

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Notations | 7 |
| Introduction | 8 |
| 0.1 L'historique des problèmes non locaux | 8 |
| 0.2 Contenu de la thèse | 12 |
| 1 Notions préliminaires | 14 |
| 1.1 Opérateurs linéaires non-bornés | 14 |
| 1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert . . . | 16 |
| 1.3 Calcul fractionnaire | 16 |
| 1.3.1 Introduction | 16 |
| 1.3.2 Dérivée de Riemann-Liouville | 17 |
| 1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo | 18 |
| 1.3.4 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo | 18 |
| 1.3.5 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire | 19 |
| 1.4 Inégalités importantes | 19 |
| 1.4.1 Inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz | 19 |
| 1.4.2 Inégalité de Holder | 19 |
| 1.4.3 Inégalité de Cauchy avec ε | 20 |
| 1.4.4 Inégalité de Young avec ε | 20 |
| 1.4.5 Inégalité de Poincaré | 20 |
| 1.4.6 Inégalité de Gronwall | 21 |
| 1.5 Transformation de Laplace | 22 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.5.1 | Définition et Propriétés | 22 |
| 1.5.2 | Transformée Inverse de Laplace | 24 |
| 1.6 | Formule de quadrature de Gauss | 25 |
| 1.7 | Méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation de Laplace (LT- HPM) | 25 |
| 1.7.1 | Idée de base de la méthode de perturbation de l'homotopie | 25 |
| 1.7.2 | La méthode HPM combinée avec la transformation de Laplace | 27 |
| 2 | Etude d'un problème intégral-différentielle pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales | 31 |
| 2.1 | Introduction | 31 |
| 2.2 | Position du problème | 32 |
| 2.3 | Reformulation du problème | 32 |
| 2.4 | Estimations a priori et ses conséquences | 33 |
| 2.5 | L'existence de la solution | 37 |
| 2.6 | Méthode de transformation de Laplace et algorithme de Stehfest | 40 |
| 2.6.1 | Méthode de transformation de Laplace | 40 |
| 2.6.2 | Exemples numériques | 45 |
| 2.6.3 | Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM) | 48 |
| 3 | Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fraction- naire avec des conditions intégrales | 56 |
| 3.1 | Introduction | 56 |
| 3.2 | Position du problème | 57 |
| 3.3 | Inégalité de l'énergie et ses conséquences | 59 |
| 3.4 | L'existence de la solution | 62 |
| 3.5 | Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM) | 64 |
| | Conclusion et Perspectives | 70 |

DÉDICACE

Je dédie ce travail à ma mère

À mon père et mon frère, que Dieu ait pitié d'eux.

À ma femme et je la remercie pour son aide et son soutien

À tous mes enfants

Surtout ma petite fille.

À mes sœurs

.....

À tous ceux qui m'aiment.

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier très vivement et sincèrement mon encadreur Monsieur le Professeur MERAD Ahcene de m'avoir confié ce sujet de thèse et qui m'a honoré d'avoir accepté de diriger ce travail, pour l'aide compétente qu'il m'a apporté, pour sa patience et son encouragement, pour ses conseils pratiques et scientifiques ainsi que pour l'inspiration et le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et son soutien qui m'a permis d'achever ce travail . . .

Vraiment merci Docteur.

Mon respect et mes vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur Abdelhamid AYADI pour ses conseils précieux. Vos qualités scientifiques et votre intérêt pour la recherche sont pour moi une source de motivation supplémentaire pour la suite de ma carrière et qui m'a honorés en acceptant d'être président de ce jury d'examen.

Je remercie très chaleureusement les Professeurs ELAGGOUNE Fateh, SAOUDI Khaled, ARDJOUNI Abdelouahab et Dr. REZZOUG Imad d'avoir accepté de juger ce travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse, leurs présence dans ce Jury me fait un grand honneur. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale.

Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'apportent leur aide, leur soutien, et leurs encouragements. En particulier Dr. DEHILISE Sofiane, Dr. OUSSAIF Taki Eddine et Dr DIAR Ahmed.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution forte à deux problèmes d'évolutions avec des conditions aux limites non locales de type intégral. Le premier type pseudo-hyperbolique-intégro-différentiel et le second de la classe partielle fractionnaire. La preuve est basée sur des estimations à priori et la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considérée. Nous avons également utilisé deux méthodes semi-analytiques pour estimer cette solution, la première est la transformée de Laplace avec l'algorithme de Stehfest et la deuxième est perturbation de l'homotopie. De plus, quelques exemples sont donnés pour comparer les solutions numériques et exactes.

ABSTRACT

In this work, we are interested in the study of the existence and uniqueness of a strong solution to two evolutions problems with non-local boundary conditions of integral type. The first type pseudo-hyperbolic-integro-differential and the second type partial fractional class. The proof is based on priori estimates and the density of the image of the operator generated by the problem considered. We also used two semi-analytical methods to estimate this solution, the first is the Laplace transform with Stehfest algorithm and the second is homotopy perturbation. In addition, some examples are given to compare numerical and exact solutions.

Notations

| | |
|----------------------------|---|
| \mathcal{L} | opérateur |
| \mathcal{L} | transformation de Laplace |
| \mathcal{L}^{-1} | transformée inverse de Laplace |
| $\mathfrak{S}_x f$ | $= \int_0^x f(\xi) d\xi$ |
| $\mathfrak{S}_x^2 f$ | $= \int_0^x \int_0^\eta f(\xi) d\xi d\eta$ |
| I_0^α | intégrale fractionnaire d'ordre α |
| ${}_0^c \partial_t^\alpha$ | dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo |
| ${}_0^R \partial_t^\alpha$ | dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Reimann-Liouville |
| EDP | équation aux dérivées partielles . |
| EDF | équation différentielle fractionnaire |
| $LT - HPM$ | méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace |
| $f * g$ | produit de convolution entre f et g |
| $D(L)$ | le domaine de définition de l'opérateur L |
| $R(L)$ | l'image de l'opérateur L |
| $L^2(Q)$ | espace des fonctions carré intégrable u définies sur Q |

Introduction générale

0.1 L’historique des problèmes non locaux

Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et leur étude occupe les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle avec les travaux d’Euler, d’Alembert, Lagrange et Laplace...; au fil de cette dernière quarantaine d’années beaucoup de phénomènes et de problèmes modernes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques ont été modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP), paraboliques ou hyperboliques, mais avec des conditions non locales. Ainsi, les conditions aux bords de type intégrales peuvent être utilisées quand il est impossible de mesurer directement la quantité recherchée sur la frontière où sa valeur totale ou moyenne est connue. Plus précisément, les conditions standards (Dirichlet, Neumann, ...) qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours adéquates car elles dépendent du contexte physique où les données peuvent être mesurées à la frontière du domaine étudié. Dans certains cas, il n’est pas possible de prescrire la solution (pression, température, ...) ponctuellement aux bords, parce que la valeur moyenne de la solution peut être mesurée le long du bord ou le long d’une partie de celui-ci.

La signification physique de base des conditions intégrales (énergie totale, température moyenne, masse totale des impuretés, flux total, moments, ... etc.) a servi la raison essentielle d’intérêt croissant à ce genre de problèmes.

La modélisation mathématique des problèmes avec conditions intégrales est rencontrée en physique des plasmas (les processus de diffusion des particules dans un plasma

turbulent.) [22], théorie de transmission de chaleur [32, 62, 17], thermo-élasticité [68, 55], oscillations d'un milieu [34], dynamique des eaux souterraines [13, 74], propagation de l'humidité [14], génie chimique [78], semi-conducteurs [75], modèles démographiques [49] et en problèmes mathématiques en biologie [23].

Les conditions intégrales sont également utilisées pour les problèmes inverses de la théorie de la conduction thermique [57, 58, 63].

Pour tous ces motifs, les EDP avec des conditions intégrales ont bénéficié d'une très grande attention. Le premier qui s'est intéressé à l'étude de ces problèmes avec une condition intégrale:

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0,$$

était **Cannon** [43] en 1963, où il démontra par la méthode du potentiel, l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème mixte combinant une condition de Dirichlet et une condition intégrale pour l'équation de la chaleur lors de l'étude de la conduction thermique dans une barre métallique mince chauffée. En utilisant toujours la méthode du potentiel, **Kamynin** a établi dans [64] l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème similaire avec une représentation plus générale en utilisant un système d'équations intégrales. Lors des études relatives à la diffusion des particules dans un plasma turbulent et à la propagation de la chaleur dans une tige mince, **N. I. Ionkin** démontra dans [62], en se servant de la méthode de Fourier, l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte associant une condition de Dirichlet à une condition intégrale pour l'équation de la chaleur. Les résultats les plus proches des problèmes étudiés peuvent être trouvés dans **Benouar-Yurchuk** [65] et **Kartynnik** [30], dans lesquels les auteurs ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour des problèmes mixtes combinant une condition de Dirichlet et une condition intégrale pour certaines équations paraboliques du second ordre en utilisant la méthode des estimations a priori. Ensuite plusieurs travaux ont été réalisés en modifiant l'équation parabolique ou les conditions utilisées dans **Bouziari-Benouar** [17], **Merad-Marhoune** [31] et **Merad-Bouziari** [3, 8, 9, 11, 18, 16]. Dans ces travaux, l'objet de la question était sur les problèmes mixtes liés à l'étude des équations paraboliques unidimensionnelles du second degré combinant une condition locale

et une condition intégrale par différentes méthodes. Autres résultats sur quelques problèmes différents pseudo-hyperboliques dans **Bouziati** [28] et pour des équations opérationnelles dans **Rebbani-Chasarain** [37], aussi pour les équations paraboliques de haut ordre dans les articles de **Bouziati-Benouar** [27] et de **Denche-Marhoune** [61]. Aussi des problèmes ont été étudiés dans **Muravei, Philinovskii** [53], **Pulkina** [54]. La méthode adoptée dans la plupart des articles précédents est celle des inégalités d'énergie. Cette dernière appelée la méthode d'analyse fonctionnelle ou la méthode des estimations a priori. Cette méthode basée sur les idées de **I.G. Pétrovski** [48] qui l'a utilisé dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique, par la suite **J.Leray** [40] et **L. Garding** [56] ont fait des développements importants de la méthode et son schéma a été présenté par **A.A. Dezin** [29]. La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de **O.A.Ladyzenskaya** [67], **K. Friedrichs** [51], **A.V. Kartynnik** [30]. En fait, **Cannon** [43] et **Ionkin** [62] ont utilisé la condition intégrale:

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t). \quad (0.1.1)$$

La méthode de transformée de Laplace est un outil utilisé pour approcher la solution de différentes classes d'équations aux dérivées partielles linéaires (voir: **Suying et al.** [79], **A Merad et A Bouziati.** [4, 7, 12]). La difficulté principale dans l'utilisation de la méthode de transformation de Laplace consiste à trouver son inverse, car l'inverse de la transformation est très complexe dans certaines situations. Pour surmonter cette difficulté, il existe de nombreuses techniques numériques permettant d'inverser la transformation de Laplace. Une bonne comparaison de quatre algorithmes numériques d'inversion de Laplace fréquemment utilisés est donnée par **H. Hassanzadeh et al.** [46].

Dans ce travail, nous utilisons l'algorithme de Stehfest [47] qui est facile à implémenter. Cette technique numérique introduite par Graver [36] et son algorithme a été offert par l'algorithme de Stehfest [47]. Afin d'inverser efficacement et précisément la transformation de Laplace. (Ce qui ne peut pas être fait analytiquement). L'application de la transformation de Laplace sur les équations réduit le problème à des équations différentielles ordinaires non homogènes de second ordre avec des condi-

tions non locales. Le problème réduit peut être résolu par la méthode de variation des paramètres. Après discrétisation, la méthode numérique d'inversion de la transformation de Laplace est utilisée pour obtenir une approximation de la solution.

La méthode de perturbation d'homotopie (HPM) a été proposée par **Ji-Huan He** [38] en 1998 Cette méthode a été appliquée par plusieurs scientifiques [71, 50, 35, 45, 41, 42, 60], aux différents problèmes linéaires et non linéaires, **Momani** et **odibat** [70] ont appliqué la méthode de perturbation d'homotopie aux équations différentielles fractionnaires et ils ont révélé que la méthode HPM est une méthode analytique alternative, Récemment, **S. Abbasbandy** [71] a appliqué cette méthode à des équations intégrales. La méthode de perturbation d'homotopie (HPM) peut être combinée avec des transformations comme celle de Laplace, pour résoudre des équations différentielles ordinaires et aussi aux dérivées fractionnaires.

Le but de ce travail est de développer la méthode des inégalités d'énergie pour différents problèmes d'évolutions avec des conditions intégrales de type (0.1.1), pour un nouveau type de problèmes associant des équations fractionnaires avec deux condition intégrale de type (0.1.1), dans les espaces fonctionnels de type Sobolev. Le schéma de la méthode peut être résumé comme suit:

1. D'abord on écrit le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle:

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L); \tag{0.1.2}$$

où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach B dans un espace de Hilbert F convenablement choisi.

2. Puis on établit les estimations a priori pour l'opérateur L .
3. Ensuite on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F .

En outre, l'objectif de cette thèse est d'aborder quelques problèmes différents avec deux conditions intégrales et les mettre en évidence. On a pu étudier la résolubilité d'un problème pseudo hyperbolique intégral-différentielles avec deux conditions intégrales. On a étudié l'existence et l'unicité d'une solution d'équation aux dérivées partielles fractionnaire avec deux conditions intégrales.

Plus précisément, on démontre l'inégalité d'énergie du type

$$\|u\|_B \leq c \|Lu\|_F. \quad (0.1.3)$$

On note que pour tous les problèmes posés dans la thèse, ce type d'estimations a priori est obtenu en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentielle Mu (contenant la fonction u , ses dérivées et une certaine fonction poids) défini sur le domaine: $\Omega^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$, et en intégrant sur le domaine Ω^τ .

Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite, on montre que l'opérateur L de B dans F admet une fermeture \bar{L} , donc la solution de l'équation opérationnelle:

$$\bar{L}u = \mathcal{F}, \quad u \in D(\bar{L}), \quad (0.1.4)$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré. Par passage à la limite, l'estimation (0.1.3) sera prolongée à \bar{L} , c'est à dire:

$$\|u\|_B \leq c \|\bar{L}u\|_F.$$

Ainsi, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (0.1.4). Comme l'image de l'opérateur \bar{L} est fermée dans F et que $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$, l'établissement de la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F garantie l'existence de la solution forte du problème (0.1.2).

0.2 Contenu de la thèse

- Le chapitre un est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail concernant les opérateurs linéaires non bornés, l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert, calcul fractionnaire, inégalités importantes, transformation de Laplace est sa transformation inverse, méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation de Laplace (LT-HPM) et quelque lemmes techniques.

- Le chapitre deux est réservé à l'étude d'un problème pseudo hyperbolique intégro-différentielles avec deux conditions intégrales. On transfère le problème à un autre non-locale aussi, mais moins compliqué, Puis on décrit le cadre fonctionnel en précisant les

espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité d'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème étudié dans l'espace d'arrivée F . Deux outils sont utilisés dans ce chapitre. Le premier est la transformation de Laplace et l'utilisation de sa transformation inverse pour obtenir la solution numérique. Le deuxième outil est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (LT-HPM). De plus, quelques exemples sont donnés pour comparer les solutions numériques et exactes.

- Dans le troisième chapitre on montre l'existence et l'unicité de la solution forte d'un problème fractionnaire d'évolution avec deux conditions intégrales. ensuite on utilise la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (LT-HPM) pour obtenir la solution numérique, quelques exemples sont donnés pour justifier l'efficacité de cette méthode.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, il est rappelé des outils de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail.

1.1 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur T est une application de E dans F :

$$T : E \rightarrow F.$$

Tout opérateur T est complètement défini par son graphe $G(T)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$, où $D(T)$ est le domaine de définition de l'opérateur T .

Définition 1.1.2 Un opérateur T de E dans F est dit linéaire si et seulement si :

$$\forall u_1, u_2 \in E, \forall \mu, \lambda \in \mathbb{k}, T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2),$$

où \mathbb{k} est le corps des scalaires de E et F .

Définition 1.1.3 On dit que l'opérateur S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in D(T)$ (Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$).

Remarque 1.1.1 Il n'est pas vrai que tout sous espace de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur.

