

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université de L'arbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi



Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thème :

*Détermination d'un paramètre source dans
un problème inverse avec des
conditions aux limites non local*

Préparé par :

Kebaili Nassrine

Soutenu le : 25/06/2023, devant le jury :

Pr. I. Rezzoug

Président

Univ. D'Oum El Bouaghi

Dr. S. Dehilis

Rapporteur

Univ. D'Oum El Bouaghi

Dr. M. Bragdi

Examineur

Univ. D'Oum El Bouaghi

SESSION : 2022/2023

المخلص

في هذا العمل ، نهتم بتطبيق العديد من المخططات العددية لحل لمسألة عكسية لمعادلة قطع مكافئ تخضع لشروط حدية غير محلية بالإضافة إلى شرط مفرط التحديد معرف في نقطة معينة من مجال الفضاء .

بسبب وجود الشروط الحدية الغير محلية ، فإن جملة المعادلات الخطية الناتج عن التقريب بطريقة الفروق المنتهية تكون ثلاثية الأقطار باستثناء السطر الأول والأخير. نستخدم طريقة فعالة لحل جملة المعادلات الخطية وطريقة التنبؤ - التصحيح لحساب الحلول وتحديث تقدير للمعامل المجهول. نعطي كذلك بعض الأمثلة العددية لإظهار فعالية الخوارزميات المطبقة.

الكلمات المفتاحية: مسألة عكسية ، وسيط المصدر، معادلة قطع مكافئ ، ، طريقة الفروق المنتهية، طريقة تنبؤ مصحح؛ الشروط الحدية الغير محلية.

Résumé

Ce travail porte sur l'application de plusieurs schémas numériques pour résoudre le problème inverse parabolique avec un paramètre de contrôle et soumis à des conditions aux limites initiales et non locales ainsi qu'à une condition sur-spécifiée définie en un point spécifique de l'espace domaine. En raison de la condition aux limites non locale, le système d'équations linéaires résultant de l'approximation par la méthode des différences finies est tridiagonale sauf la première et la dernière ligne. Nous utilisons une méthode efficace pour résoudre le système linéaire et la méthode prédicteur-correcteur pour calculer la solution et mettre à jour l'estimation du coefficient inconnu. Quelques résultats numériques sont présentés pour montrer l'efficacité des algorithmes.

Mots-clés : *problème inverse ; paramètre source ; équation parabolique ; méthode des différences finies ; méthode prédicteur-correcteur ; condition aux limites non locale.*

Abstract

This work is concerned with application of several numerical techniques to solve parabolic inverse problem with a control parameter, subject to initial and non-local boundary conditions along with an overspecified condition defined at a specific point in the spatial domain. Due to the non-local boundary condition, the system of linear equations resulting from the approximation by the finite differences method is tridiagonal, except for the first and the last line. We use an efficient method to solve the linear system and the predictor–corrector method to calculate the solution and update the estimate of the unknown coefficient. Some numerical results are presented to demonstrate the efficiency of the algorithms.

Keywords : *inverse problem ; source parameter ; parabolic equation ; finite differences method ; predictor–corrector method ; nonlocal boundary condition .*

Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon Directeur de mémoire : *Dr. Dehilis Sofiane* . Je leur suis très reconnaissant de la confiance qu'ils m'ont toujours témoigné au cours de ce doctorat. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance pour leur suivi attentif, leur soutien, leurs conseils et leur disponibilité.

- Je tiens également à remercier *Pr. Rezzoug Imade* qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que *Dr. Bragdi Mabrouk* pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques (Univ. D'Oum El Bouaghi) pour toute l'aide qui m'a été accordée.

- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation.

- Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire .

Dédicace

Je dédie ce mémoire à la mémoire de notre cher cher et regretté

Diar Ahmed

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	4
1.1 Méthode des différences finies	4
1.1.1 Les schémas de différences finies	5
1.2 Application de la méthode des différences finies	8
1.2.1 Méthode explicite	9
1.2.2 Méthode implicite	9
1.2.3 Méthode de Crank-Nicolson(CN)	11
1.3 Analyse de l'approximation	12
1.3.1 La consistance	12
1.3.2 La stabilité	13
1.3.3 La convergence	14
1.4 Intégration numérique	15
1.4.1 Méthode des trapèzes	15
1.5 Méthode efficace pour résoudre les systèmes tridiagonale sauf la première et la dernière ligne	16
1.5.1 Méthode prédicteur-correcteur	21
2 Détermination du paramètre source dans une équation parabolique avec des conditions aux limites non locales	23
2.1 Introduction	23
2.2 Approximation par différences finies	24
2.2.1 La méthode d'Euler implicite (BTCS)([7])	24
2.2.2 La méthode d'Euler explicite (FTCS)	29
2.2.3 La méthode Crank-Nicolson (CN)	32

2.3	Méthodes efficaces de solution pour $u(x, t)$ et $p(t)$	36
2.3.1	La méthode prédicteur – correcteur	37
2.4	Résultats numériques :	38
	Conclusion et Perspective	40



Introduction

Au cours des dernières années, de nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits en termes de équations aux dérivées partielles paraboliques avec un paramètre contrôle de source. Ce type d'équations apparaît, par exemple, dans la étude des processus de conduction thermique, particulier en thermoélasticité, thermodynamique, transmission de la chaleur, dynamique des populations, les problèmes de vibration, la dynamique des réacteurs nucléaires, les problèmes inverses, la théorie du contrôle et certains processus biologiques [1–8]. Une attention croissante est versés au développement, à l'analyse et à la mise en œuvre de méthodes précises pour les techniques numériques de problèmes inverses, c'est-à-dire pour la détermination d'une inconnue $p(t)$ dans les équations aux dérivées partielles. Les problèmes inverses sont un nouveau champ apparu dans les EDP avec une fonction inconnue, l'information manquante peut être un ajustement dans l'équation ou une partie d'une condition limite ou également une condition initiale.

Pour l'identification la fonction inconnue, nous avons besoin d'exigences supplémentaires (sur-spécifier). Parfois, cette information supplémentaire est donnée sous forme intégrale (**cas où une valeur moyenne de la solution peut être mesurée**). On peut citer un exemple :

Considérons un tube transparent qui contient un produit chimique dont l'opacité est une fonction monotone connue de la concentration de la substance dispersée. À $x = 1$, le tube est terminé de sorte que le flux de substance dispersée à travers la frontière soit nul. la substance dispersée diffuse selon l'équation de chaleur unidimensionnelle. en supposant que le profil de concentration initial q_0 , est connu, une mesure, γ , de la concentration de substance dispersée à la position $x = 0$ pour tout le temps $t > 0$ spécifie le problème de la

valeur limite initiale bien posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_t = q_{xx}, (x, t) \in (0, 1) \times [0, T] \\ q(x, 0) = q_0(x) \\ q_x(1, t) = 0, t \in [0, T] \\ q(0, t) = \gamma(t), t \in [0, T] \end{array} \right.$$

Le problème qui se pose est comment une mesure de γ pourrait pratiquement être faite ? Une approche consiste à utiliser une lampe (ou laser) et une cellule photovoltaïque pour mesurer l'opacité du la produit chimique, en déduire ainsi la concentration de la substance dispersée. Cependant, dans un tel appareil, la cellule photovoltaïque doit avoir une largeur finie $b \in (0, 1)$, donc la mesure ne sera pas de $q(0, t) = \gamma(t)$, mais plutôt de la concentration moyenne $\frac{1}{b} \int_0^b q(x, t) dx = \gamma(t)$

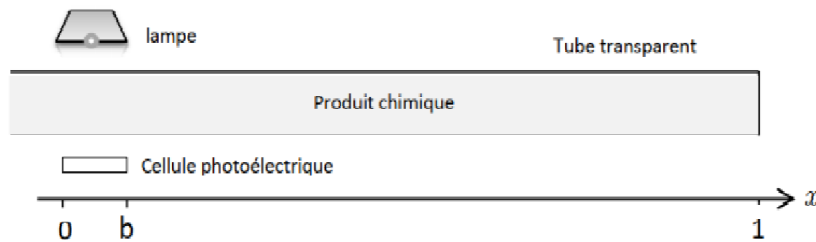


Figure 1 : Mesure de la concentration d'un produit chimique .

Les problèmes paraboliques avec des conditions aux limites non locales ont été étudiés par [5] [6], Ionkin [13] , Bouziani [2] , Bouziani et Benouar [3]] , Bouziani Bensaid et Zereg [1].

Objectifs

Au cours des dernières décennies, le développement de méthodes numériques pour l'identification d'un paramètre de contrôle dans les de problèmes paraboliques avec des conditions aux limites non locales a été un domaine de recherche important dans de nombreuses branches de la science . Ici, nous devons mentionner que la présence des conditions intégrales complique l'utilisation des méthodes numériques standard telles que les méthodes des différences finies, d'éléments finis, les techniques spectrales,... etc. La difficulté devient visible après la discrétisation. La présence d'un opérateur intégral dans le problème donne

lieu à des lignes / colonnes, qui sont pleines. C'est la raison pour laquelle des solveurs algébriques spéciaux doivent être développés (**voir Liu [14] pour des exemples**).

