REPUBLIQUE ALGERIENNE DMOCRATIQUE ET POPULAIR

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARETEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHEMATIQUE

Option: *Mathématiques Appliquées*

Thème

Étude de quelques problèmes paraboliques fractionnaires singuliers

***Présenté par* : Benhizia Ahmed**

***Sous la direction de* : Dr. Benaoua Leila**

Soutenue le 26 juin 2023, devant le jury composé de :

***Président* :**	Dr. Benbrahim Abelouahab	*M .C.B*	*Univ. Oum El Bouaghi*
***Rapporteur* :**	Dr. Benaoua Leila	*M .C.B*	*Univ. Oum El Bouaghi*
***Co-Rapporteur*:**	Dr. Oussaeif Taki Eddine	*M .C.A*	*Univ. Oum El Bouaghi*
Examinateur :	Dr. Dehilis Sofiane	*M.C.A*	*Univ. Oum El Bouaghi*

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

*Au nom d'**Allah**, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux.*

<< Gloire à Toi ! Nous n'avons de savoir que Tu nous as appris. Certes, c'est Toi l'Omniscient, le Sage >>. Sourate 2 verset 32.

*O **Allah** ! Envoie la paix et la bénédiction sur Abraham, Ismaël, Isaac, Jacob, Moïse, Jésus, sur Mohamed le sceau des prophètes, ses compagnons, sa famille et tous ceux qui les suivent sur le bon chemin jusqu'au jour dernier. Amen.*

*Gloire à **Dieu** Le Tout Puissant qui m'a guidé par sa grandeur et fait en sorte que mes promesses deviennent une réalité par ce modeste travail.*

Au terme de cette recherche je suis très heureux de pouvoir remercier tous ceux et celles qui m'ont accompagné et soutenu tout le long de cette aventure.

*Je voudrais tout d'abord remercier très vivement mon encadreur **Dr. Benaoua Leila** de m'avoir confié ce sujet de mémoire et qui m'a honoré d'avoir accepté de diriger ce travail, pour l'aide compétente qu'il m'apporté, pour sa patience et son encouragement,pour ses conseils pratiques et scientifiques ainsi que pour l'inspiration et le temps qu'il a bien voulu me consacrer,Il a su me diriger d'une façon exemplaire et son soutien qui m'a permis d'achever ce travail.*

*Mon respect et mes vifs remerciements vont à Monsieur le Docteur **Oussaeif Taki Eddine** pour ses conseils précieux, et qui m'a honorés en acceptant d'être Co-encadreur de ce mémoire.*

*Mon respect et mes vifs remerciements vont à Monsieur le Docteur **Benbrahim Abdelouahab** pour ses conseils précieux, et qui m'a honorés en acceptant d'être président de ce juryd'examen de ce mémoire.*

*Au Docteur **Dehilis Sofiane** qui m'a honoré d'accepter de critiquer et d'analyser ce travail. Vos qualités scientifiques et votre intérêt pour la recherche sont pour moi une source de motivation supplémentaire pour la suite de ma carrière. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale.*

*Je remercie tout spécialement **mes chers parents** pour ses prières, ses recommandations, et pour m'avoir activement apporté un soutien inconditionnel tout au long de mes études.*

Que ce travail soit leur récompense tant méritée. Je vous aime énormément et je vous dédie cette thèse.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce travail on a étudié problèmes paraboliques fractionnaire et classique avec conditions aux limites de Neumann.

On a débuté par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail.

Le deuxième chapitre traite l'existence et l'unicité du solution d'un problème de Neumann parabolique avec l'opérateur de Bessel en utilisant la méthode d'inégalité d'énergie.

Enfin, dans le troisième chapitre, on étudie le même problème précédente dans le cas fractionnaire appliquée sur le temps.

Mots clés : Equations paraboliques fractionnaires, Equations paraboliques, Inégalités d'énergie, **,** existence, unicité.

Abstract

In this work we have studied classical and fractional parabolic problems with Neumann boundary conditions.

We started with reminders of certain fundamental preliminary notions and the tools necessary in this work.

The second chapter deals with the existence et uniqueness of the solution of a Neumann parabolic problem using the energy inequality method.

Finally, in the third chapter, we study The same previous problem in the case of the fractional case applied on the time variable.

Keywords: Fractional parabolic equations, parabolic equations, Energy inequality method, existence, uniqueness

ملخص

في هذا العمل درسنا مسائل القطع المكافئ الكسرية والعادية مع الشروط الحدية من نوع نيومان.

في الفصل الأول، بدأنا بالتذكير ببعض المفاهيم الأولية الأساسية والأدوات اللازمة له ذا العمل.

الفصل الثاني يتناول دراسة الوجود والوحدانية لمسألة نيومان لمعادلة قطع مكافئ باستخدام طريقة متراجحات الطاقة.

أخيرًا، في الفصل الثالث، ندرس نفس المسألة السابقة في حالة المعادلات ذات المشتقات الكسرية,

الكلمات المفتاحية: معادلات القطع المكافئ الكسرية، معادلات القطع المكافئ، طريقة متراجحات الطاقة، الوجود، الوحدانية.

Table des matières

Introduction

Beaucoup de phénomènes naturels et de problèmes modernes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques peuvent être modelés par des équations aux dérivées partielles (EDPs). Lorsque le phénomène modélisé est non stationnaire, le modèle mathématique est habituellement représenté par des équations d'évolution paraboliques ou hyperboliques. L'exemple typique des équations paraboliques est l'équation de la chaleur, et le prototype des équations hyperboliques est l'équation des ondes. Cependant il y a des phénomènes en science et en ingénierie ne peuvent pas être modélisés par des équations aux dérivées partielles classiques.

Les équations différentielles fractionnaires qui sont obtenues en généralisant les équations différentielles à un ordre arbitraire, elles jouent un rôle crucial dans l'ingénierie, la physique et les mathématiques appliquées. Des phénomènes complexes peuvent être modélisés en utilisant ces équations. De ce fait, on peut trouver de nombreuses applications dans l'étude de la viscoélasticité, l'électrochimie, traitement du signal, théorie du contrôle, milieux poreux, mécanique des fluides, la rhéologie, transport par diffusion, les réseaux électriques, la théorie électromagnétique et probabilité, et de nombreux autres processus physiques.

Les résultats d'existence et d'unicité de la solution des équations aux dérivées partielles fractionnaires ont été obtenus en utilisant le théorème de Lax-Milgram, voir [21], [48]–[46], et aussi la méthode adoptée par de nombreux auteurs, voir par exemple [1], [38]–[42] est celle des inégalités d'énergie.

L'objectif principale de cette thèse est d'appliquer et de développer la méthode d'inégalité d'énergie pour les problèmes aux dérivées partielles fractionnaires singulières avec des conditions aux limites classiques.

Ce mémoire est composé de troix chapitres présentés comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques outiles de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail. En prarticulier, on présente certains résultats fondamentaux sur les propriétés de la dérivation fractionnaire, les opérateurs linéaires et les espaces fonctionnels.

Le second chapitre voué à étudier l'existence et l'unicité d'une solution forte pour des problèmes paraboliques avec l'opérateur de Bessel en utilisant la méthode d'inégalité d'énergie.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème d'équations aux dérivées partielles fractionnaire avec l'opérateur de Bessel par un développement de la méthode d'inégalité d'énergie..

Chapitre 1

Notion préliminaires

Le présent chapitre est consacré aux rappels essentiels des notions et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail, à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur T est une appliction de E dans F :*

$$T : E \to F.$$

Tout opérateur T linéaire est complètement défini par son graphe $G(T)$ qui est un sous espace vectoriel de $E \times F$ défini par :

$$G(T) = \{(u, Tu)\,,\ u \in D(T)\}\,,$$

où $D(T)$ est le domaine de définition de l'opérateure T.

Définition 1.2 *Un opérateur T de E dans F est dit linéaire si et seulement si :*

$$\forall u_1, u_2 \in E,\ \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C} \text{ on a : } T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2),$$

où $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires de E et F.

Définition 1.3 *On dit que S est extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in D(T)$. Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$.*

Remarque 1.1 *Il n'est pas vrai que tout sous espace de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur.*

Définition 1.4 *On dit que T est fermé si son graphe $G(T)$ est fermé de $E \times F$.*

Définition 1.5 *On dit qu'un opérateur linéaire T est fermable dans E s'il admet un prolongement (extension) fermé.*

Autrement dit T est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ telle que $u_n \to 0$ et $Tu_n \to v$, alors $v = 0$.

1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.6 *Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F, on définit $M^\perp$* ***l'orthogonal*** *de M, par :*

$$M^\perp = \{f \in F,\ \langle f, g\rangle_F = 0,\ \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.1 *Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F. Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.*

Preuve. Supposons d'abord que M est dense dans F. Soit $f \in M^\perp \subset F$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M qui converge vers f. On a $\langle f, f_n\rangle_F = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on en conclurt que $\|f\|_F$. Donc $f = 0$, qui donne $M^\perp = \{0\}$.
Réciproquement, supposons que $M^\perp = \{0\}$. Alors on a $\left(M^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = F$, et comme $M \subset \overline{M}$ il s'en suit que $\left(\overline{M}\right)^\perp \subset M^\perp$, et donc $\left(M^\perp\right)^\perp \subset \left(\left(\overline{M}\right)^\perp\right)^\perp$, mois $\overline{M}$ est un fermé, alors $\left(\left(\overline{M}\right)^\perp\right)^\perp =$

$\overline{M}$, alors on trouve $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} \subset \overline{M} \Longrightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$. ■

1.3 Traces des fonctions des espaces de Sobolev

1.3.1 Espaces de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$

Soit Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.7 *Pour tout $P \in [1, \infty]$, on pose :*

$$W^{1,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = \overline{1, n} \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^P(\Omega)} \right)^{1/p} = \left(\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{(L^P(\Omega))^n} \right)^{1/p} & \text{dans le cas } p \neq \infty. \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ dans le cas } p = \infty. \end{cases}$$

Dans le cas $p = 2$ on a :

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1, n} \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^n}, \end{aligned}$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \right)^{1/2}.$$

Théorème 1.1 *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,P}(\mathbb{R}^n)$, C-à-d :*

$$\forall u \in W^{1,P}(\mathbb{R}^n),\ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que : } u_n \to u \text{ dans } W^{1,P}(\mathbb{R}^n).$$

1.3.2 Existence de trace

On considère l'ensemble

$$L^2(\partial\Omega) = \left\{ w \text{ mesurable sur } \partial\Omega, \text{ tel que : } \int_{\partial\Omega} w^2 d\Gamma < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel.

