

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM- EL BOUAGHI  
FACULTE DES SCINCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE  
Département Mathématique et Informatique

N° D'ordre :.....

Série :.....

## Mémoire pour obtenir le diplôme de Magister en Mathématique

*Option : Éléments d'arithmétique*

### THÈME

# Ensembles harmonieux et nombres de Pisot

*Présenté par : SELATNIA Mounia*

*Soutenu le : 21 / 03 / 2013*

*Devant le jury composé de :*

*Président:: Mr.NOUI Lemnouar Professeur Univ.Batna*

*Rapporteur : Mr.ZAIMI Toufik M.C.A Univ.Oum El Bouaghi*

*Examineurs : Mr.GUEDJIBA Said Professeur Univ.Batna*

*Mr.ALIOUCHE Abdelkrim M.C.A Univ.Oum El Bouaghi*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions de base</b>	<b>5</b>
1.1	Généralités sur les groupes topologiques. . . . .	6
1.2	Éléments de la théorie des corps. . . . .	22
1.3	Sur l'ensemble des nombres de Pisot. . . . .	26
<b>2</b>	<b>Ensembles harmonieux</b>	<b>31</b>
2.1	Dualité de Pontryagin. . . . .	32
2.2	Modèles dans un g.t.a.l.c. . . . .	36
2.3	Ensembles harmonieux. . . . .	42
<b>3</b>	<b>Application à des problèmes diophantiens</b>	<b>47</b>
3.1	Des modèles réels. . . . .	48
3.2	Une généralisation du théorème de Kronecker. . . . .	52
3.3	Caractérisation de certaines classes d'entiers algébriques. . . . .	57

# Notations

$\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers rationnels non-négatifs

$\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers rationnels

$\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels

$\mathbb{R}$  le corps des nombres réels

$\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes

$A^*$  l'ensemble des éléments non-nuls du sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{C}$

$A^n$  le produit cartésien de  $n$  copies de  $A$ , où  $A \subset \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{S}$  l'ensemble des nombres de Pisot

$\mathbb{T}$  l'ensemble des nombres de Salem

$M_\alpha$  le polynôme minimal sur  $\mathbb{Q}$  du nombre algébrique  $\alpha$

$disc(K)$  le discriminant d'un corps de nombres  $K$

$\mathbb{Z}_K$  l'anneau des entiers d'un corps de nombres  $K$

$Norm(\alpha) = Norm_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$  la norme du nombre algébrique  $\alpha \in K$ , pour l'extension  $K/\mathbb{Q}$

$Tr(\alpha) = Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$  la trace du nombre algébrique  $\alpha \in K$ , pour l'extension  $K/\mathbb{Q}$

*g.t.a.* groupe topologique abélien

*g.t.a.l.c.* groupe topologique abélien localement compact

$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim(V)$  la dimension du  $(\mathbb{K}-)$ espace vectoriel  $V$

$[K : L]$  le degré de l'extension de corps  $K \supset L$

$\overline{A}$  l'adhérence de la partie  $A$  d'un espace topologique

$Re(z)$  la partie réelle du complexe  $z$

$Im(z)$  la partie imaginaire du complexe  $z$

# Introduction

Les ensembles harmonieux sont présents dans beaucoup de domaines des mathématiques comme l'analyse harmonique, la géométrie et la théorie des nombres. Cette notion, introduite il y a plus d'un demi-siècle par Yves Meyer, dans la résolution de quelques problèmes d'analyse harmonique, a des applications diverses, notamment en physique et en chimie. Une classe importante des ensembles harmonieux est celle des ensembles de Meyer, également appelés, en physique, quasicristaux, et qui contient à son tour la famille distinguée des modèles.

Le but de ce mémoire est de mettre à la lumière ces objets mathématiques remarquables dans l'étude de quelques structures non-périodiques, et leurs applications dans la résolutions de quelques problèmes d'arithmétique. On mettra, en particulier, le lien de ces notions avec certaines classes d'entiers algébriques.

Dans le premier chapitre, on rappelle des notions de bases sur les groupes topologiques. L'accent est surtout mise sur les groupes topologiques localement compacts, qui seront à la base des définitions des ensembles harmonieux. Quelques notions élémentaires de la théorie des corps y figurent aussi. Dans le dernier paragraphe on montre quelques propriétés de certains ensemble d'entiers algébriques, et plus particulièrement la classe des nombres de Pisot. Ce dernier ensemble, très riche en propriétés arithmétique, permet de fournir des exemples de modèles dans certains corps de nombres.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à définir les modèles dans des groupes topologiques abéliens localement compacts, et les ensembles de Meyer dans les espaces euclidiens  $\mathbb{R}^n$ . A cette fin, on fait d'abord une brève description de l'une des théories fondamentales des groupes topologiques : la dualité de Pontryagin. Ensuite on définit les modèles à partir des schémas coupe-et-projection, et on montre qu'un modèle est un ensemble de Delone. Enfin, dans le dernier paragraphe, on considère quelques propriétés des ensembles de Meyer dans les groupes  $\mathbb{R}^n$ , après avoir définit les ensembles harmonieux dans des groupes topologiques localement compacts, et on en déduira qu'un modèle de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de Meyer.

Enfin dans le dernier chapitre on montre quelques applications des notions précédemment vues à l'étude de certaines classes d'entiers algébriques. Après avoir rappelé, dans le premier paragraphe, quelques théorèmes, dus à Yves Meyer, sur la construction de quelques modèles

---

réels, on cite dans le second, une généralisation du théorème d'approximation de Kronecker à un nombre infini d'inégalités. Enfin, dans le dernier paragraphe, on obtient des caractérisations des nombres de Pisot et des nombres de Salem, parmi les nombres réels, et cela en termes de la distribution de combinaisons linéaires des puissances de tels nombres.