Par conséquent, ce travail vise à utiliser la méthode des différences finies pour l'identification d'un paramètre de contrôle dans les de problèmes paraboliques avec des conditions aux limites non locales.

L'idée principale est d'utiliser la méthode prédicteur-correcteur pour calculer la solution et corrigé l'estimation du coefficient inconnu.

Aperçu du mémoire :

Le mémoire se compose d'une introduction et de deux chapitres.

On commence par une introduction où on a présenté un historique sur le problème étudié , l'intérêt, l'objectif du thème abordé.

Le premier chapitre est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires qui seront utilisées dans la suite.

Le deuxième chapitre est réservé à la résolution numérique d'un problème inverse parabolique avec un paramètre de contrôle et des conditions aux limites non locale.

Notions préliminaires

L'objet de ce chapitre est de donner et rappeler quelques notions et résultats classiques fondamentaux d'analyse numérique à usage permanent dans les prochains chapitres. Pour approfondir ces notions, le lecteur est invité à consulter les ouvrages suivants :Fortin [10],Eric Goncalvès da Silva[11], Quarteroni[17]

1.1 Méthode des différences finies

Dans la majorité des équations aux dérivées partielles on ne peut pas trouver la solution analytique, il faut donc approcher la solution exacte par des méthodes numériques. il existe de nombreuse méthodes d'approximation numérique des EDP, on peut citer la méthode d'éléments finis, méthodes de collocations, volumes finis, les techniques spectrales,... etc. Nous présentons dans cette section une des plus anciennes et des plus simples, appelée méthode des différences finies .

La méthode consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. Elle est apparu au *XVIIIe* siècle par de nombreux mathématiciens, dont Euler,Taylor et Leibniz. On expose ci-dessous les idées générales de la méthode.

Soit $u(x, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k}.$$

Si h le pas d'espace et k le pas de temps sont petits, un développement de Taylor de u au voisinage de x donne :

$$u(x + h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + O(h^{n+1}). \quad (1.1.1)$$

$$u(x - h, t) = u(x, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + O(h^{n+1}). \quad (1.1.2)$$

Le développement en série de Taylor au voisinage du temps t s'écrit comme suit :

$$u(x, t + k) = u(x, t) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \dots + \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) + O(k^{n+1}). \quad (1.1.3)$$

$$u(x, t - k) = u(x, t) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \dots + (-1)^n \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) + O(k^{n+1}). \quad (1.1.4)$$

Avec $O(h^{n+1})$ et $O(k^{n+1})$ sont les erreurs de troncatures. L'expression des dérivées premières et secondes s'obtient à partir de ces développements.

1.1.1 Les schémas de différences finies

Notation indicielle :

Considérons $u(x, t)$ une fonction de l'espace et du temps. On choisit une discrétisation régulière de l'intervalle $[0, L]$ de longueur h tel que $L = Mh$, et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en pas de temps k tels que $T = Nk$. Notons x_i le point ih et t_n le temps nk . Notons u_i^n la valeur de la solution approchée au point x_i et au temps t_n . Pour la discrétisation, on adopte les notations suivantes :

- $u(x_i, t_n) = u_i^n$,
- $u(x_i + h, t_n) = u(x_{i+1}, t_n) = u_{i+1}^n$, $u(x_i - h, t_n) = u(x_{i-1}, t_n) = u_{i-1}^n$,
- $u(x_i, t_n + k) = u(x_i, t_{n+1}) = u_i^{n+1}$, $u(x_i, t_n - k) = u(x_i, t_{n-1}) = u_i^{n-1}$
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{\partial u_i^n}{\partial x}$.

Schémas de différences finies pour la dérivée première :

A l'aide la formule de Taylor (jusqu'à l'ordre 2) on obtient :

— En espace :

$$u(x_i + h, t_n) = u(x_i, t_n) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\xi_1, t_n) \quad \text{où } \xi_1 \in [x_i, x_i + h]. \quad (1.1.5)$$

$$u(x_i - h, t_n) = u(x_i, t_n) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\xi_2, t_n) \quad \text{où } \xi_2 \in [x_i - h, x_i]. \quad (1.1.6)$$

Des deux formules précédentes on obtient :

* **Différences finies en avant (progressives)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i + h, t_n) - u(x_i, t_n)}{h} - \frac{h}{2!} u^{(2)}(\xi_1, t_n) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + O(h). \\ O(h) &= \frac{-h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n(\xi_1, t_n) \quad x_n < \xi_1 < x_{n+1} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

* **Différences finies en arrière (rétrograde)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_n) - u(x_i - h, t_n)}{h} + \frac{h}{2!} u^{(2)}(\xi_2, t_n) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + O(h). \\ O(h) &= \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n(\xi_2, t_n) \quad x_{n-1} < \xi_2 < x_n \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

* **Différences finies centrée**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i + h, t_n) - u(x_i - h, t_n)}{2h} + O(h^2) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + O(h^2). \\ O(h^2) &= \frac{-h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n(\xi_3, t_n) \quad x_n < \xi_3 < x_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

— **En temps t** , on applique la même technique utilisée pour l'espace x ,

*** Différences finies en avant (progressives)**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_n + k) - u(x_i, t_n)}{k} + O(k) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + O(k) \\ O(k) &= \frac{-k}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n (\xi_1, t_n) \quad t_i < \xi_1 < t_{i+1}.\end{aligned}\quad (1.1.10)$$

*** Différences finies en arrière (rétrograde)**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_n) - u(x_i, t_n - k)}{k} + O(k) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{k} + O(k) \\ O(k) &= \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n (\xi_2, t_n) \quad t_{i-1} < \xi_2 < t_i.\end{aligned}\quad (1.1.11)$$

*** Différences finies centrée**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_n + k) - u(x_i, t_n - k)}{2k} + O(k^2) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2k} + O(k^2) \\ O(k^2) &= \frac{-k^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n (\xi_3, t_n) \quad t_{i-1} < \xi_3 < t_{i+1}.\end{aligned}\quad (1.1.12)$$

Dérivées d'ordre supérieur

Pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u_i , le principe est le même et repose sur les développements de Taylor :

Différences finies en avant (progressives)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i + 2h, t_n) - 2u(x_i + h, t_n) + u(x_i, t_n)}{h^2} + O(h) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n &= \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n}{h^2} + O(h) \\ O(h) &= -h \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n (\xi_1, t_n) \quad x_n < \xi_1 < x_{n+1}\end{aligned}$$

Différences finies en arrière (rétrograde)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i, t_n) - 2u(x_i - h, t_n) + u(x_i - 2h, t_n)}{h^2} + O(h) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n &= \frac{u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{h^2} + O(h). \\ O(h) &= h \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n(\xi_2, t_n) \quad x_n < \xi_2 < x_{n+1} \end{aligned}$$

Différences finies centrée

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{u(x_i + h, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i - h, t_n)}{h^2} + O(h^2) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + O(h^2). \\ O(h^2) &= \frac{-h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n(\xi_3, t_n) \quad x_{n-1} < \xi_3 < x_{n+1} \end{aligned}$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées troisième, quatrième,..... etc.

1.2 Application de la méthode des différences finies

Considérons l'équation suivante (équation de la chaleur) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & 0 < t < T \dots\dots\dots \\ u(x, 0) = \Phi(x) & 0 < x < 1 \dots\dots\dots \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \text{les conditions} \\ \text{aux limites} \\ \text{la condition} \\ \text{initiale} \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

On peut considérer qu'il s'agit de l'évolution de la température d'une barre soumise aux extrémités à une température nulle.

On distingue généralement deux grandes familles dans les méthodes de différences finies :

1.2.1 Méthode explicite

La méthode est dite explicite si la solution au pas de temps $t + \Delta t$ est entièrement définie à partir de celle obtenue au pas de temps t . Les schémas explicites sont relativement simples à coder et à résoudre et leur extension aux schémas d'ordres supérieurs (plus précis) généralement aisée. Le pas de temps des schémas explicites est limité à cause de la condition de Courant.

Schéma d'Euler explicite (Forward Time Centered Space (FTCS)) :

Construisons un maillage régulier. On note $x_i = ih$ avec $i = 0, \dots, M$ et $t_n = nk$ avec $n = 0, \dots, N$ et on note u_i^n l'approximation de $u(x_i, t_n)$.