Définition 1.1.4 On dit que T est fermé si son graphe $G(T)$ est un fermé de $E \times F$.

Proposition 1.1.1 Un sous espace $G \subset E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si:

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0. \quad (1.1.1)$$

Preuve. On note $p_1 : G \rightarrow E$ la projection donnée par $p_1(x, y) = x$. Si la propriété (1.1.1) est vraie, alors $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$.

Donc, l'application $T : p_1G \rightarrow F$ qui associe à $x \in p_1G$, l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. ■

Définition 1.1.5 On dit qu'un opérateur linéaire T est fermable dans E s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que T est fermable dans E si et seulement si l'adhérence $\overline{G(T)}$ de son graphe est un graphe (Car, on a $T \subset \overline{T}$ implique $G(T) \subset G(\overline{T})$, comme le prolongement \overline{T} est fermé, alors $G(\overline{T})$ est fermé. Donc $G(T) \subset G(\overline{T})$ implique $\overline{G(T)} \subset \overline{G(\overline{T})} = G(\overline{T})$).

Autrement dit T est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset D(T)$ telle que $u_n \rightarrow 0$ et $Tu_n \rightarrow v$, alors $v = 0$.

L'opérateur fermé \overline{T} dont le graphe $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ est appelé fermeture de T . ($G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ implique que $\overline{G(T)}$ est un graphe:

$$\forall (u_n, Tu_n) \in G(T) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n \right) \in \overline{G(T)} \text{ et } (0, v) \in \overline{G(T)},$$

qui nécessite $v = 0$ pour assurer que $\overline{G(T)}$ soit un graphe).

Théorème 1.1.1 (Théorème de l'isomorphisme). - Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F . Alors T^{-1} est continu de F dans E .

Théorème 1.1.2 (Théorème du graphe fermé). - Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F . On suppose que le graphe de T , $G(T)$, est fermé dans $E \times F$. Alors T est continu.

1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.2.1 Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F , on définit M^\perp l'orthogonal de M , par

$$M^\perp = \{f \in F, \langle f, g \rangle_F = 0, \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.2.1 Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F . Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Preuve. Supposons d'abord que M est dense dans F . Soit $f \in M^\perp \subset F$, soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de M qui converge vers f . On a $\langle f, f_n \rangle_F = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on en conclut que $\|f\|_F = 0$. Donc $f = 0$, qui donne $M^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $M^\perp = \{0\}$. Alors on a $(M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = F$, et comme $M \subset \overline{M}$ il s'en suit que $(\overline{M})^\perp \subset M^\perp$, et donc $(M^\perp)^\perp \subset ((\overline{M})^\perp)^\perp$, mais \overline{M} est un fermé, alors $((\overline{M})^\perp)^\perp = \overline{M}$, alors on trouve $(M^\perp)^\perp \subset \overline{M} \Rightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$. ■

1.3 Calcul fractionnaire

1.3.1 Introduction

La dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et des intégrales fractionnaires en vue de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries, ...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux sont apparus, spécialement dans la théorie de viscoélasticité de la mécanique du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une

modélisation mathématique basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, d'où la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$; $f^{(1)}(a)$, ... etc. Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ces problèmes a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de la viscoélasticité, donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.3.1 On appelle fonction Gamma Eulérienne (ou intégrale Eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

où x est un nombre complexe quelconque tel que $Re(x) > 0$.

Définition 1.3.2 L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a, b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$; est définie par

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds. \quad (1.3.2)$$

1.3.2 Dérivée de Riemann-Liouville

Définition 1.3.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et h une fonction localement intégrable définie sur $[0, T]$.

La dérivée d'ordre α de h est définie par :

1. Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à gauche**

$${}^R_0\partial_t^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (1.3.3)$$

2. Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à droite**

$${}^R_t\partial_T^\alpha h(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_t^T \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (1.3.4)$$

où le nombre entier n est choisi de telle manière que : $n-1 < \alpha < n$.

En général, la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a:

$$\begin{aligned}
 {}_0^R \partial_t^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[-(t-\tau)^{n-\alpha} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} t^{n-\alpha} \\
 &= \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 [76] Si $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $h(0) = 0$ et $t > 0$, alors

$${}_0^R \partial_t^{p+q} h(t) = {}_0^R \partial_t^p {}_0^R \partial_t^q h(t) = {}_0^R \partial_t^q {}_0^R \partial_t^p h(t).$$

1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.3.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et h une fonction localement intégrable définie sur $[0, T]$.

La dérivée d'ordre α de h est définie par:

1. Dérivée au sens de **Caputo à gauche**

$${}_0^C \partial_t^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{h^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (1.3.5)$$

2. Dérivée au sens de **Caputo à droite**

$${}_t^C \partial_T^\alpha h(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^T \frac{h^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1.3.6)$$

avec n un entier positif vérifiant l'inégalité: $n-1 < \alpha < n$.

1.3.4 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $n-1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$). Supposons que h est une fonction, telles que ${}_0^C \partial_t^\alpha h(t)$, ${}_0^R \partial_t^\alpha h(t)$ existent, alors

$${}_0^R \partial_t^\alpha h(t) = {}_0^C \partial_t^\alpha h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.3.7)$$

pour $n = 2$ et $\frac{dh}{dt}(0) = h(0) = 0$ on a

$${}^R_0\partial_t^\alpha h(t) = {}^C_0\partial_t^\alpha h(t). \quad (1.3.8)$$

1.3.5 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

$${}^C_0\partial_t^\alpha (I_0^\alpha h(t)) = h(t), \quad (1.3.9)$$

et

$$I_0^\alpha ({}^C_0\partial_t^\alpha h(t)) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad (1.3.10)$$

pour $n = 2$, on a

$$I_0^\alpha ({}^C_0\partial_t^\alpha h(t)) = h(t) - h'(0)t - h(0). \quad (1.3.11)$$

Lemme 1.3.1 [37] Pour tout réel $0 < \alpha < 2$ on a

$$\int_Q ({}^R_0\partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x u) (\mathfrak{S}_x u) dx dt = \left(\int_Q ({}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \mathfrak{S}_x u) dx dt \right)^2 \quad (1.3.12)$$

1.4 Inégalités importantes

1.4.1 Inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz

Pour toute $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante:

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx \leq \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.4.13)$$

1.4.2 Inégalité de Holder

Pour $u, v \in L^p(\Omega)$, nous avons

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx \leq \left(\int_{\Omega} u^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1. \quad (1.4.14)$$

Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz.

1.4.3 Inégalité de Cauchy avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour arbitraire a, b dans \mathbb{R} nous avons l'inégalité:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2. \quad (1.4.15)$$

1.4.4 Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour arbitraire a, b dans \mathbb{R} nous avons l'inégalité:

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{b}{\varepsilon} \right|^{p-1} \quad \text{Pour tout } p > 1, \quad (1.4.16)$$

qui est la généralisation de l'inégalité de Cauchy avec ε .

1.4.5 Inégalité de Poincaré

Lemme 1.4.1 Pour $u \in L^2(0, l)$, on a l'estimation:

$$\|\mathfrak{S}_x u\|_{L^2(0, l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0, l)}. \quad (1.4.17)$$

Preuve. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_x u)^2 &= \left[\int_x^l u(\xi, t) d\xi \right]^2 \leq \left[\int_x^l d\xi \right] \left[\int_x^l (u(\xi, t))^2 d\xi \right] \\ &\leq (l-x) \int_x^l (u(\xi, t))^2 d\xi \leq (l-x) \int_0^l (u(x, t))^2 dx, \end{aligned}$$

par l'intégration sur $(0, l)$, on trouve:

$$\begin{aligned} \int_0^l (\mathfrak{S}_x u)^2 dx &\leq \left(\int_0^l (l-x) dx \right) \left(\int_0^l (u(x, t))^2 dx \right) \\ &\leq \frac{l^2}{2} \int_0^l (u(x, t))^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura:

$$\|\mathfrak{S}_x u\|_{L^2(0, l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0, l)}. \quad (1.4.18)$$

■

Remarque 1.4.1 L'inégalité (1.4.18) reste valable si on remplace l'intervalle $(0, l)$ par une région bornée Ω de \mathbb{R}^n . Il suffit de remplacer l par $\text{mes}(\Omega)$ (mesure de Ω) dans (1.4.18).

1.4.6 Inégalité de Gronwall

L'inégalité de Gronwall joue un grand rôle dans les estimations des termes intégrodifférentiels et dont l'utilisation est fréquente pour l'obtention des estimations a priori dans les normes des espaces suscités et autres.

Lemme 1.4.2 (de Gronwall) *Si a, b sont des fonctions non négatives et intégrables sur $(0, T)$, la fonction b soit non-décroissante sur $(0, T)$, et $\lambda \in L^1(0, T)$, $\lambda > 0$, il s'ensuit à partir de:*

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t \lambda(s) a(s) ds, \quad (1.4.19)$$

que

$$a(t) \leq b(t) \exp(\Lambda(t)),$$

où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Preuve. On pose

$$k(t) = \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s) a(s) ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, l'estimation

$$\frac{\partial}{\partial t} k(t) = \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)) \left(a(t) - \int_0^t \lambda(s) a(s) ds \right) \leq \lambda(t) b(t) \exp(-\Lambda(t)),$$

résulte de (1.4.19) et $\lambda(t) > 0$. Avec $k(0) = 0$ par définition, l'intégration sur t conduit à

$$k(t) \leq \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(-\Lambda(s)) ds.$$

Encore, une autre fois on utilise (1.4.19),

$$\exp(-\Lambda(t)) (a(t) - b(t)) \leq \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s) a(s) ds = k(t) \leq \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(-\Lambda(s)) ds.$$

Donc, on trouve

$$a(t) - b(t) \leq \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) ds, \quad (1.4.20)$$

si b est non-décroissante sur $(0, T)$, de (1.4.20) et en vertu de $\lambda(t) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 a(t) &\leq b(t) + \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) ds \\
 &\leq b(t) \left[1 + \int_0^t \lambda(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) ds \right] \\
 &\leq b(t) \left[1 + \exp(\Lambda(t)) \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} [-\exp(-\Lambda(s))] ds \right] \\
 &\leq b(t) [1 + \exp(\Lambda(t)) [-\exp(-\Lambda(t)) + 1]] \\
 &\leq b(t) \exp(\Lambda(t)).
 \end{aligned}$$

Qui prouve le lemme. ■

1.5 Transformation de Laplace

1.5.1 Définition et Propriétés

Définition 1.5.1 Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

- On appelle transformée de Laplace de f , la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie par:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt = F(s),$$

- On appelle transformation de Laplace, l'application \mathcal{L} définie sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ par $\mathcal{L}(f)$.

Remarque 1.5.1 On peut étendre cette définition aux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes:

a) f est continue par morceaux, c'est-à-dire que sur chaque intervalle fini de la forme $[a, b]$, $a < b$, les discontinuités de f (si elle existent) sont en nombre fini et sont de première espèce.

b) f est d'ordre exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. La continuité intervient lorsqu'on parlera de la transformée inverse de Laplace.

Sous ces conditions, il est facile de vérifier que $\int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$ converge pour $\text{Re}(s) > \alpha$ et on peut alors parler de transformée de Laplace de f .

Linéarité

Si les fonctions $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ ont des transformées de Laplace, et soit $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ un ensemble quelconque de constantes arbitraires. Alors

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L} \{f_i(t)\} \quad (1.5.21)$$

Translation de la transformée

$$\mathcal{L} \{e^{-at} f(t)\} = F(s + a)$$

Transformation d'une dérivée d'ordre supérieur

Soit $f(t)$ continu sur $0 \leq t < \infty$, et soient $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ continus par morceaux sur tout intervalle fini contenu dans $[0, \infty)$. Alors

$$\mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{i-1} f^{(i-1)}(0), \quad (1.5.22)$$

où $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$.

La transformée de Laplace d'une dérivée fractionnaire de Caputo

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $n - 1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) on a

$$\mathcal{L} \left\{ {}_0^C \partial_t^\alpha f(t) : s \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.5.23)$$

Transformation d'un produit de convolution

Définition 1.5.2 *Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g , est une autre fonction, qui se note généralement $f * g$ et qui est définie par:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (1.5.24)$$

Théorème 1.5.1 *Soit $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ et $\mathcal{L} \{g(t)\} = G(s)$. Alors*

$$\mathcal{L} \{(f * g)(t)\} = F(s)G(s), \quad (1.5.25)$$

Inversement,

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)G(s)\} = (f * g)(t).$$

1.5.2 Transformée Inverse de Laplace

Méthode analytique

Il n'existe pas de méthode analytique générale permettant de calculer $u(x, t)$ si on connaît $U(x, s)$. Cependant, on connaît l'expression exacte $u(x, t)$ pour certaines fonctions $U(x, s)$.

L'inversion de la transformée de Laplace s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe, la formule de **Bromwich Mellin** est donnée par:

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(U(x, s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} U(x, s) ds.$$

Avec γ choisi de sorte que l'intégrale soit convergente. C'est-à-dire γ doit être supérieur à la partie réelle de tout singularité de $U(x, s)$ et qu'à l'infini (γ est réelle positive $\text{Re}(s) = \gamma$), $U(x, s) \rightarrow 0$ au moins rapidement que $\frac{1}{|s|^2}$.

En pratique la formule de **Bromwich Mellin** est peu utilisée, et on calcule les inverses des transformées de Laplace à partir des tables de transformées de Laplace.

Méthode numérique (l'algorithme de Stehfest)

Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer la méthode numérique suivante:

La méthode de Stehfest, aussi connu sous le nom d'algorithme de Stehfest, est une méthode qui permet de calculer les valeurs de $u(x, t)$. Elle a été publiée par Harald Stehfest en 1970.

La transformée inverse de la fonction $U(x, s)$ peut se calculer par:

$$u(x, t) \simeq \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^{2m} \beta_n U\left(x; \frac{n \ln 2}{t}\right), \quad (1.5.26)$$

avec,

$$\beta_n = (-1)^{n+m} \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^{\min(n,m)} \frac{k^m (2k)!}{(m-k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}, \quad (1.5.27)$$

où m est un nombre entier positif impair et $[q]$ désigne la partie entière du nombre réel q .

Pour $m = 5$, les 10 premiers β_n sont donnés par :

$$\beta_1 = \frac{1}{12}, \beta_2 = -\frac{385}{12}, \beta_3 = 1279, \beta_4 = -\frac{46871}{3}, \beta_5 = \frac{505465}{6}, \beta_6 = -\frac{473915}{2}, \beta_7 = \frac{1127735}{3},$$

$$\beta_8 = -\frac{1020215}{3}, \beta_9 = \frac{328125}{2}, \beta_{10} = \frac{-65625}{2}$$

1.6 Formule de quadrature de Gauss

La formule de quadrature de Gauss est une approximation numérique d'une intégrale donnée comme suit :

$$\int_a^b f(y) dy = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i f(y_i) + R_n$$

où

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(p'_n(x_i))^2}, \quad y_i = \frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2},$$

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi),$$

x_i étant le $i^{\text{ème}}$ zéro du polynôme de Legendre $p_n(x)$.

1.7 Méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation de Laplace (LT-HPM)

1.7.1 Idée de base de la méthode de perturbation de l'homotopie

La méthode de perturbation de l'homotopie a été proposée par Ji-Huan He en 1998 [38] et a été développée et améliorée par lui-même [41, 42, 45]. Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation fonctionnelle non-linéaire suivante:

$$A(u) - f(r) = 0; r \in \Omega, \tag{1.7.28}$$

avec la condition aux limites suivante:

$$B(u; \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0; r \in \Gamma, \tag{1.7.29}$$

où A est un opérateur fonctionnel général, B un opérateur de frontière, $f(r)$ est une fonction analytique connue et Γ est la frontière du domaine. L'opérateur A peut-être décomposé en deux opérateurs L et N , où L est linéaire et N est un opérateur non linéaire. L'équation (1.7.28) peut donc s'écrire comme suit:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (1.7.30)$$

En utilisant la technique d'homotopie, nous construisons une homotopie:

$$v(r; p) : \Omega \times [0; 1] \rightarrow R,$$

qui satisfait:

$$H(v; p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0; p \in [0; 1]; r \in \Omega, \quad (1.7.31)$$

ou

$$H(v; p) = L(v) - L(u_0) + p[L(u_0) + N(v) - f(r)] = 0, \quad (1.7.32)$$

où $p \in [0; 1]$ est un paramètre d'inclusion, u_0 est une approximation initiale de l'équation (1.7.28), qui vérifie les conditions aux limites. Évidemment, à partir des équations (1.7.31) et (1.7.32) nous aurons:

$$H(v; 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad (1.7.33)$$

$$H(v; 1) = A(v) - f(r) = 0. \quad (1.7.34)$$

Le changement de p de zéro à l'unité ne sont que celles de $v(r; p)$ de $u_0(r)$ à $u(r)$. En topologie, on parle de déformation, et $L(v) - L(u_0)$, $A(v) - f(r)$ sont appelés homotopies. En 1998 Ji-Huan He, a utilisé le paramètre d'inclusion p comme un "petit paramètre", et suppose que la solution d'équations (1.7.31) et (1.7.32) peut être écrite comme série de puissance en p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (1.7.35)$$

Nous prenons $p \rightarrow 1$, on aboutit à l'approximation de la solution de l'équation (1.7.28),

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (1.7.36)$$

La combinaison de la méthode de perturbation et de la méthode d'homotopie est appelée méthode de perturbation de l'homotopie (HPM), qui a éliminé les limitations des techniques de perturbation traditionnelles. La série (1.7.36) est convergente pour plusieurs de cas. Certains critères sont suggérés pour la convergence de la série (1.7.36), dans [38].

