P^2}\\&\left.+2q\varepsilon E\frac{\alpha_{_1}\alpha_{_2}}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P}{\sqrt{1-\alpha_{_2}^2P^2}}-\frac{m\omega}{1-\alpha_{_2}^2P^2}+m^2-E^2\right\}\psi(p)=0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pour éliminer la première dérivée , nous jouons le rôle d'une phase, ce qui rend cette substitution

$$\psi(\tau)=f(\tau)\exp\left(i\frac{\alpha_{_2}^2q\varepsilon E}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\tau\right), \tag{4.10}$$

où

$$\tau=-\frac{1}{\alpha_{_2}}\cos^{-1}(\alpha_{_2}p) \tag{4.11}$$

et s'intervalle est $\tau\in\left]-\infty,+\infty\right[$.

Nous obtenons sur l'équation suivante pour $f(\tau)$

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^2}{d\tau^2}-\frac{\alpha_{_2}^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)\csc^2(\alpha_{_2}\tau)\right.\\&-\frac{2\alpha_{_2}^2\alpha_{_1}q\varepsilon E}{(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}\cot(\alpha_{_2}\tau)+\frac{\alpha_{_2}^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}\end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right)\Bigg\} f(\tau)=0, \tag{4.12}$$

qui peut être mis sous forme d'équation de type Schrödinger dans le potentiel trigonométrique de Rosen-Morse

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}-A_1\csc^2(\alpha_2\tau)-A_2\cot(\alpha_2\tau)+A_3\right]f(\tau)=0 \tag{4.13}$$

où $\csc(\alpha_2\tau)=\frac{1}{\sin(\alpha_2\tau)}$ et les paramètres A_1, A_2 et A_3 sont donnés par

$$A_1=\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right) \tag{4.14}$$

$$A_2=\frac{2\alpha_2^2\alpha_1 q\varepsilon E}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}A_3=&\frac{\alpha_2^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}\\&-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Pour réduire cette dernière équation à un modèle d'équations différentielles connues, nous utilisons la formule suivante :

$$f(y)=(1+y^2)^{(\beta-1)}\left(\exp\left(-\alpha\cot^{-1}(y)\right)\right)g(y)\ , \tag{4.17}$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\left[(1+y^2)\frac{d^2}{dy^2}+2\left(\alpha+(2\beta-1)\,y\right)\frac{d}{dy}\;+4\left(\beta-1\right)^2+2\left(\beta-1\right)-\frac{A_1}{\alpha_2^2}\right.\\&\left.+\frac{\left(4\alpha\left(\beta-1\right)-\frac{A_2}{\alpha_2^2}\right)y+\alpha^2+\frac{A_3}{\alpha_2^2}-4\left(\beta-1\right)^2}{1+y^2}\right]g(y)\;=0\end{aligned} \tag{4.18}$$

qui est une équation différentielle polynomiale de Romanovski avec $y = \cot(\alpha_{_2}\tau)$ variant dans $]-\infty, +\infty[$ et les paramètres α, β sont fixés par :

$$4\alpha\left(\beta-1\right)-\frac{A_2}{\alpha_{_2}^2}=0 \tag{4.19}$$

$$\alpha^2+\frac{A_3}{\alpha_{_2}^2}-4\left(\beta-1\right)^2=0 \tag{4.20}$$

$$4\left(\beta-1\right)^2+2\left(\beta-1\right)-\frac{A_1}{\alpha_{_2}^2}=-n\left[(2\beta-1+(n-1)\right]. \tag{4.21}$$

Après un calcul direct, avec utilisation des relations (4.19) et (4.21), on déduit

$$\begin{aligned}\beta_n &= -\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\\ &\pm\frac{1}{4}\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)}\end{aligned} \tag{4.22}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2\alpha_{_1}q\varepsilon E}{\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2}\times\\ &\frac{1}{\left(-2n-1\pm\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)}\right)}\end{aligned} \tag{4.23}$$

Pour déterminer l'expression du spectre d'énergie, nous utilisons les relations (4.16) et (4.20) et par un calcule direct nous trouvons,

$$E_n^{\pm}=\pm m\left[\frac{1}{q^2\varepsilon^2+\left[\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right]\left[1+\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)\theta_n^2\right]}\times\right.$$

$$\left(\frac{4\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2(\beta_n-1)^2+q^2\varepsilon^2}{m^2}-\omega^2+\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

où

$$\theta_n=\frac{2\alpha_{_1}q\varepsilon}{\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2}\times$$
$$\frac{1}{\left(-2n-1\pm\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)}\right)} \tag{4.25}$$

et par les relations (4.10) et (4.17) nous déterminons la fonction d'onde dans la première variable p comme suit :

$$\Psi_n(p)=C_1\left(1-\alpha_{_2}^2p^2\right)^{(1-\beta_n)}\left[\exp\left(\alpha_n-\frac{iq\varepsilon E}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right)\cos^{-1}(\alpha_2p)\right]$$
$$\times R^{(k_n,l_n)}\left(\frac{\alpha_2p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right) \tag{4.26}$$

où k_n,l_n sont donnés par

$$k_n=2-2\beta_n,\quad l_n=2\alpha_n \tag{4.27}$$

et C_1 est une constante de normalisation.

Nous devons souligner que l'expression du spectre d'énergie contient toutes les corrections de tous les ordres de $\left(\alpha_{_2}\varepsilon\right)^2$, $(\alpha_{_1}\varepsilon)^2$, cela signifie la contribution exacte à l'effet Stark dans le cadre du modèle Snyder-de Sitter déformé. D'autre part, il varie avec toute la puissance de n, ce qui explique le phénomène de confinement.

Maintenant, pour obtenir l'oscillateur de Klein-Gordon pur avec le modèle de Snyder-de Sitter dans le cas en l'absence de champ électrique extérieur , nous mettons $(\varepsilon=0)$ dans (4.9) , alors l'équation devient

$$\left[-\frac{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}{\alpha_{_2}^2}\left(1-\alpha_{_2}^2P^2\right)\frac{\partial^2}{\partial P^2}+\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2\right)p\frac{\partial}{\partial P}\right.$$

$$+\frac{\alpha_{_2}^2 m^2\omega^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2 m^2\omega^2}\frac{P^2}{1-\alpha_{_2}^2P^2}-\frac{m\omega}{1-\alpha_{_2}^2P^2}+m^2-E^2\Bigg]\psi(p)=0 \tag{4.28}$$

qui peut être écrit sous la forme de l'équation différentielle hypergéométrique suivante,

$$\left[z\left(1-z\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(\mu+\frac{1}{2}-(1+2\mu)z\right)\frac{\partial}{\partial z}-\frac{(m^2-E^2)}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}\right]f(z)=0 \tag{4.29}$$

où nous avons utilisé le changement suivant

$$\psi(p)=\left[z\left(1-z\right)\right]^{\frac{\mu}{2}}f\left(z\right) \tag{4.30}$$

avec

$$z=\frac{1}{2}(1-\alpha_{_2}p)\quad\text{and}\quad\mu=\frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2} \tag{4.31}$$

La solution de cette équation différentielle (4.29) est

$$f(z)=C_1F(a,b,c;z)+C_2z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c;z) \tag{4.32}$$

avec

$$a=\frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}+\sqrt{\frac{m^2\omega^2}{(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2)^2}-\frac{(m^2-E^2)}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}} \tag{4.33}$$

$$b=\frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}-\sqrt{\frac{m^2\omega^2}{(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2)^2}-\frac{(m^2-E^2)}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}} \tag{4.34}$$

et

$$c=\frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2m^2\omega^2}+\frac{1}{2} \tag{4.35}$$

Considérant la condition aux limites que $(z\to0)$ et $(z\to1)$ conduit à $f(z)$ tendant à être fini, la fonction hypergéométrique est réduite à un polynôme avec la restriction suivante :

$$b = -n \quad , \tag{4.36}$$

alors la solution peut être écrite sous la forme suivante :

$$f(z) = C_1 F(\frac{2m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + n, -n, \frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + \frac{1}{2}; z) \tag{4.37}$$

et en appliquant les relations (4.34) et (4.36) , nous obtenons le spectre d'énergie pour l'oscillateur de klein-Gordon comme l'équation suivante

$$E_{_n} = \pm m\sqrt{\left(\frac{\alpha_{_1}^2}{m^2} + \alpha_{_2}^2\omega^2\right) n^2 + 2\frac{\omega}{m}n + 1}. \tag{4.38}$$

Nous notons que ces résultats peuvent être obtenus exactement et directement en utilisant la limite $\varepsilon \to 0$ dans les résultats précédents (4.23) et (4.25).

Pour $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_n = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_n = 0 \tag{4.39}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2}\right) \tag{4.40}$$

on remplaçe ces limites dans (4.24), on obtient exactement le même spectre d'énergie dans (4.38) et la même fonction d'onde en utilisant les propriétés reliant les polynômes de Romanovski et la fonction hypergéométrique $[45 - 46]$.

Par conséquent, l'expression de la fonction d'onde en termes de l'ancienne variable p peut être écrite comme suit :

$$\psi(p) = C_1 \left(1 - \alpha_{_2}^2 P^2\right)^{\overline{\frac{m\omega}{2\left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2\right)}}}$$
$$\times F(\frac{2m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + n, -n, \frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \alpha_{_2} p)) \tag{4.41}$$

Où C_1est une constante de normalisation.

4.2 Resolution de l'oscillateur de Dirac en prsénce d'un champ électrique uniforme avec le modèle de Snyder-de Sitter

L'oscillateur de Dirac avec champ électrique uniforme dans le modèle de Snyder-de Sitter est défini par l'expression suivante [58, 59] : on pose ($\hbar = c = 1$)

$$\left[\alpha\left(\hat{p}-im\omega\beta\hat{x}\right)+\beta m\right]\Psi(p)=\left(E-q\varepsilon\hat{x}\right)\Psi(p) \tag{4.42}$$

où $\Psi(p)=\begin{pmatrix}\Psi_1(p)\\ \Psi_2(p)\end{pmatrix}$ et α, β sont les matrices de Dirac données par

$$\alpha=\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \text{et} \quad \beta=\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Pour résoudre l'oscillateur de Dirac, nous utilisons l'expression suivante :

$$\Psi=\left[\left(E-q\varepsilon\hat{x}\right)+\alpha\left(\hat{p}-im\omega\beta\hat{x}\right)+\beta m\right]\ \phi \tag{4.44}$$

on obtient la forme quadratique de l'oscillateur de Dirac pour la fonction à deux composantes ϕ dans l'équation suivante :

$$\left[\left(E-q\varepsilon\hat{x}\right)^2-\left(\hat{p}+im\omega\beta\hat{x}\right)\left(\hat{p}-im\omega\beta\hat{x}\right)-m^2-q\varepsilon\alpha\left[\hat{x},\hat{p}\right]\right]\phi=0 \tag{4.45}$$

où :

$$\left[\hat{x},\hat{p}\right]\phi=\frac{i}{1-\alpha_{_2}^2p^2}\phi \tag{4.46}$$

Après un calcul simple mais long, notre système sera écrit comme suit :

$$\left[-\frac{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\alpha_{_2}^2}\left(1-\alpha_{_2}^2P^2\right)\frac{d^2}{dp^2}+\left(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)p\frac{d}{dp}\right.$$

$$+2iq\varepsilon E\sqrt{1-\alpha_{_2}^2P^2}\frac{d}{dp}+\frac{\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P^2}{1-\alpha_{_2}^2P^2}$$

$$
+2q\varepsilon E\frac{\alpha_{_1}\alpha_{_2}}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P}{\sqrt{1-\alpha_{_2}^2P^2}}+\frac{iq\varepsilon\alpha-m\omega\beta}{1-\alpha_{_2}^2P^2}+m^2-E^2\Bigg]\psi(p)=0 \tag{4.47}
$$

où nous avons utilisé les relations (4.1) et (4.2) et nous avons fixé le paramètre arbitraire λ en éliminant le terme $(\hat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\hat{\chi})$. Comme indiqué dans la section précédente, nous trouvons la même valeur que celle de l'équation (4.8).

A cette étape, pour simplifier l'équation (4.47), nous effectuons cette substitution

$$
\psi(\tau)=f(\tau)\exp\left(i\frac{\alpha_{_2}^2 q\varepsilon E}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\tau\right), \tag{4.48}
$$

$$
\text{où } \tau=-\frac{1}{\alpha_{_2}}\cos^{-1}(\alpha_{_2}p) \quad \text{et} \quad \tau\in\,]-\infty,+\infty[
$$

nous obtenons sur l'équation suivante pour $f(\tau)$

$$
\Bigg[\frac{d^2}{d\tau^2}-\frac{\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\Big(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\Big)^2}\csc^2(\alpha_{_2}\tau)-\frac{\alpha_{_2}^2\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\csc^2(\alpha_{_2}\tau)M
$$
$$
-\frac{2\alpha_{_2}^2\alpha_{_1}q\varepsilon E}{(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}\cot(\alpha_{_2}\tau)+\frac{\alpha_{_2}^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}
$$
$$
-\frac{\alpha_{_2}^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_{_1}^2+\alpha_{_2}^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right)\Bigg]f(\tau)=0 \tag{4.49}
$$

où M est la matrice donnée par $M=\begin{pmatrix} -\frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}} & \frac{q\varepsilon}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}} \\ -\frac{q\varepsilon}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}} & \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}} \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres de la matrice sont $\sigma^{\pm}=\pm1$.

et pour les vecteurs propres de cette matrice on a la formule $MV=\sigma V$

et pour cella il y a deux vecteurs propres corspondants les valeurs propres $\sigma^{\pm} = \pm 1$.

pour $\sigma^{+} = +1$, on a le vecteur propre u_1 est donné comme suit :

$$u_1 = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m\omega}{q\varepsilon} + \frac{\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

et pour $\sigma^{-} = -1$, on a le vecteur propre u_2 est donné comme suit :

$$u_2 = K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m\omega}{q\varepsilon} - \frac{\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Pour résoudre cette équation (4.49), nous posons la solution comme suit : $f(\tau) = u_\sigma \eta_\sigma$ avec u_σ est un vecteur propre à deux composantes de la matrice M avec la valeur propre σ, alors on obtient :

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} - A_4 \csc^2(\alpha_{_2}\tau) - A_2 \cot(\alpha_{_2}\tau) + A_3\right] f(\tau) = 0 \tag{4.52}$$

où

$$A_4 = \frac{\alpha_{_2}^2 \left(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2\right)}{\left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right)^2} + \sigma \frac{\alpha_{_2}^2 \sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \tag{4.53}$$

$$A_2 = \frac{2\alpha_{_2}^2 \alpha_{_1} q\varepsilon E}{(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2))^2} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & \frac{\alpha_{_2}^4 q^2\varepsilon^2 E^2}{(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2))^2} \\ & - \frac{\alpha_{_2}^2}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \left(m^2 - E^2 - \frac{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}\right) \end{aligned} \tag{4.55}$$

Nous notons que cette équation (4.52) a la même forme que (4.13) sauf que A_1 est changé en A_4, donc nous suivons les mêmes étapes que Klein-Gordon avec un calcul direct, nous obtenons sur l'expression de l'énergie comme suit :

$$E_n^{\pm} = \pm m \left[\frac{1}{q^2\varepsilon^2 + \left[\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right] \left[1 + \left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right) \pi_n^2\right]} \times \right.$$
$$\left. \left(\frac{4\left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right)^2 (\rho_n - 1)^2 + q^2\varepsilon^2}{m^2} - \omega^2 + \alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.56}$$

où

$$\rho_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{\sigma}{4} \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \tag{4.57}$$

avec

$$\pi_n = \frac{2\alpha_{_1} q\varepsilon}{\left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right)^2 \left[-2n - 1 \pm \sigma \pm 2\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}\right]} \tag{4.58}$$

et les fonctions d'onde seront calculées comme suit :

$$\begin{aligned}
(\psi_{n\sigma}^1)(p) = C_n' \Big\{ \Big[&- \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \right) + \\
i &\left(m\omega \left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \right) - q\varepsilon \right) \Big] \sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2} \frac{d}{dp} \\
&+ \Big[\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \left(m\omega \left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \right) - q\varepsilon \right) \\
&- i \frac{\alpha_2^2 \left(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2\right)}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \right) \Big] \frac{p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}} \\
&+ E_n + m \Big\} Q_n(p),
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$
\begin{aligned}
(\psi^2_{n\sigma})(p) = C'_n \Big\{ \Big[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - i\sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2} \Big] \sqrt{1-\alpha_2^2 p^2} \frac{d}{dp} \\
+ \Big[-\sigma \frac{\alpha_1\alpha_2\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 (m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \\
+ i \frac{\alpha_2^2\,(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 (m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \Big] \frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}} \\
+ (E_n - m) \left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon} \right) \Big\} Q_n(p),
\end{aligned} \tag{4.60}
$$

où

$$
\begin{aligned}
Q_n(p) = \Big(1-\alpha_2^2 p^2\Big)^{(1-\beta_n)} \Big[exp\Big(i \frac{\alpha_2 q\varepsilon E_n}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 (m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} - \alpha_n \Big) \cot^{-1} \big(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}} \big) \Big] \\
\times R_n^{(k_n,l_n)} \big(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}} \big),
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

Pour obtenir l'oscillateur de Dirac pur avec le modèle de Snyder-de Sitter, on met $(\varepsilon = 0)$ dans (4.47) et avec un calcul direct on obtient la même équation différentielle associée à l'oscillateur de Klein-Gordon (4.28) pour le spineur $\Psi_1(p)$ dont la solution est

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(p) = D_1 \left(1 - \alpha_{_2}^2 P^2\right)^{\overline{2\left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2\right)}^{\,m\omega}} \\
\times F\big(\frac{2m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + n, -n, \frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \alpha_{_2} p) \big)
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

avec la même expression de l'énergie (4.38), D_1est la constante de normalisation.