En utilisant pour la dérivée première temporelle la formule différence finie en avant (progressives ou forward) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}$$

et pour la dérivée deuxième en espace on utilise la formule de différence finie centré d'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

le schéma se pose alors :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} & i = 1, \dots, M \\ u_0^n = u_M^n = 0 & n = 1, \dots, N \\ u_i^0 = \Phi(x_i) & i = 0, \dots, M \end{cases} \quad (1.2.2)$$

On connaît les u_i^0 on en déduit les u_i^1 et ainsi de suite jusqu'aux u_i^N . Ce schéma est dit explicite car les u_i^{n+1} se déduisent directement des u_i^n . Dans ce genre de schéma, aucun système d'équation n'est à résoudre (pas de matrice à inverser numériquement), le nouveau pas se déduit des pas précédemment calculés. Le schéma est d'ordre $O(h^2 + k)$.

1.2.2 Méthode implicite

Dans les méthodes des différences finies implicites, les dérivées partielles sont remplacées par des termes dont l'échelle temporelle est inconnue a priori. La variable inconnue apparaît

implicitement dans les équations algébriques dont la solution ne peut être obtenue que par la résolution simultanée du système.

Les schémas implicites comme leur nom l'indiquent, nécessitent un couplage entre les variables de tous les points de la grille de calcul et leur résolution exige à chaque étape de temps résoudre un système algébrique. Les avantages des schémas implicites résident sur la stabilité de ses propriétés.

Schéma d'Euler implicite (Backward Time Centered Space (BTCS)) :

Considérons l'équation suivante (équation de la chaleur) (1.2.1) :

Discrétisons la même équation avec le même maillage mais utilisons cette fois la différences finies en arrière (régressives ou Backward) pour la dérivée première temporelle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{k},$$

et pour la dérivée deuxième en espace on utilise la formule de différence finie centré d'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

Le nouveau schéma s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{k} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} & i = 1, \dots, M \\ u_0^n = u_M^n = 0 & n = 1, \dots, N \\ u_i^0 = \Phi(x_i) & i = 0, \dots, M \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Ce schéma nécessite la résolution d'un système d'équations. Au temps t_n le système d'équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u_1^{n-1}}{k} - \beta u_0^n \\ -\frac{u_2^{n-1}}{k} \\ \vdots \\ -\frac{u_{M-2}^{n-1}}{k} \\ -\frac{u_{M-1}^{n-1}}{k} - \beta u_M^n \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{u_1^{n-1}}{k} - \beta u_0^n \\ -\frac{u_2^{n-1}}{k} \\ \vdots \\ -\frac{u_{M-2}^{n-1}}{k} \\ -\frac{u_{M-1}^{n-1}}{k} - \beta u_M^n \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = -\frac{1}{k} - \frac{2\alpha}{h^2}$ et $\beta = \frac{\alpha}{h^2}$. Trouver les u_i^n à partir des u_i^{n-1} nécessite ici la résolution d'un système (i.e. l'inversion d'une matrice). Le système est ici tridiagonal. On peut le résoudre facilement par l'algorithme de Thomas, spécialement adapté aux matrices bandes. Un tel schéma est implicite.

1.2.3 Méthode de Crank-Nicolson (CN)

La méthode de Crank-Nicolson, est la moitié de la somme des méthodes des explicites évaluées au temps n et implicites (au temps $n + 1$). Le schéma numérique est une combinaison des méthode explicite et implicite. Le système est résolu à chaque pas de temps (A chaque étape de temps ou résoudre un système algébrique), l'avantage principal de ce schéma est que pour une valeur donnée de h , l'erreur de troncature sur le terme en k est nettement plus petit que dans les méthodes implicite et explicite.

Bien que le schéma d'Euler implicite soit stable, il n'est pas toujours suffisamment précis. On utilise alors un schéma d'ordre supérieur, celui de Crank-Nicolson pour la discrétisation de l'équation de la chaleur (1.2.1) est donné par :

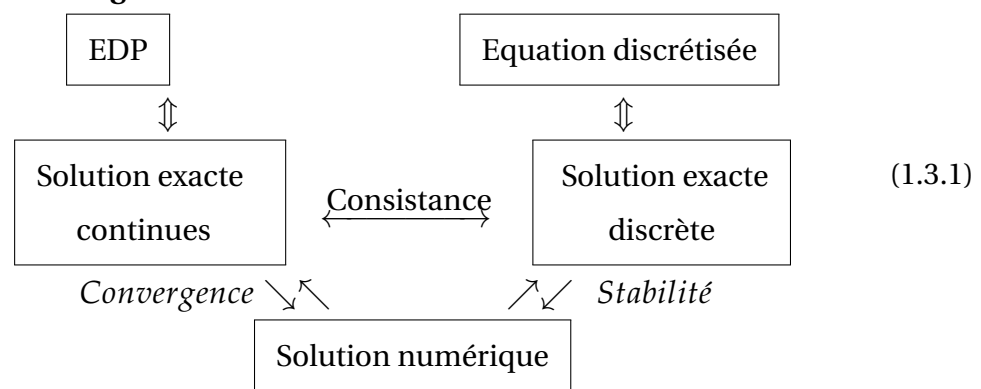
$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) & i = 1, \dots, M \\ u_0^n = u_M^n = 0 & n = 1, \dots, N \\ u_i^0 = \Phi(x_i) & i = 0, \dots, M. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

On trouve une erreur de troncature d'ordre $O(h^2 + k^2)$. Ce schéma est très populaire pour résoudre les équations paraboliques .

1.3 Analyse de l'approximation

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalentes discrétisés . Les trois principales sont : La consistance, la stabilité et la convergence. Les trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et la solution numérique obtenues .

Figure 01 : La différence entre les solutions :



Ces différents liens, résumés sur la figure 1, Sont :

1.3.1 La consistance

C'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation (Δx et Δt) tendent vers zéro. Pour chacun des schémas numériques obtenus, on remplace dans le schéma le terme u_j^i par $u(x_j, t_i)$ et l'on définit l'erreur de troncature, notée E_j^i , comme la différence entre le premier et le second membre de ces quantités.

Définition 1.3.1. On appelle erreur de troncature E , la quantité définie par :

$$E = \max \left\{ E_j^i, 1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq N \right\}$$

Définition 1.3.2. Un schéma numérique est consistant si $E \rightarrow 0$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$.

1.3.2 La stabilité

C'est la propriété qui assure que la différences entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.

Définition 1.3.3. Un schéma numérique est stable si la solution du schéma homogène associé est bornée en tout point x_j et t_i quels que soient Δx et Δt .

Un schéma peut être :

- **Inconditionnellement stable :** Quels que soient $O(h)$ et $O(k)$ les erreurs causées par le schéma numérique n'explode pas au fil des itérations.
- **Conditionnellement stable :** On doit poser une condition sur $O(h)$ et $O(k)$ pour que la solution n'explode pas.
- **Inconditionnellement instable :** Quels que soient $O(h)$ et $O(k)$ les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.

Il y a plusieurs notions de stabilité. Critère de Von Neumann-Fourier et stabilité au sens d'une norme.

♣ Critère de Von Neumann-Fourier : [16]

Dans ce critère, on ne prend pas en compte les effets de bords de la discrétisations (conditions limites) et on analyse seulement l'équation, ceci revient à considérer le problème non plus dans un intervalle borné mais dans \mathbb{R} tout entier et ignorer les conditions limites. Donc on cherche une solution sous la forme particulière suivante :

$$u_j^n = \zeta^n e^{i\pi k j h} \quad \text{pour } k \text{ fixé} \quad (1.3.2)$$

puisque $|u_j^n| = |\zeta|^n$ ce critère impose la condition $|\zeta| \leq 1$ afin que la solution approchée soit bornée. ζ s'appelle facteur d'amplification

♣ Critère de stabilité au sens des norme :

un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme $\|\cdot\|$; s'il existe une constante K indépendante de k et h telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0, \quad (1.3.3)$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 . Avec $u^n = (u_j^n)_{0 \leq j \leq M}$.

Si cette inégalité a lieu sous une condition entre k et h , on dit que le schéma est conditionnellement stable.

introduisons la norme L^∞ discrète suivante . Pour $v \in \mathbb{R}^M$ on note :

$$\|v^n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M} |v_i|.$$

1.3.3 La convergence

C'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers (ou une) solution exacte des équations continues c'est-à-dire : Un schéma est dit convergent si l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique tend vers zéro, C'est évidemment la propriété la plus recherchée . Soit e^j , le vecteur erreur au temps discret j et défini par :

$$e^j = (e_1^j, e_2^j, \dots, e_M^j)^T$$

avec :

$$e_i^j = u_i^j - u(x_i, t_j), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 0, \dots, N$$

Définition 1.3.4. : Un schéma numérique est convergent si :

$$|e_i^j| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \forall i \in \{1, \dots, M\}, \forall j \in \{0, \dots, N\}$$

Pour étudier la convergence de la solution numérique u_i^j du schéma aux différences finies vers la solution exacte $u(x, t)$ on peut soit essayer d'étudier directement la convergence, ce qui peut être compliqué et pas toujours possible, soit utiliser la consistance et la stabilité d'un schéma. Car ils sont en général beaucoup plus facile à étudier que sa convergence.