1.7.2 La méthode HPM combinée avec la transformation de Laplace

Dans les exemples suivant nous exposons la méthode de perturbation d'homotopie(HPM) combinée avec la transformation de Laplace(LT).

Exemple 1.7.1 On considère l'équation de **Riccati** suivante:

$$\frac{du}{dt} = 2u - u^2 + 1, \quad t \in \Omega \quad (\Omega = [0, +\infty[) \quad (1.7.37)$$

$$u(0) = 0, \quad (1.7.38)$$

la solution exacte de (1.7.37) – (1.7.38) est donnée par:

$$u(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \right),$$

d'autre part, le développement de Taylor de u au voisinage de 0 est

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 \dots\dots\dots$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode(LT-HPM). Appliquant l'opérateur \mathcal{L} à l'équation (1.7.37) on obtient,

$$sU(s) - u(0) = \mathcal{L} (2u(t) - u^2(t) + 1),$$

d'ou

$$U(s) - \frac{1}{s}u(0) = \frac{1}{s}\mathcal{L} (2u(t) - u^2(t) + 1), \quad (1.7.39)$$

en appliquant l'inverse de l'opérateur \mathcal{L} à l'équation (1.7.39) on obtient,

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} (2u(t) - u^2(t) + 1) \right\} + u(0). \quad (1.7.40)$$

Nous pouvons construire l'homotopie suivante:

$$\begin{aligned} v(t; p) &: \Omega \times [0; 1] \rightarrow R, \\ v(t) - u(0) &= p\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} (2v(t) - v^2(t) + 1) \right\}, \end{aligned} \quad (1.7.41)$$

supposons que la solution de (1.7.41) soit écrite comme la série suivante

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t), \quad (1.7.42)$$

en remplaçant (1.7.42) dans (1.7.41), on obtient,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) - u(0) = p\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} \left(2 \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) \right)^2 + 1 \right) \right\}.$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p , on trouve

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0(t) = u(0) = 0, \\ p^1 &: v_1(t) = \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_0 - v_0^2 + 1\}) = t, \\ p^2 &: v_2(t) = \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_1 - 2v_0v_1\}) = t^2, \\ p^3 &: v_3(t) = \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_2 - 2v_0v_2 - v_1^2\}) = \frac{1}{3}t^3, \\ p^4 &: v_4(t) = \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_3 - 2v_0v_3 - 2v_1v_2\}) = -\frac{1}{3}t^4, \\ &\dots\dots\dots \\ p^i &: v_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ 2v_{i-1} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j v_{i-j-1} \right\} \right). \end{aligned}$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (1.7.42) devient la solution approximative de l'équation (1.7.37), c-à-d,

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + \dots\dots\dots \\ u(t) &= t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Exemple 1.7.2 Dans le rectangle $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ on considère l'équation différentielle partielle non linéaire suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1.7.43)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x. \quad (1.7.44)$$

La solution exacte de (1.7.43) – (1.7.44) est donnée par:

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t},$$

le développement de Taylor par rapport à t de la fonction u au voisinage de 0 est

$$u(x, t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8 \dots\dots\dots).$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT – HPM), en appliquant l'opérateur \mathcal{L} à l'équation (1.7.43) on obtient,

$$sU(x, s) - u(x, 0) = \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

d'où

$$U(x, s) - \frac{1}{s}u(x, 0) = \frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (1.7.45)$$

Appliquons l'opérateur \mathcal{L}^{-1} à l'équation (1.7.45) on obtient,

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + u(x, 0),$$

nous pouvons construire l'homotopie suivante:

$$\begin{aligned} v(x; t; p) & : \quad \Omega \times [0; 1] \rightarrow R, \\ v(x, t) - u(x, 0) & = p\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.7.46)$$

supposons que la solution de (1.7.46) soit écrite comme la série suivante

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t), \quad (1.7.47)$$

en remplaçant (1.7.47) dans (1.7.46), on obtient,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x, t) - u(x, 0) = p\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j \sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \right), \quad (1.7.48)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p , on trouve:

$$\begin{aligned}
 p^0 & : v_0(x, t) = u(x, 0) = x, \\
 p^1 & : v_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = -tx, \\
 p^2 & : v_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = t^2 x, \\
 p^3 & : v_3(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = -t^3 x, \\
 p^4 & : v_4(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial v_3}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_3 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = t^4 x, \\
 & \dots\dots\dots \\
 p^i & : v_i(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j \frac{\partial v_{i-j-1}}{\partial x} \right\} \right).
 \end{aligned}$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (1.7.47) devient la solution approximative de l'équation (1.7.43), c-à-d,

$$\begin{aligned}
 u(t) & = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 \dots\dots\dots \\
 u(t) & = x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 \dots\dots\dots)
 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Etude d'un problème intégro-différentielle pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales

2.1 Introduction

Quelques problèmes de la physique et de la technologie modernes peuvent être décrits en termes d'équations différentielles partielles avec des conditions non locales. Le terme non-local de notre problème (c-à-d $\int_0^t a(t-s)v(x,s)ds$) apparaît, par exemple, dans la modélisation de l'existence quasi-statique d'une tige thermo-élastique, voir [5, 26, 25] a d'abord été étudié, par la seconde auteur avec une équation parabolique le second ordre plus générale ou une équation $2m$ -parabolique et avec une équation hyperbolique dans (A. Merad [2, 6]), en utilisant les méthodes d'intégrales énergétiques et la méthode de Rothe dans [66].

2.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire

$$Q = \Omega \times I = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\},$$

,on considère une équation intégro-différentielle pseudo-hyperbolique:

$$\mathcal{L}v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} + \gamma v - \int_0^t a(t-s)v(x, s)ds = g(x, t), \quad (2.2.1)$$

avec les conditions initiales

$$\ell v = v(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.2.2)$$

$$qv = v_t(x, 0) = \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.2.3)$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 v(x, t)dx = n(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2.2.4)$$

$$\int_0^1 xv(x, t)dx = m(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2.2.5)$$

où $g, \Phi, \Psi, a, n,$ et m sont des fonctions connues, α, β, γ et T des constants positives, de plus les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ satisfont aux conditions de compatibilité suivantes:

$$\int_0^1 \Phi dx = n(0), \quad \int_0^1 x\Phi dx = m(0), \quad \int_0^1 \Psi dx = n'(0), \quad \int_0^1 x\Psi dx = m'(0).$$

2.3 Reformulation du problème

Puisque les conditions aux limites intégrales sont non homogènes, il est commode de convertir le problème (2.2.1) – (2.2.5) en un problème équivalent avec des conditions intégrales homogènes. Pour cela, nous introduisons une nouvelle fonction $u(x, t)$ comme suit

$$v(x, t) = u(x, t) + U(x, t), \quad (2.3.6)$$

où

$$U(x, t) = (-6x + 4)n(t) + (12x - 6)m(t). \quad (2.3.7)$$

Le problème (2.2.1) – (2.2.5) avec des conditions intégrales non homogènes (2.2.4) – (2.2.5) peut être réduit de façon équivalente au problème de trouver une fonction u satisfaisante à

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \gamma u + \int_0^t a(t-s)u(x,s)ds = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.3.8)$$

avec les conditions initiales

$$\ell u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.3.9)$$

$$qu = u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.3.10)$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.3.11)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.3.12)$$

où

$$f(x, t) = g(x, t) - \mathcal{L}U(x, t), \quad (2.3.13)$$

et

$$\varphi(x) = \Phi(x) - \ell U(x, t), \quad (2.3.14)$$

$$\psi(x) = \Psi(x) - qU(x, t). \quad (2.3.15)$$

Donc, au lieu de chercher v , nous cherchons simplement u . La solution du problème (2.2.1) – (2.2.5) sera obtenue par les relations (2.3.6) – (2.3.7).

2.4 Estimations a priori et ses conséquences

La solution du problème (2.3.8) – (2.3.12) peut être considérée comme une solution du problème sous la forme opérationnelle:

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell, q)$ est considéré de B à F , et B est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q)$, dont la norme est:

$$\|u\|_B = \left(\sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^1 \left(\left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 + \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est fini, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ dont la norme est:

$$\|\mathcal{F}\|_F = \left(\int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \int_0^1 (\|\psi(x)\|^2 + \|\varphi(x)\|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui est fini.

Le domaine $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble de toutes les fonctions u telles que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \in L^2(Q)$ et satisfait (2.3.11) ainsi que (2.3.12). D'abord, des estimations a priori sont établies. Ensuite, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données sont immédiatement transmises.

Théorème 2.4.1 *Si $u(x, t)$ est une solution de problème (2.3.8) – (2.3.12) et $|a(t)| \leq a_1$ et β satisfaisant la condition $\beta \geq \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_2} + \frac{1}{8\varepsilon_2}$, $f \in C(\overline{Q})$, on a l'estimation*

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_F. \quad (2.4.16)$$

Où C est une constante positive indépendante de $u; u \in D(L)$

$$C = \left(\frac{\max(\frac{1}{2}, \varepsilon_2, \frac{1}{2}\gamma + \alpha)}{\min(1, \gamma + 2\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. On pose $\mathfrak{S}_x u = \int_0^x u(\xi, t) d\xi$ et $\mathfrak{S}_x^2 u = \int_0^x \int_0^\eta u(\xi, t) d\xi d\eta$. Multiplions l'équation (2.3.8) par $Mu = -\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}$ puis, intégrons sur le sous-domaine

$$Q_\tau = (0; \tau) \times (0; 1) \text{ où } 0 \leq \tau \leq T$$

on obtient:

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathfrak{S}_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt + \alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathfrak{S}_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt + \beta \int_{Q_\tau} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \mathfrak{S}_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt \\ & - \gamma \int_{Q_\tau} u \mathfrak{S}_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt + \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s) u(x, s) ds \right) \mathfrak{S}_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt = - \int_{Q_\tau} f \mathfrak{S}_x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

L'intégration par parties de chaque terme du cˆot e gauche de l'équation (2.4.17) donne

$$- \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x \psi(x)\|^2 dx, \quad (2.4.18)$$

$$\alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx - \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx, \quad (2.4.19)$$

$$\beta \int_{Q_\tau} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \beta \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx dt, \quad (2.4.20)$$

$$-\gamma \int_{Q_\tau} u \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx - \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x \varphi(x)\|^2 dx. \quad (2.4.21)$$

Substitutions (2.4.18), (2.4.19), (2.4.20) et (2.4.21) dans (2.4.17) donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \mathfrak{S}_x \|u(x, \tau)\|^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx + \beta \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx dt \\ = & \frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x \psi(x)\|^2 dx + \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x \varphi(x)\|^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx \\ & - \int_{Q_\tau} f \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s)u(x, s) ds \right) \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de type de Poincaré suivantes

$$\int_0^1 \|\mathfrak{S}_x^2 u(x, \tau)\|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \mathfrak{S}_x \|u(x, \tau)\|^2 dx,$$

$$\int_0^1 \mathfrak{S}_x \|u(x, \tau)\|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx,$$

$$\int_{Q_\tau} \left\| \int_0^t u(x, s) ds \right\|^2 dx dt \leq \frac{T^2}{2} \int_{Q_\tau} \|u\|^2 dx dt,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \left(\frac{1}{2} \gamma + \alpha \right) \int_0^1 \mathfrak{S}_x \|u(x, \tau)\|^2 dx + \beta \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx dt \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 \|\psi(x)\|^2 dx + \left(\frac{1}{4} \gamma + \frac{1}{2} \alpha \right) \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx \\ \leq & - \int_{Q_\tau} f \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s)u(x, s) ds \right) \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε , le membre droit de (2.4.22) est born e

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\tau} f \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dxdt - \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds \right) \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\ \leq & \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{Q_\tau} \left\| \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dxdt + \frac{a_1\varepsilon_1}{2} \int_{Q_\tau} \left\| \int_0^t u(x,s)ds \right\|^2 dxdt \\ & + \frac{a_1}{2\varepsilon_1} \int_{Q_\tau} \left\| \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dxdt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\tau} f \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dxdt - \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds \right) \mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \quad (2.4.23) \\ \leq & \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \left(\frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} + \frac{1}{8\varepsilon_2} \right) \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dxdt, \end{aligned}$$

en utilisant (2.4.23) dans (2.4.22) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + (\gamma + 2\alpha) \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx \\ & + 2 \left(\beta - \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} - \frac{1}{8\varepsilon_2} \right) \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dxdt \\ \leq & \varepsilon_2 \int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^1 \|\psi(x)\|^2 dx + \left(\frac{1}{2}\gamma + \alpha \right) \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx, \end{aligned}$$

si β satisfaisant la condition $\beta \geq \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} + \frac{1}{8\varepsilon_2}$ on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + (\gamma + 2\alpha) \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx \\ \leq & \varepsilon_2 \int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^1 \|\psi(x)\|^2 dx + \left(\frac{1}{2}\gamma + \alpha \right) \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx. \quad (2.4.24) \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite de (2.4.24) est indépendant de τ , nous prenons le supremum par rapport à τ de 0 à T dans le membre de gauche nous obtenons:

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx \leq C \left(\begin{array}{l} \int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \int_0^1 \|\psi(x)\|^2 dx \\ + \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx \end{array} \right).$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_F.$$

Avec

$$C = \left(\frac{\max(\frac{1}{2}, \varepsilon_2, \frac{1}{2}\gamma + \alpha)}{\min(1, \gamma + 2\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Proposition 2.4.1 *L'opérateur L de B dans F est fermable.*

Soit \bar{L} la fermeture de L , et $D(\bar{L})$ le domaine de définition de \bar{L} .

Définition 2.4.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = \mathcal{F},$$

est dite solution forte du problème (2.3.8) – (2.3.12).

Le théorème 2.4.1 est valide pour une solution forte, c'est à dire on a l'inégalité

$$\|u\|_B \leq c \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \quad (2.4.25)$$

Par conséquent, cette inégalité entraîne les corollaires suivants:

Corollaire 2.4.1 *L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est égale à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.*

Corollaire 2.4.2 *Si le problème (2.3.8) – (2.3.12) a une solution, alors cette solution est unique et dépend continûment de $(f, \phi, \psi) \in F$.*

2.5 L'existence de la solution

Théorème 2.5.1 *Si β satisfaisant la condition $\beta \geq \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} + \frac{1}{8\varepsilon_2}$, alors le problème (2.3.8) – (2.3.12) admet une solution unique et forte $u = \bar{L}^{-1}(f, \varphi, \psi) = \overline{L}^{-1}(f, \varphi, \psi)$.*

Preuve. Pour prouver que le problème (2.3.8) – (2.3.12) admet une solution forte pour tout arbitraire $(f, \phi, \psi) \in F$, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F , tout d'abord pour le cas où L est réduit à $L_0 = (\mathcal{L}, \ell, q)$ avec le domaine $D(L_0) = \{u/u \in D(L) : \ell u = 0 \text{ et } qu = 0\}$. Pour ce faire, nous démontrons la proposition suivante:

Proposition 2.5.1 *Dans les conditions du théorème 2.4.1, pour $\omega \in L^2(Q)$ et pour tout $u \in D(L_0)$, nous avons*

$$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \omega \, dxdt = 0, \quad (2.5.26)$$

alors ω s'annule presque partout dans Q .

