

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI - OUM EL BOUAGHI

MÉMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et
de la Vie

École Doctorale

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTÈRE

Option : Mathématiques Appliquées

Par

CHOUGUI Rachid

THÈME

**Étude Analytique de Quelques
Problèmes en Mécanique des Milieux Continus**

Soutenu le : / / 2012

Devant le jury :

Président :	Pr. S. DJABI	Professeur	UFA. SETIF
Encadreur :	Dr. N. LEBRI	M.C.A.	UFA. SETIF
Examineurs :	Dr. T. SERRAR	M.C.A.	UFA. SETIF
	Dr. S. BOUTECHEBAK	M.C.A.	UFA. SETIF
Invité :	Dr. A. MEROUANI	M.C.A.	U. B.B.A.

Remerciements

En premier lieux, je tiens à remercier comme il se doit, Docteur Lebri Namira pour son acceptation de diriger ce travail de mémoire malgré toutes ses préoccupations, pour sa patience et pour ses conseils. Je tiens ensuite de lui exprimer mes vifs remerciements pour la confiance qu'elle m'a accordée, en guidant et en orientant mon travail, pour son encouragement et son soutien afin de suivre ce chemin de recherche.

Je tiens à remercier Professeur Seddik Djabi de l'université Ferhat Abbas de Sétif d'avoir accepté tant que président de jury pour cette soutenance. Comme je tiens aussi à lui exprimer tous mes respects et mes reconnaissances pour ses compétences, pour tout ce qui nous à donner pendant notre parcours de D.E.S., ainsi que pour ses cours à l'école doctorale.

Avec un grand plaisir que je remercie Docteur---- de l'université Ferhat Abbas et Docteur Abdelbaki Merouani de l'université de Bordj Bouareridj d'avoir accepté et examiner ce travail.

Avec un grand merci que je m'adresse à Professeur Abdelhamid Ayadi tant que responsable de l'école doctorale pour son meilleur accueil du groupe de l'école doctorale à l'université Larbi Ben M'hidi de Oum El Bouaghi, pour ses compétences pour ses conseils et ses orientations , pour son grand cœur ainsi que pour sa patience et sa sagesse pendant tout le parcours de formation. Il reste toujours pour nous une étoile scientifique et mathématique.

Je remercie également notre recteur, Professeur Bouras de l'université, Professeur --- ,doyenne de la faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie qui n'ont jamais hésiter à nous offrir tout leur aide et soutien.

Je présente tous mes remerciements et mes reconnaissances à docteur Bouzit chef de département de mathématiques à tous les enseignants qui nous ont suivis pendant la première année de l'année doctorale.

Je remercie vivement professeur, Boubakeur Merouani ainsi que docteur Aliouch , docteur Namire et tous nos enseignants de l'école doctorale.

Je remercie aussi tous mes collègues de l'école doctorale de mathématiques, et spécialement mon ami Saadoune Ibrahim.

Pour finir je m'adresse chaleureusement et avec tous mes remerciements à mes parents qui suivent avec un grand intérêt mon parcours de recherche, à ma femme pour son encouragement et sa patience, à mes deux sœurs Oualima et Hanan , mes frères, mes deux filles Rayane et Amira, mes fils , à ma tante et à tous les membres de la famille et spécialement professeur Mokhtar Boutahala de département de chimie de l'université Ferhat Abbas, qui attendent toujours les nouvelles de mes études.

Table des matières

Introduction	iv
Notations	vii
1 Formulation des problèmes viscoélastiques – Préliminaires	3
Formulation des problèmes aux limites	3
Contraintes, déformation et lois de comportement.	3
Conditions aux limites de contact	5
Formulation mathématiques des problèmes viscoélastiques avec frottement	9
Préliminaires	10
Espaces fonctionnelles et leurs propriétés	11
A) Espaces de distributions	11
B) Espaces liés à l'opérateur déformation	13
C) Espaces liés à l'opérateur divergence	15

D) Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	18
Inéquations variationnelles	21
Lemmes de type Gronwall	22

2 Problèmes viscoélastiques avec loi de Tresca 25

Formulation du problème – Hypothèses	27
Formulation variationnelles du problème	32
Résultats d’existence et d’unicité.	43
Un résultat d’équivalence	51
Dépendance continue de la solution par rapport aux données . . .	57

3 Problèmes d’évolution abstraits de la forme

$Au + \partial_2 j(u, \dot{u}) \ni f$ 60

Formulation Résultat d’existence et d’unicité.	62
Formulation duale du problème	63
des problèmes –Hypothèses	70
Application	78

Bibliographie 87

Introduction

Le phénomène de contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation rigide ou entre deux corps déformables sont abondants en industrie et dans notre vie quotidienne.

Au début, on va citer quelques étapes importantes dans l'élaboration de la théorie du frottement.

La notion de coefficient de frottement s'est imposée durant la période qui va du 16^{ième} au 18^{ième} siècle. Léonard de Vinci s'intéresse au frottement vers le début du 16^{ième} siècle et donne une première valeur (0.25) du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. Deux siècles plus tard, vers la fin du 17^{ième} siècle, G. Amontons redécouvre ces aspects et les étend. Il énonce les premières lois de frottement véritables.

Au 18^{ième} siècle, on s'intéresse à la rugosité des surfaces et L. Euler fait la différence entre frottement statique et frottement dynamique grâce à des expériences de petits solides glissant sur des plans inclinés. Il estime que cette différence est due au fait que plus le glissement est rapide plus les aspérités d'une surface sautent d'une aspérité de la surface opposée à l'autre, réduisant ainsi le contact.

C.A. Coulomb, à partir de nombreuses expériences, confirme les lois d'Amontons. Il pose le problème de la dépendance à la rugosité des surfaces et du rôle de l'adhésion. Il est en outre le premier à faire référence à une augmentation du coefficient statique avec le temps de contact stationnaire.

H. Tresca (1814 - 1885), l'ingénieur mécanicien a aboutit dans ses travaux sur les résistances des matériaux, à un critère maximal de résistance d'un matériau aux efforts de cisaillement connu sous le nom de critère de Tresca.

Toutefois jusqu'à la fin du 19^{ième} siècle, on s'intéresse peu au problème du contact. Il faut attendre Hertz en 1881 qui énonce des résultats sur les déformations induites par un contact élastique sphère/plan ou cylindre/plan.

Dés lors, les travaux sur le contact et le frottement ont été abordés par de nombreux chercheurs, les travaux de Hertz étant confirmés par des résultats expérimentaux mettant en œuvre la mesure de conductance du contact. Les travaux sur la rugosité des surfaces font ressortir le rôle primordial du comportement des aspérités. Il apparaît que le contact réel s'effectue sur une petite portion de l'aire apparente de contact.

En 1933, A. Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement avec une fondation rigide.

La théorie de l'analyse variationnelle des problèmes de contacts inclues l'existence et l'unicité des résultats à l'aide des inégalité variationnelles, était développée fortement après les années 70, on peut se reporter à [22], [24], [38], [26], [45] et [48].

H. Bresiz dans [10] a notamment obtenu des résultat (faisant intervenir des méthodes de dualité convexe et de théorie des sous différentiels) peuvent être trouvée dans

G. Duvaut et J.L. Lions [19] dans la continuité des études des problèmes de l'élasticité comme minimisation de fonctionnelle quadratiques, posent le problème du corps élastique glissant dans le cas d'un frottement de Tresca (*i.e.* avec un seuil fixe qui ne dépend pas de la contrainte normale), sous la forme d'une inéquation variationnelle. Ce sera aussi le départ de beaucoup de travaux.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de quelques problèmes aux limites de contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation rigide. Ici nous considérons des lois de comportement non linéaire des processus quasistatiques, les résultats que nous obtenons concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles et la dépendance continue par rapport aux données. Ce mémoire est composée de trois chapitres.

Dans le premier chapitre on introduit des notations générales de la mécanique ainsi que des notations mathématiques, nous présentons des divers modèles mécaniques de contact étudiés et nous rappelons quelques outils d'analyse fonctionnelle. Ce chapitre est consacré à faire rappeler la formulation des problèmes viscoélastiques qui seront traités dans la suite, ainsi des notions de base de la mécanique des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

Deux sections qui constituent ce chapitre. La première section se comporte de trois parties. Dans la première partie on donne des rappels concernant le tenseur de contrainte, le champ des déplacements et les lois de comportement. Dans la deuxième

partie, on présente des conditions de limites de frottement d'un corps déformable avec une fondation rigide, prises en compte dans la suite. Dans la troisième partie, nous poserons deux problèmes à étudier dans ce mémoire. La deuxième section comprend trois parties. Dans la première partie, on introduit les espaces fonctionnels utiles dans ce mémoire. La deuxième partie est destinée aux équations non linéaires dans les espaces de Hilbert. Enfin, la dernière partie fait l'objet de rappel de quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, les inéquations variationnelles et des lemmes de type Gronwall.

Le deuxième chapitre est destiné à l'étude d'un problème de contact bilatéral avec frottement de Tresca. Ce chapitre est consacré à l'étude du problème quasistatique ayant une loi de comportement de la forme (1.1.4), soumis à des conditions de limites de frottement de *Tresca*.

Cinq sections qui composent ce chapitre. Dans la première section, on présente le problème et les hypothèses utiles pour son étude. Dans la deuxième section, nous tirons deux formulations variationnelles pour le problème, la formulation principale en termes de déplacements et la formulation duale en termes de champs de stress. Dans la troisième section nous prouvons l'existence d'une solution unique de chaque formulation variationnelle. Dans la quatrième section, nous établissons l'équivalence entre les deux formulations. On termine ce chapitre par la cinquième section où, nous prouvons la dépendance continue de la solution de la limite de rendement de friction.

L'objectif du troisième chapitre, est d'envisager une généralisation, dans un cadre fonctionnel abstrait, des résultats obtenus dans l'étude des problèmes mécaniques précis. L'étude dans ce chapitre est inspirée de [7]. On analyse un problème d'évolution abstrait non linéaire décrivant une classe de processus de contact avec frottement entre un corps viscoélastique et une fondation. Le problème est posé comme une inclusion différentielle dépendante du temps. L'existence et l'unicité de la solution est établie en utilisant la théorie des inégalités variationnelles elliptiques et le théorème du point fixe de Banach. Une formulation duale du problème est aussi présentée et un résultat d'équivalence est prouvé. Les résultats abstraits obtenus sont utilisés pour résoudre un problème de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques.

On a constitué ce chapitre de quatre sections. Dans la première section, nous allons poser le problème sous forme d'inclusion différentielle dépendante de temps. Dans la deuxième section, on établie un résultat d'existence et l'unicité de la solution. Dans la troisième section on présente une formulation duale du problème, comme on prouve l'équivalence entre les formulations. Finalement, dans la quatrième section, on donne

une application des résultats abstraits obtenus, et on résout un problème de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques.

Notations

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée régulière
Γ_i ($i = \overline{1, 3}$)	Une partie mesurable de la frontière Γ .
ν	la normale unitaire sortante.
ν_ν, ν_τ	les composantes normale et tangentielle du champs vectoriel ν .
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiable sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans $\overline{\Omega}$.
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur $\overline{\Omega}$.
H	l'espace $L^2(\Omega)^N$.
H	l'espace $L^2(\Omega)_s^{N \times N}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^N$.
H_1	l'espace $\{ \sigma \in H \mid \text{Div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H \}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

H'_Γ	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
Si H est un espace de Hilbert réel et $N \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes :	
H^N	l'espace $\{ x = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, N} \}$.
$H_S^{N \times N}$	l'espace $\{ x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, N} \}$.
$(\dots)_H$	le produit scalaire de H .
$ \cdot _H$	la norme de H .
H'	l'espace dual de H .
$(\dots)_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H et H' .
ψ_K	la fonction indicatrice de $K \subset H$.
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$L(H)$	l'espace des application linéaires et continues dans H .

Si de plus un $[0, T]$ intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions linéaires et continues de $[0, T]$ dans H .
$ \cdot _{0, H}$	la norme de $C(0, T; H)$.
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continument dérivables de $[0, T]$

	dans H
$ \cdot _{1,H}$	la norme de $C^1(0,T;H)$.
$L^p(0,T;H)$	l'espace des fonction f mesurables de $]0,T[$ dans H telles que $\int_0^T f(t) _H^p dt$ avec la modification usuelle si $p = +\infty$.
$ \cdot _{0,p,H}$	la norme de $L^p(0,T;H)$.
$W^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$ \cdot _{k,p,H}$	la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Pour une fonction f , on note par :

\dot{f} , \ddot{f}	les dérivées première et seconde par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante x_i .
$\text{r } f$	le gradient de f .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f .
$\text{Div } f$	la divergence de f .
∂f	la sous-différentielle (classique) de f .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par :

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$	l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2
$\ \cdot\ _{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$	la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Autres notations :

$\lim \inf$	la limite inférieure.
$\lim \sup$	la limite supérieure.
S_N	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^N .
I_N	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^N .
0_d	le zéro de \mathbb{R}^N et celui de S_N .
C	une constante générique strictement positive.
$p.p.$	presque partout.
t.q.	tel que (telle que).
■	Symbole indiquant la fin d'une démonstration.

CHAPITRE 1

Chapitre 1

Formulation des Problèmes Viscoélastiques - Préliminaires

Ce chapitre est consacré à faire rappeler la formulation des problèmes viscoélastiques qui seront traités dans la suite, ainsi des notions de base de la mécanique des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

Deux sections qui constituent ce chapitre.

La première section se comporte de trois parties. Dans la première partie on donne des rappels concernant le tenseur de contrainte, le champ des déplacements et les lois de comportement. Dans la deuxième partie, on présente quelques exemples de lois de contact avec frottement contenant des conditions de limites de frottement d'un corps déformable avec une fondation rigide. Dans la troisième partie, nous poserons deux problèmes à étudier dans ce mémoire.

La deuxième section comprend trois parties. Dans la première partie, on introduit les espaces fonctionnels utiles dans ce mémoire. La deuxième partie est destinée aux équations non linéaires dans les espaces de Hilbert. Enfin, la dernière partie fait l'objet

de rappel de quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, les inéquations variationnelles et des lemmes de type Gronwall.

1.1. Formulation des problèmes aux limites

1.1.1. Contraintes, déformation et lois de comportement

On considère un corps déformable occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^N ($N = 2,3$), de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière. Dans un intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du corps matériel est décrite par l'équation de mouvement :

$$(1.1.1) \quad \rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T].$$

Dans cette équation ρ désigne la *densité de masse*, $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ représente le *champ des déplacements*, $\text{Div } \sigma$ est la *divergence du champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_N$ et $f_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ représente la *densité des forces volumiques* appliquées sur le corps.

On note par \dot{u} et \ddot{u} respectivement la *dérivée première* et la *dérivée seconde* de u par rapport au temps.

Dans certaines situations l'équation (1.1.1) peut être simplifiée. Par exemple, dans le cas où le champ des *vitesses* varie très lentement par rapport au temps. Dans ce cas, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.1.1) devient

$$(1.1.2) \quad \text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]$$

L'équation (1.1.2) s'appelle *équation d'équilibre*.

Les processus d'évolution modélisés par l'équation (1.1.1) s'appellent *processus dynamiques* et les processus modélisés par l'équation (1.1.2) s'appellent *processus quasistatiques*.

Dans la suite, on va considérer des solides *viscoélastiques* dans le cadre des *petites transformations*. Dans ce cas, on a besoin du *champ des déformations linéarisé* $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_N$ défini par

$$(1.1.3) \quad \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

où ∂_i et ∂_j et représentent les opérateurs de dérivation partielle respectivement par rapport aux variables x_i et x_j .

On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Dans la suite on va noter $\varepsilon(u)$ au lieu de ε pour mettre en évidence la dépendance de ε par rapport au *champ des déplacements*.

L'équation (1.1.1) ou (1.1.2) est insuffisante à elle seule pour décrire le mouvement des *milieux continus*. En effet, il reste à décrire ce qui est propre au matériau lui-même.

C'est l'objet des *lois de comportement* que nous décrivons brièvement ci-dessous.

Les *lois de comportement* caractérisent le comportement de chaque type de *milieu continu*.

Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement.

Dans ce mémoire on considère des matériaux ayant des lois de comportement *viscoélastique* de la forme

$$(1.1.4) \quad \sigma = A(\varepsilon(\dot{u})) + G(\varepsilon(u)) \quad ,$$

où A et G sont des fonctions constitutives. La loi de comportement (1.1.4) est dite *loi viscoélastique de type Kelvin-Voigt*.

1.1.2. Conditions aux limites de contact

On s'intéresse dans toute notre étude à un corps matériel qui occupe le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ constituée de trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 deux à deux disjointes. On note par ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γ .

Comme on suppose aussi que, ce corps est encasté par la partie Γ_1 de sa frontière dans une structure fixe, donc :

$$(1.1.5) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

ce qui représente la *condition aux limites de déplacement*. On connaît des tractions de densité f_2 agissantes sur la partie Γ_2 et qui vérifient

$$(1.1.6) \quad \sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T).$$

Cette condition est appelée *condition aux limites de traction*.

Les composantes normales et tangentielles du vecteur déplacement u et du vecteur contrainte de Cauchy $\sigma \nu = (\sigma_{ij} \nu_j), i = 1, \dots, N$, sont données par

$$u_\nu = u \cdot \nu = u_i \nu_i \quad , \quad u_\tau = (u_{\bar{i}}) \quad , \quad u_{\bar{i}} = u_i - u_\nu \nu_i \quad \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu \cdot \nu = \sigma_{ij} \nu_i \nu_j \quad , \quad \sigma_\tau = \sigma_{\bar{i}} \quad , \quad \sigma_{\bar{i}} = \sigma_{ij} \nu_j - \sigma_\nu \nu_i \quad \quad i = 1, \dots, N$$

On peut modéliser mathématiquement l'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs, par un système d'équations aux dérivées partielles contenant

l'équation du mouvement (ou d'équilibre) du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Dans ce mémoire, on considère des matériaux ayant l'équation de mouvement (1.1.2) la loi de comportement viscoélastique (1.1.4), soumis à des conditions aux limites de frottement.

Nous citons maintenant les principales conditions de contact avec frottement.