Pour déduire l'autre composante $\Psi_2(p)$, on prend en compte la propriété suivante des dérivées de la fonction hypergéométrique

$$
\frac{d}{dx} F\left(a, b; c; x\right) = \frac{ab}{c} F\left(a+1, b+1; c+1; x\right) \tag{4.63}
$$

nous trouvons le résultat comme suit

$$\Psi_2(p) = D_1 \frac{\left(\alpha_{_1} + i\alpha_{_2} m\omega\right)\left[\left(\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2\right) n^2 + 2m\omega n\right]}{(E+m)\left(2m\omega + \alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2\right)} \left[1 - \alpha_{_2}^2 P^2\right]^{\left(\frac{m\omega + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2}{2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2\right)}\right)}$$

$$\times F\left(\frac{2m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + 1 + n, -n+1, \frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2} + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}(1 - \alpha_{_2} p)\right) \quad (4.64)$$

Avant de terminer cette section, nous signalons que nous pouvons obtenir les résultats de l'oscillateur de Dirac pur en prenant la limite $\varepsilon \to 0$, on obtien comme suit :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \pi_n = 0 \quad (4.65)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\rho_n - 1\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}(1 \pm \sigma) \pm \frac{1}{2}\frac{m\omega}{\alpha_{_1}^2 + \alpha_{_2}^2 m^2\omega^2}\right)^2 \quad (4.66)$$

et nous obtenons exactement le même spectre ;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_n^{\pm} = \pm m \left[\left(\frac{\alpha_{_1}^2}{m^2} + \alpha_{_2}^2\omega^2\right) n^2 + 2\frac{\omega}{m} n + 1\right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

Pour conclure cette section, il est préférable d'étudier certaines propriétés thermodynamiques du système. La fonction de partition Z des oscillateurs KG et Dirac déformés avec des relations de commutation de Snyder-de Sitter à température finie T est donnée par Euler-Maclaurin comme suit :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-\frac{E_n}{K_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{m}{K_B T}\sqrt{\left(\frac{\alpha_{_1}^2}{m^2} + \alpha_{_2}^2\omega^2\right) n^2 + 2\frac{\omega}{m} n + 1}\right) \quad (4.68)$$

où K_B est la constante de Boltzmann.

Selon la procédure d'évaluation habituelle et en conservant les contributions dominantes d'ordre 0 et 1 en α_1 et α_2, on obtient

$$Z \simeq \frac{(K_BT)^2}{\omega m} - \frac{3\alpha_2 (K_BT)^4}{\omega m}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{m}{K_BT}\right)^2\right) - \frac{3\alpha_1 (K_BT)^4}{\omega^3 m^3} \tag{4.69}$$

qui peut être pour les hautes températures

$$Z \simeq \frac{(K_BT)^2}{\hbar\omega mc^2} - \frac{3(K_BT)^4}{\hbar\omega mc^4}\left(\frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} + \alpha_2\right) \tag{4.70}$$

En utilisant les formules habituelles des propriétés thermodynamiques telles que l'énergie libre F , l'énergie interne U, la capacité thermique C et l'entropie S,

$$F = -K_BT \ln Z, U = K_BT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, C = \frac{\partial U}{\partial T} \quad \text{and } S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{4.71}$$

on obtient

$$F = -K_BT \ln\left(\frac{(K_BT)^2}{\omega m}\left[1 - 3(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)\right]\right) \tag{4.72}$$

$$U = 4K_BT\left[1 - \frac{1}{2\left(1 - 3(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)\right)}\right] \tag{4.73}$$

$$C = 4K_B\left[1 - \frac{1 + 3(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)}{2\left(1 - 3(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)\right)^2}\right] \tag{4.74}$$

$$S = K_B\left[\frac{2 - 12(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)}{1 - 3(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)} + \ln\left(\frac{(K_BT)^2}{\omega m}\left[1 - 3(K_BT)^2\left(\frac{\alpha_{_1}}{m^2\omega^2} + \alpha_{_2}\right)\right]\right)\right] \tag{4.75}$$

Nous avons établi une solution exacte et explicite des oscillateurs de Klein Gordon et de Dirac déformés unidimensionnels soumis à un champ électrique dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter dans l'espace des moments ; est connu sous le nom d'effet Stark. Dans les deux cas, la solution exacte est déterminée, les fonctions d'onde sont obtenues et sont exprimées en termes de polynômes de Romonovski. Le spectre d'énergie exact est extrait et il contient des corrections supplémentaires dépendent des paramètres de déformation α_1, α_2 et de toutes les corrections de tous les ordres de $(\alpha_2 \varepsilon)$, $(\alpha_1 \varepsilon)$, cela signifie exactement contribution à l'effet Stark dans le modèle de Snyder-de Sitter. D'autre part, il varie avec toute la puissance de n, ce qui explique le phénomène de confinement dans ce cadre de déformation. Le cas de l'oscillateur relativiste pur pour spin (0 et 1/2) est déterminé cas particulier en prenant la limite $\varepsilon \to 0$, lorsque le champ électrique s'annule, les fonctions d'onde sont obtenues et sont données en fonction de la fonction hypergéométrique.

Chapitre 5

Résolution de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau en présence d'un champ éléctrique avec modèle de Sitter et anti-de Sitter

Les espaces de Sitter (dS) et anti-de Sitter (adS) sont des modèles homogènes et isotropes de l'univers. Ils ont été introduits en 1917 par W. de Sitter en tant que solutions des équations de champ d'Einstein dans le cadre de la théorie de la relativité générale [$60-62$]. D'autre part, ces modèles se distinguent par le signe d'un paramètre géométrique appelé constante cosmologique, introduite pour compenser les effets de la gravitation afin de rendre l'univers immobile et pour expliquer l'expansion accélérée de l'univers et l'énergie d'espace quantique. La positivité de la constante cosmologique caractérise le modèle de Sitter, qui représente le comportement asymptotique des modèles de Friedmann pour t infini [63]. En revanche, le modèle anti-sitter [$62-63$] est fourni avec une constante cosmologique négative.

L'étude de ce type d'espace a suscité un intérêt considérable en raison de la multiplicité de ses applications dans divers domaines de la physique théorique tels que : l'oscillateur de Dirac et l'algèbre non relativiste de Snyder-de Sitter [22] ; la mécanique classique et quantique de la particule libre et l'harmonique oscillateur dans la version non relativiste du modèle de Snyder sur fond de courbure constante [18] ; oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac soumis au champ électrique uniforme avec le modèle de Snyder-de Sitter dans l'espace cinétique [64], étudiant un champ scalaire se propage à l'arrière-plan d'un espace de Sitter (dS) en expansion et contracte un univers anti-de Sitter (adS)[65]. Transparence de l'espace-temps aux champs multipolaires de Sitter et anti-de Sitter [66]. Généralisation de l'électrodynamique à l'espace de Sitter [67]. Partie radiale de l'équation électronique dans l'espace de Sitter-Schwarzschild [68]. Oscillations de neutrinos dans le sitter et l'espace-temps anti-sitter [69]. Effet de Casimir (potentiel effectif) pour un scalaire conforme ou massif dans les espaces de Sitter et anti-de Sitter [70].

Dans cette analyse, nous nous intéressons au traitement de l'oscillateur Bosonique soumis au champ électrique uniforme avec l'algèbre des modèles de Sitter et anti-de Sitter. Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 1, nous rappelons brièvement l'algèbre de Sitter et l'anti-de Sitter. Dans la section 2, nous étudions l'oscillateur bosonique en présence d'un champ électrique selon la déformation et les paramètres d'espace. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde associées sont obtenus et les cas limites sont étudiés, par exemple dans la limite $\alpha \to 0$ et $\varepsilon \to 0$.

on rappelle que dans le modèle de de Sitter et anti-de Sitter, l'algèbre de Heisenberg déformée est définie par la relation de commutation suivante, nous mettons ($\hbar = c = 1$)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\left(1 + \sigma\alpha x^2\right), \tag{5.1}$$

Où α est un petit paramètre de déformation et σ caractérise la nature de l'espace, égale à $\sigma = -1$ pour le modèle de Sitter et à $\sigma = +1$ pour le modèle anti-de Sitter.

En conséquence de la commutation, la relation (5.1) conduit à une relation modifiée d'incertitude de Heisenberg

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \sigma\alpha(\Delta x)^2\right), \tag{5.2}$$

et les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont satisfaisants

$$\begin{cases} \hat{x} = x \\ \hat{p} = -i\left(1 + \sigma\alpha x^2\right)\frac{d}{dx} \end{cases}. \tag{5.3}$$

Le produit scalaire associé et les relations de fermeture sont donnés par les relations :

$$\int \frac{1}{1+\sigma\alpha x^2} \mid x\rangle \langle x \mid dx = 1 \tag{5.4}$$

$$\langle \varphi \mid \phi\rangle = \int \frac{1}{1+\sigma\alpha x^2}\varphi^* \phi dx \tag{5.5}$$

5.1 Oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) en présence d'un champ électrique

Dans l'espace régulier, on considère l'Oscillateur Bosonique en présence d'un champ électrique décrit par l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) sous la forme suivante :

$$\beta^0 \left[i\frac{d}{dt} - e\varepsilon\hat{x} \right] \psi(x,t) - \left[\beta^1 \left(\hat{p} - i\eta^0 m\omega\hat{x} \right) + m \right] \psi(x,t) = 0 \tag{5.6}$$

Où (e) est la charge électrique et (ε) l'intensité du champ électrique, lesβ^0 , β^1 et $\eta^0 = 2\left(\beta^0\right)^2 - 1$ sont des matrices satisfaisant l'algèbre de DKP et peuvent être choisies par la représentation suivante

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Afin de résoudre l'équation (5.6), nous introduisons la solution stationnaire $\psi(x,t) = \phi\left(x\right)\exp(-iEt)$, l'équation précédente devient

$$\beta^0 \left[E - e\varepsilon\hat{x} \right] \phi\left(x\right) - \left[\beta^1 \left(\hat{p} - i\eta^0 m\omega\hat{x} \right) + m \right] \phi\left(x\right) = 0. \tag{5.8}$$

En insérant la fonction d'onde $\phi\left(x\right)^T$, qui a trois composantes $\left(\phi_1\left(x\right), \phi_2\left(x\right), \phi_3\left(x\right)\right)$ et la matrice (5.7), on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} m\phi_1(x) + (i\hat{p} - m\omega\hat{x})\,\phi_2(x) - i\,(E - e\varepsilon\hat{x})\,\phi_3(x) = 0 \\ \phi_2(x) = -\frac{1}{m}\,(i\hat{p} + m\omega\hat{x})\,\phi_1(x) \\ \phi_3(x) = -\frac{i}{m}\,(E - e\varepsilon\hat{x})\,\phi_1(x) \end{cases} \tag{5.9}$$

En découplant les éq.(5.9), il n'est pas difficile de vérifier que $\phi_1(x)$ vérifie l'équation de type de Klein-Gordon suivante :

$$\left[\,\hat{p}^2 - im\omega\,[\hat{p},\hat{x}] + \left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2\right)\hat{x}^2 + 2e\varepsilon E\hat{x} + m^2 - E^2\right]\phi_1(x) = 0. \tag{5.10}$$

Par la suite, nous sommes intéressés à étudier le problème de l'oscillateur Bosonique dans le cadre du modèle de Sitter et anti-de Sitter.

5.1.1 Cas de Sitter ($\sigma = -1$) :

Dans ce cas, avec l'algèbre de Sitter $\sigma = -1$, on substitue les relations (5.1) et (5.3) à l'équation (5.10) ; nous obtenons cette expression suivante :

$$\left[\left(1 - \alpha x^2\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} - 2\alpha x\left(1 - \alpha x^2\right)\frac{d}{dx} - \left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2 + \alpha m\omega\right)x^2 - 2e\varepsilon Ex \right.$$

$$\left. + m\omega + E^2 - m^2\right] \quad \phi_1(x) = 0 \tag{5.11}$$

Nous faisons le changement de variable,

$$q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\coth^{-1}(\sqrt{\alpha}x) \tag{5.12}$$

où $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right[$
et par un calcul simple, il est facile d'obtenir

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} + A_1 \operatorname{csc} h^2\left(\sqrt{\alpha}q\right) - A_2\coth(\sqrt{\alpha}q) + \epsilon_1\right]\phi_1\left(\frac{\coth(\sqrt{\alpha}q)}{\sqrt{\alpha}}\right) = 0 \tag{5.13}$$

où les constantes A_1, A_2, ϵ_1 sont données par

$$A_1 = -m\omega - \frac{(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2)}{\alpha} \tag{5.14}$$

$$A_2 = 2\frac{e\varepsilon E}{\sqrt{\alpha}} \tag{5.15}$$

$$\epsilon_1 = -\frac{(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2)}{\alpha} + E^2 - m^2 \tag{5.16}$$

Pour obtenir la solution exacte de l'équation (5.13), nous utilisons l'ansatz suivant :

$$\phi_1\left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) = \left(1-y^2\right)^{\gamma}\left[\exp(\mu\coth^{-1}(y))\right]g(y) \tag{5.17}$$

où

$$y = \coth(\sqrt{\alpha}q) \tag{5.18}$$

γ et μ sont des constantes à déterminer. Alors Eq.(5.13) réduira à :

$$\left[\left(1-y^2\right)\frac{d^2}{dy^2} + 2\left(\mu - (2\gamma+1)y\right)\frac{d}{dy} - 4\gamma^2 - 2\gamma - \frac{A_1}{\alpha}\right.$$

$$\left. + \frac{\mu^2 + 4\gamma^2 + \frac{\epsilon_1}{\alpha} - \left(4\gamma\mu + \frac{A_2}{\alpha}\right)y}{1-y^2}\right]g(y) = 0 \tag{5.19}$$

qui se transformera en l'équation polynomiale de Jacobi :

$$\left[\left(1-y^2\right)\frac{d^2}{dy^2} + ((v-u) - (u+v+2)y)\frac{d}{dy} + n(n+u+v+1)\right]p_n^{(u_n,v_n)}(y) = 0 \tag{5.20}$$

en fixant les coefficients proportionnels à $\frac{1}{1-y^2}$ comme

$$\left(4\gamma\mu + \frac{A_2}{\alpha}\right) = 0 \tag{5.21}$$

$$\mu^2 + 4\gamma^2 + \frac{\epsilon_1}{\alpha} = 0 \tag{5.22}$$

En utilisant les relations (5.19), (5.20) et (5.21), après un calcul direct, on trouve :

$$4\gamma = u + v \tag{5.23}$$

$$2\mu = v - u \tag{5.24}$$

$$-4\gamma^2 - 2\gamma - \frac{A_1}{\alpha} = n(n + u + v + 1) = n(n + 4\gamma + 1) \tag{5.25}$$