■

Preuve. L'égalité (2.5.26) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \omega \, dxdt &= \alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega \, dxdt + \beta \int_{Q_\tau} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \omega \, dxdt - \gamma \int_{Q_\tau} u \omega \, dxdt \\ &\quad - \int_{Q_\tau} f \omega \, dxdt + \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s) u(x, s) \, ds \right) \omega \, dxdt, \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

à partir de l'égalité (2.5.27), nous donnons la fonction ω en termes de u comme suit:

$$\omega = -\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.5.28)$$

En substituant ω dans (2.5.27) par sa représentation (2.5.28), on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt &= \alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt \\ &\quad + \beta \int_{Q_\tau} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt - \gamma \int_{Q_\tau} u \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt \\ &\quad + \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s) u(x, s) \, ds \right) \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt, \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

par intégration par parties et en tenant compte des conditions (2.3.11) et (2.3.12), on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x q u\|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 \, dx, \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

$$\begin{aligned} \alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt &= -\frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 \, dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|\ell u\|^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 \, dx, \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

$$\beta \int_{Q_\tau} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dxdt = -\beta \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \, dxdt, \quad (2.5.32)$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma \int_{Q_\tau} u \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt &= -\frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx + \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x \ell u\|^2 dx \\
 &= -\frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx. \tag{2.5.33}
 \end{aligned}$$

La substitution de (2.5.30), (2.5.31), (2.5.32) et (2.5.33) dans (2.5.29) donne:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \beta \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx dt \\
 &+ \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx \\
 &\leq \int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s) u(x, s) ds \right) \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt. \tag{2.5.34}
 \end{aligned}$$

Par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy avec ε , le côté droit de (2.5.34) est borné

$$\int_{Q_\tau} \left(\int_0^t a(t-s) u(x, s) ds \right) \left(-\mathfrak{S}_x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt \leq \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx dt \tag{2.5.35}$$

En utilisant (2.5.35) dans (2.5.34) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \left(\beta - \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} \right) \int_{Q_\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx dt \\
 &+ \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx \leq 0.
 \end{aligned}$$

si β satisfait la condition $\beta \geq \frac{T^4 a_1 \varepsilon_1^2 + a_1}{8\varepsilon_1} + \frac{1}{8\varepsilon_2}$ on obtient:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx \leq 0, \tag{2.5.36}$$

nous obtenons, comme le membre droite de (2.5.36) est indépendant de τ , nous prenons

le supremum par rapport à τ de 0 à T dans le membre gauche nous obtenons:

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right\|^2 dx + \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \|\mathfrak{S}_x u(x, \tau)\|^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 \|u(x, \tau)\|^2 dx \leq 0,$$

d'où

$$u = 0.$$

Nous mettons $u = 0$ dans (2.5.28) qui donne $\omega \equiv 0$ dans $L^2(Q)$.

Maintenant, passant à la démonstration du théorème 2.5.1. A cette fin, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F . On suppose que, pour certain $W = (\omega, \omega_0, \omega_1) \in$

$R(L)^\perp$ et pour tout $u \in D(L) \equiv B$, alors W vérifie l'égalité:

$$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \omega \, dxdt + \int_0^1 \ell u \omega_0 dx + \int_0^1 qu \omega_1 dx = 0. \quad (2.5.37)$$

Il faut prouver que $W \equiv (0, 0, 0)$. Mettons $u \in D(L_0)$ dans (2.5.37), on obtient

$$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \omega \, dxdt = 0, \quad u \in D(L_0).$$

Alors la proposition 2.5.1 implique que $\omega \equiv 0$. Donc (2.5.37) prend la forme

$$\int_0^1 \ell u \omega_0 dx + \int_0^1 qu \omega_1 dx = 0.$$

Puisque les ensembles des valeurs des opérateurs ℓ et q sont indépendants et les ensembles des valeurs ℓ et q sont partout denses dans $L^2(\Omega)$, alors on trouve que $\omega_0 \equiv 0$ et $\omega_1 \equiv 0$. Donc $W \equiv (0, 0, 0)$, ce qui implique que $\overline{R(L_0)} = F$. Considérons maintenant le cas général. Du fait que $R(L_0)$ est dense dans F , on conclut qu'on peut prouver que $R(L)$ est dense dans F au moyen de la méthode de continuation le long du paramètre. On ne va pas décrire l'application de cette méthode car elle est analogue à celle utilisée dans [21]. Cela achève la démonstration du théorème 2.5.1. ■

2.6 Méthode de transformation de Laplace et algorithme de Stehfest

2.6.1 Méthode de transformation de Laplace

Supposons que $v(x, t)$ est défini et est d'ordre exponentiel pour $t \geq 0$ c'est-à-dire qu'il existe $A, \gamma > 0$ et $t_0 > 0$ tels que $|v(t)| \leq A \exp(\gamma t)$ pour $t \geq t_0$. Supposons aussi que la transformée de Laplace $V(x, s)$, existe et est donnée par

$$\begin{aligned} V(x, s) &= \mathcal{L}\{v(x, t); t \longrightarrow s\} \\ &= \int_0^\infty v(x, t) \exp(-st) dt, \end{aligned}$$

où s est un paramètre positif. Prenant les transformations de Laplace des deux côtés de (2.2.1), nous obtenons

$$-(\alpha + s\beta) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, s) + (s^2 + \gamma - A(s))V(x, s) = G(x, s) + \psi(x) + s\varphi(x) - \beta\varphi''(x), \quad (2.6.38)$$

où $G(x, s) = \mathcal{L}\{g(x, t); t \longrightarrow s\}$. De même, nous avons

$$\int_0^1 V(x, s) dx = N(s), \quad (2.6.39)$$

$$\int_0^1 xV(x, s) dx = M(s), \quad (2.6.40)$$

où

$$N(s) = \mathcal{L}\{n(t); t \longrightarrow s\}, \quad (2.6.41)$$

$$M(s) = \mathcal{L}\{m(t); t \longrightarrow s\}. \quad (2.6.42)$$

Ainsi, l'équation considérée est réduite à un problème de valeur limite gouverné par une équation différentielle ordinaire non homogène de second ordre. Maintenant, nous distinguons les cas suivants:

Cas 1: Si $A(s) = s^2 + \gamma$, nous obtenons une solution générale de (2.6.38) comme

$$V(x, s) = \frac{-1}{(\alpha + s\beta)} \int_0^x (x - \tau) [G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)] d\tau + C_1(s)x + C_2(s), \quad (2.6.43)$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions arbitraires de s . En remplaçant (2.6.43) dans (2.6.39) et (2.6.40), nous avons

$$C_1 = \frac{1}{(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (2\tau^3 - 3\tau^2 + 1) d\tau + 12M(s) - 6N(s), \quad (2.6.44)$$

$$C_2 = \frac{-2}{(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (-\tau^3 + 2\tau^2 - \tau) d\tau - 6M(s) + 4N(s). \quad (2.6.45)$$

Il est possible d'évaluer les intégrales dans (2.6.43)– (2.6.45) exactement. En général, on peut avoir recours à l'intégration numérique pour les calculer, cependant. Par exemple, la formule de Gauss (25.4.30) donnée dans Abramowitz et stegun [59] peut être employée pour calculer ces intégrales numériquement, nous avons les approximations suivantes pour les intégrales:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (2\tau^3 - 3\tau^2 + 1) dx \\
 \simeq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) \right] \times \\
 & \frac{1}{4} (x_i - 1)^2 (x_i + 2) \tag{2.6.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (-\tau^3 + 2\tau^2 - \tau) dx \\
 \simeq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) \right] \times \\
 & \frac{1}{8} [-x_i^3 + x_i^2 + x_i - 5], \tag{2.6.47}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x (x - \tau) [G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)] d\tau \\
 \simeq & \frac{x}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[\begin{array}{l} G\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) + \\ s\varphi\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) \end{array} \right]. \tag{2.6.48}
 \end{aligned}$$

Case 2: Si $A(s) < s^2 + \gamma$, nous obtenons une solution générale de (2.6.38) comme

$$\begin{aligned}
 V(x, s) = & \frac{-1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^x [G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)] \sinh R(x - \tau) d\tau \\
 & + C_1(s)e^{Rx} + C_2(s)e^{-Rx}. \tag{2.6.49}
 \end{aligned}$$

Où

$$R = \sqrt{\frac{s^2 + \gamma - A(s)}{\alpha + s\beta}},$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions arbitraires de s . En remplaçant (2.6.49) dans (2.6.39) et (2.6.40), nous avons

$$\begin{aligned}
 (e^R - 1)C_1 + (1 - e^{-R})C_2 = & \\
 \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (\cosh R(1 - \tau) - 1) d\tau + RN(s) & \\
 [(R - 1)e^R + 1] C_1 + [-(R + 1)e^R + 1] C_2 = & \\
 \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) \begin{bmatrix} R(\cosh R(1 - \tau) - \tau) \\ -\sinh R(1 - \tau) \end{bmatrix} d\tau & \\
 + R^2 M(s) &
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix},$$

et

$$a_{11}(s) = (e^R - 1),$$

$$a_{12}(s) = (1 - e^{-R}),$$

$$a_{21}(s) = (R - 1)e^R + 1,$$

$$a_{22}(s) = -(R + 1)e^R + 1,$$

$$b_1(s) = \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau))(\cosh R(1 - \tau) - 1) d\tau + RN(s),$$

$$b_2(s) = \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) \begin{bmatrix} R(\cosh R(1 - \tau) - \tau) \\ -\sinh R(1 - \tau) \end{bmatrix} d\tau + R^2M(s).$$

nous avons les approximations suivantes pour les intégrales:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (\cosh R(1 - \tau) - 1) d\tau \\ \simeq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) \right] \times \\ & (\cosh R(1 - \frac{1}{2}[x_i + 1]) - 1), \end{aligned} \quad (2.6.50)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) [R(\cosh R(1 - \tau) - \tau) - \sinh R(1 - \tau)] d\tau \\ \simeq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) \right] \times \\ & \left[R(\cosh R(1 - \frac{1}{2}[x_i + 1]) - \frac{1}{2}[x_i + 1]) - \sinh R(1 - \frac{1}{2}[x_i + 1]) \right], \end{aligned} \quad (2.6.51)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^x [G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)] \sinh R(x - \tau) d\tau \\ \simeq & \frac{x}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) \right] \\ & \sinh R(x - \frac{x}{2}[x_i + 1]). \end{aligned} \quad (2.6.52)$$

Cas 3: Si $A(s) > s^2 + \gamma$, nous obtenons une solution générale de (2.6.38) comme

$$V(x, s) = \frac{-1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^x [G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)] \sin R(x - \tau) d\tau + C_1(s) \cos Rx + C_2(s) \sin Rx \quad (2.6.53)$$

Où

$$R = \sqrt{\frac{s^2 + \gamma - A(s)}{\alpha + s\beta}}$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions arbitraires de s . En remplaçant (2.6.53) dans (2.6.39) et (2.6.40), nous avons

$$\begin{aligned} \sin RC_1 + (1 - \cos R)C_2 &= \\ \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau))(-\cos R(1 - \tau) + 1) d\tau + RN(s) \\ (R \sin R + \cos R - 1)C_1 + (-R \cos R + \sin R) C_2 &= \\ \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) \begin{bmatrix} (R \cos R(1 - \tau) + R\tau \\ + \sin R(1 - \tau)) \end{bmatrix} d\tau \\ + R^2 M(s) \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix},$$

et

$$a_{11}(s) = \sin R,$$

$$a_{12}(s) = (1 - \cos R),$$

$$a_{21}(s) = R \sin R + \cos R - 1,$$

$$a_{22}(s) = (-R \cos R + \sin R),$$

$$b_1(s) = \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau))(-\cos R(1 - \tau) + 1) d\tau + RN(s),$$

$$b_2(s) = \frac{1}{R(\alpha + s\beta)} \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau))(R \cos R(1 - \tau) + R\tau + \sin R(1 - \tau)) d\tau + R^2 M(s).$$

nous avons les approximations suivantes pour les intégrales:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)) (-\cos R(1 - \tau) + 1) d\tau \\ \simeq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) \right] \times \\ & (-\cos R(1 - \frac{1}{2}[x_i + 1]) + 1), \end{aligned} \quad (2.6.54)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau))(R \cos R(1 - \tau) + R\tau + \sin R(1 - \tau)) d\tau \\ \simeq & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{1}{2}[x_i + 1]\right) \right] \times \\ & \left[R \cos R(1 - \frac{1}{2}[x_i + 1]) + \frac{R}{2}[x_i + 1] + \sin R(1 - \frac{1}{2}[x_i + 1]) \right], \end{aligned} \quad (2.6.55)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^x [G(\tau, s) + \psi(\tau) + s\varphi(\tau) - \beta\varphi''(\tau)] \sin R(x - \tau) d\tau \\ \simeq & \frac{x}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left[G\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]; s\right) + \psi\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) + s\varphi\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) - \beta\varphi''\left(\frac{x}{2}[x_i + 1]\right) \right] \\ & \sin R(x - \frac{x}{2}[x_i + 1]). \end{aligned} \quad (2.6.56)$$

où x_i et ω_i sont les abscisse et les poids, définis comme

$$x_i : i^{th} \text{ zero de } P_n(x), \quad \omega_i = 2 / (1 - x_i^2) \left[P_n'(x) \right]^2.$$

Leurs valeurs tabulées peuvent être trouvées dans [59] pour différentes valeurs de N .

2.6.2 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de calculs numériques en utilisant la méthode de transformation de Laplace proposée dans la section précédente. Ces techniques sont appliquées pour résoudre le problème défini par (2.2.1) - (2.2.5) pour des fonctions particulières g, Φ, Ψ, n, m , et des constantes positives α, β et γ . La méthode de solution est facilement mise en œuvre sur ordinateur, avec l'utilisation du logiciel Matlab 7.9.3 programme. Les résultats numériques sont obtenus pour $N = 8$ dans (2.6.46 - 2.6.48), (2.6.50 - 2.6.52) et (2.6.54 - 2.6.56), et $m = 5$ dans

(1.5.26) – (1.5.27). Ensuite, nous avons comparé la solution exacte avec la solution numérique on a trouvé un accord excellent entre les deux.

Exemple 2.6.1 *Nous prenons*

$$\begin{aligned}
 g(x, t) &= -e^{-x} \sinh(t), a(t) = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \text{ et } \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0 \\
 \Phi(x) &= \exp(-x), 0 < x < 1, \\
 \Psi(x) &= 0, 0 < x < 1, \\
 n(t) &= (1 - e^{-1}) \cosh(t), 0 < t \leq T, \\
 m(t) &= (1 - 2e^{-1}) \cosh(t), 0 < t \leq T,
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par

$$v(x, t) = e^{-x} \cosh(t), 0 < x < 1, 0 < t \leq T.$$

Pour $t = 0.10$, $x \in [0.10, 0.90]$, nous calculons v numériquement en utilisant la méthode de solution proposée et la comparons avec la solution exacte du tableau 1:

| x | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.70 | 0.90 |
|--------------------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|
| $v \text{ exact}$ | 0.9093654 | 0.7445254 | 0.6095658 | 0.490703 | 0.4086042 |
| $v \text{ numérique}$ | 0.9093851 | 0.7443921 | 0.6097452 | 0.500183 | 0.4080919 |
| Erreur relative | 0.000217 | -0.0001790 | 0.0002943 | 0.0022295 | -0.0012538 |

Tableau 1.

Exemple 2.6.2 *Nous prenons*

$$\begin{aligned}
 g(x, t) &= (3e^{-t} - 1) \cos(2\pi x), a(t) = 1, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \text{ et } \alpha = \beta = \gamma = 1, \\
 \Phi(x) &= \cos(2\pi x), 0 < x < 1, \\
 \Psi(x) &= -\cos(2\pi x), 0 < x < 1, \\
 n(t) &= 0, 0 < t \leq T, \\
 m(t) &= 0, 0 < t \leq T.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par

$$v(x, t) = e^{-t} \cos(2\pi x), 0 < x < 1, 0 < t \leq T.$$

Chapitre 2: Etude d'un problème intégro-différentielle pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales

Pour $t = 0.1$, $x \in [0.1, 0.9]$, nous calculons v numériquement en utilisant la méthode de solution proposée et la comparons avec la solution exacte du tableau 2:

| x | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.70 | 0.90 |
|--------------------------|-----------|------------|------------|------------|-----------|
| $v \text{ exact}$ | 0.7320288 | -0.2796101 | -0.9048374 | -0.2796101 | 0.7320288 |
| $v \text{ numérique}$ | 0.7324162 | -0.2795921 | -0.9047562 | -0.2795421 | 0.7321329 |
| Erreur relative | 0.0005292 | -0.0000644 | -0.0000897 | -0.0002432 | 0.0001422 |

Tableau 2.