Exemple 1.1.1. *Contact bilatéral avec frottement de Tresca.*

Dans cet exemple le contact entre le corps et la fondation est supposé bilatéral, c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement. Ce qui sera traduit par la condition :

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Dans le cas de frottement de Tresca le frottement présente un seuil fixe g . Pendant le contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel ne dépassant pas le seuil de frottement g .

$$|\sigma_\tau| \leq g \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Si le seuil g n'est pas atteint, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, ce qui se traduit par la condition

$$|\sigma_\tau| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Dans le cas où ce seuil est atteint, le déplacement du solide est tangentiel par rapport à la fondation, on dit alors qu'il y a glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Par conséquent on a :

$$|\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ t.q. } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

En conclusion les conditions aux limites de *contact bilatéral avec frottement de Tresca*, peuvent être écrites comme suit :

$$(1.1.7) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Exemple 1.1.2. *Loi de Coulomb régularisée.*

Cette loi est plus réaliste que la précédente et est plus répandue. Elle est caractérisée par la contrainte normale et peut s'énoncer par :

$$(1.1.8) \quad \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu p(|R\sigma_\nu|) \\ |\sigma_\tau| < \mu p(|R\sigma_\nu|) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p(|R\sigma_\nu|) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où p est une fonction non positive, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement et R un opérateur de régularisation.

On remarque qu'il s'agit d'une loi à seuil : tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement.

Exemple 1.1.3. *Loi de réponse normale avec frottement.*

La condition dite de réponse normale sur la surface potentielle de contact $\Gamma_3 \times (0, T)$ est décrite par :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu),$$

où \dot{u}_ν représente la vitesse normale et p_ν est une fonction positive donnée. Cette équation traduit une dépendance totale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact.

La loi de frottement associée est donnée par :

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où p_τ est une fonction positive qui représente le seuil de frottement. Cette loi traduit que le cisaillement tangentiel sur la surface de contact est une certaine fonction de la vitesse tangentielle.

Exemple 1.1.4. *Frottement de Coulomb avec contrainte normale imposée.*

Dans cet exemple, la loi de frottement représente la version simplifiée de la loi de Coulomb donnée dans l'exemple 2.

$$(1.1.9) \quad \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu(|\sigma_\nu|) \\ |\sigma_\tau| < \mu(|\sigma_\nu|) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu(|\sigma_\nu|) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ t.q. } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où μ représente le coefficient de friction.

Exemple 1.1.5. *Loi de frottement avec compliance normale.*

Dans le cas de cette loi de frottement, la zone de contact n'est pas connue a priori. La contrainte normale satisfait à la condition dite de compliance normale, c'est-à-dire

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu - q),$$

où u_ν est le déplacement normal, q représente le gap entre le corps et la fondation, et p_ν est une fonction positive donnée. Cette condition montre que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - q$.

Pour la contrainte tangentielle la condition est donnée comme suit :

$$(1.1.10) \quad \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau (u_\nu - q) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau (u_\nu - q) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

Avec p_τ une fonction positive qui représente le seuil de frottement. Tant que ce seuil n'est pas atteint, il y a immobilité. Lorsque le seuil est atteint e corps se met à glisser et

la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

Exemple 1.1.6. *Réponse normale instantanée avec loi de frottement.*

La condition est donnée par :

$$(1.1.11) \quad \left. \begin{array}{l} -\sigma_\nu = p_\tau (\dot{u}_\nu) , \quad |\sigma_\tau| \leq p_\tau (\dot{u}_\nu) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau (\dot{u}_\nu) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau (\dot{u}_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

Maintenant, nous allons poser deux problèmes mécaniques qui seront l'objet d'étude ultérieurement.

1.2. Formulation mathématiques des problèmes viscoélastiques avec frottement

Le premier problème sera le thème du premier chapitre, ainsi que le deuxième chapitre sera traité dans le troisième chapitre.

Problème 1. (*Problème de contact bilatéral avec loi de Tresca*).

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_N$ tels que :

$$\begin{aligned}
 (1.1.12) \quad & \sigma(t) = A(\varepsilon(\dot{u})) + G(\varepsilon(u)) && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 & \operatorname{Div} \sigma + f_0 = 0 && \text{dans} && \Omega \times (0, T), \\
 & u = 0 && \text{sur} && \Gamma_1 \times (0, T), \\
 & \sigma \nu = f_2 && \text{sur} && \Gamma_2 \times (0, T),
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & u_\nu = 0 \\
 & |\sigma_\tau| \leq g \\
 & |\sigma_\tau| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\
 & |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau
 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$u(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Le deuxième problème est un problème d'évolution abstrait non linéaire décrivant une classe de processus de contact avec frottement entre un corps viscoélastique et une fondation. Ce problème est mis sous forme d'inclusion différentielle du temps comme suit :

Problème 2. (*Problème d'évolution abstrait*).

Trouver la fonction $x : [0, T] \rightarrow H$ telle que :

$$(3.1.1) \quad A\dot{x}(t) + Gx(t) + \partial_2 j(x(t), \dot{x}(t)) \ni f(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(3.1.2) \quad x(0) = x_0.$$

Où $\partial_2 j$ représente le sous-différentiel de par rapport au second argument et x_0 est la donnée initiale. Pour tout $z \in H$, $D_2 j(z, \cdot)$ et $\partial_2(z, \cdot)$ représentent respectivement le domaine effectif et le sous-différentiel de la fonction $j(z, \cdot)$ et sont définis par

$$D_2 j(z, \cdot) = \{ u \in H \mid j(z, u) < +\infty \}$$

$$\partial_2 j(z, u) = \left\{ w \in H \mid j(z, v) - j(z, u) \geq \langle w, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H \right\} \quad \forall u \in H.$$

1.3 Préliminaires

Cette section est composée de trois parties.

Dans la première partie, on introduit tous les espaces utilisés dans ce mémoire tels que, les espaces de distributions, les espaces associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles.

La deuxième partie est consacrée aux résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques. On finit dans la dernière partie, par des rappels sur les lemmes de type Gronwall.

1.2.1. Espaces fonctionnelles et leurs propriétés

Dans cette partie on présente les espace de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence, ainsi que leurs propriétés principales, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert.

A) Espaces de distributions

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On note par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω , indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω . Le produit de dualité entre $D'(\Omega)$ et $D(\Omega)$ sera noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Comme on introduit également les espaces suivants :

$$D = \left\{ \varphi = (\varphi_i) \mid \varphi_i \in D(\Omega), \quad i = \overline{1, N} \right\} = D(\Omega)^N$$

$$D = \left\{ \phi = (\phi_{ij}) \mid \phi_{ij} \in D(\Omega), \quad i, j = \overline{1, N} \right\} = D(\Omega)_{s}^{N \times N}$$

$$D' = \left\{ u = (u_i) \mid u_i \in \mathcal{D}(\Omega), j = \overline{1, N} \right\} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$$

$$D = \left\{ \sigma = (\sigma_{i,j}) \mid \sigma_{i,j} \in \mathcal{D}(\Omega), i, j = \overline{1, N} \right\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}$$

Les dualités entre les espaces D' et D , D' et D seront notées respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$.

Plus précisément on a :

$$\langle u, \varphi \rangle_{D' \times D} = \langle u_i, \varphi_i \rangle \quad \text{et} \quad \langle \sigma, \phi \rangle_{D' \times D} = \langle \sigma_i, \phi_i \rangle,$$

pour tout $u \in D', \varphi \in D, \sigma \in D'$ et $\phi \in D$ avec la convention de l'indice muet.

Soit maintenant l'opérateur ∂_i défini par $\partial_i = \partial / \partial x_i$ défini pour les fonctions et pour les distributions. On a

$$(1.2.1) \quad \langle \partial_i \theta, \psi \rangle = -\langle \theta, \partial_i \psi \rangle \quad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par

$$(1.2.2) \quad \varepsilon : D \rightarrow D, \quad \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{i,j}(\varphi)),$$

$$\varepsilon_{i,j}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \quad \varphi \in D$$

et

$$(1.2.3) \quad \text{Div} : D \rightarrow D, \quad \text{Div} \phi = (\partial_j \phi_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \varphi \in D.$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon : D' &\rightarrow D', \varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u})), \\ \varepsilon_{i,j}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \quad \mathbf{u} \in D' \end{aligned}$$

$$(1.2.5) \quad \text{Div} : D' \rightarrow D', \quad \text{Div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \sigma \in D'.$$

En utilisant (1.2.8), on obtient

$$(1.2.6) \quad \langle \varepsilon(\mathbf{u}), \phi \rangle_{D' \times D} = -\langle \mathbf{u}, \text{Div} \phi \rangle_{D' \times D} \quad \forall \mathbf{u} \in D', \quad \phi \in D$$

$$(1.2.7) \quad \langle \text{Div} \sigma, \phi \rangle_{D' \times D} = -\langle \sigma, \varepsilon(\phi) \rangle_{D' \times D} \quad \forall \sigma \in D', \quad \phi \in D.$$

L'opérateur défini par (1.2.9) pour les fonctions et par (1.2.11) pour les distributions s'appelle *l'opérateur déformation*.

L'opérateur défini par (1.2.10) pour les fonctions et par (1.2.12) pour les distributions s'appelle *l'opérateur divergence*. On va utiliser les notations

$$(1.2.8) \quad H = \left\{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega), \quad i = \overline{1, N} \right\} = L^2(\Omega)^N$$

$$(1.2.9) \quad \mathbf{H} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), \quad i, j = \overline{1, N} \right\} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}.$$

Les espaces H et \mathbf{H} sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires canoniques

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H = \int_{\Omega} u_i v_i \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathbf{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbf{H}.$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$.

B) Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (1.2.4) il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{ u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathbf{H} \}.$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall u, v \in H_1,$$

et on note par $\| \cdot \|_{H_1}$, la norme associée.

De plus on a l'égalité algébrique et typologique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ où $H^1(\Omega)$ représente l'espace de Sobolev de premier ordre.

On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathbf{H}$ sont des opérateurs continus.

De même, compte tenu de l'identification des espaces H et \mathbf{H} à des sous-espaces de D et \mathbf{D} et en utilisant (1.2.6), il résulte

$$(1.2.10) \quad \langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathbf{D}' \times \mathbf{D}} + \langle u, \text{Div} \phi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H, \phi \in \mathbf{D},$$

$$(1.2.11) \quad \langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathbf{H}} + \langle u, \text{Div} \phi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H_1, \phi \in \mathbf{D}.$$

On a le résultat suivant

- Muni du produit scalaire $\langle \dots \rangle_{H_1}$, l'espace H_1 est un espace de Hilbert réel.

On suppose maintenant, que dans toute la suite, la frontière Γ de Ω est de classe C^1 .

Alors on a les résultats suivant :

- $C^1(\overline{\Omega})^N$ est dense dans H_1 .
- $H_1 \subset H$ avec injection compacte (Théorème de Rellich).
- $H_1 = H^1(\Omega)^N$.

Il existe une application linéaire et continue $\gamma: H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})^N$ et est appelée *application trace*.

Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$

Supposons maintenant que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; est une partie de Γ et soit V le sous espace de H_1 défini par

$$(1.2.12) \quad V = \{ u \in H_1 \mid \gamma u = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \}.$$

Si $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ alors l'inégalité de Korn

$$(1.2.13) \quad |\varepsilon(u)|_H \geq C |u|_{H_1} \quad \forall u \in V,$$

est vérifiée sur le sous espace V défini par (1.2.9).

Partout dans ce mémoire C représente une constante générique strictement positive susceptible de se changer d'un endroit à un autre.

C) Espaces liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace H_1 lié à l'opérateur divergence défini par

$$H_1 = \{ \sigma \in H \mid \text{Div } \sigma \in H \}$$

et qui est muni du produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{H_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_H + \langle \text{Div} \sigma, \text{Div} \tau \rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in H_1.$$

La norme associée est notée par $\| \cdot \|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur divergence sont des opérateurs continus.

De plus, compte tenu de l'identification de H et H à des sous-espaces de D' et D' , et en utilisant (1.2.13), il résulte

$$(1.2.14) \quad \langle \text{Div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_H = 0 \quad \forall \sigma \in H, \forall \varphi \in D$$

$$(1.2.15) \quad \langle \text{Div} \sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_H = 0 \quad \forall \sigma \in H_1, \forall \varphi \in D$$

On a les résultats suivants :

- Muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}$, l'espace H_1 est un espace de Hilbert réel.
- On peut prouver que l'espace

$$C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i, j = \overline{1, N} \right\}$$

est dense dans H . De plus pour tout $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N}$, on note par $\sigma \nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij} \nu_j)$ pour $i = \overline{1, N}$

Comme dans le cas de l'espace H_1 , on peut définir l'*application trace* pour l'espace H_1 à l'aide du résultat suivant.

- Il existe une application linéaire, continue et surjective $\bar{\gamma} : H_1 \rightarrow H'_\Gamma$ telle que :

$$(1.2.16) \quad \langle \gamma \bar{\sigma}, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma \nu \cdot \xi \, da$$

pour tout $\xi \in H_\Gamma$ et $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N}$. Pour tout $\sigma \in \mathbf{H}$, l'image $\bar{\gamma}\sigma \in H'_\Gamma$ est l'unique élément vérifiant l'égalité

$$(1.2.17) \quad \langle \bar{\gamma}\sigma, \mathcal{U} \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle_{\mathbf{H}} + \langle \text{Div} \sigma, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u} \in H_1.$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\bar{z} : H'_\Gamma \rightarrow \mathbf{H}_1$ telle que :

$$(1.2.8) \quad \bar{\gamma}(\bar{z}(\Sigma)) = \Sigma \quad \forall \Sigma \in H'_\Gamma.$$

Compte tenu de l'application trace, on définit pour tout $\sigma \in \mathbf{H}_1$, les éléments $\bar{\gamma}_\nu \sigma \in H^{-\frac{1}{2}}$ et $\bar{\gamma}_\tau \sigma \in H'_\Gamma$ par :

$$\bar{\gamma}_\nu \sigma = (\bar{\gamma}\sigma)_\nu \quad , \quad \bar{\gamma}_\tau \sigma = (\bar{\gamma}\sigma)_\tau.$$

Rappelons que si $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N}$ alors, à partir de (1.2.24), il résulte

$$\bar{\gamma}\sigma = \sigma_{j\Gamma} \nu \quad , \quad \bar{\gamma}_\nu \sigma = (\sigma_{j\Gamma} \nu)_\nu \quad , \quad \bar{\gamma}_\tau \sigma = \sigma_{j\Gamma} \nu - (\sigma_{j\Gamma} \nu)_\nu.$$

Afin de simplifier les notations, on utilisera dans la suite la notation σ_ν , σ_ν et σ_τ au lieu de $\bar{\gamma}\sigma$, $\bar{\gamma}_\nu \sigma$ et $\bar{\gamma}_\tau \sigma$ pour tout $\sigma \in \mathbf{H}_1$ et, en moyennant (1.2.24), on peut alors énoncer la double égalité suivante :

$$(1.2.19) \quad \langle \sigma \nu, \mathcal{U} \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\nu, \mathbf{u}_\nu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}} + \langle \sigma_\tau, \mathbf{u}_\tau \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle_{\mathbf{H}} + \langle \text{Div} \sigma, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}}$$

pour tout $\mathbf{u} \in H_1$ et $\sigma \in \mathbf{H}_1$.

Supposons maintenant que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ i.e. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; et soit $\sigma \in \mathbf{H}_1$.

On introduit alors les définitions suivantes :

$$(1.2.20) \quad \sigma\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \mathcal{N} \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

$$(1.2.21) \quad \sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \mathcal{N} \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } \begin{cases} u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

$$(1.2.22) \quad \sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \mathcal{N} \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } \begin{cases} u_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

$$(1.2.23) \quad \sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Leftrightarrow \langle \sigma\nu, \mathcal{N} \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \quad \forall u \in H_1 \text{ tel que } \begin{cases} u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Ces définitions sont motivées par le souci de prolonger les définitions de ces mêmes propriétés de $C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N}$ vers H_1 . De plus, on dit que $\sigma\nu = f_2$ sur Γ_1 si $\sigma\nu - f_2 = 0$ sur Γ_1 et les propriétés $\sigma_\nu = f_2$ sur Γ_1 , $\sigma_\nu \leq f_2$ sur Γ_1 et $\sigma_\tau = h$ sur Γ_1 sont définies de manières analogues.

On considère maintenant le sous espace fermé de H_1 défini par

$$(1.2.24) \quad V = \{ \sigma \in H_1 \mid \text{Div} = 0 \text{ dans } \Omega, \sigma\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \}$$

Le lien entre l'espace V défini par (1.2.9) et l'espace V est donné par les résultats suivants :

- Si $\text{mes}\Gamma_1 > 0$, alors $\varepsilon(V)$ est un sous-espace fermé de H dont l'orthogonal est l'espace V .
- Si $\text{mes}\Gamma_1 < 0$, alors pour tout $\tau \in H$, il existe un unique couple de fonctions $(\tau', \nu) \in V \times V$ tel que

$$(1.2.25) \quad \tau = \tau' + \varepsilon(v),$$

où V et V sont respectivement donnés par (1.2.31) et (1.2.32). De plus, l'application :

$$L : \tau \rightarrow v,$$

est linéaire et continue de H dans V .

D) Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Nous aurons besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorielles dans l'étude des problèmes variationnels dépendant du temps. Dans les problèmes de contact étudiés

dans ce mémoire, on note par $[0, T]$ un intervalle de temps avec $T > 0$.

Pour un entier $k \geq 0$, on définit l'espace

$$(1.2.26) \quad C^k(0, T; H) = \left\{ u \in C(0, T; H) : \frac{d^j u}{dt^j} \in C(0, T; H), \quad j = \overline{1, k} \right\}$$

C'est un espace de Banach avec la norme

$$(1.2.27) \quad \|u\|_{C^k(0, T; H)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right\|_H \quad \forall u \in C^k(0, T; H).$$

On note en particulier $C^0(0, T; H)$ par $C(0, T; H)$ l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow H$ qui sont continues dans l'intervalle fermé $[0, T]$.