Théorème 1.2 (Existence de trace) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière (suffisamment régulière). Alors l'application trace :*

$$\gamma_0 : \begin{array}{c} C_0^\infty(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) \\ u \longmapsto \gamma_0 u = u \mid_{\partial\Omega} \end{array}$$

se pronlonge par continuité en application linéaire continue, notée encore γ_0, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et il existe une constante c^* indépendante de u telle que :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque 1.2 *L'application trace γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Par contre, elle est surjective sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, où $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espaces de Sobolev d'indice fractionnaire $1/2$.*
On a :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ w \in L^2(\partial\Omega), \text{ tel que :} \exists v \in H^1(\Omega), w = \gamma_0(v) \right\}.$$

1.4 Dérivation fractionnaire

La dérivation fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation (classique) à un ordre non entier. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées. D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendant ces dernières décennies. Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du $17^{ème}$ siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand **L'Hospital** a soulevé une question à **Leibniz** en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "**Approche de Riemann-Liouville**". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de **Grunwald-Leitnikov**, de **Weyl** et de **Caputo**. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....

1.4.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma** $\Gamma(x)$, qui joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.8 *On appelle fonction Gamma Eulérienne (ou inégrale Eulérienne de seconde espèce) la fonction notée* Γ *définie pour tout nombre complexe* x *tel que* $\mathrm{Re}(x) > 0$ *par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

cette intégrale est convergente pour $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Proposition 1.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Preuve. On a d'après la définition 1.8.

$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$,on utilise l'intégrale par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= -e^{-t}t^x\big|_{t=0}^{t=\infty} + x\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \\ &= x\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\end{aligned}$$

alors

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

■

1.4.2 Approche de Riemann Liouville

Définition 1.9 *[48]Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et v une fonction localement intégrale définie sur $[0,T]$. La dérivée d'ordre α de v est définie par :*

1. *Dérivée au sens de **Riemann Liouville à gauche***

$$^{R}D_t^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_0^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{1.1}$$

2. *Dérivée au sens de **Riemann Liouville à droite***

$$^{R}_{t}D^{\alpha}v(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_t^T \frac{v(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau, \tag{1.2}$$

où le nombre entier n est choisi de telle manière que : $n-1 < \alpha < n$.

1.4.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de **Riemann-Liouville** qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.10 *[48]Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et v une fonction localement intégrale définie sur $[0, T]$. La dérivée d'ordre α de v est définie par :*

1. *Dérivée au sens de* ***Caputo à gauche***

$$^{C}D_t^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{v^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \tag{1.3}$$

2. *Dérivée au sens de* ***Caputo à droite***

$$^{C}_{t}D^{\alpha}v(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^T \frac{v^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{1.4}$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité : $n-1 < \alpha < n$.

1.4.4 Intégration fractionnaire

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et v une fonction intégrable définie sur $[a, b]$. L'intégration fractionnaire d'ordre α de v est définie par :[39]

$$\begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}v(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \\ {}_tI_b^{\alpha}v(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{v(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}} d\tau, \end{aligned}$$

1.4.5 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville, de Caputo et intégration fractionnaire

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $n-1<\alpha<n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Supposons que v possède les dérivées fractionnaires, alors on a

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}v(t) &= {}^{C}D_t^{\alpha}v(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(0)(t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)},\\
{}_t^{R}D^{\alpha}v(t) &= {}_t^{C}D^{\alpha}v(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(T)(T-t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_t^{\alpha}I_t^{\alpha}v(t) &= v(t),\\
I_t^{\alpha}\left({}^{C}D_t^{\alpha}v(t)\right) &= v(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}\frac{d^i}{dt^i}v(0).
\end{aligned}\tag{1.5}$$

Pour $n=1$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}v(t) &= {}^{C}D_t^{\alpha}v(t)+\frac{v(0)}{\Gamma(1-\alpha)\,t^{\alpha}}, &(1.6)\\
{}_t^{R}D^{\alpha}v(t) &= {}_t^{C}D^{\alpha}v(t)+\frac{v(T)}{\Gamma(1-\alpha)\,(T-t)^{\alpha}},\\
I_t^{\alpha}\left({}^{C}D_t^{\alpha}v(t)\right) &= v(t)-v(0). &(1.7)
\end{aligned}$$

Si $v^{(i)}(0)=0$ avec $i=0,1,...,n-1$, alors la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** sont coincident, i.e.

$$ {}^{R}D_t^{\alpha}v(t)={}^{C}D_t^{\alpha}v(t).$$

Si $\alpha>0$, on a

$$ {}^{R}D_t^{\alpha}\left({}^{R}D_t^{-\alpha}v(t)\right)=v(t),$$

qui signifie que l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** du même ordre.

1.4.6 Quelques propriétés de la dérivation fractionnaire

1. **Linéarité**

   Similiarement à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** est une opération linéaire.

Théorème 1.3 *[39]Soient v et w deux fonction dont les dérivées fractionnaires de* ***Riemann-Liouville*** *d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ${}^{R}D_{t}^{\alpha}(\lambda v+\mu w)$ existe et on a :*

$$ {}^{R}D_{t}^{\alpha}(\lambda v+\mu w)(t)=\lambda\, {}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t)+\mu\, {}^{R}D_{t}^{\alpha}w(t). $$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ avec $n-1<\alpha<n$ on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{R}D_{t}^{\alpha}(\lambda v+\mu w)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{0}^{t}\frac{(\lambda v+\mu w)(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\int_{0}^{t}\frac{\lambda v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau+\int_{0}^{t}\frac{\mu w(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau\right) \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{0}^{t}\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau+\frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{0}^{t}\frac{w(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \lambda\, {}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t)+\mu\, {}^{R}D_{t}^{\alpha}w(t)
\end{aligned}
$$

■

2. **Non commutativité**

Proposition 1.3 *[39]Soit la fonction v telle que $v^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,...,n-1$, alors les deux dérivées fractionnaires de* ***Riemann-Liouville*** *et de* ***Caputo*** *sont commutationes avec la dérivée d'ordre n, $n\in\mathbb{N}$:*

$$ {}^{R}D_{t}^{n}\,{}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t)={}^{R}D_{t}^{\alpha+n}v(t)={}^{R}D_{t}^{\alpha}\,{}^{R}D_{t}^{n}v(t), $$

et

$$ {}^{C}D_{t}^{n}\,{}^{C}D_{t}^{\alpha}v(t)={}^{C}D_{t}^{\alpha+n}v(t)={}^{C}D_{t}^{\alpha}\,{}^{C}D_{t}^{n}v(t). $$

Lemme 1.1 *[39]On suppose que $n-1<\alpha<n$, $m-1<\beta<m$ et soit la fonction v telle que ${}^{R}D_t^{\alpha}v$ existe, alors*

$$^{R}D_t^{\alpha}\left({}^{R}D_t^{\beta}v(t)\right) = {}^{R}D_t^{\alpha+\beta}v(t) \neq {}^{R}D_t^{\beta}\left({}^{R}D_t^{\alpha}v(t)\right).$$

Preuve. En utilisant par la suite la définition de la dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** et la composition avec des dérivées d'ordre entier, on aura

$$\begin{aligned}
^{R}D_t^{\alpha}\left({}^{R}D_t^{\beta}v(t)\right) &= {}^{R}D_t^{n}\left[{}^{R}D_t^{-(n-\alpha)}\left({}^{R}D_t^{\beta}v(t)\right)\right] \\
&= {}^{R}D_t^{n}\left[{}^{R}D_t^{\alpha+\beta-n}\left({}^{R}D_t^{\beta}v(t)\right) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}^{R}D_t^{\beta-i}v(t)\right]_{t=0}\frac{t^{n-\alpha-i}}{\Gamma(1+n-\alpha-i)}\right] \\
&= {}^{R}D_t^{\alpha+\beta}v(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}^{R}D_t^{\beta-i}v(t)\right]_{t=0}\frac{t^{-\alpha-i}}{\Gamma(1-\alpha-i)}.
\end{aligned}$$

En interchangeant α et β (et donc n et m), on peut écrire

$$^{R}D_t^{\beta}\left({}^{R}D_t^{\alpha}v(t)\right) = {}^{R}D_t^{\alpha+\beta}v(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}^{R}D_t^{\alpha-i}v(t)\right]_{t=0}\frac{t^{-\beta-i}}{\Gamma(1-\beta-i)}.$$

Alors, on a

$$^{R}D_t^{\alpha}\left({}^{R}D_t^{\beta}v(t)\right) = {}^{R}D_t^{\alpha+\beta}v(t) \neq {}^{R}D_t^{\beta}\left({}^{R}D_t^{\alpha}v(t)\right).$$

■

Remarque 1.3 *Si $\left[{}^{R}D_t^{\alpha-i}v(t)\right]_{t=0}$ et $\left[{}^{R}D_t^{\beta-i}v(t)\right]_{t=0}$ pour tout $i=1,2,...,n$, ou $\alpha=\beta$, on a*

$$^{R}D_t^{\alpha}\left({}^{R}D_t^{\beta}v(t)\right) = {}^{R}D_t^{\alpha+B}v(t) = {}^{R}D_t^{\beta}\left({}^{R}D_t^{\alpha}v(t)\right).$$

3. La règle de Leibniz

Corollaire 1.1 *[39]Soit $t>0$ et $n-1<\alpha<n$. Si v et w et tous ses dérivées sont continues sur $[0,T]$, alors :*

$$^{R}D_t^{\alpha}(vw)(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!}\left({}^{R}D_t^{\alpha-i}v(t)\right)w^{(i)}(t).$$

4. Transformation de Fourier [48]

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ et $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{F}\left({}^{R}D_t^{\alpha}v(t)\right) = (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(v(t))\,\omega, \tag{1.8}$$

$$\mathcal{F}\left({}_{t}^{R}D^{\alpha}v(t)\right) = (-i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(v(t))\,\omega. \tag{1.9}$$

Remarque 1.4 *D'après la relation entre les dérivées fractionnaires de* ***Riemann-Liouville*** *et de* ***Caputo****, la linéarité, la non commutativité restent vrais et pour la règle de Leibniz on a :*

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}(vw)(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha!}{i!\,(\alpha-i)!}\left({}^{R}D_t^{\alpha-i}v(t)\right)w^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}\left((vw)^{(i)}(0)\right).$$

1.4.7 Comparaison entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo

Lemme 1.2 *[39]Soit la fonction v telle que ${}^{R}D_t^{\alpha}v$ et ${}^{C}D_t^{\alpha}v$ existe, avec $n-1<\alpha<n$, alors on a :*

$${}^{R}D_t^{\alpha}v(t) \neq {}^{C}D_t^{\alpha}v(t).$$

Exemple 1.1 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de* ***Riemann-Liouville*** *n'est pas nulle ni constante. en effet :*

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha+1}\,d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}-\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}t^{n-\alpha} \\
&= \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(n-\alpha-(n-1))}{\Gamma(1-\alpha)(n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(n-\alpha-(n-1))}t^{-\alpha} \\
&= \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Et pour la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de ***Caputo****, on a :*

$$\begin{aligned}{}^{C}D_{t}^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{C^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\ &= 0.\end{aligned}$$

Proposition 1.4 *[48]Soit $n-1<\alpha<n$, alors :*

$$\lim_{\alpha\to n}{}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t)=\lim_{\alpha\to n}{}^{C}D_{t}^{\alpha}v(t)=v^{(n)}(t).$$