Exemple 2.6.3 Nous prenons

$$g(x, t) = -e^x \sinh t, a(t) = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \text{ et } \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$$

$$\Phi(x) = \exp(x), 0 < x < 1,$$

$$\Psi(x) = 0, 0 < x < 1,$$

$$n(t) = (e - 1) \cosh(t), 0 < t \leq T,$$

$$m(t) = \cosh(t), 0 < t \leq T,$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par

$$v(x, t) = e^x \cosh(t), 0 < x < 1, 0 < t \leq T.$$

Pour $t = 0.1$, $x \in [0.1, 0.9]$, nous calculons v numériquement en utilisant la méthode de solution proposée et la comparons avec la solution exacte du tableau 3:

| x | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.70 | 0.90 |
|--------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $v \text{ exact}$ | 1.1107014 | 1.3566137 | 1.6569717 | 2.0238299 | 2.4719114 |
| $v \text{ numérique}$ | 1.1106841 | 1.3565926 | 1.6569459 | 2.0237984 | 2.4718729 |
| Erreur relative | 0.0000155 | 0.0000155 | 0.0000155 | 0.0000155 | 0.0000155 |

Tableau 3.

Exemple 2.6.4 *Nous prenons*

$$\begin{aligned}
 g(x, t) &= 0, a(t) = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 0 \\
 \Phi(x) &= \exp(x), 0 < x < 1, \\
 \Psi(x) &= \exp(x), 0 < x < 1, \\
 n(t) &= (e - 1) \exp(t), 0 < t \leq T, \\
 m(t) &= \exp(t), 0 < t \leq T,
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par

$$v(x, t) = e^{x+t}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T.$$

Pour $t = 0.1$, $x \in [0.1, 0.9]$, nous calculons v numériquement en utilisant la méthode de solution proposée et la comparons avec la solution exacte du tableau 4:

| x | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.70 | 0.90 |
|--------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| $v \text{ exact}$ | 1.221403 | 1.491825 | 1.822119 | 2.225541 | 2.718281 |
| $v \text{ numérique}$ | 1.221407 | 1.491830 | 1.822125 | 2.22555 | 2.718291 |
| Erreur relative | 0.0000031 | 0.0000033 | 0.0000032 | 0.000004 | 0.0000036 |

Tableau 4.

2.6.3 Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM)

Après l'application de la transformation de Laplace et d'après la technique HPM, pour déterminer la solution approché de l'équation (2.6.38) nous construisons une homotopie proposée par Madani et al [60], sous la forme suivant:

$$V(x, s) = \left(\begin{aligned} &\frac{p}{(s^2 + \gamma - A(s))} \left((\alpha + s\beta) \frac{\partial^2(V(x, s))}{\partial x^2} + G(x, s) \right) \\ &+ \frac{1}{(s^2 + \gamma - A(s))} \left(\psi(x) + s\Phi - \beta \frac{\partial^2(\Phi)}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right) \quad (n \geq 1), \quad (2.6.57)$$

La solution de L'équation (2.6.57) s'écrit sous la forme d'une série comme suit

$$V(x, s) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i V_i(x, s), \quad (2.6.58)$$

où $v_i(x; s); i = 0; 1; 2; \dots;$ sont des fonctions qui devraient être déterminées.

En substituant (2.6.58) dans (2.6.57), on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i V_i(x, s) = \left(\begin{array}{c} \frac{p}{(s^2 + \gamma - A(s))} \left((\alpha + s\beta) \sum_{i=0}^{\infty} p^i \frac{\partial^2 (V_i(x, s))}{\partial x^2} + G(x, s) \right) \\ + \frac{1}{(s^2 + \gamma - A(s))} \left(\psi(x) + s\Phi - \beta \frac{\partial^2 (\Phi)}{\partial x^2} \right) \end{array} \right), \quad (2.6.59)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p dans (2.6.59) on trouve:

$$\begin{aligned} p^0 & : V_0(x, s) = \frac{1}{(s^2 + \gamma - A(s))} \left(\psi(x) + s\Phi - \beta \frac{\partial^2 (\Phi)}{\partial x^2} \right), \\ p^1 & : V_1(x, s) = \left(\begin{array}{c} \frac{(\alpha + s\beta)}{(s^2 + \gamma - A(s))^2} \left(s \frac{\partial^2 (\Phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\psi(x))}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^4 (\Phi)}{\partial x^4} \right) \\ + \frac{1}{(s^2 + \gamma - A(s))} G(x, s) \end{array} \right), \\ & \dots\dots\dots \\ p^n & : V_n(x, s) = \frac{(\alpha + s\beta)}{(s^2 + \gamma - A(s))} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_{n-1}(x, s) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_0(x, s) & = \frac{1}{(s^2 + \gamma - A(s))} \left(\psi(x) + s\Phi(x) - \beta \frac{\partial^2 (\Phi(x))}{\partial x^2} \right) \\ V_n(x, s) & = \left(\begin{array}{c} \frac{\alpha + s\beta}{(s^2 + \gamma - A(s))^2} \left(\begin{array}{c} -\beta \Phi^{(2n+2)}(x) \\ + \psi^{(2n)}(x) \\ + s\Phi^{(2n)}(x) \end{array} \right) \\ + \frac{1}{(s^2 + \gamma - A(s))} G^{(2n-2)}(x, s) \end{array} \right) \left(\frac{\alpha + s\beta}{s^2 + \gamma - A(s)} \right)^{n-1} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (2.6.58) devient la solution approximative de l'équation (2.6.38), c-à-d,

$$V(x, s) \cong H_n(x, s) = \sum_{i=0}^n V_i(x, s). \quad (2.6.60)$$

La solution $v(x, t)$ peut être récupérée approximativement à partir de $H_n(x, s)$ par la méthode analytique ou selon l'algorithme de Stehfest. En prenant l'inverse \mathcal{L}^{-1} des deux côtés de (2.6.60) on obtient la solution approximative du problème (2.2.1) – (2.2.5) :

$$v(x, t) \cong \mathcal{L}^{-1}(H_n(x, s)).$$

Exemples tests

Exemple 2.6.5

$$\begin{aligned} g(x, t) &= -e^x \sinh t, a(t) = 0, \text{ et } \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0 \\ \Phi(x) &= \exp(x), \Psi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ n(t) &= (e - 1) \cosh(t), \quad m(t) = \cosh(t), \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

$$\text{la solution exacte est : } v(x, t) = e^x \cosh t. \quad (2.6.61)$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (2.6.38) on obtient:

$$\begin{aligned} V_0(x, s) &= \frac{s-1}{s^2} e^x \\ V_n(x, s) &= \left(\frac{s^4 - 3s^2 + 1}{s^6 - s^4} \right) \left(\frac{1+s}{s^2} \right)^{n-1} e^x \quad (n \geq 1) \\ V(x, s) &\cong H_n(x; s) = \sum_{i=0}^n V_i(x, s) = \left(\begin{aligned} &\left(1 - \left(\frac{s+1}{s^2} \right)^n \right) \frac{s^4 - 3s^2 + 1}{s^2(s^2-1)(s^2-s-1)} \\ &+ \frac{s-1}{s^2} \end{aligned} \right) e^x \end{aligned}$$

Pour $n = 6$

$$v(x, t) \cong H_6(x, t) = e^x \cosh t + 32 \left(\begin{aligned} &-e^t + 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 \\ &+ \frac{1}{6!}t^6 + \frac{31}{5040}t^7 + \frac{5}{8064}t^8 + \frac{11}{362880}t^9 - \frac{1}{907200}t^{10} \\ &- \frac{1}{4435200}t^{11} - \frac{1}{95800320}t^{12} - \frac{1}{6227020800}t^{13} \end{aligned} \right) e^x$$

| t | v_{exa} | v_{hpm} | <i>Erreur relative</i> |
|-----|------------------|------------------|-------------------------|
| 0.2 | $1.0201e^x$ | $1.0201e^x$ | 2.9555×10^{-9} |
| 0.4 | $1.0811e^x$ | $1.0811e^x$ | 4.2098×10^{-7} |
| 0.6 | $1.1855e^x$ | $1.1855e^x$ | 7.6910×10^{-6} |
| 0.8 | $1.3374e^x$ | $1.3374e^x$ | 5.9564×10^{-5} |
| 1 | $1.5431e^x$ | $1.5426e^x$ | 2.8574×10^{-4} |
| 1.2 | $1.8107e^x$ | $1.8088e^x$ | 1.0084×10^{-3} |
| 1.4 | $2.1509e^x$ | $2.1447e^x$ | 2.8745×10^{-3} |
| 1.6 | $2.5775e^x$ | $2.5594e^x$ | 7.0051×10^{-3} |
| 1.8 | $3.1075e^x$ | $3.0604e^x$ | 1.5145×10^{-2} |
| 2 | $3.7622e^x$ | $3.6501e^x$ | 2.9796×10^{-2} |

Pour $n = 10$

$$v(x, t) \cong H_{10}(x, t) = \cosh t + 512 \left(\begin{aligned} & -e^t + 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 \\ & + \frac{1}{6!}t^6 + \frac{1}{7!}t^7 + \frac{1}{8!}t^8 + \frac{1}{9!}t^9 + \frac{1}{10!}t^{10} \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{73}{5702400}t^{11} + \frac{167}{159667200}t^{12} + \frac{457}{6227020800}t^{13} + \frac{173}{43589145600}t^{14} + \frac{43}{326918592000}t^{15}$$

$$+ \frac{1}{5230697472000}t^{16} - \frac{1}{4446092851200}t^{17} - \frac{37}{3201186852864000}t^{18}$$

$$- \frac{1}{3475574297395200}t^{19} - \frac{1}{270322445352960000}t^{20} - \frac{1}{51090942171709440000}t^{21}$$

| t | v_{exa} | v_{hpm} | <i>Erreur relative</i> |
|-----|------------------|------------------|--------------------------|
| 0.2 | $1.0201e^x$ | $1.0201e^x$ | 6.0259×10^{-16} |
| 0.4 | $1.0811e^x$ | $1.0811e^x$ | 1.3882×10^{-12} |
| 0.6 | $1.1855e^x$ | $1.1855e^x$ | 1.2994×10^{-10} |
| 0.8 | $1.3374e^x$ | $1.3374e^x$ | 3.222×10^{-9} |
| 1 | $1.5431e^x$ | $1.5431e^x$ | 3.8261×10^{-8} |
| 1.2 | $1.8107e^x$ | $1.8107e^x$ | 2.8406×10^{-7} |
| 1.4 | $2.1509e^x$ | $2.1509e^x$ | 1.5228×10^{-6} |
| 1.6 | $2.5775e^x$ | $2.5774e^x$ | 6.4292×10^{-6} |
| 1.8 | $3.1075e^x$ | $3.1074e^x$ | 2.2618×10^{-5} |
| 2 | $3.7622e^x$ | $3.7619e^x$ | 6.8917×10^{-5} |

Nous prenons

Exemple 2.6.6

$$\begin{aligned}
 g(x, t) &= (t^2 + 2t + 2)x^2 - 4e^t, \quad a(t) = t^2, \\
 0 &< x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha = \beta = \gamma = 1, \\
 \Phi(x) &= x^2, \quad \Psi(x) = x^2, \quad 0 < x < 1, \\
 n(t) &= \frac{1}{3}e^t, \quad m(t) = \frac{1}{4}e^t, \quad 0 < t \leq T.
 \end{aligned}$$

la solution exacte est: $v(x, t) = x^2 e^t$ (2.6.62)

Ainsi, on cherche la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (2.6.38) on obtient:

$$\begin{aligned}
 V_0(x, s) &= s^3 \frac{sx^2 + x^2 - 2}{s^5 + s^3 - 2}, \\
 V_1(x, s) &= -\frac{2}{(s^5 + s^3 - 2)^2} \begin{pmatrix} -s^8 - s^7 x^2 - s^6 x^2 + s^6 - 2s^5 x^2 + 4s^5 - s^4 x^2 \\ +4s^4 - s^3 x^2 + 4s^3 + 2s^2 x^2 + 2sx^2 + 2x^2 \end{pmatrix}, \\
 V_2(x, s) &= s^3 (s + 1) \frac{4s^2 + 4s + 4}{(s^5 + s^3 - 2)^2}, \\
 V_n(x, s) &= 0; \quad (n \geq 3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(x, s) &= H_2(x, s) \\
 &= \sum_0^2 V_n(x, s) \\
 &= \frac{x^2}{s - 1},
 \end{aligned}$$

ce qui donne une solution exacte du problème $v(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{H_1(x, s)\} = x^2 e^t$.

Exemple 2.6.7

$$\begin{aligned}
 g(x, t) &= 0, a(t) = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 0 \\
 \Phi(x) &= \exp(x), 0 < x < 1, \\
 \Psi(x) &= \exp(x), 0 < x < 1, \\
 n(t) &= (e - 1)e^t, 0 < t \leq T, \\
 m(t) &= e^t, 0 < t \leq T.
 \end{aligned}$$

$$\text{la solution exacte est : } v(x, t) = e^{x+t}. \quad (2.6.63)$$

Ainsi, on cherche la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (2.6.38) on obtient:

$$\begin{aligned}
 V_0(x, s) &= \frac{2s + 1}{2s^2} \\
 V_n(x, s) &= \left(\frac{s + 1}{2s^2} \right)^n \frac{2s + 1}{2s^2} e^x, \\
 V(x, s) &\cong H_n(x; s) = \sum_{j=0}^n V_j(x, s) = e^x \left(1 - \left(\frac{s + 1}{2s^2} \right)^{n+1} \right) \frac{2s + 1}{(2s^2 - s - 1)}, \\
 v(x; t) &\cong e^x \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(1 - \left(\frac{s + 1}{2s^2} \right)^{n+1} \right) \frac{2s + 1}{(2s^2 - s - 1)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Pour $n = 5$

$$\begin{aligned}
 v(x, t) \cong H_5(x, t) &= \frac{1}{2554675200} t^{11} + \frac{1}{33177600} t^{10} + \frac{11}{11612160} t^9 + \frac{1}{61440} t^8 + \frac{19}{107520} t^7 \\
 &+ \frac{7}{5120} t^6 + \frac{1}{120} t^5 + \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + t + 1
 \end{aligned}$$

| t | v_{exa} | v_{hpm} | <i>Erreur relative</i> |
|-----|------------------|------------------|-------------------------|
| 0.2 | $1.2214e^x$ | $1.2214e^x$ | 1.3832×10^{-9} |
| 0.4 | $1.4918e^x$ | $1.4918e^x$ | 8.7499×10^{-8} |
| 0.6 | $1.8221e^x$ | $1.8221e^x$ | 9.7853×10^{-7} |
| 0.8 | $2.2255e^x$ | $2.2255e^x$ | 5.3658×10^{-6} |
| 1 | $2.7183e^x$ | $2.7182e^x$ | 1.9869×10^{-5} |
| 1.2 | $3.3201e^x$ | $3.3199e^x$ | 5.7309×10^{-5} |
| 1.4 | $4.0552e^x$ | $4.0546e^x$ | 1.3898×10^{-4} |
| 1.6 | $4.953e^x$ | $4.9516e^x$ | 2.9660×10^{-4} |
| 1.8 | $6.0496e^x$ | $6.0462e^x$ | 5.7379×10^{-4} |
| 2 | $7.3891e^x$ | $7.3815e^x$ | 1.0268×10^{-3} |