Théorème 1.3.1. Théorème de Lax-Richtmyer Pour résoudre un problème évolutif linéaire avec condition initiale, qui est supposé être bien posé, ceci à l'aide d'un schéma numérique est consistant, la stabilité du schéma est une condition nécessaire et suffisante pour assurer sa convergence.

1.4 Intégration numérique

Très souvent le calcul explicite de l'intégrale, d'une fonction f est très compliqué ou même impossible, Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée.

L'objectif de l'intégration numérique est de calculer l'intégrale $I(f)$ d'une fonction f sur un certain intervalle $[a, b]$.

Considérons une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ de même longueur $h = x_i - x_{i-1}$.

1.4.1 Méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Méthode des trapèzes simple

On souhaite calculer $I(f)$ et on pose $h = b - a$, donc on remplace f par un polynôme de degré 1 par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ qui d'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_1(x) + E_1(x) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + E_1(x) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{f''(\zeta_x)}{2!}(x - x_0)(x - x_1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} E_1(x)dx \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(c), \quad c \in [a, b]. \end{aligned}$$

Méthode des trapèzes composites :

Le terme d'erreur dans la formule de Trapèz $-\frac{h^3}{12}f''(c)$, peut être important si $x_1 - x_0 = b - a = h$, est grand, une stratégie intéressante consiste à décomposer l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles et on applique la formule des Trapèzes sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n - 1$ tel que $x_0 = a$ et $x_n = b$, $h = \frac{b - a}{n}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{(b - a)}{12} f''(c) (h)^2, \quad c \in [a, b].$$

L'erreur des Tapèzes composées :

Dans chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on commet une erreur liée a la méthode des Trapèzes, l'erreur totale commise est :

$$E_{Tcomp} = -\frac{(b - a)}{12} h^2 f''(\alpha), \quad \alpha \in [x_0, x_1]$$

la méthode est d'ordre 2.

1.5 Méthode efficace pour résoudre les systèmes tridiagonale sauf la première et la dernière ligne

Liu [14] a proposé une technique efficace pour résoudre les systèmes linéaires d'équations de la forme

$$Au = \omega.$$

où A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{M-1} & a_M \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{M-1} & b_M \end{pmatrix}$$

et $u = (u_0, u_1, \dots, u_M)^t, \omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_M)^t$. En forme explicite, le système précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^M a_j u_j &= \omega_0, \\ u_{j-1} + \lambda u_j + u_{j+1} &= \omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \\ \sum_{j=0}^M b_j u_j &= \omega_M, \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Une particularité de la matrice A est que à l'exception des première et dernière lignes, elle est diagonale (λ dans la diagonale et 1 sur les sous diagonale et sur diagonale). Pour utiliser cette forme spéciale, nous introduisons l'algorithme suivant pour la résolution de (1.5.1).

Soit :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & 1 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

— pour l'équation (1) on a :

$$Lv = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha v_0 = \omega_0 \\ v_0 + \alpha v_1 = \omega_1 \\ \vdots \\ v_{M-1} + \alpha v_M = \omega_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = \frac{1}{\alpha} \omega_0 = \beta \omega_0 \\ v_1 = \frac{1}{\alpha} (\omega_1 - v_0) = \beta (\omega_1 - v_0) \\ \vdots \\ v_M = \frac{1}{\alpha} (\omega_M - v_{M-1}) = \beta (\omega_M - v_{M-1}) \end{cases}$$

qui est donné par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = \beta \omega_0, \\ v_j = \beta (\omega_j - v_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

— pour l'équation (2) on a :

$$Uy = v \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 + \beta y_1 = v_0 \\ \vdots \\ y_{M-1} + \beta y_M = v_{M-1} \\ y_M = v_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = v_M \\ y_{M-1} = v_{M-1} - \beta y_M \\ \vdots \\ y_0 = v_0 - \beta y_1 \end{cases}$$

le système d'équations ci-dessus peut être résolu via la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} y_M = v_M, \\ y_j = v_j - \beta y_{j+1}, \quad j = M-1, \dots, 0. \end{cases} \quad (1.5.3)$$

où v est la solution de : $Lv = \omega$

Les procédures ci-dessus sont stables, puisque $|\beta| < 1$. Soit $z = u - y$, alors :

$$\begin{aligned} Az = A(u - y) &= Au - Ay \\ &= \omega - Ay \\ &= \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{M-1} \\ \omega_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^M a_j y_j \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{M-1} \\ \sum_{j=0}^M b_j y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 - \sum_{j=0}^M a_j y_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega_M - \sum_{j=0}^M b_j y_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$z_{j-1} + \lambda z_j + z_{j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, M-1. \quad (1.5.4)$$

C'est une suite récurrente d'ordre 2. Les scalaires γ tel que : $(\gamma^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est solution de (1.5.4) sont les solution de l'équation :

$$\gamma^{j-1} + \lambda \gamma^j + \gamma^{j+1} = 0 \Rightarrow 1 + \lambda \gamma + \gamma^2 = 0$$

on obtient :

$$z_j = c_0 \gamma^{M-j} + c_1 \gamma^j, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

où : $\gamma_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$, est la solution de l'équation quadratique $\gamma^2 - \lambda \gamma + 1 = 0$; et c_0, c_1 sont des paramètres réels déterminées par la première et la dernière ligne :

$$\begin{aligned} c_0 \sum_{j=0}^M a_j \gamma^{M-j} + c_1 \sum_{j=0}^M a_j \gamma^j &= \omega_0 - \sum_{j=0}^M a_j y_j \\ c_0 \sum_{j=0}^M b_j \gamma^{M-j} + c_1 \sum_{j=0}^M b_j \gamma^j &= \omega_0 - \sum_{j=0}^M b_j y_j \end{aligned}$$

Finalement ,nous obtenons la solution de (1.5.1) par la relation $u = y + z$.

Remarque 1.5.1. Un simple compte montre que le coût (en nombre de multiplications et de divisions) de la résolution (1.5.1) avec élimination gaussienne est proportionnel à M^2 ,

tandis que le coût de la résolution (1.5.1) avec l'algorithme précédent est d'environ $8M$, respectivement. Alors l'algorithme est moins couteux

1.5.1 Méthode prédicteur–correcteur

En analyse numérique, une méthode prédicteur–correcteur est un algorithme qui procède en deux étapes. tout d'abord, l'étape de prédicteur calcule une approximation grossière de la quantité souhaitée .deuxièmement,l'étape de correction affine l'approximation initiale en utilisant un autre moyen.

Nous donnons des exemples simples pour expliqué la méthode.

Exemple trapézoïdal d'Euler

exemple de méthode de correction prédictive trapézoïdale d'Euler
dans cet exemple $h = \Delta t$, $t_{i+1} = t_i + \Delta t = t_i + h$

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

calculez d'abord une valeur initiale via Euler :

$$\tilde{y}_{[0]} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

ensuite, améliorez l'estimation initiale en itérant la règle trapézoïdale :

$$\tilde{y}_{[1]} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{[0]})).$$

$$\tilde{y}_{[2]} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{[1]})).$$

...

$$\tilde{y}_{[n]} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{[n-1]})).$$

Ce processus d'itération est répété jusqu'à à une valeur fixe n ou jusqu'à ce que les suppositions convergent vers une certaine tolérance d'erreur e :

$$\left| \tilde{y}_{[n]} - \tilde{y}_{[n-1]} \right| \leq e$$

ensuite l'estimation finale comme étape suivante :

$$y_{i+1} = \tilde{y}_{[n]}.$$

Exemple 2

Dans méthode Trapèze implicite on a :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + \frac{h}{2} (f(t^n, y^{[n]}) + f(t^{n+1}, y^{[n+1]}))$$

dans le second membre il y a aussi le terme $y^{[n+1]}$ donc on ne peut pas calculer la valeur de $y^{[n+1]}$ explicitement dans la formule précédente. L'idée est d'utiliser un autre schéma par exemple le schéma d' Euler explicite :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]})$$

comme suit :

- Prédiction :

$$y_E^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]})$$

- Correction :

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} + \frac{h}{2} (f(t^n, y^{[n]}) + f(t^{n+1}, y_E^{[n+1]}))$$

on obtient ici un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.