# Chapitre 1

## Notions de base

- 
- 1- Généralités sur les groupes topologiques.
  - 2- Éléments de la théorie des corps.
  - 3- Sur l'ensemble des nombres de Pisot.
-

Ce chapitre est l'occasion de présenter un large éventail de notions mathématiques en rapport avec les ensembles harmonieux. Dans le premier paragraphe on rappelle quelques résultats de base sur les groupes topologiques. L'accent est surtout mise sur les groupes topologiques abéliens localement compacts, qu'on note g. t. a. l. c., qui seront à la base des définitions des ensembles harmonieux. Dans le second, on exhibe des concepts bien connus sur les corps de nombres algébriques ainsi que sur les anneaux des entiers de tels corps. On termine ce chapitre, dans le troisième paragraphe, par énoncer quelques propriétés d'une classe remarquable d'entiers algébriques : les nombres de Pisot et de Salem.

### 1.1 Généralités sur les groupes topologiques.

Dans la suite lorsqu'on parle de groupe en général, on note multiplicativement l'opération du groupe. Dans ce cas, le symbole 1 désigne l'élément neutre, et l'inverse d'un élément  $x$  du groupe est noté  $x^{-1}$ . Comme à l'accoutumé, et dans le but de simplifier la notation, un groupe abélien sera toujours noté additivement. Dans ce cas, le symbole 0 désigne l'élément neutre, et l'inverse d'un élément  $x$  du groupe est noté  $-x$ .

Les définitions et les résultats de la première partie de ce paragraphes se trouvent dans les livres [2, 5, 12, 26, 27, 30].

**Définition 1.1.1.** *Soit  $G$  un groupe, muni d'une topologie  $\tau$ . Si les applications :*

$$\iota : G \rightarrow G \quad x \mapsto x^{-1}$$

*et*

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto x y$$

*sont continues, alors on dit que  $G$  (ou bien le couple  $(G, \tau)$  s'il y a un risque de confusion) est un groupe topologique, et que la topologie  $\tau$  est une topologie de groupe.*

Il est important de signaler que le groupe produit  $G \times G$ , défini ci-haut, est muni de la topologie produit, c'est à dire, la topologie qui rend les deux projections canoniques

$$\pi_1 : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto x$$

et

$$\pi_2 : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto y$$

continues, ou d'une manière équivalente la topologie dont la base des ouverts est constituée des produits  $U \times V$ , où  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $G$ .

### Exemple 1.1.1.

**1.** Un groupe  $G$ , muni de sa topologie discrète  $\wp(G)$ , où  $\wp(G)$  est l'ensemble des parties de  $G$ , est un groupe topologique. En effet, pour tout  $B \in \wp(G)$ , on a

$$A := \iota^{-1}(B) \in \wp(G),$$

avec  $A = \{x \in G \mid x^{-1} \in B\}$ , et par suite  $\iota$  est continue. De même, on a  $\mu^{-1}(B) \in \wp(G \times G)$ , et comme  $G \times G$  est aussi discret, on déduit que  $\mu$  est continue. Ainsi,  $(G, \wp(G))$  est un groupe topologique (on dit dans ce cas que  $G$  est un groupe topologique discret).

**2.** Un groupe muni de sa topologie grossière est un groupe topologique. En effet, on a  $\iota^{-1}(G) = G$ ,  $\iota^{-1}(\emptyset) = \mu^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ,  $\mu^{-1}(G) = G \times G$  et donc les applications  $\iota$  et  $\mu$  sont continues (on dit dans ce cas que  $G$  est un groupe topologique grossier).

**3.** Le groupe additif  $\mathbb{R}$ , constitué des nombres réels, muni de la topologie usuelle, déduite de la valeur absolue, est un groupe topologique. Généralement le groupe produit  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  est un entier rationnel positif, muni de la topologie usuelle, déduite de la norme euclidienne (par exemple), est un groupe topologique.

**4.** Le groupe additif  $\mathbb{C}$ , constitué des nombres complexes, muni de la topologie usuelle, déduite

de la valeur absolue, est un groupe topologique. De même le groupe produit  $\mathbb{C}^n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ , est un groupe topologique

Dans tout ce qui suit, lorsqu'on parle des groupes topologiques  $\mathbb{R}^n$ , ou bien  $\mathbb{C}^n$ , on veut dire que ces groupes sont munis des topologies usuelles. Il est utile parfois d'intégrer les deux conditions dans la définition 1.1.1 en une seule :

**Proposition 1.1.1.** *Soit  $G$  un groupe et soit  $\tau$  une topologie sur  $G$ . Alors,  $(G, \tau)$  est un groupe topologique si, et seulement si, l'application*

$$\rho : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

*est continue.*

**Preuve.** Supposons d'abord que  $G$  soit un groupe topologique. Alors du schéma

$$G \times G \xrightarrow{f} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

où l'application  $f$ , définit par

$$f : (x, y) \mapsto (x, y^{-1}),$$

vérifie

$$\rho = \mu \circ f,$$

il suffit de montrer que  $f$  est continue. Comme les projections canoniques  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont continues, par définition de la topologie produit, les deux composantes de

$$f = (\pi_1, \iota \circ \pi_2),$$

le sont aussi; donc  $f$  est continue.

Inversement, supposons l'application  $\rho$  continue. Pour montrer la continuité de  $\iota$  considérons les deux applications,

$$P : G \rightarrow \{1\} \times G \quad \text{et} \quad h : \{1\} \times G \rightarrow G$$

définies par

$$P : x \mapsto (1, x) \quad \text{et} \quad h : (1, x) \mapsto x^{-1}.$$

Comme  $\iota = h \circ P$ , il suffit de montrer que  $P$  est continue, car  $h$  est la restriction à l'ensemble  $\{1\} \times G$ , de l'application continue  $\rho$  sur  $G \times G$  (la restriction d'une application continue est continue dans des espaces topologiques quelconques). Comme un ouvert non vide de l'espace produit  $\{1\} \times G$  est de la forme  $\{1\} \times \theta$ , où  $\theta$  est un ouvert de  $G$ , et  $P^{-1}(\{1\} \times \theta) = \theta$ , on voit immédiatement que  $P$  est continue, et donc  $\iota$  est continue.