Pour $n = 10$

$$v(x, t) \cong H_{10}(x, t) = \frac{1}{104634249567660933120000}t^{21} + \frac{1}{415215276062146560000}t^{20} + \frac{1}{249129165637287936000}t^{19} + \frac{1}{1639007668666368000}t^{18} + \frac{1}{364223926370304000}t^{17} + \frac{1}{41845579776000}t^{16} + \frac{1}{1339058552832000}t^{15} + \frac{1}{22317642547200}t^{14} + \frac{1}{1821848371200}t^{13} + \frac{1}{245248819200}t^{12} + \frac{1}{81749606400}t^{11} + \frac{1}{3628800}t^{10} + \frac{1}{362880}t^9 + \frac{1}{40320}t^8 + \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

| t | v_{exa} | v_{hpm} | <i>Erreur relative</i> |
|-----|------------------|------------------|--------------------------|
| 0.2 | $1.2214e^x$ | $1.2214e^x$ | 2.4983×10^{-19} |
| 0.4 | $1.4918e^x$ | $1.4918e^x$ | 5.0762×10^{-16} |
| 0.6 | $1.8221e^x$ | $1.8221e^x$ | 5.0762×10^{-16} |
| 0.8 | $2.2255e^x$ | $2.2255e^x$ | 1.0089×10^{-12} |
| 1 | $2.7183e^x$ | $2.7183e^x$ | 1.1498×10^{-11} |
| 1.2 | $3.3201e^x$ | $3.3201e^x$ | 8.3302×10^{-11} |
| 1.4 | $4.0552e^x$ | $4.0552e^x$ | 4.4111×10^{-10} |
| 1.6 | $4.953e^x$ | $4.953e^x$ | 1.8555×10^{-9} |
| 1.8 | $6.0496e^x$ | $6.0496e^x$ | 6.5424×10^{-9} |
| 2 | $7.3891e^x$ | $7.3891e^x$ | 2.0061×10^{-8} |

Exemple 2.6.8

$$g(x, t) = -\frac{1}{6}x^2 (t^3x^2 + 3t^2x^2 + 72t + 144), \quad a(t) = t, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

$$\text{et } \alpha = \beta = 1, \quad \gamma = 0,$$

$$\Phi(x) = x^4, \quad \Psi(x) = x^4, \quad 0 < x < 1,$$

$$n(t) = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}, \quad m(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}, \quad 0 < t \leq T,$$

$$V_0(x, s) = s^2 \frac{x^2}{s^4 - 1} (sx^2 + x^2 - 12)$$

$$V_1(x, s) = \frac{1}{s^2 (s + 1) (s^3 - s^2 + s - 1)^2} \begin{pmatrix} 12s^7x^2 - 12s^6x^2 - 24s^6 + 12s^5x^2 \\ -s^4x^4 - 12s^4x^2 + 12s^3x^2 + 12s^2x^2 + x^4 \end{pmatrix}$$

$$V_2(x, s) = \frac{1}{(s^4 - 1) (s^3 - s^2 + s - 1)^2} \begin{pmatrix} 24s^7 - 24s^6 + 24s^5 - 12s^4x^2 \\ -24s^4 + 24s^3 + 24s^2 + 12x^2 \end{pmatrix}$$

$$V_3(x, s) = -\frac{s^2}{(s^4 - 1)^2} (24s^4 - 24) \frac{s + 1}{(s^3 - s^2 + s - 1)^2}$$

$$V_n(x, s) = 0; \quad \forall (n \geq 4).$$

$$\begin{aligned} V(x, s) &= \sum_{i=0}^{i=3} V_i \\ &= \frac{1}{s^2} x^4 (s + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2} x^4 \right\} \\ &= x^4 (t + 1), \end{aligned}$$

ce qui donne une solution exacte du problème $v(x, t) = x^4 (t + 1)$.

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions intégrales

3.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires (EDF) sont des généralisations d'équations différentielles d'ordre entier à un ordre arbitraire. Ces généralisations jouent un rôle crucial en ingénierie, en physique et en mathématiques appliquées. Par conséquent, elles ont suscité beaucoup d'intérêt de la part des ingénieurs et des scientifiques ces dernières années. Puisque les EDF ont de la mémoire, les relations non locales dans l'espace et le temps et les phénomènes complexes peuvent être modélisés en utilisant ces équations. En effet, on peut trouver de nombreuses applications en viscoélasticité, électrochimie, traitement du signal, théorie des contrôles, milieux poreux, fluides, rhéologie, transport diffusif, réseaux électriques, théorie électromagnétique, probabilité, et bien d'autres processus physiques. [44]. Pour les développements récents dans les équations différentielles fractionnaires et différentielles partielles, voir la monographie de Kilbas et al [33], et les articles [69, 52]. Un grand nombre de problèmes dans la physique et

la technologie modernes sont énoncés en utilisant des conditions non locales pour les équations différentielles partielles, qui sont décrites en utilisant des conditions intégrales. Les conditions aux limites intégrales reçoivent beaucoup d'attention en raison de leurs applications dans la dynamique des populations, les modèles de flux sanguin, le génie chimique et les systèmes cellulaires. L'existence et l'unicité des solutions aux problèmes initiaux et aux valeurs limites pour les équations différentielles fractionnaires ont été largement étudiées par de nombreux auteurs, voir par exemple [19, 73, 15, 77]. Certains des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus en utilisant le théorème de Lax-Milgram bien connu, et par des théorèmes de points fixes [77]. Une formulation variationnelle appropriée est le point de départ de nombreuses méthodes, telles que les méthodes d'éléments finités et les méthodes spectrales. La construction d'une formulation variationnelle est donc essentielle et repose fortement sur le choix des espaces et de leurs normes.

3.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire

$$Q = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < t < T\} \text{ où } T > 0,$$

on considère l'équation différentielle fractionnaire de l'inconnu $v(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}$:

$$\mathcal{L}v = {}_0^c \partial_t^\alpha v + a(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x, t) v = g(x, t), \quad (3.2.1)$$

$$1 < \alpha < 2,$$

à l'équation (3.2.1), On associe les conditions initiales :

$$\ell v = v(x, 0) = \Phi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.2.2)$$

$$qv = \frac{v(x, 0)}{\partial t} = \Psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.2.3)$$

et les conditions intégrales

$$\mathfrak{S}_1 v = \mu(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.2.4)$$

$$\mathfrak{S}_1^2 v = E(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.2.5)$$

où $\Phi, \Psi, \mu, E, a, b, c$ et g sont des fonctions.

Condition $C(1)$. Pour tout $(x, t) \in \overline{Q}$, nous supposons que:

$$\sup_Q a(x, t) \leq 0, \sup_Q \frac{\partial a^4(x, t)}{\partial x^4} \geq 0, \inf_Q \frac{\partial^3 b(x, t)}{\partial x^3} \leq 0, \sup_Q \frac{\partial c^2(x, t)}{\partial x^2} \geq 0, \quad (3.2.6)$$

Condition $C(2)$. Pour tout $(x, t) \in \overline{Q}$, nous supposons que:

$$\begin{aligned} 0 < M \leq & 4 \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - 4 \sup_Q a(x, t) - \frac{1}{2} \sup_Q \frac{\partial a^4(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \inf_Q \frac{\partial^3 b(x, t)}{\partial x^3} \\ & - \frac{1}{2} \sup_Q \frac{\partial c^2(x, t)}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial b(x, t)}{\partial x} + 2c(x, t) - \frac{1}{2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Condition $C(3)$. les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ satisfont aux conditions de compatibilité suivantes:

$$\mathfrak{S}_1 \Phi = \mu(0), \mathfrak{S}_1^2 \Phi = E(0), \mathfrak{S}_1 \Psi = \mu'(0), \mathfrak{S}_1^2 \Psi = E'(0). \quad (3.2.8)$$

Puisque les conditions aux limites intégrales sont non homogènes, il est commode de convertir le problème (3.2.1) – (3.2.5) en un problème équivalent avec des conditions intégrales homogènes. Pour cela, nous introduisons une nouvelle fonction $\tilde{u}(x, t)$ comme suit:

$$v(x, t) = \tilde{u}(x, t) + U(x, t), \quad (3.2.9)$$

où

$$U(x, t) = 2(2 - 3x)\mu(t) + 6(2x - 1)E(t). \quad (3.2.10)$$

Cette transformation nous amène à l'étude du problème suivant:

$$\mathcal{L}\tilde{u} = {}_0^c \partial_t^\alpha \tilde{u} + a(x, t) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + c(x, t) \tilde{u} = h(x, t), \quad (3.2.11)$$

$$\ell v = \tilde{u}(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.2.12)$$

$$qv = \frac{\tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.2.13)$$

$$\mathfrak{S}_1 \tilde{u} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.2.14)$$

$$\mathfrak{S}_1^2 \tilde{u} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.2.15)$$

ou

$$\begin{aligned} h(x, t) &= g(x, t) - \ell U(x, t), \\ \varphi(x) &= \Phi(x) - \ell U, \\ \psi(x) &= \Psi(x) - qU. \end{aligned}$$

A partir des conditions $C(3)$, on obtient les conditions de compatibilité suivantes:

$$\mathfrak{S}_1\varphi = 0, \mathfrak{S}_1^2\varphi = 0, \mathfrak{S}_1\psi = 0, \mathfrak{S}_1^2\psi = 0.$$

Encore une fois, on introduit une nouvelle fonction

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) - \psi(x)t - \varphi(x), \quad (3.2.16)$$

et d'après (1.3.8) . le problème (3.2.11) – (3.2.15) prend la forme:

$$\mathcal{L}u = {}_0^R \partial_t^\alpha u + a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u = f(x, t), \quad (3.2.17)$$

$$\ell u = u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.2.18)$$

$$qu = \frac{u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.2.19)$$

$$\mathfrak{S}_1 u = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.2.20)$$

$$\mathfrak{S}_1^2 u = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.2.21)$$

Ainsi, au lieu de rechercher la solution v du problème (3.2.1) – (3.2.5), on établit l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.2.17) – (3.2.21). La solution v sera simplement donnée par les relations (3.2.9), (3.2.10) et (3.2.16).

3.3 Inégalité de l'énergie et ses conséquences

La solution du problème (3.2.17) – (3.2.21) peut être considérée comme une solution au problème sous forme opérationnelle:

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell, q)$ est considéré à partir de B dans F , où B est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q)$, dont la norme:

$$\|u\|_B = \left(\int_Q \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right)^2 dxdt + \int_Q (\mathfrak{S}_x u)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.22)$$

est fini, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, 0, 0)$ dont la norme:

$$\|\mathcal{F}\|_F = \|f\|_{L^2(Q)}$$

est fini aussi.

Le domaine $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble de toutes les fonctions u telles que $\mathfrak{S}_x u, \mathfrak{S}_x ({}_0^c\partial_t^\alpha u), \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial x}, \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(Q)$ et u satisfont (3.2.20) ainsi que (3.2.21).

Théorème 3.3.1 *Si les conditions $C(1), C(2)$, sont satisfaites, alors on a l'estimation*

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_F, \quad (3.3.23)$$

où C est une constante positive indépendante de $u, u \in D(L)$.

Preuve. Multiplions l'équation (3.2.17) par $Mu = -2\mathfrak{S}_x^2 u$ puis, intégrons sur Q on obtient

$$\begin{aligned} & -2 \int_Q ({}^R_0\partial_t^\alpha u) \mathfrak{S}_x^2 u dxdt - 2 \int_Q a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathfrak{S}_x^2 u dxdt \\ & -2 \int_Q b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \mathfrak{S}_x^2 u dxdt - 2 \int_Q c(x, t) u \mathfrak{S}_x^2 u dxdt \\ & = -2 \int_Q f \mathfrak{S}_x^2 u dxdt \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

En utilisant une intégration par parties dans (3.3.24), et en tenant compte des conditions (3.2.20) – (3.2.21), on obtient:

$$-2 \int_Q ({}^R_0\partial_t^\alpha u) \mathfrak{S}_x^2 u dxdt = 2 \int_Q ({}^R_0\partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x u) (\mathfrak{S}_x u) dxdt, \quad (3.3.25)$$

$$\begin{aligned} -2 \int_Q a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathfrak{S}_x^2 u dxdt & = 4 \int_Q \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} (\mathfrak{S}_x u)^2 dxdt - 2 \int_Q a u^2 dxdt \\ & - \int_Q \frac{\partial a^4}{\partial x^4} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 dxdt, \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

$$-2 \int_Q b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \mathfrak{S}_x^2 u dx dt = \int_Q \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 dx dt - 3 \int_Q \frac{\partial b}{\partial x} (\mathfrak{S}_x u)^2 dx dt, \quad (3.3.27)$$

$$-2 \int_Q c(x, t) u \mathfrak{S}_x^2 u dx dt = - \int_Q \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 dx dt + 2 \int_Q c (\mathfrak{S}_x u)^2 dx dt \quad (3.3.28)$$

En substituant (3.3.25) – (3.3.28) dans (3.3.24), on aura

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q \left({}^R_0 \partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x u \right) (\mathfrak{S}_x u) dx dt + 4 \int_Q \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} (\mathfrak{S}_x u)^2 dx dt - 2 \int_Q a u^2 dx dt \\ & - \int_Q \frac{\partial a^4}{\partial x^4} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 dx dt + \int_Q \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 dx dt - 3 \int_Q \frac{\partial b}{\partial x} (\mathfrak{S}_x u)^2 dx dt \\ & - \int_Q \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 dx dt + 2 \int_Q c (\mathfrak{S}_x u)^2 dx dt \\ & = -2 \int_Q f \mathfrak{S}_x^2 u dx dt. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

L'estimation du côté gauche de (3.3.29), en appliquant les inégalités élémentaires, le lemme [37] et les conditions $C(1)$ on a:

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q \left({}^R_0 \partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right)^2 dx + \int_Q \left(4 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 4 \sup a u \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial a^4}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \inf \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial b}{\partial x} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sup \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 2c \right) (\mathfrak{S}_x u)^2 dx \\ & \leq -2 \int_Q f \mathfrak{S}_x^2 u dx. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

L'estimation du côté droit de (3.3.30) donne:

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q \left({}^R_0 \partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right)^2 dx + \int_Q \left(4 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 4 \sup a u \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial a^4}{\partial x^4} dx dt + \frac{1}{2} \inf \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial b}{\partial x} \right. \\ & \left. - 2 \sup \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 2c - \frac{1}{2\varepsilon} \right) (\mathfrak{S}_x u)^2 dx \\ & = \varepsilon \int_Q f^2 dx. \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

En utilisant la condition $C(2)$ dans (3.3.31), on trouve

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q \left({}^R_0 \partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right)^2 dx dt + M \int_Q (\mathfrak{S}_x u)^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon \int_Q f^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

d'où

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_F, \quad (3.3.33)$$

ou

$$C = \left(\frac{\varepsilon}{\min(2, M)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

■

Proposition 3.3.1 *L'opérateur L de B dans F est fermable.*

Soit \bar{L} la fermeture de L , et $D(\bar{L})$ le domaine de définition de \bar{L} .

Définition 3.3.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = \mathcal{F},$$

est dite solution forte du problème (3.2.1) – (3.2.5).

Le théorème 3.3.1 est valide pour une solution forte, c'est à dire on a l'inégalité

$$\|u\|_B \leq c \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}).$$

Par conséquent, cette inégalité entraîne les corollaires: 2.4.1 et 2.4.2.

3.4 L'existence de la solution

Théorème 3.4.1 *Si les conditions $C(1)$ et $C(2)$ sont satisfaites, alors le problème (3.2.17)–(3.2.21) admet une solution forte et unique $u = \bar{L}^{-1}(f, \varphi, \psi) = \bar{L}^{-1}(f, \varphi, \psi)$.*

Preuve. Pour prouver que le problème (3.2.17) – (3.2.21) admet une solution forte pour tout $(f, 0, 0) \in F$, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F . Dans ce but, nous démontrons la proposition suivante:

Proposition 3.4.1 *Dans les conditions du théorème 3.4.1. Si, pour $\omega \in L^2(Q)$ et pour tout $u \in D(L)$, nous avons*

$$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \omega \, dxdt = 0, \quad (3.4.34)$$

alors ω s'annule presque partout dans Q .

