République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique

N° d'ordre : M ..../2013

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques
Option : Algèbre et Théorie des Nombres

SUR
le bêta-développement
en base algébrique

Présenté par : *Mohammed-Cherif* BAHI

Devant le Jury composé de:

Lemnouer NOUI	Président	Pr. Université de Batna
Toufik ZAIMI	Encadreur	MCA Université d'Oum El Bouaghi
E. Sadat TOUAFEK	Examinateur	MCA Université de Jijel
Abdelkrim ALIOUCHE	Examinateur	MCA Université d'Oum El Bouaghi
Lemnouer ZEDDAM	Examinateur	MCA Université de Msila

Soutenu le : 09 / 05 / 2013

2012/2013

Table des matières

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique
No d'ordre : M .../2013

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Option : Algébre et Théorie des Nombres

Sur
Le Béta-développement En Base Algebrique

Présenté par : Mohammed-Cherif BAHI
Devant le Jury composé de :

Lemnouer NOUI	Président	Pr. Université de Batna
Toufik ZAIMI	Encadreur	MCA Université d'Oum El Bouaghi
E. Sadat TOUAFEK	Examinateur	MCA Université de Jijel
Abdelkrim ALIOUCHE	Examinateur	MCA Université d'Oum El Bouaghi
Lemnouer ZEDDAM	Examinateur	MCA Université de Msila

Soutenu le : 09 / 05 / 2013

Introduction

L'écriture décimale est la méthode la plus usuelle de représentation des nombres réels : tout réel s'écrit sous forme d'une série de puissances entières de 10. Mais la base 10, dûe aux Arabes, n'était pas la seule base utilisée pour la représentation des nombres. En effet, les civilisations anciennes avaient utilisé des bases diverses ; par exemple la base 60 était l'outil des Babyloniens, alors que les Mayens avaient utilisé la base vingt. Outre l'informatique, où la base 2 est fondamentale, de nos jours, les mathématiciens s'intéressent aux représentations dans des bases réelles $\beta > 1$, non nécessairement entières. De telles représentations sont présentes dans beaucoup de domaines des mathématiques comme l'analyse combinatoire, la théorie érgodique, les systèmes dynamiques, la théorie des nombres ... et en plus de leurs intérets théoriques, elles ont des applications en mathématiques et en informatique.

Le présent mémoire est consacré à l'étude d'une représentation particulière, dite béta-développement. C'est une généralisation de la représentation décimale usuelle, et est actuellement la plus étudiée, parmi les représentations connues. Elle provient des orbites de la transformation $x \mapsto \beta x \bmod 1$ de l'intervalle unité, et avait été introduite par A. Rényi vers la fin des années cinquantes. Dans un article, paru en 1980, K. Schmidt a montré que si l'ensemble des réels qui ont un béta-développement périodique est le corps $\mathbb{Q}(\beta)$ obtenu par adjonction du nombre β et du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, alors β est ou bien un nombre de Pisot ou bien de Salem. La réciproque de cette dernière proposition étant vraie pour des nombres de Pisot, K. Schmidt a conjecturé qu'elle l'est également pour des nombres de Salem. Rappelons que le réel $\beta > 1$ est dit nombre de Pisot (resp., de Salem), s'il est un entier algébrique, et si ses conjugués, autres que lui-même, sont de module inférieur à 1 (resp., autres que lui-même, sont de module inférieur ou égal à 1, avec au moins un conjugué de module 1). Dans le but de répondre à cette conjecture, plusieurs auteurs, ont apporté des réponses partielles, et ont considéré des questions analogues sur les béta-développements finis ou entiers. C'est dans cette direction que ce travail est fait.

Dans le premier chapitre, on rappelle des notions de base sur la représentation usuelle en base entière. Ensuite, on généralise ces propriétés, en considérant des notions élémentaires du béta-développement. L'accent est surtout mis sur l'algorithme qui permet la détermination d'un tel développement. Enfin, dans le dernier paragraphe on rappelle quelques résultats connus sur un ensemble remarquable d'entiers algébriques : les nombres de Pisot et les nombres de Salem. On donne en particulier une démonstration explicite de la fameuse construction de Salem, et qui dit que tout nombre de Pisot est un point d'accumulation de l'ensemble des nombres de Salem.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à une étude plus approfondie du béta-développement en base réelle. Après avoir prouvé, dans le premier paragraphe, des conditions necessaires et suffisantes pour qu'une suite d'entiers rationnels soit associée au béta-developpement d'un réel, on cite dans le second, certaines popriétés des suites associées aux béta-développements périodiques ou finis. On clos ce chapitre par montrer quelques résultats liés à la distribution dans le plan complexe des conjugués des nombres de Parry. On montre, en particulier, qu'un nombre de Pisot est un nombre de Parry. Rappelons que la base $\beta > 1$, est dite nombre de Parry, si le béta-développement de sa partie fractionnaire est périodique ; les nombres de Parry (dits aussi les nombres-béta), ont été définis par W. Parry, et qui a notamment montré qu'ils sont denses dans l'intervalle $[1, \infty[$.

Enfin dans le dernier chapitre on montre quelques applications des notions précédement vues à l'étude du béta-développement en base de Pisot ou bien de Salem. Après avoir rappellé, dans le premier paragraphe, des liens entre les notions les plus fondamentales de cette théorie, et qui sont les suites admissibles et les nombres de Parry, on prouve dans le second les résultats de K. Schmidt, mentionnés ci-haut. L'un des corollaires qui en découle dit que tout nombre de Pisot est un nombre de Parry (ce résultat a été deja montré directement dans le chapitre 2). Le problème si les nombres de Salem sont des nombres de Parry, est un problème apparement difficile, et est un pas important dans la preuve de la conjecture de K. Schmidt. L'objet du dernier paragraphe est de donner une preuve détaillée d'un théorème de D. W. Boyd, et qui dit q'un nombre de Salem quartiques est un nombre de Parry.

Une liste de références bibliographique est donnée à la fin de ce mémoire.

Notation

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers rationnels non-négatifs
$\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers rationnels
$\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels
$\mathbb{R}$ le corps des nombres réels
$\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes
A^* l'ensemble des éléments non-nuls du sous-ensemble A de $\mathbb{C}$
A^n le produit cartésien de n copies de A, où $A \subset \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\mathbb{S}$ l'ensemble des nombres de Pisot
$\mathbb{T}$ l'ensemble des nombres de Salem
$\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres de Parry
M_α le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ d'un nombre algébrique α
$\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z
$\mathrm{Im}(z)$ la partie imaginaire d'un nombre complexe z
b-développement Le développement usuelle dans la base entière b
$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ la partie entière du réel x
$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\}$
$\{x\} = x - [x]$ est la partie fractionnaire de x
$Per(b)$ les réels ayant un développement périodique en base entière $b \geq 2$
$Fin(b)$ les réels ayant un développement fini en base entière $b \geq 2$
$Per(\beta)$ les réels qui ont un béta-développement périodique en base $\beta > 1$
$Fin(\beta)$ les réels qui ont un béta-développement fini en base $\beta > 1$

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre on étudie une représentation des nombres réels dans une base réelle $\beta > 1$, dite béta-développement. Cette représentation est une généralisation naturelle du développement des réels en base entière, et plus particulièrement la représentation décimale usuelle. A cette fin on rappelle, dans le premier paragraphe, des résultats connus sur la représentation en base entière b, dite ici $b-$développement. Ensuite et dans le pagargraphe qui suit on définit le béta-développement d'un nombre réel en base réelle quelconque $\beta > 1$, on exhibe l'algorithme qui permet la détermination d'un tel développement et on montre quelques propriétés élémentaires. On se réfère dans cette partie principalement aux papiers [5], [7], $[13-14]$, [32], $[35-36]$, et aux mémoires [1] et [16]. Enfin, dans le dernier paragraphe on rappelle quelques résultats sur un ensemble remarquable d'entiers algébriques : les nombres de Pisot et les nombres de Salem et on donne en particulier une preuves détaillée de la construction de Salem (pour plus de détails sur ce sujet voir [6], [24], [26]).

1.1 *Représentation des réels en base entière*

Pour un nombre réel α, on note respectivement, $[\alpha]$ et $\{\alpha\}$, les partie entières et fractionnaires de α. En d'autres termes $[\alpha] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \alpha\}$, où $\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers rationnels, et $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Dans ce cas le réel α s'écrit : $\alpha = a + \lambda$, où $a = [\alpha] \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \lambda = \{\alpha\} < 1$.

Pour représenter le réel α dans une base entière fixée b, commençons d'abord par la partie entière de α. Dans la suite lorsqu'on parle d'entier on veut dire entier rationnel, et on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers non-négatifs. Rappelons, qu'on utilisant simplement la division euclidienne par b, on obtient que tout entier positif n peut s'écrire sous la forme :

$$n = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \cdots + c_0$$

où les $c_j \in \{0, 1, ..., b-1\}$, pour tout $j \in \{0, ..., k\}$, et $c_k \neq 0$. De plus cette représentation de n en base b est unique. Elle est dite développement, ou plus précisément, $b-$développement, de n, et est notée $(c_k c_{k-1} \cdots c_0)_b$:

$$n = (c_k c_{k-1} \cdots c_0)_b.$$

Par convention, $0 = (0)_b$, et $-n = ((-c_k)(-c_{k-1}) \cdots (-c_0))_b$ lorsque le $b-$développement de n est $(c_k c_{k-1} \cdots c_0)_b$.

Définition 1.1.1 *Soit b un entier satisfaisant $b > 1$, et soit λ un réel avec $0 < \lambda < 1$. Une représentation de λ dans la base b, est une somme infinie de la forme $\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j}$, où les $c_j \in \mathbb{N}$, pour tout $j \geq 1$.*

Exemple 1.1.1 *En base 10 le nombre $\lambda = \frac{1}{10}$ s'écrit $\lambda = \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \cdots$ et il peut s'écrire aussi $\lambda = \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots$*

En fait un nombre réel quelconque admet plusieurs représentations dans une base fixée b. Plus précisement, d'après un résultat d'Erdös et Komornick [12] tout réel en admet une infinité. La représentation usuelle est résumée par la proposition suivante.

Proposition 1.1.1 *Soit λ un nombre réel satisfaisant $0 < \lambda < 1$, et soit b un entier vérifiant $b > 1$. Alors λ peut être représenté sous la forme : $\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j}$, où les $c_j \in \{0, 1, ..., b-1\}$, et telle que pour tout entier positif N, il existe un entier $n \geq N$ vérifiant $c_n \neq b - 1$. De plus cette représentation de λ en base b est unique.*

Preuve. Soit $c_1 = [b\lambda]$. Comme $0 \leq \lambda < 1$, alors $0 \leq c_1 = [b\lambda] \leq b - 1$. Si λ_1 désigne la partie fractionnaire de $b\lambda$, alors $\lambda_1 = b\lambda - c_1$, et $\lambda = \frac{c_1}{b} + \frac{\lambda_1}{b}$. On définit successivement c_k et λ_k pour $k \in \{1, 2, \cdots\}$, par les relations

$$c_k = [b\lambda_{k-1}] \text{ et } \lambda_k = b\lambda_{k-1} - c_k = \{b\lambda_{k-1}\}.$$

Dans ce cas $c_k \in \{0, 1, \cdots, b-1\}$, $0 \leq \lambda_k < 1$, et λ s'écrit sous la forme

$$\lambda = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_n}{b^n} + \frac{\lambda_n}{b^n},$$

où $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \diagdown \{0\}$. Comme $0 \leq \lambda_n < 1$ et $b > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{c_j}{b^j}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n}{b^n} = 0$ et on en conclut que

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{b^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j}.$$

De plus, s'il existe $N \geq 1$, tel que $c_n = b-1$ pour tout $n \geq N$, alors $\frac{\lambda_{N-1}}{b^{N-1}} = \sum\limits_{j=N}^{\infty} \frac{c_j}{b^j} = \frac{b-1}{b^N} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b^j} = \frac{1}{b^{N-1}}$, d'où la contradiction $\lambda_{N-1} = 1$. Pour montrer l'unicité de cette représentation, supposons $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{b^j}$, avec $c_j \in \{0, 1, ..., b-1\}$ et $d_j \in \{0, 1, ..., b-1\}$ et que pour tout entier positif N, il existe $n \geq N$ et $m \geq N$ tels que $c_n \neq b-1$, $d_m \neq b-1$. Pour que les deux suites $(c_j)_{j \geq 1}$ et $(d_j)_{j \geq 1}$ soient différentes il faut et il suffit qu'il existe $k \geq 1$ tel que $c_k \neq d_k$. Si les $(c_j)_{j \geq 1}$ et $(d_j)_{j \geq 1}$ ne sont pas égales, alors on choisit k le plus petit entier vérifiant $c_k \neq d_k$. Sans perte de généralité, supposons $c_k > d_k$. Alors les équations

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j - d_j}{b^j} = \frac{c_k - d_k}{b^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{c_j - d_j}{b^j},$$

donnent

$$\frac{c_k - d_k}{b^k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{d_j - c_j}{b^j}. \tag{1-1}$$

Notons aussi que

$$\frac{c_k - d_k}{b^k} \geq \frac{1}{b^k} \tag{1-2}$$

et

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{d_j - c_j}{b^j} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^j} = (b-1) \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{b^j} = \frac{1}{b^k}. \tag{1-3}$$

Il s'ensuit de $(1-1)$, $(1-2)$ et $(1-3)$ que

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{d_j - c_j}{b^j} = \frac{1}{b^k}$$

et $d_j - c_j = b-1$, pour tout $j \geq k+1$, c'est-à-dire que $d_j = b-1$, et $c_j = 0$ pour tout $j \geq k+1$; mais cela contredit l'hypothèse. Donc l'écriture de λ sous la forme $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j}$ est unique. ■

Remarque 1.1.1 *On peut utiliser la méthode de la preuve du proposition 1.1.1 pour obtenir une représentation d'un nombre réel* $0 < \lambda < 1$, *satisfaisant les conditions de la dernière proposition. Rappelons que cette représentation est dite développement de* λ *en base* b, *ou bien* b*-développement de* λ, *et est notée* $(\cdot c_1 c_2 c_3 \cdots)_b$.

Algorithme du b-développement d'un réel $\lambda \in \left]0,1\right[$.

1$-$ Initialisation.

Pour $k=0$, choix de la base b, et posons $\lambda = \lambda_0$

2$-$ Itération.

Cherchons c_k, et λ_k solutions des équations : $c_k = [b\lambda_{k-1}]$, $\lambda_k = \{b\lambda_{k-1}\}$

3$-$ Critère d'arrêt.

Si $\lambda_k = 0$, ou bien $\exists p \geq 1$ tel que $\lambda_k = \lambda_{k+p}$, sinon on pose $k = k+1$, et on retourne à l'étape 2.

Exemple 1.1.2 *Avec la notation ci–dessus, cherchons le développement du nombre* $\frac{1}{5}$ *dans la base* 7. *Alors on a* $c_1 = \left[7 * \frac{1}{5}\right] = 1$, $\lambda_1 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \left[7 * \frac{2}{5}\right] = 2$, $\lambda_2 = \frac{14}{5} - 2 = \frac{4}{5}$, $c_3 = \left[7 * \frac{4}{5}\right] = 5$, $\lambda_3 = 7 * \frac{4}{5} - 5 = \frac{3}{5}$, $c_4 = \left[7 * \frac{3}{5}\right] = 4$, $\lambda_4 = 7 * \frac{3}{5} - 4 = \frac{1}{5}$, $c_5 = \left[7 * \frac{1}{5}\right] = 1$, $\lambda_5 = 7 * \frac{1}{5} - 1 = \frac{2}{5} = \lambda_1$ *et donc*

$$\frac{1}{5} = (\cdot 12541254 \cdots)_7 .$$

Définition 1.1.2 *Le développement* $(.c_1 c_2 c_3 \cdots)_b$ *d'un réel* $\lambda \in]0,1[$ *est dit fini s'il existe un entier positif* n *tel que* $c_n = c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$. *Dans ce cas on note* $(.c_1 c_2 c_3 \cdots)_b = (.c_1 c_2 c_3 \cdots c_{n-1})_b$. *Par convention le* $b-$*développement de* 0 *est* $(.0)_b$ *ou bien* $(0)_b$.

Exemple 1.1.3 *Le développement du nombre* $\frac{3}{4}$ *en base* 10 *est obtenu par les relations :* $c_1 = \left[10 * \frac{3}{4}\right] = 7$, $\lambda_1 = \frac{30}{4} - 7 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \left[10 * \frac{1}{2}\right] = 5$, $\lambda_2 = 0$, $c_3 = 0$, *et* $\lambda_3 = 0, \ldots$ *Il s'ensuit que* $\lambda_n = \{10 * 0\} = 0$, $\forall n \geq 3$ *et* $c_n = [10 * 0] = 0$ $\forall n \geq 3$. *Donc, le développement décimal du nombre* $\dfrac{3}{4} = (.7500000 \cdots)_{10} = (.75)_{10}$.

Dans ce qui suit on va caractériser les réels qui ont un développement fini.

Proposition 1.1.2 *Soit* b *un entier, avec* $b > 1$, *et soit* $0 < \lambda < 1$. *Alors le développement de* λ *dans la base* b *est fini si et seulement si* λ *est un nombre rationnel de la forme* $\lambda = \frac{r}{s}$, *où* r *et* s *sont des entiers positifs premiers entre eux, tels que tout diviseur premier de* s *divise* b.

Preuve. Supposons que λ admet un développement fini dans la base b de la forme

$$\lambda = (\cdot c_1 c_2 c_3 \cdots c_n)_b = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_n}{b^n} = \frac{c_1 b^{n-1} + c_2 b^{n-2} + \cdots + c_n}{b^n}.$$

Alors λ est rationnel, et le dénominateur de λ est au plus divisible par les nombres premiers qui divisent b^n, c'est-à-dire, par ceux qui divisent b.
Réciproquement, supposons $0 < \lambda = \frac{r}{s} < 1$, où r et s sont des entiers positifs, et tel que tout diviseur premier de s divise b. Alors par la décomposition de s en nombres premiers, il existe un entier positif N, tel que s divise b^N. Ainsi on a $b^N \lambda = b^N \frac{r}{s} = ar$, où a est un entier positif. Soit $(a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_b$ le développement de l'entier ar dans la base b. Alors $N > m$, car sinon $ar \geq a_m b^m \geq a_m b^N \geq b^N = as \Rightarrow r \geq s$, et cela contredit l'hypothèse $\lambda = \frac{r}{s} < 1$. Il s'ensuit que

$$\lambda = \frac{ar}{b^N} = \frac{a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0}{b^N},$$

$$\lambda = \frac{0}{b} + \frac{0}{b^2} + \cdots + \frac{0}{b^{N-(m+1)}} + \frac{a_m}{b^{N-m}} + \frac{a_{m-1}}{b^{N-(m-1)}} + \cdots + \frac{a_1}{b^{N-1}} + \frac{a_0}{b^N}$$

et

$$\lambda = (\cdot 000 \cdots 0 a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_b$$

c'est-à-dire, que α admet un développement fini dans la base b. ■

Définition 1.1.3 *Le développement* $(\cdot c_1c_2c_3\cdots)_b$ *d'un réel* $\lambda\in]0,1[$ *est dit périodique s'il existe deux entiers positifs* N *et* k*, tels que* $c_{n+k}=c_n$*, pour tout* $n\geq N$*. Le plus petit entier* k *satisfaisant la dernière égalité est dit période du développement de* λ*. Dans ce cas on note* $(\cdot c_1\cdots c_{N-1}\overline{c_Nc_{N+1}\cdots c_{N+k-1}})_b$ *le développement périodique* $(\cdot c_1\cdots c_{N-1}c_N\cdots c_{N+k-1}c_N\cdots c_{N+k-1}\cdots)_b$ *de* λ*.*

Exemple 1.1.4 *Revenons à l'exemple* (1.1.2)*, et montrons par récurrence que* $\lambda_n=\lambda_{n+4},\forall n\geq 1$*. Il est clair que* $\lambda_1=\frac{2}{5}=\lambda_5$*,et la relation est vraie pour* $n=1$*. Si* $\lambda_n=\lambda_{n+4}$*, pour un certain* $n\geq 1$*, alors* $\lambda_{n+1}=\{7\lambda_n\}=\{7\lambda_{n+4}\}=\lambda_{n+5}$*, et donc* $\lambda_n=\lambda_{n+4},\forall n\geq 1$*. Il s'ensuit immédiatement que* $c_{n+1}=[7\lambda_n]=[7\lambda_{n+4}]=c_{n+5}$*, et donc* $c_n=c_{n+4}$*,* $\forall n\geq 2$*. Ainsi le 7-développement de* $\frac{1}{5}$*est périodique de période au plus* 4*. En fait la période est* 4 *et* $\frac{1}{5}=\left(\cdot\overline{1254}\right)_7$*.*