Pour montrer la continuité de  $\mu$ , il suffit de remarquer que  $\mu = \rho \circ f$ , car

$$G \times G \xrightarrow{f} G \times G \xrightarrow{\rho} G$$

$$(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto x (y^{-1})^{-1} = xy.$$

Par hypothèse,  $\rho$  est continue, les deux composantes de  $f = (\pi_1, \iota \circ \pi_2)$  le sont aussi et ainsi  $\mu$  est continue. ■

**Définition 1.1.2.** Soient  $(G, \tau)$  un groupe topologique,  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $\tau'$  la topologie induite par  $\tau$  sur  $H$ . Alors on dit que  $(H, \tau')$  (ou bien tout simplement que  $H$ ), est un sous-groupe topologique de  $G$ .

**Exemple 1.1.2.**

1.  $\mathbb{Z}$  est un sous-groupe topologique de  $\mathbb{R}$ .
2. Il est clair que le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$  muni de la topologie usuelle est un groupe topologique. Deux sous-groupes topologiques, bien connus, de ce groupe sont  $\mathbb{R}^*$  et

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

**Proposition 1.1.2.** *Un sous-groupe topologique d'un groupe topologique est aussi un groupe topologique.*

**Preuve.** Il suffit de voir que les applications  $(x, y) \rightarrow x.y$  et  $x \rightarrow x^{-1}$  sont continues, car il s'agit de restrictions des applications continues. ■

**Définition 1.1.3.** *Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe topologique  $G$ . Alors l'espace topologique quotient, noté  $G/H$ , est l'ensemble quotient, c'est à dire l'ensemble des classes (à droite ou bien à gauche) modulo  $H$ , muni de la topologie la plus fine qui rend la projection canonique*

$$\pi : G \rightarrow G/H,$$

$$x \mapsto x.H$$

*continue.*

Il s'ensuit que

i / concrètement, un sous ensemble  $U \subset G/H$  est un ouvert si, et seulement si,  $\pi^{-1}(U)$  est ouvert de  $G$ ;

ii / si  $H$  est un sous-groupe normal d'un groupe topologique  $G$ , alors  $G/H$  muni de la topologie quotient est un groupe topologique;

iii /  $\pi$  est une application ouverte (c-à-d l'image d'un ouvert est un ouvert). En effet, si  $\theta$  est un ouvert de  $G$ , alors

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(\theta)) &= \{g \in G \mid \pi(g) \in \pi(\theta)\} \\ &= \{g \in G \mid \exists x \in \theta : \pi(g) = \pi(x)\} \\ &= \{g \in G \mid \exists x \in \theta, g.H = x.H\} \\ &= \{g \in G \mid \exists x \in \theta, \exists h \in H : g = x.h\} \\ &= \{g \in G \mid \exists h \in H : g \in \theta.h\} = \bigcup_{h \in H} \theta.h, \end{aligned}$$

et ce dernier ensemble est un ouvert car l'application  $\mu$  est continue, et la réunion d'ouverts est un ouvert.

iv / le groupe  $G/H$  est discret si et seulement si  $H$  est un ouvert de  $G$  (pour plus de détails sur de tels résultats voir [9]).

### Exemple 1.1.3.

1- Le groupe quotient  $T = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$  est un groupe topologique.

2- Le groupe  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  des classes modulo  $n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ , est un groupe topologique fini.

Pour éviter un risque de confusion avec certaines références, on préfère préciser les définitions bien connues suivantes. Un groupe topologique  $(G, \tau)$  est dit séparé, s'il est un espace topologique de Hausdorff (ou bien  $T_2$ ), c.-à-d. que pour tout couple d'éléments distincts  $g_1, g_2 \in G$ , il existe un voisinage  $V_1$  de  $g_1$  et un voisinage  $V_2$  de  $g_2$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

### Exemple 1.1.4.

1. Un groupe topologique discret est séparé.

2. Les groupes  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont séparés.

De même on dit qu'un groupe topologique  $(G, \tau)$  est compact, s'il est un espace topologique compact, c.-à-d., s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de  $G$  on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$G = \bigcup_{i \in I} \theta_i, \theta_i \in \tau \implies \exists J \subset I, J \text{ fini} \mid G = \bigcup_{i \in J} \theta_i.$$

Rappelons aussi qu'une partie  $H$  d'un groupe topologique séparé  $(G, \tau)$  est dite compacte, si elle est compacte pour la topologie induite, et que les parties compactes de  $\mathbb{R}^n$  sont les parties fermées bornées.

### Exemple 1.1.5.

1- Un groupe topologique grossier est compact.

- 2- Un groupe topologique fini est compact.
- 3- Les groupes  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  ne sont pas compacts.

Rappelons quelques propriétés générales des ensembles compacts qui nous seront utiles dans quelques démonstrations :

- i / Dans un espace topologique séparé, les parties compactes sont fermées. Un fermé dans un espace compact est un compact.
- ii / La réunion finie (resp., l'intersection quelconque) de parties compactes est un compact.
- iii / Le produit quelconque d'espaces compacts est un compact.
- iv / L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Un groupe topologique séparé  $G$  est dit localement compact si  $G$  est un espace topologique localement compact, c.-à-d., que tout point de  $G$  admet un voisinage compact.

### Exemple 1.1.6.

- 1- Les groupes  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont des groupes topologiques abéliens localement compacts (notés g.t.a.l.c.).
- 2- Un groupe topologique compact est localement compact.
- 3- Le groupe linéaire

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

des matrices carrées inversibles d'ordre  $n \times n$ , muni du produit usuel des matrices, est un groupe topologique localement compact. En effet,  $GL_n(\mathbb{R})$  est considéré comme un ouvert de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , car la fonction  $M \rightarrow \det(M)$  est continue et donc que  $GL_n(\mathbb{R})$  est l'image réciproque d'un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Ainsi la topologie de  $GL_n(\mathbb{R})$  est celle induite de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . En effet, le produit de matrices est donné par des fonctions polynômiales, et prendre l'inverse est donné par des fonctions rationnelles en utilisant la matrice adjointe, et dans ces deux cas, ces fonctions

sont continues. Il est aussi évident que  $Gl_n(\mathbb{R})$  est localement compact, mais n'est pas compact (il suffit de considérer les éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in Gl_n(\mathbb{R}),$$

où  $a \in \mathbb{R}^*$ , pour voir que  $Gl_n(\mathbb{R})$  n'est pas borné).