■

Preuve. L'égalité (3.4.34) peut s'écrire comme suit

$$\int_Q ({}^c_0\partial_t^\alpha u \omega) \, dxdt = - \int_Q a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega \, dxdt - \int_Q b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \omega \, dxdt - \int_Q c(x, t) u \omega \, dxdt \quad (3.4.35)$$

à partir de l'égalité (3.4.35), nous donnons la fonction ω en termes de u comme suit:

$$\omega = -2\mathfrak{S}_x^2 u. \quad (3.4.36)$$

En substituant ω dans (3.4.35) par sa représentation (3.4.36), par intégration par parties, et en tenant compte des conditions (3.2.20) et (3.2.21), on obtient:

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q ({}^c_0\partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x u) (\mathfrak{S}_x u) \, dxdt \\ & - 4 \int_Q \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} (\mathfrak{S}_x u)^2 \, dxdt + 2 \int_Q a u^2 \, dxdt \\ & + \int_Q \frac{\partial a^4}{\partial x^4} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 \, dxdt - \int_Q \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 \, dxdt + 3 \int_Q \frac{\partial b}{\partial x} (\mathfrak{S}_x u)^2 \, dxdt \\ & + \int_Q \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} (\mathfrak{S}_x^2 u)^2 \, dxdt - 2 \int_Q c (\mathfrak{S}_x u)^2 \, dxdt = 0, \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

en appliquant les inégalités élémentaires et les conditions $C(1)$ on obtient:

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q ({}^c_0\partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x u) \mathfrak{S}_x u \, dxdt - \int_Q \left(4 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 4 \sup a u \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial a^4}{\partial x^4} - \frac{1}{2} \inf \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial b}{\partial x} \right. \\ & \left. + 2 \sup \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - 2c \right) (\mathfrak{S}_x u)^2 \, dxdt \leq 0 \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

en utilisant la condition $C(2)$ dans (3.4.38), on trouve

$$2 \int_Q ({}^c_0\partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x u) \mathfrak{S}_x u \, dxdt + \left(\frac{1}{2\varepsilon} + M \right) \int_Q (\mathfrak{S}_x u)^2 \, dxdt \leq 0$$

en utilisant (1.3.8) et le lemme (1.3.12) on aura

$$2 \int_Q \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right)^2 \, dxdt + \left(\frac{1}{2\varepsilon} + M \right) \int_Q (\mathfrak{S}_x u)^2 \, dxdt \leq 0,$$

d'où

$$(\mathfrak{S}_x u)^2 = 0 \quad (3.4.39)$$

et par conséquent

$$u = 0.$$

Nous mettons $u = 0$ dans (3.4.36) qui donne $\omega \equiv 0$ dans $L^2(Q)$.

Cela achève la démonstration du proposition 3.4.1. ■

3.5 Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM)

En appliquant la transformation de Laplace aux deux cotés de l'équation (3.2.1), on obtient:

$$\mathcal{L}\{v(x, t)\} = -s^{-\alpha}\mathcal{L}\left\{\begin{array}{l} a(x, t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ +b(x, t)\frac{\partial v}{\partial x} + c(x, t)v - g(x, t) \end{array}\right\} + s^{-1}\Phi(x) + s^{-2}\Psi(x). \quad (3.5.40)$$

En prenant la transformation de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1} de l'équation (3.5.40) on trouve

$$v(x, t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha}\mathcal{L}\left(a(x, t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial v}{\partial x} + c(x, t)v - g(x, t)\right)\right\} + \Phi(x) + t\Psi(x), \quad (3.5.41)$$

D'après la technique HPM, pour déterminer la solution approchée de l'équation (3.5.41) nous construisons une homotopie proposée par Madani et al [60], sous la forme suivant:

$$v(x, t) - \Phi(x) - t\Psi(x) = -p\left[\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-\alpha}\mathcal{L}\left\{\begin{array}{l} a(x, t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial v}{\partial x} \\ +c(x, t)v - g(x, t) \end{array}\right\}\right)\right] \quad (3.5.42)$$

La solution de L'équation (3.5.42) s'écrit sous la forme d'une série comme suit

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x, t), \quad (3.5.43)$$

En substituant (3.5.43) dans (3.5.42), on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j - \Phi(x) - t\Psi(x) = -p\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-\alpha}\mathcal{L}\left\{\begin{array}{l} a(x, t)\sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} \\ +b(x, t)\sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial v_j}{\partial x} \\ +c(x, t)\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j \\ -g(x, t) \end{array}\right\}\right). \quad (3.5.44)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p dans (3.5.44) on trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(x, t) = \Phi(x) + t\Psi(x) \\ v_1(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left(s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ a(x, t) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial v_0}{\partial x} + c(x, t) v_0 - g(x, t) \right\} \right) \\ v_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left(s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ a(x, t) \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial v_n}{\partial x} + c(x, t) v_n \right\} \right); (n \geq 1) \end{array} \right. , \quad (3.5.45)$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (3.5.43) devient la solution approximative de l'équation (3.2.1),c-à-d,

$$v(x, t) \cong H_n(x, t) = \sum_{j=0}^n v_j(x, t). \quad (3.5.46)$$

Exemple 3.5.1

$$\begin{aligned} \text{Soient} \quad : \quad \alpha &= \frac{3}{2}, \quad g(x, t) = \left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi} + 2t\sqrt{t} \right) e^x, \\ a(x, t) &= -x - t, \quad b(x, t) = x + t, \quad c(x, t) = 2, \\ \Phi(x) &= 0, \quad \Psi(x) = 0, \\ \mu(t) &= (e - 1)t\sqrt{t}, \quad E(t) = (e - 2)t\sqrt{t}, \end{aligned}$$

$$\text{la solution exacte est :} \quad v(x, t) = t^{\frac{3}{2}} e^x \quad (3.5.47)$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (3.5.45) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(x, t) = 0 \\ v_1(x, t) = e^x \left(t^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} t^3 \right) \\ v_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \mathcal{L} \left\{ (-x - t) \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + (x + t) \frac{\partial v_n}{\partial x} + 2v_n \right\}; (n \geq 1) \right) \end{array} \right. , \quad (3.5.48)$$

Pour $n = 7$:

$$v(x, t) \cong H_7(x, t) = t^{\frac{3}{2}} e^x + \frac{32\,768}{4583\,103\,525} t^{\frac{21}{2}} e^x. \quad (3.5.49)$$

| t | v_{exa} | v_{hpm} | $Erreur\ relative$ |
|-----|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 0.2 | $8.9443 \times 10^{-2}e^x$ | $8.9443 \times 10^{-2}e^x$ | 3.6607×10^{-12} |
| 0.4 | $0.25298e^x$ | $0.25298e^x$ | 1.8743×10^{-9} |
| 0.6 | $0.46476e^x$ | $0.46476e^x$ | 7.2053×10^{-8} |
| 0.8 | $0.71554e^x$ | $0.71554e^x$ | 9.5962×10^{-7} |
| 1 | e^x | $0.99999e^x$ | 7.1497×10^{-6} |
| 1.2 | $1.3145e^x$ | $1.3145e^x$ | 3.6891×10^{-5} |
| 1.4 | $1.6565e^x$ | $1.6563e^x$ | 1.4772×10^{-4} |
| 1.6 | $2.0239e^x$ | $2.0229e^x$ | 4.9133×10^{-4} |
| 1.8 | $2.4150e^x$ | $2.4115e^x$ | 1.4182×10^{-3} |
| 2 | $2.8284e^x$ | $2.8181e^x$ | 3.6607×10^{-3} |

Pour $n = 11$:

$$v(x, t) \cong H_{11}(x, t) = t^{\frac{3}{2}}e^x + \frac{1}{4168212048000}\sqrt{\pi}t^{18}e^x. \quad (3.5.50)$$

| t | v_{exa} | v_{hpm} | $Erreur\ relative$ |
|-----|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 0.2 | $8.9443 \times 10^{-2}e^x$ | $8.9443 \times 10^{-2}e^x$ | 1.1147×10^{-25} |
| 0.4 | $0.25298e^x$ | $0.25298e^x$ | 2.9222×10^{-20} |
| 0.6 | $0.46476e^x$ | $0.46476e^x$ | 4.3186×10^{-17} |
| 0.8 | $0.71554e^x$ | $0.71554e^x$ | 7.6603×10^{-15} |
| 1 | e^x | $1.0e^x$ | 4.2523×10^{-13} |
| 1.2 | $1.3145e^x$ | $1.3145e^x$ | 1.1321×10^{-11} |
| 1.4 | $1.6565e^x$ | $1.6565e^x$ | 1.8152×10^{-10} |
| 1.6 | $2.0239e^x$ | $2.0239e^x$ | 2.0081×10^{-9} |
| 1.8 | $2.4150e^x$ | $2.4150e^x$ | 1.6731×10^{-8} |
| 2 | $2.8284e^x$ | $2.8284e^x$ | 1.1147×10^{-7} |

Exemple 3.5.2

$$\begin{aligned}
 \text{Prenons:} \quad & \alpha = 5/4, \quad g(x, t) = \frac{2}{\Gamma(1.75)} t^{\frac{3}{4}} - 2 - 2x, \\
 a(x, t) &= -1, \quad b(x, t) = -1, \quad c(x, t) = 0, \\
 \Phi(x) &= x^2, \quad \Psi(x) = 0, \\
 \mu(t) &= t^2 + 1/3, \quad E(t) = (1/2)t^2 + 1/12.
 \end{aligned}$$

$$\text{la solution exacte est : } v(x, t) = t^2 + x^2. \quad (3.5.51)$$

Ainsi, on cherche la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (3.5.45) on obtient:

$$\begin{aligned}
 v_0(x, t) &= x^2 \\
 v_1(x, t) &= t^2 \\
 v_n(x, t) &= 0; (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

donc

$$v(x, t) = H_1(x, t) = \sum_{i=0}^1 v_i(x, t) = t^2 + x^2. \quad (3.5.52)$$

Exemple 3.5.3

$$\begin{aligned}
 \text{Prenons : } \quad & \alpha = \frac{4}{3}, \quad g(x, t) = t^2 + \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) x, \\
 a(x, t) &= -t^{\frac{2}{3}} + x^2 - x, \quad b(x, t) = t^{\frac{2}{3}} - x^2, \quad c(x, t) = x \\
 \Phi(x) &= e^x, \quad \Psi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\
 \mu(t) &= t^{\frac{4}{3}} + e - 1, \quad E(t) = \frac{1}{6}t^{\frac{4}{3}} + e - 2, \quad 0 < t \leq T,
 \end{aligned}$$

$$\text{la solution exacte est : } v(x, t) = t^{\frac{4}{3}}x + e^x.$$

On cherche comme d'habitude la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (3.5.45) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(x, t) = e^x \\ v_1(x, t) = t^{\frac{4}{3}} \left(\frac{9}{35\Gamma(\frac{7}{3})} t^2 + x \right) \\ v_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left(s^{-\frac{4}{3}} \mathcal{L} \left\{ \left(-t^{\frac{2}{3}} + x^2 - x \right) \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + (t^{\frac{2}{3}} - x^2) \frac{\partial v_n}{\partial x} + x v_n \right\} \right); (n \geq 1). \end{array} \right. ,$$

Pour $n = 5$

$$v(x, t) \cong H_5(x, t) = t^{\frac{4}{3}} x + e^x + \frac{66\,079}{36\,159\,245\,640} \sqrt{3\pi} \frac{t^{10}}{\Gamma(\frac{2}{3})}.$$

Tableau de l'erreur relative: $E_r = \frac{v_{\text{exa}} - v_{\text{hpm}}}{v_{\text{exa}}}$

| t/x | $x = 0.2$ | $x = 0.4$ | $x = 0.6$ | $x = 0.8$ |
|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $t = 0.2$ | -6.0409×10^{-13} | -4.8873×10^{-13} | -3.9738×10^{-13} | -3.2425×10^{-13} |
| $t = 0.4$ | -6.0141×10^{-10} | -4.7835×10^{-10} | -3.8521×10^{-10} | -3.1285×10^{-10} |
| $t = 0.6$ | -3.3572×10^{-8} | -2.6208×10^{-8} | -2.0888×10^{-8} | -1.6881×10^{-8} |
| $t = 0.8$ | -5.7557×10^{-7} | -4.4077×10^{-7} | -3.477×10^{-7} | -2.7964×10^{-7} |
| $t = 1.0$ | -5.1663×10^{-6} | -3.8817×10^{-6} | -3.0318×10^{-6} | -2.4271×10^{-6} |
| $t = 1.2$ | -3.0796×10^{-5} | -2.2713×10^{-5} | -1.7574×10^{-5} | -1.4009×10^{-5} |
| $t = 1.4$ | -1.3841×10^{-4} | -1.0028×10^{-4} | -7.691×10^{-5} | -6.1065×10^{-5} |
| $t = 1.6$ | -5.06×10^{-4} | -3.6039×10^{-4} | -2.7417×10^{-4} | -2.1689×10^{-4} |
| $t = 1.8$ | -1.5801×10^{-3} | -1.1074×10^{-3} | -8.3611×10^{-4} | -6.5924×10^{-4} |
| $t = 2.0$ | -4.3583×10^{-3} | -3.0081×10^{-3} | -2.2554×10^{-3} | -1.7729×10^{-3} |
| t/x | $x = 1.2$ | $x = 1.4$ | $x = 1.6$ | $x = 1.8$ |
| $t = 0.2$ | -2.173×10^{-13} | -1.7824×10^{-13} | -1.4629×10^{-13} | -1.2012×10^{-13} |
| $t = 0.4$ | -2.0960×10^{-10} | -1.7235×10^{-10} | -1.4195×10^{-10} | -1.1702×10^{-10} |
| $t = 0.6$ | -1.1306×10^{-8} | -9.3211×10^{-9} | -7.7052×10^{-9} | -6.3792×10^{-9} |
| $t = 0.8$ | -1.8723×10^{-7} | -1.5476×10^{-7} | -1.2839×10^{-7} | -1.0675×10^{-7} |
| $t = 1.0$ | -1.6246×10^{-6} | -1.3461×10^{-6} | -1.1206×10^{-6} | -9.3551×10^{-7} |
| $t = 1.2$ | -9.3743×10^{-6} | -7.7851×10^{-6} | -6.5017×10^{-6} | -5.4486×10^{-6} |
| $t = 1.4$ | -4.0852×10^{-5} | -3.3998×10^{-5} | -2.8478×10^{-5} | -2.3951×10^{-5} |
| $t = 1.6$ | -1.4507×10^{-4} | -1.2096×10^{-4} | -1.0160×10^{-4} | -8.573×10^{-5} |
| $t = 1.8$ | -4.4084×10^{-4} | -3.6822×10^{-4} | -3.1005×10^{-4} | -2.6243×10^{-4} |
| $t = 2.0$ | -1.1853×10^{-3} | -9.9165×10^{-4} | -8.3693×10^{-4} | -7.1038×10^{-4} |

Pour $n = 10$

$$v(x, t) \cong H_{10}(x, t) = t^{\frac{4}{3}}x + e^x - \frac{36\,593}{793\,231\,757\,673\,062\,400} \sqrt{3\pi} t^{18} \frac{x}{\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2}$$

Tableau de l'erreur relative:

| t/x | $x = 0.2$ | $x = 0.4$ | $x = 0.6$ | $x = 0.8$ |
|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $t = 0.2$ | 5.7659×10^{-27} | 9.3297×10^{-27} | 1.1379×10^{-26} | 1.2380×10^{-26} |
| $t = 0.4$ | 1.4695×10^{-21} | 2.3377×10^{-21} | 2.8237×10^{-21} | 3.0577×10^{-21} |
| $t = 0.6$ | 2.1024×10^{-18} | 3.2825×10^{-18} | 3.9242×10^{-18} | 4.2285×10^{-18} |
| $t = 0.8$ | 3.6004×10^{-16} | 5.5143×10^{-16} | 6.5250×10^{-16} | 6.9969×10^{-16} |
| $t = 1.0$ | 1.9262×10^{-14} | 2.8945×10^{-14} | 3.3912×10^{-14} | 3.6198×10^{-14} |
| $t = 1.2$ | 4.9371×10^{-13} | 7.2824×10^{-13} | 8.4523×10^{-13} | 8.9834×10^{-13} |
| $t = 1.4$ | 7.6160×10^{-12} | 1.1035×10^{-11} | 1.2696×10^{-11} | 1.344×10^{-11} |
| $t = 1.6$ | 8.1029×10^{-11} | 1.1542×10^{-10} | 1.3171×10^{-10} | 1.3893×10^{-10} |
| $t = 1.8$ | 6.4923×10^{-10} | 9.1000×10^{-10} | 1.0306×10^{-9} | 1.0835×10^{-9} |
| $t = 2.0$ | 4.1599×10^{-9} | 5.7424×10^{-9} | 6.4583×10^{-9} | 6.7688×10^{-9} |
| t/x | $x = 1.2$ | $x = 1.4$ | $x = 1.6$ | $x = 1.8$ |
| $t = 0.2$ | 1.2445×10^{-26} | 1.1909×10^{-26} | 1.1171×10^{-26} | 1.0319×10^{-26} |
| $t = 0.4$ | 3.0729×10^{-21} | 2.9479×10^{-21} | 2.7748×10^{-21} | 2.5734×10^{-21} |
| $t = 0.6$ | 4.2481×10^{-18} | 4.086×10^{-18} | 3.8602×10^{-18} | 3.5954×10^{-18} |
| $t = 0.8$ | 7.0272×10^{-16} | 6.7765×10^{-16} | 6.425×10^{-16} | 6.0097×10^{-16} |
| $t = 1.0$ | 3.6344×10^{-14} | 3.5133×10^{-14} | 3.3425×10^{-14} | 3.1392×10^{-14} |
| $t = 1.2$ | 9.0171×10^{-13} | 8.7365×10^{-13} | 8.3386×10^{-13} | 7.8615×10^{-13} |
| $t = 1.4$ | 1.3487×10^{-11} | 1.3095×10^{-11} | 1.2536×10^{-11} | 1.1861×10^{-11} |
| $t = 1.6$ | 1.3938×10^{-10} | 1.3559×10^{-10} | 1.3015×10^{-10} | 1.2356×10^{-10} |
| $t = 1.8$ | 1.0868×10^{-9} | 1.059×10^{-9} | 1.0191×10^{-9} | 9.7044×10^{-10} |
| $t = 2.0$ | 6.7883×10^{-9} | 6.6256×10^{-9} | 6.3907×10^{-9} | 6.1024×10^{-9} |

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes non locaux pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques avec conditions aux limites de type intégrale.