Définition 1.1.4 *Soient* b *un entier avec* $b>1$*,* α *un réel positif et soient* $(a_ka_{k-1}\cdots a_0)_b$ *et* $(.c_1c_2c_3\cdots)_b$ *les* $b-$*développements de* $[\alpha]$ *et* $\{\alpha\}$ *respectivement. Alors les suites* $(a_ka_{k-1}\cdots a_0.c_1c_2c_3\cdots)_b$ *et* $((-a_k)(-a_{k-1})\cdots(-a_0).(-c_1)(-c_2)(-c_3)\cdots)_b$ *sont, respectivement, les* $b-$*développements de* α*, et de* $(-\alpha)$*.*

Exemple 1.1.5 *Si* $\alpha=\frac{16}{5}$ *et* $b=7$*, de ce qui a précédé on voit que* $\alpha=\left(3\cdot\overline{1254}\right)_7$*. De même si* $\alpha=\frac{1}{5}$ *et* $b=7$ *alors* $\alpha=\left(0\cdot\overline{1254}\right)_7$ *ou bien tout simplement* $\alpha=\left(\cdot\overline{1254}\right)_7$*.*

Définition 1.1.5 *Soient* b *un entier avec* $b>1$*et* α *un réel. On dit que* α *admet un* $b-$*développement périodique (resp., fini) si le* $b-$*développement de* $\{\alpha\}$ *est périodique (resp., fini). Dans ce cas le block minimal constitué des termes consécutifs qui se répètent dans le développement de* α *est dit partie périodique et la longueur de ce block est la période. La près-période est la longueur de la partie qui précède de le premier block périodique. On note* $Per(b)$ *(resp.,* $Fin(b)$*) l'ensemble des réels qui ont un* $b-$*développement périodique (resp., fini). Rappelons également le résultat connu qui suit.*

Proposition 1.1.3 *Soit* b *un entier supérieur à* 1*. Alors on a les relations suivantes :*

i) $0\in Fin(b)\subset Per(b)$*.*

ii) $\alpha\in Per(b)\Leftrightarrow(-\alpha)\in Per(b)$*, et* $\alpha\in Fin(b)\Leftrightarrow(-\alpha)\in Fin(b)$*, pour tout réel* α*.*

iii) $Fin(b)=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{b}\right]$*.*

Preuve. Il est clair que le $b-$développement de 0 est périodique de période 1, avec 0 comme block périodique, d'où le (i), puisque par convention $0 \in Fin(b)$. De même de la défintion (1.1.2), découle immédiatement les équivalences du (ii). Pour montrer l'égalité (iii) dans la proposition précédente, notons que si $\alpha \in Fin(b)$, alors $\alpha = (a_k a_{k-1} \cdots a_0 \cdot c_1 \cdots c_n)_b$,

$$\alpha = (a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0) + \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_n}{b^n},$$

et donc $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{b}\right]$. Inversement, soit $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{b}\right]$. Pour montrer que $\alpha \in Fin(b)$, on peut se restreindre, d'après le (ii), au cas où $\alpha > 0$, puisque $-\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{b}\right]$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$, et $a_i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\alpha = a_m (\frac{1}{b})^m + \cdots + a_0 = \frac{a_m + \cdots + a_0 b^m}{b^m} \in \mathbb{Q}.$$

Ainsi $\{\alpha\} = \frac{c}{b^m}$, pour un certain $c \in \mathbb{N}$, et le dénominateur de $\{\alpha\}$ est au plus divisible par les nombres premiers qui divisent b^m, donc ceux qui divisent b. D'après la proposition 1.1.2, $\{\alpha\} \in Fin(b)$, et par suite $Fin(b) = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{b}\right]$. ■

On a déjà vu que certains éléments du corps des rationnels $\mathbb{Q}$ ont des développements finis en base entière, en fait tout rationnel a un développement périodique dans une base entière, et la réciproque est ausi vraie. Le résultat qui suit résume quelques constations sur ce sujet.

Proposition 1.1.4 *Soit b un entier, avec $b > 1$. Alors tout développement périodique dans la base b représente un nombre rationnel. Réciproquement, le $b-$développement d'un nombre rationnel est périodique. Si de plus $0 < \alpha = \frac{r}{s} < 1$, où r et s sont des entiers positifs premiers entre eux, i.e. $(r, s) = 1$, et $s = tu$, avec t et u des entiers positifs, tels que tout diviseur premier de t divise b, et $(u, b) = 1$, alors la période du $b-$développement de α est égale au plus petit entier positif v tel que $b^v \equiv 1 \bmod(u)$, et la prés-période est égale au plus petit entier N tel que t divise b^N.*

Preuve. Soit α un réel admettant un développement périodique dans la

base b. Pour montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$, on peut supposer $0 < \alpha < 1$, car si $\{\alpha\}$ est rationnel alors $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ l'est. Soit donc $\alpha = (\cdot c_1 \cdots c_N \overline{c_{N+1} \cdots c_{N+k}})_b$. Alors

$$\alpha = \frac{c_1}{b} + \cdots + \frac{c_N}{b^N} + (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b^{jk}})(\frac{c_{N+1}}{b^{N+1}} + \cdots + \frac{c_{N+k}}{b^{N+k}}),$$

et

$$\alpha = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_N}{b^N} + (\frac{b^k}{b^k - 1})(\frac{c_{N+1}}{b^{N+1}} + \cdots + \frac{c_{N+k}}{b^{N+k}}) \in \mathbb{Q}.$$

Notons aussi, que pour montrer la réciproque, il suffit de prouver la dernière assertion de la proposition. Soit donc $0 < \alpha = \frac{r}{s} < 1$,où $(r, s) = 1$, $s = tu$, $(u, b) = 1$, et tout diviseur premier de t divise b. Alors par la décomposition de s en nombres premiers, il existe un entier positif N tel que $b^N = at$ et $a \in \mathbb{N}$. Choisissons, de plus, N le plus petit entier vérifiant cette dernière relation. Alors

$$b^N \alpha = b^N \frac{r}{tu} = \frac{ar}{u}. \tag{1-4}$$

Posons $\frac{ar}{u} = A + \lambda$, où $A = \left[\frac{ar}{u}\right]$, et $\lambda = \left\{\frac{ar}{u}\right\}$. Alors $A \leq \frac{ar}{u} = b^N \alpha < b^N$, car $\alpha < 1$, et donc $0 \leq A < b^N$. D'autre part, comme $\lambda = \frac{ar}{u} - A = \frac{ar - Au}{u} = \frac{c}{u}$, on a $0 < \alpha = \frac{c}{u} < 1, \;\; 0 \leq c < u$ et

$$\frac{ar}{u} = A + \frac{c}{u}. \tag{1- 5}$$

Montrons que $(c, u) = 1$. Supposons au contraire que $(c, u) = \beta \neq 1$. Alors, il existe deux entiers k et l tels que $c = \beta k$ et $u = \beta l$, d'où $c = ar - Au$, $ar = c + Au = \beta(k + Al)$ et donc β divise ar. Comme β divise u, et $(u, b) = 1$, on a $(\beta, b) = 1, (\beta, b^N) = 1$, et par suite $(\beta, a) = 1$. Ce qui signifie que β divise r, et cela conduit à une contradiction, car β divise s (β divise u), donc $(c, u) = 1$. Soit $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$ le b-développement de A. Si $u = 1$, alors le développement de $b^N \alpha = A$ est fini, donc

$$\alpha = \frac{A}{b^N} = \frac{a_{nb} n}{b^N} + \frac{a_{n-1} b^{n-1}}{b^N} + \cdots + \frac{a_1 b^1}{b^N} + \frac{a_0 b^0}{b^N}$$

et α admet un $b-$développement de la forme

$$\alpha = \frac{A}{b^N} = (\cdot 000 \cdots a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$$

car $a_i \in \{0, 1, \cdot \cdot \cdot, b - 1\}, \forall i \{0, \cdot \cdot \cdot, N\}$ et $\forall_j$, $\exists k \geq j$, tel que $c_k = 0 \neq b - 1$. Sinon, c'est-à-dire, si $u \neq 1$, on considère le plus petit entier v vérifiant $b^v \equiv 1 \bmod (u)$. Alors

$$b^v \frac{c}{u} = \frac{(xu + 1)c}{u} = xc + \frac{c}{u} \tag{1- 6}$$

où $x \in \mathbb{Z}$. Soit $(\cdot c_1 c_2 \cdot \cdot \cdot)_b$ le $b-$développement de $\frac{c}{u}$. Alors

$$b^v \frac{c}{u} = \left[\frac{c_1}{b} + \cdots + \frac{c_v}{b^v} + \frac{\lambda_v}{b^v}\right], \tag{1- 7}$$

avec $c_k = [b\lambda_{k-1}]$, $\lambda_k = b\lambda_{k-1} - c_k = \{b\lambda_{k-1}\}$, où $\lambda_0 + \frac{c}{u'}$, et de $(1-7)$ on obtient

$$b^v \frac{c}{u} = (c_1 b^{v-1} + c_2 b^{v-2} + \cdots + c_v) + \lambda_v, \tag{1 - 8}$$

et $0 \leq \lambda_v < 1$. En comparant les relations $(1-7)$ et $(1-8)$, on voit que $\lambda_v = \frac{c}{u} = \lambda_0$. Montrons maintenant, par récurrence, que $c_{k+v} = c_k$, $\forall k \geq 1$. Pour $k = 1$, on a $c_{1+v} = [b\lambda_v] = [b\lambda_0] = c_1$. Supposons $c_{k+v} = c_k$, pour un certain $k \geq 1$, et montrons $c_{k+1+v} = [b\lambda_{k+v}]$ et $c_{k+1} = [b\lambda_k]$. Supposons le contraire, c'est-à-dire $[b\lambda_{k+v}] \neq [b\lambda_k]$. Alors $b\lambda_{k+v} \neq b\lambda_k$, ce qui implique que $\lambda_k \neq \lambda_{k+v}$. Mais, $c_{k+v} = [b\lambda_{k-1+v}] = b\lambda_{k-1+v} - \lambda_{k+v}$, $c_k = [b\lambda_{k-1}] = b\lambda_{k-1} - \lambda_k$, $c_{k+v} - c_k = b(\lambda_{k-1+v} - \lambda_{k-1}) + \lambda_k - \lambda_{k+v} \neq 0$, car $\lambda_{k-1+v} - \lambda_{k-1} = 0$, et ceci contredit l'hypothèse de récurrence $c_{k+v} = c_k$. Donc $\frac{c}{u}$ admet un b-développement périodique en base b, de la forme $(\cdot\overline{c_1 c_2 \cdots c_v})_b$. Il s'ensuit de $(1-4)$ et $(1-5)$, que le $b-$développement de $b^N\alpha$ est $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \cdot \overline{c_1 c_2 \cdots c_v})_b$, d'où

$$b^N\alpha = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 + (\frac{b^v}{b^v - 1})(\frac{c_1}{b^1} + \cdots + \frac{c_v}{b^v}).$$

En divisant les deux dernières expressions par b^N, on obtient

$$\alpha = \frac{a_n}{b^{N-n}} + \frac{a_{n-1}}{b^{N-(n-1)}} + \cdots + \frac{a_1}{b^{N-1}} + \frac{a_0}{b^N} + (\frac{b^v}{b^v - 1})(\frac{c_1}{b^1} + \cdots + \frac{c_v}{b^{v+N}})$$

$$= \frac{0}{b} + \frac{0}{b^2} + \cdots + \frac{0}{b^{N-(n+1)}} + \frac{a_n}{b^{N-n}} + \frac{a_{n-1}}{b^{N-(n-1)}} + \cdots + \frac{a_1}{b^{N-1}} + \frac{a_0}{b^N} +$$

$$+(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b^{jv}})(\frac{c_1}{b^1} + \cdots + \frac{c_v}{b^{v+N}}) = (\cdot 00 \cdots 0 a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \cdot c_1 c_2 \cdots c_v c_1 c_2 \cdots c_v \cdots)_b.$$

Remarquons que le développement $(\cdot c_1 c_2 \cdots c_v)_b$ est un block constitué de v termes consécutifs qui se répétent, et $(\cdot 000 \cdots 0 a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$ est un block constitué N termes consécutifs qui ne se répétent pas (avec $N - (n+1)$ zéros au début). Montrons que v et N sont minimaux, c-à-d., v et N sont exactement la période et la prés-période du $b-$développement de α. Supposons qu'il existe M et k, tels que

$$\alpha = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_M}{b^M} + (\frac{b^k}{b^k - 1})(\frac{c_{M+1}}{b^{M+1}} + \cdots + \frac{c_{M+k}}{b^{M+k}})$$

$$= \frac{(c_1 b^{M-1} + c_2 b^{M-2} + \cdots + c_M)(b^k - 1) + (c_{M+1} b^{k-1} + \cdots + c_{M+k})}{b^M (b^k - 1)}.$$

Comme $\alpha = \frac{r}{s}$ et $(r, s) = 1$, alors $tu = s$ divise $b^M(b^k - 1)$. Il résulte alors de l'égalité $(u, b) = 1$ que $(u, b^M) = 1$, et donc u divise $(b^k - 1)$, ce qui implique que $b^k \equiv 1 \bmod(u)$, et par la définition de v, on a $k \geq v$. D'autre part, tout diviseur premier de t divise b, donc il divise b^k et il ne divise pas $(b^k - 1)$, d'où $\mathrm{pgcd}(t, (b^k - 1)) = 1 \Rightarrow t$ divise $b^M \Rightarrow M \geq N$, ce qui signifie que v et N sont minimaux. Donc α admet un $b-$développement périodique de période v et de prés-période N. ■

Corollaire 1.1.1 *Soit b un entier, avec $b > 1$. Alors $Per(b) = \mathbb{Q}$.*

Preuve. La preuve est une conséquence immédiate de la première assertion de la proposition ci-dessus. ■

Remarque 1.1.2 *On peut utiliser la proposition* (1.1.4), *pour déterminer la période et la prés-période du développement décimal d'un réel $0 < \alpha = \frac{r}{s} < 1$ avec $s = 2^{s_1} 5^{s_2} u$, où $(u, 10) = 1$. Alors la prés-période est égale au maximum de s_1 et s_2, et la période est égale au plus petit entier v vérifiant $10^v \equiv 1 \bmod(u)$. Par exemple, si $\alpha = 5/56$, alors $56 = 5^0 * 2^3 * 7$, la prés-période est 3 (le maximum de 3 et 0), et la période est 6, puisque $10 \equiv 3 mod(7)$, $10^2 \equiv 2 mod(7)$, $10^3 \equiv 6 mod(7)$, $10^4 \equiv 4 mod(7)$, $10^5 \equiv 5 mod(7)$ et $10^6 \equiv 1 mod(7)$.*

1.2 *Représentation des réels en base réelle*

Définition 1.2.1 *Soit β un nombre réel, avec $\beta > 1$, et soit α un réel quelconque. Une représention de α dans la base β est une somme infinie de la forme*

$$\alpha = \varepsilon_p \beta^p + \varepsilon_{p-1} \beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_1 \beta + \varepsilon_0 + \varepsilon_{-1} \beta^{-1} + \varepsilon_{-2} \beta^{-2} + \cdots$$

où les ε_i et $p \in \mathbb{Z}$.

De manière identique au cas où le base est entière on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.1 *Soit β un nombre réel, avec $\beta > 1$, et soit α un réel positif. Alors α peut être représenté sous la forme*

$$\alpha = \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}\beta^{-1} + \varepsilon_{-2}\beta^{-2} + \cdots,$$

où $p = p(\alpha)$ est le plus grand entier vérifiant $\beta^p \leq \alpha$, $\varepsilon_p \neq 0$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\alpha) \in \{0, 1, ..., \lfloor\beta\rfloor\}$ pour tout $i \leq p$, et $\lfloor\beta\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < \beta\}$.

Preuve. Soit $p = p(\alpha)$ le plus grand entier vérifiant $\beta^p \leq \alpha$. Alors $\beta^p \leq \alpha < \beta^{p+1}$ et $1 \leq \frac{\alpha}{\beta^p} < \beta$. Soient $\varepsilon_p(\alpha) = \varepsilon_p = \left[\frac{\alpha}{\beta^p}\right]$, et $r_p(\alpha) = r_p = \left\{\frac{\alpha}{\beta^p}\right\}$. Alors $0 \leq r_p < 1$, et comme $1 \leq \frac{\alpha}{\beta^p}$ et $\varepsilon_p \leq \frac{\alpha}{\beta^p} < \beta$, on a $\varepsilon_p \in \{1, ..., \lfloor\beta\rfloor\}$. Il s'ensuit que $\frac{\alpha}{\beta^p} = \varepsilon_p + r_p$ et $\alpha = \varepsilon_p\beta^p + r_p\beta^p$. Notons que si $r_p = 0$, on obtient immédiatement le résultat avec $\varepsilon_i = r_i = 0$, pour tout $i \leq p - 1$, et sinon on pose $\varepsilon_{p-1} = [\beta r_p]$,et $r_{p-1} = \{\beta r_p\}$. Dans ce cas $0 \leq r_{p-1} < 1$, et $\varepsilon_{p-1} \in \{0, 1, ..., \lfloor\beta\rfloor\}$ puisque $\varepsilon_{p-1} \leq \beta r_p < \beta$, d'où $\beta r_p = \varepsilon_{p-1} + r_{p-1}$, et $\alpha = \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + r_{p-1}\beta^{p-1}$. Si $r_{p-1} = 0$, on obtient également le résultat voulu, et sinon on définit par récurrence :

$$(\varepsilon_{k-1},\ r_{k-1}) = ([\beta r_k], \{\beta r_k\}),$$

pour $k \leq p - 2$. Alors, $\beta r_k = \varepsilon_{k+1} + r_{k+1}$ et

$$\alpha = \varepsilon_p\beta^p + \cdots + \varepsilon_k\beta^k + r_k\beta^k,$$

où $\varepsilon_i \in \{0, 1, ..., \lfloor\beta\rfloor\}$,et $0 \leq r_k < 1$. On obtient en particulier pour $n \in N^*$

$$\alpha = \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}\beta^{-1} + \cdots + \varepsilon_{-n}\beta^{-n} + r_{-n}\beta^{-n}.$$

Comme $r_{-n} \in [0, 1[$, on voit que $lim_{n\to\infty} r_{-n}\beta^n = 0$, et

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha - \Sigma_{i=0}^{p}\varepsilon_i\beta^i - \Sigma_{i=1}^{n-1}\varepsilon_{-i}\beta^{-i}) = 0,$$

c.-à-d. que

$$\alpha = \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_0 + \Sigma_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{-i}\beta^{-i}.$$

■

Définition 1.2.2 *La représentation d'un réel positif α dans la base $\beta > 1$, sous les hypothèses du théorème* (1.2.1), *s'appelle béta-développement de α dans la base β (ou simplement béta-développement de α), et est notée*

$$\alpha \ \equiv (\varepsilon_p\varepsilon_{p-1}\ \cdots)_\beta$$

ou bien

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_p \beta^p + \cdots + \varepsilon_0 + \Sigma_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{-i} \beta^{-i}.$$

L'ensemble $A = \{1, ..., \lfloor \beta \rfloor\}$ *est appelé l'alphabet du béta-développement et les suites* $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ *et* $(r_n)_{n \geq 0}$ *sont dites suites associées au béta-développement de* α.

Définition 1.2.3 *Si* $\alpha \equiv (\varepsilon_p \varepsilon_{p-1} \cdots)_\beta$ *est le béta-développement du réel positif* α *en base* β, *alors le béta-développement de* $-\alpha$ *en base* β *est* $((-\varepsilon_p)(-\varepsilon_{p-1}) \cdot \cdot\cdot)_\beta$. *Par convention le béta-développement de* 0 *est* $(000 \ \cdot\cdot\cdot)_\beta$.

De manière analogue au $b-$développement on peut résumer le béta-développement d'un réel positif par l'algorithme qui suit :

1- Initialisation.

Choix de la base β, et du réel α. Déterminons l'entier p vérifiant $\beta^p \leq \alpha < \beta^{p+1}$, et posons $\varepsilon_p = \left[\frac{\alpha}{\beta^p}\right]$ et $r_p = \left\{\frac{\alpha}{\beta^p}\right\}$.

2- Itération.

Cherchons ε_k, et r_k solutions des égalités : $\varepsilon_k = [\beta r_{k+1}]$ et $r_k = \{\beta r_{k+1}\}$.

3- Critère d'arrêt.

Si $r_k = 0$, ou $\exists t \geq 1$, tel que $r_k = r_{k+t}$, stop. Sinon, on pose $k = k-1$, et on retourne à 2.