Preuve. On utilise l'intégration par partie et la définition 1.9, on obtient :

$$\begin{aligned}{}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{0}^{t}\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(-v(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+\int_{0}^{t}v^{'}(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}d\tau\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(v(0)t^{n-\alpha}+\int_{0}^{t}v^{'}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha}d\tau\right) \qquad (1.10)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}{}^{C}D_{t}^{\alpha}v(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{v^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-v^{(n)}\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+\int_{0}^{t}v^{(n+1)}(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}d\tau\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(v^{(n)}(0)t^{n-\alpha}+\int_{0}^{t}v^{(n+1)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha}d\tau\right) \qquad (1.11)\end{aligned}$$

En prenant la limite $\alpha\to n$ sur (1.11) et (1.12) on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n}{}^{R}D_{t}^{\alpha}v(t) &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(v(0)+\int_{0}^{t}v^{'}(\tau)d\tau\right) \\ &= v^{(n)}(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n}{}^{C}D_{t}^{\alpha}v(t) &= \left(v^{(n)}(0)+\int_{0}^{t}v^{(n+1)}(\tau)d\tau\right) \\ &= v^{(n)}(t).\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\alpha \to n} {}^{R}D_t^{\alpha} v(t) = \lim_{\alpha \to n} {}^{C}D_t^{\alpha} v(t) = v^{(n)}(t).$$

■

1.5 Espaces fonctionnels

1.5.1 Espace $L^2(\Omega)$

Pour l'étude de quelqus problèmes, on a besoin de rappeler quelques espaces fonctionnels. Soit $L^2(0,d)$, $d \in \mathbb{R}_+^*$, l'espace de Hilbert usuel muni d'un produit sclaire noté $(.,.)_{L^2(0,d)}$ et d'une norme associée $\|.\|_{L^2(0,d)}$.

L'espace de Hilbert $L^2(\Omega) = L^2((0,T), L^2(0,d))$ $(\Omega = (0,d) \times (0,T))$ est constitué de (classes de) fonctions définies et carés intégrables dans Ω. Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ est noté $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ défini par :

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_0^d (u(x,.), v(x,.))_{L^2(0,T)} \, dx$$

et d'une norme associée dénotée $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ définie par :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^d \|u(x,.)\|_{L^2(0,T)} \, dx \right)^{1/2}.$$

1.5.2 Espaces fractionnaires

Soit le domaine $Q = \Omega \times I$ tel que Ω, I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit $C^\infty(I)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur I et $C_0^\infty(I)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support comact dans I.

1. **L'espace de Sobolev $\mathrm{H}^\alpha(\mathbb{R})$**

Définition 1.11 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$, on définit :*

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}) = \left\{ u/\ u \in L^{2}(\mathbb{R})\ ;\ (1+|x|^{2})^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x) \in L^{2}(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}^{n} \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R})} = \left\| (1+|x|^{2})^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u)(x) \right\|_{L^{2}(\mathbb{R})}$$

laquelle est induite par le produit scalaire :

$$(u,v)_{H^{\alpha}(\mathbb{R})} = \left((1+|x|^{2})^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(u), (1+|x|^{2})^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}(v) \right)_{L^{2}(\mathbb{R})},$$

où $\mathcal{F}(u)$ désigne la transformation de Fourier de u définie par :

$$\mathcal{F}u\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\exp(-2\pi i t\xi)dt.$$

Définition 1.12 *Pour I désigne un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, on définit l'espace $H^{\alpha}(I)$ par :*

$$H^{\alpha}(I) = \left\{ u \in L^{2}(I)/\ \exists \widetilde{u} \in H^{\alpha}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \widetilde{u}\,|_{I} = u \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^{\alpha}(I)} = \inf_{\tilde{v} \in H^{\alpha}(\mathbb{R}), \tilde{v}|_{I} = v} \|\widetilde{u}\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R})}.$$

Définition 1.13 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, on définit*

$$H_{0}^{\alpha}(I) = \left\{ u; \|u\|_{H_{0}^{\alpha}(I)} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H_{0}^{\alpha}(I)} = (\|u\|_{L^{2}(I)}^{2} + |u|_{H_{0}^{\alpha}(I)}^{2})^{1/2},$$

avec

$$|u|_{H_{0}^{\alpha}(I)} = \left| \frac{\left({}^{R}D_{t}^{\alpha}u,\ {}_{t}^{R}D^{\alpha}u \right)_{L^{2}(I)}}{\cos(\alpha\pi)} \right|^{1/2},$$

définit une semi-norme sur $H_{0}^{\alpha}(I)$. On définit donc l'espace $H_{0}^{\alpha}(I)$ comme une complétion de l'espace $C_{0}^{\infty}(I)$ par la norme $\|.\|_{H_{0}^{\alpha}(I)}$.

Remarque 1.5 *Si $\alpha = 1$ et I un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, l'expression*

$$(u,v)_{H_0^1(I)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L^2(I)},$$

est une produit scalaire induisant la norme

$$\|u\|_{H_0^1(I)} = \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(I)}.$$

2. Les espaces ${}^l\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{I})$, ${}^r\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{I})$ et ${}^c\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{I})$

Définition 1.14 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on définit*

$${}^lH^\alpha(I) = \left\{u; \|u\|_{{}^lH^\alpha(I)} < \infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{{}^lH^\alpha(I)} = (\|u\|_{L^2(I)}^2 + |u|_{{}^lH^\alpha(I)}^2)^{1/2},$$

avec

$$|u|_{{}^lH^\alpha(I)} = \left\| {}^RD_t^\alpha u\right\|_{L^2(I)},$$

définit une semi-norme sur ${}^lH^\alpha(I)$. On définit donc l'espace ${}^lH^\alpha(I)$ comme une complétion de l'espace $C_0^\infty(I)$ par la norme $\|.\|_{{}^lH^\alpha(I)}$.

Remarque 1.6 *Premièrement, on a $|u|_{{}^lH^\alpha(I)}$ est une semi-norme et n'est pas une norme car, si on met :*

$$u(\theta) = (t-\theta)^\alpha (t-2\theta),$$

pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|u|_{{}^lH^\alpha(I)} &= \left(\int_I \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^\alpha (t-2\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_I \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-2\tau)\, d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alors, on trouve $u \neq 0$, malgré que $|u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} = 0$.

*Deuxièmement, il suffit d'appliquer la définition d'une norme, et de vérifier les trois propriétés essentielles. La difficulté principale est l'inégalité triangulaire, et pour la norme $\|u\|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}$, on utilise l'inégalité de **Minkowski**.*

Définition 1.15 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, on définit*

$$ {}^{r}H^{\alpha}(I) = \left\{ u; \|u\|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} < \infty \right\}, $$

muni de la norme

$$ \|u\|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} = (\|u\|_{L^2(I)}^2 + |u|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)}^2)^{1/2}, $$

avec

$$ |u|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} = \left\| {}_{t}^{R}D^{\alpha} u \right\|_{L^2(I)}, $$

définit une semi-norme sur ${}^{r}H^{\alpha}(I)$. On définit donc l'espace ${}^{r}H^{\alpha}(I)$ comme une complétion de l'espace $C_0^{\infty}(I)$ par la norme $\|.\|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)}$.

Définition 1.16 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, pour $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$ on définie*

$$ {}^{c}H^{\alpha}(I) = \left\{ u; \|u\|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} < \infty \right\}, $$

muni de la norme

$$ \|u\|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} = (\|u\|_{L^2(I)}^2 + |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}^2)^{1/2}, $$

avec

$$ |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} = \left| \left({}^{R}D_{t}^{\alpha} u, \; {}_{t}^{R}D^{\alpha} u \right)_{L^2(I)} \right|^{1/2}, $$

définit une semi-norme sur ${}^{c}H^{\alpha}(I)$. On définie donc l'espace ${}^{c}H^{\alpha}(I)$ comme une complétion de l'espace $C_0^{\infty}(I)$ par la norme $\|.\|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}$.

Lemme 1.3 *[48]Pour tout $0 < \alpha < 1$, si $u \in H^{\alpha}(I)$ et $v \in C_0^{\infty}(I)$, alors*

$$ ({}^{R}D_{t}^{\alpha} u(t), v(t))_{L^2(I)} = (u(t), \; {}_{t}^{R}D^{\alpha} v(t))_{L^2(I)}. $$

Preuve. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt &= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{v(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_{t=\tau}^{t=T}-\int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}dt\right] \\
&= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{v(T)(T-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}dt\right] \\
&= -\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}dt \\
&= \int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

D'après la définition de produit scalaire dans $L^2(I)$, et par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
({}^{R}D_t^{\alpha}u(t),v(t))_{L^2(I)} &= \int_0^T\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right).v(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[v(t)\int_0^t\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\bigg|_{\tau=0}^{\tau=T}-\int_0^T v'(t)\int_0^t\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[v(T)\int_0^T\frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau-\int_0^T\int_0^t\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau v'(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[v(T)\int_0^T\frac{u(\tau)}{(T-\tau)^{\alpha}}d\tau-\int_0^T\int_{\tau}^T\frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt u(\tau)d\tau\right]
\end{aligned}$$

Par (1.16), on a

$$\begin{aligned}
&({}^{R}D_t^{\alpha}u(t),v(t))_{L^2(I)} \\
&= \int_0^T u(\tau)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{v(T)}{(T-\tau)^{\alpha}}-\int_{\tau}^{T}\frac{v'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt\right]d\tau. \\
&= \int_0^T u(\tau)\left[\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{v(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\right]d\tau \\
&= (u(\tau),\, {}_{\tau}^{R}D^{\alpha}v(\tau))_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.4 *[49]Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, si $u \in {}^{l}H^{\alpha}(I)$ et $v \in C_0^{\infty}(I)$, alors*

$$\left({}^{R}D_t^{\alpha} u(t), v(t) \right)_{L^2(I)} = \left(u(t), {}_{t}^{R}D^{\alpha} v(t) \right)_{L^2(I)}.$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 < \alpha < n$. D'après la relation entre les dérivées fractionnaires de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** et que $v \in C_0^{\infty}(I)$ on a :

$$ {}_{t}^{R}D^{\alpha} v(t) = {}_{t}^{C}D^{\alpha} v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^{(i)}(T)(T-t)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} = {}_{t}^{C}D^{\alpha} v(t),$$

Par la définition de produit scalaire dans $L^2(I)$ et de la dérivée ${}_{t}^{R}D^{\alpha} v(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left({}^{R}D_t^{\alpha} u(t), v(t)\right)_{L^2(I)} &= \int_0^T \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) .v(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left(\frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) .v(t)dt, \end{aligned}$$

par intégrations par parties n fois on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^T v(t). \left(\frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) dt \\ &= (-1)^n \int_0^T v^{(n)}(t). \left(\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) dt \\ &= (-1)^n \int_0^T \int_0^t v^{(n)}(t). \left(\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) dt \\ &= (-1)^n \int_0^T \int_\tau^T \frac{v^{(n)}(t)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} .u(\tau)dtd\tau. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left({}^{R}D_t^{\alpha} u(t), v(t) \right)_{L^2(I)} &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T u(\tau) \left(\int_\tau^T \frac{v^{(n)}(t)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} dt \right) d\tau. \\ &= \left(u(\tau), {}_{t}^{C}D^{\alpha} v(\tau) \right)_{L^2(I)} \\ &= \left(u(\tau), {}_{t}^{R}D^{\alpha} v(\tau) \right)_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