Dans le chapitre qui suit on va parler de la notion de caractère de groupes. Rappelons qu'un morphisme  $f : G \rightarrow G'$  de groupes topologiques est un homomorphisme des groupes, c.-à-d.,  $\forall x, y \in G : f(xy) = f(x).f(y)$ , et qui soit continue. Un morphisme bijectif de groupes topologiques est dit isomorphisme de groupes topologiques. Comme d'habitude, un homomorphisme de groupe topologique  $f$  est appelé isomorphisme s'il admet un inverse (c.-à-d., un homomorphisme de groupe topologique  $g : G' \rightarrow G$  tel que  $f \circ g = id_{G'}$  et  $g \circ f = id_G$ ) cela équivant à dire que  $f$  est à la fois un isomorphisme des groupes et un homéomorphisme. Il est important de rappeler qu'un homomorphisme  $f$  de groupe est continu s'il l'est en l'élément neutre 1 de  $G$ .

**Exemple 1.1.7.** Si  $H$  est un sous-groupe d'un groupe topologique  $G$ , alors la projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/H$  est un morphisme.

Pour les définitions et les résultats qui suivent, sur les groupes topologiques abéliens, notés g.t.a., on peut également se référer aux papiers [13,14,15,16,22,28,29]. Dans ce cas la définition 1.1.1 se traduit par le fait que les applications  $(x, y) \mapsto x + y$  et  $x \mapsto -x$  sont continues, alors que la proposition 1.1.1 se résume dans le fait que l'application  $(x, y) \mapsto x - y$  soit continue. De plus, si l'on fixe  $g \in G$ , alors l'application de  $\{g\} \times G \rightarrow G$  qui au couple  $(g, x)$  associe  $g + x$  est

continue, puisqu'elle est la restriction de l'application continue  $\mu$ . Ainsi l'application bijective  $T_g$  définie de  $G \rightarrow G$  par la relation  $x \mapsto g + x$  est continue et son inverse  $T_{-g}$  est aussi continue; donc  $T_g$  est un homéomorphisme de  $G$ . Cet homéomorphisme est dit translation par  $g$ .

**Définition 1.1.4.** Soit  $G$  un groupe topologique abélien, et soit  $A$  une partie non vide de  $G$ . On dit que  $A$  est relativement dense dans  $G$  s'il existe un compact  $K$  de  $G$  tel que

$$A + K = G.$$

### Exemple 1.1.8.

1. L'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers rationnels est relativement dense dans le g. a. l. c.  $\mathbb{R}$  car,  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $x = [x] + \{x\}$ , où  $[x]$  et  $\{x\}$  sont, respectivement, les parties entières et fractionnaires de  $x$  ( $[x]$  est le plus grand entier rationnel ne dépassant pas  $x$ , et  $\{x\} = x - [x]$ ), et par suite  $\mathbb{R} = \mathbb{Z} + [0, 1]$ .

2. Généralement, si  $n \in \mathbb{N}^*$  alors  $\mathbb{Z}^n$  est relativement dense dans le g. a. l. c.  $\mathbb{R}^n$ , car  $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n + [0, 1]^n$ , où le compact  $[0, 1]^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  ( $n$  fois).

3. L'ensemble  $\mathbb{N}$  n'est pas relativement dense dans  $\mathbb{R}$ , car s'il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{N} + K = \mathbb{R}$ , alors  $K \subset [a, b]$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\min(\mathbb{N} + [a, b]) = a$ , et  $\mathbb{R}$  serait borné.

**Définition 1.1.5.** On dit qu'une partie  $A$  d'un g.t.a.  $G$  est uniformément discrète, s'il existe un voisinage  $V$  de zéro tel que

$$(A - A) \cap V = \{0\}.$$

### Exemple 1.1.9.

1.  $\mathbb{N}$  est uniformément discret dans  $\mathbb{R}$ , car  $\mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z} \cap ]-1, 1[ = \{0\}$ .

2.  $\mathbb{Z}$  est aussi uniformément discret car  $\mathbb{Z} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z} \cap ]-1, 1[ = \{0\}$ . Généralement, l'ensemble  $\mathbb{Z}^n$  est uniformément discret dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.1.3.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un g. t. a.  $G$ . Alors on a l'équivalence suivante :  $H$  uniformément discret  $\Leftrightarrow H$  discret. En outre, si  $H$  est discret et  $G$  est un espace  $T_1$  (c.-à-d., tout singleton de  $G$  est fermé), alors  $H$  est fermé.

**Preuve.** Supposons d'abord que le sous-groupe  $H$  soit discret, c.-à-d., tout singleton  $\{h\}$  de  $H$  est un ouvert pour la topologie induite. Ainsi, il existe un ouvert  $V$  de  $G$  tel que  $H \cap V = \{0\}$ , et donc  $H$  est uniformément discret puisque  $H - H = H$ . Réciproquement, pour montrer que  $H$  est discret, il suffit de prouver  $\{0\}$  est un ouvert, car  $\forall h \in H, \{h\} = T_h(\{0\})$  et la translation par  $h$  est continue. En fait de la définition ci-dessus, il en découle immédiatement qu'il existe un ouvert  $V$  de  $G$  tel que  $H \cap V = \{0\}$  et donc  $\{0\}$  est un ouvert.

Supposons maintenant le groupe topologique  $G$  est un espace  $T_1$ . Comme  $H$  est discret, il existe dans  $G$  un voisinage  $U$  de  $0$  tel que  $H \cap U = \{0\}$ . Choisissons un voisinage  $V$  de  $0$  tel que  $V - V \subset U$ . Un tel choix est possible car d'après la proposition 1.1.1 il existe deux ouverts  $V_1$  et  $V_2$  de  $G$  tels que  $(0, 0) \in V_1 \times V_2 \subset \rho^{-1}(U)$  et en posant  $V = V_1 \cap V_2$  on voit que  $\rho(V, V) = V - V \subset U$ . Soit  $x \in G$ . On va montrer que si  $x \notin H$ , alors il existe un voisinage  $W$  de  $x$  tel que  $W \cap \overline{H} = \emptyset$ , et on en déduit que  $x \notin \overline{H}$ , d'où le résultat. Alors l'ensemble  $(x + V) \cap H$  contient au plus un élément. En effet si  $h_1 = x + v_1 \in H$  et  $h_2 = x + v_2 \in H$ , où  $v_1$  et  $v_2 \in V$ , alors  $h_1 - h_2 = -v_1 + v_2 \in (V - V) \cap H \subset H \cap U$  et donc  $h_1 = h_2$ . Il s'ensuit lorsque  $(x + V) \cap H = \emptyset$ , qu'on peut choisir  $x + V = W$ . Dans le cas où  $(x + V) \cap H$  est un singleton  $\{h\}$ , alors on choisit  $W = (x + V) \setminus \{h\}$ . En effet  $x \neq h$  car  $x \notin H$ , et  $(x + V) \setminus \{h\}$  est l'intersection du voisinage de  $x : (x + V)$ , et de l'ouvert  $\{h\}^c$  qui contient aussi  $x$ . ■