Après des calculs simples, et pour cela en utilisant les relations (5.21) et (5.25), nous trouvons

$$\gamma_n = -\frac{1}{4}(2n+1) + \frac{1}{4}\sqrt{1 + 4\left(\frac{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}{\alpha^2}\right) + 4\frac{m\omega}{\alpha}} \tag{5.26}$$

$$\mu_n = \frac{2e\varepsilon E}{\alpha\sqrt{\alpha}(2n+1) + \sqrt{\alpha^3 + 4\left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2\right)\alpha + 4m\omega\alpha^2}} \tag{5.27}$$

Pour déterminer les expressions du spectre d'énergie, nous utilisons les relations (5.16) et (5.22). Nous obtenons le résultat suivant :

$$E_n = \pm\left[\frac{-16\alpha^3\gamma^4 + 4\left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2\right)\alpha\gamma^2 + 4m^2\alpha^2\gamma^2}{4\alpha^2\gamma^2 + e^2\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.28}$$

Et par les relations (5.9), (5.17) et (5.18), nous aurons la forme finale de la fonction d'onde dans l'ancienne variable x comme suit

$$\phi_1(x) = C_1\left(1 - \alpha x^2\right)^\gamma \left[\exp(\mu\coth^{-1}(\sqrt{\alpha}x))\right] p_n^{(2^\gamma-\mu, 2^\gamma+\mu)}(\sqrt{\alpha}x) \tag{5.29}$$

$$\phi_2(x) = C_1\left(1 - \alpha x^2\right)^\gamma \left[\exp(\mu\coth^{-1}(\sqrt{\alpha}x))\right] \left[\frac{(2\alpha\gamma - m\omega)x - \sqrt{\alpha}\mu}{m} p_n^{(2^\gamma-\mu, 2^\gamma+\mu)}(\sqrt{\alpha}x)\right.$$

$$- \frac{\sqrt{\alpha}\,(4\gamma+n+1)}{2m}\left(1-\alpha x^2\right) p_n^{(2^\gamma-\mu+1,2^\gamma+\mu+1)}(\sqrt{\alpha}x)\Bigg] \tag{5.30}$$

$$\phi_3\,(x) = C_1(-\frac{i}{m})(E-e\varepsilon x)\left(1-\alpha x^2\right)^\gamma \;\left[\exp(\mu\coth^{-1}(\sqrt{\alpha}x))\right] p_n^{(2^\gamma-\mu,2^\gamma+\mu)}(\sqrt{\alpha}x) \tag{5.31}$$

où C_1 est une constante de normalisation.

Il est maintenant intéressant d'étudier les cas particuliers suivants :

Cas d'absence du champ électrique $(\varepsilon = 0)$

Dans ce but, en prenant l'intensité du champ électrique $(\varepsilon \to 0)$, les limites des relations (5.26) et (5.27) sont

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_{_n} = 0$, et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_n = -\frac{n}{2} + \frac{m\omega}{2\alpha}$

et le spectre d'énergie est

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_n \;=\; \pm\, m\sqrt{-\frac{\alpha}{m^2}n^2 + 2\frac{\omega}{m}n + 1} \tag{5.32}$$

qui coïncide exactement avec le résultat de l'oscillateur de Dirac dans le contexte du principe d'incertitude généralisée (GUP) dans [71].

Cas d'absence de la déformation $(\alpha = 0)$

Pour le cas d'absence de déformation, en prenant la limite $(\alpha \to 0)$, on trouve

$$\lim_{\alpha\to 0}(\alpha\gamma_{_n}) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2} \tag{5.33}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(\alpha\gamma_{_n}^2) = -\frac{1}{4}\sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}(2n+1) + \frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0}\frac{(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2)}{\alpha} + \frac{1}{4}m\omega \tag{5.34}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(\alpha^2\gamma_{_n}^2) = \frac{1}{4}\left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2\right) \tag{5.35}$$

Donc, le spectre d'énergie est

$$E_n = \pm\left(1 - \frac{e^2\varepsilon^2}{m^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[m^2 - m\omega + \sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}(2n+1)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.36}$$

Cas de l'oscillateur bosonique pur $(\alpha = 0)$ **et** $(\varepsilon = 0)$

Maintenant, pour obtenir le cas de l'oscillateur bosonique pur, c'est-à-dire $(\alpha = 0$, et $\varepsilon = 0$), nous calculons la limite de la relation (5.28) pour $\alpha \to 0$ et $\varepsilon \to 0$, on trouve

$$E_n = \pm m\sqrt{2\frac{\omega}{m}n + 1} \tag{5.37}$$

et en utilisant la formule de Rodrigues pour le polynôme de Jacobi et en appliquant cette limite des relations (5.26) et (5.27) on trouve.

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_n = 0$, et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \gamma_n = -\frac{n}{2} + \frac{m\omega}{2\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha\to 0} \left[(1-\alpha x^2)^{\left(-\frac{n}{2}+\frac{m\omega}{2\alpha}\right)}\right] = \exp\left(-\frac{m\omega}{2}x^2\right)$

et

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \left[p_n^{\left(-n+\frac{m\omega}{\alpha},-n+\frac{m\omega}{\alpha}\right)}(\sqrt{\alpha}x)\right] = \frac{1}{2^n\, n!}H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right)$

alors, la fonction d'onde peut être exprimée par

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\phi_1\left(x\right)\right)\right] \sim \left[\exp\left(-\frac{m\omega}{2}x^2\right)\right] H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right) \tag{5.38}$$

qui est exactement le résultat ordinaire de l'oscillateur Bosonique dans l'espace régulier.

5.1.2 Cas anti-de Sitter $(\sigma = +1)$

Procédons de la même manière que dans le cas précédent en prenant $(\sigma = +1)$ pour l'anti-de Sitter et en effectuant la substitution des relations (5.1) et (5.3) dans l'équation (5.10) ; on arrive à cette expression

$$\left[\left(1+\alpha x^2\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2\alpha x\left(1+\alpha x^2\right)\frac{d}{dx} + \left(\alpha m\omega + e^2\varepsilon^2 - m^2\omega^2\right)x^2 - 2e\varepsilon E x \right.$$
$$\left. + m\omega + E^2 - m^2\right] \quad \phi_1\left(x\right) = 0 \tag{5.39}$$

Pour simplifier l'éq.(5.39), nous introduisons le changement de variable suivant :

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cot^{-1}\left(\sqrt{\alpha} x\right) \tag{5.40}$$

on obtient à l'équation différentielle suivante

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + A_3 \csc^2(\sqrt{\alpha}\tau) + A_4 \cot(\sqrt{\alpha}\tau) \ + \epsilon_2\right] \quad \phi_1\left(\frac{\cot(\sqrt{\alpha}\tau)}{\sqrt{\alpha}}\right) = 0 \tag{5.41}$$

où A_3 et A_4 et ϵ_2 sont donnés par :

$$A_3 = \left(m\omega + \frac{(e^2\varepsilon^2 - m^2\omega^2)}{\alpha}\right) \tag{5.42}$$

$$A_4 = 2\frac{e\varepsilon E}{\sqrt{\alpha}} \tag{5.43}$$

$$\epsilon_2 = -\frac{(e^2\varepsilon^2 - m^2\omega^2)}{\alpha} + E^2 - m^2 \tag{5.44}$$

Pour résoudre l'équation (5.41), nous utilisons l'ansatz suivant :

$$\phi_1\left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) = \left(1 + y^2\right)^{\lambda} \left[\exp(\theta \cot^{-1}(y))\right] f(y) \tag{5.45}$$

où

$$y = \cot(\sqrt{\alpha}\tau) \tag{5.46}$$

et λ et θ sont les paramètres libres, qui seront déterminés ultérieurement.

Par manière de la substitution donnée par l'Eq.(5.45), l'équation différentielle (5.41) pour $f(y)$ sera réduite à :

$$\left[\left(1 + y^2\right)\frac{d^2}{dy^2} + 2\left((2\lambda + 1)y - \theta\right)\frac{d}{dy} + 4\lambda^2 + 2\lambda + \frac{A_3}{\alpha}\right.$$

$$\left. + \frac{\theta^2 - 4\lambda^2 + \frac{\epsilon_2}{\alpha} + \left(\frac{A_4}{\alpha} - 4\lambda\theta\right) y}{1 + y^2}\right] f(y) = 0 \tag{5.47}$$

qui convertit à l'équation polynomiale de Romanovsky $\left(R_n^{(k,l)}(y)\right)$

$$\left[\left(1+y^2\right)\frac{d^2}{dy^2}+2\left((2\lambda+1)y-\theta\right)\frac{d}{dy}-n\left[4\lambda+n+1\right]\right]f\left(y\right)=0 \tag{5.48}$$

En prenant le terme proportionnel $\frac{1}{1-y^2}$ est égal à zéro, ce qui implique la fixation les paramètres λ et θ par les relations suivantes

$$\theta^2-4\lambda^2+\frac{\epsilon_2}{\alpha}=0 \tag{5.49}$$

$$\frac{A_4}{\alpha}-4\lambda\theta=0 \tag{5.50}$$

$$4\lambda^2+2\lambda+\frac{A_3}{\alpha}=-n\left[4\lambda+n+1\right] \tag{5.51}$$

et k,l sont les paramètres réels, qui seront déterminés en fonction de la propriété du polynôme de Romanovsky $\left(R_n^{(k,l)}(y)\right)$ [46], on trouve $k=-2\lambda$, et $l=-2\theta$.

Après un calcul simple en utilisant les relations (5.50) et (5.51) , on obtient :

$$\lambda_n=-\frac{1}{4}(2n+1)+\frac{1}{4}\sqrt{1+4\left(\frac{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)-4\frac{m\omega}{\alpha}} \tag{5.52}$$

$$\theta_n=\frac{2e\varepsilon E}{-\alpha\sqrt{\alpha}(2n+1)+\sqrt{\alpha^3+4\left(m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2\right)\alpha-4m\omega\alpha^2}} \tag{5.53}$$

Pour déterminer l'expression du spectre d'énergie, on utilise les relations (5.44) et (5.49) , on obtient le résultat suivant :

$$E_n=\pm\left[\frac{16\alpha^3\lambda^4-4\left(m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2\right)\alpha\lambda^2+4m^2\alpha^2\lambda^2}{4\alpha^2\lambda^2+e^2\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.54}$$

Par les relations (5.45) et (5.46), nous aurons la forme finale de la fonction d'onde associée dans l'ancienne variable x comme suit :

$$\phi_1(x) = C_2 \left(1+\alpha x^2\right)^{\lambda} \left[\exp\left(\theta \cot^{-1}\left(\sqrt{\alpha}x\right)\right)\right] R^{(k_n,l_n)}\left(\sqrt{\alpha}x\right) \tag{5.55}$$

$$\phi_2(x) = C_2 \left(1+\alpha x^2\right)^{\lambda} \left[\exp\left(\theta \cot^{-1}\left(\sqrt{\alpha}x\right)\right)\right] \left[-\left(\frac{(2\alpha\lambda + m\omega)\, x - \sqrt{\alpha}\theta}{m}\right) R_n^{(k_n,l_n)}\left(\sqrt{\alpha}x\right)\right.$$
$$\left. -\frac{\sqrt{\alpha}}{m} n\left(2l_n + n - 1\right)\left(1+\alpha x^2\right) R_{n-1}^{(k_n,l_n+1)}\left(\sqrt{\alpha}x\right)\right] \tag{5.56}$$

$$\phi_3(x) = C_2\left(-\frac{i}{m}\right)(E - e\varepsilon x)\left(1+\alpha x^2\right)^{\lambda}\left[\exp\left(\theta \cot^{-1}\left(\sqrt{\alpha}x\right)\right)\right] R^{(k_n,l_n)}\left(\sqrt{\alpha}x\right) \tag{5.57}$$

Où C_2 est une constante de normalisation.

Avant de terminer cette étude, il est également intéressant d'étudier les cas particuliers suivants :

Cas d'absence du champ électrique $(\varepsilon = 0)$

Pour ce cas, on calcule les limites des relations (5.52) et (5.53) quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\theta_n = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lambda_n = -\frac{n}{2} - \frac{m\omega}{2\alpha}$

on obtient le spectre d'énergie comme suit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_n = \pm m\sqrt{\frac{\alpha}{m^2}n^2 + 2\frac{\omega}{m}n + 1} \tag{5.58}$$

qui coïncide exactement avec le résultat de l'oscillateur de Dirac dans le contexte du principe d'incertitude généralisée de [71].

Cas d'absence de la déformation $(\alpha = 0)$

Pour le cas d'absence de déformation $(\alpha = 0)$, on trouve

$$\lim_{\alpha\to 0}(\alpha\lambda_n) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2} \tag{5.59}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(\alpha\lambda_n^2) = \frac{1}{4}\sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}(2n+1) + \frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0}\frac{(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2)}{\alpha} - \frac{1}{4}m\omega \quad (5.60)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(\alpha^2\lambda_n^2) = \frac{1}{4}\left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2\right) \quad (5.61)$$

alors, le spectre d'énergie devient :

$$\lim_{\alpha\to 0} E_n^+ = \pm\left(1 - \frac{e^2\varepsilon^2}{m^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[m^2 - m\omega + \sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}(2n+1)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.62)$$

Cas de l'oscillateur bosonique pur ($\alpha = 0$) and ($\varepsilon = 0$)

Maintenant, pour obtenir l'oscillateur bosonique ordinaire($\alpha = 0$, et $\varepsilon = 0$), par calcul direct, dans(5.54) pour $\alpha \to 0$ et $\varepsilon \to 0$, on trouve le spectre d'énergie.

$$E_n = \pm m\sqrt{2\frac{\omega}{m}n + 1} \quad (5.63)$$

et en utilisant la formule de Rodrigues pour le polynôme de Romanovsky et la limite de la relation (5.55) pour $\alpha \to 0$ et $\varepsilon \to 0$, on trouve.

$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_n = 0$, et $\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_n = -\frac{n}{2} - \frac{m\omega}{2\alpha}$ et $\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha x^2)^{\left(-\frac{n}{2}-\frac{m\omega}{2\alpha}\right)}\right] = \exp\left(-\frac{m\omega}{2}x^2\right)$,

et

$\lim_{\alpha\to 0}\left[R_n^{\left(n+\frac{m\omega}{\alpha},0\right)}\left(\sqrt{\alpha}x\right)\right] = (-1)^n H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right)$.

cela conduit à un résultat ordinaire sans déformation pour l'expression de la fonction d'onde

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\phi_1(x)\right)\right] \sim \left[\exp\left(-\frac{m\omega}{2}x^2\right)\right] H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right) \quad (5.64)$$

Pour tester nos resulats de ce chapitre , pour le cas ($\alpha = 0$) c'est-à-dire dans l'espace plat, nous solutionnons l'équation (5.11)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2\right)x^2 - 2e\varepsilon E x + m\omega + E^2 - m^2\right]\phi_1(x) = 0 \quad (5.65)$$

par la méthode directe et sans passer par la limite.