C'est un espace de Banach avec la norme

$$(1.2.28) \quad \|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_H.$$

Les normes sur les espaces $C(0, T; H)$ et $C^1(0, T; H)$ sont données par :

$$(1.2.29) \quad \|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_H$$

$$(1.2.30) \quad \|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_H$$

Pour $p \in [1, \infty]$, on définit l'espace de Banach $L^p(0, T; H)$, de toute les fonctions mesurables $u: [0, T] \rightarrow H$ telle que $\|u\|_{L^p(0, T; H)} < \infty$ où la norme est

$$(1.2.31) \quad \|u\|_{L^p(0, T; H)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{1/p} & \text{si } p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_H & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

En particulier, lorsque $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ est un espace de Hilbert, $L^2(0, T; H)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(1.2.32) \quad \langle u, v \rangle_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_H dt.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k, p}(0, T; H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in \mathcal{D}'(0, T; H)$ telles que $D_j u \in L^p(0, T; H)$ désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions

$$(1.2.33) \quad W^{k, p}(0, T; H) = \left\{ u \in L^p(0, T; H) : \|D_j u(x)\|_{L^p(0, T; H)} < \infty, \forall j \leq k \right\},$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$(1.2.34) \quad |u|_{W^{k,p}(0,T;H)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \sum_{0 \leq j \leq k} |D_j u(t)|_H^p dt \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{t \in (0,T)} \text{ess sup} |D_j u(t)|_H & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si $p=2$, on note

$$(1.2.35) \quad H^k(0,T;H) = W^{k,2}(0,T;H),$$

qui est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(1.2.36) \quad (u,v)_{H^k(0,T;H)} = \sum_{0 \leq j \leq k} \int_0^T \langle D_j u(t), D_j v(t) \rangle_H dt \quad \forall u,v \in H^k(0,T;H).$$

Dans le cas particulier $k=0$, on remarque que $W^{0,p}(0,T;H) = L^p(0,T;H)$, cet espace est muni de la norme de $L^p(0,T;H)$ notée $|\cdot|_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

1.2.2. Inéquations variationnelles

Nous allons donner un résultat classique sur l'existence et l'unicité de la solution pour les inéquations variationnelles.

Nous considérons H un espace de Hilbert réel, $A: H \rightarrow H$ un opérateur linéaire, $\varphi: H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$.

Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

Trouver u tel que :

$$(1.2.37) \quad u \in H \quad , \quad \langle Au, v-u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

Le problème (1.2.44) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de second espèce sur H* .

D'autres problèmes rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante :

Trouver u tel que :

$$(1.2.38) \quad u \in K \quad , \quad \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K,$$

où K est un sous-ensemble non vide de H . Le problème (1.2.45) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce sur H* .

Si on pose $\varphi \equiv 0$ (ou $K = H$), alors (1.2.44) (resp. (1.2.45)) est équivalente au problème

Trouver u tel que :

$$(1.2.39) \quad u \in H \quad , \quad \langle Au, v - u \rangle_H = \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H,$$

on obtient ainsi une *équation variationnelle*.

Définition 1.2.1. *L'opérateur $A: H \rightarrow H$ est dit fortement monotone s'il existe $C > 0$ tel que*

$$(1.2.40) \quad \langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq C|u - v|_H^2 \quad \forall u, v \in H.$$

On énonce maintenant le résultat fondamental d'existence et d'unicité suivant concernant les problèmes (1.2.37) et (1.2.38).

Théorème 1.2.2. *Si $A: H \rightarrow H$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, et $\varphi: H \rightarrow H$ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors, l'inéquation variationnelle elliptique (1.2.37) admet une solution unique.*

Corollaire 1.2.3. *Si A est un opérateur linéaire, continu et défini positif et K est un convexe fermé non vide de H alors l'inéquation variationnelle elliptique (1.2.38) admet une solution unique.*

Corollaire 1.2.4. *Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, alors pour tout $\varphi \in H$, il existe un élément $u \in H$ tel que $Au = \varphi$.*

1.2.3. Lemmes de type Gronwall

Nous présentons ici quelques lemmes de Gronwall, utiles en mécanique de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution dans certaines démonstrations.

Lemme 1.2.5. *Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$.*

(1) *Si*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

(2) *Si*

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq \exp(aT) \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Corollaire 1.2.6. *Soient $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.2.7. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2} \phi^2(s) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt + \int_0^s n(t) \phi^2(t) dt \quad \forall s \in [0, T],$$

alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt\right) \exp\left(\int_0^s n(t) dt\right) \quad \forall s \in [0, T].$$

Corollaire 1.2.8. Soient $m \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que, $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante. . Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2} \phi^2(s) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt \quad \forall s \in [0, T],$$

alors

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Lemme 1.2.9. Soient $m \in W^{1, \infty}(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$, $m(0) = 0$ et $a \geq 0, b > 0$ pour tout $t \in]0, T[$. Soit également $\phi \in L^\infty(0, T; \mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\phi(s) \leq a + m(s) + b \int_0^s \phi(t) dt \quad \forall s \in [0, T],$$

alors

$$\phi(s) \leq m(s) + \left(a + b \int_0^s m(t) dt \right) \exp(bs) \quad \forall s \in [0, T].$$

CHAPITRE 2

Chapitre 2

Problème viscoélastique avec loi de Tresca

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème quasistatique ayant une loi de comportement de la forme (1.1.4), soumis à des conditions de limites de frottement de *Tresca*.

Nous aurons besoins des hypothèses nécessaires pour l'étude de ce problème.

Nous tirons deux formulations variationnelles pour le problème, la formulation principale en termes de déplacements et la formulation duale en termes de champs de stress.

Nous prouvons l'existence d'une solution unique de chaque formulation variationnelle et établissons l'équivalence entre les deux.

Nous prouvons aussi la dépendance continue de la solution de la limite de rendement de friction.

2.1. Formulation du problème – Hypothèses

L'évolution d'un corps viscoélastique déformable est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2,3$) de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, constituée de trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 .

Ce corps est encastré sur Γ_1 , soumis à des forces volumiques dans Ω , des forces surfaciques sur Γ_2 et en contact avec une fondation rigide Γ_3 .

Dans notre cas le contact avec cette fondation est supposée avec frottement obéissant à la loi de Tresca, introduite dans le chapitre 1.

Problème P : Trouver le champ des déplacements $u = (u_i) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma = (\sigma_i) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_N$ tels que :

$$(2.1.1) \quad \sigma(t) = A(\varepsilon(\dot{u})) + G(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$(2.1.2) \quad \text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$(2.1.3) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T)$$

$$(2.1.4) \quad \sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T)$$

$$(2.1.5) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ t.q. } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

$$(2.1.6) \quad u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Dans cette formulation, l'équation (2.1.1) représente la loi de comportement viscoélastique, (2.1.2) représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. (2.1.3) - (2.1.4) sont les conditions aux limites classiques de déplacement - traction. (2.1.5) représente les conditions aux limites de frottement de Tresca auxquelles est soumise la partie de sa frontière. Finalement (2.1.6) représente la condition initiale.

Dans l'étude du problème P , on introduit l'espace fonctionnel V défini par :

$$V = \{ v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

V est un sous-espace fermé de H_1 , qu'on le munit du produit scalaire

$$(2.1.7) \quad \langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_H$$

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier que $\| \cdot \|_V$ et $\| \cdot \|_{H_1}$ sont deux normes équivalentes sur V . Il en résulte que $(V, \| \cdot \|_V)$ est un espace de Hilbert réel

On suppose que :

$$(2.1.8) \quad f_0 \in C(0, T; H)$$

$$(2.1.9) \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^N)$$

$$(2.1.10) \quad g \in L^\infty(\Gamma_2) \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3.$$

Suivant le *théorème de représentation de Riesz-Fréchet*, il existe un élément $f(t)$ de V tel que

$$(2.1.11) \quad \langle f(t), v \rangle_V = \langle f_0(t), v \rangle_H + \langle f_2(t), \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T].$$

De (2.1.8), (2.1.9) et (2.1.11), on déduit la continuité de f et donc :

$$(2.1.12) \quad f \in C(0, T; V).$$

Soit j la semi-norme sur V définie par

$$(2.1.13) \quad j(v) = \int_{\Gamma_3} g |v_\tau| da \quad \forall v \in V.$$

De (2.1.10) nous aurons :

$$\begin{aligned} j(v) &= \int_{\Gamma_3} g |v_\tau| = \int_{\Gamma_3} |g| |v_\tau| da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} |g| da \int_{\Gamma_3} |v_\tau| da \\ &\leq C \sup_{x \in \Gamma_2} |g(x)| |v|_V \\ &\leq C |g|_{L^\infty(\Gamma_2)} |v|_V \end{aligned}$$

D'où :

$$(2.1.14) \quad j(v) \leq C |g|_{L^\infty(\Gamma_2)} |v|_V \quad \forall v \in V$$

Cela confirme que j est continue sur V .

On définit aussi, pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble $\Sigma(t)$ des contraintes admissibles par

$$(2.1.15) \quad \Sigma(t) = \left\{ \tau \in H \mid \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V \right\}$$

Le lemme suivant donne une propriété importante de cet ensemble :

Lemme 2.1.1. *On a l'implication*

$$(2.1.16) \quad \tau \in \Sigma(t) \Rightarrow \operatorname{Div} \tau + f_0(t) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \tau \nu \text{ sur } \Gamma_2.$$

Démonstration.

D'une part on a:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \tau \in \Sigma(t) &\Rightarrow \begin{cases} \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_V \\ \text{et} \\ \langle \tau, \varepsilon(u) \rangle_H + j(u) \geq \langle f(t), u \rangle_V \end{cases} \\
 &\Rightarrow \langle \tau, \varepsilon(v-u) \rangle_H + j(v) - j(u) \geq \langle f(t), v-u \rangle_V \\
 &\Rightarrow \langle \tau, \varepsilon(v-u) \rangle_H \geq \langle f_0(t), v-u \rangle_V + \left\langle f_2(t), \gamma(v-u) \right\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \\
 &\Rightarrow \langle \tau, \varepsilon(v-u) \rangle_H \geq \langle f_0(t), v-u \rangle_H \quad (\text{car : } \left\langle f_2(t), \gamma(v-u) \right\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} = 0)
 \end{aligned}$$

En posant $v-u = \varphi$ puis $v-u = -\varphi$ dans l'inégalité précédente, on trouve respectivement

$$\langle \tau, \varepsilon(\varphi) \rangle_H \geq \langle f_0(t), \varphi \rangle_H \text{ et } \langle \tau, \varepsilon(\varphi) \rangle_H \leq \langle f_0(t), \varphi \rangle_H.$$

Ce qui donne l'égalité

$$(2.1.17) \quad \langle \tau, \varepsilon(\varphi) \rangle_H = \langle f_0(t), \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in D.$$

Et de (1.2.26) il résulte

$$\langle \operatorname{Div} \tau, \varphi \rangle_H + \langle f_0(t), \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall \varphi \in D$$

i.e.

$$\langle \operatorname{Div} \tau + f_0(t), \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall \varphi \in D,$$

ce qui nous donne :

$$\text{Div } \tau + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } D'.$$

Et comme $f_0 \in C(0, T; H)$, on peut conclure que

$$\langle \text{Div } \tau + f_0(t), \varphi \rangle_H = 0 \quad \text{p.p dans } \Omega.$$

2) D'autre part :

De (2.1.15) et de (1.2.26), i.e.

$$\langle \tau v, \gamma v \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_H - \langle f_0(t), v \rangle_H \quad \forall v \in D,$$

on obtient

$$(2.1.18) \quad \langle \tau v, \gamma v \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + j(v) \geq \langle f_2(t), \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V.$$

Si on prend $v = \pm w$ dans (2.1.18) avec $w = 0$ sur Γ_3 i.e. $j(w) = 0$, on obtient les deux inégalités

$$\langle \tau v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + j(w) \geq \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall w \in V$$

et

$$\langle \tau v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + j(w) \leq \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall w \in V,$$

qui donnent

$$\langle \tau v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall w \in V.$$

D'où le résultat

$$\tau v = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

Pour étudier le problème P , nous aurons besoin des hypothèses suivantes qui, concernent respectivement les opérateurs A , G et la donnée initiale u_0 :

$$(2.1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} : \Omega \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathcal{S}_N \text{ et} \\ (a) \text{ il existe } L_A > 0 \text{ t.q:} \\ \quad |\mathbf{A}(x, \varepsilon_1) - \mathbf{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_A |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}_N, \text{ p.p dans } \Omega, \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ t.q:} \\ \quad (\mathbf{A}(x, \varepsilon_1) - \mathbf{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}_N \text{ p.p dans } \Omega, \\ (c) \ x \mapsto \mathbf{A}(x, \varepsilon) \\ \quad \text{est une fonction mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathcal{S}_N; \\ (d) \ x \mapsto \mathbf{A}(x, 0) \in \mathbf{H}. \end{array} \right.$$

$$(2.1.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} : \Omega \times \mathcal{S}_N \mapsto \mathcal{S}_N \text{ et} \\ (a) \text{ il existe } L_G > 0 \text{ t.q:} \\ \quad |\mathbf{G}(x, \varepsilon_1) - \mathbf{G}(x, \varepsilon_2)| \leq L_G |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}_N \text{ p.p dans } \Omega, \\ (b) \ x \mapsto \mathbf{G}(x, \varepsilon) \\ \quad \text{est une fonction mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathcal{S}_N; \\ (c) \ x \mapsto \mathbf{G}(x, 0) \in \mathbf{H}. \end{array} \right.$$

$$(2.1.21) \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}.$$

Remarque 2.1.2. Les hypothèses (2.1.8), (2.1.9) sont les conditions de régularité des données f_0, f_2 .

L'hypothèse (2.1.10) représente des conditions de régularité et de compatibilité entre la donnée initiale \mathbf{u}_0 et les données f_0, f_2 .

Ces conditions sont remplies si (\mathbf{u}, σ) satisfait (2.2.2) - (2.1.5) à l'instant $t = 0$.

De plus, partout dans ce chapitre on note par C une constante générique positive pouvant dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, A, G, T$ et g ne dépendant pas du temps.

2.2. Formulation variationnelles du problème

Dans cette section, on va donner deux formulations variationnelles du problème mécanique P . Dans la première formulation (problème P_1), l'inconnue principale est le champs des déplacements u alors que dans la seconde formulation (problème P_2), l'inconnue est le champs des contraintes σ .

Au début on donne une forme équivalente aux conditions aux limites (2.1.5).

Lemme 2.2.1. *Si σ_τ et u_τ sont deux fonctions régulières alors la condition*

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

est équivalente à :

$$(2.2.1) \quad |\sigma_\tau| \leq g, \quad \dot{u}_\tau \cdot \sigma_\tau + g|\dot{u}_\tau| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Démonstration.

Au début, soit $|\sigma_\tau| \leq g$.

D'une part:

$$\begin{aligned} |\sigma_\tau| < g &\Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ &\Rightarrow \dot{u}_\tau \cdot \sigma_\tau + g|\dot{u}_\tau| = 0 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$|\sigma_\tau| = g \Rightarrow \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \quad \text{avec } \lambda \geq 0,$$

ce qui montre que σ_τ et \dot{u}_τ sont de signes contraires, qui est équivalent à

$$\dot{u}_\tau \cdot \sigma_\tau + |\dot{u}_\tau \sigma_\tau| = 0$$

en utilisant l'égalité $|\sigma_\tau| = g$, on obtient

$$\dot{u}_\tau \cdot \sigma_\tau + g|\dot{u}_\tau| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

Pour la réciproque :

D'une part, on suppose $\dot{u}_\tau \sigma_\tau + g|\dot{u}_\tau| = 0$, i.e. $\sigma_\tau = -\frac{g}{|\dot{u}_\tau|} \cdot |\dot{u}_\tau| = -\frac{g}{|\dot{u}_\tau|} \cdot \dot{u}_\tau$ et dans le

cas où $|\sigma_\tau| = g$, on peut poser $\lambda = \frac{g}{|\dot{u}_\tau|} \geq 0$.

Il résulte qu'il existe $\lambda \geq 0$ t.q $\sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau$.

D'autre part, de la double inégalité

$$-|\dot{u}_\tau| \cdot |\sigma_\tau| \leq \dot{u}_\tau \cdot \sigma_\tau \leq |\dot{u}_\tau| \cdot |\sigma_\tau|,$$

on a : $-|\dot{u}_\tau| \cdot |\sigma_\tau| - \dot{u}_\tau \sigma_\tau \leq 0$ et en utilisant $|\sigma_\tau| < g$, on obtient

$$-|\dot{u}_\tau| \cdot |\sigma_\tau| + g|\dot{u}_\tau| \leq 0.$$

Ce qui nous donne bien

$$0 \geq |\dot{u}_\tau| \cdot (g - |\sigma_\tau|) \geq 0 \Rightarrow |\dot{u}_\tau| \cdot (g - |\sigma_\tau|) = 0$$

mais :

$$g - |\sigma_\tau| > 0,$$

et donc :

$$|\dot{u}_\tau| = 0. \quad \blacksquare$$

Le résultat suivant est une propriété de la solution $\{u, \sigma\}$ du problème P_1 , qui conduit aux deux formulations variationnelles.

Lemme 2.2.2. *Si le couple de fonctions $\{u, \sigma\}$ est une solution régulière (C^1) du problème mécanique P_1 alors*

$$(2.2.2) \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V$$

$$(2.2.3) \quad \sigma(t) \in \Sigma(t), \quad \langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H \leq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Démonstration. Soit $v \in V$ et $t \in (0, T)$.

1) On introduit la formule de Green :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_H + \langle \text{Div} \sigma, v \rangle_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v \, da \quad \forall v \in V.$$

Mais,

$$\text{Div} \sigma = -f_0(t),$$

d'où :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_H = \langle f_0(t), v \rangle_H + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v \, da \quad \forall v \in V.$$

Et donc, pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H &= \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da \\ &= \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H + \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da \\ &= \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H + 0 + \langle f_2(t), \gamma(v - \dot{u}(t)) \rangle_H + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da \\ &= \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_H + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(2.2.4) \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H = \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da \quad \forall v \in V.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) &= \sigma_{\tau}(t)(v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}(t)) + \sigma_{\tau}(t)(v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}(t)) \\ &= \sigma_{\tau}(t)v_{\tau} - \sigma_{\tau}(t)\dot{u}_{\tau}(t) \\ &= \sigma_{\tau}(t)v_{\tau} + g|\dot{u}_{\tau}| \\ &\geq g(|\dot{u}_{\tau}(t)| - |v_{\tau}|) \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient l'inégalité

$$(2.2.5) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da \geq j(\dot{u}(t)) - j(v) \quad \forall v \in V.$$

Puis en remplaçant dans (2.2.4) on trouve :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V + j(\dot{u}) - j(v) \quad \forall v \in V,$$

ce qui est équivalent à l'inégalité (2.2.2).