En fait la proposition ci-dessus est vraie dans un groupe topologique quelconque (voir [2]).

**Définition 1.1.6.** Soit  $G$  un groupe topologique abélien. Une partie  $A$  de  $G$  est dite ensemble de Delone si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

(i)  $A$  est uniformément discrète.

(ii)  $A$  est relativement dense.

Si de plus  $A$  est un sous groupe de  $G$  qui est de Delone, alors on dit que  $A$  est un réseau de  $G$ .

**Exemple 1.1.10.**  $\mathbb{Z}^n$  est un réseau de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $L$  un sous groupe de  $\mathbb{R}^n$ , engendré par  $m$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. Alors,  $L$  est discret. Si de plus  $m = n$ , alors  $L$  est un réseau.*

**Preuve.** Supposons  $L$  engendré par les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , c.-à-d.,

$$L = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_m e_m \mid \forall i = \overline{1, m}, k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

où  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  est libre dans le  $\mathbb{R}$ -espace  $\mathbb{R}^n$ . Pour montrer que  $L$  est discret, il suffit de prouver que :  $\forall \rho > 0$ ,  $B(0, \rho) \cap L$  est fini, où  $B(0, \rho)$  est la boule dans  $\mathbb{R}^n$  de centre 0 et de rayon  $\rho$ . La norme considérée sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  est la norme Euclidienne.

On complète alors  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  en une base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , et on considère l'application

$$f : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Alors  $f$  est bien défini et est surjective, car  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . De plus  $f$  est linéaire car :  $f(\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)) = f(\alpha\lambda_1 + \lambda'_1, \dots, \alpha\lambda_n + \lambda'_n) = \sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \lambda'_i) e_i$   
 $= \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_i = \alpha f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + f(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ .

Il s'ensuit que  $f$  est un isomorphisme continue, et l'application inverse de  $f^{-1}$ , notée  $\varphi$ , est aussi linéaire et continue.

Soit  $\vartheta \in B(0, \rho) \cap L$ , alors

$$\vartheta \in \overline{B(0, \rho)},$$

et  $\overline{B(0, \rho)}$  est un fermé-borné de  $\mathbb{R}^n$  donc  $\overline{B(0, \rho)}$  est un compact. D'autre part

$$\vartheta \in L \implies \vartheta = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_m e_m,$$

où  $k_i \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ . Comme  $\vartheta = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_m e_m + 0e_{m+1} + \dots + 0e_n$ , alors  $\varphi(\vartheta) = (k_1, \dots, k_m, 0, \dots, 0)$ , et  $\varphi(\vartheta) \in \varphi(\overline{B(0, \rho)}) = K$ , où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  (image par

l'application continue d'un compact). Soit  $\alpha > 0$  tel que  $K \subset \overline{B(0, \alpha)}$ . Alors, on a

$$\|(k_1, \dots, k_m, 0..0)\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_m^2} \leq \alpha,$$

$$\sqrt{k_i^2} \leq \sqrt{k_1^2 + \dots + k_m^2} \leq \alpha, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

et chaque  $k_i$  prend au plus un nombre fini de valeurs. Ainsi  $\vartheta$  prend au plus un nombre fini de valeurs possibles, et par suite  $\forall \rho > 0$ , l'ensemble  $B(0, \rho) \cap L$  est fini.

Supposons maintenant que le sous groupe  $L$  soit engendré par  $n$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants, notés encore,  $e_1, \dots, e_n$  et montrons que  $L$  est un réseau. De la proposition ci-dessus on déduit que  $L$  est discret  $\Rightarrow L$  est uniformément discret. Il reste à montrer que  $L$  est relativement dense.

Comme  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , tout  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ , s'écrit  $\vartheta = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ , où les  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , et donc

$$\vartheta = \sum_{i=1}^n [\lambda_i] e_i + \sum_{i=1}^n \{\lambda_i\} e_i. \quad (1.1)$$

Soit

$$A = \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1\}.$$

Alors,  $\alpha \in A \Rightarrow \|\alpha\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\| = c$  et  $\alpha \in \overline{B(0, c)} = K$ , où le compact  $K$  ne dépend pas de  $\alpha$ . De relation (1.1),  $\sum_{i=1}^n [\lambda_i] e_i \in L$  et  $\sum_{i=1}^n \{\lambda_i\} e_i \in K$  on obtient  $\vartheta \in L + K$ ; donc  $L + K = \mathbb{R}^n$  et  $L$  est relativement dense. Par conséquent  $L$  est un réseau. ■

La proposition suivante montre que la réciproque de l'assertion ci-haut est aussi vraie.

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $L$  un sous groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $L$  est engendré par  $m$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. Si de plus  $L$  est un réseau, alors  $L$  est engendré par  $n$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants.*

**Preuve.** Soit  $L$  un sous groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $L = \{0\}$  alors  $L$  est engendré par 0 vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants et le résultat est vrai. Dans ce qui suit  $L$  est supposé contenir au moins un élément non-nul  $l$ .