Exemple 1.2.1 *Avec la notation ci-dessus on a* $1 \equiv (1000 \cdot \cdot\cdot)_\beta$ *ou bien*

$$1 \overbrace{\equiv}^{\beta} 1 + \frac{0}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \cdots$$

car $1 \leq 1 < \beta$, $p(1) = 0$, $\varepsilon_0(1) = [1] = 1$, $r_0(1) = 0$ *et* $\varepsilon_i(1) = r_i(1) = 0$ *pour tout* $i \leq -1$. *Généralement, si* $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $\beta^k \equiv (1000...)_\beta$, *ou bien*

$$\beta^k \overbrace{\equiv}^{\beta} \beta^k + 0\beta^{k-1} + 0\beta^{k-2} + \cdots,$$

puisque $\beta^k \leq \beta^k < \beta^{k+1}$, $p(\beta^k) = k$, $\varepsilon_k(\beta^k) = \left[\frac{\beta^k}{\beta^k}\right] = 1$, $r_k(\beta^k) = \left\{\frac{\beta^k}{\beta^k}\right\} = 0$, *et* $\varepsilon_i(\beta^k) = r_i(\beta^k) = 0$, $\forall i \leq k-1$. *De même, si* $\alpha \in \{1, \cdot \cdot \cdot, [\beta]\}$, *on a*

$\alpha \equiv (\alpha 000...)_\beta$, *ou bien* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \alpha + \frac{0}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \cdots$, *car* $1 \leq \alpha < \beta$, $p(\alpha) = 0$, $\varepsilon_0(\alpha) = [\alpha] = \alpha$, *et* $r_0(\alpha) = 0$.

Exemple 1.2.2 *Soit* $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180...$, *la racine du polynôme* $P(x) = x^2 - x - 1$.

1) *Si* $\alpha = \beta - 1$, *alors* $\alpha = \frac{1}{\beta}$ *et de l'exemple ci-dessus, on a* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \cdots$.

2) *Si* $\alpha = 3$, *alors* $\beta^2 \leq 3 < \beta^3$, $p(3)= 2$, $\varepsilon_2(3) = \left[\frac{3}{\beta^2}\right] = 1$, $r_2(3) = \frac{3}{\beta^2} - 1 = \frac{2-\beta}{\beta^2}$, $\varepsilon_1(3) = \left[\frac{2-\beta}{\beta}\right] = 0$, $r_1(3) = \frac{2-\beta}{\beta}$, $\varepsilon_0(3) = [2-\beta] = 0$, $r_0(3) = 2 - \beta$, $\varepsilon_{-1}(3) = \left[2\beta - \beta^2\right] = [\beta + 1] = 0$, $r_{-1}(3) = \beta + 1 \Rightarrow \varepsilon_{-2}(3) = \left[\beta^2 + \beta\right] = 3, r_{-2}(3) = \beta^2 + \beta - 3 = 2\beta - 2 \Rightarrow \varepsilon_{-3} = \left[2\beta^2 - 2\beta\right] =[2] = 2 \Rightarrow r_{-3} = 0 \Rightarrow r_i = \varepsilon_i = 0 \ \forall i \leq -4$

$$3 \overbrace{\equiv}^{\beta} \beta^2 + 0 * \beta + 0 * \beta^0 + \frac{0}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{0}{\beta^3} + \frac{0}{\beta^4} + \frac{0}{\beta^5} + \cdots$$

Exemple 1.2.3 *Soit* $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,6180 \cdots$, *la racine du polynôme* $T(x) = x^2 - 3x + 1$. *Soit* $\alpha = 3 - \beta$, *alors* $\alpha = \frac{1}{\beta}$, *et de ce qui a précédé* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \cdots$.

Les mêmes calculs montrent que $\beta - 2 \overbrace{\equiv}^{\beta} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\beta^n}$ *et*

$$3 \overbrace{\equiv}^{\beta} \beta + 0 + \frac{1}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \frac{0}{\beta^3} + \frac{0}{\beta^4} + \cdots.$$

Exemple 1.2.4 *Si* $\beta = 5$ *et* $\alpha = 324$, *alors* $5^3 \leq 324 < 5^4$, $p(324) = 3$, $\varepsilon_3 = \left[\frac{324}{5^3}\right] = 2$, $r_3 = \left\{\frac{324}{5^3}\right\} = \frac{324}{5^3} - 2 = \frac{74}{125}$, $\varepsilon_2 = 2$, $r_2 = \frac{24}{25}$, $\varepsilon_1 = 4$, $r_1 = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow \quad \varepsilon_0 = 4, r_0 = 0$, *et* $\varepsilon_i = r_i = 0 \ \forall i \leq -1$, *d'où*

$$324 \overbrace{\equiv}^{\beta} 2 * 5^3 + 2 * 5^2 + 4 * 5^1 + 4 * 5^0 + 0 * 5^{-1} + 0 * 5^{-2} + 0 * 5^{-3} + \cdots$$

Les mêmes calculs montrent que $\frac{1}{4} \equiv (13000...)_6$ *et*

$$723.142 \overbrace{\equiv}^{10} 7*10^2+2*10+3*10^0+1*10^{-1}+4*10^{-2}+2*10^{-3}+0*10^{-4}+0*10^{-5}+\cdots$$

Remarque 1.2.1 *Avec la notation ci-dessus, si* $1 \leq \alpha < \beta$*, alors* $p(\alpha) = 0$ *et* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}\beta^{-1} + \varepsilon_{-2}\beta^{-2} + \cdots$*. Dans ce cas, et pour simplifier la notation, on note le béta-développement de* α

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots,$$

ou bien $\alpha \equiv (\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots)_\beta$*, au lieu de* $\alpha \equiv (\varepsilon_0 \varepsilon_{-1} \varepsilon_{-2} \cdots)_\beta$*.*

Remarque 1.2.2 *Soit* $\beta^p \leq x < \beta^{p+1}$*, où* $p \in \mathbb{Z}$*, alors* $1 \leq y = \frac{x}{\beta^p} < \beta$ *et* $p(y) = 0$*. Supposons que le béta-développement de* y *est donné par la formule* $y \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$ *et que* $x \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon'_p \beta^p + \varepsilon'_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots$*. Alors*

$\varepsilon'_p = \left[\frac{x}{\beta^p}\right] = [y] = \varepsilon_0(y)$ *et* $r\prime_p = \left\{\frac{x}{\beta^p}\right\} = \{y\} = r_0(y)$*. Il s'ensuit que* $\varepsilon'_{p-1} =$

$\left[\beta r'_p\right] = [\beta r_0] = \varepsilon_1(y)$*,* $r\prime_{p-1} = \left\{\beta r'_p\right\} = \{\beta r_0\} = r_1(y)$ *et par récurrence on obtient que* $(\varepsilon'_n)_{n \leq p} = (\varepsilon_n)_{n \geq 0}$*,et* $(r'_n)_{n \leq p} = (r_n)_{n \geq 0}$*. On en déduit que les béta-développements des réels* $\alpha \in [1, \beta[$*, permettent de déterminer les béta-développements de tous les réels positifs.*

Proposition 1.2.1 *Avec la notation ci-dessus, si* $\alpha \in [1, \beta[$ *et* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$*, alors*

$$r_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^2} + \cdots, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Une simple récurrence permet de vérifier la relation. Pour $n = 0$, on a $\alpha = \varepsilon_0 + r_0$, et donc $r_0 = \alpha - \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$ Supposons que l'égalité soit vraie jusqu'a l'ordre $n \geq 0$, c'est-à-dire que $r_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^2} + \cdots$. Alors $r_{n+1} = \{\beta r_n\} = \beta r_n - [\beta r_n] = \beta r_n - \varepsilon_{n+1}$ et

$$r_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+3}}{\beta^2} + \cdots.$$

■

La proposition suivante implique celle qui la précéde.

Proposition 1.2.2 *Soit* $\alpha \in [1, \beta[$ *satisfaisant* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta^{-1} + \cdots$. *Si* $r_n \neq 0$, *où* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$r_n \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_{n+u}}{\beta^u} + \frac{\varepsilon_{n+u+1}}{\beta^{u+1}} + \cdots$$

où $u \in \mathbb{N}^*$ *vérifie* $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \cdots = \varepsilon_{n+u-1} = 0$ *et* $\varepsilon_{n+u} \neq 0$.

Preuve. Montrons d'abord la proposition pour $n = 0$. Supposons que $r_0 \neq 0$. Alors d'après la proposition 1.2.1, on a $r_0 = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$. Soit $u \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{u-1} = 0$, et $\varepsilon_u \neq 0$. Alors $r_0 = \frac{\varepsilon_u}{\beta^u} + \frac{\varepsilon_{u+1}}{\beta^{u+1}} + \cdots$. Des relations

$$\frac{1}{\beta^u} \leq \frac{\varepsilon_u}{\beta^u} \leq r_0 = \frac{1}{\beta^{u-1}}(\frac{\varepsilon_u}{\beta} + \frac{\varepsilon_{u+1}}{\beta^2} + \cdots) = \frac{r_{u-1}}{\beta^{u-1}} < \frac{1}{\beta^{u-1}}$$

on a $\beta^{-u} \leq r_0 < \beta^{1-u}$, et $p(r_0) = -u$. Si on note $r_n(r_0) = R_n$, et $\varepsilon_n(r_0) = \mu_n$, $\forall n \leq -u$, alors

$$\mu_{-u} = \left[\frac{r_0}{\beta^{-u}}\right] = \left[\varepsilon_u + \frac{\varepsilon_{u+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{u+2}}{\beta^2} + \cdots\right] = [\varepsilon_u + r_u] = \varepsilon_u,\ R_{-u} = \left\{\frac{r_0}{\beta^{-u}}\right\} = r_u.$$

$$\mu_{-u-1} = [\beta R_{-u}] = [\beta r_u] = \varepsilon_{u+1},\ \text{ et } R_{-u-1} = r_{u+1}.$$

Par induction on obtient $\mu_{-u-k} = \varepsilon_{u+k}$, et $R_{-u-k} = r_{u+k}, \forall k \geq 0$. Ainsi

$$r_0 \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_u}{\beta^u} + \frac{\varepsilon_{u+1}}{\beta^{u+1}} + \cdots.$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $r_n \neq 0$. D'après la proposition 1.2.1, on a $r_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^2} + \cdots$. Soit $u \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \cdots = \varepsilon_{n+u-1} = 0$, et $\varepsilon_{n+u} \neq 0$. Alors $r_n = \frac{\varepsilon_{u+n}}{\beta^u} + \frac{\varepsilon_{u+n+1}}{\beta^{u+1}} + \cdots$. A partir des relations

$$\frac{1}{\beta^u} \leq \frac{\varepsilon_{n+u}}{\beta^u} \leq r_n \leq \frac{1}{\beta^{u-1}}(\frac{\varepsilon_{n+u}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+u+1}}{\beta^2} + \cdots) = \frac{r_{n+u-1}}{\beta^{u-1}} < \frac{1}{\beta^{u-1}}$$

on a $\beta^{-u} \leq r_n < \beta^{1-u}$, et $p(r_n) = -u$. Si on note $r_i(r_n) = R_i$, et $\varepsilon_i(r_n) = \mu_i, \forall i \leq -u$, alors on obtient

$$\mu_{-u} = \left[\frac{r_n}{\beta^{-u}}\right] = \left[\varepsilon_{n+u} + \frac{\varepsilon_{n+u+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+u+2}}{\beta^2} + \cdots\right] = [\varepsilon_{n+u} + r_{n+u}] = \varepsilon_{n+u}$$

et

$$R_{-u} = \left\{\frac{r_n}{\beta^{-u}}\right\} = r_{n+u},\ \mu_{-u-1} = [\beta R_{-u}] = [\beta r_{n+u}] = \varepsilon_{n+u+1},\ R_{-u-1} = r_{n+u+1}.$$

Par induction, on obtient $\mu_{-u-k} = \varepsilon_{n+u+k},\ R_{-u-k} = r_{n+u+k}, \forall k \geq 0$, et donc $r_n \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_{n+u}}{\beta^u} + \frac{\varepsilon_{n+u+1}}{\beta^{u+1}} + \cdots$. ■

La proposition suivante montre que le béta-développement est une généralisation du développement décimal des réels.

Proposition 1.2.3 *Le béta-développement d'un réel quelconque, en base entière, coïncide avec le développement usuel, défini dans le premier paragraphe.*

Preuve. Sans perte de généralité, on peut se restreindre au cas où α est un réel positif. Soit donc $\beta = b$ une base entière et supposons d'abord $\alpha > 1$, avec

$$\alpha = a_k\beta^k a_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + a_1\beta + a_0 + \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots,$$

où $(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 c_1 c_2 \cdots)_\beta$ est le $b-$développement de α. Alors $\alpha_k \neq 0$, $a_i \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$, $c_i \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$, et $\forall N, \exists n \geq N$ tel que $c_n \neq \beta - 1$. Pour trouver le béta-développement de α, montrons d'abord que $\beta^k \leq \alpha < \beta^{k+1}$. Il est clair que $\alpha \geq a_k\beta^k \geq \beta^k$, puisque $a_k \geq 1$. D'autre part, si $\alpha \geq \beta^{k+1}$, alors $a_k\beta^k + a_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + a_1\beta + a_0 + \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots \geq \beta^{k+1}$, et

$$a_k + \frac{a_{k-1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_1}{\beta^{k-1}} + \frac{a_0}{\beta^k} + \frac{c_1}{\beta^{k+1}} + \frac{c_2}{\beta^{k+2}} + \cdots = a_k + \delta_k \geq \beta.$$

Comme

$$\delta_k = \frac{a_{k-1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_1}{\beta^{k-1}} + \frac{a_0}{\beta^k} + \frac{c_1}{\beta^{k+1}} + \frac{c_2}{\beta^{k+2}} + \cdots < (\beta - 1)(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^i}) = 1,$$

on voit que $a_{k+1} > \beta$, d'où $a_k > \beta - 1$, et cela contredit l'inégalité $a_k \leq \beta - 1$.

Ainsi k est le plus grand entier vérifiant $\beta^k \leq \alpha$, $\varepsilon_k = \left[\frac{\alpha}{\beta^k}\right] = [a_k + \delta_k] = a_k$, car $\delta_k < 1$ et $r_k = \left\{\frac{\alpha}{\beta^k}\right\} = \{a_k + \delta_k\} = \delta_k$. De plus

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k-1} &= [\beta\delta_k] = \left[a_{k-1} + \frac{a_{k-2}}{\beta} + \cdots + \frac{a_1}{\beta^{k-2}} + \frac{a_0}{\beta^{k-1}} + \frac{c_1}{\beta^k} + \frac{c_2}{\beta^{k+1}} + \cdots\right] \\ &= [a_{k-1} + \delta_{k-1}] = a_{k-1},\end{aligned}$$

puisque $\delta_{k-1} = \frac{\delta_k}{\beta} - a_{k-1} < \frac{1}{\beta} + 0 < 1$, d'où $\varepsilon_{k-1} = a_{k-1}$ *et* $r_{k-1} = \{\beta r_k\} = \delta_{k-1}$. On continue alors le même processus, et par induction on obtient

$$\varepsilon_0 = [\beta r_1] = [\beta\delta_1] = \left[a_0 + \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots\right] = [a_0 + \delta_0] = a_0$$

car $\delta_0 = \frac{\delta_1}{\beta} - a_0 < 1$. Par suite on a $\varepsilon_0 = a_0$, $r_0 = \delta_0$

$$\varepsilon_{-1} = [\beta r_0] = [\beta\delta_0] = \left[c_1 + \frac{c_2}{\beta} + \frac{c_3}{\beta^2} + \cdots\right] = [c_1 + \delta_{-1}] = c_1$$

($\delta_{-1} = \frac{\delta_0}{\beta} - c_1 < 1$), d'où $\varepsilon_{-1} = c_1$, *et* $r_{-1} = \delta_{-1}$. Par des calculs similaires on obtient

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} a_k\beta^k + a_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + a_1\beta + a_0 + \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots.$$

Supposons maintenant $\alpha < 1$ et que le $b-$développement de α, est donné par la formule $\alpha = \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots$. Alors les $c_i \in \{0, 1, \cdots, \beta - 1\}$, et $\forall N \geq 1$, $\exists n \geq N$, tel que $c_n \neq \beta - 1$. Soit k le plus petit entier vérifiant $c_k \neq 0$, alors $\alpha = \frac{c_k}{\beta^k} + \frac{c_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \cdots$. Montrons que $\beta^{-k} \leq \alpha < \beta^{-(k-1)}$. On a $\alpha \geq c_k\beta^{-k} \geq \beta^{-k}$, car $c_k \geq 1$. D'autre part, si $\alpha \geq \beta^{-(k-1)}$, alors $\frac{c_k}{\beta^k} + \frac{c_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \cdots \geq \beta^{-(k-1)}$ et $c_k + \frac{c_{k+1}}{\beta^1} + \frac{c_{k+2}}{\beta^2} + \cdots = c_k + \delta_{-k} \geq \beta$; comme $\delta_{-k} = \frac{c_{k+1}}{\beta} + \frac{c_{k+2}}{\beta^2} + \cdots < (\beta - 1)(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^i}) = 1$, on obtient $c_k + 1 > \beta \Rightarrow c_k > \beta - 1$, et cela contredit la relation $c_k \leq \beta - 1$. Ainsi, $\beta^{-k} \leq \alpha < \beta^{-(k-1)}$, $\varepsilon_{-k} = \left[\frac{\alpha}{\beta_{-k}}\right] = [c_k + \delta_{-k}] = c_{-k}$, car $\delta_{-k} < 1$, et $r_{-k} = \left\{\frac{\alpha}{\beta^{-k}}\right\} = [c_{-k} + \delta_{-k}] = \delta_{-k}$. Il s'ensuit que

$$\varepsilon_{-k-1} = [\beta r_{-k}] = [\beta\delta_{-k}] = \left[c_{k+1} + \frac{c_{k+2}}{\beta}\right] = [c_{k+1} + \delta_{-k-1}] = c_{k+1},$$

puisque $\delta_{-k-1} = \frac{\delta_{-k}}{\beta} - c_{k+1} < \frac{1}{\beta} + 0 < 1$, *et* $r_{-k-1} = \{\beta r_{-k}\} = \delta_{-k-1}$. De manière identique au cas précédent on obtient

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{c_k}{\beta^k} + \frac{c_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \cdots.$$

Inversement, montrons que le béta-développement d'un réel positif α coincide avec son $b-$développement. Supposons d'abord $\alpha < 1$. Alors il existe un entier $k > 0$, tel que $\beta^{-k} \leq \alpha < \beta^{-(k-1)}$ et

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_k}{\beta^k} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \cdots,$$

où $\varepsilon_k \neq 0$, et pour tout $i \geq k$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, \cdots, \beta - 1\}$. On sait que $(\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} \cdots)_\beta$ est aussi le béta- développement de $\alpha\beta^k \in [1, \beta[$. Supposons au contraire $\exists N \geq k$, tel que $\varepsilon_n = \beta - 1, \forall n \geq N$. Alors $\frac{\varepsilon_N}{\beta} + \frac{\varepsilon_{N+1}}{\beta^2} + \cdots = (\beta - 1)(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^i}) = 1$, et ceci conduit à une contradiction avec la proposition 1.2.3, puisque $\frac{\varepsilon_N}{\beta} + \frac{\varepsilon_{N+1}}{\beta^2} + \cdots = r_{N-1}(\alpha\beta^k) < 1$. Ainsi $\forall N \geq k$, $\exists n \geq N$, tel que $\varepsilon_n \neq \beta - 1$. Toutes les conditions de la proposition 1.2.3 sont donc vérifiées, et par suite

$$\alpha = \frac{\varepsilon_k}{\beta^k} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \cdots = (.\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} \cdots)_\beta$$

Finalement, supposons $\alpha > 1$. Alors il existe un entier $p \geq 0$, tel que $\beta^p \leq \alpha \leq \beta^{p+1}$ et

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_p \beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{-i}\beta^{-i}$$

avec $\varepsilon_p \neq 0$, et $\forall i \leq p$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, \cdots, \beta - 1\}$. Comme $(\varepsilon_p \varepsilon_{p-1} \cdots)_\beta$ est aussi le béta-développement de $\frac{\alpha}{\beta^p} \in [1, \beta[$, d'après la Proposition 1.2.3 on a : $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{-i}\beta^{-1} = r_{-(p+1)}(\frac{\alpha}{\beta^p}) < 1$, $[\alpha] = \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_0$, et $\{\alpha\} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{-i}\beta^{-1} < 1$. Donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{-i}\beta^{-i} \\ &= (\varepsilon_p \varepsilon_{p-1} \cdots \varepsilon_0 . \varepsilon_{-1}\varepsilon_{-2} \cdots)_\beta. \end{aligned}$$

■

1.3 *Sur les nombres de Pisot et de Salem*

Les nombres de Pisot et de Salem sont des entiers algébriques réels riches en propriétés arithmétiques, ce qui explique leur apparition dans plusieurs domaines des mathématiques. Dans le chapitre 3, on va montrer leur comportement particulier lorsqu'ils sont considérés comme des bases du béta-développement. Ces nombres étaient étudiés pendant une période qui dépasse un siècle. Les preuves de la majeure partie des résultats énoncés dans ce paragraphe se trouvent dans les ouvrages [6] , [19] et [20]. Commençons d'abord par rappeler quelques éléments de la théorie des corps.