■

Lemme 1.5 *[48]Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a :*

$$\begin{aligned}
\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u(t),\ {}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \cos(\pi\alpha)\left\| {}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
\left({}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u(t),\ {}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \cos(\pi\alpha)\left\| {}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Preuve. [46]Soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a d'après le théoèreme de Parseval :

$$\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u(t),\ {}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\mathcal{F}\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u\right), \mathcal{F}\left({}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u\right)\right)_{L^2(\mathbb{R})},$$

par (1.9) on a :

$$\begin{aligned}
\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u(t),\ {}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u\right).\overline{\mathcal{F}\left({}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u\right)}d\omega \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} (i\omega)^\alpha \mathcal{F}(v(t))\,\omega.\overline{(-i\omega)^\alpha \mathcal{F}(v(t))\,\omega}d\omega,
\end{aligned}$$

et on a :

$$\overline{(i\omega)^\alpha}\begin{cases} \exp(-i\pi\alpha)\overline{(-i\omega)^\alpha}, & \omega \geq 0 \\ \exp(i\pi\alpha)\overline{(-i\omega)^\alpha}, & \omega < 0 \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u(t),\ {}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left((i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega.\overline{(-i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega}\right)1_{E_1}d\omega \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}} \left((i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega.\overline{(-i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega}\right)1_{E_2}d\omega,
\end{aligned}$$

où $E_1 = \{\omega \geq 0\}$ et $E_2 = \{\omega < 0\}$,alors :

$$\begin{aligned}
&\left({}_{-\infty}^{\ R}D_t^\alpha u(t),\ {}_{t}^{R}D_\infty^\alpha u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \int\limits_0^\infty \left((i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega.\exp(i\pi\alpha)\overline{(i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega}\right)d\omega \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^0 \left((i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega.\exp(-i\pi\alpha)\overline{(i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega}\right)d\omega \\
&= \exp(i\pi\alpha)\int\limits_0^\infty \left|(i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega\right|^2 d\omega \\
&\quad + \exp(-i\pi\alpha)\int\limits_{-\infty}^0 \left|(i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t))\,\omega\right|^2 d\omega
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t),\ {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= (\cos(\pi\alpha)+i\sin(\pi\alpha))\int_0^{\infty}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega \\
&\quad +(\cos(\pi\alpha)-i\sin(\pi\alpha))\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega \\
&= \cos(\pi\alpha)\int_{\mathbb{R}}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega \\
&\quad +i\sin(\pi\alpha)\left[\int_0^{\infty}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega-\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega\right].
\end{aligned}$$

Il suffit de prouve que

$$\int_0^{\infty}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega,$$

pour $-\omega=v$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega &= -\int_{\infty}^{0}\left|(-iv)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)(-v)\right|^2 dv \\
&= \int_0^{\infty}\left|(iv)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)(v)\right|^2 dv.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t),\ {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\alpha}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \cos(\pi\alpha)\int_{\mathbb{R}}\left|(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right|^2 d\omega \\
&= \cos(\pi\alpha)\left((i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega,(i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}\left(u(t)\right)\omega\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \cos(\pi\alpha)\left({}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t),\ {}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u(t)\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \cos(\pi\alpha)\left\|{}_{-\infty}^{R}D_t^{\alpha}u\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

De même manière, on prouvée la deuxième égalité. ■

Remarque 1.7 *Si $\alpha = n + \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $u \in C_0^\infty(I)$, on a*

$$\begin{aligned}
({}_{-\infty}^{R}D_t^{n+\frac{1}{2}}u(t),\ {}_{t}^{R}D_{\infty}^{n+\frac{1}{2}}u(t))_{L^2(\mathbb{R})} &= ({}_{-\infty}^{R}D_t^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right),\ {}_{t}^{R}D_{\infty}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right))_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= (\frac{d}{dt}\left(\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right), \left(\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right))_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposition 1.5 *[49]Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $v \in L^2(I)$, l'application linéaire :*

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_t^{\alpha}u : C_0^\infty(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\phi \longmapsto\ {}^{R}D_t^{\alpha}u(\phi) &= \int_I u\ {}_{t}^{R}D^{\alpha}(\phi)dt
\end{aligned} \tag{1.13}$$

est continue dans $C_0^\infty(I)$.

Notations

Soit c une constante positive indépendante de toute fonction on utilise l'expression $A \lesssim B$ pour signifier que $A \leq cB$, et utiliser l'expression $A \cong B$ signifie que$A \lesssim B \lesssim A$.

Preuve. Soit $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$, tel que :

$$\left\|\phi_i^{(m)}\right\|_\infty = \sup_{t\in I}\left|\phi_i^{(m)}(t)\right| \longrightarrow 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \text{pour } i \longrightarrow \infty.$$

On a pour tout $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|\ {}^{R}D_t^{\alpha}u(\phi_i)\right| &= \left|\int_I u\ {}_{t}^{R}D^{\alpha}\phi_i dt\right| \\
&\leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\ {}_{t}^{R}D^{\alpha}\phi_i\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\ {}_{t}^{C}D^{\alpha}\phi_i\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^T\frac{\phi_i^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\phi_i^{(n)}\right\|_\infty\left\|\int_t^T\frac{1}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}d\tau\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\phi_i^{(n)}\right\|_\infty\left\|(T-t)^{n-\alpha}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \text{ pour } i \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.2 *L'application* ${}^{R}D_t^{\alpha}u$ *est continue de* $(C_0^{\infty}(I))'$ *dans* $(C_0^{\infty}(I))'$.

Lemme 1.6 *[49], [41]Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ${}^{l}H^{\alpha}(I)$ *et* ${}^{r}H^{\alpha}(I)$ *sont des espaces complets.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans ${}^{l}H^{\alpha}(I)$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left({}^{R}D_t^{\alpha}u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(I)$. Alors il existe $u, w \in L^2(I)$, tel que :

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(I), \tag{1.14}$$

$${}^{R}D_t^{\alpha}u_n \rightarrow w \quad \text{dans } L^2(I), \tag{1.15}$$

reste à prouver que ${}^{R}D_t^{\alpha}u = w$. Par (1.19) on a

$$\forall \phi \in C_0^{\infty}(I) : \quad \int_I {}^{R}D_t^{\alpha}u_n\phi dt \longrightarrow \int_I w\phi dt,$$

d'après le lemme 1.5 et (1.18), on obtient :

$$\int_I {}^{R}D_t^{\alpha}u_n\phi dt = \int_I u_n \, {}_t^{R}D^{\alpha}(\phi)dt \longrightarrow \int_I u \, {}_t^{R}D^{\alpha}(\phi)dt,$$

par (1.17) on a

$$\int_I {}^{R}D_t^{\alpha}u_n\phi dt \longrightarrow {}^{R}D_t^{\alpha}u(\phi).$$

D'après l'unicité de la limite on trouve :

$${}^{R}D_t^{\alpha}u = w.$$

De même manière, on prouvée que ${}^{r}H^{\alpha}(I)$ il est complet. ■

Lemme 1.7 *[49]Pour* $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $u \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$, *on a :*

$${}^{R}D_t^{\alpha}u(t) = {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\, {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t),$$

et dans le sens du distribution

$$\left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), \phi(t)\right\rangle = \left\langle {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\, {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t), \phi(t)\right\rangle, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(I),$$

aussi :

$$ {}^{R}D_t^{\alpha}u \in H^{-\frac{\alpha}{2}}(I). $$

Preuve. Par (1.17), pour tout $\phi \in C_0^{\infty}(I)$ on a :

$$ \begin{aligned} \left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), \phi(t) \right\rangle &= (u(t), {}_t^{R}D^{\alpha}\phi(t))_{L^2(I)}, \\ \left\langle {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\, {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t), \phi(t) \right\rangle &= ({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t), {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t))_{L^2(I)}. \end{aligned} $$

D'après le lemme 1.4 on obtient

$$ (u(t), {}_t^{R}D^{\alpha}\phi(t))_{L^2(I)} = (u(t), {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\, {}_t^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t))_{L^2(I)}, $$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$ \begin{aligned} & \left|\left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), \phi(t) \right\rangle\right| \\ = & \left|({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t), {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t))_{L^2(I)}\right| \\ \leq & \left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t)\right\|_{L^2(I)} \left\| {}_t^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t)\right\|_{L^2(I)}, \qquad \forall \phi \in C_0^{\infty}(I), \end{aligned} $$

puisque $C_0^{\infty}(I)$ est dense dans $H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ l'inégalité ci-dessus reste vraie pour tout $v \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$.Ainsi ${}^{R}D_t^{\alpha}u \in H^{-\frac{\alpha}{2}}(I)$. ■

Lemme 1.8 *[48]Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$, les semi- normes $|.|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}$, $|.|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)}$, $|.|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}$et $|.|_{H_0^{\alpha}(I)}$ sont équivalentes. On pose*

$$ |.|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} \cong |.|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} \cong |.|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} \cong |.|_{H_0^{\alpha}(I)}. $$

Preuve. D'après le lemme 1.6 on a :

$$ |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} = \left(({}^{R}D_t^{\alpha}u(t), {}_t^{R}D^{\alpha}u(t))_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} = \sqrt{\cos(\pi\alpha)} \left\| {}^{R}D_t^{\alpha}u\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\cos(\pi\alpha)}\, |u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}, $$

comme $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$, on a :

$$ 0 < |\cos(\pi\alpha)| \leq 1. $$

Alors

$$ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \alpha \neq n + \frac{1}{2}, \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que : } \varepsilon \leq |\cos(\pi\alpha)| \leq 1. \tag{1.16} $$

On obtient donc :

$$\sqrt{\varepsilon}\,|u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} \leq |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} \leq |u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} \Longleftrightarrow |u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}\,.$$

De même manière, on prouvée que :

$$|u|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}\,.$$

D'où

$$|u|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)}\,. \tag{1.17}$$

Et pour équivalence entre $|.|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}$et $|.|_{H_0^{\alpha}(I)}$, on a

$$|u|_{H_0^{\alpha}(I)} = \frac{|u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}}{\sqrt{\cos(\pi\alpha)}},$$

d'après (1.22) on trouve

$$|u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} \leq |u|_{H_0^{\alpha}(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,|u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} \Longleftrightarrow |u|_{H_0^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)}\,, \tag{1.18}$$

en combinant (1.23) et (1.24), on conclut :

$$|u|_{{}^{r}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{c}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{{}^{l}H^{\alpha}(I)} \cong |u|_{H_0^{\alpha}(I)}\,.$$