Supposons d'abord  $n = 1$ . Alors,  $l$  est  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendant (si  $xl = 0$ , où  $x \in \mathbb{R}$  alors  $x = 0$ ) et

$$l\mathbb{Z} \subset L \tag{1.2}$$

car  $L$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . De plus, comme  $L$  est discret alors  $\forall r > 0$ , l'ensemble  $D(0, r) \cap L$  est fini, et on peut trouver  $l' \in L$  et qui soit le plus petit positif dans  $L$ . Pour montrer l'inclusion

$$L \subset l'\mathbb{Z} \tag{1.3}$$

il suffit de prouver que si  $y \in L \cap ]0, \infty[$ , alors  $y = kl'$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}^*$ , car  $l'\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . En effet dans ce cas,  $\exists k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $kl' \leq y < (k+1)l' \Rightarrow 0 \leq y - kl' \leq l'$ . Comme  $L$  est un groupe, alors  $y - kl' \in L$  et de l'hypothèse de minimalité de  $l'$  on voit que  $l' - kl = 0$  et donc  $l' = kl$ . Ainsi (1.3) est vraie, et de (1.2) on obtient que

$$L = l'\mathbb{Z},$$

c'est à dire que  $L$  engendré par un vecteur.

Considérons maintenant le cas général et soit  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  une partie libre maximale de  $L$ , c.-à-d., on ne peut pas trouver dans  $L$  plus de  $m$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. On va montrer par récurrence sur  $m$  que  $L$  est engendré par  $m$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants.

Cas où  $m = 1$ . Considérons l'ensemble

$$T_0 = \{x \in L \mid x = cg_1, c \in [0, 1]\}.$$

Alors,  $\{0, g_1\} \subset T_0$  et  $T_0 \neq \emptyset$ . Pour  $x \in T_0$ , on a

$$\|x\| = \|cg_1\| = c\|g_1\| \leq \|g_1\| \Rightarrow x \in B(0, \|g_1\|),$$

$x \in B(0, \|g_1\|) \cap L$ , et donc  $x$  prend un nombre fini des valeurs, car  $L$  est discret et  $B(0, \|g_1\|) \cap L$  est fini. On choisit maintenant  $x' = c_1g_1 \in T_0$  tel que le coefficient  $c = c_1$  soit le plus petit positif

possible. Pour montrer l'égalité

$$L = x'\mathbb{Z}$$

(d'où le résultat :  $L$  est engendré par un vecteur), notons d'abord que  $x'\mathbb{Z} \subset L$  car  $L$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . Pour prouver l'inclusion  $L \subset x'\mathbb{Z}$ , considérons un élément quelconque  $g \in L$ . Alors la partie  $\{g, g_1\}$  est liée, et il  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , non tous nuls, tels que  $\alpha g + \beta g_1 = 0$ . Il est clair que  $\alpha \neq 0$ , car sinon  $\beta g_1 = 0$  et  $\beta = 0$ . Donc,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$g = \lambda g_1 = \frac{\lambda}{c_1} (c_1 g_1) = \left(\frac{\lambda}{c_1}\right) x',$$

d'où

$$g = \left[\frac{\lambda}{c_1}\right] x' + \left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} x' \Rightarrow g - \left[\frac{\lambda}{c_1}\right] x' = \left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} x' \in L,$$

car  $g \in L$  et  $\left[\frac{\lambda}{c_1}\right] x' \in x'\mathbb{Z} \subset L$ . D'autre part, on a  $\left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} x' = \left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} c_1 g_1$  et  $0 \leq \left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} c_1 \leq c_1$ . Il s'ensuit du choix de  $c_1$  que  $\left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} c_1 = 0$ ,  $\left\{\frac{\lambda}{c_1}\right\} = 0$  et  $g = \left[\frac{\lambda}{c_1}\right] x' \in x'\mathbb{Z}$ . Ainsi  $L \subset x'\mathbb{Z}$  et  $L = x'\mathbb{Z}$ .

Supposons maintenant le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $m - 1$ , où l'entier  $m \geq 2$ , et que  $L$  est engendré par  $m$  vecteur  $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ . Soit  $V$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , engendré par  $\{g_1, g_2, \dots, g_{m-1}\}$ . Cette partie est une base de  $V$  ( $\dim(V) = m - 1$ ). Soit  $L_0 = L \cap V$ . Alors  $L_0$  est un sous groupe de  $\mathbb{R}^n$ , et la partie libre  $\{g_1, g_2, \dots, g_{m-1}\}$  de  $L_0$  est maximale. D'autre part, comme  $L_0 \subset L$ , alors  $L_0$  est discret, et de l'hypothèse de récurrence  $L_0$  engendré par  $m - 1$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants, disons  $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$ . Notons, aussi que  $\{l_1, l_2, \dots, l_{m-1}\}$  est une autre base de  $V$ . Similairement au cas  $m = 1$ , considérons l'ensemble

$$T_1 = \{c_1 l_1 + \dots + c_{m-1} l_{m-1} + c_m g_m \in L \mid 0 \leq c_i < 1 \text{ si } i \leq m - 1, 0 \leq c_m \leq 1\}.$$

Alors  $\{0, g_m\} \subset T_1$  et  $T_1 \neq \emptyset$ . Si  $x \in T_1$ , alors

$$\|x\| \leq \|l_1\| + \dots + \|l_{m-1}\| + \|g_m\| = \rho,$$

$x \in B(0, \rho) \cap L$  et  $x$  prend au plus un nombre fini de valeurs car  $L$  est uniformément discret. Soit  $x_1 \in T_1$  ayant un coefficient de  $g_m$  minimal et positif. Si on note  $b_m$  ce coefficient, alors

$$x_1 = b_1 l_1 + b_2 l_2 + \dots + b_{m-1} l_{m-1} + b_m g_m.$$

Pour prouver que  $L$  est engendré par  $\{x_1, l_1, \dots, l_{m-1}\}$ , remarquons d'abord que

$$x_1 \mathbb{Z} + l_1 \mathbb{Z} + \dots + l_{m-1} \mathbb{Z} \subset L$$

puisque  $x_1 \mathbb{Z} \subset L$ , et pour chaque  $i = 1, \dots, m-1$ , on a  $l_i \in L \Rightarrow \mathbb{Z} l_i \subset L$ .