Détermination du paramètre source dans une équation parabolique avec des conditions aux limites non locales

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions la solution numérique d'un problème inverse de recherche d'un paramètre source $p=p(t)$ de l'équation de diffusion suivante :

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + f(x,t) \quad x \in (0,1), \text{ et } 0 < t < T, \quad (2.1.1)$$

soumis à des condition aux limites non locales

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_0^1 k_0(x)u(x,t)dx + g_0(t) \quad 0 < t < T, \\ u(1,t) &= \int_0^1 k_1(x)u(x,t)dx + g_1(t) \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(t) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.1.3)$$

et la condition sur spécifiée en un point x_0 du domaine spatial

$$u(x_0, t) = E(t) \quad x_0 \in (0, 1) \text{ et } 0 \leq t \leq T. \quad (2.1.4)$$

Les fonctions f, k_0, k_1, g_0, g_1 et $u_0(t)$ sont des fonctions suffisamment régulières. La classe de problème pour $p(t) = 0$ apparaît dans la théorie quasi-statique de la thermoélasticité [8] [2], [3], [7].

L'équation (2.1.1) peut être utilisé pour décrire un processus de transfert de chaleur avec un paramètre source $p(t)$, et (2.1.4) pour contrôlé la température $u(x, t)$ à un point spécifique x_0 dans le domaine spatial à tout instant t [5] [6], [15], [9], [7], [12].

Ainsi le but de la résolution (2.1.1) est d'identifier le paramètre source $p(t)$ qui va produire à chaque instant une température désirée $u(x, t)$ en un point x_0 donnée dans le domaine spatial. Lorsque le coefficient $p(t), 0 \leq t \leq T$ est également donné, le problème de trouver $u(x, t)$ en utilisant l'équation (2.1.1), la condition initiale (2.1.3) et les conditions aux limites (2.1.2) est appelé problème direct.

L'existence et unicité et quelques propriétés de la solution du problème (2.1.1)-(2.1.4) avec $p(t) \neq 0$ ont été établis dans [5] [6].

La plupart des discussions dans la littérature sont consacrée à l'analyse qualitative des équations telles que l'existence et unicité de la solution. Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs schémas de différences finies pour fournir une approximation de la solution $u(x, t)$ et $p(t)$ du problème inverse (2.1.1)-(2.1.4)

2.2 Approximation par différences finies

Soit $x_m = m\delta x$ et $t_n = n\delta t$ pour $m = 0, 1, \dots, M$ et $n = 0, 1, \dots, N$, où $\delta x = \frac{1}{M}$ et $\delta t = \frac{1}{N}$ respectivement les tailles de pas spatial et temporel.

Les notations $u_m^n = u(x_m, t_n)$ et p^n les approximation de $u(x, t)$ en (x_m, t_n) et $p(t)$ en (t_n) Notez que dans les problèmes pratiques, x_0 est un point de données qui peut toujours être choisi comme point de maillage, c'est-à-dire $x_0 = k_0 h$, pour un entier $1 \leq k_0 \leq M$.

2.2.1 La méthode d'Euler implicite (BTCS) ([7])

En utilisant un schéma de différences finies centré en espace et arrière en temps (Backward Time Centered Space (BTCS)) dans l'équation (2.1.1) on obtient l'équation aux

différences finies suivante :

$$u_m^{n+1} - u_m^n = ru_{m+1}^{n+1} - 2ru_m^{n+1} + ru_{m-1}^{n+1} + \delta t p(t_{n+1}) u_m^{n+1} + \delta t f_m^{n+1}. \quad (2.2.1)$$

pour $m = 1 \dots, M - 1$, et $n = 1, \dots, N - 1$, et avec $r = \frac{\delta t}{\delta x^2}$ qui s'écrit :

$$u_{m+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{1}{r} - \delta x^2 p^{n+1}\right) u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} = \frac{-1}{r} u_m^n - \delta x^2 f_m^{n+1}. \quad (2.2.2)$$

Nous devons encore déterminer deux inconnues u_0^{n+1} et u_M^{n+1} , pour cela nous approxi-
mons les intégrales dans (2.1.2) numériquement par règle de trapèzes composite (Nous avons
choisi cette approximation car elle est du même deuxième ordre de précision en espace, que
la méthode d'Euler implicite utilisée pour la partie intérieure du problème.) :

$$u_0^{n+1} = \delta x \left(\frac{1}{2} k_0(x_0) u_0^{n+1} + \sum_{m=1}^{M-1} k_0(x_m) u_m^{n+1} + \frac{1}{2} k_0(x_M) u_M^{n+1} \right) + g_0(t_{n+1}),$$

et

$$u_M^{n+1} = \delta x \left(\frac{1}{2} k_1(x_0) u_0^{n+1} + \sum_{m=1}^{M-1} k_1(x_m) u_m^{n+1} + \frac{1}{2} k_1(x_M) u_M^{n+1} \right) + g_1(t_{n+1}), \quad (2.2.3)$$

pour $n = 1, \dots, N$.

En assemblant la discrétisation pour les points $m = 1 \dots, M$ donnée par (9), avec (10),
on obtiendra le système d'équations linéaires suivant :

$$Au^{n+1} = w^{n+1}, \quad (2.2.4)$$

défini pour chaque intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 1, \dots, N - 1$,

où A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{M-1} & a_M \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{M-1} & b_M \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 1 - \frac{\delta x}{2} k_0(x_0), \quad b_0 = -\frac{\delta x}{2} k_1(x_0),$$

$$a_m = -\delta x k_0(x_m), \quad b_m = -\delta x k_1(x_m), \text{ pour } m = 1 \dots, M-1, \quad (2.2.5)$$

$$a_m = -\frac{\delta x}{2} k_0(x_0), \quad b_M = 1 - \frac{\delta x}{2} k_1(x_M),$$

$$\lambda = -\left(2 + \frac{1}{r} - \delta x^2 p^{n+1}\right), \text{ et}$$

$$w^{n+1} = (w_0^{n+1}, w_1^{n+1}, w_2^{n+1}, \dots, M-1),$$

où

$$w_0^{n+1} = g_0(t_{n+1}),$$

$$w_m^{n+1} = \frac{-1}{r} u_m^n - \delta x^2 f_m^{n+1}, \quad m = 1 \dots, M-1$$

$$w_M^{n+1} = g_1(t_{n+1}).$$

Si $p(t) \leq 0$, $\delta x \sum_{m=0}^M |k_0(x_m)| < 1$, et $\delta x \sum_{m=0}^M |k_1(x_m)| < 1$, alors la matrice A est à diagonale strictement dominante alors elle est non singulière.

Théorème 2.2.1. *Le schéma d'Euler implicite a une solution unique pour un h suffisamment petit.*

Preuve. :

C'est facile de voir que pour δx suffisamment petit $\left| 2 + \frac{1}{r} - \delta x^2 p^{n+1} \right| > |2|$. La matrice est à diagonale strictement dominante (donc non singulière), si :

$$|a_0| > \sum_{i=1}^M |a_i| \text{ et } |b_M| > \sum_{i=0}^{M-1} |b_i|$$

i.e

$$\delta x \sum_{i=0}^M |\omega_i K_0(x_i)| < 1 \text{ et } \delta x \sum_{i=0}^M |\omega_i K_1(x_i)| < 1. \quad (2.2.6)$$

Où

$\omega_0 = \omega_M = \frac{1}{2}$, $\omega_i = 1$, $i = 1, \dots, M-1$. Comme (2.2.6) est vrai pour δx suffisamment petit, l'existence et l'unicité de la solution du schéma d'Euler implicite sont prouvées. \square

Consistance du schéma implicite

Proposition 2.2.1. *Supposons que $u \in C^{4,2}([0, 1] \times [0, T])$. Alors le schéma implicite (2.2.2) est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace : il existe une constante $C > 0$, indépendant de k et h , telle que $|R_i^j| \leq C(\delta t + \delta x^2)$.*

Preuve. : on calcule l'erreur de troncature du schéma (2.2.2) en remplaçant la solution exacte dans le schéma (2.2.2) on trouve :

$$R_i^j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{\delta x^2} - p^{j+1} u(x_i, t_{j+1}) - f_i^{j+1}, \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

Soit $u \in C^{4,2}([0, 1] \times [0, T])$. Ensuite, par développement de Taylor autour du point (x_i, t_{j+1}) , nous avons :

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(\delta t^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{\delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+1}) + O(\delta x^4). \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + k \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + O(\delta x^4). \end{aligned}$$

$$f_i^{j+1} = f(x_i, t_j) + \delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(k^2)$$

$$p^{j+1} = p(t_j) + \delta t \frac{\partial p}{\partial t}(t_j) + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t_j) + O(k^2)$$

en remplaçant les quatre formules dans R_i^j , on trouve :

$$\begin{aligned} R_i^j &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{h^2} - p^{j+1}u(x_i, t_{j+1}) - f_i^{j+1} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f - p \right) (x_i, t_j) + k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) (x_i, t_{j+1}) \\ &\quad - \left(\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4). \end{aligned}$$

puis en utilisant le fait que u est solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)u(x, t) + f(x, t)$, il vient :

$$\begin{aligned} R_i^j &= \delta t \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) (x_i, t_{j+1}) \\ &\quad - \left(\frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4). \end{aligned}$$

donc

$$\left| R_i^j \right| \leq C(\delta t + \delta x^2).$$

et pour R_0^j et R_M^j : (l'erreur dans la méthode du trapèze), on a ;

$$\left| R_0^j \right| + \left| R_M^j \right| \leq C\delta x^2.$$

Lorsque δt et δx tendent vers zero, l'erreur de troncature R_i^j tend aussi vers zero ; le schéma est donc consistant. \square