2) Si on remplace $v = 2\dot{u}(t)$ puis $v = 0$ on obtient les deux inégalités :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V$$

et

$$\langle \sigma(t), -\varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), -\dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

qui donnent

$$(2.2.6) \quad \langle \sigma(t), -\varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) = \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

En sommant (2.2.2) et (2.2.6), on obtient le résultat :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathbf{H}} + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_{\mathbf{V}} \quad \forall v \in V,$$

i.e.

$$\sigma(t) \in \Sigma(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour finir, on prend pour tout $\tau \in \Sigma(t)$, $v = \dot{u}(t)$ et on obtient :

$$(2.2.7) \quad \langle \tau, \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathbf{H}} + j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_{\mathbf{V}} \quad \forall v \in V$$

qui donne avec l'inégalité $\langle \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathbf{H}} + j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_{\mathbf{V}}$, le résultat :

$$\langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t) \quad \blacksquare$$

Lemme 2.2.3. *Soit $\sigma \in C(0, T; \mathbf{H})$ et $z_0 \in \mathbf{H}$, alors il existe une unique fonction $z \in C(0, T; \mathbf{H})$ telle que*

$$(2.2.8) \quad \sigma(t) = A(z(t)) + G \left(\int_0^t z(s) ds + z_0 \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration.

La démonstration de l'unicité fait appel au théorème du point fixe.

Pour cela, on montre que : pour tout $\sigma \in C(0, T; \mathbf{H})$ et $z_0 \in \mathbf{H}$, l'opérateur

$$\mathbf{T} : C(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow C(0, T; \mathbf{H}),$$

défini par

$$(2.2.9) \quad \mathbf{T}z(t) = A^{-1}(t) - A^{-1}G \left(\int_0^t z(s) ds + z_0 \right),$$

pour $z \in C(0, T; H)$ et $t \in [0, T]$, admet un unique point fixe. Il faut montrer donc que T^n est une contraction dans $C(0, T; H)$, pour n suffisamment grand.

De (2.2.9) on obtient

(2.2.10)

$$\|T z_1(t) - T z_2(t)\|_H \leq C \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|_H ds \quad \forall t \in [0, T], z_1, z_2 \in C(0, T; H).$$

Après réitération de l'inégalité n fois, on obtient

$$(2.2.11) \quad \|T^n z_1(t) - T^n z_2(t)\|_{C(0, T; H)} \leq \frac{C^n}{n!} \|z_1 - z_2\|_{C(0, T; H)},$$

ce qui implique que pour n suffisamment grand, T^n est une contraction dans $C(0, T; H)$, et d'après le théorème de Banach, l'opérateur T admet un point fixe unique.

Et donc :

$$T(z(t)) = z(t).$$

D'où le résultat d'existence et d'unicité de z , telle que

$$\sigma(t) = A(z(t)) + G\left(\int_0^t z(s) ds + z\right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad \blacksquare$$

Le lemme (2.2.3) nous permet de définir l'opérateur

$$B: C(0, T; H) \times H \rightarrow C(0, T; H)$$

par $B(\sigma, z_0) = z$, et nous aurons :

$$(2.2.12) \quad B(\sigma, z_0) = z \Leftrightarrow z(t) = A^{-1}(\sigma(t)) - A^{-1}G\left(\int_0^t z(s) ds + z_0\right), \quad \forall t \in [0, T]$$

i.e.

$$(2.2.13) \quad B(\sigma, z_0)(t) = A^{-1}(\sigma(t)) - A^{-1}G\left(\int_0^t z(s)ds + z_0\right), \quad \forall t \in [0, T]$$

La Lipschitzité des opérateurs A^{-1} et G justifie que B est aussi un opérateur de Lipschitz, ce qui donne l'existence d'une constante positive C telle que

$$(2.2.14) \quad |B(\sigma_1, z_{01}) - B(\sigma_2, z_{02})|_{C(0, T; H)} \leq C(|\sigma_1 - \sigma_2|_{C(0, T; H)} + |z_{01} - z_{02}|_H),$$

pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in C(0, T; H)$ et $z_{01}, z_{02} \in H$.

De (2.1.1), (2.1.6) et (2.1.23) nous obtenons la *première formulation* du problème P .

Problème P_1 : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \rightarrow V$ tels que

$$(2.2.15) \quad \begin{aligned} & \langle A(\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + \langle G(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H \\ & + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \end{aligned}$$

$$(2.2.16) \quad u(0) = u_0,$$

En utilisant (2.1.1), (2.1.6) et (2.1.32) on obtient que $\varepsilon(\dot{u}) = B(\sigma, \varepsilon(u_0))$ et par (2.1.16) on obtient la *deuxième formulation variationnelle* du problème P .

Problème P_2 : Trouver le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow H$ tels que

$$(2.2.17) \quad \sigma(t) \in \Sigma(t), \quad \langle B(\sigma, \varepsilon(u_0))(t), \tau - \sigma(t) \rangle_H \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t), t \in [0, T].$$

Réciproquement, on va montrer que, si (u, σ) est une solution régulière du problème P_1 (respectivement P_2), alors u et σ vérifient les équations et les conditions aux limites du problème P .

Soient $t \in [0, T]$ et (u, σ) une solution régulière du problème P_1 (respectivement P_2).

Il suffit de prouver que (u, σ) satisfait (2.1.2)- (2.1.5). Pour cela, si on prend $v = \dot{u} \pm \varphi$ avec $\varphi \in D$ et on remplace dans (2.2.13), on obtient

$$\langle \sigma(t), \varepsilon((\dot{u}(t) \pm \varepsilon(\varphi)) - \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(\dot{u}(t) \pm \varphi) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \pm \varphi \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

D'après (2.1.18), on obtient

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(\varphi) \rangle_H = \langle f_0(t), \varphi \rangle_V, \quad \forall \varphi \in D,$$

et d'après (1.2.20) il vient

$$(2.2.18) \quad \text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

i.e. (2.1.2) est vérifiée.

D'après un résultat précédent dans la démonstration du lemme 2.1.1.

$$\langle \tau v, \gamma v \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + j(v) \geq \langle f_2(t), \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \quad \text{avec } \tau \in \Sigma(t),$$

on trouve

$$(2.2.19) \quad \begin{aligned} & \langle \sigma(t)v, \gamma v - \gamma \dot{u}(t) \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ & \geq \langle f_2(t), \gamma v - \gamma \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

On remplace $v = \dot{u} \pm w$ pour $w \in V$ et $w = 0$ sur Γ_3 dans (2.2.17) et on obtient d'une part, avec $v = \dot{u} + w$:

$$\langle \sigma(t)v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + j(w) \geq \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N},$$

$$\text{i.e.} \quad \langle \sigma(t)v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} \geq \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \text{car,} \quad j(w) = 0.$$

Et d'autre part avec $v = \dot{u} - w$:

$$\langle \sigma(t)v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} \leq \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}.$$

Ces deux inégalités donnent :

$$\langle \sigma(t)v, \gamma w \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle f_2(t), \gamma w \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N},$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_{\Gamma_1} \sigma(t)v \gamma w da + \int_{\Gamma_2} \sigma(t)v \gamma w da + \int_{\Gamma_3} \sigma(t)v \gamma w da = \int_{\Gamma_2} f_2(t) \gamma w da,$$

mais :

$$\int_{\Gamma_1} \sigma(t)v \gamma w da = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} \sigma(t)v \gamma w da = 0.$$

Ce qui nous donne :

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma(t)v - f_2(t)) \cdot \gamma w da,$$

d'où :

$$(2.2.20) \quad \sigma(t)v = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

L'inégalité (2.2.17) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \sigma(t)v(\nu - \nu i(t)) da + \int_{\Gamma_2} \sigma(t)v(\nu - \nu i(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma(t)v(\nu - \nu i(t)) da \\ & + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \int_{\Gamma_2} f_2(t)(\nu - \nu i(t)) da \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Et d'après (2.2.20) nous aurons :

$$\int_{\Gamma_2} \sigma(t)v(\nu - \nu i(t)) da = \int_{\Gamma_2} f_2(t)(\nu - \nu i(t)) da \quad \forall v \in V,$$

et en il résulte que :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu (\gamma - \gamma(\dot{u}(t))) da + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq 0 \quad \forall v \in V .$$

Du fait que

$$\begin{aligned} \sigma \nu &= \sigma_\tau + \sigma_\nu \nu \quad \text{avec } \sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \\ j(v) &= \int_{\Gamma_3} g |v_\tau| da \quad , (v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3) \end{aligned}$$

et

$$j(\dot{u}(t)) = \int_{\Gamma_3} g |\dot{u}_\tau(t)| da \quad , (\dot{u}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3),$$

alors, l'inégalité précédente donne

$$(2.2.21) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) v_\tau + g |v_\tau| da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau(t) \dot{u}_\tau(t) + g |\dot{u}_\tau(t)|) da \geq 0 \quad \forall v \in V .$$

Mais :
$$\sigma_\tau(t) \cdot v = \sigma_\tau(t) (v_\nu \nu + v_\tau) = \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau$$

d'où :
$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau(t) v + g |v|) da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau(t) \dot{u}_\tau(t) + g |\dot{u}_\tau(t)|) da \geq 0 .$$

Puis en remplaçant v par $\pm \lambda$ avec $\lambda \geq 0$, on trouve :

$$\lambda \int_{\Gamma_3} (\pm \sigma_\tau(t) v + g |v|) da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau(t) \dot{u}_\tau(t) + g |\dot{u}_\tau(t)|) da \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \quad , \quad \forall v \in V$$

Cette inégalité est vraie indépendamment de $\lambda \geq 0$ et de $v \in V$, ce qui nous donne :

$$(2.2.22) \quad \int_{\Gamma_3} (\pm \sigma_\tau(t)v + |v|) da \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau(t)\dot{u}_\tau(t) + g|\dot{u}_\tau|) da \leq 0$$

On pose $v = \alpha \sigma_\tau(t)$ p.p sur Γ_3 , avec $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$ et $\alpha \geq 0$ p.p sur Γ_3 et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} (-(\sigma_\tau(t))^2 + g|\sigma_\tau(t)|)\alpha da \geq 0 &\Rightarrow -|\sigma_\tau(t)|^2|\sigma_\tau(t)| \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3 \\ &\Rightarrow -|\sigma_\tau(t)| + g \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3 \\ &\Rightarrow |\sigma_\tau(t)| \leq g \quad \text{p.p sur } \Gamma_3. \end{aligned}$$

En multipliant par $|\dot{u}_\tau(t)|$, on trouve

$$|\sigma_\tau(t)||\dot{u}_\tau| \leq g|\dot{u}_\tau| \quad \text{p.p sur } \Gamma_3,$$

ce qui implique

$$-\sigma_\tau(t) \cdot \dot{u}_\tau(t) \leq |\sigma_\tau(t) \cdot \dot{u}_\tau(t)| \leq g|\dot{u}_\tau(t)| \quad \text{p.p sur } \Gamma_3.$$

Et donc :

$$(2.2.23) \quad \sigma_\tau(t) \cdot \dot{u}_\tau(t) + g|\dot{u}_\tau(t)| \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3.$$

De (2.2.22), on déduit que

$$\sigma_\tau(t) \cdot \dot{u}_\tau(t) + g|\dot{u}_\tau(t)| \leq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3.$$

Il résulte de ce qui précède

$$\sigma_\tau(t) \cdot \dot{u}_\tau(t) + g|\dot{u}_\tau(t)| = 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3.$$

De cette égalité et en utilisant le lemme 2.2.2. , on obtient les conditions aux limites

(2.2.3). ■

Après ces calculs, on peut donc affirmer l'équivalence formelle entre les formulations P_1 et P_2 avec le problème P . On montre par des arguments analogues que toute solution régulière du problème P_2 est solution du problème P_1 .

2.3. Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on présente des résultats d'existence et d'unicité pour les problèmes P_1 et P_2 et on étudie le lien entre les solutions de ces problèmes.

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses (2.1.12) et (2.1.19) – (2.1.21), le problème variationnel P_1 admet une solution unique u ayant la régularité $u \in C^1(0, T; V)$.*

La preuve du théorème est basée sur des arguments du point fixe et sera effectuée dans plusieurs étapes.

Nous supposons dans la suite que les hypothèses (2.1.12) et (2.1.18) - (2.1.21) sont vérifiées. Pour tout $\eta \in C(0, T; H)$, on considère alors le problème elliptique suivant :

Problème $P_{1\eta}$: Trouver $v_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tels que :

$$(2.3.1) \quad \left\langle A(\varepsilon(v_\eta(t))), \varepsilon(w) - \varepsilon(v_\eta(t)) \right\rangle_H + \left\langle \eta(t), \varepsilon(w) - \varepsilon(v_\eta(t)) \right\rangle_H \\ + j(w) - j(v_\eta(t)) \geq \left\langle f(t), w - v_\eta(t) \right\rangle_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T]$$

Lemme 2.3.2 *Le problème $P_{1\eta}$ admet une solution unique $v_\eta \in C(0, T; V)$.*

Démonstration.

L'inéquation (2.3.1) est équivalente à

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} & \langle (A + \eta(t))(\varepsilon(v_\eta(t))), \varepsilon(w) - \varepsilon(v_\eta(t)) \rangle_{\mathbf{H}} + j(w) - j(v_\eta(t)) \\ & \geq \langle f(t), w - v_\eta(t) \rangle_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \end{aligned}$$

L'opérateur $A + \eta$ est fortement monotone et de Lipchitz avec j une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement. Ce qui prouve, d'après les résultats classiques des inéquations variationnelles et elliptiques (voir Théorème 1.2.2.), l'existence d'une solution unique $v_\eta(t) \in V$.

Maintenant soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et par simplicité on note $v_\eta(t_i) = v_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$ et $f(t_i) = f_i$ pour $i = 1, 2$. De (2.3.1) découle l'inégalité

$$\begin{aligned} \langle A(\varepsilon(v_1)) - A(\varepsilon(v_2)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathbf{H}} & \leq \langle f_1 - f_2, \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_V \\ & - \langle \eta_1 - \eta_2, \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.1.19) et l'inégalité de Korn (1.2.20) donnent

$$|v_1 - v_2|_V \leq C(|f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathbf{H}}).$$

La régularité $v_\eta \in C(0, T; V)$ est une conséquence des régularités $f \in C(0, T; V)$ et $\eta \in C(0, T; V)$.

Soit maintenant $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(2.3.3) \quad u_\eta(t) = u_0 + \int_0^t v_\eta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Nous définissons l'opérateur $\Lambda : C(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow C(0, T; \mathbf{H})$ par

$$(2.3.4) \quad \Lambda \eta(t) = G(\varepsilon(u_\eta(t))),$$

pour tout $\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$ et $t \in [0, T]$.

Lemme 2.3.3 *L'opérateur Λ admet un unique point fixe $\eta^* \in C(0, T; \mathbf{H})$.*

Démonstration.

Soient $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathbf{H})$ et $t \in [0, T]$

$$\left| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \right|_{\mathbf{H}} = \left| G(\varepsilon(v_{\eta_1}(t))) - G(\varepsilon(v_{\eta_2}(t))) \right|_{\mathbf{H}} \leq C \left| v_{\eta_1}(t) - v_{\eta_2}(t) \right|_{\mathbf{H}}.$$

De (2.3.2) on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$(2.3.5) \quad \left| v_{\eta_1}(t) - v_{\eta_2}(t) \right|_{\mathbf{H}} \leq C \left| \eta_1(s) - \eta_2(s) \right|_{\mathbf{H}},$$

Ce qui donne

$$(2.3.6) \quad \left| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \right|_{\mathbf{H}} \leq C \left| \eta_1 - \eta_2 \right|_{\mathbf{H}}.$$

Et par récurrence on obtient

$$(2.3.7) \quad \left| \Lambda^n \eta_1(t) - \Lambda^n \eta_2(t) \right|_{\mathbf{H}} \leq \frac{C^n}{n!} \left| \eta_1 - \eta_2 \right|_{\mathbf{H}} \quad \forall n \in \mathbf{IN}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^n}{n!} = 0$ alors Λ^n est une contraction dans $C(0, T; \mathbf{H})$, d'où l'existence d'un unique point fixe $\eta^* \in C(0, T; \mathbf{H})$ tel que $\Lambda^n \eta^* = \eta^*$ qui est aussi point fixe de l'opérateur Λ .

Démonstration du théorème 2.3.1.

Existence : Soit $\eta^* \in C(0, T; \mathbf{H})$ le point fixe de Λ , i.e. $\Lambda \eta^* = \eta^*$ et v_{η^*} solution de $P_{1\eta}$ pour $\eta = \eta^*$. On va montrer que la fonction $u_{\eta^*} = u_{\eta}(t) = u_0 + \int_0^t v_{\eta}(s) ds$ est solution de $P_{1\eta}$ pour tout $t \in [0, T]$.

L'égalité (2.3.3) montre que $u_{\eta^*} \in C^1(0, T; \mathbf{H})$. De plus, avec $\Lambda \eta^*(t) = G(\varepsilon(u_{\eta^*}(t)))$, $\dot{u}_{\eta^*} = v_{\eta^*}$ et en remplaçant dans (2.3.1), on déduit que u_{η^*} vérifie (2.2.15). Il résulte donc que u_{η^*} est solution de P_1 .

Unicité : Soit $u \in C^1(0, T; \mathbf{H})$ une autre solution de P_1 .

Pour $\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$, u est aussi solution de $P_{1\eta}$ tel que :

$$(2.3.8) \quad \eta(t) = G(\varepsilon(u(t))) \quad \forall t \in [0, T]$$

Du lemme 2.3.3. et par unicité, il résulte

$$(2.3.9) \quad u = u_{\eta}.$$

En utilisant (2.3.4), (2.3.9) et (2.3.8) il vient :

$$\Lambda \eta = \eta,$$

ce qui donne avec l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ

$$(2.3.10) \quad \eta^* = \eta.$$

L'unicité de la solution u est une conséquence de (2.3.9) et de (2.3.10).

Notre deuxième résultat touche au problème dual P_2 .

Théorème 2.3.4 *Sous les hypothèses (2.1.19) - (2.1.21), (2.1.12) et (2.1.10) le problème P_2 admet une solution unique $\sigma \in C(0, T; \mathbf{H}_1)$.*

Pour la preuve de ce théorème, on va adopter la même technique que celle utilisée pour le Théorème 2.3.1. Soit $\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$; on considère alors le problème variationnel suivant :

Problème $P_{2\eta}$: Trouver $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow H_1$ tels que :

$$(2.3.11) \quad \sigma_\eta(t) \in \Sigma(t), \quad \langle \mathbf{A}^{-1}(\sigma_\eta(t)), \tau - \sigma_\eta(t) \rangle_H \geq \langle \eta(t), \tau - \sigma_\eta(t) \rangle_H \quad \forall \tau \in \Sigma(t)$$

Lemme 2.3.5. *Le problème $P_{2\eta}$ admet une solution unique $\sigma_\eta \in C^1(0, T; H_1)$.*

Démonstration. On considère l'ensemble Σ_0 convexe et fermé de H défini par :

$$(2.3.12) \quad \Sigma_0 = \{ \tau \in H \mid \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq 0, \quad \forall v \in V \}.$$

Comme on introduit aussi les notations suivantes

$$(2.3.13) \quad \tilde{\sigma} = \varepsilon(f),$$

$$(2.3.14) \quad \bar{\sigma}_\eta = \sigma_\eta - \tilde{\sigma}.$$

Au début, on va montrer que $\tau \in \Sigma(t)$ si et seulement si $\tau - \tilde{\sigma} \in \Sigma_0$.

Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} \tau \in \Sigma(t) &\Leftrightarrow \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle \tau - \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) + \langle \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_H \geq \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle \tau - \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_H + \langle \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq \langle \varepsilon(f), \varepsilon(v) \rangle_H \quad \forall v \in V \\ &\hspace{15em} \geq \langle \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_H \quad \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle \tau - \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq 0 \quad \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \tau - \tilde{\sigma} \in \Sigma_0 \end{aligned}$$

D'où le résultat d'équivalence

$$(2.3.15) \quad \tau \in \Sigma(t) \Leftrightarrow \tau - \tilde{\sigma} \in \Sigma_0.$$

En plus du fait que $f \in C(0, T; \mathbf{H})$ et ε est un opérateur linéaire et continu (car : $\varepsilon(f) \in C(0, T; \mathbf{H})$), alors : $\tilde{\sigma} \in C(0, T; \mathbf{H})$.

On montre maintenant que σ_η est solution de (2.3.10) tel que $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$ si et seulement si $\bar{\sigma}_\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$,

et

$$(2.3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_\eta \in \Sigma_0(t), \left\langle \mathbf{A}^{-1}(\bar{\sigma}_\eta(t)), \tau - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \geq \\ \left\langle \eta(t) - \mathbf{A}^{-1}\tilde{\sigma}_\eta(t), \tau - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall \tau \in \Sigma_0, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

a) Du fait que $\sigma_\eta(t) \in C(0, T; \mathbf{H})$ qui est équivalent à $\sigma_\eta(t) - \tilde{\sigma}(t) \in \Sigma_0(t)$ (d'après (2.3.15)),

alors :

$$\bar{\sigma}_\eta(t) = \sigma_\eta(t) - \tilde{\sigma}(t) \in \Sigma_0(t).$$

b) On remplace $\sigma_\eta(t) = \tilde{\sigma} + \bar{\sigma}_\eta(t)$ dans l'inégalité de (2.1.52) et on obtient :

$$\left\langle \mathbf{A}^{-1}\bar{\sigma}_\eta(t) + \mathbf{A}^{-1}\tilde{\sigma}(t), \tau - \tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \geq \left\langle \eta(t), \tau - \tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall \tau \in \Sigma(t)$$

Et en posant $\tau' = \tau - \tilde{\sigma}$, on trouve l'inégalité :

$$\left\langle \mathbf{A}^{-1}\bar{\sigma}_\eta(t), \tau' - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \geq \left\langle \eta(t) - \mathbf{A}^{-1}(\tilde{\sigma}(t)), \tau' - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall \tau' \in \Sigma_0,$$

qui est identique à

$$\left\langle \mathbf{A}^{-1}\bar{\sigma}_\eta(t), \tau - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \geq \left\langle \eta(t) - \mathbf{A}^{-1}(\tilde{\sigma}(t)), \tau - \bar{\sigma}_\eta(t) \right\rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall \tau \in \Sigma_0.$$

De ce qui précède, il résulte que (2.3.16) est vérifiée.

Les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du théorème (2.1.6) nous permet de déduire qu'il existe un élément unique $\bar{\sigma}_\eta(t) \in \mathbf{H}$ solution de (2.3.16).

Soient maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ et $\bar{\sigma}_\eta(t_i) = \bar{\sigma}(t_i)$, $\tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (2.3.16) on obtient l'inégalité

$$(2.3.17) \quad |\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2|_{\mathbf{H}} \leq C(|\eta_1 - \eta_2|_{\mathbf{H}} + |\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2|_{\mathbf{H}})$$

$\bar{\sigma}_\eta(t) \in C(0, T; \mathbf{H})$ est un résultat de (2.3.15) et (2.3.17).

On en déduit donc que $\sigma_\eta(t) \in C(0, T; \mathbf{H})$ est solution unique du problème $P_{2\eta}$.

De plus, $\tau_\eta \in \Sigma(t)$ et $\text{Div} \sigma_\eta(t) + f_0(t) = 0$, avec $f_0 \in C(0, T; \mathbf{H})$, ce qui nous donne $\text{Div} \sigma_\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$ et, donc : $\sigma_\eta \in C^1(0, T; \mathbf{H}_1)$. ■

Maintenant on définit l'opérateur $\theta : C(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow C(0, T; \mathbf{H})$ par

$$(2.3.18) \quad \theta\eta(t) = A^{-1}G \left(\int_0^t B(\sigma_\eta, \varepsilon(u_0))(s) ds + \varepsilon(u_0) \right)$$

pour $\eta \in C(0, T; \mathbf{H})$ et $t \in [0, T]$.

On note par σ_η la solution de (2.1.52) et B l'opérateur donné par (2.1.32).

Lemme 2.3.6. *L'opérateur θ admet un unique point fixe $\eta^* \in C(0, T; \mathbf{H})$.*

Démonstration.

Soient $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathbf{H})$ et $\sigma_i = \sigma_{\eta_i}$, $i = 1, 2$.

La Lipschitzité de A^{-1} et de G donne la Lipschitzité de $A^{-1}G$, et donc

$$(2.3.19) \quad \left| \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \right| \leq C \int_0^T \left| B(\sigma_1, \varepsilon(u_0))(s) - B(\sigma_2, \varepsilon(u_0))(s) \right| ds .$$

Par itération n -fois, on obtient :

$$(2.3.20) \quad \left| \theta_{\eta_1}^n(t) - \theta_{\eta_2}^n(t) \right|_{C(0,T;H)} \leq \frac{C^n}{n!} \left| B(\sigma_1, \varepsilon(u_0)) - B(\sigma_2, \varepsilon(u_0)) \right|_{C(0,T;H)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Mais (2.1.34) montre que B est un opérateur de Lipschitz, ce qui nous donne :

$$(2.3.21) \quad \begin{aligned} \left| B(\sigma_1, \varepsilon(u_0)) - B(\sigma_2, \varepsilon(u_0)) \right|_{C(0,T;H)} &\leq C \left| \sigma_1 - \sigma_2 + \varepsilon(u_0) - \varepsilon(u_0) \right|_{C(0,T;H)} \\ &\leq C \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|_{C(0,T;H)} \\ &\leq \left| \eta_1 - \eta_2 \right|_{C(0,T;H)} \end{aligned} .$$

Les inégalités (2.3.20) et (2.3.21) montrent que θ^n est une contraction, ce qui implique que θ^n admet un seul point fixe $\eta^* \in C(0, T; H)$.

Et donc l'opérateur θ admet un seul point fixe $\eta^* \in C(0, T; H)$. ■

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 2.3.4.

Démonstration du Théorème 2.3.4 Soit $\eta^* \in C(0, T; H)$ le point fixe de θ et soit σ_{η^*} la solution unique de $p_{2\eta}$ pour $\eta = \eta^*$ de (2.1.59) et comme η^* point fixe de θ , on obtient :

$$\eta^* = \theta \eta^*(t) = A^{-1} G \left(\int_0^t B(\sigma_{\eta^*}(t), \varepsilon(u_0))(s) ds + \varepsilon(u_0) \right) \quad t \in [0, T]$$

On remplace $\eta^*(t)$ et on trouve :

$$(2.3.22)$$

$$\begin{aligned} A^{-1}(\sigma_{\eta^*}(t)) - \eta^*(t) &= A^{-1}(\sigma_{\eta^*}(t)) - A^{-1}G\left(\int_0^t B(\sigma_{\eta^*}(t), \varepsilon(u_0))(s)ds + \varepsilon(u_0)\right) \\ &= B(\sigma_{\eta^*}, \varepsilon(u_0))(t), \end{aligned}$$

ce qui montre que σ_{η^*} est solution unique de P_2 .

D'où d'après $\sigma = \sigma_{\eta^*}$ i.e. le problème P_2 admet une solution.

L'unicité de η^* donne l'unicité de σ_{η^*} et donc celle de σ , ce qui achève la démonstration du Théorème 2.1.9. ■

2.4. Un résultat d'équivalence

Cette section consiste à étudier le lien entre u et σ , solutions des deux problèmes P_1 et P_2 . Le résultat important de cette section est l'équivalence de ces deux formulations variationnelles du problème mécanique P :

Théorème 2.4.1 *Supposons que les hypothèses (2.1.12), (2.1.13) et (2.1.20)-(2.1.22) soit satisfaites.*

1) *Si u est solution de P_1 et σ est la fonction donnée par*

$$(2.4.1) \quad \sigma = A(\varepsilon(\dot{u})) + G(\varepsilon(u)),$$

alors σ est solution de P_2 et $\sigma \in C(0, T; H_1)$.

2) *Réciproquement, σ est solution du Problème P_2 alors, il existe une unique fonction $u \in C^1(0, T; V)$ telle que (2.1.64) et (2.1.36) soient satisfaites. En plus, u est solution du Problème P_1 .*

Démonstration. 1) On suppose que u est solution de P_1 et σ vérifie (2.1.64).

On remplace par σ dans (2.1.35) et on trouve :

$$(2.4.2) \quad \langle (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

En posant $v = 2\dot{u}(t)$ puis $v = 0$, on obtient respectivement

$$\langle (\sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

et

$$\langle (\sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) \leq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

ce qui nous donne

$$(2.4.3) \quad \langle (\sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) = \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall u \in V.$$

En sommant (2.4.2) et (2.4.3), on trouve :

$$\langle (\sigma(t), \varepsilon(v)) \rangle_H + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

d'où il résulte :

$$\sigma(t) \in \Sigma(t).$$

Pour tout $\tau, \sigma \in \Sigma(t)$, on a :

$$\langle (\tau, \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

$$\langle (\sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + j(\dot{u}(t)) \geq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

La différence nous donne le résultat :

$$\langle (\tau - \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

qui est équivalent à :

$$(2.4.4) \quad \langle \varepsilon(\dot{u}(t)), \tau - \sigma(t) \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t).$$

Avec l'introduction de l'opérateur B défini par :

$$(2.4.5) \quad \varepsilon(\dot{u}) = B(\sigma, \varepsilon(u_0)),$$

on trouve l'inégalité :

$$\langle B(\sigma, \varepsilon(u_0)), \tau - \sigma(t) \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t) \quad , \quad \forall t \in [0, T]$$

Ce qui montre avec le résultat $\sigma(t) \in \Sigma(t)$, que : σ est solution de P_2 .

Comme $\sigma(t) \in \Sigma(t)$, il s'ensuit de (2.1.8) et (2.1.16) que $Div \sigma \in C(0, T; \mathbf{H})$ et, donc $\sigma \in C(0, T; \mathbf{H}_1)$.

2) Pour démontrer la réciproque, on suppose $\sigma \in C(0, T; \mathbf{H}_1)$ solution de P_2 et z donné par $z = B(\sigma, \varepsilon(u_0)) \in C(0, T; \mathbf{H}_1)$.

Avec (2.1.37) i.e. $\langle B(\sigma, \varepsilon(u_0(t))), \tau - \sigma(t) \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t) \quad , \quad \forall t \in [0, T]$,
on obtient

$$(2.4.6) \quad \langle z(t), \tau - \sigma(t) \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t) \quad , \quad \forall t \in [0, T].$$

Le lemme 2.1.5 donne l'existence d'une unique fonction $z \in C(0, T; \mathbf{H})$ tel que

$$(2.4.7) \quad \sigma(t) = A(z(t)) + G \left(\int_0^t z(s) ds + \varepsilon(u_0) \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit $\tilde{z} \in \mathbf{H}$ tel que $\langle \tilde{z}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathbf{H}} = 0 \quad \forall v \in V$.

Du fait que $\sigma(t) \in \Sigma(t)$ alors,

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathbf{H}} + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

D'où :

$$\langle \sigma(t) \pm \tilde{z}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathbf{H}} + j(v) \geq \langle f(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

i.e.

$$\sigma(t) \pm \tilde{z} \in \Sigma(t).$$

Si on pose $\tau = \sigma(t) \pm \tilde{z} \in \Sigma(t) \quad \tau \in \Sigma(t),$

et on remplace dans $\langle z(t), \tau - \sigma(t) \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t),$

$$\text{on trouve : } \left. \begin{array}{l} \langle z(t), \tilde{z} \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \\ \text{et} \\ \langle z(t), -\tilde{z} \rangle_{\mathbf{H}} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle z(t), \tilde{z} \rangle_{\mathbf{H}} = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

L'espace $\varepsilon(V) = \{\varepsilon(v) \mid v \in V\}$ est fermé, donc :

$$(\varepsilon(V)^\perp)^\perp = \varepsilon(V)$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \tilde{z}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathbf{H}} = 0 \\ \text{et} \\ \langle z(t), \tilde{z} \rangle_{\mathbf{H}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{z} \in \varepsilon(V)^\perp \\ \text{et} \\ z(t) \in (\varepsilon(V)^\perp)^\perp = \varepsilon(V). \end{array} \right.$$

D'où $z(t) \in \varepsilon(V)$.

Ce qui prouve l'existence de $v(t) \in V$ tel que

$$(2.4.8) \quad z(t) = \varepsilon(v(t)) \quad \forall t \in [0, T]$$

On peut définir maintenant la fonction $v : [0, T] \rightarrow V$, par (2.4.8). L'inégalité de Korn appliquée pour $z \in C(0, T; \mathbf{H})$, nous donne $v \in C(0, T; V)$.

La continuité de v nous donne l'existence de la fonction

$$u : [0, T] \rightarrow V$$

$$u(t) = \int_0^t v(s) ds + u_0.$$

Il résulte de ce qui précède que $u \in C^1(0, T; V)$.

Ainsi que $u(0) = u_0$ et $\sigma = A \varepsilon(\dot{u}) + G(\varepsilon(u))$ sont vérifiées (i.e. (2.2.16) et (2.4.1)).

L'unicité de la fonction u est une conséquence de (2.4.7), du Lemme 2.2.3, de (2.4.8) et de l'inégalité de Korn (1.2.20).

Il nous reste à prouver que, u est solution du Problème P_1 . La sous différentiabilité de la fonction j sur V et de (2.1.7) montrent qu'il existe $\tilde{\tau} : [0, T] \rightarrow H$ tel que :

$$(2.4.9) \quad \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(w) - \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + j(w) - j(\dot{u}) \geq \langle f, w - \dot{u} \rangle_V \quad \forall u, w \in V.$$

En posant $w = 2\dot{u}$ puis $w = 0$ dans (2.4.9), on trouve les deux inégalités

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + j(\dot{u}) \geq \langle f, \dot{u} \rangle_V \quad \forall u \in V$$

et

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + j(\dot{u}) \leq \langle f, \dot{u} \rangle_V \quad \forall u \in V,$$

qui donnent

$$(2.4.10) \quad \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + j(\dot{u}) = \langle f, \dot{u} \rangle_V \quad \forall u \in V.$$

De (2.4.9) et (2.4.10) on conclut : $\tilde{\tau} \in \Sigma(t)$ pour tout $t \in [0; T]$.

De (2.2.17), de l'égalité (2.4.5) et du fait que $\tilde{\tau}(t) \in \Sigma(t)$, alors σ vérifie l'inégalité

$$\langle \tilde{\tau} - \sigma, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H \geq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$(2.4.11) \quad \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H \geq \langle \sigma, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H.$$

les deux inégalités précédentes (2.4.10) et (2.4.11) donnent

$$(2.4.12) \quad \langle \sigma, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + j(\dot{u}) \leq \langle f, \dot{u} \rangle_V \quad \forall u \in V.$$

En tenant compte de $\sigma(t) \in \Sigma(t)$

i.e.

$$(2.4.13) \quad \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_H + j(v) \geq \langle f, v \rangle_V \quad \forall v \in V,$$

puis en remplaçant $v = \dot{u}$, on obtient

$$\langle \sigma, \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + j(\dot{u}) \geq \langle f, \dot{u} \rangle_V \quad \forall u \in V.$$

Ce qui donne avec (2.4.12) l'égalité (2.4.3) . qui est équivalente à

$$(2.4.14) \quad \langle (\sigma(t), -\varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H - j(\dot{u}(t)) = \langle f(t), -\dot{u}(t) \rangle_V \quad \forall u \in V$$

En sommant L'inégalité (2.4.2) est une conséquence de (2.4.13) et (2.4.14).

Finalement, on remplace

$$\sigma = A(\varepsilon(\dot{u})) + G(\varepsilon(u)),$$

dans (2.4.2) et on trouve (2.2.15).