Où, après développement de la méthode des inégalités d'énergie pour des problèmes très compliqués, on a pu établir ces résultats:

L'existence et l'unicité d'une solution forte d'un problème pseudo hyperbolique intégral-différentielles avec deux conditions intégrales puis l'étude de la résolution numérique du problème utilisant deux méthodes: La première est la transformation de Laplace et l'utilisation de sa transformation inverse pour obtenir la solution numérique. La deuxième outil est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (LT- HPM).

L'existence et l'unicité de la solution forte d'un problème fractionnaire d'évolution avec deux conditions intégrales. Ensuite on utilise la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (LT- HPM) pour obtenir la solution numérique.

Il est important de noter une autre fois qu'il n'existe pas encore, pour les problèmes non-locaux une théorie générale analogue à celle des problèmes classiques.

Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité des questions qu'elle soulève d'autre part. Chaque problème nécessite alors un traitement spécifique, ce qui souligne l'actualité du sujet abordé dans cette thèse.

On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns:

- L'étude de la résolution numériques pour les problèmes des EDP (paraboliques et hyperboliques) non linéaires avec des conditions de type intégrale.

Cette question semble très délicate et importante, et elle mérite d'être étudiée.

– Aussi, l'étude des solutions des problèmes fractionnaires linéaires et non linéaires avec des conditions non locales de type intégrale semble clairement difficile et qui exige certainement des hypothèses plus précises et un développement très difficile de la méthode des inégalités d'énergie et cela aussi pour la technique utilisée dans la démonstration de l'existence des solutions.

– Ainsi, de nombreuses perspectives intéressantes pour l'analyse numérique pourraient permettre de poursuivre les travaux entrepris dans cette thèse, surtout du côté du développement des méthodes numériques efficaces, afin d'être en compatibilité avec les conditions non locales de type intégrale.

Bibliographie

- [1] A. Necib, and A. Merad, Laplace transform and Homotopy perturbation methods for solving the pseudo-hyperbolic integro-differential problems with purely integral conditions, Kragujevac Journal of Mathematics, accepted. 2018.
- [2] A Merad, A Bouziani, O Cenap, A Kilicman. On solvability of the integrodifferential hyperbolic equation with purely nonlocal conditions. Acta Mathematica Scientia 35 (3), 601-609. 2015.
- [3] A Merad, A Bouziani, S Araci. Existence and uniqueness for a solution of pseudo-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition Appl. Math. Inf. Sci 9, No. 4, 1855-1861.2015.
- [4] A Bouziani, A Merad. The Laplace transforms method for one dimensional hyperbolic equation with purely integral conditions. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science 3 (2), 191-204. 2013.
- [5] A. Bouziani, Problème aux limites pour certaines équations de type non classique du troisième ordre, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 7-12. 1995.
- [6] A Merad, J Martín-Vaquero. A Galerkin method for two-dimensional hyperbolic integro-differential equation with purely integral conditions. Applied Mathematics and Computation 291, 386-394. 2016.
- [7] A Merad, A Bouziani. Numerical solutions of the hyperbolic equation with purely integral condition by using Laplace transform method. Palestine Journal of Mathematics. 2015.

- [8] A Merad, A Bouziani. Numerical technique for solving Klein–Gordon equation with purely nonlocal conditions. *Math. Aeterna* 4, 1-11. 2014.
- [9] A Merad, A Bouziani. Solvability the telegraph equation with purely integral conditions. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics* 3 (2), 245. 2013.
- [10] A Merad, A Bouziani. A Method of Solution for Integro-Differential Parabolic Equation with Purely Integral Conditions. *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory*, 317-327. 2013.
- [11] A Merad, A Bouziani. Numerical solution for parabolic equation with nonlocal conditions. *TJMM*, 5 No. 2, 121-127. 2013.
- [12] A Merad, A Bouziani, C Ozel. Inversion Laplace transform for integrodifferential parabolic equation with purely nonlocal conditions. *Hacettepe journal of mathematics and statistics* 44 (5), 1087-1097. Volume 45 Issue 2, 2016.
- [13] A.M. Nakhushev, On a certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and their applications in ground waters dynamics, *Differ. Uravn.*, V, 72–81. 1982.
- [14] A. M. Nakhushev, On one approximate method for the solution of boundary-value problems for differential equations and its application to the dynamics of soil moisture and subterranean waters, *Differents. Uravn.*, V 18, No. 1, 72–81. 1982.
- [15] A. Anguraj, P. Karthikeyan; Existence of solutions for fractional semilinear evolution boundary value problem, *Commun. Appl. Anal.* 14. 505-514. 2010.
- [16] A. Merad and A. Bouziani, Solvability the Telegraph equation with purely integral conditions, *TWMS J. App. Eng. Math.*, V. 3, N. 2, pp. 117-125. 2013.
- [17] A. Bouziani, N.E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris t.321, Série I*, 1177-1182. 1995.

- [18] A. Merad and A. Bouziani, A Method of solution of integro-differential parabolic equation with purely integral conditions, *Advances in applied mathematics and approximation theory*, Springer proceeding in mathematics and statistics, 41, 2013.
- [19] A Akilandeewariy, K Balachandran, N Annapoorani; Solvability of hyperbolic fractional partial Differential Eequations, *Journal of Applied Analysis and Computation* Volume 7, Number 4, November, 1570-1585. 2017.
- [20] A. Merad and A. Bouziani, Laplace transform technique for pseudoparabolic equation with nonlocal conditiond, *TJMM*, 5, No. 1, 59-64. 2013
- [21] A. Bouziani, Mixed problem for certain nonclassical equations with a small parameter, *Bull. Clas. Sci., Acad. Roy. Belgique.*, V 5, 389-400. 1994.
- [22] A. A. Samarskii, Some problems in differential equations theory, *Differents. Uravn.*, V 16, 1925-1935. 1980.
- [23] A. M. Nakhushev, *The equations of the mathematical biology* (Moscow: Vysshaya Shkola (Russian), 1995.
- [24] A. Bouziani,A Merad, The Laplace transform method for one-dimensional hyperbolic equationwith purely integral conditions. Volume 3, Issue 2, P 191-204. 2013.
- [25] A. Bouziani, Mixed problem for certain nonclassical equations with a small parameter, *Bulletin de la Classe des Sciences. Académie Royale de Belgique*, 1-6, 1996.
- [26] A. Bouziani, On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems, *Electron J. Differential Equations* 2001,1-16, 2001.
- [27] A. Bouziani, N.-E. Benouar, Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation, *Kobe J. Math.*, V 15, N 1, 47–58. 1998.
- [28] A. Bouziani, T. S. Temsi, On a pseudohyperbolic equation with a nonlocal boundary condition. *Kobe Journal of Mathematics.*, V 21, 15–31. 2004.

- [29] A. A. Dezin, Existence and uniqueness theorems for solutions of boundary problems for partial differential equations in function spaces”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 14:3 (87). 21–73. 1959.
- [30] A.V. Kartynnik, Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation, *Differ. Eqns.*, V 26, 1160-1166. 1990.
- [31] A. Merad, A.L. Marhoune, Strong solution for a high order boundary value problem with integral condition, *Turkish Journal of Mathematics* 37 (2), 299-307. 2013.
- [32] B. Cahlon, D. M. Kulkarni and P. Shi, Stepwise stability for the heat equation with non-local constraint, *SIAM J. Numer. Anal.*, V 32, N 2, 571-593. 1995.
- [33] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo; *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [34] D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, Solutions of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of the medium, *Mat. Model.*, V 12, No 1, 94-103. 2000.
- [35] D.D. Ganji, A. Sadighi, Application of He’s Homotopy-perturbation Method to Non-linear Coupled Systems of Reaction-diffusion Equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 7, No.3. 2006.
- [36] D. P. Graver, Observing stochastic processes and approximate transform inversion, *Oper. Res.* 14, 444-459. 1966.
- [37] F. Rebbani, V.I.Chasarain, Problème aux limites pour des équations différentielles opérationnelles d’ordre impair dans le rectangle, *Uzvestis Akad. Nauk. BSSSR, Serie Phys. Mat. Nauk*, N 3, 1984.
- [38] J. H. He: Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.178:257-262(1999).
- [39] J.H. He, The homotopy perturbation method for non-linear oscillators with discontinuities. *Appl. Math. Comput.* 151(1), pp. 287–292. 2004.

- [40] J. Leray, Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients, Princeton, Justfor adv. Study, 1952.
- [41] J.H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Mech.* 35 (1)37-43 2000.
- [42] J.H. He, Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, *Chaos Soliton. Fract.* 26 827-833. 2005.
- [43] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, V 21, 155–160. 1963.
- [44] J. H. He; Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Comput Methods Appl Mech Eng* 167, 57-68. 1998.
- [45] He, J.H. New Interpretation of Homotopy Perturbation Method. *International Journal of Modern Physics B*, 20, 2561-2568. 2006.
- [46] H. Hassanzadeh and M. Pooladi-Darvish , Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications, *Appl. Math. Comp.* 189 1966-1981, 2007.
- [47] H. Stehfest, Numerical Inversion of the Laplace Transform, *Comm. ACM* 13, 47-49, 1970.
- [48] I. G. Petrovsky, Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partialen differentialgleichungen in gebiet der nichtanalytischen funktionen, *Bull. Univ d'etat, Moscow*, N 7, 1-74. 1938.
- [49] I. A. Belavin, S. P. Kapitsa and S. P. Kurdyumov, A mathematical model of global demographic processes with regard for aspace distribution, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, V 38, No 6, 885–902. 1998.
- [50] G.A. Afrouzi, D. D. Ganji, H. Hosseinzadeh, R.A. Talarposhti, Fourth order Volterra integro-differential equations using modied homotopy-perturbation method, *TJMCS Vol .3 No.2*, 179 - 191. 2011.

- [51] K. Friderichs, Symetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, V 7, N 2, 345-392. 1954.
- [52] K. M. Furati, N. Tatar; An existence result for a nonlocal fractional differential problem, *J.Fract. Calc.* 26, 43-51. 2004.
- [53] L.A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain non-local boundary-value problem for hyperbolic equation, *Matem. Zametski.*, V 54, 98-116. 1993.
- [54] L. S. Pulkina, A non local problem with integral conditions for hyperbolic equations, *Electronic Journal of Differential Equations.*, V 45, 1-6. 1999.
- [55] L. A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, *Mat. Zametki* 54, 98–116. 1993.
- [56] L. Garding, Cauchy's problem for hypebolic equations, University of Chicago, Lecture notes, 1957.
- [57] M.I. Ismailov, F. Kanca, An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and over determination conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.* V 34, N 6, 692–702. 2011.
- [58] M.I. Ivanchov, Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition, *Ukrain. Math. J.*, V 45, N 8, pp. 1186–1192. 1993.
- [59] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Hand book of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [60] M. Madani, M. Fathizadeh, Y. Khan, A. Yildirim,, On coupling the homotpy perturbation method ans Laplace transformation, *Mathematical and Computer Modelling*, 53, (2011), pp. 1937–1945, 1970.
- [61] M. Denche, A. L. Marhoune, High-order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations.*, V 2000, N 60, pp. 1-10. 2000.

- [62] N. I. Ionkin, Stability of a problem in Heat-condition, *Differentsial'nye Uravneniya.*, V 13, No 2, 294-304. 1977.
- [63] N B. Kerimov, M I. Ismailov, An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, V 396, 546–554. 2012.
- [64] N.I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, *Th., Vychisl., Mat., Mat., Fiz.*, V 43, N 6, 1006-1024. 1964.
- [65] N.E. Benouar, N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator, *Differentsial'nye Uravneniya.*, V 27, 2094-2098. 1991.
- [66] N. Merazga and A. Bouziani, Rothe time-discretization method for a nonlocal problem arising in thermoelasticity, *J. Appl. Anal. Stochastic Anal.* 2005:1, 13-28, 2005.
- [67] O. A. Ladyzhenskaya, Mixed problem for hyperbolic equations, Edition Mir nauka, 1974.
- [68] P. Shi, M. Shillor, On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity, *Theoretical Aspects of Industrial Design* (Wright-Patterson Air Force Base, OH, SIAM, Pennsylvania., 1992, pp. 76–82. 1990.
- [69] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani; Boundary value problems for fractional differential equations, *Adv. Stud. Contemp. Math.* 16, 181-196. 2008.
- [70] S. Momani, Z. odibat, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order. Volume 365, Issues 5–6, Pages 345-350. 11 June 2007.
- [71] S. Abbasbandy, Numerical solutions of the integral equations: homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 173(2-3) 493-500, 2006.

- [72] S. Mesloub, Existence and uniqueness results for a fractional two-times evolution problem with constraints of purely integral type, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(6), 1558-1567. 2016.
- [73] T-E. Oussaeif, A Bouziani; Existence and uniqueness of solutions to parabolic fractional differential equations with integral conditions., V 2014, N 179, pp. 1-10. 2014.
- [74] V.A. Vodakhova, A boundary-value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic water transfer equation, *Differ. Uravn.*, V 18, 280–285. 1982.
- [75] W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou, Abox schememe for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems, *Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems.*, V 5, 573-578. 1999.
- [76] X. J. Li, C. J. Xu, A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation,”*SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.47, no.3, pp. 2108–2131, 2009.
- [77] X. J. Li, C. J. Xu, Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation, ”*Communications in Computational Physics*, V 8, N 5, pp.1016–1051. 2010.
- [78] Y.S. Choi, K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, *Nonlinear Anal.* 18, pp. 317–331. 1992.
- [79] Z. Suying, Z. Minzhen, D. Zichen and L.Wencheng, Solution of nonlinear dynamic differential equations based on numerical Laplace transform inversion, *Appl. Math. Comp.* 189, 79-86, 2007.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatique

Numéro D'ORDRE:

Numéro DE SÉRIE:

THÈSE

Présentée par: **NECIB Abdelhalim**

Pour Obtenir

LE DIPLÔME DE Docteur

Spécialité: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquée

Intitulée:

Problèmes aux limites avec conditions non locales

Soutenu le 11/10/2018 à la salle de conférences de la faculté des sciences.

Devant les membres du jury:

| | | |
|---------------------------------|--|-------------------|
| Mr. AYADI Abdelhamid | Prof à l'université d'oum el Bouaghi | Président |
| Mr. MERAD Ahcene | M.C.A à l'université d'oum el Bouaghi | Rapporteur |
| Mr. ELAGGOUNE Fateh | Prof à l'université de Guelma | Examineur |
| Mr. SAOUDI Khaled | M.C.A à l'université de Khenchla | Examineur |
| Mr. ARDJOUNI Abdelouahab | M.C.A à l'université de Souk Ahras | Examineur |
| Mr. REZZOUG Imad | M.C.A à l'université d'oum el Bouaghi | Examineur |

Année universitaire: **2018/2019**