Stabilité du schéma implicite

Proposition 2.2.2. *Le schéma d'Euler implicite (2.9) est inconditionnellement stable pour la norme L^∞ .*

Preuve. Pour tout $i = 1, \dots, M - 1$ on a :

$$u_m^{n+1} - u_m^n = ru_{m+1}^{n+1} - 2ru_m^{n+1} + ru_{m-1}^{n+1} + \delta t p(t_{n+1}) u_m^{n+1} + \delta t f_m^{n+1}. \quad (2.2.7)$$

ou encore

$$\left(2r + 1 - \delta t p^{n+1}\right) u_m^{n+1} = r u_{m+1}^{n+1} + r u_{m-1}^{n+1} + u_m^n + \delta t f_m^{n+1}. \quad (2.2.8)$$

Or, puisque $2r + \frac{1}{r} - \delta t p^{n+1} > 0$, nous pouvons prendre la valeur absolue et le maximum sur $(u_i^j)_{1 \leq i \leq M-1}$ puis sur $(u_i^{j+1})_{1 \leq i \leq M-1}$, il vient

$$|u_i^{j+1}| \leq \|u^j\|_\infty + \delta t \|f\|_\infty.$$

par récurrence on obtient :

$$\|u^{j+1}\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + t_{j+1} \|f\|_\infty.$$

□

2.2.2 La méthode d'Euler explicite (FTCS)

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace (Forward Time Centered Space (FTCS)), l'approximation d'Euler avant de (2.1.1) est donnée par :

$$u_m^{n+1} - u_m^n = r (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \delta t p(t_n) u_m^n + \delta t f_m^n \quad (2.2.9)$$

pour $m = 1 \dots, M - 1$, et $n = 1, \dots, N - 1$ avec $r = \frac{\delta t}{\delta x^2}$.

$$u_m^{n+1} = r (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + (\delta t p(t_n) + 1) u_m^n + \delta t f_m^n \quad (2.2.10)$$

Nous maintenons la même procédure pour les approximations des intégrales dans les conditions aux limites non locales dans la section précédente on obtient :

$$u_0^{n+1} = \delta x \left(\frac{1}{2} k_0(x_0) u_0^{n+1} + \sum_{m=1}^{M-1} k_0(x_m) u_m^{n+1} + \frac{1}{2} k_0(x_M) u_M^{n+1} \right) + g_0(t_{n+1}),$$

et

$$u_M^{n+1} = \delta x \left(\frac{1}{2} k_1(x_0) u_0^{n+1} + \sum_{m=1}^{M-1} k_1(x_m) u_m^{n+1} + \frac{1}{2} k_1(x_M) u_M^{n+1} \right) + g_1(t_{n+1}), \quad (2.2.11)$$

pour $n = 1, \dots, N$.

Consistance du schéma explicite

Proposition 2.2.3. *Supposons que $u \in C^{4,2}([0, 1] \times [0, T])$. Alors le schéma explicite (2.2.10) est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace : il existe une constante $C > 0$, indépendant de δt et δx , telle que $|R_i^j| \leq C(\delta t + \delta x^2)$.*

Preuve. : D'abord par définition de la consistance, on calcule l'erreur de troncature du schéma (2.2.10) en remplaçant la solution exacte dans le schéma (2.2.10) on trouve :

$$R_i^j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\delta x^2} - f_i^j, \quad 1 \leq i \leq M - 1.$$

Soit $u \in C^{4,2}([0, 1] \times [0, T])$. Ensuite, par développement de Taylor autour du point (x_i, t_j) , nous avons :

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(\delta t^2).$$

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{2\delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + O(\delta x^4).$$

en remplaçant les deux formules dans R_i^j on trouve :

$$\begin{aligned} R_i^j &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\delta x^2} - p^j u(x_i, t_j) - f_i^j \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p^j u(x_i, t_j) - f \right) (x_i, t_j) + \left(\frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = p(t)u(x_i, t_j) + f(x_i, t_j).$$

$$R_i^j = \left(\frac{\delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2\delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4).$$

Donc

$$\left| R_i^j \right| \leq C(\delta t + \delta x^2), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

D'autre part, nous avons utilisé la règle du trapèze pour approximer les intégrales dans 2.1.2, alors l'erreur de troncature $R_i^j, i = 0, M$ satisfait :

$$\left| R_0^j \right| + \left| R_M^j \right| \leq C\delta x^2.$$

nous obtenons

$$\left| R_i^j \right| \leq C(\delta t + \delta x^2), \quad 0 \leq i \leq M.$$

Lorsque δt et δx tendent vers zero, l'erreur de troncature R_i^j tend aussi vers zero ; le schéma est donc consistant. \square

Stabilité du schéma explicite

Proposition 2.2.4. *Considérons que fonction f soit bornée selon la norme L^∞ , si le pas de temps satisfait la condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) suivante :*

$$\delta t \leq \frac{\delta x^2}{2}$$

Alors, le schéma d'Euler explicite (2.2.10) est stable pour la norme L^∞ , on dit que la méthode est conditionnellement stable.

Preuve. : Pour tout $i = 1, \dots, M-1$

$$u_m^{n+1} = r(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + (\delta t p(t_n) + 1) u_m^n + \delta t f_m^n \quad (2.2.12)$$

qui s'écrit encore :

$$u_m^{n+1} = r(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + (-2r + 1 + \delta t p(t_n)) u_m^n + \delta t f_m^n \quad (2.2.13)$$

en prenant la valeur absolue et puisque sous la condition CFL,

$$(-2r + 1 + \delta t p(t_n)) > -2r + 1 > 0$$

il vient que :

$$\delta t \leq \frac{\delta x^2}{2}$$

nous pouvons prendre la valeur absolue, on obtient donc

$$|u_i^{j+1}| \leq \frac{k}{h^2}|u_{i-1}^j| + (1 - 2\frac{k}{h^2})|u_i^j| + \frac{k}{h^2}|u_{i+1}^j| + k|f_i^j|,$$

Puis en prenant le maximum sur $(u_i^j)_{1 \leq i \leq M-1}$, nous obtenons que pour tout i

$$|u_i^{j+1}| \leq \max_{1 \leq i \leq M} |u_i^j| + k\|f\|_\infty$$

par récurrence on obtient :

$$\|u^{j+1}\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + t_{j+1}\|f\|_\infty$$

□

2.2.3 La méthode Crank–Nicolson (CN)

Pour obtenir une meilleure approximation de $\frac{\partial u}{\partial t}$, donnons le schéma de Crank-Nicolson.

En partant des deux versions de la méthode d'Euler

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\delta t} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\delta x^2} = f_i^j, \quad (\text{Explicite}) \quad (2.2.14)$$

et

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\delta t} - \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\delta x^2} = f_i^{j+1}. \quad (\text{Implicite}) \quad (2.2.15)$$

la méthode de Crank-Nicolson s'obtient en faisant la moyenne des deux égalités :

$$\left(1 + r - \frac{\delta t}{2}p^{n+1}\right) u_m^{n+1} - \frac{r}{2}u_{m-1}^{n+1} - \frac{r}{2}u_{m+1}^{n+1} = \left(1 - r + \frac{\delta t}{2}p^n\right) u_m^n + \frac{r}{2}u_{m+1}^n + \frac{r}{2}u_{m-1}^n + \frac{\delta t}{2}f_m^n + \frac{\delta t}{2}f_m^{n+1}, \quad (2.2.16)$$

pour $m = 1, \dots, M-1$, et $n = 1, \dots, N-1$ avec $r = \frac{\delta t}{\delta x^2}$, on trouve

$$-ru_{m-1}^{n+1} + 2\left(r + 1 - \frac{\delta t}{2}p^{n+1}\right) u_m^{n+1} - ru_{m+1}^{n+1} = ru_{m-1}^n + 2\left(1 - r + \frac{\delta t}{2}p^n\right) u_m^n + ru_{m+1}^n + \delta t f_m^n + \delta t f_m^{n+1}$$

En divisant l'équation précédente par r on trouve

$$\begin{aligned} & u_{m-1}^{n+1} - 2 \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{\delta x^2}{2} p^{n+1} \right) u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1} \\ &= -u_{m-1}^n - 2 \left(\frac{1}{r} + 1 - \frac{\delta x^2}{2} p^n \right) u_m^n - u_{m+1}^n + \frac{\delta x^2}{2} f_m^n + \frac{\delta x^2}{2} f_m^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Pour $m = 0$ et $m = M$ nous considérerons la condition aux limites donnée par (2). les conditions aux limites non locales sont discrétisées par la règle trapézoïdale comme suit :

$$u_0^{n+1} = \delta x \left(\frac{1}{2} k_0(x_0) u_0^{n+1} + \sum_{m=1}^{M-1} k_0(x_m) u_m^{n+1} + \frac{1}{2} k_0(x_M) u_M^{n+1} \right) + g_0(t_{n+1}), \quad (2.2.18)$$

et

$$u_M^{n+1} = \delta x \left(\frac{1}{2} k_1(x_0) u_0^{n+1} + \sum_{m=1}^{M-1} k_1(x_m) u_m^{n+1} + \frac{1}{2} k_1(x_M) u_M^{n+1} \right) + g_1(t_{n+1}), \quad (2.2.19)$$

pour $n = 1, \dots, N$.