Pour obtenir l'inclusion inverse, montrons d'abord que  $\{x_1, l_1, \dots, l_{m-1}\}$  est libre. En effet, si  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$  tel que

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1} = 0,$$

alors en remplaçant  $x_1$  par sa valeur on obtient

$$\alpha_1 (b_1 l_1 + b_2 l_2 + \dots + b_{m-1} l_{m-1} + b_m g_m) + \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1} = 0$$

et donc

$$(\alpha_1 b_1 + \beta_1) l_1 + \dots + (\alpha_1 b_{m-1} + \beta_{m-1}) l_{m-1} + \alpha_1 b_m g_m = 0$$

Posons  $\alpha_i b_i + \beta_i = \gamma_i$ , pour  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Si  $\alpha_1 \neq 0$ , alors

$$g_m = \frac{1}{\alpha_1 b_m} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i l_i \right) \Rightarrow g_m \in V, \text{ et } \{g_m, l_1, l_2, \dots, l_{m-1}\} \subset V.$$

Comme l'espace  $V$  est de dimension  $m-1$ , la partie  $\{g_m, l_1, l_2, \dots, l_{m-1}\}$  est liée et cela conduit à une contradiction :

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1} = 0 \Rightarrow \beta_i = 0; \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}.$$

Ainsi  $\{x_1, l_1, \dots, l_{m-1}\}$  est libre. Soit  $g \in L$ . Alors la partie  $\{g, x_1, l_1, \dots, l_{m-1}\}$  est liée  $\Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$  et  $\exists \beta_i \in \mathbb{R}$  tels que

$$g = \beta x_1 + \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g - [\beta] x_1 &= \{\beta\} x_1 + \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1} \\ &= \{\beta\} (b_1 l_1 + \dots + b_{m-1} l_{m-1} + b_m g_m) + \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1} \\ &= (\{\beta\} b_1 + \beta_1) l_1 + \dots + (\{\beta\} b_{m-1} + \beta_{m-1}) l_{m-1} + \{\beta\} b_m g_m \end{aligned}$$

et en posant  $\gamma_i = \{\beta\} b_i + \beta_i$  pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ , on obtient

$$g - ([\beta] x_1 + [\gamma_1] l_1 + \dots + [\gamma_{m-1}] l_{m-1}) = \{\gamma_1\} l_1 + \dots + \{\gamma_{m-1}\} l_{m-1} + \{\beta\} b_m g_m.$$

Comme  $0 \leq b_m \leq 1$ , alors  $0 \leq \{\beta\} b_m \leq b_m$ , et de la condition de minimalité de  $b_m$ , on déduit que  $\{\beta\} = 0$ ,  $g - [\beta] x_1 = \beta_1 l_1 + \dots + \beta_{m-1} l_{m-1}$ , et

$$g - ([\beta] x_1 + [\beta_1] l_1 + \dots + [\beta_{m-1}] l_{m-1}) = \{\beta_1\} l_1 + \dots + \{\beta_{m-1}\} l_{m-1}.$$

Puisque  $g \in L$  et  $[\beta] x_1 + [\beta_1] l_1 + \dots + [\beta_{m-1}] l_{m-1} \in L$ , on a

$$g - ([\beta] x_1 + [\beta_1] l_1 + \dots + [\beta_{m-1}] l_{m-1}) \in L.$$

D'autre part  $\{\beta_1\} l_1 + \dots + \{\beta_{m-1}\} l_{m-1} \in V$ , d'où  $\{\beta_1\} l_1 + \dots + \{\beta_{m-1}\} l_{m-1} \in L \cap V = L_0$  et comme  $\{l_1, \dots, l_{m-1}\}$  est une base de  $L_0$ , alors de l'unicité de l'écriture d'un élément de  $L_0$  on obtient pour tout  $i = \overline{1, m-1}$  il existe  $k_i \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\{\beta_1\} l_1 + \dots + \{\beta_{m-1}\} l_{m-1} = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_{m-1} l_{m-1},$$

d'où  $\{\beta_i\} = k_i$ ,  $\{\beta_i\} = 0$  et  $g = [\beta]x_1 + [\beta_1]l_1 + \dots + [\beta_{m-1}]l_{m-1}$  est un élément du sous-espace  $\langle x_1, l_1, \dots, l_{m-1} \rangle$  engendré par  $x_1, l_1, \dots, l_{m-1}$ ; ainsi  $L \subset \langle x_1, l_1, \dots, l_{m-1} \rangle$ .

Soit maintenant  $L$  un réseau de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $L$  est uniformément discret et donc  $L$  est discret, d'après la proposition 1.1.3. D'autre part,  $L$  étant relativement dense, il existe un compact  $K$  tel que :  $L + K = \mathbb{R}^n$  et  $L \neq \{0\}$  (si  $L = \{0\}$  alors  $\{0\} + K = K = \mathbb{R}^n$  est un compact). Comme  $L$  est discret,  $\exists m$  vecteurs  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants qui engendrent  $L$ ; on va montrer que  $m = n$ . Supposons au contraire que  $m < n$ . Alors l'ensemble  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  peut être complété en une base  $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si l'on considère la suite :  $(pe_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors de la relation  $pe_n \in L + K$ , on obtient que

$$pe_n = a_{1p}e_1 + a_{2p}e_2 + \dots + a_{mp}e_m + k_p,$$

où  $k_p \in K$  et les  $a_{ip} \in \mathbb{Z}$ . Notons que si  $k_p = k_q$  pour un certain couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , alors l'égalité  $a_{1p}e_1 + \dots + a_{mp}e_m - pe_n = a_{1q}e_1 + \dots + a_{mq}e_m - qe_n$  implique  $p = q$  puisque  $\{e_1, \dots, e_m, e_n\}$  est libre (c'est une partie de la base  $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ ). Ainsi l'ensemble  $K \cap L_1$ , où  $L_1 = \langle e_1, e_2, \dots, e_m, e_n \rangle$ . Mais comme  $L_1$  est un sous groupe de  $\mathbb{R}^n$  est discret (d'après la proposition 1.1.4) alors  $K \cap L_1$  est fini, et cela conduit à une contradiction; donc  $m = n$ . ■

## 1.2 Éléments de la théorie des corps.

Plusieurs ouvrages peuvent être consultés pour les résultats de ce paragraphe. Ici on se réfère aux livres [11, 17, 21, 24]. Pour obtenir des exemples de modèles dans un corps de nombres algébriques, on a besoin de rappeler d'abord les concepts d'entier algébrique, de polynôme minimal ainsi que ceux de conjugué, de trace et de norme d'un nombre algébrique.