Tout d'abord, en utilisant le changement de variable suivant

$$x = y - \frac{e\varepsilon E}{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2} \tag{5.66}$$

l'équation précédente éq. (5.65) prendra la forme suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - a^2y^2 + b\right]\phi_1\left(y - \frac{e\varepsilon E}{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}\right) = 0 \tag{5.67}$$

où

$$a = \sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2} \tag{5.68}$$

$$b = \frac{e^2\varepsilon^2E^2}{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2} + m\omega + E^2 - m^2 \tag{5.69}$$

et qui s'écrira comme suit :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{b}{a} - z^2\right]\phi_1(z) = 0 \tag{5.70}$$

où l'on a utilisé

$$z = \sqrt{a}y \tag{5.71}$$

en fixant

$$b = (2n+1)a \tag{5.72}$$

cette dernière prendra la forme suivante [72],

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + 2n + 1 - z^2\right]\phi_1(z) = 0 \tag{5.73}$$

dont la solution est polynôme d'Hermite,

$$\phi_1(z) = \exp(-\frac{z^2}{2})\ H_n(z) \tag{5.74}$$

A partir de l'équation(5.72), nous obtenons l'expression du spectre d'énergie comme suit :

$$E_n = \pm \left(1 - \frac{e^2\varepsilon^2}{m^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[m^2 - m\omega + \sqrt{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}(2n+1)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.75)$$

Maintenant, pour déterminer la fonction d'onde quand $(\alpha = 0)$, on utilise la relation (5.74), on trouve l'expression suivante :

$$\phi(x) = C_3 \left[\exp(-\frac{\sqrt[2]{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}}{2}\left[x + \frac{e\varepsilon E}{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}\right]^2)\right] \times$$
$$\left(\begin{array}{c} H_n\left(\sqrt[4]{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}x + \frac{\sqrt[4]{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}e\varepsilon E}{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}\right) \\ \left[\frac{1}{m}\left(\sqrt[2]{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}x + \frac{e\varepsilon E}{\sqrt[2]{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}}\right) - \omega x\right] H_n\left(\sqrt[4]{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}x + \frac{\sqrt[4]{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}e\varepsilon E}{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}\right) \\ - 2\frac{\sqrt[4]{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}}{m} nH_{n-1}\left(\sqrt[4]{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}x + \frac{\sqrt[4]{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}e\varepsilon E}{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}\right) \\ - \left(\frac{i}{m}\right)(E - e\varepsilon x) H_n\left(\sqrt[4]{m^2\omega^2 - e^2\varepsilon^2}x + \frac{\sqrt[4]{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}e\varepsilon E}{m^2\omega^2-e^2\varepsilon^2}\right) \end{array}\right) \qquad (5.76)$$

C_3 est une constante de normalisation. Ces resulats concordent exactement avec ceux trouver en passant par la limite de (5.36) et (5.38).

Dans ce chapitre , nous avons résolu de manière précise et analytique l'oscillateur de Bosonique sous un champ électrique uniforme externe dans le contexte de l'algèbre de Sitter et anti-de Sitter. Dans les deux cas, on obtient les expressions des fonctions d'onde : dans le cas de Sitter, nous avons exprimé les fonctions d'onde en termes de polynômes de Jacobi, et dans le cas anti-de Sitter, nous avons exprimé les fonctions d'onde en termes de polynômes de Romanovski. Le spectre d'énergie correspondant est extrait. Cela dépend des paramètres de déformation α et ε ; qui reflète l'influence de l'oscillateur bosonique sous l'effet de la gravitation et de l'effet aberrant. On peut aussi écrire cela comme une série de toutes les puissances de n, ce qui traduit le phénomène de confinement, les cas limites sont étudiés, par exemple : dans la limite $\alpha \to 0$, nous avons acquis le spectre à plat de Snyder et l'espace anti-de Snyder. On déduit alors le cas pur de l'oscillateur Bosonique lorsque $\alpha = 0$ et $\varepsilon = 0$.

Chapitre 6

Conclusion générale

Ce travail de recherche a montré l'importance de l'espace déformé de l'impulsion de Snyder ayant induit la généralisation des résultats obtenus précédemment en mécanique quantique, par la résolution analytique des équations relativistes de Klein-Gordon (K-G), de Dirac et de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans l'espace Snyder-de Sitter. Ces équations relativistes décrivant la dynamique des particules, avec et sans spin, dans l'espace-temps de Snyder déformé en présence des constantes de déformation et des interactions extérieures qui se transforment au cas de l'équation différentielle de Schrödinger avec un autre potentiel effectif dans l'espace régulier différent à celui choisi initialement.

Dans le chapitre 2, plusieurs notions et concepts de la mécanique classique et quantique dans le contexte des algèbres déformées de Snyder-de Sitter ont été présentés.

Dans le chapitre 3, nous avons traité les équations relativistes de Klein-Gordon et de Dirac soumises à des potentiels vectoriels $V(x)$ et scalaires $S(x)$ linéaires, dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter déformé, en utilisant la représentation des moments p. Nous avons montré qu'un potentiel linéaire à une dimension pour le système relativiste dans un espace déformé peut être équivalent au potentiel de Rosen-Morse trigonométrique dans un espace régulier. Dans ce travail, le spectre d'énergie est exactement obtenu en fonction des paramètres de déformation α_1 et α_2 et il varie avec les puissances en n, ce qui explique clairement le phénomène de confinement dans le cadre du modèle de Snyder-de Sitter déformé, similaire au cas de la non-commutativité. Dans les deux cas, les solutions analytiques exactes sont obtenues et sont exprimées en termes de polynômes de Romanovski $R_n(x)$. Les cas limites $\alpha_1 \to 0$,et $\alpha_2 \to 0$ sont étudiés et les résultats obtenus sont en accord avec ceux de la littérature.

Dans le chapitre 4, nous avons établi les solutions exactes et explicites des oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter déformé dans l'espace des moments à une dimension en interaction avec un champ électrique ε ; connu sous le nom de l'effet de Stark. Les solutions exactes sont déterminées, et les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ sont obtenues et sont exprimées en termes de polynômes de Romonovski $R_n(x)$. Les spectres d'énergie E_n sont extraits, contenant des corrections supplémentaires dépendentes des paramètres de déformation α_1 et α_2 et des corrections de tous les ordres de $(\alpha_1\varepsilon)$ et $(\alpha_2\varepsilon)$, ce qui traduit l'effet Stark dans le modèle de Snyder-de Sitter. D'autre part, nous remarquons, que les spectres trouvés varient avec toutes les puissances en n, ce qui explique ainsi le phénomène de confinement dans le cadre de cette déformation. Par la suite, les cas limites sont analysés, comme le cas de l'oscillateur relativiste pur pour le spin (0 et 1/2) en passant par la limite $\varepsilon \to 0$, et le cas du champ électrique nul $(\varepsilon = 0)$.

Dans le chapitre 5 , nous avons résolu analytiquement l'oscillateur de Bosonique de DKP sous l'action du champ électrique uniforme externe dans le contexte de l'algèbre de Sitter et de l'anti-de Sitter. Dans les deux cas, nous avons obtenu les expressions des fonctions d'onde :

Pour le cas de Sitter, les fonctions d'onde sont exprimées en fonction de polynômes de Jacobi $P_n(x)$, et pour le cas anti-de Sitter, les fonctions d'onde sont exprimées en termes de polynômes de Romanovski $R_n(x)$. Le spectre d'énergie E_n correspondant pour ces deux cas est déduit, il dépend de α et ε ; ce qui reflète l'influence de l'effet de la gravitation sur le système étudié. Le cas de l'oscillateur Bosonique pur est déterminé quand $\alpha = 0$ et $\varepsilon = 0$ à la fin de ce chapitre.

Chapitre 7

Références

[1]Jeremy Bernstein. : Secrets of the Old One "Einstein, 1905". copernicus books an imprint of springer science+business media. **C**,61-100 (2006).

[2]Scott Walter. : Henri Poincaré et l'espace-temps conventionnel. CNRS, UMR 7117, Cahiers de philosophie de l'université de Caen **45**,(87–119) 11 (2008).

[3]H.S. Snyder. : Quantized space-time. Phys. Rev. **71**, 38 (1947) .

[4]H. S. Snyder. :The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time .Phys. Rev. **72**, 68 (1947).

[5]Rabin Banerjee, Kuldeep Kumar. : Dibakar Roychowdhury. : Symmetries of Snyder- de Sitter space and relativistic particle dynamics. JHEP 03 **060**, 1 (2011).

[6] M.C. Carrisi , S. Mignemi. : Snyder-de Sitter model from two-time physics. phys.revi. D **82**, 105031 (2010).

[7] Han-Ying Guo , Chao-Guang Huang c, Zhan Xu , Bin Zhou. : On special relativity with cosmological constant. Phys .Lett. A, **331,** 1 (2004).

[8] J. Kowalski-Glikman and L. Smolin. :Triply special relativity. Phys. Rev. D **70**, 065020 (2004).

[9] S. Mignemi. :Doubly special relativity in de Sitter spacetime. Annal . Phys. **522**, 924 (2010).

[10] S. Mignemi. :The Snyder-de Sitter model from six dimensions. Class. Quant. Grav. **26**, 245020 (2009).

[11]Giovanni Amelino-Camelia. : doubly-special relativity : first results and key open problems. Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002).

[12] Giovanni Amelino-Camelia :relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale . Int.

J. Mod. Phys. D. **11,** 35(2002)

[13]Giovanni Amelino-Camelia :Testable scenario for relativity with minimum length . Phys. Lett. B. **510**, 256 (2001).

[14]Jerzy Kowalski-Glikman. : De Sitter space as an arena for doubly special relativity. Phys Lette B **547**, 291(2002).

[15]S. Mignemi. : Doubly special relativity and translation invariance. Phys Lette B. **672,** 186 (2009).

[16]Jerzy Kowalski-Glikman , N. Sebastian . :Doubly special relativity and de Sitter space. Class. Quant. Grav. **20**,4799 (2003).

[17] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, H.-T. Wu and B. Zhou. :Snyder's model-de Sitter special relativity duality and de Sitter gravity. Class. Quant. Grav. **24**, 4009 (2007) .

[18]S. Mignemi. :Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space. Class. Quantum Grav. **29**, 3 (2012).

[19]A. Stern. : properties of Snyder space. Inte. J.of Geom Meth in Mode Phys. **9**, 1260016 (2012) .

[20]Juan M. Romero, J. David Vergara. : The Parametrized Relativistic Particle and the Snyder space-time. High Ener Phys - Theo. **1**, 2 (2006) . arXiv :hep-th/0602058 ;

[21]H. V. Peiris, E. Komatsu, L. Verde et autres. : first-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)[1] observations : implications for inflation. The Astrophys .J. Supplement Series, **148**, 218 (2003).

[22]M. M. Stetsko. : Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder-de Sitter algebra.J. Math Phys **56**, 012101 (2015).

[23]Carlos Leiva . : Harmonic Oscillator in Snyder space : The classical case and the quantum case. Prama. J. of phys. **74**, 169-172 (2010).

[24]M. Falek, M. Merad, T. Birkandan. : Dufn-Kemmer-Petiau oscillator with Snyder-de Sitter algebra. J. Math. Phys. **58**, 023501 (2017).

[25]Carlos Leiva, Joel Saavedra, J R Villanueva . : The Kepler problem in the Snyder space. Pramana J. Phys.**80**, 945 (2013).

[26]Florian Girelli, Etera R. Livine. : Scalar field theory in Snyder space-time : alternatives. Springer JHEP **03**. 132 (2011).

[27] S. D. Poisson. : Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.

[28]C. G. Jacobi. : Vorlesungen uber Dynamik. Verlag G. Reimer, Berlin, (1884).

[29]B Ivetić, S Meljanac , S Mignemi. : Classical dynamics on curved Snyder space. Class. Quantum Grav. **31,**105010(2-3)(2014).

[30]S. Mignemi , R. Štrajn1. : Snyder dynamics in a Schwarzschild spacetime. Phys Review D **90**, 044019 (2014).

[31]R. Banerjee, S. Kulkarni, S. Samanta. : Deformed symmetry in Snyder space and relativistic particle dynamics. J. High Energy Phys. **05**, 077 (2006).

[32]S. Mignemi. : Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model. Phys. Rev. D. **84**, 025021(2011).

[33]Salvatore Mignemi, Rina Štrajn. : Quantum Mechanics on a Curved Snyder Space. Advances in High Energy Phys.2016 ,2 (2016).

[34]Chryssomakolos C and Okon E. : Linear form of 3-scale special relativity algebra and the relevance of stability. Intern . J. of Mode Phys D. **13**, 1817(2004).

[35]Yang C N. : On Quantized Space-Time. Phys. Rev.**72**.874 (1947).

[36] S.N. Jena, M.R. Behera, S. Panda, Ground-state baryon masses in an equally mixed scalar-vector linear potential model. Phys. Rev. **55**, 291 (1997).

[37] L. Dittmann, T. Heinzl, A. Wip, Effective theories of confinement. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 108, **63** (2002)

[38] J.M. Overduin, P.S. Wesson, Kaluza–Klein gravity. Phys. Rep. **283**, 303 (1997)

[39]12. Ø. Gron, Classical Kaluza–Klein description of the hydrogen atom. IL Nuovo Cimento B **91**, 57 (1986).

[40] F. Dominguez-Adame, B. Mendez, Relativistic particles in orthogonal electric and magnetic fields with confining scalar potentials. Il Nuovo Cimento B **05**, 489 (1992)

[41] S. Zarrinkamar, A. Rajabi, H. Hassanabadi, Dirac equation for the harmonic scalar and vector potentials and linear plus coulomb-like tensor potential ; the SUSY approach. Ann. Phys. **325**, 2522 (2010).

[42] Y. Chargui, L. Chetouani, Exact solution of the one-dimensional Klein-Gordon equation with scalar and vector linear potentials in the presence of a minimal length. Chin. Phys. B **19**, 020305 (2010)

[43] T.K. Jana, P. Roy, Exact solution of the Klein–Gordon equation in the presence of a minimal length. Phys. Lett. A **373**, 1239 (2009).

[44] A. Tilbi, M. Merad, T. Boudjedaa, Particles of spin zero and 1/2 in electromagnetic field with confining scalar potential in modified heisenberg

algebra. Few Body Syst. **56**, 139 (2015).

[45] C.B. Compean, M. Kirchbach, The trigonometric Rosen–Morse potential in the supersymmetric quantum mechanics and its exact solutions. J. Phys. A Math. Gen. **39**, 550 (2005).

[46] Alvaro P. Raposo, Hans J. Weber, David E. Alvarez-Castillo, Mariana Kirchbach, Romanovski polynomials in selected physics problems. J. Cent. Eur. Phys. **5**, 254–273 (2007)

[47] Y. Chargui, A. Trabelsi, L. Chetouani, Exact solution of the $(1 + 1)$-dimensional Dirac equation with vector and scalar linear potentials in the presence of a minimal length. Phys. Lett. A **374**, 533 (2010)

[48] Su Ru-keng, Zhang Yuhong, Exact solutions of the Dirac equation with a linear scalar confining potential in a uniform electric field. J. Phys. A Math. Gen. **17**, 854 (1984)

[49] R.N. Costa Filho, G. Alencar, B. Skagerstam, J.S. Andrade, Morse potential derived from first principles. J. EPL **101**, 10009 (2013)

[50] D.E. Alvarez-Castillo, Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics, Master Thesis, March 2007. arXiv :0808.1642 [math-ph]

[51] M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions Series, (Dover Publications Inc, New York) . **55** , 37(1972).

[52] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, M. Nieto, Graphene and non-Abelian quantization. J. Phys. A Math. Theor. **45**, 135308 (2012).

[53] C. Quesne, Quadratic algebra approach to an exactly solvable position-dependent mass Schrödinger equation in two dimensions. SIGMA **3**, 067 (2007)

[54]I.O. Vakarchuk, G. Panochho, The effective mass of an impurity atom in the Bose liquid with a deformed Heisenberg Algebra. Ukr. J. Phys. **62**, 123 (2017)

[55] A. Kempf, Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. J. Math. Phys. **35**, 4483 (1994)

[56] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).

[57] M. Merad, M. Hadj Moussa, Exact solution of Klein–Gordon and Dirac equations with Snyder-de Sitter algebra. J. Few-Body Syst. **59**, 5 (2018). https ://doi.org/10.1007/s00601-017-1326-y

[58] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, The Dirac oscillator. J. Phys. A **22**, L817 (1989)

[59] D. Ito, K. Mori, E. Carriere, An example of dynamical systems with linear trajectory. Nuovo Cim A . **51**, 1119 (1967).

[60]W. de Sitter. : On the curvature of space. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **19 II**, 229-243(1917).

[61]S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. The large scale structure of space-time. Cambridge University Press, 1973.

[62]E. Eriksen, Ø. GrØn. : The de Sitter Universe Models. Inter. J. of Mod.phys D. **4**, 115(1995).

[63]V V Klishevich , V A Tyumentsev. : On the solution of the Dirac equation in de Sitter space. Class. Quantum Grav. **22**, 4263 (2005).

[64]M. Hadj Moussa . M. Merad. : Relativistic Oscillators in Generalized Snyder Model. J. Few-Body Syst. **59**, 2 (2018).https ://doi.org/10.1007/s00601-018-1363-1.

[65]Eric Greenwood, De Chang Dai, Dejan Stojkovic. : Time-dependent fluctuations and particle production in cosmological de Sitter and anti-de Sitter spaces. Phys Lett. B. **692**, 230 (2010).

[66]R J Torrence , W E Couch. : Transparency of de Sitter and anti-de Sitter spacetimes to multipole fields. Class. Quantum Grav. **2**, 545 (1985) .