En assemblant la discrétisation pour les points $m = 1 \dots, M$ donnée par (2.2.17), avec (2.2.19), on obtiendra le système d'équations linéaires suivante :

$$A u^{n+1} = w^{n+1},$$

défini pour chaque intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 1, \dots, N - 1$, où A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{M-1} & a_M \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{M-1} & b_M \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 1 - \frac{\delta x}{2} k_0(x_0), \quad b_0 = -\frac{\delta x}{2} k_1(x_0)$$

$$a_m = -\delta x k_0(x_m), \quad b_m = -\delta x k_1(x_m), \quad \text{pour } m = 1 \dots, M - 1,$$

$$a_M = -\frac{\delta x}{2}k_0(x_0), \quad b_M = 1 - \frac{\delta x}{2}k_1(x_M),$$

$$\lambda = -2 \left(1 + \frac{1}{r} - \frac{\delta x^2}{2}p^{n+1} \right) \text{ et}$$

$$w^{n+1} = (w_0^{n+1}, w_1^{n+1}, w_2^{n+1}, \dots, w_M^{n+1})$$

où

$$w_0^{n+1} = g_0(t_{n+1}),$$

$$w_m^{n+1} = -u_{m-1}^n - 2 \left(\frac{1}{r} + 1 - \frac{\delta x^2}{2}p^n \right) u_m^n - u_{m+1}^n - \frac{\delta x^2}{2}f_m^n - \frac{\delta x^2}{2}f_m^{n+1}, \quad m = 1 \dots, M-1$$

$$w_M^{n+1} = g_1(t_{n+1}).$$

Théorème 2.2.2. *Le schéma de Crank-Nicolson a une solution unique pour δx suffisamment petit.*

Preuve. :

C'est facile de voir que $|\lambda| = \left| 2 \left(1 + \frac{1}{r} - \frac{\delta x^2}{2}p^{n+1} \right) \right| > |2|$. Le reste est obtenu en suivant la même procédure que celle utilisée pour établir la preuve du théorème 2.2.1 \square

Consistance du schéma de Crank-Nicolson

Proposition 2.2.5. *Supposons que $u \in C^{4,2}([0, 1] \times [0, T])$. Alors le schéma Crank-Nicolson (2.2.17) est consistant, précis à l'ordre 2 en temps et 2 en espace : il existe une constante $C > 0$, indépendant de δt et δx , telle que $|R_i^j| \leq C(\delta t^2 + \delta x^2)$.*

Preuve. : On calcule l'erreur de troncature du schéma (2.2.17) en remplaçant la solution exacte dans le schéma (2.2.17) on trouve :

$$R_i^j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{2\delta x^2} - \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{2\delta x^2} - \frac{1}{2} \left(p^{j+1} u(x_i, t_{j+1}) + p^j u(x_i, t_j) \right) - \frac{1}{2} \left(f_i^{j+1} + f_i^j \right), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

Soit $u \in C^{4,2}([0,1] \times [0, T])$. Ensuite, par développement de Taylor autour du point (x_i, t_{j+1}) , nous avons :

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j+1})}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(\delta t^2).$$

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + O(\delta x^4).$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{\delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{j+1}) + O(\delta x^4). \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + k \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + O(\delta x^4). \end{aligned}$$

$$f_i^{j+1} = f(x_i, t_j) + \delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(k^2)$$

$$p^{j+1} = p(t_j) + \delta t \frac{\partial p}{\partial t}(t_j) + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t_j) + O(k^2)$$

en remplaçant les cinq formules dans R_i^j on trouve :

$$\begin{aligned} R_i^j &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p(t)u - f \right) (x_i, t_j) + \frac{\delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) (x_i, t_j) \\ &\quad - \left(\frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4). \end{aligned}$$

Puis en utilisant le fait que u est solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)u + f(x, t)$, il

vient :

$$R_i^j = \frac{\delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \right) (x_i, t_j) - \left(\frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\delta t^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4).$$

mais on a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t}$, alors :

$$R_i^j = - \left(\frac{\delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\delta t^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) (x_i, t_j) + O(\delta t^2) + O(\delta x^4).$$

et pour R_0^j et R_M^j : (l'erreur dans la méthode du trapèze), on a :

$$|R_0^j| + |R_M^j| \leq C \delta x^2.$$

Lorsque k et h tendent vers zero, l'erreur de troncature R_i^j tend aussi vers zero ; le schéma est donc consistant. \square

2.3 Méthodes efficaces de solution pour $u(x, t)$ et $p(t)$

dans cette section, nous discuterons des méthodes pour estimer $u(x, t)$ et $p(t)$ à chaque pas de temps.

Le but de la solution du problème inverse avec la conditions aux limites non locale est d'identifier le paramètre source qui produira à chaque instant, à chaque pas de temps -une température souhaitée $u(x, t)$ en un point donnée x_0 de la domaine spatial.

Dans les entrées diagonales de la matrice A , la discrétisation de (2.1.1) est définie par la fonction source inconnue $p(t_{n+1})$ à chaque pas de temps t_{n+1} et donc la solution $u(x_m, t_{n+1})$ nécessite une estimation précise pour la fonction inconnue $p(t_{n+1})$.

Les méthodes de résolution générales possèdent deux algorithmes :

1–**méthode prédicteur -correcteur pour $u(x, t)$ et $p(t)$ sur $[t_n, t_{n+1}]$**

2–**méthode de résolution efficace pour le système linéaire(??) de matrice quasi-tridiagonale A .**

2.3.1 La méthode prédicteur – correcteur

La méthode prédicteur –correcteur suivante est considérée pour résoudre les équations discrétisées, pour simplifier, nous allons présenter la méthode pour chaque équation du système linéaire. considérons l'équation de discrétisation donnée par :

$$\frac{-1}{r}u_m^n = u_{m+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{1}{r} - \delta x^2 p^{n+1}\right) u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}$$

alors pour chaque $m = 1 \dots, M - 1$, et $n = 1, \dots N - 1$ la solution pour $p^{n+1} = p(t_{n+1})$ au temps t_{n+1} .

considérons (2.1.1) à $x = x_0$; alors

$$E'(t) = u_{xx}(x_0, t) + p(t) E(t) + f(x_0, t)$$

avec $u(x_0, t) = E(t)$ où on obtient une formule $p(t)$ comme suit :

$$p(t) = \frac{1}{E(t)} (E'(t) - u_{xx}(x_0, t) - f(x_0, t))$$

avec $t = t_{n+1}$

$$P^{n+1} = p(t_{n+1}) = \frac{1}{E(t_{n+1})} (E'(t_{n+1}) - u_{xx}(x_0, t_{n+1}) - f(x_0, t_{n+1})).$$

$p^0 (p^0 = p(0)) = \frac{1}{E(0)} (E'(0) - u_{0xx}(x_0, 0) - f(x_0, 0))$ Ce $p^0 (p^0 = p(0))$, ainsi que les valeurs de condition initiales de $u(x, t)$ en $t = 0$, fournit la valeurs de départ de p^{n+1} pour notre calcul de $u(x, t)$ à $t = t_{n+1}$ donc un bon choix de la donnée initiale pour p^{n+1} noté $p^{n+1(0)}$ peut être considéré comme $p^{n+1}(t_n) = p^n, n = 0, 1, \dots N$.

En général, nous utiliserons $p^{n+1(l)}$ pour désigner la l ième prédiction pour $p(t)$ au temps $t = t_{n+1}$ et $u^{n+1(l)}$ pour désigner l'approximation correspondante pour $u(x, t)$ au niveau de temps t_{n+1} en utilisant le prédit valeur de $p^{n+1(l)}$. il convient également de noter que nous attendrions à un certain nombre de corrections, données comme l corrections, pour $p^{n+1(l)}$ et $u^{n+1(l)}$ à effectuer avant $p^{n+1(l)}$ et $u^{n+1(l)}$ peuvent être acceptés comme un bon approximation à $t = t_{n+1}$.