Définition 1.3.1 *On dit qu'un élément α du corps $\mathbb{C}$ est un nombre algébrique, s'il existe un polynôme unitaire $P = P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Si de plus $P \in \mathbb{Z}[x]$, alors α est dit entier algébrique.*

1) Le nombre $\alpha = \sqrt{2}$ est un entier algébrique car α est racine du polynôme $x^2 - 2$.

2) Il est bien connu que le nombre $\pi = 3.14...$ n'est pas algébrique.

3) Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors α est racine du polynôme $x - \alpha$, et est donc algébrique. En particulier si $\alpha \in \mathbb{Z}$, alors α est un entier algébrique.

4) Il est bien connu que toute extension finie de $\mathbb{Q}$ est algébrique. Par exemple l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ est de degré 2, et est donc algébrique.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Comme l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ est euclidien, l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{Q}[x],\ P(\alpha) = 0\}$ est un idéal principal de $\mathbb{Q}[x]$. De la définition ci-dessus I est réduit à $\{0\}$ si α n'est pas algébrique. Lorsque α est algébrique, l'idéal I admet un générateur, noté M_α. On peut aussi supposer que M_α est unitaire. Dans ce cas le polynôme M_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ et est unique ; ce polynome s'appelle polynôme minimal de α. En d'autres termes M_α est le seul polynôme unitaire à coefficients rationnels, de degré minimal, ayant α pour racine.

Soit α un nombre algébrique. Alors les racines du polynôme minimal de α, noté M_α, sont dits conjugués de α. Le degré de α est le degré de son polynôme minimal.

Si α un nombre algébrique de degré d, alors α admet exactement d conjugués, car son polynôme minimal n'admet pas de racines doubles (il est irréductible). Dans ce cas le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$, qui est l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant α, est de degré d, c'est à dire que, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = d$. Il est facile de voir, par exemple, que l'ensemble $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{d-1}\}$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Soit K un corps de nombres de degré d. Alors tout homomorphisme d'anneau de K dans $\mathbb{C}$, non-nul est injectif et laisse invariant les nombres rationnels. Un tel homomorphisme est dit plongement de K *dans* $\mathbb{C}$. Rappelons qu'il existe exactement d plongements de K dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit lorsque $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, où α un nombre algébrique de degré d, que les d plongements $\sigma_1, \cdots, \sigma_d$, de K dans $\mathbb{C}$ transforment α en ses conjugués. De plus, si $\beta \in K$, alors les conjugués de β sont parmis les nombres $\sigma_1(\beta), \cdots, \sigma_d(\beta)$, chacun d'eux étant répété $d/[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ fois.

Définition 1.3.2 *Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel plus grand que* 1, *dont les conjugués autres que lui même sont de modules inférieur à* 1.

Exemple 1.3.1 *Tout entier rationnel plus grand que* 1 *est un nombre de Pisot. Le nombre* $(1 + \sqrt{5})/2$ *est un nombre de Pisot de degré* 2, *car son polynôme minimal admet une autre racine (qui est* $(1 - \sqrt{5})/2$) *de module* < 1.

Beaucoups de résultats sont connus sur l'ensemble, usuellement noté $\mathbb{S}$, des nombres de Pisot. Citons quelques uns : Un algorithme a été introduit par Dufresnoy et Pisot pour déterminer les éléments de $\mathbb{S} \cap]1, 1.6183[$ [10], et cet algorithme a été généralisé par D. W. Boyd [8-9] pour trouver les nombres de Pisot dans certains intervalles. Salem avait montré que l'ensemble $\mathbb{S}$ est fermé pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ [26]. Les points limites de $\mathbb{S}$ inférieurs à 2 peuvent être déterminés explicitement [4,15]. Pour montrer, d'une manière simple, qu'il existe des nombres de Pisot de degré arbitrairement grand, rappelons les deux résultats connus qui suivent.

Proposition 1.3.1 *Soit* P *un polynôme unitaire, à coefficients entiers rationnels, possédant une seule racine réelle* θ *plus grande que* 1, *et les autres racines de module strictement inférieures à* 1. *Alors* $P(x) = x^s M_\theta(x)$, *où* $s \in \mathbb{N}^*$, *et* $\theta \in \mathbb{S}$.

Preuve. Comme $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $P(\theta) = 0$, alors θ est un entier algébrique et il existe $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$ *tel que* $P = M_\theta P_1$. De plus P_1 est unitaire, car les polynômes P et M_θ le sont, et admet toutes ses racines à l'intérieur du disque unité. Par suite le produit des racines de P_1 est nul car il est de module strictement inférieur à 1; d'où $P_1(x) \equiv x^s$. ■

Pour montrer l'assertion qui suit, rapellons un corollaire du théorème de Rouché, vrai pour des fonctions analytiques au lieu des polynômes.

Lemme 1.3.1 *Si f et g sont deux polynômes tels que $|f(z)| > |g(z)|$ sur le cercle $|z| = \rho$, où $\rho > 0$, alors le polynôme $f + g$ admet le même nombre de racines que f dans le disque ouvert $|z| < \rho$.*

Proposition 1.3.2 *Soit P un polynôme à coefficients entiers rationnels, tel que $P(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_0 \neq 0$, et*

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

Alors P posséde une unique racine θ dans $|z| > 1$ et ses autres racines dans $|z| < 1$. Ainsi $\pm\,\theta$ est un nombre de Pisot.

Preuve. On a les relations suivantes, pour $|z| = 1$,

$$|z^n + \cdots + a_1 z + a_0| \leq 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < \left|a_{n-1}z^{n-1}\right| = |a_{n-1}|. \quad (1\text{-}9)$$

D'après le lemme ci-haut, le polynôme P possède dans $|z| < 1$, le même nombre de zéro que $a_{n-1}z^{n-1}$, soit $n-1$. Comme P n'a pas de racines sur $|z| = 1$, à cause de l'inégalité stricte dans $(1-9)$, il admet donc une seule racine θ dans $|z| > 1$ et qui est un réel, car sinon par conjugaison complexe on obtient deux racines. Comme $a_0 \neq 0$, de la proposition 1.3.1, on déduit que θ ou bien $-\theta$ est un nombre de Pisot. ■

Cette proposition appliqué par exemple au polynôme $P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 1$, *où* $n \geq 2$, montre que P est le polynôme minimal d'un réel θ tel que $\pm\theta$ est un nombre de Pisot. De plus, comme $P(1) = -1 < 0$ *et* $0 < P(3) = 1$, θ est un nombre de Pisot de degré n. On déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 1.3.1 *Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre de Pisot de degré d.*

Preuve. Si $\theta \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ alors θ est un nombre de Pisot de degré $d = 1$. Pour $d \geq 2$, et d'après le calcul ci-dessus il existe toujours un nombre de Pisot de degré d. ■

Une autre classe remarquable d'entiers algébriques, notée T, et qui a des liens avec l'ensemble S, est la classe des nombres de Salem.

Définition 1.3.3 *Un nombre de Salem est un entier algébrique réel plus grand que* 1*, dont les autres conjugués sont de module inférieur ou égal à* 1*, avec au moins un conjugué de module* 1*.*

Soit M_τ le polynôme minimal d'un nombre de Salem τ de degré n, et soit $M_\tau^*(x) = x^n M_\tau(1/x)$ le polynôme réciproque de M_τ. Si α est une racine de module 1 de P, alors $\overline{\alpha} = 1/\alpha$ est également racine des deux polynômes M_τ et M_τ^*. Par suite, M_τ *et* M_τ^* ont une racine commune et comme M_τ est unitaire et irréductible, alors $M_\tau = \lambda M_\tau^*$, $M_\tau(0) = \lambda$ et $1 = \lambda\ M_\tau(0)$; d'où $\lambda^2 = 1$. Si $\lambda = -1$, alors ± 1 *est racine de* M_τ, d'où la contradiction puisque M_τ est irréductible. Par conséquent, $\lambda = 1$ et $M_\tau = M_\tau^*$. De plus le degré de M_τ est un entier pair au moins égal à 4. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 1.3.3 *Le polynôme minimal d'un nombre de Salem τ est réciproque et est de degré ≥ 4. De plus, τ posséde un seul conjugué de module inférieur à* 1*, qui est son inverse, et ses autres conjugués sont tous de module* 1*.*

Preuve. La première partie de la proposition résulte du calcul précédent. Si α est racine de M_τ alors $1/\alpha$ est aussi racine de M_τ, car elle est réciproque. Ainsi $1/\tau$ est le seul conjugué de τ ayant un module < 1, puisque τ n'admet pas d'autres conjugués, autre que lui même de module > 1. ■

Contrairement à l'ensemble des nombres de Pisot, qui satisfait $\min \mathbb{S} = 1.3247...$ [30], on ne sait pas s'il y a un plus petit nombre de Salem. Plus précisément on ne sait pas, si l'égalité $\inf \mathbb{T} = 1$ a lieu ou non. Ce dernier problème avait été posé, en 1933, par D. H. Lehmer [18]. Le polynôme minimal du plus petit nombre de Salem connu est : $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$, ce nombre vaut approximativement $1,1762...$ [6]. La plupart des exemples de nombres de Salem sont fournis par la célèbre construction de Salem, qui dit que tout nombre de Pisot est limite d'une suite de nombres de Salem [26] :

Théorème 1.3.1 *Soit θ un nombre de Pisot de degré $s \geq 3$ et de polynôme minimal P. Soit Q_n^{ε} le polynôme défini par la relation*

$$Q_n^{\varepsilon}(z) = z^n P(z) + \varepsilon P^*(z),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $P^*(z) = z^s P(1/z)$ est le polynôme réciproque de P. Alors, il existe un entier n_0, tel que pour $n \geq n_0$, l'équation $Q_n^{\varepsilon}(z) = 0$ a pour racine un nombre de Salem τ_n^{ε}. De plus on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \tau_n^{\varepsilon} = \theta$ et les τ_n^{ε} tendent vers θ à droite ou à gauche selon la valeur de ε.

Preuve. Le nombre de Pisot θ est une racine du polynôme irréductible P de degré s. Puisque θ n'est pas une unité quadratique, c.-à-d. n'est pas racine d'un polynôme unitaire réciproque du second degré ayant θ et $1/\theta$ pour racines, les polynômes P et P^* sont premiers entre eux. En d'autres termes les polynômes P et P^* n'ont pas de racines communes. Pour tout entier positif n, considérons le polynôme

$$Q_n^{+}(z) = z^n P(z) + P^*(z).$$

Le polynôme Q_n^{+} est unitaire, à coefficients entiers. Ses racines sont donc des entiers algébriques. Nous allons montrer que pour $n \geq n_0$, Q_n^{*} a pour racine un nombre de Salem. Ecrivons :

$$\frac{p(z)}{p^*(z)} = \frac{z-\theta}{1-\theta z} \prod_{i=1}^{s-1} \frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha_i} z},$$

où les α_i sont les conjugués de θ, de module < 1, et s est le degré de P. Soit

$\eta > 0$, suffisamment petit pour que P^* soit sans racine dans la couronne $1 \leq |z| \leq 1 + \eta$. Alors on a pour $|z| = 1 + \eta$,

$$|z-\alpha_i|^2 = \left|z^2\right| + |\alpha_i|^2 - \alpha_i \overline{z} - \overline{\alpha_i} z, \tag{1-10}$$

et

$$|1-\overline{\alpha_i} z|^2 = 1 + |\alpha_i|^2 |z|^2 - \alpha_i \overline{z} - \overline{\alpha_i} z. \tag{1-11}$$

De $(1-10)$ *et* $(1-11)$ on obtient $|z-\alpha_i| > |1-\overline{\alpha_i} z|$ et $\prod\limits_{i=1}^{s-1} |z-\alpha_i| > \prod\limits_{i=1}^{s-1} |1-\overline{\alpha_i} z|$. Ainsi

$$\left| \prod_{i=1}^{s-1} \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha_i} z} \right| > 1.$$

Si on pose $z = (1+\eta)\exp^{i\varphi}$, alors on a

$$\left|\frac{z-\theta}{1-\theta z}\right|^2 = \left|\frac{(1+\eta)\exp^{i\varphi} - \theta}{1-\theta(1+\eta)\exp^{i\varphi}}\right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+n)^2 - \theta(1+\eta)\exp^{i\varphi} - \theta(1+n)\exp^{-i\varphi} + \theta^2}{1-\theta(1+\eta)\exp^{-i\varphi} - \theta(1+n)\exp^{i\varphi} + \theta^2(1+n)^2} \\
&= \frac{\theta^2 + (1+n)^2 - \theta(1+n)\left(\exp^{i\varphi} + \exp^{-i\varphi}\right)}{1-\theta(1+\eta)\left(\exp^{i\varphi} + \exp^{i\varphi}\right) + \theta^2(1+n)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\theta^2(1+n)^2 - 2\theta(1+n)\cos\varphi}{1+\theta^2(1+n)^2 - 2\theta(1+n)\cos\varphi} = f(\varphi).$$

Comme $f'(\varphi) = \frac{2\theta(1+\eta)\sin\varphi\left[1+\theta^2(1+\eta)^2-(1+\eta)^2-\theta^2\right]}{D^2}$, s'annule pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$ et reste positive sur l'intervalle $]0,\pi[$, l'application f admet un minimum en $\varphi = 0$. D' où$\left|\frac{z-\theta}{1-\theta z}\right| > \frac{\theta-(1+\eta)}{\theta(1+\eta)-1} > 1-\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}$, car $1-\frac{\theta-(1+\eta)}{\theta(1+\eta)-1} = \frac{\eta(\theta+1)}{\theta(1+\eta)-1} < \frac{\eta(\theta+1)}{\theta-1}$. Choisissons maintenant η assez petit de façon à avoir

$1-\eta\left[(\theta+1\theta)/(\theta-1)\right] > 0$. On a donc pour $|z| = 1+\eta$:

$$\begin{aligned}
\left|z^n\frac{p(z)}{p^*(z)}\right| &> (1+\eta)^n\left(1-\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}\right) > (1+n\eta)\left(1-\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}\right) \\
&= 1+\eta\left(n-\frac{\theta+1}{\theta-1}-n\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}\right) > 1
\end{aligned}$$

lorsque $2\frac{\theta+1}{\theta-1} < \eta < \frac{\theta-1}{2(\theta+1)}$. Par suite d'après le théorème de Rouché, le polynôme Q_n^+ possède dans $|z| < 1+\eta$, autant de zéros que $z^n p$, soit $n+s-1$. Comme η est arbitrairement petit, cela prouve que Q_n^+ possède une seule racine, disons τ_n^+, de module supérieur à 1, donc nécessairement réel. De plus Q_n^+ est réciproque car

$$\begin{aligned}
Q^*(z) &= z^{n+s}Q\left(\frac{1}{z}\right) = z^{n+s}\left(\frac{1}{z^n}p\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{z^s}p(z)\right) \\
&= z^s p\left(\frac{1}{z}\right) + z^n p(z) = z^n p(z) + p^*(z).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $1/\tau_n^+$ est le seul zéro de Q_n^+ de module plus petit que 1, et les autres zéros de Q_n^+ sont donc de module 1; on a donc $Q_n^* = K_n T_n$, avec K_n ne possèdant que des racines de l'unité et T_n irréductible, possèdant la racine τ_n^+. Maintenant, montrons que $\lim\limits_{n \longmapsto +\infty} \tau_n^+ = \theta$.Tout d'abord, on a $Q_n^+(\theta) = P^*(\theta) \neq 0$, *car* P *et* P^* sont premiers entre eux et $P'(\theta) > 0$. Donc il existe $\sigma > 0$ et $\mu > 0$ tels que $P'(x) \geq \mu$ pour $1 < \theta - \sigma \leq x \leq \theta + \sigma$. Soit δ vérifiant $|\delta| < \sigma$, alors $P(\theta + \delta) = \delta P'(\varepsilon)$ pour $\theta < \varepsilon < \theta + \delta$, ou bien pour $\theta + \delta < \varepsilon < \theta$. Or, $P(\theta + \delta)$ est du signe de δ. Par suite, pour n assez grand, $Q_n^+(\theta + \delta) = (\theta + \delta)^n P(\theta + \delta) + P^*(\theta + \delta)$ est du signe de δ. Choisissons alors δ tel que $\delta p^*(\theta) < 0$. Les quantités $Q_n^+(\theta)$ et $Q_n^+(\theta + \delta)$ sont alors de signes opposés; d'où $\tau_n^+ \in [\theta, \theta + \delta]$ si $P^*(\theta) > 0$. On voit ainsi que les τ_n^+ tendent vers θ à droite si $P(\theta) < 0$, et à gauche si $P^*(\theta) > 0$. Cela prouve que, pour $n \geq n_0$, les τ_n^* sont des nombres de Salem, car sinon, on aurait une infinité d'entiers quadratiques, tous différents, tendant vers θ et par suite, leurs polynômes minimaux auraient leurs coefficients bornés, ce qui est impossible. En considérant $Q_n^- = z^n P - P^*$, on peut construire de la même façon une suite de nombres de Salem tendant vers θ de l'autre côté. ■

Remarque 1.3.1 *En fait la preuve ci-dessus fonctionne lorsque le degré du nombre de Pisot θ est ≤ 2 sauf lorsque $P(z) = z^2 - rz + 1$. Dans ce dernier cas il suffit de considérer le polynôme $Q_n^{\pm}(z) = (z^{2n} + 1)(z^2 - rz + 1) \pm z^{n+1}$, pour obtenir, par une méthode identique, que θ est limite à gauche et à droite d'une suite de nombres de Salem. On déduit alors immédiatement le corollaire suivant.*

Corollaire 1.3.2 *Tout nombre de Pisot est limite d'une suite de nombres de Salem, et donc il existe des nombres de salem de degré arbitrairement grand.*

Chapitre 2

Sur le béta-développement

Dans ce chapitre on fait une étude plus approfondie du béta-développement. Dans le premier paragraphe, on rappelle des popriétés des suites associées au béta-développement d'un réel, et on montre, en particulier, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite d'entiers rationnels représente le béta-développement d'un réel positif. Ensuite, on cite, dans le second paragraphe, quelques résultats élémentaires en rapport avec les développements périodiques ou finis. Ces représentations étaient considérés par W. Parry dans son article [22] et ensuite par C. Frougny et B. Solomyak [13,14,31] (voir aussi d'autres références dans [35]). Enfin, dans le dernier paragraphe on prouve quelques propriétés des nombres de Parry, et qui constituent un outil fondamental dans cette théorie. Ces nombres ont été définis et étudiés par W. Parry [22].

2.1 *Quelques propriétés du béta-développement*

En conservant la même notation comme dans le premier chapitre, on suppose toujours β un réel plus grand que 1. On a deja vu dans le premier chapitre que pour tout réel positif α, on peut associer une suite d'entiers rationnels non-négatifs, le théorème qui suit donne une certaine réponse au problème inverse.