■

Lemme 1.9 *[49]Pour $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $u, v \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$, on a :*

$$\left\langle {}^{R}D_t^{\alpha}u(t), v(t)\right\rangle = \left({}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t),\ {}_{t}^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}v(t)\right)_{L^2(I)}, \tag{1.19}$$

$$\left\langle {}_{t}^{R}D^{\alpha}u(t), v(t)\right\rangle = \left({}_{t}^{R}D^{\frac{\alpha}{2}}u(t),\ {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}}u(t)\right)_{L^2(I)}. \tag{1.20}$$

Preuve. Par la définition de l'espace $H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^{\infty}(I)$ tel que :

$$\|v_n - v\|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Pour tous $u \in H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)$ et par le lemme 1.8, on a :

$$\left\langle {}^R D_t^{\alpha} u(t), v_n(t) \right\rangle = \left\langle {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}}\, {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t), v_n(t) \right\rangle = \left({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u(t),\ {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} v_n(t) \right)_{L^2(I)}, \tag{1.21}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle {}^R D_t^{\alpha} u, v_n \right\rangle - \left\langle {}^R D_t^{\alpha} u, v \right\rangle \right| \\ = \ & \left| \left\langle {}^R D_t^{\alpha} u, v_n - v \right\rangle \right| \\ \lesssim \ & \| v_n - v \|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 1.9 on a :

$$\begin{aligned} & \left| \left({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u,\ {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} v_n \right)_{L^2(I)} - \left({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} u,\ {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} v \right)_{L^2(I)} \right| \\ = \ & \left| \left({}^R D_t^{\alpha} u,\ {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} (v_n - v) \right)_{L^2(I)} \right| \\ \leq \ & \left\| {}^R D_t^{\alpha} u \right\|_{L^2(I)} \left\| {}_t^R D^{\frac{\alpha}{2}} (v_n - v) \right\|_{L^2(I)} \\ = \ & \left\| {}^R D_t^{\alpha} u \right\|_{L^2(I)} |v_n - v|_{{}^r H^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \\ \lesssim \ & \left\| {}^R D_t^{\alpha} u \right\|_{L^2(I)} |v_n - v|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \\ \lesssim \ & \left\| {}^R D_t^{\alpha} u \right\|_{L^2(I)} \|v_n - v\|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(I)} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Alors en prenant la limite au deux côtes de (1.27), on obtient (1.25). De manière similiare on obtient (1.26). ■

Lemme 1.10 *[1]Pour toute fonction u absolument continue sur $[0,T]$, on a*

$$u(t)\, {}^C D_t^{\alpha} u(t) \geq \frac{1}{2}\, {}^C D_t^{\alpha} u^2(t), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.22}$$

Preuve. Par la formule (1.4), on peut réécrivons l'inégalité (1.28) sous la forme

$$\begin{aligned}
& u(t)\,{}^{C}D_{t}^{\alpha}u(t)-\frac{1}{2}\,{}^{C}D_{t}^{\alpha}u^{2}(t) \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}u(t)\int_{0}^{t}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau-\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{2u(\tau)u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{u'(\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\int_{\tau}^{t}u'(\xi)d\xi d\tau \\
= & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}u'(\xi)d\xi\int_{0}^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau=\Lambda,
\end{aligned}$$

pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que l'intégrale Λ est positive. L'intégrale Λ prend une valeurs positive, puisque :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{\alpha}\frac{u'(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}}d\xi\int_{0}^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \\
&= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{\alpha}\frac{d}{d\xi}\left(\int_{0}^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^{2}d\xi \\
&= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}(t-\xi)^{\alpha}\left(\int_{0}^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^{2}\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=t} \\
&\quad+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}\left(\int_{0}^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^{2}d\xi \\
&= \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}\left(\int_{0}^{\xi}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)^{2}d\xi.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Lambda\geq 0.\ \blacksquare$$

1.6 La méthode des inégalités d'énergie

la méthode des inégalités d'énergie est une technique efficace pour étudé l'existence et l'unicité de la solution des équations aux dérivées partielles, elle s'appelle aussi la méthode d'analyse fonctionnelle ou la méthode des estimations à priori. cette méthode a une caractère supérieur qu'on peut tirer le théorème d'existence de la solution du problème posé, à partir du théorème d'unicité. Les points diffciles de cette méthode résident dans le choix des espace fonctionnels E et F et dans le choix du multiplicateur Mu. Le schéma de la méthode peut être résumé comme suit :

1. D'abord on écrit le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D\left(L\right);$$

   où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F convenablement choisis.

2. Puis on établit l'estimation à priori pour l'opérateur L.

3. Ensuite on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F.

Plus précisément nous suivons dans ce travail le schéma suivant :

On démontre l'inégalité d'énergie du type

$$\left\|u\right\|_{B} \leq c\left\|Lu\right\|_{F}. \tag{1.23}$$

Ce type d'estimations à priori est obtenu en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentiel Mu (contenant la fonction u ou ses dérivées) définie sur le domaine Q_T.

Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

Ensuite, on montre que l'opérateur L de B dans F admet une fermeture $\overline{L}$, donc la solution de l'équation opérationnelle :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad u \in D\left(\overline{L}\right), \tag{1.24}$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimation (1.29) sera prolongée à $\overline{L}$, c'est à dire :

$$\|u\|_B \leq c \left\|\overline{L}u\right\|_F.$$

Ainsi, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (1.30).

Comme l'image de l'opérateur $\overline{L}$ est fermée dans F et que $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$, l'établissement de la densité de l'ensemble $R\left(\overline{L}\right)$ dans F garantie l'existence de la solution forte du problème (1.30).

1.7 Quelque inégalités utiles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

* **Inégalité de Cauchy :**

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \left|\int\limits_\Omega uvdx\right| \leq \left(\int\limits_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

* **Inégalité de Cauchy avec ε :**

Qu'on appelle aussi ε-inégalité

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|y|^2, \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } x, y \text{ arbitraire (des réels).}$$

* **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

Soit V un espace de Hilbert.

$$\forall u, v \in V, |\langle u, v\rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V.$$

* **Inégalité Minkowski :**

Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $u, v \in L^p(\Omega)$, on a

$$\left(\int\limits_\Omega |u+v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*** Lemme de Gronwall :**

Si a, b sont des fonctions non négatives et intégrables sur $(0, T)$, comme la fonction b soit non-décroissante sur $(0, T)$, et $\lambda \in L^1(0, T)$, $\lambda > 0$, il s'ensuit à partir de :

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t \lambda(s) \cdot a(s)\, ds, \tag{1.25}$$

alors

$$a(t) \leq b(t) \cdot \exp(\Lambda(t)),$$

où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds.$$

Preuve. On met

$$k(t) = \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, l'estimation

$$\frac{\partial}{\partial t} k(t) = \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)) \left(a(t) - \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds \right) \leqslant \lambda(t)\, b(t) \exp(-\Lambda(t)),$$

résulte de (1.25) et $\lambda(t) > 0$. Avec $k(0) = 0$ par définition, l'intégration sur t conduit à

$$k(t) \leqslant \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(-\Lambda(s))\, ds.$$

Encore, pour une autre fois on utilise (1.25),

$$\exp(-\Lambda(t))\,(a(t) - b(t)) \leqslant \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds = k(t) \leqslant \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(-\Lambda(s))\, ds.$$

Donc, on trouve

$$a(t) - b(t) \leqslant \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s))\, ds, \tag{1.26}$$

si b est non-décroissante sur $(0,T)$, de (1.26) et en vertu de $\lambda(t)>0$, on obtient

$$\begin{aligned}
a(t) &\leqslant b(t)+\int_0^t \lambda\left(s\right) b(s)\exp\left(\Lambda\left(t\right)-\Lambda\left(s\right)\right)ds \\
&\leqslant b(t)\left[1+\int_0^t \lambda\left(s\right)\exp\left(\Lambda\left(t\right)-\Lambda\left(s\right)\right)ds\right] \\
&\leqslant b(t)\left[1+\exp\left(\Lambda\left(t\right)\right)\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left[-\exp\left(-\Lambda\left(s\right)\right)\right]ds\right] \\
&\leqslant b(t)\left[1+\exp\left(\Lambda\left(t\right)\right)\left[-\exp\left(-\Lambda\left(t\right)\right)+1\right]\right] \\
&\leqslant b(t)\exp\left(\Lambda\left(t\right)\right).
\end{aligned}$$

Qui prouve le lemme. ■

Chapitre 2

Problème parabolique linéaire singulier avec condition aux limites de Neumann

2.1 Position du problème

Soit le domaine : $Q = \{(x.t) \in R^2 \; .0 < x < 1$ et $0 < t < T\}$, considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = f\,(x.t) & \forall\,(x,t) \in Q \\ u\,(x.0) = \varphi\,(x) & \forall x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(1,t) = 0 & \forall t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.1}$$

Dont l'équation parabolique est donnée comme suit :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f\,(x.t) \tag{2.2}$$

avec la condition initiale :

$$\ell u = u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,, \qquad \forall x \in (0,1)\,. \tag{2.3}$$

Les conditions aux limite de type Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(0.t) = \frac{\partial u}{\partial x}\,(1.t) = 0, \qquad \forall t \in (0,T)\,, \tag{2.4}$$

ou f et φ sont des fonctions connues.

Notons que la fonction φ satisfait les conditions des compatibilités :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0. \tag{2.5}$$

2.2 L'étude d'unicité de la solution

On pose le problème (2.2) sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lu = \digamma$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec le domaine de définition $D(L)$ constitué de la fonction $u \in C\left(0, T;\ L^2_{\sqrt{x}}(Q)\right)$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2_{\sqrt{x}}(Q)$ et u satisfait les conditions aux limites. L'operateur L est considéré de E à F, ou E est l'espace de Banach des fonctions $u \in C\left(0, T;\ L^2_{\sqrt{x}}(Q)\right)$ dont la norme :

$$\|u\|_E^2 = \|u\|^2_{C\left(0,T;\ L^2_{\sqrt{x}}(0,1)\right)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q)}$$

et F est un espace de Hilbere de tout les élément $\digamma = (f, \varphi)$ dont la norme :

$$\|\digamma\|_F^2 = \|f\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(0.1)}$$

Théorème 2.1 *Pour tout fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation*

$$\|u\|_E \leq K \|Lu\|_F$$

ou K est une constante positive indépendant de u, tel que :

$$K = \sqrt{\exp(T)}$$

Preuve. *En multipliant l'équation du problème (2.1) par le multiplicateur suivant $Mu = xu(x.t)$,* *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]Mudxdt\\
=&\int_{Q_\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]xu\left(x.t\right)dxdt,\\
=&\int_{Q_\tau}x\frac{\partial u}{\partial t}u\left(x.t\right)dxdt-\int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)u\left(x.t\right)dxdt,\\
=&\int_{Q_\tau}xf\left(x.t\right)u\left(x.t\right)dxdt.
\end{aligned}$$

nous notons :

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_{Q_\tau}x\frac{\partial u}{\partial t}u\left(x.t\right)dxdt\\
I_2&=-\int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)u\left(x.t\right)dxdt\\
I_3&=\int_{Q_\tau}xf\left(x.t\right)u\left(x.t\right)dxdt
\end{aligned}$$