La fonction u est donc solution du Problème P_1 , ce qui achève la démonstration du

Théorème 2.4.1. ■

2.5. Dépendance continue de la solution par rapport aux données

On va montrer dans cette section que les solutions des problèmes variationnelles P_1 et P_2 dépendent continument de la limite de rendement de frottement g . Le résultat principale est le suivant :

Théorème 2.5.1. *On suppose que (2.1.19) – (2.1.21), (2.1.8) et (2.1.9) sont satisfaites. Soient u_i, σ_i les solutions respectives des problèmes P_1, P_2 pour les*

données g_i satisfaisant (2.1.10), $i=1,2$. Alors, il existe $C > 0$, qui dépend de Ω, Γ, A, G et T , tel que

$$(2.5.1) \quad \|u_1 - u_2\|_{C^1(0,T;V)} \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$$

$$(2.5.2) \quad \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{C^1(0,T;H_1)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}.$$

Démonstration. On note par j_i , la fonctionnelle (2.1.13) définie avec $g = g_i$, $i=1,2$

i.e.

$$(2.5.3) \quad j_i = \int_{\Gamma_3} g_i |v_i| da \quad \forall v \in V.$$

On remplace v par \dot{u}_1 puis \dot{u}_2 et on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle A(\varepsilon(\dot{u}_1)), \varepsilon(\dot{u}_2) - \varepsilon(\dot{u}_1) \rangle_H + \langle G(\varepsilon(u_1)), \varepsilon(\dot{u}_2) - \varepsilon(\dot{u}_1) \rangle_H \\ & + j_1(\dot{u}_2) - j_1(\dot{u}_1) \geq \langle f(t), \dot{u}_2 - \dot{u}_1 \rangle_V, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \langle A(\varepsilon(\dot{u}_2)), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2) \rangle_H + \langle G(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2) \rangle_H \\ & + j_2(\dot{u}_1) - j_2(\dot{u}_2) \geq \langle f(t), \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_V \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} & -\langle A(\varepsilon(\dot{u}_2)), \varepsilon(\dot{u}_2) - \varepsilon(\dot{u}_1) \rangle_H - \langle G(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(\dot{u}_2) - \varepsilon(\dot{u}_1) \rangle_H \\ & + j_2(\dot{u}_1) - j_2(\dot{u}_2) \geq -\langle f(t), \dot{u}_2 - \dot{u}_1 \rangle_V, \end{aligned}$$

après addition de la première inégalité et la dernière, on trouve :

$$(2.5.4) \quad \begin{aligned} & \langle A(\varepsilon(\dot{u}_1)) - A(\varepsilon(\dot{u}_2)), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2) \rangle_H \leq \langle G(\varepsilon(u_1)) - G(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2) \rangle_H \\ & + j_1(\dot{u}_2) - j_1(\dot{u}_1) + j_2(\dot{u}_1) - j_2(\dot{u}_2). \end{aligned}$$

Les hypothèses (2.1.19) et (2.1.20) et la définition de la fonctionnelle j_i donnent respectivement l'existence d'une constante $C > 0$, telle que :

$$(2.5.5) \quad C |u_1 - u_2|_V^2 \leq \langle A(\varepsilon(\dot{u}_1)) - A(\varepsilon(\dot{u}_2)), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2) \rangle_H,$$

$$(2.5.6) \quad \langle G(\varepsilon(u_1)) - G(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2) \rangle_H \leq C |u_1 - u_2|_V |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V$$

et

$$(2.5.7) \quad j_1(\dot{u}_2) - j_1(\dot{u}_1) + j_2(\dot{u}_1) - j_2(\dot{u}_2) \leq C |g_1 - g_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V.$$

Il résulte donc

$$(2.5.8) \quad |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V^2 \leq C \left(|u_1 - u_2|_V |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V + |g_1 - g_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V \right),$$

i.e.

$$|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V \leq C \left(|u_1 - u_2|_V + |g_1 - g_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right),$$

qui donne avec $u_i(t) = \int_0^t \dot{u}_i(s) ds + u_0$:

$$(2.5.9) \quad |u_1(t) - u_2(t)|_V = C \left(\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds + |g_1 - g_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right).$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$(2.5.10) \quad |u_1(t) - u_2(t)|_V \leq C |g_1 - g_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} \quad \forall t \in [0, T]$$

on intègre et on trouve :

$$|u_1 - u_2|_{C^1(0, T; V)} \leq C |g_1 - g_2|_{L^\infty(\Gamma_3)},$$

ce qui prouve (2.5.1).

Pour démontrer (2.5.2), on pose pour $t \in [0, T]$

$$(2.5.11) \quad \sigma_i(t) = A(\varepsilon(\dot{u}_i(t))) + G(\varepsilon(u_i(t))) \quad , \quad i = 1, 2$$

En utilisant (2.5.11) et les deux propriétés (2.1.19), (2.1.20) des opérateurs A et G on obtient

$$(2.5.12) \quad \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_H \leq C(\|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V + \|u_1 - u_2\|_V)$$

De (2.1.16) on en déduit que $\text{Div}\sigma_1(t) = \text{Div}\sigma_2(t) = -f_0(t)$ et, donc

$$(2.5.13) \quad \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{H_1} \leq \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_H.$$

L'inégalité (2.5.2) est maintenant une conséquence de (2.5.13), (2.5.12) et l'inégalité (2.5.1). ■

CHAPITRE 3

Chapitre 3

Problèmes d'évolution abstraits de la forme $Au + \partial_2 j(u, \dot{u}) \ni f$

Dans ce chapitre on envisage une généralisation, dans un cadre fonctionnel abstrait, des résultats obtenus dans l'étude des problèmes mécaniques précis.

Dans la première section, on analyse un problème d'évolution abstrait non linéaire décrivant une classe de processus de contact avec frottement entre un corps viscoélastique et une fondation. Le problème est mis sous forme d'inclusion différentielle du temps.

Dans la deuxième section on présente une formulation duale du problème, comme on prouve l'équivalence entre les formulations.

Dans la troisième section, par l'application des résultats abstraits obtenus, on résout un problème de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques.

3.1. Formulation des problèmes – Hypothèses

Dans tout cette section, on note par H un espace de Hilbert, V un sous espace fermé de H , A et G deux opérateurs de H dans H et $[0, T]$ avec $T > 0$ un intervalle de temps.

On considère aussi deux fonctions $f : [0, T] \rightarrow V$ et $j : H \times H \rightarrow]-\infty, +\infty]$. On note par $\langle \dots \rangle_H$ le produit scalaire sur H et par $|\cdot|_V$ la norme associée. V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire de H , ce qui nous permet d'utiliser les notations $\langle u, v \rangle_V$ et $|u|_V$ au lieu de $\langle u, v \rangle_H$ et $|u|_H$, si $u, v \in V$.

Nous allons étudier dans cette section les inclusions différentielles de la forme

Problème P_1 : Trouver la fonction $x : [0, T] \rightarrow H$ telle que :

$$(3.1.1) \quad A\dot{x}(t) + Gx(t) + \partial_2 j(x(t), \dot{x}(t)) \ni f(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(3.1.2) \quad x(0) = x_0.$$

Où $\partial_2 j$ représente le sous-différentiel de la fonction j par rapport au second argument et x_0 est la donnée initiale.

Pour tout $z \in H$, $D_2 j(z, \cdot)$ et $\partial_2 j(z, \cdot)$ représentent respectivement le domaine effectif et le sous-différentiel de la fonction $j(z, \cdot)$ et sont définis par

$$D_2 j(z, \cdot) = \{ u \in H \mid j(z, u) < +\infty \}$$

$$\partial_2 j(z, u) = \left\{ w \in H \mid j(z, v) - j(z, u) \geq \langle w, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H \right\} \quad \forall u \in H$$

Dans l'étude du problème P_1 , nous tenons compte des hypothèses suivantes :

$$(3.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A : H \rightarrow H \text{ est un opérateur de Lipschitz et fortement monotone i.e.} \\ (a) \exists L > 0 : |Au_1 - Au_2|_H \leq L|u_1 - u_2|_H \quad \forall u_1, u_2 \in H \\ (b) \exists M > 0 : \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle_H \geq M|u_1 - u_2|_H^2 \quad \forall u_1, u_2 \in H \end{array} \right\}$$

$$(3.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} G : H \rightarrow H \text{ est un opérateur de Lipschitz, i.e.} \\ \exists \tilde{L} > 0 : |Gu_1 - Gu_2|_H \leq \tilde{L}|u_1 - u_2|_H \quad \forall u_1, u_2 \in H \end{array} \right\}$$

$$(3.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} j : H \times H \rightarrow]-\infty, +\infty] \text{ est une fonction telle que} \\ (a) D_2 j(z, \cdot) = V \quad \forall z \in H \\ (b) j(z, \cdot) \text{ est une semi-norme continue dans } V, \quad \forall z \in H, \\ (c) \exists M > 0 : j(z_1, v_2) - j(z_1, v_1) + j(z_2, v_1) - j(z_2, v_2) \leq \\ \quad \tilde{M}|z_1 - z_2|_H |v_1 - v_2|_V, \quad \forall z_1, z_2 \in H, v_1, v_2 \in V. \end{array} \right\}$$

$$(3.1.6) \quad f \in C(0, T; V)$$

$$(3.1.7) \quad x_0 \in V.$$

Dans tout ce qui suit C représente une constante générique strictement positive. Elle dépend uniquement de A , j et T et est susceptible de varier d'une expression à une autre.

3.2. Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal dans cette section est le suivant :

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses (3.1.3) - (3.1.7), le problème P_1 admet une solution unique $x \in C^1(0, T; V)$.*

Pour démontrer le Théorème 3.3.1, on se sert du point fixe et d'autres arguments similaires à ceux utilisés dans le chapitre 2. Pour établir ce théorème, on a besoin de quelques résultats préliminaires qu'on donnera sous forme de lemmes.

On suppose que les hypothèses (3.1.3) - (3.1.7) sont vérifiées et, pour tout $\eta \in C(0, T; H)$ et $g \in C(0, T; V)$, considérons le problème suivant :

Problème $P_{\eta g}$: Trouver $x_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$ telle que :

$$(3.1.8) \quad A\dot{x}_{\eta g}(t) + \eta(t) + \partial_2 j(g(t), \dot{x}_{\eta g}(t)) \ni f(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(3.1.9) \quad x_{\eta g}(0) = x_0$$

Lemme 3.1.2. *Le problème variationnel $P_{\eta g}$ admet une solution unique $x_{\eta g}$ ayant la régularité $x_{\eta g} \in C^1(0, T; V)$.*

Démonstration. En utilisant (3.1.3) et (3.1.5), il s'ensuit des résultats classiques sur les inéquations variationnelles elliptiques qu'il existe une fonction unique $z_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$ telle que

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} \langle Az_{\eta g}(t), z - z_{\eta g}(t) \rangle_H + j(g(t), z) - j(g(t), z_{\eta g}(t)) \geq \\ \langle f(t), z - z_{\eta g}(t) \rangle_V - \langle \eta(t), z - z_{\eta g}(t) \rangle_H \quad \forall z \in V, t \in [0, T] \end{aligned}$$

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$. Pour la simplification, on prend $z_{\eta g}(t_i) = z_i$, $g(t_i) = g_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$ et $f(t_i) = f_i$ avec $i = 1, 2$.

D'après (3.1.10) et pour tout $z \in V$ nous aurons :

$$(3.1.11) \quad \langle Az_1, z - z_1 \rangle_H + j(g_1, z) - j(g_1, z_1) \geq \langle f_1, z - z_1 \rangle_V - \langle \eta_1, z - z_1 \rangle_H$$

et

$$(3.1.12) \quad \langle Az_2, z - z_2 \rangle_H + j(g_2, z) - j(g_2, z_2) \geq \langle f_2, z - z_2 \rangle_V - \langle \eta_2, z - z_2 \rangle_H$$

On remplace par $z = z_2$ et $z = z_1$ respectivement dans (3.1.11) et (3.1.12), on trouve

$$(3.1.13) \quad \langle Az_1, z_1 - z_2 \rangle_H \leq \langle f_1, z_1 - z_2 \rangle_V + j(g_1, z_2) - j(g_1, z_1) - \langle \eta_1, z_1 - z_2 \rangle_H$$

et

$$(3.1.14) \quad -\langle Az_2, z_1 - z_2 \rangle_H - j(g_2, z_1) + j(g_2, z_2) \leq -\langle f_2, z_1 - z_2 \rangle_V + \langle \eta_2, z_1 - z_2 \rangle_H$$

En sommant (3.1.13) et (3.1.14), on trouve

$$(3.1.15) \quad \begin{aligned} \langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2 \rangle_H &\leq \langle f_1 - f_2, z_1 - z_2 \rangle_V - \langle \eta_1 - \eta_2, z_1 - z_2 \rangle_H \\ &\quad + j(g_1, z_2) - j(g_1, z_1) + j(g_2, z_1) - j(g_2, z_2) \end{aligned}$$

En appliquant (3.1.3.b) on obtient l'inégalité

$$(3.1.16) \quad M |z_1 - z_2|_V^2 \leq \langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2 \rangle_H.$$

Les régularités $f \in C(0, T; V)$ et $\eta \in C(0, T; H)$ nous donnent, avec $C_1 > 0, C_2 > 0$

$$(3.1.17) \quad \langle f_1 - f_2, z_1 - z_2 \rangle_V \leq C_1 |f_1 - f_2|_V |z_1 - z_2|_V$$

et

$$(3.1.18) \quad \langle \eta_1 - \eta_2, z_1 - z_2 \rangle_H \leq C_2 |\eta_1 - \eta_2|_H |z_1 - z_2|_V.$$

De l'hypothèse (3.1.5.c), on en déduit

$$(3.1.19) \quad j(g_1, z_2) - j(g_1, z_1) + j(g_2, z_1) - j(g_2, z_2) \leq \tilde{M} |g_1 - g_2|_V |z_1 - z_2|_V$$

L'inégalité suivante est une conséquence de (3.1.16) – (3.1.19)

$$\begin{aligned} M |z_1 - z_2|_V^2 &\leq C_1 |f_1 - f_2|_V |z_1 - z_2|_V + C_2 |\eta_1 - \eta_2|_H |z_1 - z_2|_V \\ &\quad + \tilde{M} |g_1 - g_2|_V |z_1 - z_2|_V, \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat

$$(3.1.20) \quad |z_1 - z_2|_V \leq C (|f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_H + |g_1 - g_2|_V).$$

D'où la régularité : $z_{\eta g} \in C(0, T; V)$.

De plus, en tenant compte de la condition (3.1.9), on peut vérifier facilement que la fonction $x_{\eta g} \in C^1(0, T; V)$, donnée par :

$$(3.1.21) \quad x_{\eta g}(t) = x_0 + \int_0^t z_{\eta g}(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

est une solution unique du problème $P_{\eta g}$. ■

On définit maintenant l'opérateur $\Lambda_\eta : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ par :

$$(3.1.22) \quad \Lambda_\eta g = x_{\eta g} \quad , \quad g \in C(0, T; V) .$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.1.3. *L'opérateur Λ_η admet un point fixe unique $g_\eta \in C(0, T; V)$.*

Démonstration. Soient $g_1, g_2 \in C(0, T; V)$ et $\eta \in C(0, T; V)$. Pour la simplicité, on pose $z_i = z_{\eta g_i} = \dot{x}_{\eta g_i}$, telle que $x_{\eta g_i}$ est la solution du problème $P_{\eta g_i}$ avec $i = 1, 2$.

On a :

$$\Lambda_\eta g_i(t) = x_{\eta g_i}(t) = x_0 + \int_0^t z_{\eta g_i}(s) ds \quad \text{pour } i = 1, 2, \forall t \in [0, T]$$

i.e.

$$\Lambda_\eta g_1(t) = x_0 + \int_0^t z_1(s) ds \quad , \forall t \in [0, T]$$

et

$$\Lambda_\eta g_2(t) = x_0 + \int_0^t z_2(s) ds \quad , \forall t \in [0, T].$$

Ce qui donne

$$\left| \Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t) \right|_V = \left| \int_0^t (z_1(s) - z_2(s)) ds \right| \leq \int_0^t |z_1(s) - z_2(s)|_V ds ,$$

d'où l'inégalité

$$(3.1.23) \quad \left| \Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t) \right|_V \leq \int_0^t \left| z_1(s) - z_2(s) \right|_V ds,$$

il s'ensuit de la démonstration du lemme 3.1.2 :

$$\left| z_1(t) - z_2(t) \right|_V \leq C \left| g_1(t) - g_2(t) \right|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

En remplaçant dans (3.1.23), on trouve :

$$\left| z_1(t) - z_2(t) \right|_V \leq C \int_0^t \left| g_1(s) - g_2(s) \right|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Après n -itérations on obtient :

$$\left| \Lambda_\eta^n g_1(t) - \Lambda_\eta^n g_2(t) \right|_{C(0, T; V)} \leq \frac{C^n}{n!} \left| g_1 - g_2 \right|_{C(0, T; V)}$$

Ce qui montre que pour n assez grand, l'opérateur Λ_η^n est une contraction dans $C(0, T; V)$, et il résulte qu'il existe un unique point fixe $g_\eta \in C(0, T; V)$ tel que $\Lambda_\eta^n g_\eta = g_\eta$.

Mais g_η est aussi le point fixe unique de Λ_η , i.e. $\Lambda_\eta g_\eta = g_\eta$ ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.2. ■

Maintenant, on définit pour tout $\eta \in C(O, T; H)$, la fonction $x_\eta \in C^1(O, T; V)$ par :

$$(3.1.24) \quad x_\eta(t) = x_{\eta g_\eta}(t) = x_0 + \int_0^t z_{\eta g_\eta}(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

où g_η est le point fixe de Λ_η .

De (3.1.22), (3.1.24) et du lemme 3.1.3, on obtient :

$$\Lambda_\eta \mathbf{g}_\eta = \mathbf{x}_{\eta \mathbf{g}_\eta} = \mathbf{g}_\eta$$

et

$$\mathbf{x}_{\eta \mathbf{g}_\eta} = \mathbf{x}_\eta.$$

Ce qui nous permet de remarquer que

$$(3.1.25) \quad \mathbf{x}_\eta = \mathbf{g}_\eta.$$

Maintenant, on définit l'opérateur $\Lambda : C(0, T; H) \rightarrow C(0, T; H)$ par :

$$(3.1.26) \quad \Lambda \eta = G \mathbf{x}_\eta, \quad \eta \in C(0, T; H).$$

Il s'ensuit le résultat suivant :

Lemme 3.1.4. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; H)$.*

Démonstration . Soient. On note $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{\eta_i}$, $\mathbf{z}_i = \dot{\mathbf{x}}_{\eta_i}$ $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (3.1.10) - (3.1.12) et (3.1.25), il en résulte :

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \right|_H &= \left| \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{z}_1(s) ds - \mathbf{x}_0 - \int_0^t \mathbf{z}_2(s) ds \right|_H \\ &= \left| \int_0^t (\mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s)) ds \right|_H \\ &\leq \int_0^t \left| \mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s) \right|_H ds \\ &\leq C \int_0^t \left| \eta_1(s) - \eta_2(s) \right|_H ds + C \int_0^t \left| \mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s) \right|_H ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$. En utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\left| \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) \right|_H \leq C \int_0^t \left| \eta_1(s) - \eta_2(s) \right|_H ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Ce qui nous permet d'obtenir avec (3.1.4) et (3.1.26), l'inégalité

$$(3.1.27) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_H \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_H ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Finalement, le Lemme 3.1.4 est une conséquence de (3.1.27) et du théorème du point fixe de Banach. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour la démonstration du théorème 3.1.1.

Démonstration du Théorème 3.1.1.

Existence. Soit $x_{\eta^*} \in C(0, T; V)$ la fonction définie par (3.1.24) pour $\eta = \eta^*$ où η^* est le point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.1.26) et $z_{\eta^*} = \dot{x}_{\eta^*}$.