Théorème 2.1.1 *Soit* $(b_0, b_1, ...)$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{N}$, *où* $b_0 \geq 1$. *Alors* *il existe* $\alpha \in [1, \beta[$, *satisfaisant*

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots,$$

si et seulement si on a pour tout $n \geq 0$, *on a*

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < 1.$$

Preuve. Supposons qu'il existe $\alpha \in [1, \beta[$, tel que $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots$. Pour $n = 0$, on a $\frac{b_0}{\beta} + \frac{b_1}{\beta^2} + \cdots = \frac{\alpha}{\beta} < 1$, car $\alpha < \beta$. Pour $n \geq 1$, et d'après la proposition 1.2.1, on a $\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots = r_{n-1}(\alpha) < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Inversement, supposons que $\forall n \geq 0$, $\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < 1$. Posons $\alpha = b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots$. Alors, $0 \leq \alpha/\beta < 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha < \beta$, et comme $\alpha \geq b_0 \geq 1$, on a $1 \leq \alpha < \beta$. Pour $n = 1$, l'inégalité $\frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \cdots < 1$, donne $\varepsilon_0(\alpha) = [\alpha] = \left[b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots\right] = b_0$, et $r_0(\alpha) = \frac{b_1}{\beta} + \frac{b2}{\beta^2} + \ldots$. Supposons que $r_n(\alpha) = \frac{b_{n+1}}{\beta} + \frac{b_{n+2}}{\beta^2} + \cdots$, et $\varepsilon_n(\alpha) = b_n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\beta r_n(\alpha) = b_{n+1} + \frac{b_{n+2}}{\beta} + \frac{b_{n+3}}{\beta^2} + \cdots$, et donc $\varepsilon_{n+1}(\alpha) = b_{n+1}$, car $\frac{b_{n+2}}{\beta} + \frac{b_{n+3}}{\beta^2} + \cdots < 1$, et $r_{n+1}(\alpha) = \frac{b_{n+2}}{\beta} + \frac{b_{n+3}}{\beta^2} + \cdots$; d'où

$$\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots.$$

■

Définition 2.1.1 *Une suite* $(b_0, b_1, ...)$ *satisfaisant les conditions du théorème* 2.1.1 *est dite* $\beta-$*admissible.*

Corollaire 2.1.1 *Si une suite d'éléments de* $\mathbb{N}$ *est* $\beta-$*admissible, alors elle est* $\beta'-$*admissible,* $\forall \beta' \geq \beta$.

Preuve. Supposons que la suite d'éléments de $\mathbb{N}$, $(b_0, b_1, ...)$ soit $\beta-$admissible, c'est-à-dire que $b_0 \geq 1$ et $\forall n \geq 0$, $\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < 1$. Comme $\beta' \geq \beta$, on a $\frac{b_i}{(\beta')^{i-n+1}} \leq \frac{b_i}{\beta^{i-n+1}}$ pour tout entier rationnel $i \geq n$, et donc $\frac{b_n}{\beta'} + \frac{b_{n+1}}{\beta'^2} + \cdots \leq \frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < 1$. Du théorème 2.1.1, on déduit alors que $(b_0, b_1, ...)$ est aussi $\beta'-$admissible. ■

Corollaire 2.1.2 *Supposons que soit β un entier rationnel. Alors la suite $(b_0, b_1, ...)$ d'éléments de $\mathbb{N}$, est $\beta-$admissible, si et seulement si $b_0 \geq 1$, $b_n \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$, tel que $b_n \neq \beta - 1$.*

Preuve. Supposons que la suite $(b_0, b_1, ...)$ soit $\beta-$admissible. S'il existe $n \geq 0$ tel que $b_n \geq \beta$, alors

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots \geq 1 + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots \geq 1$$

et cela contredit l'hypothèse. D'autre part si $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$, $b_n = \beta - 1$, alors

$$\frac{b_N}{\beta} + \frac{b_{N+1}}{\beta^2} + \cdots = \frac{\beta - 1}{\beta} + \frac{\beta - 1}{\beta^2} + \cdots = 1$$

et cela conduit aussi à une contradiction. Ainsi $\forall n \geq 0$, on a $b_n \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$, et $\forall N$, $\exists n \geq N$, tel que $b_n \neq \beta - 1$. Inversement, supposons que $\forall n \geq 0$, on a $b_n \in \{0, 1, ..., \beta - 1\}$, et $\forall N$, $\exists n \geq N$, avec $b_n \neq \beta - 1$, c'est-à-dire que la suite $(b_0, b_1, ...)$ contient une infinité de termes de l'ensemble $\{0, 1, ..., \beta - 2\}$. Alors

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < \frac{\beta - 1}{\beta} + \frac{\beta - 1}{\beta^2} + \cdots = 1, \ \forall n \geq 0,$$

et d'après le théorème 2.1.1, la suite $(b_0, b_1, ...)$ est $\beta-$admissible, puisque par hypothèse $b_0 \geq 1$. ■

2.2 *Béta-développement fini ou périodique*

Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels est dite périodique, s'il existe deux entiers $N \in \mathbb{N}$, et $p \in \mathbb{N}^*$, tels que $x_{n+p} = x_n$ $\forall n \geq N$. Le plus petit entier p, satisfaisant la dernière égalité s'appelle période de la suite. Dans le cas où $N = 0$, on dit que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est purement périodique.

Proposition 2.2.1 *Soient $\alpha \in [1, \beta[$, $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \beta^{-1} + \cdots$, et $r_n(\alpha) = r_n$, alors la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est périodique si et seulement si $(r_n)_{n \geq 0}$ l'est.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux entiers $N \geq 0$, et $p \geq 1$, tels que $r_{n+p} = r_n, \forall n \geq N$. Alors

$$\varepsilon_{n+p+1} = [\beta r_{n+p}] = [\beta r_n] = \varepsilon_n.$$

Donc $\varepsilon_{n+p} = \varepsilon_n$, $\forall n \geq N+1$, ce qui signifie que $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est périodique de période inférieure ou égal à p. Inversement, supposons qu'il existe deux entiers $N \geq 0$, et $p \geq 1$, tels que $\varepsilon_{n+p} = \varepsilon_n, \forall n \geq N$. Alors de la proposition 1.2.1 on voit que

$$r_{n-1} = \frac{\varepsilon_n}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta^2} + \cdots = \frac{\varepsilon_{n+p}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1+p}}{\beta^2} + \cdots = r_{n-1+p.}$$

Donc $r_n = r_{n+p}$, $\forall n \geq N-1$. Ce qui signifie que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est périodique de période inférieure ou égale à p. Il s'ensuit que si l'une des deux suites $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$, et $(r_n)_{n\geq 0}$ est périodique alors l'autre l'est aussi, et elles sont de même période. ■

Définition 2.2.1 *Soit* $\alpha \in [1, \beta[$, $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta^{-1} + \cdots$. *Alors on dit que le béta-développement de* α *est fini si la suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *se termine seulement par des zéros, c'est-à-dire, s'il existe un entier* N *tel que* $\forall n \geq N$, $\varepsilon_n = 0$. *Dans ce cas on note* $\alpha \equiv (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_N)_{\beta.}$ *L'ensemble des réels qui ont un béta-développement fini est noté* $Fin(\beta)$.

Définition 2.2.2 *Soit* $\alpha \in [1, \beta[$, $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta^{-1} + \cdots$. *Alors on dit que le béta-développement de* α *est périodique si* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *est périodique. On note* $Per\ (\beta)$*l'ensemble des réels qui ont un béta-développement périodique.*

Proposition 2.2.2 *Avec la notation ci-dessus, les propositions suivantes sont vraies :*

1. $Fin(\beta) \subset Per(\beta)$.
2. $\{0, 1, \cdots, [\beta]\} \cup \left\{\beta^k, k \in \mathbb{Z}\right\} \subset Fin(\beta)$.
3. $Per(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta)$.

Preuve. 1. Si $\alpha \in Fin(\beta)$, alors $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ se termine par des zéros, et donc $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est périodique de période 1, avec 0 comme partie périodique.

2. La preuve est immédiate par définition de $Fin(\beta)$.

3. Soit $\alpha \in Per(\beta)$. Alors il existe deux entiers $N \in \mathbb{N}$, et $k \geq 1$ tels que $\forall n \geq N, \varepsilon_{n+k} = \varepsilon_n$. Alors

$$\alpha = \varepsilon_p\beta^p + \varepsilon_{p-1}\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots \frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}} + (\frac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\beta^{n+k-1}})(\frac{\beta^k}{\beta^k - 1})$$

et peut s'écrire $\alpha = \frac{P(\beta)}{T(\beta)}$, où $P(x), T(x) \in \mathbb{Z}(x)$, et $T(\beta) \neq 0$; donc $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$. ■

Proposition 2.2.3 *Soient $\alpha \in [1, \beta[$, et $(r_n)_{n\geq 0} = (r_n(\alpha))_{n\geq 0}$. S'il existent $m \neq n$, tels que $r_n = r_m$, alors $(r_n)_{n\geq 0}$ est périodique.*

Preuve. Supposons par exemple que $m > n \geq 0$, et $r_n = r_m$. Posons $m = n + p$. Alors $p \geq 1$, et $r_{n+p} = r_n$. Supposons que $r_{t+p} = r_t$ pour un certain $t \geq n$, alors $r_{n+1+p} = [\beta r_{n+p}] = [\beta r_n] = r_{n+1}$, et par récurrence on obtient le résultat. ■

2.3 *Sur les nombres de Parry*

Les nombres de Parry, appelés aussi les nombres-béta, ont été définis et étudiés par W. Parry [22]. Plusieurs problèmes en liaison avec ces nombres restent ouvert. Par exemple on ne sait pas si tous les nombres de Salem sont des nombres de Parry [31]. On note $\mathbb{P}$ L'ensemble des nombres de Parry.

Définition 2.3.1 *Soit β un réel, avec $\beta > 1$.On dit que β est un nombre de Parry, si $\{\beta\} \in Per(\beta)$. En particulier, si $\{\beta\} \in Fin(\beta)$, le nombre β est dit un nombre de Parry simple.*

Exemple 2.3.1 1. *Soit $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il est clair que $[\beta] = 1$, et $\{\beta\} = \beta - 1$, et par l'exemple* 1.2.3, *on déduit que le béta-développement de $\{\beta\}$ est donné par : $\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \cdots$. Ainsi $\{\beta\} \in Fin(\beta)$ et β est un nombre de Parry simple.*

2. *Si $\beta \in \mathbb{N}$, $\{\beta\} = 0$ et par convention il admet un béta-développement fini. Donc β est un nombre de Parry simple.*

3. Soit $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Il est clair que $[\beta] = 2$, et $\{\beta\} = \beta - 2$, et de l'exemple 5-b, on voit que le béta-développement de $\{\beta\}$ est donné par : $\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \cdots$. Ainsi $\{\beta\} \in Per(\beta)$ et β est un nombre de Parry (qui n'est pas simple).

La majeure partie des résultats qui suivent sur les nombres de Parry sont dus à W. Parry [22].

Proposition 2.3.1 *Un nombre de Parry, est un entier algébrique.*

Preuve. Supposons d'abord que β soit un nombre de Parry simple, c'est -à -dire, que $\{\beta\} \in Fin(\beta)$ avec

$$\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}}.$$

Posons $\varepsilon_0 = [\beta]$. Alors, $\beta - \varepsilon_0 = \{\beta\} = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}}$, et $\beta^n - \varepsilon_0\beta^{n-1} - \varepsilon_1\beta^{n-2} - \cdots - \varepsilon_{n-1} = 0$. Donc β est un entier algébrique, puisqu'il est racine du polynôme unitaire à coefficients entiers rationnels

$$x^n - \varepsilon_0 x^{n-1} - \cdots - \varepsilon_{n-1}. \tag{2-1}$$

Supposons maintenant $\{\beta\} \in Per(\beta)$. Posons $\varepsilon_0 = [\beta]$ et

$$\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}} + (\frac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+p-1}}{\beta^{n+p-1}}) + (\frac{\varepsilon_n}{\beta^{n+p}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+p-1}}{\beta^{n+2p-1}}) + \cdots,$$

où p est la période de la suite $\varepsilon_n(\beta) = \varepsilon_n$. Alors

$$\beta - \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}} + (\frac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+p-1}}{\beta^{n+p-1}})(\frac{\beta^p}{\beta^p - 1}),$$

et

$$\beta - \frac{\varepsilon_0\beta^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}} = (\varepsilon_n\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_{n+p-1})\frac{1}{\beta^{n-1}(\beta^p - 1)}.$$

En Multipliant les deux termes de l'équation précédente par β^{n-1}, on obtient

$$\beta^n - (\varepsilon_0\beta^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1}) = (\frac{1}{\beta^p - 1})(\varepsilon_n\beta^{p-1} + \cdots + \varepsilon_{n+p-1}),$$

et donc

$$\beta^{n+p} - (\varepsilon_0\beta^{n+p-1} + \cdots + \varepsilon_{n+p-1}) = \beta^n - (\varepsilon_0\beta^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1}).$$

Ainsi β est zéro du polynôme unitaire à coefficients entiers rationnels et de degré $n+p$:

$$x^{n+p} - (\varepsilon_0 x^{n+p-1} + \cdots + \varepsilon_{n+p-1}) - (x^n - \varepsilon_0 x^{n-1} - \cdots - \varepsilon_{n-1}). \qquad (2\text{-}2)$$

ce qui signifie que β est un entier algébrique. ■

Remarque 2.3.1 *Avec la notation de la preuve ci-dessus, il est clair que si β est un nombre de Parry simple, alors la période et le nombre de termes non-périodiques de suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ sont respectivement n et $p=1$. Il en ressort de (2-2) que β est racine du polynôme $x^{n+1} - (\varepsilon_0 x^n + \cdots + \varepsilon_{n-1}x + \varepsilon_n) - (x^n - \varepsilon_0 x^{n-1} - \cdots - \varepsilon_{n-1}) = (x-1)(x^n - \varepsilon_0 x^{n-1} - \cdots - \varepsilon_{n-1})$, puisque $\varepsilon_n = 0$; d'où β est racine du polynôme défini par (2-1), et la définition qui suit.*

Définition 2.3.2 *Avec la notation de la remarque ci-dessus, le polynôme défini par la relation (2-2), est dit polynôme caractéristique du nombre de Parry β.*

Proposition 2.3.2 *Les conjugués du nombre de Parry β, autres que β, sont de module < 2.*

Preuve. Soit β un nombre de Parry et soit

$$f(x) = x^{n+k} - (\varepsilon_0 x^{n+k-1} + \cdots + \varepsilon_0 x_{n+k-1}) - (x^n - \varepsilon_0 x^{n-1} - \cdots - \varepsilon_{n-1}),$$

son polynôme caracteristique, où $n \geq 1$ est le nombre des termes non périodique de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ et $k \geq 1$ est la période de cette suite. Il est clair que les conjugués de β sont parmi les racines de f, puisque le polynôme minimal de β divise f dans $\mathbb{Z}[x]$.On considère deux cas pour prouver que les modules des racines de f (à l'exeption de β) sont de module inferieur à 2. Supposons d'abord $n=1$. Dans ce cas on a :

$$f(x) = x^{k+1} - (\varepsilon_0 x^k + \varepsilon_1 x^{k-1} + \cdots + \varepsilon_k) - x + \varepsilon_0.$$

A partir des relations $\varepsilon_0 = \beta - r_0,$ $\varepsilon_t = [\beta r_{t-1}] = \beta r_{t-1} - r_t$, et $\varepsilon_{mk+t} = \varepsilon_t$ pour tout $m \geq 0$ et $1 \leq t \leq k$, nous pouvons réécrire le polynôme $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = x^{k+1} - (\beta - r_0)x^k - \cdots - (\beta r_{k-1} - r_k) - x + (\beta - r_0).$$

Soit α un conjugué de β. Si $|\alpha| \leq 1$ alors $|\alpha| < 2$. Supposons alors $\alpha \neq \beta$ et $|\alpha| > 1$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha) = \alpha^{k+1} - (\beta - r_0)\alpha^k - \cdots - (\beta r_{k-1} - r_k) - \alpha + (\beta - r_0) \\ &= \alpha P(\alpha) + r_k - \beta P(\alpha) - (\alpha - \beta) - r_0, \end{aligned}$$

où $P(\alpha) = \alpha^k + r_0\alpha^{k-1} + r_1\alpha^{k-2} + \cdots + r_{k-1}$, et

$$(\alpha - \beta)P(\alpha) - (\alpha - \beta) + r_k - r_0 = 0.$$

Par ailleurs, de la proposition 1.2.1, on a

$$r_k = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{\beta^2} + \cdots = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots = r_0.$$

Il resulte que :

$$0 = (\alpha - \beta)(P(\alpha) - 1),$$

$$\alpha^k + r_0\alpha^{k-1} + r_1\alpha^{k-2} + \cdots + r_{k-1} - 1 = P(\alpha) - 1 = 0$$

et

$$0 = |P(\alpha) - 1| \geq \left|\alpha^k\right| - r_0\left|\alpha^{k-1}\right| - \cdots - r_{k-1} - 1.$$

Donc

$$0 > |\alpha|^k - |\alpha|^{k-1} - \cdots - |\alpha| - 2,$$

et comme $0 \leq r_i < 1$, alors

$$1 > |\alpha|^k - (1 + |\alpha| + \cdots + |\alpha|^{k-1}) = |\alpha|^k - \frac{|\alpha|^k - 1}{|\alpha| - 1}$$

et

$$|\alpha - 1| > |\alpha|^{k+1} - 2\,|\alpha|^k + 1.$$

La dernière inégalité donne $|\alpha| - 2 > |\alpha|^k\,(|\alpha| - 2)$, $0 > (|\alpha|^k - 1)(|\alpha| - 2)$ et $|\alpha| < 2$. Supposons maintenant $n \geq 2$. Dans ce cas on a $\varepsilon_0 = \beta - r_0$,

$\varepsilon_t = \beta r_{t-1} - r_t$ pour $1 \leq t \leq n+k-1$ et $\varepsilon_{n+mk+l} = \varepsilon_{n+1}$. pour $m \geq 0$ et $0 \leq l \leq k-1$. Alors, le polynôme f peut aussi s'écrire :

$$x^{n+k} - (\beta - r_0)x^{n+k-1} - \cdots - (\beta r_{n+k-2} - r_{n+k-1}) - (x^n - \cdots - (\beta r_{n-2} - r_{n-1})).$$

Soit $\alpha \neq \beta$ un conjugué de β de module > 1, car si $|\alpha| \leq 1$ alors $|\alpha| < 2$. Donc, α est racine de f et

$$0 = \alpha^{n+k} - \cdots - \beta r_{n+k-2} - r_{n+k-1}) - (\alpha^n - \cdots - (\beta r_{n-2} - r_{n-1})).$$

On peut réecrire la dernière égalité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\alpha^{n+k-1} + r_0\alpha^{n+k-2} + \cdots + r_{n+k-2}) - r_{n+k-1} - \beta(\alpha^{n+k-1} + r_0\alpha^{n+k-2} + \\ &\quad \cdots + r_{n+k-2}) - (\alpha(\alpha^{n-1} + r_0\alpha^{n-2} + \cdots + r_{n-2}) + r_{n-1} \\ &\quad -\beta(\alpha^{n-1} + r_0\alpha^{n-2} + \cdots + r_{n-2})). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $r_{n+k-1} = r_{n-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha - \beta)(\alpha^{n+k-1} + r_0\alpha^{n+k-2} + \cdots + r_{n-1}\alpha^{k-1} + r_n\alpha^{k-2} + \cdots + r_{n+k-2}) \\ &\quad -(\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + r_0\alpha^{n-2} + r_1\alpha^{n-3} + \cdots + r_{n-2}) \end{aligned}$$

et donc

$$\alpha^{n+k-1} + r_0\alpha^{n+k-2} + \cdots + r_{n+k-2} = \alpha^{n-1} + r_0\alpha^{n-2} + r_1\alpha^{n-3} + \cdots + r_{n-2}).$$

Il s'ensuit que α satisfait la relation

$$\alpha^{n+k-1} + \lambda_0\alpha^{n+k-2} + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha^{k-1} + \lambda_n\alpha^{k-2} + \cdots + \lambda_{n+k-2} = 0$$

où les λ_i sont des nombres réels de modules < 1. De la dernière égalité, on déduit que

$$0 \geq \left|\alpha^{n+k-1}\right| - |\lambda_0| \left|\alpha^{n+k-2}\right| - \cdots - |\lambda_{n+k-2}|,$$

et

$$0 \geq \left|\alpha^{n+k-2}\right| - \cdots - |\alpha| - 1 = \frac{|\alpha|^{n+k-1}(|\alpha| - 2) + 1}{|\alpha| - 1},$$

puisque $|\lambda_i| \leq 1$; ainsi

$$|\alpha|^{n+k-1}(|\alpha| - 2) + 1 \leq 0$$

et donc $|\alpha| \leq 2$. ∎

Proposition 2.3.3 *Les conjugués du nombre de Parry β sont de module au plus égal à β.*

Preuve. Soient β un nombre de Parry et α un conjugué de β. Supposons $|\alpha| > \beta$. Donc $|\alpha| > 1$. Soit

$$f(x) = x^{n+k} - (\varepsilon_0 x^{n+k-1} + \cdots + \varepsilon_{n+k-1}) - (x^n - (\varepsilon_0 x^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1}))$$

le polynôme caractéristique de β, où $k \geq 1$et $n \geq 1$ sont définis précédemment. Comme les conjugués de β sont parmi les racines de f, on a

$$\alpha^{n+k} - (\varepsilon_0 \alpha^{n+k-1} + \cdots + \varepsilon_{n+k-1}) - (\alpha^n - (\varepsilon_0 \alpha^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1})) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \alpha^k(\alpha^n - (\varepsilon_0 \alpha^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1})) - (\alpha^n - (\varepsilon_0 \alpha^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1})) \\ = \; & \varepsilon_n \alpha^{k-1} + \varepsilon_{n+1} \alpha^{k-2} \cdots + \varepsilon_{n+k-1}, \end{aligned}$$

et

$$(\alpha^k - 1)(\alpha^n - (\varepsilon_0 \alpha^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1})) = \frac{\alpha^k}{\alpha}(\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\alpha} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\alpha^{k-1}}).$$

La dernière equation peut aussi s'ecrire

$$\frac{\alpha^n - (\varepsilon_0 \alpha^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1})}{\alpha^{n-1}} = \frac{\alpha^k}{\alpha^n(\alpha^k - 1)}(\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\alpha} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\alpha^{k-1}})$$

et donc

$$\alpha - (\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\alpha} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\alpha^{n-1}}) = (\frac{\varepsilon_n}{\alpha^n} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\alpha^{n+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\alpha^{n+k-1}}) \sum_{i \geq 0} \frac{1}{\alpha^{ki}}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \alpha \; = \; & (\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\alpha} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\alpha^{n-1}}) + (\frac{\varepsilon_n}{\alpha^n} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\alpha^{n+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\alpha^{n+k-1}}) \\ & + (\frac{\varepsilon_n}{\alpha^{n+k}} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\alpha^{n+k+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\alpha^{n+2k-1}}) + \frac{\varepsilon_n}{\alpha^{n+2k}} + \cdots \end{aligned}$$

et

$$|\alpha| \leq \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{|\alpha|} + \cdots \leq \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots$$

La dernière inégalité donne une contradiction, puisque

$$\beta = (\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta^{n-1}}) + (\frac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\beta^{n+k-1}}) + (\frac{\varepsilon_n}{\beta^{n+k}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+k-1}}{\beta^{n+2k-1}}) + \cdots$$

et $\alpha > \beta$. ■

On clos ce chapitre par montrer un corollaire d'un résultat plus général qu'on verra dans la chapitre 3 dû à K. Scmidt [28].