Calcule de I_1 *: d'après l'integration par partie, on trouve*

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}.xu\left(x.t\right)dxdt\\
=&\ \frac{1}{2}\int_0^1 xu\left(x.\tau\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 xu\left(x.0\right)^2dx\\
=&\ \frac{1}{2}\int_0^1 xu\left(x.\tau\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x\varphi\left(x\right)^2dx.
\end{aligned}$$

Calcule de I_2 *:*

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)u\left(x.t\right)dxdt\\
=&-\int_0^\tau xu\left(x.t\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0^1dt+\int_{Q_\tau}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt\\
=&\int_{Q_\tau}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt.
\end{aligned}$$

Calcule de I_3 *: L'utilisation de l'intégrale par partie et l'utilisation d'inégalité de Cauchy, on trouve*

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}xf\left(x.t\right)u\left(x.t\right)dxdt\\
\leq&\ \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\sqrt{x}f\left(x.t\right)\right)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\sqrt{x}u\left(x.t\right)^2\right)dxdt.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]Mudxdt \\
=\ &\frac{1}{2}\int_0^1 xu\left(x.\tau\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x\varphi\left(x\right)^2dx+\int_{Q_\tau}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt \\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}f\left(x.t\right)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\sqrt{x}u\left(x.t\right)^2\right)dxdt.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 xu\left(x.\tau\right)^2dx+2\int_{Q_\tau}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt \\
\leq\ &\int_{Q_\tau}f\left(x.t\right)^2dxdt+\int_{Q_\tau}xu\left(x.t\right)^2dxdt+\int_0^1 x\varphi\left(x\right)^2dx.
\end{aligned}$$

Par l'application du lemme de Gronwale, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 xu\left(x.\tau\right)^2dx+2\int_{Q_\tau}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt \\
\leq\ &\left(\exp\int_0^T dt\right)\left(\int_{Q_\tau}f\left(x.t\right)^2dxdt+\int_0^1 x\varphi\left(x\right)^2dx\right)
\end{aligned}$$

Puisque le second memebre de le dernier inégalité ne depend pas de t*, on peut passer au maximum du coté de l'inégalité précedente, on trouve :*

$$\begin{aligned}
&\max_t\left(\int_0^1 xu\left(x.\tau\right)^2dx\right)+2\int_{Q_\tau}x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt \\
\leq\ &\left(\exp T\right)\left(\int_{Q_\tau}f\left(x.t\right)^2dxdt+\int_0^1 x\varphi\left(x\right)^2dx\right)
\end{aligned}$$

tel que

$$C=\exp T$$

Ainsi on écrit :

$$\|u\|^2_{C\left(0,T;L^2_{\sqrt{x}}(Q)\right)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q)}\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(Q)}+\|\varphi\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(0.1)}\right)$$

Ce qui équivalante a :

$$\|u\|_E\leq K\left\|\digamma\right\|_F\ \text{ ou } K=\sqrt{C}.$$

■

Corollaire 2.1 *Si pour tout fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation suivante*

$$\|u\|_E \leq K \|\mathcal{F}\|_F ,$$

alors la solution du problème (2.1) *s'il existe est unique.*

Preuve. Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.1)

$$\begin{cases} Lu_1 = \mathcal{F} \\ Lu_2 = \mathcal{F} \end{cases} \Longrightarrow Lu_1 - Lu_2 = 0.$$

et puisque L est linéaire, on obtient

$$L(u_1 - u_2) = 0$$

selon l'inégalité d'énergie

$$\|u_1 - u_2\|_E^2 \leq K \|0\|_F^2 .$$

Ce qui donne

$$u_1 = u_2.$$

■

La démonstration de l'existence de la solution est basée sur la preuve de ce qui suit :

1 : L'opérateur $L : E \to F$ a une fermuture.

2 : $R(L)$ est dense dans F pour tout $u \in E$ et pour $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ arbitraire.

Proposition 2.1 *L'opérateur L de E dans F est fermable.*

Preuve. Soit une suite $\{u_n\} \in D(L)$, tel que :

$$u_n \to \ 0 \text{ dans } E, \tag{2.6}$$

et

$$Lu_n \to (f, \varphi) \text{ dans } F,$$

nous devons prouvés que $f \equiv 0$ et $\varphi \equiv 0$

La convergence de u_n vers 0 dans E, donne

$$u_n \to \ 0 \text{ dans } D'(Q)\,, \tag{2.7}$$

de la continuité de la dérivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$ la relation précédente implique :

$$\mathcal{L}u_n \to \ 0 \text{ dans } D'(Q)\,, \tag{2.8}$$

de plus la convergence de $\mathcal{L}u_n$ vers f dans $L^2(Q)$ donné que :

$$\mathcal{L}u_n \to f \text{ dans } D'(Q)\,, \tag{2.9}$$

En vertu de l'unicité de la limite en $D'(Q)$ nous concluons de (2.8) et (2.9) que :

$$f = 0.$$

On a :

$$lu_n \to \varphi \text{ dans } L^2_{\sqrt{x}}(0,1)\,.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_E &= \|u_n\|^2_{C\left(0,T;L^2_{\sqrt{x}}(Q)\right)} + \|\partial_x u_n\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q)}\,, \\
\|u_n\|^2_E &\geq \|u_n\|^2_{C\left(0,T;L^2_{\sqrt{x}}(Q)\right)}\,, \\
\|u_n\|^2_E &\geq \|u_n(x.0)\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q)}\,.
\end{aligned}$$

En franchissant la limite, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2_E \geq \|\varphi(x)\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q)}\,,$$

donc $u_n \to 0$ dans E, ainsi $\|u_n\|^2_E \to 0$ dans E, on obtient alors :

$$\|\varphi(x)\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q)} \leq 0,$$

d'où :

$$\varphi = 0.$$

■

Soit $\overline{L}$ la fermuture de L et $D\left(\overline{L}\right)$ le domaine de définition de $\overline{L}$.

Définition 2.1 *La solution de l'équation*

$$\overline{L}u = \mathcal{F},$$

est appelée solution généralisée.

Le théorème (2.1) est valable pour une solution généralisée forte. Donc, on a l'inégalité

$$\|u_n\|_E \leq m \left\|\overline{L}u\right\|_F \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right), \tag{2.10}$$

par conséquent : cette dernière inégalité conduite aux corollaires suivants :

Corollaire 2.2 *La solution du problème* (2.1)*, s'il existe est dépend continuement de* $\mathcal{F} \in F$*.*

Corollaire 2.3 *L'ensemble* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égal à la ferméture de* $R(L)$: $\overline{R(L)}$*.*

2.3 L'étude d'existence de la solution

Théorème 2.2 *Pour chaque* $\mathcal{F} = (f.\varphi) \in F$ *, le problème* (2.1) *admet une unique solution forte* $u = L^{-1}\mathcal{F}$.

Pour la preuve du théorème, on a besoin du proposition suivante :

Proposition 2.2 *Si pour tout* $w \in L^2(Q)$ *et pour tout* $u \in D_0(L) = \{u \in D(L),\ u(x.0) = 0\}$*, on a :*

$$\int_Q \mathcal{L}u.wdxdt = 0. \tag{2.11}$$

alors w disparaît presque partout dans Q*.*

Preuve. Le produit scalaire de F est définie par :

$$(Lu.W)_F = \int_Q \mathcal{L}u.wdxdt + \int_0^1 (lu)(w_0)\,dx. \tag{2.12}$$

où $W = (w.w_0)$.

L'égalité (2.11) peut s'écrire comme suit :

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} w dx dt - \int_Q \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).w dx dt = 0. \tag{2.13}$$

Ce qui implique que :

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} w dx dt = \int_Q \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).w dx dt. \tag{2.14}$$

On pose

$$u(x.t) = \int_0^t z(x.\tau)\, d\tau = \zeta_t z, \tag{2.15}$$

Remplaçant (2.15) dans (2.14) on obtient :

$$\int_Q z w dx dt = \int_Q \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \zeta_t z}{\partial x}\right) w dx dt. \tag{2.16}$$

Lors de l'établissement de la fonction w et a partir de cette dernière égalité, on donne la fonction w en fonction de la fonction z comme suit :

$$w = x\zeta_t z,$$

Puisque z satisfait les même conditions que la fonction u, alors $z \in C\left(0, T; L^2_{\sqrt{x}}(Q)\right), \frac{\partial z}{\partial x} \in L^2_{\sqrt{x}}(Q)$ donc $w \in L^2(Q)$

Maintenant, en remplaçant w dans (2.16), on obtient :

$$\int_Q xz.\zeta_t z dx dt = \int_Q \zeta_t z.\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \zeta_t z}{\partial x}\right) dx dt,$$

D'après l'intégrale par partie et en utilisant les conditions aux limites de Neumann

$$\int_0^1 \frac{x}{2}(\zeta_t z)^2 \big|_{\tau=0}^{\tau=T} dx = -\int_Q x\left(\frac{\partial \zeta_t z}{\partial x}\right)^2 dx dt,$$

Donc, il devient $u = 0$ dans Q qui donne $w = 0$ dans Q. ■

Revenons, maintenant à la preuve du théorème d'existence :

Maintenant revenons, on a $W = (w.w_0) \in R(L)^{\perp}$ et pour tout $u \in D(L)$, donc W vérifie :

$$(Lu, W)_F = \int_Q \mathcal{L}u.w dx dt + \int_0^1 (lu).(w_0)\, dx = 0$$

Ensuite, il faut prouver que $W = 0$. On suppose $u \in D_0(L)$ dans la dernière égalité, on a d'après la proposition que :

$$\int_Q \mathcal{L}u.wdxdt = 0, \; u \in D_0(L).$$

Implique $w = 0$ on a donc il reste à démontrer

$$\int_0^1 (lu).(w_0)\,dx = 0, \; u \in D(L). \tag{2.17}$$

Puisque l'ensembele des valeurs de l'opérateur l est dense partout dans l'espace de Hilbert F avec la norme :

$$\left(\int_0^1 \left[(lu)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'inégalité (2.17) implique que $w_0 = 0$ donc $W = 0$, ce qui donne $\overline{R(L)} = F$ et complète la preuve de théorème (2.2).

Chapitre 3

Existence et unicité d'une solution d'un problème de Bessel pour une équation parabolique fractionnaire

Dans ce chapitre est destiné à résoudre l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode d'inégalité d'énergie dans des espaces fonctionnels fractionnaire d'un problèmes de Dirichlet pour une classe des équations aux dérivées partielles paraboliques fractionnaires avec l'opérateur de Bessel qui incluent une dérivée fractionnaire de Caputo.