On va montrer que x_{η^*} est solution du problème P_1 . Pour cela, on remplace par $\eta = \eta^*$ et $g = g^*$ dans (3.1.10) et on trouve :

$$(3.1.28) \quad \begin{aligned} & \left\langle Az_{\eta^*}(t), z - z_{\eta^*}(t) \right\rangle_H + \left\langle \eta^*(t), z - z_{\eta^*}(t) \right\rangle_H + j(g_{\eta^*}(t), z) \\ & - j(g_{\eta^*}(t), z_{\eta^*}(t)) \geq \left\langle f(t), z - z_{\eta^*}(t) \right\rangle_V \quad \forall z \in V, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Et puisque, de (3.1.25) et (3.1.26) nous aurons $z_{\eta^*} = \dot{x}_{\eta^*}$, $\eta^* = Gx_{\eta^*}$ et $g_{\eta^*} = x_{\eta^*}$. De plus de (3.1.28), on obtient

$$(3.1.29) \quad \begin{aligned} & \left\langle Ax_{\eta^*}(t), z - \dot{x}_{\eta^*}(t) \right\rangle_H + \left\langle Gx_{\eta^*}(t), z - \dot{x}_{\eta^*}(t) \right\rangle_H + j(x_{\eta^*}(t), z) \\ & - j(x_{\eta^*}(t), \dot{x}_{\eta^*}(t)) \geq \left\langle f(t), z - \dot{x}_{\eta^*}(t) \right\rangle_V \quad \forall z \in V, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

L'existence de x_{η^*} comme solution unique du problème P_1 , est une conséquence de l'inégalité (3.1.29).

Unicité. Soit $x \in C^1(0, T; V)$ une autre solution du problème P_1 . On note par $\eta \in C(0, T; H)$ la fonction définie comme suit

$$(3.1.30) \quad \eta = Gx.$$

De (3.1.1) et (3.1.8), il résulte que x est solution du problème $P_{\eta x}$, qui d'après le lemme 3.1.2 admet une solution unique $x_{\eta x}$ et il vient

$$(3.1.31) \quad x_{\eta x} = x.$$

D'après (3.1.22), x est le point fixe de l'opérateur Λ_η , i.e. : $x = g_\eta = x_\eta$ (voir (3.1.25)).

On en déduit :

$$(3.1.24) \quad x = x_\eta$$

L'unicité du point fixe de l'opérateur Λ donne $\eta = \eta^*$ (η unique)

d'où, l'unicité de $x \in C^1(0, T; V)$ solution du problème P_1 . ■

3.3. Formulation duale du problème

Dans cette section nous allons introduire et analyser une autre formulation du problème P_1 , dite “*formulation duale*”. Pour cela on a besoin du résultat suivant :

Lemme 3.2.1. *Supposons que les conditions (3.1.3), (3.1.4) et (3.1.7) sont vérifiées. Alors, pour tout $y \in C(0, T; H)$, il existe une unique fonction $x \in C^1(0, T; H)$ telle que*

$$(3.2.1) \quad y(t) = A\dot{x}(t) + Gx(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.2.2) \quad x(0) = x_0.$$

Démonstration. Soit $y \in C(0, T; H)$. De (3.1.3), on en déduit que l'opérateur A^{-1} , inverse de A est fortement monotone et de Lipschitz.

On considère alors, l'opérateur $\phi : C(0, T; H) \rightarrow C(0, T; H)$ défini par

$$(3.2.3) \quad \phi z(t) = A^{-1}y(t) - A^{-1}G \left(x_0 + \int_0^t z(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Soient maintenant $z_1, z_2 \in C(0, T; H)$. En remplaçant dans (3.2.3), on trouve

$$\phi z_1(t) = A^{-1}y(t) - A^{-1}G \left(x_0 + \int_0^t z_1(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

et

$$\phi z_2(t) = A^{-1}y(t) - A^{-1}G \left(x_0 + \int_0^t z_2(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

De plus de (3.1.3) et (3.1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} |\phi z_1(t) - \phi z_2(t)|_H &= \left| A^{-1}G \left(\int_0^t z_1(s) ds - \int_0^t z_2(s) ds \right) \right|_H = \left| A^{-1}G \left(\int_0^t (z_1(s) - z_2(s)) ds \right) \right|_H \\ &\leq C \left| \int_0^t (z_1(s) - z_2(s)) ds \right|_H \\ &\leq C \int_0^t |z_1(s) - z_2(s)|_H ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$. D'où l'inégalité

$$(3.2.4) \quad |\phi z_1(t) - \phi z_2(t)|_H \leq C \int_0^t |z_1(s) - z_2(s)|_H ds \quad \forall t \in [0, T].$$

De plus, par réitération de (3.2.4) n -fois on obtient :

$$\left| \phi^n z_1(t) - \phi^n z_2(t) \right|_{C(0,T;H)} \leq \frac{C^n}{n!} |z_1 - z_2|_{C(0,T;H)}.$$

Cette inégalité montre bien que ϕ^n est une contraction sur $C(0,T;H)$, pour n assez grand. L'opérateur ϕ^n admet donc un seul point fixe $z^* \in C(0,T;H)$, qui est aussi le point fixe de ϕ .

Nous pouvons conclure maintenant, que la fonction $x \in C^1(0,T;H)$ donnée par $x(t) = x_0 + \int_0^t z^*(s) ds$ est l'unique solution du problème (3.2.1) - (3.2.2). ■

Pour la formulation équivalente de P_1 , le lemme (3.1.5) nous permet de définir l'opérateur $T : C(0,T;H) \rightarrow C(0,T;H)$ par

$$(3.2.5) \quad T y = x$$

Où x est l'unique solution du problème (3.2. 1) - (3.2.2).

Comme nous aurons besoin aussi, d'introduire le sous-ensemble $\Sigma(t,y)$ de H et sa fonction indicatrice définis respectivement par :

$$\Sigma(t,y) = \left\{ \sigma \in H \mid \langle \sigma, z \rangle_H + j(T y(t), z) \geq \langle f(t), z \rangle_V \right\}$$

pour tout $y \in C(0,T;H)$ et $t \in [0,T]$,

et

$$\psi_{\Sigma(t,y)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \in \Sigma(t,y) \\ +\infty & \text{si } \sigma \notin \Sigma(t,y), \end{cases}$$

pour tout $\sigma \in H$.

On note par $\partial\psi_{\Sigma(t,y)}$, le sous-différentielle de la fonction indicatrice $\psi_{\Sigma(t,y)}$.

On va considérer maintenant le problème suivant :

Problème P_2 : Trouver $y : [0,T] \rightarrow H$ tel que

$$(3.2.6) \quad y(t) \in \Sigma(t, y) \quad , \quad \frac{d}{dt}(\mathbb{T} y)(t) + \partial \psi_{\Sigma(t, y)}(y(t)) \ni 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Le lien entre les deux problèmes P_1 et P_2 est donné par le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 *Supposons que les hypothèses (3.1.3) - (3.1.7) soient satisfaites.*

1) *Soit $x \in C^1(0, T; V)$ une solution du Problème P_1 . Alors l'élément $y \in C(0, T; H)$ donné par $y = Ax + Gx$ est solution du Problème P_2*

2) *Inversement, soit $y \in C(0, T; H)$ une solution du Problème P_2 . Alors, l'élément $x = \mathbb{T} y$ est solution du Problème P_1 .*

Démonstration.

1) Soit $x \in C^1(0, T; V)$ solution de P_1 et soit la fonction $y \in C(0, T; H)$ définie par

$$(3.2.8) \quad y(t) = Ax(t) + Gx(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Il résulte de (3.1.1), (3.2.7) et (3.1.5.a) que

$$(3.2.8) \quad \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), z) - j(x(t), \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V,$$

pour tout $z \in V$ et $t \in [0, T]$.

Si on pose $z = 2\dot{x}(t)$ puis $z = 0$ dans l'inégalité (3.2.8), on obtient respectivement

$$\langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), 2\dot{x}(t)) - j(x(t), \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V$$

et

$$-\langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H - j(x(t), \dot{x}(t)) \geq -\langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Ce qui est identique à :

$$\langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V$$

et

$$\langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) \leq \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

De ce qui précède, on obtient l'égalité

$$(3.2.9) \quad \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) = \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V \quad \forall t \in [0, T],$$

ce qui montre que $y(t) \in \Sigma(t, y)$ pour tout $t \in [0, T]$, avec $x \in C^1(0, T; V)$ et $y \in C(0, T; H)$ qui vérifient $x = \mathbb{T} y$.

Du fait que $\dot{x}(t) \in V$ pour tout $t \in [0, T]$, alors :

$$(3.2.10) \quad \langle z, \dot{x}(t) \rangle_H + j(\mathbb{T} y(t), \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V \quad \forall z \in \Sigma(t, y)$$

On soustraire (3.2.9) de (3.2.10) et on trouve :

$$\langle z - y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(\mathbb{T} y(t), \dot{x}(t)) - j(x(t), \dot{x}(t)) \geq 0 \quad \forall z \in \Sigma(t, y),$$

i.e.

$$\langle z - y(t), \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0 \quad \forall z \in \Sigma(t, y), \quad t \in [0, T].$$

Ce qui est équivalent à l'inégalité

$$\left\langle \frac{d}{dt} x(t), z - y(t) \right\rangle_H \geq 0 \quad \forall z \in \Sigma(t, y), \quad t \in [0, T].$$

En introduisant (3.2.5), il résulte

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\mathbb{T} y)(t), z - y(t) \right\rangle_H \geq 0 \quad \forall z \in \Sigma(t, y), \quad t \in [0, T],$$

ce qui montre que y est solution du Problème P_2 .

2) *Inversement*, la démonstration de la réciproque se fait en *deux étapes*.

- *Première étape :*

Dans cette étape , nous supposons que $y \in C(0, T; H)$ solution de P_2 , donc y vérifie :

$$\left\langle z - y(t), \frac{d}{dt}(\mathbb{T} y)(t) \right\rangle_H \geq 0 ,$$

pour tout $z \in \Sigma(t, y)$ et $t \in [0, T]$.

Et puisque $x = \mathbb{T} y$, alors :

$$(3.2.11) \quad \langle z - y(t), \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0 \quad \forall z \in \Sigma(t, y), t \in [0, T].$$

Soit $t \in [0, T]$, au début on va montrer que $x \in C^1(0, T; V)$.

Pour tout $z \in V^\perp$ et $z' \in V$ on a :

$$\langle y(t), z' \rangle_H + \langle z, z' \rangle_H + j(\mathbb{T} y(t), z') \geq \langle f(t), z' \rangle_V$$

et

$$\langle y(t), z' \rangle_H - \langle z, z' \rangle_H + j(\mathbb{T} y(t), z') \geq \langle f(t), z' \rangle_V,$$

avec $\langle z, z' \rangle_H = 0$

i.e.

$$\langle y(t) + z, z' \rangle_H + j(\mathbb{T} y(t), z') \geq \langle f(t), z' \rangle_V$$

et

$$\langle y(t) - z, z' \rangle_H + j(\mathbb{T} y(t), z') \geq \langle f(t), z' \rangle_V$$

Ces deux inégalités montrent que

$$y(t) \pm z \in \Sigma(t, y) \quad \forall z \in V^\perp.$$

De plus, si on remplace $z = y(t) \pm z$ dans (3.2.11), on trouve respectivement :

$$\langle z, \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0$$

et

$$\langle -z, \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0$$

pour tout $z \in V^\perp$.

Ce qui est équivalent à

$$\langle z, \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0$$

et

$$\langle z, \dot{x}(t) \rangle_H \leq 0$$

pour tout $z \in V^\perp$.

D'où le résultat :

$$\langle z, \dot{x}(t) \rangle_H = 0 \quad \forall z \in V^\perp$$

Ce résultat affirme que $\dot{x}(t) \in V^{\perp\perp}$, et en utilisant (3.1 .7) il vient $\dot{x}(t) \in V$.

La définition de l'opérateur \mathbb{T} et tenant compte de $\dot{x}(t) \in V$ conduit à $x \in C^1(0, T; V)$, ce qui achève la *première étape* de la démonstration de la réciproque.

- *Deuxième étape :*

Maintenant, on va prouver que x est solution de P_1 .

Puisque $j(x(t), \cdot)$ est sous-différentiable au point $\dot{x}(t) \in V$. Alors, il existe une fonction $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow H$ telle que :

$$j(x(t), z) - j(x(t), \dot{x}(t)) \geq \langle \tilde{z}(t), z - \dot{x}(t) \rangle_H \quad \forall z \in V,$$

Cette inégalité nous conduit à

$$(3.2.12) \quad \langle f(t) - \tilde{z}(t), z - \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), z) - j(x(t), \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), z - \dot{x}(t) \rangle_V \quad \forall z \in V.$$

En substituant $z = 2\dot{x}(t)$ et $z = 0$ dans (3.2.12), on trouve :

$$\langle f(t) - \tilde{z}(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) \geq \langle f(t), z - \dot{x}(t) \rangle_V \quad \forall z \in V$$

et

$$\langle f(t) - \tilde{z}(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) \leq \langle f(t), z - \dot{x}(t) \rangle_V \quad \forall z \in V.$$

D'où le résultat

$$(3.2.13) \quad \langle f(t) - \tilde{z}(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) = \langle f(t), z - \dot{x}(t) \rangle_V \quad \forall z \in V.$$

On additionne (3.2.12) et (3.2.13) et on obtient :

$$\langle f(t) - \tilde{z}(t), z \rangle_H + j(x(t), z) \leq \langle f(t), z \rangle_V \quad \forall z \in V.$$

Il résulte donc

$$f(t) - \tilde{z}(t) \in \Sigma(t, y).$$

Pour tout $z \in \Sigma(t, y)$, $t \in [0, T]$ on a :

$$\langle z - y(t), \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0,$$

avec $y \in C(0, T; H)$ solution de P_2 .

Si on prend $f(t) - \tilde{z}$ comme fonction test dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$\langle f(t) - \tilde{z}(t) - y(t), \dot{x}(t) \rangle_H \geq 0,$$

i.e.

$$\langle f(t) - \tilde{z}, \dot{x}(t) \rangle_H \geq \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H.$$

Mais, (3.2.13) implique que :

$$\langle f(t) - \tilde{z}(t), \dot{x}(t) \rangle_H = \langle f(t), z - \dot{x}(t) \rangle_V - j(x(t), \dot{x}(t)) \quad \forall z \in V,$$

ce qui nous donne avec l'inégalité précédente :

$$\langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V \geq \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) \quad \forall z \in V.$$

Et puisque, $y(t) \in \Sigma(t, y)$, $\dot{x}(t) \in V$ et $\mathbb{T} y = x$, alors

$$(3.2.14) \quad \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), \dot{x}(t)) \leq \langle f(t), \dot{x}(t) \rangle_V$$

et

$$(3.2.15) \quad \langle y(t), z \rangle_H + j(x(t), z) \leq \langle f(t), z \rangle_V \quad \forall z \in V$$

De (3.2.14) et (3.2.15) on obtient l'inégalité

$$(3.2.16) \quad \langle y(t), z - \dot{x}(t) \rangle_H + j(x(t), z) - j(x(t), \dot{x}(t)) \leq \langle f(t), z - \dot{x}(t) \rangle_H \quad \forall z \in V.$$

Finalement, (3.2.16) et (3.2.1) et (3.1.5.a) prouvent l'existence de $y(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui justifie (3.1.1) et puisque l'égalité $x = \mathbb{T} y$ implique (3.1.2), il résulte que x est solution du Problème P_1 .

Et donc la *deuxième étape* de la réciproque est démontrée. ■

Remarque 3.2.3. Le problème P_2 est considéré comme *formulation duale du problème d'évolution* P_1 . De plus les Théorèmes 3.1.1 et 3.2.2 impliquent que sous les hypothèses (3.1.3)-(3.1.7) le Problème P_2 admet une solution unique $y \in C(0, T; H)$.

3.4. Application en mécanique de contact

Dans cette section on présente un exemple mécanique qui motive la généralisation étudiée précédemment dans ce dernier chapitre et qui peut servir comme un champ d'application des résultats obtenus précédemment.

Ce problème modélise l'évolution quasistatique d'un corps viscoélastique en contact avec frottement avec une fondation, sous l'action des forces extérieures.

Le contexte physique est le suivant :

Le corps viscoélastique occupant le domaine Ω dans \mathbb{R}^N ($N = 2, 3$), est soumis à des forces de volumes et des tractions superficielles.

Nous sommes intéressés par le processus d'évolution quasistatique résultant de l'état mécanique du corps sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Nous supposons qu'une force de volume de densité f_0 agit dans $\Omega \times (0, T)$. La frontière Γ de Ω est supposée de Lipschitz et est divisée en trois parties disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , tel que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Le corps est serré à $\Gamma_1 \times (0, T)$ et donc le champ de déplacement disparaît là où les tractions superficielles de densité agissent sur $\Gamma_2 \times (0, T)$.

Par conséquent, nous allons imposer sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ des conditions aux limites de contact avec frottement.

Le problème mécanique peut-être formulé mathématiquement comme suit :

Problème P : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_N$ tels que :

$$(3.3.1) \quad \sigma(t) = A(\varepsilon(\dot{u})) + G(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.3.2) \quad \text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.3.3) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(3.3.4) \quad \sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(3.3.5) \quad u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Maintenant on note par H l'espace de Hilbert

$$H = \left\{ \tau = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j = 1, \dots, IN \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx,$$

et on présente les hypothèses liées au problèmes qu'on va étudier.

$$(3.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} : \Omega \times \mathbf{S}_N \rightarrow \mathbf{S}_N \text{ et} \\ (a) \text{ il existe } L_A > 0 \text{ t.q:} \\ \quad | \mathbf{A}(x, \varepsilon_1) - \mathbf{A}(x, \varepsilon_2) | \leq L_A \mathbf{A} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{S}_N, \text{ p.p dans } \Omega, \\ (b) \text{ il existe } M > 0 \text{ t.q:} \\ \quad (\mathbf{A}(x, \varepsilon_1) - \mathbf{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq M |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{S}_N \text{ p.p dans } \Omega, \\ (c) \quad x \mapsto \mathbf{A}(x, \varepsilon) \\ \quad \text{est une fonction mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbf{S}_N; \\ (d) \quad x \mapsto \mathbf{A}(x, 0) \in H. \end{array} \right.$$

$$(3.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} : \Omega \times \mathbf{S}_N \mapsto \mathbf{S}_N \text{ et} \\ (a) \text{ il existe } \tilde{L} > 0 \text{ t.q:} \\ \quad | \mathbf{G}(x, \varepsilon_1) - \mathbf{G}(x, \varepsilon_2) | \leq \tilde{L} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{S}_N \text{ p.p dans } \Omega, \\ (b) \quad x \mapsto \mathbf{G}(x, \varepsilon) \\ \quad \text{est une fonction mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbf{S}_N; \\ (c) \quad x \mapsto \mathbf{G}(x, 0) \in H. \end{array} \right.$$

Alors, on considère les deux opérateurs $A : H \rightarrow H$ et $G : H \rightarrow H$ tel que les hypothèses (3.1.3) et (3.1.4) soient satisfaites.