Proposition 2.3.4 *Un nombre de Pisot est un nombre de Parry.*

Preuve. Soient β un nombre de Pisot de degré d et

$$\beta \stackrel{\beta}{=} \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots$$

son béta-développement. Soient $\beta = \beta_1, \beta_2, ..., \beta_d$ les conjugués de β et soit σ_1, $\sigma_2, ..., \sigma_d$ les différents plongements de $\mathbb{Q}(\beta)$ dans $\mathbb{C}$, transformant β en $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_d$, respectivement. De la proposition 1.2.1, on déduit que pour tout $n \geq 0$, on a

$$r_n(\beta) = r_n = \beta^{n+1} - (\beta^n\varepsilon_0 + \beta^{n-1}\varepsilon_1 + \cdots + \beta\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n).$$

Fixons maintenant l'entier n. Il est claire que r_n est un entier algébrique appartenant au corps $\mathbb{Q}(\beta)$, puisqu'il est exprimé comme un polynôme en β à coefficients entiers rationels. Notons que les conjugués de r_n sont parmi les nombres $\sigma_1(r_n) = r_n, ..., \sigma_d(r_n)$, où

$$\sigma_i(r_n) = \beta_i^{n+1} - (\varepsilon_0\beta_i^n + \varepsilon_1\beta_i^{n-1} + \cdots + \varepsilon_{n-1}\beta_i + \varepsilon_n).$$

D'autre part, on a pour $i \geq 2$,

$$|(\sigma_i(r_n)| \leq \left|\beta_i^{n+1}\right| + \beta(|\beta_i^n| + \left|\beta_i^{n-1}\right| + \cdots + |\beta_i| + 1) < \frac{\beta}{1 - |\beta_i|},$$

car $|\beta_i| < 1$. De plus comme $0 \leq r_n < 1$, il en résulte que tous les conjugués de r_n sont des modules inférieurs à une constante dépendant seulement de β (on peut choisir une telle constante égale à $\max\limits_{2\leq i\leq d} \frac{\beta}{1-|\beta_i|}$). Maintenant comme les coefficients du polynôme minimal de r_n sont les fonctions élémentaires symétriques des conjugués de r_n, on conclut que ces coefficients sont bornés et prennent seulement un nombre fini de valeurs, puisqu' ils sont des entiers rationnels. Ainsi, l'ensemble $\{r_n : n \geq 0\}$ est fini, et donc β est un nombre de Parry, d'après la proposition 2.2.3. ■

Il y a d'autres résultats aussi importants que ceux prouvés ci-dessus, mais vu le temps limité pour accomplir ce mémoire on n'a pas pu les joindre dans ce travail. A titre d'information, citons quelques uns : Les nombres de Parry simples sont denses dans l'intervalle $[1, \infty[$ [22], les conjugués d'un nombre de Parry sont de module au plus égal à la constante optimale $(1+\sqrt{5})/2$ [31]... ; toutefois beaucoup de problèmes restent ouverts sur les nombres de Parry. Par exemple on ne sait si tous les nombres de Salem sont des nombres de Parry, et aussi il n'y a aucune caractérisation connue des nombres de Parry en termes de leurs conjugués.

Chapitre 3

Béta-développement en base de Salem

Pour définir les nombres de Parry, on s'est interessé au béta-développement de la partie fractionnaire $\{\beta\}$ de la base $\beta > 1$. En fait, le béta-développement de $\{\beta\}$ joue un role fondamental dans la détermination de l'admissibilité d'une suite d'entiers rationnels, comme l'avait prouvé W. Parry [22]. Dans le premier paragraphe de ce chapitre on montre certains résultats en lien avec de telles notions. Le second paragraphe est essentiellement consacré à des théorèmes de K. Schmidt [28], et qui avait, en particulier, montré que si $Per(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$, alors β est un nombre de Pisot ou bien un nombre de Salem. Comme on l'a deja signalé, dans le deuxième chapitre, si $\beta \in \mathbb{S}$ alors $\beta \in \mathbb{P}$. En fait, un autre résultat de K. Schmidt [28], dit que si $\beta \in \mathbb{S}$ alors $Per(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$. De plus K. Schmidt a conjecturé que la dernière implication reste vraie si β est un nombre de Salem. Il est bien évident que si cette conjecture est vraie alors $\mathbb{T} \subset \mathbb{P}$.

D. W. Boyd [5], a vérifié cette dernière implication pour la cas quartique, et c'est l'objet du dernier paragraphe de ce chapitre.

3.1 *Nombres de Parry et suites admissibles*

Définition 3.1.1 *Soient $(a_n)_{n\geq p}$ et $(b_n)_{n\geq q}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{N}$. On dit que $(a_n)_{n\geq p}$ est lexicographiquement inférieure à $(b_n)_{n\geq q}$, s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $a_p = b_q$, $a_{p+1} = b_{q+1}$, $a_{p+k-1} = b_{q+k-1}$, et $a_{p+k} < b_{q+k}$. Dans ce cas on écrit $(a_n)_{n\geq p} <_L (b_n)_{n\geq q}$. On dit aussi que $(a_n)_{n\geq p} =_L (b_n)_{n\geq q}$*

(resp., $(a_n)_{n\geq p} \leq (b_n)_{n\geq q}$) si $a_{n+p} = b_{n+q}$, $\forall n \geq 0$ (resp., si $(a_n)_{n\geq p} <_L (b_n)_{n\geq q}$ ou bien $(a_n)_{n\geq p} =_L (b_n)_{n\geq q}$).

Exemple 3.1.1 1.$(123999\cdots) <_L (124000\cdots)$, *car* $1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 < 4$
2.$(0999\cdots) <_L (1000\cdots)$, *car* $0 < 1$
3.$(6752987\cdots) <_L (6753987\cdots)$, *car* $6 = 6\ ,\ 7 = 7,\ 5 = 5,\ 2 < 3$

Théorème 3.1.1 *Soit β un réel, avec $\beta > 1$. Supposons*

$$\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{a_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \cdots$$

où $k \geq 1$, et que β ne soit pas un nombre de Parry simple. Posons aussi $a_0 = [\beta]$, et $a_i = 0$, $\forall \leq i \leq k-1$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}$, avec $\varepsilon_0 \geq 1$. Alors, il existe $\alpha \in [1, \beta[$, tel que $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$ $\Leftrightarrow (\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots) <_L (a_0, a_1, \cdots), \forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Supposons qu'il existe un réel $\alpha \in [1, \beta[$, *tel que* $\alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$. D'après le théorème 2.1.1, on a

$$\frac{\varepsilon_n}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta^2} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^3} + \cdots < 1, \tag{3-1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. D'autre part, comme $\beta - [\beta] = \beta - a_0 = \{\beta\} = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots$, on a $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} \cdots$ et

$$\frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \frac{a_2}{\beta^3} + \cdots = 1. \tag{3-2}$$

De $(3-1)$ *et* $(3-2)$ on déduit que

$$\frac{\varepsilon_n}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta^2} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^3} + \cdots < \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \frac{a_2}{\beta^3} + \cdots \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3-3}$$

c'est-à-dire, que $\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^2} + \cdots < a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots$, et par suite $(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \cdots) \neq_L (a_0, a_1, a_2, \cdots)$. Soit l le plus petit entier vérifiant $\varepsilon_{n+1} \neq a_l$. Alors la relation $(3-3)$ donne

$$\frac{\varepsilon_{n+l}}{\beta^l} + \frac{\varepsilon_{n+l+1}}{\beta^{l+1}} + \cdots < \frac{a_l}{\beta^l} + \frac{a_{l+1}}{\beta^{l+1}} + \cdots. \tag{3-4}$$

En multipliant dans $(3-4)$ les deux membres de l'inégalité par β^l, on obtient

$$\varepsilon_{n+l} + \frac{\varepsilon_{n+l+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+l+2}}{\beta^2} + \cdots < a_l + \frac{a_{l+1}}{\beta} + \frac{a_{l+2}}{\beta^2} + \cdots.$$

Comme

$$\varepsilon_{n+l} \leq \varepsilon_{n+l} + \frac{\varepsilon_{n+l+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+l+2}}{\beta^2} + \cdots < a_l + \frac{a_{l+1}}{\beta} + \frac{a_{l+2}}{\beta^2} + \cdots$$

et

$$\frac{a_{l+1}}{\beta} + \frac{a_{l+2}}{\beta^2} + \cdots \leq (\beta-1)(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^i}) = 1,$$

on voit que $\varepsilon_{n+l} < a_l + 1$ et donc $\varepsilon_{n+l} \leq a_l$, d'où $\varepsilon_{n+l} < a_l$, et ainsi $(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+l}, \cdots) <_L (a_0, a_1, \cdots), \forall n \in \mathbb{N}$. Inversement, supposons que $(\varepsilon_n \varepsilon_{n+l} \cdots) <_L (a_0 a_1 \cdots), \forall n \in \mathbb{N}$. Montrons d'abord que si pour certains entiers n, r et m, on a

$$(\varepsilon_n \varepsilon_{n+l} \cdots \varepsilon_{n+r}) <_L (a_m a_{m+1} \cdots a_{m+r})$$

alors

$$\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^r} \leq a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^r}. \tag{3-5}$$

Pour cela, on utilise une récurrence sur r. Pour $r = 0$, $(\varepsilon_n) <_L (a_m) \Longrightarrow \varepsilon_n < a_m$. Supposons que l'implication soit vérifiée jusqu'à $r-1$, où $r \geq 1$, et montrons la pour l'ordre r. Comme $(\varepsilon_n \varepsilon_{n+l} \cdots \varepsilon_{n+r}) <_L (a_m a_{m+1} \cdots a_{m+r})$ on a $\varepsilon_n \leq a_m$. Si $\varepsilon_n = a_m$, alors $(\varepsilon_{n+1} \cdots \varepsilon_{n+r}) <_L (a_{m+1} \cdots a_{m+r})$, et par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\varepsilon_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^{r-1}} \leq a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^{r-1}}.$$

En divisant par β et on ajoutant $\varepsilon_n = a_m$, on obtient de la dernière inégalité le résultat voulu. Sinon, on a $\varepsilon_n < a_m$, et donc $\varepsilon_n + 1 \leq a_m$. Comme $(\varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2} \cdots \varepsilon_{n+r}) \leq_L (a_0 a_1 \cdots a_{r-1})$, alors de l'hypothèse de récurrence on déduit que

$$\varepsilon_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^{r-1}} \leq a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{\beta^{r-1}}$$

et par suite

$$\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^r} \leq \varepsilon_n + \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \frac{a_2}{\beta^3} + \cdots = \varepsilon_n + 1 \leq a_m \leq a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^r};$$

d'où le résultat. De plus, supposons l'égalité a lieu dans la relation $(3-5)$, c'est-à-dire,

$$\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^r} = a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^r}. \tag{3-6}$$

Soit $t \leq r$ le plus petit entier vérifiant $\varepsilon_{n+t} < a_{m+t}$ $(\Rightarrow \varepsilon_{n+t} + 1 \leq a_{m+t})$, alors la relation $(3-6)$ s'écrit

$$\varepsilon_{n+t} + \frac{\varepsilon_{n+t+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^{r-t}} = a_{m+t} + \frac{a_{m+t+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^{r-t}}.$$

Par hypothèse, on a $(\varepsilon_{n+t+1}\varepsilon_{n+t+2}\cdots) <_L (a_0, a_1, \cdots)$ et donc $\frac{\varepsilon_{n+t+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+t+2}}{\beta^2} + \cdots \leq \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots$. On en déduit que

$$\begin{aligned} a_{m+t} + \frac{a_{m+t+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^{r-t}} &= \varepsilon_{n+t} + \frac{\varepsilon_{n+t+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^{r-t}} \\ &\leq \varepsilon_{n+t} + \frac{\varepsilon_{n+t+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+t+2}}{\beta^2} + \cdots \\ &\leq \varepsilon_{n+t} + \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots = \varepsilon_{n+t} + 1 \\ &\leq a_{m+t} + \frac{a_{m+t+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^{r-t}}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $a_{m+t+1} = a_{m+t+2} = \cdots = 0$ et cela contredit le fait que β ne soit pas simple. Ainsi l'inégalité dans la relation $(3-5)$ est stricte. Ainsi, on a prouvé l'implication

$$(\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}\cdots\varepsilon_{n+r}) <_L (a_m a_{m+1}\cdots a_{m+r}) \Longrightarrow \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n+r}}{\beta^r} < a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots + \frac{a_{m+r}}{\beta^r} \tag{3-7}$$

$\forall r \geq 0$. En faisant tendre $r \to \infty$, on obtient

$$(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}\cdots) <_L (a_m, a_{m+1}, \cdots) \Longrightarrow \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots \leq a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots, \tag{3-8}$$

Supposons qu'on ait égalité dans le membre à droite de $(3-8)$ et soit t le plus petit entier vérifiant

$$\varepsilon_{n+t} < a_{m+t}.$$

Posons $p = n + t$ et $q = m + t$. Alors $\varepsilon_p + 1 \leq a_q$, et donc l'égalité $\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots = a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots$ est équivalente à dire que

$$\varepsilon_p + \frac{\varepsilon_{p+1}}{\beta} + \cdots = a_q + \frac{a_{q+1}}{\beta} + \cdots.$$

Par hypothèse, on a $(\varepsilon_{p+1}\varepsilon_{p+2}\cdots) <_L (a_0a_1\cdots)$, et par suite, $\frac{\varepsilon_{p+1}}{\beta}+\frac{\varepsilon_{p+2}}{\beta^2}+\cdots \leq \frac{a_0}{\beta}+\frac{a_1}{\beta^2}+\cdots$. On déduit alors

$$\begin{aligned} a_q+\frac{a_{q+1}}{\beta}+\cdots &= \varepsilon_p+\frac{\varepsilon_{p+1}}{\beta}+\frac{\varepsilon_{p+2}}{\beta^2}+\cdots \\ &\leq \varepsilon_p+\frac{a_0}{\beta}+\frac{a_1}{\beta^2}+\cdots=\varepsilon_p+1\leq a_q\leq a_q+\frac{a_{q+1}}{\beta}+\cdots. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $a_{q+1}=a_{q+2}=\cdots=0$, et cela contredit l'hypothèse que β ne soit pas un nombre de Parry simple. Ainsi l'inégalité dans la relation $(3-8)$ est stricte. En appliquant cette relation avec $m=0$, et $n\in\mathbb{N}$, on obtient immédiatement que

$$\frac{\varepsilon_n}{\beta}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta^2}+\cdots<\frac{a_0}{\beta}+\frac{a_1}{\beta^2}+\cdots=1,$$

et du théorème 2.1.1 on déduit le résultat. ■

Du théorème 2.1.1, on déduit que si β n'est pas un nombre de Parry simple, et si $\{\beta\}\overbrace{\equiv}^{\beta}\frac{a_k}{\beta^k}+\frac{a_{k+1}}{\beta^{k+1}}+\cdots$, alors la suite d'entiers rationnels non-négatifs $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est admissible, si et seulement si

$$(\varepsilon_p\varepsilon_{p+1}\cdots) <_L (\lfloor\beta\rfloor\, 0\cdots 0a_ka_{k+1}\cdots),\quad \forall p\geq 0.$$

Par les mêmes outils on montre le théorème suivant, du également à W. Parry [22], et qui montre l'admissibilité d'une suite dans le cas d'un nombre de Parry simple, complétant ainsi le théorème 3.1.1.

Théorème 3.1.2 *Soit β un nombre de Parry simple, avec*

$$\{\beta\}\overbrace{\equiv}^{\beta}\frac{a_k}{\beta^k}+\frac{a_{k+1}}{\beta^{k+1}}+\cdots+\frac{a_q}{\beta^q},$$

où $a_k\neq 0$, $a_q\neq 0$. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite d'élèments de $\mathbb{N}$, purement périodique de période $q+1$, avec $b_0=\lfloor\beta\rfloor$, $b_i=0$ pour tout $i\in\{1,...,k-1\}$, $b_i=a_i$ lorsque $i\in\{k,...,q-1\}$ et $b_q=a_q-1$. Alors la suite d'élèments de $\mathbb{N}$, $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est admissible si et seulement si

$$(\varepsilon_p\varepsilon_{p+1}\cdots) <_L (b_n)_{n\geq 0}=(\overline{\lfloor\beta\rfloor,0,\cdots,0,a_k,\cdots,a_{q-1},a_q-1}),\ \forall p\geq 0.$$

Exemple 3.1.2 1. *Soit* $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Alors* β *est un nombre de Parry simple, avec* $\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{0}{\beta^2} + \cdots$. *Avec la notation du théorème* 3.1.2, *on a* $k = 1 = q$, $b_0 = 1$, $b_1 = a_1 - 1 = 0$. *Ainsi la suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *est admissible si et seulement si*

$$(\varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \cdots) <_L (\overline{10}) = (101010 \cdots), \ \forall p \geq 0.$$

Par exemple, la suite $(011000 \cdots)$ *n'est pas admissible, car la suite* $(1100 \cdots)$ *n'est pas léxicographiquement inférieure à* $(101010\cdots)$. *Mais la suite* $(10101000 \cdots)$ *est admissible.*

2. *On a déjà vu que si* $\beta \in \mathbb{N}$, *alors* β *est un nombre de Parry simple. Avec la notation du théorème* 3.1.2, *on a* $b_0 = \beta - 1$, $k = q = 0$, *la suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *est admissible si et seulement si*

$$(\varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \cdots) <_L (\overline{\beta - 1}) \ \ \forall p \geq 0,$$

c'est-à-dire, qu'elle ne se termine pas seulement par des $\beta - 1$.*Par exemple la suite* $(\beta - 1\overline{\beta - 2})$ *est admissible. Mais la suite* $(000\overline{\beta - 1})$ *n'est pas admissible.*

3. *Soit* $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, β *est un nombre de Parry, qui n'est pas simple, car* $\{\beta\} \overbrace{\equiv}^{\beta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \cdots$. *Alors en appliquant le théorème 3.1.1, on obtient que la suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *est admissible si et seulement si*

$$(\varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \cdots) <_L (2111 \cdots), \ \forall p \geq 0,$$

puisque $\lfloor \beta \rfloor = 2$. *Par exemple* $(21110 \cdots)$ *est admissible, mais* $(21112 \cdots)$ *ne l'est pas.*

3.2 Béta-développement en base de Pisot ou de Salem

On a deja vu dans le chapitre précédent, que pour tout base β, l'ensemble $Per(\beta)$ des nombres réels qui ont des béta-développements périodiques en base β est contenu dans le corps $\mathbb{Q}(\beta)$. Le théorème suivant du à K. Scmidt [28] aborde la question inverse.