La correction pour $p^{n+1(l)}$ est donnée comme suit :

$$p^{n+1(l)} = p(t_{n+1}) = \frac{1}{E(t_{n+1})} (E'(t_{n+1}) - u_{xx}(x_0, t_{n+1}) - f(x_0, t_{n+1})).$$

nous allons corriger $p^{n+1(l)}$ et mettre à jour la solution $u^{n+1(l)}$ jusqu'à ce qu'elle converge en utilisant une tolérance prédéfinie, puis la solution est acceptée.

2.4 Résultats numériques :

Dans cette section, nous présenterons les résultats numériques de la résolution d'un problème modèle pour tester la performance des algorithmes présentés.

Exemple

nous avons considéré :

$$f(x, t) = \left((t-1)^2 - \pi^2 \right) \exp(-t)^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi x)) \quad (2.4.1)$$

$$u(x, 0) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \quad (2.4.2)$$

$$u(1, t) = \frac{-\pi}{2} \int_0^1 u(x, t) dt \quad (2.4.3)$$

$$u(1, t) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 u(x, t) dt \quad (2.4.4)$$

la condition sur-spécifiée définie au point x_0 est donnée par

$$u(x, t) = \exp(-t)^2 (\cos(\pi x_0) + \sin(\pi x_0)) = E_0(t) \quad (2.4.5)$$

avec $x_0 = 0.25$

la solution exacte $u(x, t)$ du problème modèle est donnée par

$$u(x, t) = \exp(-t)^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi x)) \quad (2.4.6)$$

et avec $P(t) = -(t^2 + 1)$.

Le tableau 1 donne quelques résultats numériques de $u(x, t)$ par le schéma implicite(BTCS), le schéma explicite(FTCS), le schéma Crank-Nikolson(CN) et la solution exacte à l'instant $t = 1$. Dans le tableau 2 'le temps' représente le temps d'exécution(CPU)de chaque schémas.

TABLE 2.1 – La solution numérique u pour $\Delta x = 0.02$ et $r = 0.2$ à l'instant $T = 1$.

x_i	$u(x_i, 1)$ exacte	l'erreur FTCS	l'erreur BTCS	l'erreur CN
0.05	0.420899	5.1×10^{-3}	8×10^{-3}	4.3×10^{-3}
0.15	0.494797	5.0×10^{-3}	8.2×10^{-3}	4.1×10^{-3}
0.25	0.520260	5.5×10^{-3}	8.1×10^{-3}	4.2×10^{-3}
0.35	0.494797	5.8×10^{-3}	7.9×10^{-3}	3.9×10^{-3}
0.45	0.420899	5.3×10^{-3}	7.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}
0.55	0.305801	6×10^{-3}	8.1×10^{-3}	4×10^{-3}
0.65	0.437016	6.1×10^{-3}	8.3×10^{-3}	4.1×10^{-3}
0.75	0.000000	5.8×10^{-3}	8.5×10^{-3}	4.2×10^{-3}
0.85	-0.4370165	5.4×10^{-3}	8.6×10^{-3}	4.1×10^{-3}
0.95	-0.305801	5.9×10^{-3}	7.9×10^{-3}	4.3×10^{-3}

TABLE 2.2 – temps d'exécution(second)

Temps FTCS	Temps BTCS	Temps CN
2.8	48.3	57.2

Les résultats obtenus pour $p(t)$ avec $h = 0.05$, $r = 0.2$, en utilisant les schémas FTCS, BTCS et C-N sont présentés dans le tableau 3 .

Notez que le critère de convergence pour $p(t)$ est $|p^{n+1(l)} - p^{n+1(l-1)}| < 0.0001$ Des

TABLE 2.3 – La solution numérique $p(t)$ pour $\Delta x = 0.02$ et $r = 0.2$

x_i	$p(t)$ exacte	l'erreur FTCS	l'erreur BTCS	l'erreur CN
0.05	-1.0025	5.5×10^{-3}	6.5×10^{-3}	4.3×10^{-3}
0.10	-1.01	5.4×10^{-3}	6.6×10^{-3}	4.9×10^{-3}
0.15	-1.0225	5.5×10^{-3}	6.6×10^{-3}	4.9×10^{-3}
0.20	-1.04	5.6×10^{-3}	6.5×10^{-3}	4.8×10^{-3}
0.25	-1.0625	5.5×10^{-3}	6.4×10^{-3}	4.8×10^{-3}
0.3	-1.09	5.3×10^{-3}	6.2×10^{-3}	4.7×10^{-3}
0.35	-1.1225	5.2×10^{-3}	6.3×10^{-3}	4.6×10^{-3}
0.4	-1.16	5.1×10^{-3}	6.2×10^{-3}	4.6×10^{-3}
0.45	-1.2025	5.1×10^{-3}	6.1×10^{-3}	4.5×10^{-3}
0.5	-1.25	5.2×10^{-3}	6.0×10^{-3}	4.4×10^{-3}

tableaux précédent on remarque que Les résultats numériques obtenus en utilisant les méthodes décrites dans la section 2.2 donnent des résultats acceptables. La méthode FTCS est explicite et nécessite moins de temps de calcul que les autres schémas implicites (voir tableau 2), mais l'inconvénient de cette discrétisation est le critère de stabilité $0 < r < \frac{1}{2}$.

Conclusion et perspectives

Je pense et je réfléchis pendant des mois et des années. Quatre-vingt-dix-neuf fois, la conclusion est fautive. La centième fois, j'ai raison.

- Albert Einstein

Nous avons construit des schémas numériques pour l'identification d'un coefficient inconnu dépendant du temps d'un problème soumis à des conditions initiales et aux limites non locales ainsi qu'à une condition sur-spécifiée définie en un point spécifique du domaine espace.

La méthode de différences finies explicite est plus facile à résoudre que les méthodes finies implicites pour ce type de problème parabolique inverse. Ceci est dû au fait que dans la méthode explicite, une seule inconnue est impliquée dans la formule de différence finie.

-Malheureusement on n'a pas pu appliquer la méthode dans le cas des problèmes hyperboliques, en raison du manque de temps, nous souhaitons la continuation de ce travail par l'un des étudiants de l'année prochaine.

Bibliographie

- [1] Bensaïd,S. and Bouziani,A. and Zereg,M. Backward Euler method for the diffusion equation with integral boundary specifications, *Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications* 2(2009), 169-185.
 - [2] Bouziani,A. Sur un problème parabolique avec des conditions integrales, *Annales de mathématiques*, 6 (1999), 55-66.
 - [3] A. BOUZIANI,A. and BENOUAR,N-E. Sur un problème mixte avec uniquement des conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques, *Mag. Math. Rev.*, 9 (2000), no. 1-2, 55.70.
 - [4] A. BOUZIANI and N-E. BENOUAR, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Sim. Stev*, Vol. 31, 125-133,1996.
 - [5] Cannon,J.R. and Liu,Y. and Wang,S. DETERMINATION OF SOURCE PARAMETER IN PARABOLIC EQUATIONS. *Meccanica* 21 :, (1992) 85-94.
 - [6] Cannon,J.R. and Liu,Y. and Xu,S. Numerical procedures for the determination of an unknown coefficient in semi-linear parabolic differential equations.*Anal,Inverse Problems* 10 (1994) 227-243.
 - [7] Daoud S. D, Determination of the source parameter in a heat equation with a non-local boundary condition, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 221 (2008) 261–272
 - [8] Day,W.A. Existence of a property of solutions of the heat equation subject to linear thermoelasticity and other theories, *Quart. Appl. Math.* 40 (1982) 319–330.
 - [9] Dehghan,M. New Schemes for a Two-dimensional Inverse Problem with Temperature Overspecification, *Mathematical Problems in Engineering* · 75 (2001) 283–297.
 - [10] Fortin,A. *Analyse numérique pour ingénieurs*, Seconde Edition, Presses internationales polytechniques, Montreal, (2001) .
-

- [11] Goncalvès da Silva,E. Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007, pp.99.
 - [12] Huntul, M.J. Abbas,M and Baleanu ,D. An inverse problem of reconstructing the time-dependent coefficient in a one-dimensional hyperbolic equation, *Advances in Difference Equations* (2021) 2021 :452.
 - [13] Ionkin, N.I., Solution of boundary value problems in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, *Deferent ?s. Uravn.* 13 :2 (1977),294-304.
 - [14] Liu,Y. Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 110 (1999) 115-127.
 - [15] Shakeri,F and Dehghan,M. Inverse problem of diffusion equation by He's homotopy perturbation method, *PHYSICA SCRIPTA.* 75 (2007) 551–556.
 - [16] J.-F. Scheid. Méthodes numériques pour la dynamique des fluides, polycopie du cours Université de Lorraine. Année 2011-2012.
 - [17] Quarteroni,A. and Saleri,F. and Gervasio,P. *Calcul scientifique : cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et OCTAVE*, Springer (2010).
-