On suppose aussi que les forces de corps et de traction satisfont :

$$(3.3.8) \quad f_0 \in C(0, T, H) \quad f_2 \in C(0, T, L^2(\Gamma_2)^N)$$

$$(3.3.9) \quad g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

L'exemple de conditions aux limites de contact avec frottement est le suivant.

Exemple : Contact bilatéral avec frottement de Tresca

Cet exemple porte sur le Problème 1 posé dans le chapitre 1, qui modélise un problème mécanique de contact bilatéral avec frottement de Tresca

$$(3.3.10) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

où g est le frottement de la frontière.

Au début, on pose

$$U = \left\{ v \in H^1(\Omega)^N \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \right\},$$

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \varphi(v) = \int_{\Gamma_3} g |v_\tau| da,$$

$$L : [0, T] \times U \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad L(t, v) = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_3} f_2(t) \cdot v da.$$

On peut vérifier facilement que, si le couple $\{u, \sigma\}$ de fonctions régulières satisfait (3.3.1) – (3.3.4) et (3.3.10) .

Pour cela nous aurons d'une part

$$(3.3.11) \quad u(t) \in U$$

D'autre part :

Soit $v \in U$, en utilisant la formule de Green, on trouve

$$\langle \sigma v, \gamma(v - \dot{u}(t)) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + \langle \text{Div} \sigma, v - \dot{u}(t) \rangle_H$$

Et puisque

$$\langle \sigma v, \gamma(v - \dot{u}) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma v (v - \dot{u}) ds = \int_{\Gamma_1} \sigma v (v - \dot{u}) ds + \int_{\Gamma_2} \sigma v (v - \dot{u}) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma v (v - \dot{u}) ds,$$

il vient

$$\langle \sigma v, \gamma(v - \dot{u}) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_{\Gamma_2} f(v - \dot{u}) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma v (v - \dot{u}) ds.$$

Sur Γ_3 on a :

$$\begin{aligned} \sigma v \cdot (v - \dot{u}) &= \sigma_\nu (v_\nu - \dot{u}_\nu) + \sigma_\tau (v_\tau - \dot{u}_\tau) \\ &= \sigma_\tau v_\tau - \sigma_\tau \dot{u}_\tau \end{aligned}$$

De l'inégalité de Schwartz et de (3.3.10) il résulte que sur Γ_3 :

$$\sigma v \cdot (v - \dot{u}) \geq g |\dot{u}_\tau| - g |v_\tau|.$$

On remplace et on trouve

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + \langle \text{Div} \sigma, v - \dot{u} \rangle_H \geq \int_{\Gamma_2} f_2(v - \dot{u}) ds + g \int_{\Gamma_2} |\dot{u}_\tau| ds - g \int_{\Gamma_3} |v_\tau| ds.$$

Comme

$$- \operatorname{Div} \sigma = f_0,$$

alors

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H - \langle f_0, v - \dot{u} \rangle_H \geq \int_{\Gamma_2} f_2(v - \dot{u}) ds + g \int_{\Gamma_2} |\dot{u}_\tau| ds - g \int_{\Gamma_3} |v_\tau| ds$$

i.e.

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}) \rangle_H + g \int_{\Gamma_2} |v_\tau| ds - g \int_{\Gamma_3} |\dot{u}_\tau| ds \geq \langle f_0, v - \dot{u} \rangle_H + \int_{\Gamma_2} f_2(v - \dot{u}) ds$$

Mais, on a pour tout $v \in U$ et $t \in [0, T]$,

$$\varphi(v) = \int_{\Gamma_3} g |v_\tau| da \quad , \quad \varphi(\dot{u}(t)) = \int_{\Gamma_3} g |\dot{u}_\tau(t)| da$$

et

$$L(t, v - \dot{u}(t)) = \langle f_0, v - \dot{u}(t) \rangle_H + \int_{\Gamma_2} f_2(v - \dot{u}(t)) ds,$$

il résulte que $\{u, \sigma\}$ vérifie

$$(3.3.12) \quad \langle (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))) \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(\dot{u}(t)) \geq L(t, v - \dot{u}(t)) \quad \forall v \in U, t \in [0, T].$$

En utilisant (3.3.1) - (3.3.5) et (3.3.12) on obtient ensuite la formulation du problème mécanique (3.3.1) – (3.3.5) et (3.3.10) :

Trouver la champs de déplacement $u : [0, T] \rightarrow U$ tel que

$$(3.3.13) \quad \langle A \varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + \langle G \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(\dot{u}(t)) \geq L(t, v - \dot{u}(t)) \quad \forall v \in U, t \in [0, T],$$

$$(3.3.14) \quad u(0) = u_0.$$

Maintenant, on considère le sous-espace V de H donné par

$$(3.3.15) \quad V = \varepsilon(U) = \{ \varepsilon(v) \mid v \in U \}$$

Nous nous rappelons que U est un espace de Hilbert équipé du produit scalaire de $H^1(\Omega)^N$. De plus, en utilisant l'inégalité de Korn, il s'ensuit que V est un sous-espace de Hilbert de H et l'opérateur $\varepsilon : U \rightarrow V$ est un opérateur linéaire et continu.

On note par ε^{-1} l'inverse de ε et on obtient $\varepsilon^{-1} : V \rightarrow U$ qui est un opérateur linéaire et continu aussi. Cette propriété nous permet de reprendre (3.3.13) – (3.3.14) en considérant comme inconnue le tenseur $\varepsilon(u)$.

En utilisant les notations précédentes, il résulte que le problème variationnel (3.3.13) – (3.3.14) et de la forme (3.1.1) – (3.1.2) où

$$(3.3.15) \quad x = \varepsilon(u), \quad x_0 = \varepsilon(u_0)$$

$$(3.3.16) \quad \langle f, z \rangle_V = L(t, \varepsilon^{-1}(z)) \quad \forall z \in V, t \in [0, T]$$

$$(3.3.17) \quad j(w, z) = \begin{cases} \varphi(\varepsilon^{-1}(z)) & \text{si } z \in V \\ +\infty & \text{si } z \notin V \end{cases} \quad \forall w \in H.$$

On voit bien que, dans cet exemple la fonction j ne dépend que du deuxième argument z , ce qui nous permet de poser $j(z) = j(w, z)$ pour tout $w, z \in H$.

Existence et unicité de la solution $u \in C^1(0, T; U)$:

D'une part, et de la définition de la fonction j , on déduit que

$$D_2 j(w, \cdot) = V \quad \forall w \in H,$$

d'où l'hypothèse (3.1.5.a) est vérifiée.

De (3.3.9) i.e. $g \in L^\infty(\Gamma_3)$, $g \geq 0$ p.p sur Γ_3 ,

on peut conclure que $j(w, \cdot)$ est une semi-norme dans V pour tout $w \in H$, et donc l'hypothèse (3.1.5.b) est vérifiée.

Comme on peut facilement montrer que la fonction j vérifie (3.1.5.c).

D'autre part, de (3.3.8) i.e. $f_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)^N)$, $f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma)^N)$

et de

$$\langle f(t), z \rangle_V = \int_{\Omega} f_0 \cdot z \, ds + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot z \, da \quad \forall z \in V \quad , \quad \forall t \in [0, T],$$

on obtient

$$f \in C(0, T; V),$$

d'où (3.1.6) est vérifiée.

Il nous reste à montrer que l'hypothèse (3.1.7) est vérifiée.

Si le déplacement initial satisfait

$$(3.3.18) \quad u_0 \in U,$$

et avec (3.3.14), nous aurons :

$$u_0 \in U \Rightarrow \varepsilon(u_0) \in V,$$

ce qui nous donne

$$x_0 \in V.$$

D'où (3.1.7) est vérifiée.

De ce qui précède et en appliquant le Théorème 3.1.1, on conclut bien l'existence et l'unicité de la solution u du problème (3.3.13) - (3.3.14) tel que $u \in C^1(0, T; U)$.

Dans ce qui suit, on note par $\Sigma(t)$ l'ensemble défini par

$$(3.3.19) \quad \Sigma(t) = \left\{ \tau \in H \mid \langle \tau, z \rangle_H + j(z) \geq \langle f(t), z \rangle_V \quad \forall z \in V \right\} \quad \forall t \in [0, T].$$

La formulation précédente du problème (3.3.13) - (3.3.14) est représenté comme évolution d'inégalité variationnelle pour le champs de déplacement u . C'est la représentation primaire du problème mécanique (3.3.1) - (3.3.5) et (3.3.10).

De la section 3.3, il résulte la formulation duale de ce problème, en terme de contraintes, donnée par : trouver un champs de contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow H$ tel que

$$(3.3.19) \quad \sigma(t) \in \Sigma(t), \quad \left\langle \frac{d}{dt}(\mathbb{T} \sigma)(t), \tau - \sigma(t) \right\rangle_H \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t), \quad t \in [0, T].$$

Ici pour $\sigma \in C(0, T; H)$, $\mathbb{T} \sigma$ désigne la fonction unique $\tau \in C^1(0, T; H)$ qui satisfait

$$(3.3.20) \quad \sigma(t) = \mathbf{A} \dot{\tau}(t) + \mathbf{G}\tau(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.3.21) \quad \tau(0) = \varepsilon(u_0).$$

La remarque 3.2.3, nous permet de confirmer que la deuxième formulation (3.3.19) admette $\sigma \in C(0, T; H)$ comme solution unique.

Finalement, on peut conclure que conformément aux hypothèses (3.3.6) - (3.3.9) et (3.3.18), le problème mécanique (3.3.1) - (3.3.5) et (3.3.10) admet une solution unique $\{u, \sigma\}$ avec les régularité $u \in C^1(0, T; H)$, $\sigma \in C(0, T; H)$.

Bibliographie

- [1] R. S. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).
- [2] A. Amassad et M. Sofonea, *Analysis of a Quasistatic Viscoplastic Problem Involving Tresca Friction Law*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **4** (1) (1998), 55 - 72.
- [3] A. Amassad et M. Sofonea, *Analysis of some Nonlinear Evolution Systems Arising in Rate Type Viscoelasticity*, An added volume to *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (1998), 58 - 71.
- [4] K. T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, *A Dynamic Thermoviscoelastic Body in Frictional Contact with a Rigid Obstacle*, to appear in *Euro. J. Appl. Math.*
- [5] B. Awbi, O. Chau, M. Sofonea, *Variational Analysis of a Frictional Ccontact Problem for Viscoelastic Bodies*, preprint.
- [6] B. Awbi, M. Shillor and M. Sofonea, *Dual Formulation of a Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Tresca's Friction Law*, *Applicable Analysis* , (2001) , USA.
- [7] A. Bassam, *Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes Viscoélastiques et Viscoplastiques avec Frottement*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Perpignan (2001).
- [8] S. Boutechebak & N. Leбри, *Frictionless contact problem non linear elasticity*, *Anal. Univ. Oradea.Fasc. Math.* Vol. 15 (2008).

- [9] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle , Théorie et Applications* , Masson, Paris (1987).
- [10] H. Brezis, *Problèmes unilatéraux*, J.M.P.A., 51 (1972) 1-168
- [11] H. Brezis, *Equations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité*, Ann. Inst. Fourier, 18 (1968) 115-175.
- [12] O. Chau, W. Han, M. Sofonea, *Analysis and Approximation of a Viscoelastic Contact Problem with Slip Dependent Friction*, to Appear in Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems.
- [13] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [14] M. Cocu, E. Pratt, M. Raous, *Formulation and Approximation of Quasistatic Frictional Contact*, Int. J. Engn. Sci. 24 (1984), 783–798.
- [15] S.Djabi et M. Sofonea, *A Monotony Method in Quasi-Static Material with Internal State Variables*. Université Blaise Pascal (Clermont II) Série math.1989.
- [16] Djabi, S., *Méthodes fonctionnelles en viscoplasticité*, thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, 1994.
- [17] S. Drabla, *Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Elasticité et en Viscoplasticité*, Thèse Ph.D. , Université de Sétif, (1999). Algérie.
- [18] G. Duvaut, *Loi de Frottement Non Locale*, J. Méc. Thé. Appl. Special issue, (1982), 73–78.
- [19] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [20] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6 (1987), 383-407.

- [21] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, (1984).
- [22] Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémolières, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, Dunod. Paris, Tomes **I**, **II** (1976).
- [23] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problem in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, December 14, (2000).
- [24] W. Han and M. Sofonea, *Evolutionary Variational Inequalities Arising in Viscoelastic Contact Problems*, to appear in SIAM Journal of Numerical Analysis.
- [25] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, *A Viscoelastic Frictionless Contact Problem with Adhesion*, *Applicable Analysis*, (80) (2001), 233-256.
- [26] N. Kikuchi and T. J. Oden, *Contact Problems in Elasticity, A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, (1988).
- [27] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, *A Global Existence Result for the Quasistatic Frictional Contact Problem with Normal Compliance*, in *Unilateral Problems in Structural Analysis*, 4, G. Del Piero and F. Maceri, eds, Birkhäuser, Boston 1991, 85–111.
- [28] N. Kikuchi and T. J. Oden, *Contact Problems in Elasticity*, SIAM, Philadelphia 1988.
- [29] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequality and their Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [30] A. Klarbring, A. Mikeli_c and M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, *Int. J. Engng. Sci.* **26** (8) (1988), 811 - 832.
- [31] A. Klarbring, A. Mikeli_c and M. Shillor, *The Rigid Punch Problem with Friction*, *Int. J. Engng. Sci.* **29** (6) (1991), 751 - 768.

[32] N. Lebri, S. Djabi and S. Boutechebak, *Bilateral Contact with Tresca's Friction Law with Internal State Variables*, Applied Mathematical Sciences, **2**, (10) (2008), 479 - 488

[33] N. Lebri , S. Djabi *Frictional bilateral contact in viscoplasticity*. Far East J. Math. Sci. (FJMS) 29 (2), 467-479(2008).

[34] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Gauthiers-Villars (1969).

[35] J. A. C. Martins et T. J. Oden, *Existence and Uniqueness Results for Dynamic Contact Problems with Nonlinear Normal and Friction Interface Laws*, Nonlin. Anal. **11** (3) (1987), 407 - 428.

[36] A. Mateiy R. Ciurceaz *Weak Solvability For a Class of Contact Problem*, Annals of the Academy of Romanian Scientists, Series on Mathematics and its Applications **2**, (1) (2010).

[37] D. Motreanu et M.Sofonea, *Quasivariational Inequalities and Applications in Friction Contact Problem with Normal Compliance*, Advance in Mathematical Sciences and Applications, (2000).

[38] S. Nicaise, *Analyse Numérique et Equation aux Dérivées Partielles*, Dunod, Paris, (2000).

[39] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications* Birkhäuser, Basel 1985. Vol. 51 (2000) Evolution Equations for Viscoelastic Contact Problems 235

[40] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, *A consistent Model Coupling Adhesion, Friction, and Unilateral Contact*, Comput. Meth. Appl. Mech.Engng., 177 (1999), 383–399.

- [41] M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau, *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York 1995.
- [42] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *A Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Friction and Damped Response*, *Applicable Analysis* **68** (1988), 409-422.
- [43] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *Quasistatic Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction*, *Journal of Elasticity*, **51** (1998), 105 - 126.
- [44] M. Rochdi, *Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Viscoplasticité*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Perpignan, (1997).
- [45] M. Shillor, M. Sofonea, *A Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Friction*, to appear in *Int. J. Engn. Sci.*
- [46] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, *Lecture Notes in Physics* 655, Springer, Berlin, 2004.
- [47] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, *Mathematical Surveys and Monographs*, 49, American Mathematical Society, USA (1997).
- [48] M. Sofonea, *Problèmes Non-Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister en Mathématiques Appliquées, Université F. Abbes, Sétif, Algérie (1993).
- [49] B. Teniou, *Etude fonctionnelle des Problèmes Elasto-Visco-Plastiques*, Thèse Ph.D., Université de Constantine, Algérie, (2000).
- [50] E. Zeidher, *Applied Functional Analysis, Application to Mathematical Physics*, *Applied Mathematical Sciences*, 108, (2007), Springer-Verlag. New York.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude de quelques problèmes aux limites de contact avec frottement entre un corps déformable et une base. Ici nous considérons des lois de comportement non linéaire des processus quasistatiques, les résultats que nous obtenons concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles et la dépendance continue par rapport aux données. Le mémoire est composée de trois chapitres. Dans le premier chapitre on introduit des notations générales de la mécanique ainsi que des notations mathématiques, nous présentons des divers modèles mécaniques de contact étudiés et nous rappelons quelques outils d'analyse fonctionnelle. Le deuxième chapitre est destiné à l'étude d'un problème de contact bilatéral avec frottement de Tresca. Finalement dans le troisième chapitre il s'agit d'avoir une vision plus globale du travail effectué, on présente des résultats abstraits dans le but de formuler le problème mécanique précédent dans un cadre général.

Mots-clés : Viscoélasticité, contact bilatéral avec frottement, loi de Tresca, inéquation variationnelle, solution faible, point fixe, sous-différentiel, problème dual.

Abstract

This memorandum concerns the study of some boundary contact problems with friction between a deformable body and a foundation. Here we do not consider linear laws of behavior a quasistatic process, results which we obtain concern the existence and the uniqueness of the weak solution and the continuous dependence with respect to the data. The memorandum is divided into three chapters. In the first chapter we introduce general mechanical notation as well as mathematical notation. We present different mechanical contact models and we recall some tools of functional analysis. The second chapter is intended for the study of a problem of bilateral contact with Tresca's friction law. In the third chapter we are interested in having a more global vision of the make work, we present results abstracted with the aim of formulating the previous mechanical problem in a general frame.

Key-words: Viscoelasticity , bilateral contact with friction, Tresca's friction law, variational inequality, week solution, fixed point, subdifferential, dual problem.

Conclusion

La généralisation obtenue dans le dernier chapitre peut être étendue aussi, pour d'autres exemples comme le contact avec frottement de Coulomb avec contrainte normale imposée et contact avec compliance normal avec frottement. Il on reste de trouver l'existence et l'unicité du problème d'évolution abstraits par la méthode de contrôle variationnel ainsi que l'étude numérique de ces problèmes.