Théorème 3.2.1 *Avec la notation ci-dessus, si* $\mathbb{Q}(\beta) \subset Per(\beta)$, *alors* β *est un nombre de Pisot ou bien un nombre de Salem.*

Preuve. Soit donc $\beta > 1$ satisfaisant la condition $\mathbb{Q}(\beta) \subset Per(\beta)$. Comme $1/2 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta)$, on a

$$\frac{1}{2} \overbrace{\equiv}^{\beta} (\frac{\varepsilon_p}{\beta^p} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{\beta^{k-1}}) + (\frac{\varepsilon_k}{\beta^k} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k+t-1}}{\beta^{k+t-1}}) + (\frac{\varepsilon_k}{\beta^{k+t}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k+t-1}}{\beta^{k+2t-1}}) + \cdots,$$

où $t \geq 1$ est période de ce développement, $k \geq p \geq 1$ et $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{p-1} = 0$. Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{\beta^{k-1}} + (\frac{\varepsilon_k}{\beta^k} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k+t-1}}{\beta^{k+t-1}})(\frac{\beta^t}{\beta^t - 1}) \\ &= \frac{\varepsilon_1\beta^{k-1} + \cdots + \varepsilon_{k-1}\beta}{\beta^k} + \frac{1}{\beta^k}(\frac{\varepsilon_k\beta^t + \cdots + \varepsilon_{k+t-1}\beta}{\beta^t - 1})\end{aligned}$$

et

$$\beta^k(\beta^t - 1) = 2(\varepsilon_1\beta^{k-1} + \cdots + \varepsilon_{k-1}\beta)(\beta^t - 1) + 2(\varepsilon_k\beta^t + \cdots + \varepsilon_{k+t-1}\beta).$$

Il s'ensuit lorsque $k = p$, c.-à-d., que le développement de $1/2$ est purement périodique, que β est une racine du polynôme unitaire $X^{k+t} - X^k - 2\varepsilon_k X^t - \cdots \in \mathbb{Z}[X]$, puisque $k \geq 1$. De même, si $k \neq p$, alors $k \geq 2$ et β racine du polynôme unitaire $X^{k+t} - X^k - 2\varepsilon_1 X^{t+k-1} - \cdots - 2\varepsilon_k X^t - \cdots \in \mathbb{Z}[X]$. On en déduit que β entier est un entier algébrique. Considérons maintenant un élément

$$\alpha_0 \in \left]\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^m}, \frac{1}{\beta} + \frac{1+\varepsilon}{\beta^m}\right[\cap \mathbb{Q}, \tag{3-9}$$

où $0 < \varepsilon < \min\{1, \beta - 1\}$, et m est un entier rationnel suffisemment grand pour verifier la condition $1 + 1/\beta^{m-2} < \min(2, \beta)$. Alors de $(3-9)$, on a $1 + \frac{1}{\beta^{m-1}} < \beta\alpha_0 < 1 + \frac{1+\varepsilon}{\beta^{m-1}} < 1 + \frac{\beta}{\beta^{m-1}}$ et si l'on pose $\alpha = \beta\alpha_0$ alors $1 < \alpha < \min(2, \beta) \Longrightarrow 1 < \alpha < \beta$. Il est clair que $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$. Considérons maintenant le béta-développement de α. Alors un simple calcul montre que $\varepsilon_0 = [\alpha] = 1$, $r_0 = \alpha - 1$, $\frac{1}{\beta^{m-1}} < r_0 < \frac{1}{\beta^{m-2}}$, $\frac{1}{\beta^2} < \beta^{m-3} r_0 < \frac{1}{\beta} \Longrightarrow \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{m-2} = 0$ et $\varepsilon_{m-1} = 1$, puisque $1 < \beta^{m-1} r_0 < 1 + \varepsilon < 2$. Ainsi

$$\beta\alpha_0 = \alpha \overbrace{\equiv}^{\beta} 1 + \frac{1}{\beta^{m-1}} + \frac{\varepsilon_m}{\beta^m} + \cdots$$

et

$$\alpha_0 \overbrace{\equiv}^{\beta} 1 + \frac{1}{\beta^m} + \frac{\varepsilon_m}{\beta^{m+1}} + \cdots. \tag{3-10}$$

D'autres part, comme $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$, il admet un béta-développement période de la forme

$$\alpha_0 \overbrace{\equiv}^{\beta} (\frac{\varepsilon'_p}{\beta^p} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k-1}}{\beta^{k-1}}) + (\frac{\varepsilon'_k}{\beta^k} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k+t-1}}{\beta^{k+t-1}}) + (\frac{\varepsilon'_k}{\beta^{k+t}} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k+t-1}}{\beta^{k+2t-1}}) + \cdots$$

ou bien

$$\alpha_0 \overbrace{\equiv}^{\beta} (\frac{\varepsilon'_p}{\beta^p} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k-1}}{\beta^{k-1}}) + (\frac{\varepsilon'_k}{\beta^k} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k+t-1}}{\beta^{k+t-1}})(\frac{\beta^t}{\beta^t - 1}). \tag{3-11}$$

Soit γ un conjugué de β de module > 1 satisfaisant $\gamma \neq \beta$. Alors il existe un plongement σ de $\mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{C}$, tel que $\sigma(\beta) = \gamma$. De $(3-11)$ on déduit

$$\alpha_0 = \sigma(\alpha_0) = (\frac{\varepsilon'_p}{\gamma^p} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k-1}}{\gamma^{k-1}}) + (\frac{\varepsilon'_k}{\gamma^k} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k+t-1}}{\gamma^{k+t-1}})(\frac{\gamma^t}{\gamma^t - 1}),$$

et donc

$$\alpha_0 = (\frac{\varepsilon'_p}{\gamma^p} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k-1}}{\gamma^{k-1}}) + (\frac{\varepsilon'_k}{\gamma^k} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k+t-1}}{\gamma^{k+t-1}}) + (\frac{\varepsilon'_k}{\gamma^{k+t}} + \cdots + \frac{\varepsilon'_{k+t-1}}{\gamma^{k+2t-1}}) + \cdots .$$

Il s'ensuit, par $(3-10)$ que $\alpha_0 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^m} + \frac{\varepsilon_{m+1}}{\beta^{m+1}} + \cdots = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^m} + \frac{\varepsilon_{m+1}}{\gamma^{m+1}} + \cdots$ et

$$\left|\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{1}{\beta^m} - \frac{1}{\gamma^m} + \varepsilon_{m+1}\left(\frac{1}{\beta^{m+1}} - \frac{1}{\gamma^{m+1}}\right) + \cdots. \tag{3-12}$$

Si l'on pose $C = \max(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{|\gamma|})$. Alors $C < 1$, $\left|\frac{1}{\beta^{m+j}} - \frac{1}{\gamma^{m+j}}\right| \leq 2C^{m+j}$, pour tout $j \geq 1$, et de (3-12) on obtient

$$\left|\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right| \leq 2C^m + 2\beta C^{m+1} + 2\beta C^{m+2} + \cdots < 2\beta C^m(1 + C + C^2 + \cdots) \leq \frac{2\beta C^m}{1 - C}.$$

En choisissant maintenant m suffisamment grand on obtient de la dernière relation que $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} = 0$ et donc $\beta = \gamma$. Ce qui signifie que β est sans conjugué de module plus grand que 1 ; ainsi $\beta \in \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$. ■

Le théorème suivant donne une réponse partielle à la question inverse du théorème ci-dessus. Il généralise aussi le dernier résultat du chapitre précédent.

Théorème 3.2.2 *Avec la notation ci-dessus, on a l'implication suivante :* $\beta \in \mathbb{S} \Rightarrow Per(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$.

Preuve. D'après la proposition 2.2.2 on sait que l'inclusion $Per(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta)$ est toujours vraie. Soient maintenant $\beta \in \mathbb{S}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$. Pour montrer que $\alpha \in Per(\beta)$, on peut supposer sans perte de généralités que $\alpha > 0$, puisque $0 \in Per(\beta)$, et $\alpha \in Per(\beta) \Leftrightarrow -\alpha \in Per(\beta)$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta^p \leq \alpha < \beta^{p+1}$. Comme $1 \leq \frac{\alpha}{\beta^p} < \beta$, et les nombres α et $\frac{\alpha}{\beta^p}$ ont les même suites du béta-développement, on peut aussi supposer $1 \leq \alpha < \beta$. Soit donc

$$\alpha \equiv \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \frac{r_n}{\beta^n},$$

le béta-développement de α, où $r_n = r_n(\alpha) \in [0, 1[$. Fixons l'entier n. De l'égalité

$$r_n = \beta^n \alpha - \varepsilon_0 \beta^n - \varepsilon_1 \beta^{n-1} - \cdots - \varepsilon_n$$

on voit que $r_n \in \mathbb{Q}(\beta)$. Soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b\alpha$ soit un entier algébrique alors le nombre

$$R_n = br_n = \beta^n (b\alpha) - \varepsilon_0 b \beta^n - \cdots - \varepsilon_n b$$

est un entier algébrique de $\mathbb{Q}(\beta)$, puisque β l'est. De plus on a

$$0 \leq R_n < b,$$

et le degré de R_n est au plus égal au degré de β. Soit σ un plongement de $\mathbb{Q}(\beta)$ dans $\mathbb{C}$, transformant β en l'un de ses conjugués $\gamma \neq \beta$. Alors $|\gamma| < 1$, $\sigma(R_n) = \gamma^n(b\sigma(\alpha)) - \varepsilon_0 b \gamma^n - \cdots - \varepsilon_n b$ et

$$|\sigma(R_n)| \leq cb\beta(|\gamma|^n + |\gamma|^{n-1} + \cdots + 1) < \frac{cb\beta}{1 - |\gamma|},$$

où c est le maximum des quantités $|\sigma(\alpha)|$, lorsque σ parcourt l'ensemble des plongements de $\mathbb{Q}(\beta)$ dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que les conjugués de l'entier algébrique R_n sont bornés et ainsi les termes de la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Par conséquent il en est de même pour la suite $(r_n)_{n \geq 0}$, et qui est donc périodique. Des propositions 2.2.1 et 2.2.3 on déduit le résultat. ∎

3.3 *Un théorème de Boyd*

Comme on l'a signalé auparavant le but de ce paragraphe est de montrer un théorème de D. W. Boyd et qui dit que tout nombre de Salem quartique β est un nombre de Parry. Dans le but de simplifier la notation on va conserver celle de Boyd, et qui pose, $c_1 = [\beta]$,

$$c_n = \varepsilon_{n-1}(\{\beta\}) \ \ \forall\ n \geq 2,$$

et

$$\alpha_n = r_{n-1}(\{\beta\}) \ \ \forall\ n \geq 1.$$

Dans ce cas

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\beta^{n-1}},$$

on dit (seulement dans ce paragraphe) que $(c_1 c_2 \cdots)$ est le béta-développement de β (rappelons que le béta-développement de β est $(1000 \cdots)$) et on note

$$\beta \shortparallel (c_1 c_2 \cdots).$$

Rappelons aussi que $\{\beta\} \in Per(\beta) \Leftrightarrow \{\alpha_n : n \geq 1\}$ est fini, et dans ce cas il y a un plus petit entier rationnel $m \geq 1$ et un plus petit entier rationnel $p \geq 1$ tel que $\alpha_m = \alpha_{m+p} \Longrightarrow Card\{\alpha_n : n \geq 1\} = m + p - 1$, et $c_n = c_{n+p}$ pour tout $n \geq m + 1$ (p est la période et $m - 1$ est la prés période). En particulier $\{\beta\} \in Fin(\beta) \Leftrightarrow \ \alpha_m = 0$; dans ce cas $c_n = 0$ pour $n > m$, et on écrit $\beta \shortparallel (c_1 \cdots c_m)$. Tandis que si $\alpha_m = \alpha_{m+p} \neq 0$, on peut écrire

$$\beta \shortparallel (c_1 \cdots c_m : c_{m+1} \cdots c_{m+p}).$$

Notons que, $m = 1$ signifie que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est purement périodique. Si l'on pose

$$P_n(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \cdots - c_n,$$

alors le polynôme $P_{m+p} - P_m$ (resp., le polynôme P_{m+p}) est le polynôme caractéristique de β, défini dans le chapitre précédent, lorsque β est un nombre de Parry (resp., nombre de Parry simple). Rappelons aussi qu'un nombre de Salem est un entier algébrique réel plus grand que 1, les autres conjugués sont de module ≤ 1 avec au moins un de module 1, et comme on a vu dans le premier chapitre, le polynôme minimal de β est réciproque, et le degré de

β est pair et est supérieur ou égal à 4. En fait β admet un seul conjugué de module < 1 et qui est β^{-1}. Comme $0 < \beta^{-1} < 1$, on déduit qu'un nombre de Salem, ne peut pas être un nombre de Parry simple.

Dans tout ce qui suit on suppose que β est un nombre de Salem de degré 4, et soit

$$M_\beta(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$$

son polynôme minimal. Le lemme suivant donne des conditions nécéessaires et suffisantes pour qu'un polynôme de la forme $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$, soit le polynôme minimal d'un nombre de Salem.

Lemme 3.3.1 *Soit $P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Alors P est le polynôme minimal d'un nombre de Salem si et seulement si $-2a - 2 < b < 2a - 2$, $b \neq 2$, et $b \neq 1 \pm a$.*

Preuve. Supposons d'abord que P soit le polynôme minimal d'un nombre de Salem β, et posons $P(x) = x^2 A(x + x^{-1})$, où

$$A(t) = t^2 - at + (b - 2).$$

Si γ et $\overline{\gamma}$ sont les conjugués de β, avec $|\gamma| = 1$, alors A admet deux zéros $\beta + \beta^{-1}$ et $\gamma +\overline{\gamma}$ et qui vérifient $-2 < \gamma + \overline{\gamma} < 2 < \beta + \beta^{-1}$. Il s'ensuit immédiatement que $A(2) < 0 < A(-2) \Rightarrow -2a - 2 < b < 2a - 2$. De plus, si $b = 2$ alors $\gamma + \overline{\gamma} = 0$ ou bien $\gamma + \overline{\gamma} = a \Rightarrow \gamma$ est un entier quadratique, puisqu'il est racine du polynôme $t^2 - (\gamma + \overline{\gamma})t + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ce qui absurde, puisque γ est de degré 4. De même, si $b = \pm a + 1$, alors $\gamma + \overline{\gamma} = \pm 1$ et on obtient une contradiction similaire à celle obtenue précédement. Inversement, si on suppose que A admet deux zéros réels σ et ρ tels que $-2 < \sigma < 2 < \rho$, alors on définit γ et β comme racines des équations $\gamma^2 - \sigma\gamma + 1 = 0$ et $\beta^2 - \rho\beta + 1 = 0$. Les conditions $b \neq 2$, et $b \neq \pm a + 1$ entrainent que σ ne peut pas être un entier rationnel, c'est-à-dire, que $\sigma \neq \pm 1, 0$. Donc les polynômes A et P sont irréductibles. Donc, P définit un nombre de salem quartique β et $P = M_\beta$. ■

Avec la notation de la preuve ci-dessus, la trace de β vérifie : $a = \beta + 1/\beta + \gamma + \overline{\gamma}$. Le lemme qui suit exprime la partie entière de β en fonction de sa trace.

Lemme 3.3.2 *Si $M_\beta(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ est le polynôme minimal d'un nombre de Salem quartique β, alors*

$$[\beta] = \begin{cases} a+1 & \text{si } -2a-2 < b < -a \\ a & \text{si } -a \leq b \leq 0,\ b \neq -a+1 \\ a-1 & \text{si } 0 < b \leq a,\ b \neq 2 \\ a-2 & \text{si } a+1 < b < 2a-2. \end{cases}$$

Preuve. Comme $a = \beta + 1/\beta + \gamma + \overline{\gamma}$, on voit que $\beta + 0 - 1 - 1 < a < \beta + 1 + 1 + 1 \Longrightarrow a - 3 < \beta < a + 2$ et donc $[\beta] \in \{a-2, ..., a+1\}$. Il est clair que $[\beta] = a-2 \Longleftrightarrow a-2 < \beta < a-1 \Longleftrightarrow M_\beta(a-2) < 0 < M_\beta(a-1)$; la dernière équivalence est dûe au fait que M_β admet une seule racine réelle plus grande que 1 (qui est β). Supposons d'abord $[\beta] = a-2$. Alors, $a = [\beta] + 2 \geq 3 \Longrightarrow 1 < \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2}$. Il s'ensuit de la relation

$$\begin{aligned} M_\beta(a-1) &> 0 \Longleftrightarrow b > -(a-1)^2 + a(a-1) + \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2} \\ &= a - 1 + \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2}, \end{aligned}$$

que $b > a$, $b \geq a+1$, et donc $b > a+1$, puisque d'après le lemme 3.3.1, $b \neq a+1$. Ainsi, on a prouvé l'implication (l'inégalité à droite est dûe au lemme 3.3.1)

$$[\beta] = a - 2 \Longrightarrow a + 1 < b < 2a - 2. \tag{3-13}$$

Supposons maintenant $[\beta] = a-1$, c'est-à-dire que $M_\beta(a-1) < 0 < M_\beta(a)$. De façon similaire, on a $a = [\beta] + 1 \geq 2$, $\frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2} < 2$, $M_\beta(a-1) < 0 \Longleftrightarrow b < a - 1 + \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2}$ et donc $b < a+1$; d'où $b \leq a$. De même $M_\beta(a) > 0 \Leftrightarrow ba^2 - a^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow b > 1 - \frac{1}{a^2} \Rightarrow b > 0$. on a donc montré l'implication (l'inégalité à droite est dûe au lemme 3.3.1)

$$[\beta] = a - 1 \Longrightarrow 0 < b \leq a\,; \tag{3-14}$$

la relation $b \neq 2$ découle du lemme 3.3.1. De manière identique on montre les implications

$$[\beta] = a \Longrightarrow -a < b \leq 0, \tag{3-15}$$

avec $b \neq -a+1$, et

$$[\beta] = a + 1 \Longrightarrow -2a - 2 < b < -a. \tag{3-16}$$

Le lemme suit alors immédiatement des relations (3-13), (3-14), (3-15) et (3-16). ■

Pour montrer le théorème qui suit on a également besoin du résultat suivant de W. Parry [22].

Lemme 3.3.3 *Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite des entiers rationnels ne se terminant pas par des zéros et vérifiant $c_1 \geq 1$, $0 \leq c_n \leq c_1$ pour tout $n \geq 1$. Soit β l'unique solution de l'équation*

$$x = c_1 + c_2 x^{-1} + c_3 x^{-2} + \cdots$$

dans l'intervalle $]1,\infty[$. Alors β admet pour béta-développement $(c_1 c_2 \cdot \cdot\cdot)$ si et seulement si $(c_n c_{n+1} \cdot \cdot\cdot) <_L (c_1 c_2 \cdot \cdot\cdot)$, $\forall\ n > 1$.

Preuve. Supposons d'abord β admet pour béta-développement $(c_1 c_2 \cdot \cdot\cdot)$. Alors de la proposition 1.2.2 , on voit que la suite $(c_n c_{n+1} \cdot \cdot\cdot)$, où $n \geq 2$, est admissible, puisqu'elle est la suite associée au béta développement de α_n, et du théorème 3.1.1 on déduit que $(c_n c_{n+1} \cdot \cdot\cdot) <_L (c_1 c_2 \cdot \cdot\cdot)$. Inversement, si $(c_n c_{n+1} \cdot \cdot\cdot) <_L (c_1 c_2 \cdot \cdot\cdot)$, $\forall\ n \geq 2$, alors de manière identique à la preuve du théorème 3.1.1, on obtient alors

$$\frac{c_n}{\beta} + \frac{c_{n+1}}{\beta} + \cdots < \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots = 1$$

et donc $\beta \shortparallel (c_1 c_2 \cdot \cdot\cdot)$. ■

Théorème 3.3.1 *Avec la notation ci-dessus, soit β un nombre de Salem de degré 4. Alors β est un nombre de Parry. De plus on a $c_1 = [\beta]$, $m = 1$ et la période p ainsi le béta-développement de β sont donnés explicitement comme suit :*

$(i\ )$ *Si $c_1 = a + 1$, donc $-2a - 1 \leq b \leq -a - 1$ et*

(1) *si $b = -2a - 1$, alors $p = 9$ et*

$$\beta = (a + 1 : a - 1, a + 1, a - 1, 0, a - 1, a + 1, a - 1, a, a);$$

(2) *si $b > -2a - 1$, alors $p = 5$ et*

$$\beta = (a + 1 : -b - a - 1, 2a + b, -b - a - 1, a, a).$$

(ii) *Si $c_1 = a$, donc $-a \leq b \leq 0$, $b \neq -a + 1$, alors $p = 3$ et*

$$\beta = (a : -b, a - 1, a - 1).$$

(*iii*) *Si* $c_1 = a - 1$, *donc* $0 < b \leq a$, $b \neq 2$, *alors* $p = 4$ *et*

$$\beta = (a - 1 : a - b, a - b, a - 2, a - 2).$$

(*iv*) *Si* $c_1 = a - 2$, *donc* $a + 1 < b < 2a - 2$, *soit* $b_k = (2a - 2) - (a - 3)/k$, *pour* $k = 1, 2, ..., a - 3$, *donc* $a + 1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{a-3} = 2a - 3$. *On suppose que* $b_{k-1} < b \leq b_k$. *Alors* $p = 2k + 2$ *et*

$$\beta = (c_1 : c_2, \cdots, c_{2k+3}),$$

$c_1 = a - 2$, $c_2 = 2a - b - 3$, $c_i = (i - 1)(2a - b - 2)$, *si* $2 \leq i \leq k - 1$, $c_k = 2(k - 1)a - (k - 1)b - (2k - 3)$, $c_{k+1} = (2k - 1)a - kb - (2k - 3)$, $c_i = c_{(2k+3)-i}$, *si* $k + 2 \leq i \leq 2k + 1$ *et* $c_{2k+2} = c_{2k+3} = a - 3$.