[67]B. Binegar, C. Fronsdal, W. Heidenreich. : de Sitter QED. Annals of phys. **149**, 254 (1983).

[68]U. Khanal, N. Panchapakesan. : Massive Spin-Half Particle in the De Sitter Universe. Annals of phys, **138**, 263 (1982).

[69] Jun Ren , Yuan-Yue Pan. : Neutrino Oscillations in the de Sitter and the Anti-de Sitter Space-Time. Int J Theor Phys. **50**, 2614 (2011).

[70]Emilio Elizalde, Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Sachiko Ogushi. : Casimir effect in de Sitter and anti-de Sitter braneworlds. Phys Rev D. **67**, 063515-1 (2003).

[71]Md. Arifuzzaman, Md. Moniruzzaman, S. B. Faruque. : An Exact Solution of the Dirac Oscillator Problem in the Context of Generalized Uncertainty Principle. Inter. J. of Res in Eng and Tech (IJRET). **02**, 434 (2013).

[72] Gabor Szegö. : Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Providence, Rhode Island. XXIII ,106 (1939).

Chapitre 8

Résumé - Abstract

8.1 Résumé :

Notre thèse est composée essentiellement de deux parties :

1-Dans la première partie, plusieurs notions, concepts et techniques sur les algèbres déformées ont été exposés

2-Pour la deuxième partie, certaines applications ont été présentées :

•Traitement de l'équation de Klein-Gordon et Dirac dans l'espace des moments en interaction avec des potentiels vectoriels et scalaires linéaires dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter déformé. Le système déformé s'est transformé au cas de l'interaction avec le potentiel de Rosen-Morse trigonométrique dans un espace régulier.

•Résolution de l'oscillateur de Klein-Gordon et celui de Dirac sous l'influence de l'effet Stark dans le contexte du modèle de Snyder-de Sitter déformé.

•L'étude de l'oscillateur du Duffin-Kemmer-Petiau en présence d'un champ électrique dans le même contexte de la déformation des algèbres de Sitter et anti-de Sitter.

Dans tous les cas, les spectres énergétiques et les fonctions d'ondes correspondantes sont exactement et analytiquement déterminés et concordent avec ceux de la littérature. Aussi, les cas limites et quelques propriétés thermodynamiques du système sont déduits.

Mots-Clés : algèbres déformées, Klein-Gordon, Dirac, oscillateur, Duffin-Kemmer-Petiau.

8.2 Abstract :

Our thesis is essentially composed of two parts :

1-In the first part, several notions, concepts and techniques on deformed algebras were exposed

2-For the second part, some applications were presented :

•The Klein-Gordon and Dirac equation in the space of moments interacting with linear vectoral and scalar potentials in the context of the deformed Snyder-de Sitter model were treated. The deformed system has transformed to the case of the interaction with the Rosen-Morse trigonometric potential in a regular space.

•Klein-Gordon and Dirac oscillators under the influence of Stark effect in the context of deformed Snyder-de Sitter model were solved.

•The study of the Duffin-Kemmer-Petiau oscillator in the presence of an electric field in the same context of the de-Sitter and anti-de-Sitter algebras' deformation.

In all cases, the energy spectra and the corresponding wave functions are exactly and analytically determined and are consistent with those in the literature. Also, the limiting cases and some thermodynamic properties of the system are deduced.

Keywords : deformed algebras , Klein-Gordon, Dirac, oscillator, Duffin-Kemmer-Petiau.

Few-Body Syst (2018) 59:5
https://doi.org/10.1007/s00601-017-1326-y

M. Merad · M. Hadj Moussa

Exact Solution of Klein–Gordon and Dirac Equations with Snyder–de Sitter Algebra

Received: 3 July 2017 / Accepted: 15 December 2017

Abstract In this paper, we present the exact solution of the $(1+1)$-dimensional relativistic Klein–Gordon and Dirac equations with linear vector and scalar potentials in the framework of deformed Snyder–de Sitter model. We introduce some changes of variables, we show that a one-dimensional linear potential for the relativistic system in a space deformed can be equivalent to the trigonometric Rosen–Morse potential in a regular space. In both cases, we determine explicitly the energy eigenvalues and their corresponding eigenfunctions expressed in terms of Romonovski polynomials. The limiting cases are analyzed for α_1 and $\alpha_2 \rightarrow 0$ and are compared with those of literature.

1 Introduction

It is well known that quantum field theory is an indisputable culmination, though still in development of quantum mechanics and the laws of relativity. Despite the success of its experimental predictions, it still has to face divergence problems, which cannot be eliminated except by mathematical regularization and physical renormalization methods. New approaches have been developed to tackle this difficulty, among them the Snyder model based on non-commutative geometry, which provides a motive for introducing an effective ultraviolet cutoff. In addition to the universal constant, the velocity of light, this model imports two other constants, the Planck energy and the Sitter ray that is bounded to the cosmological constant [1], whose associated algebra is characterized by a modification to the canonical commutation relations of position and momentum operators. This implies the appearance of a nonzero minimal length in position and momentum uncertainties. At the scale of both classical and quantum mechanics, a particular advantage has been observed in the framework under discussion. Namely, both classical and quantum mechanical equations describing free motions are exactly solvable, as is also the case of motion within the harmonic oscillator potential [2–4]. The deformed conformal-Poincaré symmetries consistent with the Snyder–de Sitter space is studied in [1]. The classical trajectory, the semi classical quantization and the Kepler problem are discussed in [5,6]. The case of the Dirac oscillator in Snyder model was considered in [7] and an exact solution of the one-dimensional Bosonic oscillator for spin 1 and spin 0 particles with Snyder–de Sitter model is presented by [8]. On the other hand, in literature, an interaction of great importance has found many applications in various fields of physics, which is the interaction of the linear potential. It was established to describe phenomenologically the non-perturbative gluon interactions [9], and played a major role in describing the theories of confinements between static quarks in pure Yang–Mills theory [10]. Also, it is necessary in the cosmological scalar field in general relativity and in the Kaluza–Klein theory as the five dimensional [11,12] and in a general way for the phenomena related to the confinement [13–17]. The main purpose of this paper is to clarify the confinement phenomenon through

M. Merad (✉)· M. Hadj Moussa
Laboratoire (L.S.D.C), Département des Sciences de la Matière, Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie, Université de Oum El Bouaghi, 04000 Oum El Bouaghi, Algeria
E-mail: meradm@gmail.com

Published online: 27 December 2017

the solution of the $(1+1)$-dimensional Klein–Gordon (K–G) and Dirac equations with linear scalar and vector potentials in momentum space within the framework of deformed Snyder–de Sitter model in the first place. On the other hand, we will show that the problem admits exact analytical solutions and that a one-dimensional linear potential for the relativistic system in a space deformed can be equivalent to the trigonometric Rosen–Morse potential in a regular space. Our manuscript is organized as follows: in Sect. 2, we provide the formalism of quantum mechanics in deformed Snyder–de Sitter model in momentum representation. In Sect. 3, using the momentum space representation, we solve exactly the K–G equation, the exact bound states spectrum are determined and the corresponding momentum space wave function are obtained and expressed in terms of Romonovski polynomials. In Sect. 4, we follow the same steps of the previous section, we solve exactly the Dirac equation within the framework of deformed Snyder–de Sitter model. The energy eigenvalues and the corresponding momentum eigenfunctions are determined.

2 Formalism of Quantum Mechanics in Deformed Snyder–de Sitter Model

In this section, one expose a brief reminder of the deformed Heisenberg algebra in Snyder–de Sitter model whose position and momentum coordinates operator respectively $\widehat{x}$ and $\widehat{p}$ are defined as follows [2,3,7]

$$\widehat{x} = \widehat{\chi} + \lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \widehat{\mathcal{P}} \tag{1}$$

$$\widehat{p} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \widehat{\chi} + (1-\lambda) \widehat{\mathcal{P}} \tag{2}$$

where $\widehat{\chi}$ and $\widehat{\mathcal{P}}$ are defined by

$$\begin{aligned} \widehat{\chi} &= i\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \\ \widehat{\mathcal{P}} &= \frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

These operators satisfy the deformed commutation relation [2,7,8]

$$[x, p] = i\left[1 + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 p^2 + \alpha_1 \alpha_2 (xp + px)\right], \tag{4}$$

and this commutation relation gives rise to uncertainty of the Heisenberg relation to the appearance of a nonzero minimal length in position and momentum uncertainties as the following form [7]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}(1 + (\alpha_1 \langle x \rangle + \alpha_2 \langle p \rangle)^2 + \alpha_1^2 (\Delta x)^2 + \alpha_2^2 (\Delta p)^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \Delta x \Delta p), \tag{5}$$

where α and β are two coupling constants and we distinguish two kinds of subalgebra. When $\alpha^2, \beta^2 > 0$, this deformed algebra is characterized by the existence of both a minimal length and a minimal momentum and it is called Snyder–de Sitter model (SdS)) and for $\alpha^2, \beta^2 < 0$, it is called anti-Snyder–de Sitter model (aSdS)and no restriction arises [18].

3 Solution of Klein–Gordon Equation with the Snyder–de Sitter Model

The dynamics of K–G particle in $(1+1)$ dimension without spin of mass m in the presence of a scalar potential $S(x)$ and a vector potential $V(x)$ in the framework of Snyder–de Sitter model is governed by this equation: we put $\hbar = c = 1$

$$\left[p^2 + (m + S(x))^2\right]\psi = \left[E - V(x)\right]^2 \psi, \tag{6}$$

where the vector and the scalar potentials are chosen linear as follows:

$$\begin{aligned} S(x) &= \gamma \widehat{x} \\ V(x) &= \mu \widehat{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

We replace $S(x)$ and $V(x)$ in K–G equation and after the direct calculations, we obtain the following expression:

$$\begin{aligned}&\Bigg[\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}+\gamma^2-\mu^2\right)\widehat{\chi}^2+\left((1-\lambda)^2+\lambda^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(\gamma^2-\mu^2)\right)\widehat{\mathcal{P}}^2+\left(\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\gamma^2-\mu^2)\right)\\&-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\lambda))(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi})+2(m\gamma+\mu E)\widehat{\chi}+2\lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m\gamma+\mu E)\widehat{\mathcal{P}}\\&+m^2-E^2\Bigg]\psi(p)=0.\end{aligned} \tag{8}$$

In order to reduce the differential equation (8) to a simpler form and to preserve the symmetry of the operators to avoid complex eigenvalues, we remove the term $(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi})$ by the fixation of the value of λ as:

$$\lambda=\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}, \tag{9}$$

with $\alpha_1^2+\alpha_2^2\gamma^2\neq\alpha_2^2\mu^2$.

To use this relation (9), the last equation (8) in momentum space becomes,

$$\begin{aligned}&\Bigg[\frac{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}{\alpha_2^2}(1-\alpha_2^2p^2)\frac{d^2}{dp^2}+\Bigg(\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]p\\&+2i(m\gamma+\mu E)\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\Bigg)\frac{d}{dp}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\frac{p^2}{1-\alpha_2^2p^2}\\&+2\frac{\alpha_1\alpha_2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}+m^2-E^2\Bigg]\psi(p)=0.\end{aligned} \tag{10}$$

or in a simplified form by introducing the following change of variable

$$q=-\frac{1}{\alpha_2}\cos^{-1}(\alpha_2p), \tag{11}$$

we get as a result:

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}{\alpha_2^2}\frac{d^2}{dq^2}+2i(m\gamma+\mu E)\frac{d}{dq}\\&+\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\cot^2(\alpha_2q)+\frac{2\alpha_1(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\cot(\alpha_2q)\\&+m^2-E^2\Bigg]\psi(q)=0,\end{aligned} \tag{12}$$

where the range of the new variable is $q\in]-\propto,+\propto[$. To eliminate the first derivative, playing the role of a phase, making this substitution,

$$\psi(q)=f(q)\exp\left(i\left(\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\right)\right) \tag{13}$$

we obtain the following equation for $f(q)$,

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{d^2}{dq^2}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot^2(\alpha_2q)+2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2q)\\&-\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\Bigg]f(q)=0,\end{aligned} \tag{14}$$

which can be put in the form of Schrödinger type equation in trigonometric Rosen–Morse potential

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} - A_1 csc^2(\alpha_2 q) - D\cot(\alpha_2 q) + \epsilon\right] f(q) = 0, \tag{15}$$

expressed in terms of $csc(\alpha_2 q)$ and A_1, D and ϵ are given by

$$A_1 = \frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}$$

$$D = \frac{2\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} \tag{16}$$

$$\epsilon = \frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} + \frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} - \frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}. \tag{17}$$

Now to solve the above Eq. (15), we use the following ansatz,

$$f(q) = (1+y^2)^{(\beta-1)}\left(\exp(-\alpha\cot^{-1}(y))\right) g(y), \tag{18}$$

Where $y = \cot(\alpha_2 q)$ and α and β will be determined later.

By means of the substitution given by the Eq. (15), the differential equation for $g(y)$ will reduce to the Romanovski polynomials one $R_n^{(k,l)}(y)$,

$$\begin{aligned}\Bigg[&(1+y^2)\frac{d^2}{dy^2} + 2\left((2\beta-1)y+\alpha\right)\frac{d}{dy} \\ &+ \frac{\left(\alpha^2-4(\beta-1)^2+\frac{\epsilon}{\alpha_2^2}\right) + \left(4\alpha(\beta-1)-\frac{D}{\alpha_2^2}\right)y}{1+y^2} \\ &+ 4(\beta-1)^2 + 2(\beta-1) - \frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\Bigg] g(y) = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

As it is well known in the literature, there is a method called Sturm–Liouville for solving some second-order differential equations, used by several authors [19]. So that our differential equation (19) coincides with that verifying the Romanovski polynomials $R_n^{(k,l)}(y)$ [20], with $k = 2-2\beta$, and $l = 2\alpha$.

$$S_1(y)\frac{d^2R_n^{(k,l)}(y)}{dy^2} + t(y)\frac{dR_n^{(k,l)}(y)}{dy} + \Omega_n R_n^{(k,l)}(y) = 0, \tag{20}$$

with

$$S_1(y) = 1+y^2, \quad t(y) = 2\left((2\beta-1)y+\alpha\right).$$

It is now easy to fix the parameters α and β by the following conditions,

$$4\alpha(\beta-1) - \frac{D}{\alpha_2^2} = 0 \tag{21}$$

$$\alpha^2 - 4(\beta-1)^2 + \frac{\epsilon}{\alpha_2^2} = 0 \tag{22}$$

and

$$\Omega_n = -n\left[\frac{dt(y)}{dy} + \frac{1}{2}(n-1)\frac{d^2S_1(y)}{dy^2}\right] = 4(\beta-1)^2 + 2(\beta-1) - \frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}. \tag{23}$$

After a straightforward calculations using the relations (21) and (23), we find

$$\beta_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1 + 4\frac{(\gamma^2 - \mu^2)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]^2}} \tag{24}$$

$$\alpha_n = \frac{2\alpha_1(m\gamma + \mu E_n)}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]^2\left[-2n - 1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}}\right]}, \tag{25}$$

by imposing $\mu^2 - \gamma^2 \leq \frac{1}{4}\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]^2$ to avoid complex eigenvalues. To determine the expressions of the energy spectrum and the wave functions, we use the relations (17) and (22), we have,

$$\begin{aligned} E_n^{\pm} &= -\frac{m\gamma\mu\theta_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2) + \mu^2\theta_n} \\ &\pm \frac{m\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right] + \mu^2\theta_n}\left[\frac{\gamma^2\mu^2(\theta_n)^2}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]^2}\right. \\ &- \left(1 + \frac{\mu^2\theta_n}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]}\right)\left(\frac{\gamma^2\theta_n}{\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]} + \frac{\gamma^2 - \mu^2}{m^2\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]}\right. \\ &\left.\left. - \frac{4\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right](\beta_n - 1)^2}{m^2} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{26}$$

where

$$\theta_n = \alpha_2^2 + \frac{\alpha_1^2}{4\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)\right]^2(\beta_n - 1)^2}. \tag{27}$$

Now, the shape of the energy spectrum can be tested; using the limit $\alpha_1 \to 0$, then: $\theta_n = \alpha_2^2$, and, $\beta_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1 + 4\frac{1}{\alpha_2^4(\gamma^2-\mu^2)}}$. We obtain the same result of the K–G equation with the presence of minimal length [15,16],

$$\lim_{\alpha_1\to 0} E_n^{\pm} = -\frac{m\mu}{\gamma} \pm \frac{\gamma^2 - \mu^2}{\gamma}\sqrt{\alpha_2^2\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \pm \alpha_2^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + 4\frac{1}{\alpha_2^4(\gamma^2 - \mu^2)}}}, \tag{28}$$

and when we study the limit $\alpha_2 \to 0$, we obtain:

$$\lim_{\alpha_2\to 0}\left(\lim_{\alpha_1\to 0} E_n^{+}\right) = -\frac{m\mu}{\gamma} \pm \frac{(\gamma^2 - \mu^2)^{\frac{3}{4}}}{\gamma}\sqrt{2n + 1}, \tag{29}$$

which coincides exactly with the result of the K–G equation in the presence of a scalar potential and a vector potential in a regular space by [13].