3.1 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire $Q_T = (0,d) \times (0,T)$, avec $d, T < \infty$ et $0 < \alpha < 1$, on a le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\alpha} u(x,t) - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + b(x,t)u(x,t) = \widetilde{f}(x,t) \text{ dans } Q_T, \\ \qquad u(x,0) = \varphi(x) \qquad \forall x \in (0,d), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(d,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T). \end{cases} \tag{P}$$

On considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaire de type parabolique suivante :

$$\mathcal{L}u = {}^{C}D_t^{\alpha}u - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + bu = \widetilde{f},$$

Avec la condition initiale :

$$\ell u = u(x,0) = \varphi\left(x\right), \quad \forall x \in (0,d),$$

La condition au bord de type Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(d,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T).$$

Où b, $\widetilde{f}$ et φ sont des fonctions connues. Avec la fonction φ vérifie les conditions de compatibilité :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(d) = 0.$$

Et la fonctions $b(x,t)$ vérifie :

$$b_0 \leq b(x,t) \leq b_1, \; b_0, b_1 \in \mathbb{R}_*^+.$$

Ce problème est non homogène par rapport à la condition initiale, alors pour obtenir un problème homogène, on fait le changement de variable suivant :

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x) \Longrightarrow u(x,t) = v(x,t) + U(x),$$

où

$$\varphi(x) = U(x).$$

Donc, on obtient :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}v(x,t) - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) + b(x,t)v(x,t) \\ \quad = \widetilde{f}(x,t) - \mathcal{L}U(x) = f(x,t) \text{ dans } Q_T, \\ v(x,0) = 0 \qquad \forall x \in (0,d), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(d,t) = 0 \qquad \forall t \in (0,T). \end{cases},$$

Tel que :

$$
{}^{C}D_t^{\alpha}v(x,t) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) + b(x,t)v(x,t) = f(x,t), \tag{3.1}
$$

avec la condition initiale :

$$
\ell v = v(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,d), \tag{3.2}
$$

La condition au limite de type Neumann :

$$
\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(d,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T) \tag{3.3}
$$

où

$$
f(x,t) = \widetilde{f}(x,t) + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) - b(x,t)U(x).
$$

3.2 Estimation à priori

Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte dans un espace fonctionnel de Sobolev du problème $(3.1)-(3.3)$. La démonstration est basée sur une estimation à priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'image de l'opérateur engendré par le problème $(3.1)-(3.3)$. La solution du problème $(3.1)-(3.3)$ peut être considérée comme une solution du problème sous forme opérationnelle :

$$
Lv = \mathcal{F}, \tag{3.4}
$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec un domaine de définition $D(L)$ constitué des fonctions $v \in L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)$, telles que v, ${}^{C}D_t^{\alpha}v$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} \in L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)$ et v satisfait les condition aux limite (3.3).
L'opérateur L de B dans F, où B est un espace de Banach des fonctions $v \in L^2(Q_T)$ muni de la norme :

$$
\|v\|_B^2 = \left\|{}^{C}D_t^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)} + \|v\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)}
$$

laquelle est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, 0)$ muni de la norme :

$$
\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|^2_{L^2(Q_T)}
$$

laquelle est finie.

Théorème 3.1 *Pour toute fonction $v \in D(L)$, on a l'estimation*

$$\|v\|_B \leq k \|Lv\|_F \tag{3.5}$$

où k est une constante positive indépendante de v.

Preuve. Multiplions l'équation (3.1) par l'opérateur :

$$Mv = xv(x,t)$$

et on intégrant sur le domaine $Q_\tau = (0,d) \times (0,\tau)$ avec $\tau \in (0,T)$. On obtient sur Q_τ :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_\tau} \mathcal{L}v.Mvdxdt \\
=& \int\limits_{Q_\tau} {}^C D_t^\alpha v(x,t)xv(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) v(x,t)dxdt \\
&+ \int\limits_{Q_\tau} b(x,t)xv^2(x,t)dxdt \\
=& \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)xv(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

Comme $v(x,0) = 0$ on a ${}^C D_t^\alpha v(x,t) = {}^R D_t^\alpha v(x,t)$, donc on peut appliquer les lemmes $1.8, 1.5$ et 1.9, il vient :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_\tau} {}^R D_t^\alpha v(x,t).xv(x,t)dxdt \\
=& \ ({}^R D_t^\alpha \sqrt{x}v(x,t), \sqrt{x}v(x,t))_{L^2(Q_\tau)} \\
=& \ ({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \ {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x}v(x,t), \sqrt{x}v(x,t))_{L^2(Q_\tau)} \qquad \text{(D'après lemme 1.8)} \\
=& \ (\ {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x}v(x,t), {}^R_t D^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x}v(x,t))_{L^2(Q_\tau)} \qquad \text{(D'après lemme 1.5)} \\
=& \ \left|\sqrt{x}u\right|^2_{{}^c H^\alpha(Q_\tau)} \cong \left|\sqrt{x}u\right|^2_{{}^l H^\alpha(Q_\tau)} = \left\|{}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x}v\right\|_{L^2(Q_\tau)}, \qquad \text{(D'après lemme 1.9)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

et par intégration par parties sur $(0,d)$; on trouve :

$$\begin{aligned}
& -\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) v(x,t)dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau\int\limits_0^d \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) v(x,t)dxdt \\
&= -\int\limits_0^\tau x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}v(x,t)\Big|_{x=0}^{x=d} dt + \int\limits_{Q_\tau} x\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} x\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

De (3.6) et (3.7), il vient :

$$\begin{aligned}
& \left\|{}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x}v\right\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \int\limits_{Q_\tau} x\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} b(x,t)xv^2(x,t)dxdt \\
\cong\ & \int\limits_{Q_\tau} f(x,t).xv(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε, il vient

$$\int\limits_{Q_\tau} f(x,t).xv(x,t)dxdt \le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} x\left|f(x,t)\right|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_\tau} x\left|v(x,t)\right|^2 dxdt,$$

alors, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\|{}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x}v\right\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \int\limits_{Q_\tau} x\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} b(x,t)xv^2(x,t)dxdt \\
\le\ & \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} \left|f(x,t)\right|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left|v(x,t)\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\|{}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x}v\right\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \int\limits_{Q_\tau} x\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \left(b(x,t)-\frac{\varepsilon}{2}\right) xv^2(x,t)dxdt \\
\le\ & \frac{d}{2\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} \left|f(x,t)\right|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \int\limits_{Q_\tau} x \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \left(b_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right) x v^2(x,t) dxdt$$

$$\leq \frac{d}{2\varepsilon} \int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^2 \, dxdt.$$

Comme tous les tèrmes sont positives, on a :

$$\left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{d}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2, \tag{3.8}$$

D'autre part, on a

$$\int\limits_{Q_\tau} x \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 dxdt \leq \frac{d}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2$$

alors

$$\left\| \sqrt{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{d}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2. \tag{3.9}$$

Aussi, on a

$$\|\sqrt{x} v\|_{L^2(Q_\tau)}^2 \leq \frac{d}{2\varepsilon \left(b_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right)} \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2. \tag{3.10}$$

En combinant (3.8), (3.9) et (3.10), on obtient

$$\left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x} v \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \left\| \sqrt{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(Q_\tau)}^2 + \|\sqrt{x} v\|_{L^2(Q_\tau)}^2$$

$$\leq \frac{d}{2\varepsilon} \left(1 + 1 + \frac{1}{\left(b_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right)} \right) \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2$$

Finalement, on résulte ce qui suit

$$\left\| {}^{R}D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_\tau)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_\tau)}^2 + \|v\|_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_\tau)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(Q_\tau)}^2,$$

avec

$$C = \frac{d}{2\varepsilon} \left(1 + 1 + \frac{1}{\left(b_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right)} \right).$$

Comme la partie droite de la dernière inégalité est indépendante de ■, passant au maximum du côté gauche par rapport à ■ sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient :

$$\|v\|_B \leq k \|Lv\|_F, \quad \text{tel que } k = \sqrt{C}.$$

D'où l'unicité de la solution. ■

Remarque 3.1 *Cette inégalité* $\|v\|_B \leq k\,\|Lv\|_F$ *est donne l'unicité de la solution, en effet :*

soient v_1 *et* v_2 *deux solutions, alors :*

$$\begin{cases} Lv_1 = \mathcal{F} \\ Lv_2 = \mathcal{F} \end{cases} \Longrightarrow L(v_1 - v_2) = 0,$$

donc

$$\|v_1 - v_2\|_B \leq k\,\|0\|_F \Longrightarrow \|v_1 - v_2\|_B \leq 0 \Longrightarrow v_1 - v_2 = 0,$$

ce qui donne l'unicité de la solution.

Proposition 3.1 *L'opérateur* L *de* B *dans* F *est fermable.*

Preuve. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(L)$ une suite telle que :

$$v_n \to 0 \quad \text{dans } B, \tag{3.11}$$

et

$$Lv_n \to \mathcal{F} \quad \text{dans } F, \tag{3.12}$$

il faut démontrer que

$$f \equiv 0.$$

La convergence de v_n vers 0 dans B entraîne que :

$$v_n \to 0 \;\text{ dans }\; \left(C_0^\infty(Q_T)\right)'. \tag{3.13}$$

Comme la continuité de la dérivation fractionnaire (d'après le corollaire (1.2)) et la dérivation du première ordre (comme une cas particulier de la dérivée fractionnaire) de $(C_0^\infty(Q_T))'$ dans $(C_0^\infty(Q_T))'$, alors (3.12) implique :

$$\mathcal{L}v_n \to 0 \;\text{ dans }\; \left(C_0^\infty(Q_T)\right)'. \tag{3.14}$$

D'autre part la convergence de $\mathcal{L}v_n$ vers f dans $F = L^2(Q_T)$ entraîne que :

$$\mathcal{L}v_n \to f \text{ dans } (C_0^\infty(Q_T))' . \tag{3.15}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $(C_0^\infty(Q_T))'$, on conclut de (3.14) et (3.15) que

$$f \equiv 0.$$

D'où, l'opérateur L est fermable. ∎

Définition 3.1 *Soit $\overline{L}$ la fermeture de L et $D(\overline{L})$ le domaine de définition de $\overline{L}$, on a la solution de l'équation*

$$\overline{L}v = \mathcal{F}$$

est dite solution forte généralisée du problème $(3.1) - (3.3)$.

Théorème 3.1 est valide pour une solution forte généralisée, c-à-d on a l'inégalité suivante :

$$\|v\|_B \leq k \left\|\overline{L}v\right\|_F , \quad \forall v \in D(\overline{L}). \tag{3.16}$$

Par conséquent, cette dernière inégalité entraîne les corollaires suivants :

Corollaire 3.1 *La solution forte généralisée du problème* $(3.1) - (3.3)$ *est unique, si elle existe et dépend continûment de $f \in F$.*

Corollaire 3.2 *L'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est égale à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.*

3.3 Existence de la solution

Pour montrer l'existence de la solution du problème $(3.1) - (3.3)$, on doit prouver que $R(L)$ est dense dans F pour tout $v \in B$ et pour tout arbitraire $\mathcal{F} = (f, 0) \in F$.

Proposition 3.2 *Soit les conditions du Théorème 3.1 remplies. Si pour $w \in L^2(Q_T)$ et pour tout $v \in D(L)$, on a*

$$\int\limits_{Q_T} \mathcal{L}v.wdxdt = 0, \tag{3.17}$$

alors w s'annule presque partout dans Q_T.