Preuve. La preuve est une longue vérification, et les quatres cas possibles à étudier résultent du lemme 3.3.2.

1) **Cas** $c_1 = a$. Dans ce cas on a

$$\alpha_1 = \beta - a,$$

et du lemme 3.3.2, on voit que $-a \leq b \leq 0$. Pour montrer que $c_2 = -b$, il suffit de prouver que $-b \leq \beta^2 - a\beta < -b + 1$. De l'équation $M_\beta(\beta) = 0$, on a $\beta^2 - a\beta + b = \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2}$. Comme $\frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} > 0$, on a $\beta^2 - a\beta \geq -b$, et comme $\frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < \frac{a}{\beta} < 1$ (car $a < \beta$), on a aussi $\beta^2 - a\beta < -b + 1$. Il s'ensuit que $-b \leq \beta^2 - a\beta < -b + 1$,

$$c_2 = -b$$

et

$$\alpha_2 = \beta\alpha_1 - c_1 = \beta^2 - a\beta + b.$$

Montrons maintenant que $c_3 = a - 1$. Comme $c_3 = [\beta\alpha_2] = \left[\beta^3 - a\beta^2 + b\beta\right]$, il suffit de prouver que

$$a - 1 \leq \beta^3 - a\beta^2 + b\beta < a.$$

Puisque

$$-1 \leq \beta^3 - a\beta^2 + b\beta - a = \frac{-1}{\beta} < 0,$$

on voit immédiatement que $a - 1 \leq \beta^3 - a\beta^2 + b\beta < a$; donc

$$c_3 = a - 1$$

et
$$\alpha_3 = \beta^3 - a\beta^2 + b\beta - a + 1.$$
On déduit alors de l'équation $M_\beta(\beta) = 0$, que
$$\beta\alpha_3 = \beta^4 - a\beta^3 + b\beta^2 - a\beta + \beta = \beta - 1;$$
d'où
$$c_4 = [\beta - 1] = [\beta] - 1 = a - 1$$
et
$$\alpha_4 = \beta\alpha_3 - c_4 = \beta - 1 - (a-1) = \beta - a = \alpha_1.$$
Donc $p = 3$, et
$$\beta = (a : -b,\ a-1,\ a-1).$$

2) **Cas** $c_1 = a - 1$. Dans ce cas on a
$$\alpha_1 = \beta - a + 1.$$
Déterminons maintenant c_2 et α_2. On a $c_2 = [\beta\alpha_1] = [\beta(\beta - (a-1))]$. Pour montrer que $c_2 = a - b$, il suffit de prouver que
$$a - b \leq \beta^2 - (a-1)\beta < a - b + 1$$
ou bien
$$0 \leq \beta^3 - a\beta^2 + a\beta - 1 < \beta^2.$$
Comme $a\beta - 1 < \beta^2\ \forall a \geq 2$, et $\beta^3 - a\beta^2 < 0$, alors $\beta^3 - a\beta^2 + a\beta - 1 < \beta^2$, et d'autre part on a
$$\beta^3 - a\beta^2 + a\beta - 1 = (a-b)\beta + a - \frac{1}{\beta} - 1 \geq 0,$$
car $(a-b)\beta > 0$ et $a - 1 - \frac{1}{\beta} > 0$, $\forall a \geq 2 > 0$. Ainsi
$$c_2 = a - b,$$
$$\alpha_2 = \beta^2 - (a-1)\beta - (a-b) \tag{3-17}$$
et $c_3 = [\beta\alpha_2] = \left[\beta^3 - (a-1)\beta^2 - (a-b)\beta\right]$. Pour montrer que $c_3 = a - b$, il suffit aussi de prouver que
$$0 < \beta^3 - (a-1)\beta^2 - (a-b)\beta - (a-b) \leq 1.$$

L'inégalité $\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b)\leq 1$, se déduit à partir de $(3-17)$. En effet, on a

$$0\leq \beta^2-(a-1)\beta-(a-b)<1 \tag{3-18}$$

ou bien

$$0\leq \beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta<\beta.$$

Il s'ensuit de $(3-18)$, que $\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta<\beta$,

$$\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b)<\beta-(a-b)\leq \beta-(2a+1)$$

et $\beta-(2a+1)=\beta-(a+1)-a<1$; donc

$$\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b)\leq 1. \tag{3-19}$$

Montrons maintenant que $\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b)\geq 0$. De l'équation $M_\beta(\beta)=0$, on voit que $\beta^3=a\beta^2-b\beta+a-\frac{1}{\beta}$ et

$$\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b)=\frac{a}{\beta}-(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta})>0,$$

car $\frac{a}{\beta}>1$ et $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}<1$; donc

$$\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b)\geq 0. \tag{3-20}$$

De $(3-18)$ et $(3-19)$ on déduit alors que

$$c_3=a-b$$

et

$$\alpha_3=\beta\alpha_2-c_3=\beta^3-(a-1)\beta^2-(a-b)\beta-(a-b).$$

Pour montrer que $c_4=a-2$, il suffit de prouver que $a-2\leq\beta^4-(a-1)\beta^3-(a-b)\beta^2-(a-b)\beta<a-1$. De l'équation $M_\beta(\beta)=0$, on a $\beta^4=a\beta^3-b\beta^2+a\beta-1$,

$$\beta^4-(a-1)\beta^3-(a-b)\beta^2-(a-b)\beta=a-1-\frac{1}{\beta},$$

et comme $a-2<a-1-\frac{1}{\beta}<a-1$ on voit que $a-2\leq\beta^4-(a-1)\beta^3-(a-b)\beta^2-(a-b)\beta<a-1$. Donc $c_4=a-2$ et

$$\alpha_4=\beta\alpha_3-c_4=\beta^4-(a-1)\beta^3-(a-b)\beta^2-(a-b)\beta-a+2=\beta^3-a\beta^2+b\beta-a+1.$$

De plus, comme $\beta\alpha_4 = \beta^4 - a\beta^3 + b\beta^2 - a\beta + \beta = \beta - 1$ et $a-2 \leq \beta - 1 < a-1$, on voit que

$$c_5 = [\beta\alpha_4] = a - 2,$$

et

$$\alpha_5 = \beta\alpha_4 - c_5 = \beta - a + 1 = \alpha_1.$$

Donc $p = 4$ et

$$\beta = (a - 1 : a - b, a - b, a - 2, a - 2).$$

3) **Cas** $c_1 = a+1$. Dans ce cas on a $-2a-2 < b < -a$, d'après le lemme 3.3.2, et

$$\alpha_1 = \beta - (a+1).$$

Supposons d'abord $b = -2a - 1$. Alors $c_2 = [\beta\alpha_1] = \left[\beta^2 - (a+1)\beta\right]$. Pour montrer que $c_2 = a - 1$, il suffit de prouver que

$$a - 1 \leq \beta^2 - (a+1)\beta < a \tag{3-21}$$

ou bien

$$0 < \beta^3 - (a+1)\beta^2 - a\beta + 1 \leq \beta^2,$$

puisque de l'équation $M_\beta(\beta) = 0$, on a $\beta^2 - (a+1)\beta = (a+1) - \beta + \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} + a$. Comme $\beta^3 - (a+1)\beta^2 - a\beta + 1 = (a+1)\beta - \beta^2 + (a+1) - \frac{1}{\beta}$, un simple calcul permet de vérifier les inégalités

$$(a+1)\beta - \beta^2 + (a+1) - \beta^2 - \frac{1}{\beta} \leq 0 \text{ et } (a+1)\beta - \beta^2 + (a+1) - \frac{1}{\beta} > 0.$$

En effet, pour montrer par exemple, la dernière relation, il suffit d'utiliser les équivalences suivantes :

$$(a+1)\beta - \beta^2 + (a+1) - \frac{1}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a+1)\beta + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow a - b\beta - \frac{1}{\beta} - \beta^2 - a\beta - \beta + 1 < 0 \Leftrightarrow a + 1 - \beta - b\beta - \frac{1}{\beta} - \beta^2 - a\beta < 0,$$

et de la dernière inégalité, on obtient le résultat, puisque $a + 1 - \beta < 0$ et $-b\beta - \frac{1}{\beta} - \beta^2 - a\beta = (a+1)\beta - \beta^2 - \frac{1}{\beta} < 0$. Donc $a - 1 \leq \beta^2 - (a+1)\beta < a$ et $c_2 = a - 1$. Pour montrer que $c_3 = a + 1$, il suffit de prouver que

$$a + 1 \leq \beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a-1)\beta < a + 2 \tag{3-22}$$

car $c_3 = [\beta\alpha_2] = \left[\beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a-1)\beta\right]$, $\alpha_3 = \beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a-1)\beta - (a+1)$. De la relation (3-22) on voit que

$$\beta^2 - (a+1)\beta - a + 1 < 1$$

et

$$\beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a-1)\beta < \beta < a+2$$

puisque $0 \leq \alpha_2 = \beta^2 - (a+1)\beta - (a-1) < 1$ et

$$a+1 \leq \beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a-1)\beta \Leftrightarrow \beta^3 - (a+1)\beta^2 - (a-1)\beta \geq a+1.$$

D'une manière similaire on calcule les autres c_j et on obtient $\alpha_{10} = \alpha_1$, $p = 9$ et

$$\beta = (a+1 : a-1, a+1, a-1, 0, a-1, a+1, a-1, a, a).$$

De façon identique, on obtient si $b > -2a-1$, que $c_2 = [\beta\alpha_1] = \left[\beta^2 - (a+1)\beta\right]$.

Pour montrer que $c_2 = -b - a - 1$, il suffit de prouver que

$$\beta - a - 1 \leq \beta^2 - a\beta + b < \beta - a$$

ou bien

$$\beta - a - 1 \leq \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < \beta - a.$$

Comme $\frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < \frac{a}{\beta} < 1$ et $1 \leq \beta - a$ on voit immédiatement que $\frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < \beta - a$. D'autre part, on a $a\beta - 1 \leq \beta^2$ $\forall a \geq 0$, d'où $\frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \geq 1$. Donc $\beta - a - 1 \leq \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < \beta - a$ et $c_2 = -b - a - 1$. A partir de ce point, des calculs similaires aux cas précédents donnent

$$\alpha_6 = \beta - a - 1 = \alpha_1$$

$p = 5$ et

$$\beta = (a+1 : -b-a-1, 2a+b, -b-a-1, a, a).$$

4) **Cas** $c_1 = a - 2$. D'après le lemme 3.3.2, on a $a + 1 < b < 2a - 2$, et $\alpha_1 = \beta - a + 2$. Pour montrer que $c_2 = 2a - b - 3$, il suffit de prouver que $2a - b - 3 \leq \beta^2 - (a-2)\beta < 2a - b - 2$, ou bien

$$2(a-\beta) - 3 \leq \beta^2 - a\beta + b = \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < 2(a-\beta) - 2.$$

Comme $\beta^2 - a\beta + b = \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} > 1$, $1 < \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < \frac{a}{\beta}$ et $-1 < 2(a-\beta) - 3 < 1$, on a

$$2(a-\beta) - 3 < \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2},$$

$$\frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} < 2(a-\beta) - 2$$

et $c_2 = 2a - b - 3$. A partir de ce point, par des calculs identiques à ceux qui ont précédé on obtient, $\alpha_{2k+3} = \alpha_1$, $p = 2k+2$ et

$$\beta = (c_1 : c_2, ..., c_{2k+3}),$$

où

$$c_1 = a - 2,$$

$$c_2 = 2a - b - 3,$$

$$c_i = (i-1)(2a - b - 2), \text{ si } \; 3 \leq i \leq k-1,$$

$$c_k = 2(k-1)a - (k-1)b - (2k-3),$$

$$c_{k+1} = (2k-1)a - kb - (2k-3),$$

$$c_i = c_{(2k+3)-i}, \text{ si } \; k+2 \leq i \leq 2k+1$$

et

$$c_{2k+2} = c_{2k+3} = a - 3.$$

Cela clos la preuve du théorème. ■

CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté des résultats sur une représentation particulière des nombres réels, en base réelle $\beta > 1$, appelée béta-développement. Cette représentation est une généralisation du développement décimale usuel, et était extensivement étudiée, durant une période qui dépasse un demi-siècle. C'est au travail de K. Schmidt, que revient le mérite de signaler l'importance de nature de la base β, dans le comportement du béta-développement des nombres. Plus précisement, K. Schmidt a montré que si l'ensemble des réels qui ont un béta-développement périodique est le corps engendré par adjonction de β et les rationnels, alors β appartient l'ensemble des nombres de Pisot ou bien de Salem. La réciproque de cette dernière proposition étant vraie pour tout nombre de Pisot, K. Schmidt a conjecturé qu'elle l'est également pour les nombres de Salem. C'est dans cette perspective, que ce mémoire est fait. On a donné une preuve complète d'un théorème de D. W. Boyd sur les nombres de Salem quartiques, et on a apporté quelques résultats très partiels et qui renforcent la conjecture de K. Schmidt.

Mots clés

Béta-développement, Nombres de Parry, Nombres de Pisot, Nombres de Salem.

Résumé

soit θ un nombre réel supérieur à 1.Le bêta-développement d'un réel quelconque x en base θ, est l'un des développements de x, en base θ, qui généralise la représentation usuelle de x en base entière. Ce développement définie par Rényi [7] et étudié par plusieurs auteurs, peut être détérminé par un algoritme. Soit Per (θ)l'ensemble des réels qui ont un béta développement périodique. il est facile de voir que $Per\ (\theta) \subset \mathbb{Q}(\theta)$, ou $\mathbb{Q}$ est le corps des rationnels. Dans [9], Schmidt a montré que si $Per\ (\theta) = \mathbb{Q}(\theta)$ alors θ est un nombre de Pisot ou bien un nombre de Salem,et de plus lorsque θ est un nombre de Pisot alors l'égalité $Per\ (\theta) = \mathbb{Q}(\theta)$ a toujours lieu l'existence d'un nombre de Salem θ satisfaisant la relation $Per(\theta) = \mathbb{Q}(\theta)$ est un problème ouvert.On montre dans cet exposé quelques résultats sur le béta-développement en base de Salem,notamment un résultat de Boyd [2] sur les nombres de Salem quartiques

Abstract

Let θ be a real number greater than 1. The Beta development for any real x in θ base , which generalizes the usual representation of x in entire database. Beta development for all rea numberl x base θ, is one of the developments of x in θ base, which generalizes the usual representation of x in entire database. This development defined by Renyi [7] and studied by several authors, it can be determined by an algorithm. Let $Per(\theta)$ be a set of real periodic with a beta development. it is easy to see that $Per(\theta) \subset \mathbb{Q}(\theta)$, or $\mathbb{Q}$ is the field of rational. In [9], Schmidt showed that if $Per(\theta) = \mathbb{Q}(\theta)$ then θ is a Pisot or a Salem number, and more when θ is a Pisot then equal $Per(\theta) = \mathbb{Q}(\theta)$ is always held the existence of a number of Salem θ satisfying the relationship $Per(\theta) = \mathbb{Q}(\theta)$ is an open problem.it can be shown in this paper some results on the beta and base development Salem, including a result of Boyd [see 2] on the number of Salem quartic

Bibliographie

[1] K. Al-Shalan, *A study of a property of Pisot numbers,* Master of Sciences, King Saud University, Riyadh, 2004.

[2] S. Akiyama, F. Bassino and C. Frougny, *Arithmetic Meyer sets and finite automata,* Information and Computation **201** (2005), 199-215.

[3] S. Akiyama, H. Rao and W. Steiner, *A certain finiteness property of Pisot number systems,* J. Number Theory **107** (2004), 135-160.

[4] M. Amara, *Ensembles fermés de nombres algébriques,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **83** (1966), 215-270.

[5] F. Bassino, *Beta-expansions for cubic Pisot numbers,* In LATIN 2002 : Theoretical informatics (Cancun), S. Rajsbaum, Ed., volume **2286** of Lect. Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin (2002), 141-152.

[6] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugo, M. Pathiaux-Delefosse and J. P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers,* Birkhäuser Verlag Basel, 1992

[7] F. Blanchard, *$\beta-$expansions and symbolic dynamics,* Theor. Comp. Sci. **65** (1989), 131-141.

[8] D. W. Boyd, *Salem numbers of degree four have periodic expansions,* Number Theory, eds J. H. de Coninck and C. Levesque, Walter de Gruyter, Berlin (1989), 57-64.

[9] D. W. Boyd, *On beta-expansions for Pisot numbers,* Math. Comp. **65** (1996), 841-860.

[10] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques,* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **72** (1955), 69-92.

[11] P. Erdös, I. Joó and V. Komornik, *Characterization of the unique expansion $1 = \sum_{i\geq 1} q^{-n_i}$ and related problems,* Bull Soc. Math. France **118** (1990), 377-390.

[12] P. Erdös and V. Komornik, *Developpements in non integer bases,* Acta Math. Hungar. **79** (1998), 57-83.

[13] C. Frougny, *Representations of numbers and finite automata,* Math. Systems Theory **25** (1992), 37-60.

[14] C. Frougny and B. Solomyak, *Finite beta-expansions,* Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), 713-723.

[15] M. Grandet-Hugo, *Ensembles fermés d'entiers algébriques,* Ann. Sci. École. Norm. Sup. **92** (1965), 1-35.

[16] A. Hantas, *Représentation des réels en base réelle,* Master de mathématiques, Université Larbi Ben Mhidi, 2011.

[17] M. Hollander, *Linear numeration systems, finite beta-expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systems,* Ph. D. Thesis, University of Washington, 1996.

[18] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions,* Ann. Math. **34** (1933), 461-479.

[19] D. A. Marcus, *Number fields,* 3rd ed., Springer, Berlin, 1977.

[20] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers,* 3rd ed., Springer, Berlin, 2004.

[21] M. Panju, *Beta expansions for regular Pisot numbers,* J. integer sequences **14** (2011), Article 11.6.4.

[22] W. Parry, *On the $\beta-$expansions of real numbers,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401-416.

[23] C. Pisot, *La répartition modulo un et les nombres algébriques,* Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **7** (1938), 205-248.

[24] C. Pisot, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques,* Montréal, Quebec, les presses de l'université de Montréal, 1966.

[25] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties,* Acta Math. Hungar. **8** (1957), 477-493.

[26] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis,* Heath Math. Monographs, Boston, 1963.

[27] R. Samuel, *Théorie algébrique des nombres,* Paris, Hermann 1967.

[28] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot and Salem numbers,* Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 269-278.

[29] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique,* Presses universitaires de France, 1970.

[30] C. L. Siegel, *Algebraic numbers whose conjugates lie in the unit circle,* Duke Math. J. **11** (1944), 597-602.

[31] B. Solomyak, *Conjugates of beta-numbers and the zero-free domain for a class of analytic functions,* Proc. London Math. Soc. **68** (1994), 477-498.

[32] T. Zaïmi, *On an approximation property of Pisot numbers,* Acta Math. Hungar. **96** (2002), 309-325.

[33] T. Zaïmi, *On an approximation property of Pisot numbers II,* J. Théor. Nombres Bordx **16** (2004), 239-249.

[34] T. Zaïmi, *Approximation by polynomials with bounded coefficients,* J. Number Theory **127** (2007), 103-117.

[35] T. Zaïmi, *On numbers having finite beta-expansions,* Ergodic Theory Dynam. Systems **29** (2009), 1659-1668.

[36] T. Zaïmi, *Commentaires sur quelques résultats sur les nombres de Pisot,* J. Théor. Nombres Bordx. **22** (2010),513-524.