And by the relations (13) and (18), we will have the final form of the wave function in the former variable p as:

$$\begin{aligned} \psi_n(p) &= C_n\left(1 - \alpha_2^2 p^2\right)^{(1-\beta_n)} \\ &\times \left[\exp\left(\alpha_n - i\frac{(m\gamma + \mu E_n)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(\gamma^2 - \mu^2)}\right)\cos^{-1}(\alpha_2 p)\right] R_n^{(k_n,l_n)}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}}\right), \end{aligned} \tag{30}$$

where C_n is a normalization constant.

To determine C_n, we use the condition of normalization

$$\int_{-\frac{1}{\alpha_2}}^{+\frac{1}{\alpha_2}} \frac{dp}{\sqrt[2]{1-\alpha_2^2 P^2}} \psi_n^* (p) \, \psi_n (p) = 1, \tag{31}$$

and the orthogonality relation of the Romanovski polynomials [20],

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(k_n,l_n)} (x) \, R_m^{(k_n,l_n)} (x) \, R_n^{(k_n,l_n)} (x) \, dx = \delta_{mn}, \tag{32}$$

where the weight function $w^{(k_n,l_n)} (x)$ is given as

$$w^{(k_n,l_n)} (x) = \left(1+x^2\right)^{-k_n} \exp(l_n tg^{-1} (x)). \tag{33}$$

After a direct calculation and some appropriate changes, we find:

$$C_n = \sqrt{\alpha_2} \tag{34}$$

4 Solution of Dirac Equation with the Snyder–de Sitter Model

In this section, we follow the same steps as the first case without spin to examine the $(1+1)$-dimensional Dirac equation with vector and scalar linear potentials in the context of the Snyder–de Sitter model, let us consider the Dirac equation defined as follows, (we put $\hbar = c = 1$),

$$[(E - V(x)) - \sigma_2 p - \sigma_3 (m + S(x))] \, \psi = 0, \tag{35}$$

where we replaced the Dirac matrices by the Pauli matrices σ_2 and σ_3 given by

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

To solve the Dirac equation, we use the following ansatz:

$$\psi = \left\{(E - V(x)) + \sigma_2 p + \sigma_3 \Big[m + S(x)\Big]\right\} \phi. \tag{37}$$

By a direct calculation, from (35) and (37) we find the Dirac equation with its quadratic form,

$$\left\{[E - V(x)]^2 - p^2 - \Big[m + S(x)\Big]^2 + \Big[p, \sigma_3 S(x) + V(x)\Big]\sigma_2\right\} \phi = 0, \tag{38}$$

which is similar to that of Klein–Gordon equation with an additional spin interaction term and $\Big[p, \sigma_3 S(x) + V(x)\Big]$ is the commutator between p and $(\sigma_3 S(x) + V(x))$.

To resolve (38),we use the relations (1), (2) and(7), then the equation (38) will be converted to:

$$\begin{aligned} &\left\{\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \gamma^2 - \mu^2\right)\widehat{\chi}^2 + \left((1-\lambda)^2 + \lambda^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(\gamma^2 - \mu^2)\right)\widehat{\mathcal{P}}^2 \right. \\ &+ \left(\lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\gamma^2 - \mu^2) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\lambda)\right)\left(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi}\right) + 2(m\gamma + \mu E)\widehat{\chi} \\ &\left. + 2\lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m\gamma + \mu E)\widehat{\mathcal{P}} + \frac{i(\gamma\sigma_3 + \mu)\sigma_2}{1 - \alpha_2^2 p^2} + m^2 - E^2\right\} \phi = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

We impose a condition to eliminate the term $(\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\widehat{\chi})$ which fixes the value of the arbitrary parameter λ as indicated in the previous section, we find the same value as that for the Eq. (9), and the Eq. (39) will have this form:

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\alpha_2^2}(1-\alpha_2^2p^2)\frac{d^2}{dp^2}\\&+\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)p+2i(m\gamma+\mu E)\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\right)\frac{d}{dp}\\&+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\frac{p^2}{1-\alpha_2^2p^2}+2\frac{\alpha_1\alpha_2(m\gamma+\mu E)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\\&+\frac{i(\gamma\sigma_3+\mu)\sigma_2}{1-\alpha_2^2p^2}+m^2-E^2\Bigg]\phi(p)=0.\end{aligned} \tag{40}$$

By using the old change of variable Eq. (11) and the following transformation

$$\phi(q)=\xi(q)\exp\left(i\frac{\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)q}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\right), \tag{41}$$

The Eq. (40) becomes,

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{d^2}{dq^2}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot^2(\alpha_2q)+2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2q)\\&+\frac{i\alpha_2^2(\gamma\sigma_3+\mu)\sigma_2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]\sin^2(\alpha_2q)}-\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\\&+\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Bigg]\xi(q)=0,\end{aligned} \tag{42}$$

and which can be expressed in terms of $csc(\alpha_2q)$

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{d^2}{dq^2}+\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}csc^2(\alpha_2q)\\&+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\sqrt{\gamma^2-\mu^2}\csc^2(\alpha_2q)\Sigma+2\frac{\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}\cot(\alpha_2q)\\&-\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}-\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\Bigg]\xi(q)=0\end{aligned} \tag{43}$$

where Σ is the matrix given by $\Sigma=\begin{pmatrix}0 & \frac{\gamma+\mu}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}\\ \frac{\gamma-\mu}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}} & 0\end{pmatrix}$ whose eigenvalues of the matrix are $\sigma^{\pm}=\pm1$. To solve the Eq. (43), we put the solution as $\xi(q)=u_\sigma\eta_\sigma(q)$ with u_σ is a two-component eigenvector of matrix Σ with eigenvalue σ, then we obtain:

$$\left[\frac{d^2}{dq^2}-A_2csc^2(\alpha_2q)-D\cot(\alpha_2q)+\epsilon\right]\eta_\sigma(q)=0, \tag{44}$$

where

$$A_2=\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\sigma\frac{\alpha_2^2\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} \tag{45}$$

$$D=\frac{2\alpha_1\alpha_2^2(m\gamma+\mu E)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2} \tag{46}$$

and

$$\epsilon=\frac{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\frac{\alpha_2^4(m\gamma+\mu E)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}-\frac{\alpha_2^2(m^2-E^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}. \tag{47}$$

This last equation (44) has the same form as (15) except A_1 is changed around A_2, for this we follow the same steps to that of Klein–Gordon and by a direct calculation, we obtain the expression of the energy as follows:

$$\begin{aligned}E_n^{\pm}=&-\frac{m\gamma\mu\pi_n}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)+\mu^2\pi_n}\\&\pm\frac{m\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)+\mu^2\pi_n}\left[\frac{\gamma^2\mu^2(\pi_n)^2}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}-\left(1+\frac{\mu^2\pi_n}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\right)\right.\\&\left(\frac{\gamma^2\pi_n}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}+\frac{\gamma^2-\mu^2}{m^2\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]}\right.\\&\left.\left.-\frac{4\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right](\tau_n-1)^2}{m^2}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{48}$$

where

$$\tau_n=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{1+4\left[\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\sigma\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\right]}, \tag{49}$$

which can be written in the following simplified form

$$\tau_n=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\pm\frac{\sigma}{4}\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} \tag{50}$$

and

$$\rho_n=\frac{2\alpha_1(m\gamma+\mu E_n)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2\left(-2n-1\pm\sqrt{1+4\left[\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2}+\sigma\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\right]}\right)} \tag{51}$$

$$\pi_n=\alpha_2^2+\frac{\alpha_1^2}{4\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]^2(\tau_n-1)^2}. \tag{52}$$

At this level, we can study the limit cases, for $\alpha_1\to 0$, we have: $\pi_n=\alpha_2^2$, and $\tau_n=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\pm\frac{\sigma}{4}\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}$, we find the same result in the minimal length case for Dirac equation [21], where:

$$\lim_{\alpha_1\to 0}E_n^{\pm}=-\frac{m\mu}{\gamma}\pm\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)^2n^2\pm 2(\gamma^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}n}, \tag{53}$$

and also, when for $\alpha_2\to 0$, we obtain:

$$\lim_{\alpha_2\to 0}\left(\lim_{\alpha_1\to 0}E_n^{+}\right)=-\frac{m\mu}{\gamma}\pm\frac{1}{\gamma}\sqrt{2(\gamma^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}n}, \tag{54}$$

which is the same result in ordinary case [22].

In the same way as in the previous section, we can determine the solution of Eq. (40) as follows:

$$\phi_n(p) = u_\sigma \left(1-\alpha_2^2 p^2\right)^{(1-\tau_n)} \left[exp\left(i\frac{\alpha_2(m\gamma+\mu E_n)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} - \rho_n\right)\cot^{-1}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right)\right] \times R_n^{(k_n,l_n)}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right). \tag{55}$$

To deduce the expression of the bound-states spinor, we use the relations (37) and (55), and by a direct calculation, we obtain the final solution in term of the old variable in condensed form,

$$\begin{aligned}(\psi_{n\sigma}^1)(p) = C_n^{'}\Bigg\{&\left[-\sigma\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{(\gamma-\mu)}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}} + i(\gamma-\mu)\right]\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\frac{d}{dp}\\ &+\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\left[\alpha_1\alpha_2(\gamma-\mu) - \sigma i\alpha_2^2(\gamma-\mu)\sqrt{\gamma^2-\mu^2}\right]\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\\ &+m+E_n\Bigg\} Q_n(p),\end{aligned} \tag{56}$$

and

$$\begin{aligned}(\psi_{n\sigma}^2)(p) = C_n'\Bigg\{&\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \sigma i\sqrt{\gamma^2-\mu^2}\right]\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}\frac{d}{dp}\\ &-\sigma\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)}\left[\alpha_1\alpha_2\sqrt{\gamma^2-\mu^2} + i\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)\right]\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\\ &+\frac{(\gamma-\mu)}{\sqrt{\gamma^2-\mu^2}}(E_n-m)\Bigg\} Q_n(p),\end{aligned} \tag{57}$$

where

$$\begin{aligned}Q_n(p) = &\left(1-\alpha_2^2p^2\right)^{(1-\tau_n)}\left[exp\left(i\frac{\alpha_2(m\gamma+\mu E_n)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(\gamma^2-\mu^2)} - \rho_n\right)\cot^{-1}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right)\right]\\ &\times R_n^{(k_n,l_n)}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2p^2}}\right),\end{aligned} \tag{58}$$

and $C_n^{'}$ is a normalization constant. At the end of this paper, we note that, it is also possible to study the same problem in position space by using these relationships,

$$X = (1-\nu)\frac{x}{\sqrt{1-\alpha_1x^2}} - i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\sqrt{1-\alpha_1x^2}\partial_x, \tag{59}$$

$$P = -i\hbar\sqrt{1-\alpha_1x^2}\partial_x + \nu\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{x}{\sqrt{1-\alpha_1x^2}}, \tag{60}$$

with ν is an arbitrary parameter, as it is also possible to generalize this work in the two and three dimensions cases by introducing the following generalized forms [2],

$$\widehat{x}_i = \widehat{\chi}_i + \lambda\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\widehat{\mathcal{P}}_i \tag{61}$$

$$\widehat{p}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\widehat{\chi}_i + (1-\lambda)\widehat{\mathcal{P}}_i, \tag{62}$$

where $\widehat{\chi}_i$ and $\widehat{\mathcal{P}}_i$ are defined by:

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_i &= i\sqrt{1-\alpha_2^2 p_k^2}\frac{\partial}{\partial p_i} \\ \widehat{\mathcal{P}}_i &= \frac{p_i}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p_k^2}}, \end{aligned} . \tag{63}$$

only the situation at this stage in three dimensions, may seem a bit complicated, because in addition to the centrifugal term of the orbital momentum and the spin orbit coupling for the case of the spinor system, there are additional interaction corrections that depend on the deformation parameters α_1 and α_2, which could be interpreted as an interaction of the electric dipole moment with magnetic moment and makes the calculations excessively difficult.

5 Conclusion

In this work, we have demonstrated an explicit calculation of the relativistic Klein–Gordon and Dirac equations subjected with linear vector and scalar potentials in the context of the deformed Snyder–de Sitter model by utilizing the momentum space representation. By using some transformations, we have shown that a one-dimensional linear potential for the relativistic system in a space deformed can be equivalent to the trigonometric Rosen–Morse potential in a regular space. These transformations used here are exactly similar to the one used in general relativity, in opposition to a Galilean transformation that is additive and may be interpreted as non-additive translation operator responsible for the dilation and contraction [23]. In both cases, it is shown that the problem admits exact analytical solutions expressed in terms of Romanovski polynomials. The exact energy spectrum is determined depending on two deformation parameters α_1 and α_2, and it varies directly with powers in n, which explains the confinement phenomenon in our study in the framework of the deformed Snyder–de Sitter model, as in the noncommutative case. The limiting cases for $\alpha_1 \to 0$ and $\alpha_2 \to 0$ are studied and the results obtained are in perfect agreement with those of literature.

Finally, it would be interesting to investigate the generalization of our study for the case of two and three dimensions, such as the case of electromagnetic field with confining scalar potential. This work is currently underway.

Acknowledgements We wish to thank the referees for their useful comments which greatly improved the manuscript.