Preuve. Le produit scalaire de F est défini par :

$$(Lv, W)_F = \int\limits_{Q_T} \mathcal{L}v.wdxdt, \quad \text{où} \quad W = (w, 0) \in D(L)$$

L'égalité (3.17) peut s'écrit comme suit :

$$\int\limits_{Q_T} \left({}^R D_t^\alpha v(x,t) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) + b(x,t)v(x,t)\right).w(x,t)dxdt = 0 \tag{3.18}$$

où ${}^C D_t^\alpha v$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $v \in L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)$, avec v satisfait les conditions aux limites de (P_1). De (3.18), on obtient l'égalité :

$$\int\limits_{Q_T} {}^R D_t^\alpha v(x,t).w(x,t) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right).w(x,t) + b(x,t)v(x,t).w(x,t)dxdt = 0 \tag{3.19}$$

Et à partir de l'égalité (3.19), on donne la fonction w en terme de v comme suit :

$$w = xv \tag{3.20}$$

donc $w \in L^2(Q_T)$.

Remplaçant w dans (3.19) par sa représentation (3.20), par l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int\limits_{Q_T} x\left({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t)\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_T} b(x,t)xv^2(x,t)dxdt \\ = & -\int\limits_{Q_T} x\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt \\ \leq & \ 0, \end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_{Q_T} \left({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x} v(x,t)\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_T} b(x,t)xv^2(x,t)dxdt \leq 0,$$

c-à-d

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T} \left({}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v(x,t) \right)^2 dxdt + b_0 \int\limits_{Q_T} x v^2(x,t) dxdt &\leq 0 \\ \left\| {}^R D_t^{\frac{\alpha}{2}} v \right\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)} + b_0 \left\| v \right\|^2_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)} &\leq 0,\end{aligned}$$

donc

$$\|v\|_{L^2_{\sqrt{x}}(Q_T)} = 0$$

Il devient $v = 0$ dans Q_T qui donne $w = 0$ dans Q_T. Cela fait la preuve de la proposition 3.2. D'où $\overline{R(L)} = F$. ■

<u>Théorème</u> 3.2 *Si les conditions du Théorème 3.1 sont satisfaite. Alors, pour chaque $f \in F$, le problème $(3.1) - (3.3)$ admettra une solution forte généralisée unique $v = \overline{L}^{-1} f$.*

<u>Preuve</u>. D'après la proposition précédente, on résulte que $R(L)^{\perp} = \{0\}$ qui implique d'après la proposition 1.1 que $\overline{R(L)} = F$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2. ■

Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes des équations aux dérivées partielles fractionnaires paraboliques avec l'opérateur de Bessel.

D'après développement de la méthode des inégalités d'énergie pour des problèmes singuilier, on a pu établir un résultat d'existence et l'unicité d'une solution forte d'un problème de diffusion pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition de Neumann.

– Il est important de noter une autre fois qu'il n'existe pas encore, pour les problèmes non-locaux une théorie générale analogue à celle des problèmes classiques.

Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité des questions qu'elle soulève d'autre part. Chaque problème nécessite alors un traitement spécifique, ce qui souligne l'actualité du sujet abordé dans cette thèse.

On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns :

* L'étude des solutions des problèmes fractionnaires linéaires et non linéaires avec des conditions non locales, des conditions dynamiques et des conditions non linéaires qui semble clairement difficile et qui exige certainement une développement très difficile des méthodes et techniques classiques dans la demonstration de l'existence et l'unicité des solutions. Cette question semble très délicate et importante, et elle mérite d'être étudiée.

* Ainsi, de nombreuses perspectives intéressantes pour l'analyse numérique pourraient permettre

de poursuivre les travaux entrepris dans cette thèse, surtout du côté du dévelopement des méthodes numériques efficaces.

Bibliographie

[1] A. A. Alikhanov, A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, V 46 (2010), N 5, pp. 658–664.

[2] A. A. Samarskii, Some problems in differential equations theory, Differents. Uravn., V 16 (1980), 1925-1935.

[3] A. Bouziani, N.E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris t.321, Série I., (1995), 1177-1182.

[4] A.M. Nakhushev, On a certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and their applications in ground waters dynamics, Differ. Uravn., V 18 (1982), 72–81.

[5] A. M. Nakhushev, On one approximate method for the solution of boundary-value problems for differential equations and its application to the dynamics of soil moisture and subterranean waters, Differents. Uravn., V 18 (1982), No. 1, 72–81.

[6] A. M. Nakhushev, The equations of the mathematical biology (Moscow : Vysshaya Shkola (Russian)), (1995).

[7] A.G. Fatullayev, N. Gasilov, and I. Yusubov, Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation, Appl. Anal., V 87 (2008), pp. 1167–1177.

[8] B. Cahlon, D. M. Kulkarni and P. Shi, Stepwise stability for the heat equation with non local constraint, SIAM J. Numer. Anal., V 32 (1995), N 2, 571-593.

[9] D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, Solutions of nonlocal problems forone-dimensional oscillations of the medium, Mat. Model., V 12 (2000), No 1, 94-103.

[10] F. Mainardi, Fractional diffusive waves in viscoelastic solids, Nonlinear Waves in Solids, 1995, 93–97.

[11] Grafiychuk, V., Datsko, B., Meleshko, S.V., 2006. Mathematical modeling of pattern formation in sub- and superdiffusive reactiondiffusion systems. arxiv :nlin.AO/06110005 v3.

[12] Grafiychuk, V., Datsko, B., Meleshko, S.V., 2007. Nonlinear oscillations and stability domains in fractional reaction-diffusion systems. arXiv :nlin.PS/0702013 v1.

[13] Henry, B.I., Wearne, S.L., 2000. Fractional reaction-diffusion. Physica A 276, 448–455.

[14] H. P. M ¨uller, R. Kimmich and J. Weis, NMR flow velocity mapping in random percolation model objects : evidence for a power-law dependence of the volume-averaged velocity on the probe-volume radius, Phys. Rev. E., 54 (1996), 5278–5285.

[15] H. Scher and E. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids, Phys. Rev. B., 12 (1975), 2455–2477.

[16] H. Scher and M. Lax, Stochastic transport in a disordered solid, Phys. Rev. B., 7 (1973), 4491– 4502.

[17] I. A. Belavin, S. P. Kapitsa and S. P. Kurdyumov, A mathematical model ofglobal demographic processes with regard for aspace distribution, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., V 38 (1998), No 6, 885–902.

[18] J. P. Roop, Computational aspects of fem approximation of fractional advection dispersion equations on bounded domains in R2, J. Comp. Appl. Math., 193 (2006), 243-268.

[19] J.R. Cannon, Y. Lin, and S. Wang, Determination of source parameter in a parabolic equations, Meccanica., V 27 (1992), N 2, pp. 85–94.

[20] JR. Cannon, Y. Lin and S. Wang, Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation.Journal of the Australian Mathematical Society, Series B1991., V 33, 149–163.

[21] J. Zhao,J. Xiao, and Y. Xu ; Stability and convergence of an effective finite element method for multiterm fractional partial differential equations, V 2013 (2013), pp 1-10.

[22] L.A. Muravei, A.V. Filinovskii, On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation, Mathematics of the USSR-Sbornik., V 74 (1993), No 1, 219-249.

[23] L. A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, Mat. Zametki 54 (1993) 98–116.

[24] M.I. Ismailov, F. Kanca, An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions, Math. Meth. Appl. Sci. V 34 (2011) , N 6, 692–702.

[25] M.I. Ivanchov, Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition, Ukrain. Math. J., V 45 (1993), N 8, pp. 1186–1192.

[26] M. Ivanchov, Inverse Problems for Equations of Parabolic Type,VNTL, Lviv (2003).

[27] MI. Ivanchov, NV. Pabyrivska, Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions, Ukrainian Mathematical Journal., V 53 (2001), N 5, 674–684.

[28] N B. Kerimov, M I. Ismailov, An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., V 396 (2012)

[29] N. I. Ionkin, A problem for the Heat-condition equation with a tow-point boundary condition, Differentsial'nye Uravnenya., V 15 (1979), No 7, 1284-1295.

[30] N. I. Ionkin, Stability of a problem in Heat-condition, Differentsial'nye Uravnenya., V 13 (1977), No 2, 294-304.

[31] N. I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat condition with non classical boundary conditions, Th. Vychist. Mat. Fiz., (1964) Vol. 43, No 6, 1006-1024.

[32] P. Cannarasa, V. Vespri, On Maximal Lp-regularity for abstract Cauchy problem, Boll. Unione Mat. Italiana., (1986), 165-175.97.

[33] P. Shi, M. Shillor, On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity, Theoretical Aspects of Industrial Design (Wright-Patterson Air Force Base, OH,1990), SIAM, Pennsylvania., 1992, pp. 76–82., 546–554.

[34] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, SIAM. J. Math. Anal., (1979)24 (1993), 46-58.

[35] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[36] R.E. Ewing, T. Lin, A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media, Adv. Water Ressources., V 14 (1991), 89-

[37] R. R. Nigmatullin, Realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, Phys. B., 133 (1986), 425–430.

[38] S. Mesloub , I. Bachar ; On a singular time-fractional order wave equation with Bessel operator and Caputo derivative, V 10 (2017), pp 60–70.

[39] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach : Amsterdam, 1993.

[40] Saxena, R.K., Mathai, A.M., Haubold, H.J., 2006. Reaction-diffusion systems and nonlinear waves. Astrophysics and Space Science 305, 297–303.

[41] T-E. Oussaeif, A Bouziani ; A priori estimates for weak solution for a time-fractional nonlinear reaction-diffusion equations with an integral condition, V 103 (2017), pp 79–89.

[42] T-E. Oussaeif, A Bouziani ; Existence and uniqueness of solutions to parabolic fractional differential equations with integral conditions, V 2014 (2014), N 179, pp 1-10.

[43] V.A. Vodakhova, A boundary-value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic water transfer equation, Differ. Uravn., V 18 (1982), 280–285.

[44] V. J. Ervin and J. P. Roop, Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation, Numer. Meth. P. D. E., 22 (3) (2006), 558–576.

[45] V. J. Ervin and J. P. Roop, Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in $\mathbb{R}^d$, Numer. Meth Part. D. E., 23 (2) (2007), 256 –281.

[46] V. J. Ervin, J. P. Roop ; Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in $\mathbb{R}^d$, pp 1-28.

[47] W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou, Abox schememe for coupled systems resulting from micro-sensor thermistor problems, Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems., V 5 (1999), 573-578.

[48] X. J. Li and C. J. Xu, A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation, SIAM. J. Numer. Anal., 47 (3) (2009), 2108–2131.

[49] X. J. Li, C. J. Xu ; Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation, Communications in Computational Physics, V 8 (2010), N 5, pp 1016–1051.

[50] Y.S. Choi, K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, Nonlinear Anal. 18 (1992), pp. 317–331.