Appendix

In general, through the following generalized hypergeometric equation,

$$(ax^2+bx+c)\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} + (dx+e)\frac{dy_n(x)}{dx} - (n(n-1)+2n(1-p))\,y_n(x) = 0. \tag{64}$$

and putting $a = c = 1, b = 0, d = 2(1-p)$ and $e = q$, we obtain the Romanovski polynomials $R_n^{(p,q)}$ differential equation as [24]

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2 R_n^{(p,q)}(x)}{dx^2} + (2(-p+1)x+q)\frac{dR_n^{(p,q)}(x)}{dx} - (n(n-1)+2n(1-p))\,R_n^{(p,q)}(x) = 0, \tag{65}$$

and the correspondence with the Rodrigues representation is given by,

$$R_n^{(p,q)} = \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(1+x^2\right)^n w(x)\right) \tag{66}$$

with the weight function $w(x)$ is

$$w(x) = \left(1 + x^2\right)^{-p} \exp(q \tan^{-1}(x)). \tag{67}$$

We have also the differential equation satisfied by the Jacobi polynomials $P_n^{(u,v)}(x)$ reads as

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2 P_n^{(u,v)}(x)}{dx^2} + (u - v - (u + v + 2)\, x) \frac{d P_n^{(u,v)}(x)}{dx} - n\,(n + u + v + 1)\, P_n^{(u,v)}(x) = 0 \tag{68}$$

By the complexification of the argument, $x \to ix$ in Eq. (68), and compare the two equations, we deduce the following parameters.

$$u = -p - i\frac{q}{2}, \quad v = u^*, \tag{69}$$

and the relation between the Romanovski polynomials and the complex Jacobi polynomials, differ by at most a phase factor, as follows:

$$R_n^{(p,q)}(x) = i^n P_n^{\left(-p-i\frac{q}{2}, -p+i\frac{q}{2}\right)}(ix), \tag{70}$$

or by the inverse way

$$P_n^{(p,q)}(x) = -\left(i^n\right) R_n^{\left(i(p-q), \frac{1}{2}(p+q)+1\right)}(ix) \tag{71}$$

Now, we use this relation between the Jacobi polynomials $P_n^{(u,v)}(ix)$ and the hypergeometric function F as the following form [25]:

$$P_n^{(u,v)}(ix) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(v+2)}{\Gamma(v-n+2)} F\left(-n, n+1+2\mathrm{Re}v; 1+v; \frac{1+ix}{2}\right), \tag{72}$$

we obtain this new relation:

$$R_n^{(p,q)}(x) = \frac{(-i)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(-p + i\frac{q}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(-p + i\frac{q}{2} - n + 2\right)} F\left(-n, n+1-2p; 1-p+i\frac{q}{2}; \frac{1+ix}{2}\right) \tag{73}$$

References

1. R. Banerjee, S. Kulkarni, S. Samanta, Deformed symmetry in Snyder space and relativistic particle dynamics. J. High Energy Phys. **05**, 077 (2006)
2. S. Mignemi, Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space. Class. Quantum Gravity **29**, 215019 (2012)
3. S. Mignemi, R. Strajn, Quantum mechanics on a curved snyder space. Adv. High Energy Phys. **2016**, 1328284 (2016)
4. S. Mignemi, Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model. Phys. Rev. D **84**, 025021 (2011)
5. C. Leiva, Harmonic oscillator in Snyder space: the classical case and the quantum case. Pramana J. Phys. **74**, 172 (2010)
6. C. Leiva, J. Saavedra, J.R. Villanueva, The Kepler problem in the Snyder space. Pramana J. Phys. **80**, 945 (2013)
7. M.M. Stetsko, Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder–de Sitter algebra. J. Math. Phys. **56**, 012101 (2015)
8. M. Falek, M. Merad, T. Birkandan, Dufn–Kemmer–Petiau oscillator with Snyder–de Sitter algebra. J. Math. Phys. **58**, 023501 (2017)
9. S.N. Jena, M.R. Behera, S. Panda, Ground-state baryon masses in an equally mixed scalar-vector linear potential model. Phys. Rev. **55**, 291 (1997)
10. L. Dittmann, T. Heinzl, A. Wip, Effective theories of confinement. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108**, 63 (2002)
11. J.M. Overduin, P.S. Wesson, Kaluza–Klein gravity. Phys. Rep. **283**, 303 (1997)
12. Ø. Gron, Classical Kaluza–Klein description of the hydrogen atom. IL Nuovo Cimento B **91**, 57 (1986)
13. F. Dominguez-Adame, B. Mendez, Relativistic particles in orthogonal electric and magnetic fields with confining scalar potentials. Il Nuovo Cimento B **05**, 489 (1992)
14. S. Zarrinkamar, A. Rajabi, H. Hassanabadi, Dirac equation for the harmonic scalar and vector potentials and linear plus coulomb-like tensor potential; the SUSY approach. Ann. Phys. **325**, 2522 (2010)
15. Y. Chargui, L. Chetouani, Exact solution of the one-dimensional Klein-Gordon equation with scalar and vector linear potentials in the presence of a minimal length. Chin. Phys. B **19**, 020305 (2010)
16. T.K. Jana, P. Roy, Exact solution of the Klein–Gordon equation in the presence of a minimal length. Phys. Lett. A **373**, 1239 (2009)
17. A. Tilbi, M. Merad, T. Boudjedaa, Particles of spin zero and 1/2 in electromagnetic field with confining scalar potential in modified heisenberg algebra. Few Body Syst. **56**, 139 (2015)
18. H.S. Snyder, Quantized space-time. Phys. Rev. **71**, 38 (1947)

19. C.B. Compean, M. Kirchbach, The trigonometric Rosen–Morse potential in the supersymmetric quantum mechanics and its exact solutions. J. Phys. A Math. Gen. **39**, 550 (2005)
20. Alvaro P. Raposo, Hans J. Weber, David E. Alvarez-Castillo, Mariana Kirchbach, Romanovski polynomials in selected physics problems. J. Cent. Eur. Phys. **5**, 254–273 (2007)
21. Y. Chargui, A. Trabelsi, L. Chetouani, Exact solution of the (1 + 1)-dimensional Dirac equation with vectorand scalar linear potentials in the presence of a minimal length. Phys. Lett. A **374**, 533 (2010)
22. Su Ru-keng, Zhang Yuhong, Exact solutions of the Dirac equation with a linear scalar confining potential in a uniform electric field. J. Phys. A Math. Gen. **17**, 854 (1984)
23. R.N. Costa Filho, G. Alencar, B. Skagerstam, J.S. Andrade, Morse potential derived from first principles. J. EPL **101**, 10009 (2013)
24. D.E. Alvarez-Castillo, Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics, Master Thesis, March 2007. arXiv:0808.1642 [math-ph]
25. M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions Series*, vol. 55 (Dover Publications Inc, New York, 1972), p. 37

Few-Body Syst (2018) 59:44
https://doi.org/10.1007/s00601-018-1363-1

M. Hadj Moussa · M. Merad

Relativistic Oscillators in Generalized Snyder Model

Received: 5 August 2017 / Accepted: 9 March 2018

Abstract We present an exact solution of one-dimensional Klein–Gordon and Dirac oscillators subjected to the uniform electric field with Snyder–de Sitter model in the momentum space, known in quantum mechanics by the stark effect. The energy eigenvalues and eigenfunctions are determined for both cases. The pure relativistic oscillator is obtained as particular case by taking the limit when the electric field vanishes. We also have determined some formulas of thermodynamics properties for relativistic oscillators within this framework.

1 Introduction

In general, the dynamics of some physical systems are modeled by deformed algebras, for example, the description of the low energy excitations of graphene and the Fermi velocity, is based on a deformation of the Heisenberg algebra which makes the commutator of momenta proportional to the pseudo-spin [1]. The dynamics of systems with variable masses in semiconductor heterostructures are formulated by deformed quadratic algebra [2], there is also the movement of a ^{3}He impurity atom in the Bose liquid, where a deformed Heisenberg algebra is suggested. [3] and in the context of quantum gravity, the generalized Heisenberg algebras have been proposed [4,5] etc…

In addition, during recent years, there has been a growing interest in studying certain quantum mechanical problems in the context of the Snyder–de Sitter model. This model is characterized by a modification to the canonical commutation relations of position and momentum operators, which implies the appearance of a nonzero minimal length in position and momentum uncertainties.

The position coordinates operator $\widehat{x}$ and the operator of the momentum coordinates $\widehat{p}$ are defined as follows [6–8]

$$\widehat{x} = \widehat{\chi} + \lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \widehat{\mathcal{P}} \tag{1}$$

$$\widehat{p} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \widehat{\chi} + (1-\lambda) \widehat{\mathcal{P}} \tag{2}$$

where, $\widehat{\chi}$ and $\widehat{\mathcal{P}}$ are defined by

$$\begin{cases} \widehat{\chi} = i\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}\,\frac{\partial}{\partial p} \\ \widehat{\mathcal{P}} = \frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}} \end{cases} \tag{3}$$

and λ is an arbitrary parameter.

M. Hadj Moussa · M. Merad (✉)
Département des Sciences de la Matière, Faculté des Sciences Exactes, Université de Oum El Bouaghi, 04000 Oum El Bouaghi, Algeria
E-mail: meradm@gmail.com

Published online: 31 March 2018

These operators satisfy the deformed commutation relation in one dimension [6,8]

$$[x, p] = i[1 + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 p^2 + \alpha_1\alpha_2(xp + px)] \tag{4}$$

and this commutation relation gives rise to Heisenberg's uncertainty relation to the appearance of a nonzero minimal length in position and momentum uncertainties as the following from [8]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}(1 + (\alpha_1\langle x\rangle + \alpha_2\langle p\rangle)^2 + \alpha_1^2(\Delta x)^2 + \alpha_2^2(\Delta p)^2 - 2\alpha_1\alpha_2\Delta x\Delta p) \tag{5}$$

where α and β are two coupling constants and we distinguish two kinds of subalgebra. When $\alpha^2, \beta^2 > 0$, this deformed algebra is characterized by the existence of both minimal length and minimal momentum and it is called Snyder–de Sitter model (SdS)) and for $\alpha^2, \beta^2 < 0$, it is called anti-Snyder–de Sitter model (aSdS) and no restriction arises [10].

On the other hand, within this framework to solutions certain problems have been found, for example, the solution of the classical and the quantum equations for the free particle and of the harmonic oscillator is explicitly given in Snyder–de Sitter and anti-Snyder models [6,7,11,12] The classical trajectory, the semiclassical quantization and the Kepler problem are discussed by [13], the case of the Dirac oscillator in Snyder model was considered in [8], and an exact solution of Klein–Gordon and Dirac equations with Snyder–de Sitter algebra is presented by [9].

Our goal in the present work, is to solve the one-dimensional relativistic harmonic oscillators (spin 0, 1/2) subjected to an electric field exactly with Snyder–de Sitter model in the momentum space, which is known as quantum confined Stark effect. On the other hand, it is to see the influence of this deformation on the properties of the systems as confinement phenomenon, energy value of the Stark shift and thermodynamics properties.

The rest of the paper is organized as follows. In Sect. 2, we introduce the main relations of quantum mechanics on Snyder–de Sitter model, where we give the exact solution of Klein–Gordon oscillator equation with uniform electric field. The case of the Dirac oscillator with uniform electric field is treated in In Sect. 3. Section 4 is left for concluding remarks.

2 Solution of Klein–Gordon Oscillator Equation with Uniform Electric Field in Snyder–de Sitter Model

In regular space, the Klein–Gordon oscillator subjected to an electric field in one dimensional space is defined by: we put ($\hbar = c = 1$)

$$\left[\left(\hat{p} + im\omega\hat{x}\right)\left(\hat{p} - im\omega\hat{x}\right) + m^2 - \left(E - q\varepsilon\hat{x}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{6}$$

where q is the electrical charge and ε is the intensity of electrical field.

Now using the representation (1) and (2), the Eq. (6) can be written in Snyder–de Sitter model as:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2\right)\hat{\chi}^2 + \left((1-\lambda)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\lambda^2\right)\widehat{\mathcal{P}}^2 \\ + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\lambda - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\lambda)\right)\left(\hat{\chi}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right)\end{array}\right.$$
$$\left. + 2q\varepsilon E\hat{\chi} + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}q\varepsilon E\lambda\widehat{\mathcal{P}} - \frac{m\omega}{1 - \alpha_2^2 p^2} + m^2 - E^2\right\}\psi(p) = 0, \tag{7}$$

Now to simplify the differential equation (7) and ensure the symmetry of system, we eliminate the term $\left(\hat{\chi}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}\hat{\chi}\right)$ by fixation of the value of λ as following:

$$\lambda = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}. \tag{8}$$

Then the Eq. (7) becomes

$$\left\{-\frac{\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)\left(1-\alpha_2^2P^2\right)}{\alpha_2^2}\frac{d^2}{dp^2}\right.$$
$$+\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)p+2iq\varepsilon E\sqrt{1-\alpha_2^2P^2}\right]\frac{d}{dp}+\frac{\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P^2}{1-\alpha_2^2P^2}$$
$$\left.+2q\varepsilon E\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P}{\sqrt{1-\alpha_2^2P^2}}-\frac{m\omega}{1-\alpha_2^2P^2}+m^2-E^2\right\}\psi(p)=0, \tag{9}$$

To eliminate the first derivative, we play the role of a place, making this substitution

$$\psi(\tau)=f(\tau)\exp\left(i\frac{\alpha_2^2q\varepsilon E}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\tau\right), \tag{10}$$

where

$$\tau=-\frac{1}{\alpha_2}\cos^{-1}(\alpha_2 p) \tag{11}$$

and its range is $\tau\in\,]-\infty,+\infty[$.

We obtain the following equation for $f(\tau)$

$$\left\{\frac{d^2}{d\tau^2}-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)\csc^2(\alpha_2\tau)\right.$$
$$-\frac{2\alpha_2^2\alpha_1q\varepsilon E}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}\cot(\alpha_2\tau)+\frac{\alpha_2^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}$$
$$\left.-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right)\right\}f(\tau)=0, \tag{12}$$

which can be put in the form of Schrodinger type equation in trigonometric Rosen–Morse potential

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}-A_1\csc^2(\alpha_2\tau)-A_2\cot(\alpha_2\tau)+A_3\right]f(\tau)=0 \tag{13}$$

where $\csc(\alpha_2\tau)=\frac{1}{\sin(\alpha_2\tau)}$ and the parameters A_1, A_2 and A_3 are given by

$$A_1=\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right) \tag{14}$$

$$A_2=\frac{2\alpha_2^2\alpha_1q\varepsilon E}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2} \tag{15}$$

$$A_3=\frac{\alpha_2^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}$$
$$-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right). \tag{16}$$

To reduce this last equation to a class of known differential equations, we use the following ansatz:

$$f(y)=(1+y^2)^{(\beta-1)}\left(\exp\left(-\alpha\cot^{-1}(y)\right)\right)g(y), \tag{17}$$

we obtain

$$\left[(1+y^2)\frac{d^2}{dy^2}+2\left(\alpha+(2\beta-1)\,y\right)\frac{d}{dy}+4\,(\beta-1)^2+2\,(\beta-1)-\frac{A_1}{\alpha_2^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(4\alpha\,(\beta-1)-\frac{A_2}{\alpha_2^2}\right)y+\alpha^2+\frac{A_3}{\alpha_2^2}-4\,(\beta-1)^2}{1+y^2}\right]g(y)=0 \tag{18}$$

which is a Romanovski polynomial differential equation with $y=\cot(\alpha_2\tau)$ varying in $]-\infty,+\infty[$ and the parameters α, β are fixed by

$$4\alpha\,(\beta-1)-\frac{A_2}{\alpha_2^2}=0 \tag{19}$$

$$\alpha^2+\frac{A_3}{\alpha_2^2}-4\,(\beta-1)^2=0 \tag{20}$$

$$4\,(\beta-1)^2+2\,(\beta-1)-\frac{A_1}{\alpha_2^2}=-n\left[(2\beta-1+(n-1)\right]. \tag{21}$$

After a direct calculation, with usage of the relation (19) and (21), we deduce

$$\beta_n=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)} \tag{22}$$

and

$$\alpha_n=\frac{2\alpha_1 q\varepsilon E}{\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2}\times\frac{1}{\left(-2n-1\pm\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)}\right)} \tag{23}$$

To determine the expression of energy spectrum, we use the relations (16) and (20) and by a direct calculation we find,

$$E_n^{\pm}=\pm m\left[\frac{1}{q^2\varepsilon^2+\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right]\left[1+\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)\theta_n^2\right]}\times\left(\frac{4\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2(\beta_n-1)^2+q^2\varepsilon^2}{m^2}-\omega^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

where

$$\theta_n=\frac{2\alpha_1 q\varepsilon}{\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2}\times\frac{1}{\left(-2n-1\pm\sqrt{1+4\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}-m\omega\right)}\right)} \tag{25}$$

and by the relations (10) and (17) we determine the wave function in the former variable p as:

$$\Psi_n(p) = C_1\left(1-\alpha_2^2 p^2\right)^{(1-\beta_n)}\left[\exp\left(\alpha_n - \frac{iq\varepsilon E}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right)\cos^{-1}(\alpha_2 p)\right] \times R^{(k_n,l_n)}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1-\alpha_2^2 p^2}}\right) \tag{26}$$

where k_n, l_n are given by

$$k_n = 2-2\beta_n, \quad l_n = 2\alpha_n \tag{27}$$

and C_1 is a normalization constant.

We should point that the expression of energy spectrum contains all corrections of all orders of $\left(\alpha_2\varepsilon\right)^2$, $\left(\alpha_1\varepsilon\right)^2$, this means the exact contribution to the Stark effect in the framework of the deformed Snyder–de Sitter model. On the other hand, it varies with all the power of n, which explain the confinement phenomenon.

Now to obtain the pure Klein–Gordon oscillator with the Snyder–de Sitter model in the absence of an external electric field case, we put ($\varepsilon = 0$) in (9), then the equation becomes

$$\left[-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2}{\alpha_2^2}\left(1-\alpha_2^2P^2\right)\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2\right)p\frac{\partial}{\partial P} + \frac{\alpha_2^2m^2\omega^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2}\frac{P^2}{1-\alpha_2^2P^2} - \frac{m\omega}{1-\alpha_2^2P^2} + m^2 - E^2\right]\psi(p) = 0 \tag{28}$$

which can be written in the form of the following hypergeometric differential equation,

$$\left[z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\mu+\frac{1}{2}-(1+2\mu)z\right)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\left(m^2-E^2\right)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2}\right]f(z) = 0 \tag{29}$$

where we used the following change

$$\psi(p) = [z(1-z)]^{\frac{\mu}{2}} f(z) \tag{30}$$

with

$$z = \frac{1}{2}(1-\alpha_2 p) \text{ and } \mu = \frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2} \tag{31}$$

The solution of this differential equation (29) is

$$f(z) = C_1F(a,b,c;z) + C_2z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c;z) \tag{32}$$

with

$$a = \frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2} + \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2)^2} - \frac{\left(m^2-E^2\right)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2}} \tag{33}$$

$$b = \frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2} - \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2)^2} - \frac{\left(m^2-E^2\right)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2}} \tag{34}$$

and

$$c = \frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2m^2\omega^2} + \frac{1}{2} \tag{35}$$

Considering the boundary condition that $(z \to 0)$ and $(z \to 1)$ leads $f(z)$ tending to finite, the hypergeometric function is reduced to a polynomial with the following restriction

$$b = -n, \tag{36}$$

then the solution can be written in the following form

$$f(z) = C_1 F\left(\frac{2m\omega}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2} + n, -n, \frac{m\omega}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2} + \frac{1}{2}; z\right) \tag{37}$$

and by applying the relations (34) and (36), we obtain the energy spectrum for klein–Gordon oscillator as the following equation

$$E_n = \pm m\sqrt{\left(\frac{\alpha_1^2}{m^2} + \alpha_2^2\omega^2\right)n^2 + 2\frac{\omega}{m}n + 1}. \tag{38}$$

We note that these results can be obtained exactly and directly using the limit $\varepsilon \to 0$ in previous results (24) and (26).

For $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_n = 0, \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_n = 0 \tag{39}$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2m\omega}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2}\right) \tag{40}$$

We replace those limits in (24), we obtain exactly the same energy spectrum in (38) and the same wave function using the properties connecting the Romanovski polynomials and the hypergeometric function [14,15].

Consequently, the expression of the wave function in terms of the former variable p can be written as

$$\psi(p) = C_1\left(1 - \alpha_2^2 P^2\right)^{\frac{m\omega}{2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2\right)}} \times F\left(\frac{2m\omega}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2} + n, -n, \frac{m\omega}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \alpha_2 p)\right) \tag{41}$$

where $C_1$is a normalization constant.

3 Solution of Dirac Oscillator Equation with Uniform Electric Field in Snyder–de Sitter Model

The Dirac oscillator with uniform electric field in Snyder–de Sitter model is defined by the following expression [16,17]: we put $(\hbar = c = 1)$

$$\left[\alpha\left(\hat{p} - im\omega\beta\hat{x}\right) + \beta m\right]\Psi(p) = \left(E - q\varepsilon\hat{x}\right)\Psi(p) \tag{42}$$

where $\Psi(p) = \begin{pmatrix}\Psi_1(p)\\ \Psi_2(p)\end{pmatrix}$ and α, β are the Dirac matrices given by

$$\alpha = \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \text{ and } \beta = \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{43}$$

To solve the Dirac oscillator, we use the following ansatz:

$$\Psi = \left[\left(E - q\varepsilon\hat{x}\right) + \alpha\left(\hat{p} - im\omega\beta\hat{x}\right) + \beta m\right]\phi \tag{44}$$

we obtain the quadratic form of the Dirac oscillator for the two-component function ϕ in the following equation:

$$\left[\left(E - q\varepsilon\hat{x}\right)^2 - \left(\hat{p} + im\omega\beta\hat{x}\right)\left(\hat{p} - im\omega\beta\hat{x}\right) - m^2 - q\varepsilon\alpha\left[\hat{x}, \hat{p}\right]\right]\phi = 0 \tag{45}$$

After a simple but long calculation, our system will be written as follows

$$\left[-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\alpha_2^2}\left(1-\alpha_2^2P^2\right)\frac{d^2}{dp^2}+\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)p\frac{d}{dp}\right.$$
$$+2iq\varepsilon E\sqrt{1-\alpha_2^2P^2}\frac{d}{dp}+\frac{\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P^2}{1-\alpha_2^2P^2}$$
$$\left.+2q\varepsilon E\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\frac{P}{\sqrt{1-\alpha_2^2P^2}}+\frac{iq\varepsilon\alpha-m\omega\beta}{1-\alpha_2^2P^2}+m^2-E^2\right]\psi(p)=0 \tag{46}$$

where we used the relationships (1) and (2) and we fixed the arbitrary parameter λ by eliminating the term $(\hat{\chi}\widehat{\mathcal{P}}+\widehat{\mathcal{P}}\hat{\chi})$. As indicated in the previous section, we find the same value as that for the Eq. (8).

At this stage, to simplify the Eq. (46), we make this substitution

$$\psi(\tau)=f(\tau)\exp\left(i\frac{\alpha_2^2q\varepsilon E}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\tau\right), \tag{47}$$

$$\text{where}\tau=-\frac{1}{\alpha_2}\cos^{-1}(\alpha_2 p)\text{ and }\tau\in\,]-\infty,+\infty[\tag{48}$$

we obtain the following equation for $f(\tau)$

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}-\frac{\alpha_2^2\left(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2\right)}{\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2}\csc^2(\alpha_2\tau)-\frac{\alpha_2^2\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\csc^2(\alpha_2\tau)M\right.$$
$$-\frac{2\alpha_2^2\alpha_1q\varepsilon E}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}\cot(\alpha_2\tau)+\frac{\alpha_2^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}$$
$$\left.-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right)\right]f(\tau)=0 \tag{49}$$

where M is the matrix given by $M=\begin{pmatrix}-\frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}} & \frac{q\varepsilon}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}}\\ -\frac{q\varepsilon}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}} & \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}}\end{pmatrix}$ whose eigenvalues of the matrix are $\sigma^{\pm}=\pm1$.

To solve this Eq. (49), we put the solution as $f(\tau)=u_\sigma\eta_\sigma$ with u_σ is a two-component eigenvector of matrix M with eigenvalue σ, then we obtain:

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}-A_4\csc^2(\alpha_2\tau)-A_2\cot(\alpha_2\tau)+A_3\right]f(\tau)=0 \tag{50}$$

where

$$A_4=\frac{\alpha_2^2\left(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2\right)}{\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)\right)^2}+\sigma\frac{\alpha_2^2\sqrt{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)} \tag{51}$$

$$A_2=\frac{2\alpha_2^2\alpha_1q\varepsilon E}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2} \tag{52}$$

$$A_3=\frac{\alpha_2^4q^2\varepsilon^2E^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2))^2}$$
$$-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\left(m^2-E^2-\frac{m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2(m^2\omega^2-q^2\varepsilon^2)}\right) \tag{53}$$

We note that this Eq. (50) has the same form as (13) except the A_1 is changed to A_4, so we follow the same steps like Klein–Gordon and with a direct calculation, we obtain the expression of the energy as follows:

$$E_n^{\pm} = \pm m \left[\frac{1}{q^2\varepsilon^2 + \left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right]\left[1 + \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right)\pi_n^2\right]} \right. \\ \left. \times \left(\frac{4\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right)^2 (\rho_n - 1)^2 + q^2\varepsilon^2}{m^2} - \omega^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{54}$$

where

$$\rho_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \pm \frac{\sigma}{4} \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \tag{55}$$

with

$$\pi_n = \frac{2\alpha_1 q\varepsilon}{\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)\right)^2 \left[-2n - 1 \pm \sigma \pm 2\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}\right]} \tag{56}$$

and the wave functions will be calculated as the following from

$$\begin{aligned} (\psi_{n\sigma}^1)(p) = C_n' \Bigg\{ \Bigg[& -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon}\right) \\ & + i\left(m\omega\left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon}\right) - q\varepsilon\right)\Bigg]\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}\frac{d}{dp} \\ & + \Bigg[\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}\left(m\omega\left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon}\right) - q\varepsilon\right) \\ & - i\frac{\alpha_2^2\left(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2\right)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}\left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon}\right)\Bigg]\frac{p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}} \\ & + E_n + m\Bigg\} Q_n(p), \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} (\psi_{n\sigma}^2)(p) = C_n' \Bigg\{ & \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - i\sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}\right]\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}\frac{d}{dp} \\ & + \Bigg[-\sigma\frac{\alpha_1\alpha_2\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} \\ & + i\frac{\alpha_2^2\left(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2\right)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)}\Bigg]\frac{p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}} \\ & + (E_n - m)\left(\frac{m\omega + \sigma\sqrt{m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2}}{q\varepsilon}\right)\Bigg\} Q_n(p), \end{aligned} \tag{58}$$

where

$$Q_n(p) = \left(1 - \alpha_2^2 p^2\right)^{(1-\beta_n)}\left[exp\left(i\frac{\alpha_2 q\varepsilon E_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2(m^2\omega^2 - q^2\varepsilon^2)} - \alpha_n\right)\cot^{-1}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}}\right)\right] \\ \times R_n^{(k_n, l_n)}\left(\frac{\alpha_2 p}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}}\right), \tag{59}$$

To obtain the pure Dirac oscillator with the Snyder–de Sitter model, we put ($\varepsilon = 0$) in (46) and with a direct calculation, we obtain the same differential equation associated to the Klein–Gordon oscillator (28) for the spinor $\Psi_1(p)$ whose solution is

$$\Psi_1(p) = D_1 \left(1 - \alpha_2^2 P^2\right)^{\frac{m\omega}{2\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2\right)}} \times F\left(\frac{2m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2} + n, -n, \frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-\alpha_2 p)\right) \tag{60}$$

with the same expression of the energy (38), D_1 is a normalization constant.

To deduce the other component $\Psi_2(p)$, we take the following property of the derivatives of the hypergeometric function into account

$$\frac{d}{dx} F(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; x) \tag{61}$$

we find the result as follows

$$\Psi_2(p) = D_1 \frac{\left(\alpha_1 + i\alpha_2 m\omega\right)\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2\right) n^2 + 2m\omega n\right]}{(E+m)\left(2m\omega + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 m^2\omega^2\right)} \left[1 - \alpha_2^2 P^2\right]^{\left(\frac{m\omega+\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2}{2\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2\right)}\right)} \times F\left(\frac{2m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2} + 1 + n, -n+1, \frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2} + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}(1-\alpha_2 p)\right) \tag{62}$$

Before ending this section, we point out that we can obtain the results of pure Dirac oscillator by taking the limit $\varepsilon \to 0$, then

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \pi_n = 0 \tag{63}$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\rho_n - 1)^2 = \left(-\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}(1 \pm \sigma) \pm \frac{1}{2}\frac{m\omega}{\alpha_1^2+\alpha_2^2 m^2\omega^2}\right)^2 \tag{64}$$

and we obtain exactly the same spectrum;

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_n^{\pm} = \pm m \left[\left(\frac{\alpha_1^2}{m^2} + \alpha_2^2\omega^2\right) n^2 + 2\frac{\omega}{m} n + 1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{65}$$

To conclude this section, it is preferable to study some thermodynamic properties of the system. The partition function Z of the deformed KG and Dirac oscillators with Snyder–de Sitter commutation relations at finite temperature T is given by

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-\frac{E_n}{K_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{m}{K_B T}\sqrt{\left(\frac{\alpha_1^2}{m^2} + \alpha_2^2\omega^2\right) n^2 + 2\frac{\omega}{m} n + 1}\right) \tag{66}$$

where K_B is Boltzmann's constant.

According to the habitual evaluation procedure and keeping the dominant contributions of order 0 and 1 in α_1 and α_2, we obtain

$$Z \simeq \frac{(K_B T)^2}{\omega m} - \frac{3\alpha_2 (K_B T)^4}{\omega m}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{m}{K_B T}\right)^2\right) - \frac{3\alpha_1 (K_B T)^4}{\omega^3 m^3} \tag{67}$$

which can be for the high-temperatures

$$Z \simeq \frac{(K_B T)^2}{\hbar\omega m c^2} - \frac{3(K_B T)^4}{\hbar\omega m c^4}\left(\frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} + \alpha_2\right) \tag{68}$$

Using the usual formulas of thermodynamics properties such as the free energy F, mean energy U, specific heat C and entropy S,

$$F = -K_B T \ln Z, U = K_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, \quad C = \frac{\partial U}{\partial T} \text{ and } S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{69}$$

we obtain

$$F = -K_B T \ln \left(\frac{(K_B T)^2}{\omega m} \left[1 - 3 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \right] \right) \tag{70}$$

$$U = 4 K_B T \left[1 - \frac{1}{2 \left(1 - 3 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \right)} \right] \tag{71}$$

$$C = 4 K_B \left[1 - \frac{1 + 3 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right)}{2 \left(1 - 3 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \right)^2} \right] \tag{72}$$

$$S = K_B \left[\frac{2 - 12 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right)}{1 - 3 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right)} + \ln \left(\frac{(K_B T)^2}{\omega m} \left[1 - 3 (K_B T)^2 \left(\frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \right] \right) \right] \tag{73}$$

4 Conclusion

In this paper, we have established an exact and explicit solution of the one dimensional deformed Klein–Gordon and Dirac oscillators subjected to an electric field in the context of the Snyder–de Sitter model in the momentum space; is known under the name Stark effect. In both cases, the exact solution is determined, the wave functions are obtained and are expressed in terms of Romonovski polynomials. The exact energy spectrum is extracted and it contains an additional corrections depend on the deformation parameters α_1, α_2 and all corrections of all orders of $\left(\alpha_2 \varepsilon\right)$, $\left(\alpha_1 \varepsilon\right)$, this means the exact contribution to the Stark effect in Snyder–de Sitter model. On the other hand, it varies with all the power of n, which explain the confinement phenomenon in this framework of deformation. The case of the pure relativistic oscillator for spin (0 and 1/2) is determined as particular case by taking the limit $\varepsilon \to 0$, when the electric field vanishes, the wave functions are obtained and are given in terms of hypergeometric function.

References

1. H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, M. Nieto, Graphene and non-Abelian quantization. J. Phys. A Math. Theor. **45**, 135308 (2012)
2. C. Quesne, Quadratic algebra approach to an exactly solvable position-dependent mass Schrödinger equation in two dimensions. SIGMA **3**, 067 (2007)
3. I.O. Vakarchuk, G. Panochho, The effective mass of an impurity atom in the Bose liquid with a deformed Heisenberg Algebra. Ukr. J. Phys. **62**, 123 (2017)
4. A. Kempf, Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. J. Math. Phys. **35**, 4483 (1994)
5. A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995)
6. S. Mignemi, Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space. Class. Quantum Grav. **29**, 215019 (2012)
7. S. Mignemi, R. Strajn, Quantum mechanics on a curved Snyder space. Adv. High Energy Phys. **2016**, 1328284 (2016)
8. M.M. Stetsko, Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder–de Sitter algebra. J. Math. Phys. **56**, 012101 (2015)
9. M. Merad, M. Hadj, Moussa, Exact solution of Klein–Gordon and Dirac equations with Snyder-de Sitter algebra. J. Few-Body Syst. **59**, 5 (2018). https://doi.org/10.1007/s00601-017-1326-y
10. H.S. Snyder, Quantized space-time. Phys. Rev. **71**, 38 (1947)
11. S. Mignemi, Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model. Phys. Rev. **D 84**, 025021 (2011)
12. C. Leiva, Harmonic oscillator in Snyder space: the classical case and the quantum case. J. Pram. Phys. **74**, 172 (2010)

13. C. Leiva, J. Saavedra, J.R. Villanueva, The Kepler problem in the Snyder space. J. Pram. Phys. **80**, 945 (2013)
14. C.B. Compean, M. Kirchbach, The trigonometric Rosen–Morse potential in the supersymmetric quantum mechanics and its exact solutions. J. Phys. A Math. Gen. **39**, 549–552 (2005)
15. A.P. Raposo, H.J. Weber, D.E. Alvarez-Castillo, M. Kirchbach, Romanovski polynomials in selected physics problems. J. Centr. Eur. Phys. **5**, 259–279 (2007)
16. M. Moshinsky, A. Szczepaniak, The dirac oscillator. J. Phys. **A22**, L817 (1989)
17. D. Ito, K. Mori, E. Carriere, An example of dynamical systems with linear trajectory. Nuovo Cim. **51A**, 1119 (1967)