**Définition 1.2.1.** Soient  $K$  et  $L$  deux corps tels que  $K \subseteq L$ . Alors on dit que  $L$  est une extension de  $K$ , et on écrit :  $L/K$ .

### Exemple 1.2.1.

1. Le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est une extension de  $\mathbb{R}$ .
2.  $\mathbb{C}$  est une extension du corps des rationnels  $\mathbb{Q}$ .
3.  $\mathbb{R}$  est une extension de  $\mathbb{Q}$ .

Il est clair que si  $L$  est une extension de  $K$ , alors  $L$  est un espace vectoriel sur  $K$ .

**Définition 1.2.2.** *Soit  $L/K$  une extension. La dimension de  $L$  comme espace vectoriel sur  $K$  s'appelle degré de l'extension, et est notée  $[L : K]$ . Si  $[L : K]$  est fini, on dit que l'extension est finie.*

### Exemple 1.2.2.

1.  $\mathbb{C}$  est une extension finie de  $\mathbb{R}$  de degré 2, car  $\{1, i\}$ , où  $i^2 = -1$ , est une base de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Si  $E$  est une extension finie de  $L$  et  $L$  est une extension finie de  $K$ , alors il est facile de vérifier que  $E$  est une extension finie de  $K$ . Dans ce cas on a la relation bien connue,

$$[E : K] = [E : L][L : K].$$

Dans ce qui suit les corps considérés sont contenues dans  $\mathbb{C}$ , et on rappelle que le corps  $\mathbb{C}$  est intégralement clos, c'est à dire que tout polynôme à coefficients complexes admet toutes ses racines dans  $\mathbb{C}$ . En particulier, si  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}$ , alors  $K$  est dit corps de nombres.

**Définition 1.2.3.** *On dit qu'un élément  $\alpha$  de  $\mathbb{C}$  est un nombre algébrique, s'il existe un polynôme unitaire  $P = P(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tel que  $P(\alpha) = 0$ . Si de plus  $P \in \mathbb{Z}[x]$ , alors  $\alpha$  est dit entier algébrique.*

*On dit que l'extension  $L/\mathbb{Q}$  est algébrique, si tout élément  $\alpha$  de  $L$  est algébrique.*

### Exemple 1.2.3.

1. Le nombre  $\alpha = \sqrt{2}$  est un entier algébrique car  $\alpha$  est racine du polynôme  $x^2 - 2$ .
2. Il est bien connu que le nombre  $\pi = 3.14\dots$  n'est pas algébrique.

3. Si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , alors  $\alpha$  est racine du polynôme  $x - \alpha$ , et est donc algébrique. En particulier si  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , alors  $\alpha$  est un entier algébrique.

4. Il est bien connu que toute extension finie de  $\mathbb{Q}$  est algébrique. Par exemple l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  est de degré 2, et est donc algébrique.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Comme l'anneau  $\mathbb{Q}[x]$  est euclidien, l'ensemble  $I = \{P \in \mathbb{Q}[x], P(\alpha) = 0\}$  est un idéal principal de  $\mathbb{Q}[x]$ . De la définition ci-dessus  $I$  est réduit à  $\{0\}$  si  $\alpha$  n'est pas algébrique. Lorsque  $\alpha$  est algébrique, l'idéal  $I$  admet un générateur, noté  $M_\alpha$ . On peut aussi supposer que  $M_\alpha$  est unitaire. Dans ce cas le polynôme  $M_\alpha$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[x]$  et est unique; ce polynôme s'appelle polynôme minimal de  $\alpha$ . En d'autres termes  $M_\alpha$  est le seul polynôme unitaire à coefficients rationnels, de degré minimal, ayant  $\alpha$  pour racine.

**Définition 1.2.4.** *Soit  $\alpha$  un nombre algébrique. Alors les racines du polynôme minimal de  $\alpha$ , noté  $M_\alpha$ , sont dits conjugués de  $\alpha$ . Le degré de  $\alpha$  est le degré de son polynôme minimal.*

Si  $\alpha$  un nombre algébrique de degré  $d$ , alors  $\alpha$  admet exactement  $d$  conjugués, car son polynôme minimal n'admet pas de racines doubles (il est irréductible). Dans ce cas le corps  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , qui est l'intersection de tous les sous-corps de  $\mathbb{C}$  contenant  $\alpha$ , est de degré  $d$ , c'est à dire que,  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = d$ . Il est facile de voir, par exemple, que l'ensemble  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}\}$  est une base du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{Q}(\alpha)$ .

Soit  $K$  un corps de nombres de degré  $d$ . Alors tout homomorphisme d'anneau de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ , non-nul est injectif et laisse invariant les nombres rationnels. Un tel homomorphisme est dit plongement de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . Rappelons qu'il existe exactement  $d$  plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ .

Il s'ensuit lorsque  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ , où  $\alpha$  un nombre algébrique de degré  $d$ , que les  $d$  plongements  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ , de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  transforment  $\alpha$  en ses conjugués. De plus, si  $\beta \in K$ , alors les conjugués de  $\beta$  sont parmi les nombres  $\sigma_1(\beta), \dots, \sigma_d(\beta)$ , chacun d'eux étant répété  $d/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$  fois.

**Définition 1.2.5.** *Soit  $K$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ , les différents*

plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors, le discriminant de l'élément  $(x_1, \dots, x_d) \in K^d$  est la quantité

$$\text{disc}(x_1, \dots, x_d) = \det[\sigma_j(x_k)]^2,$$

où  $(j, k) \in \{1, \dots, d\}^2$ , i. e., le carré du déterminant de la matrice ayant  $\sigma_j(x_k)$  à la  $j$ -ième ligne et  $k$ -ième colonne.

Il s'ensuit immédiatement que  $\text{disc}(x_1, \dots, x_d) \neq 0$  si et seulement si  $x_1, \dots, x_d$  sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, c.-à-d., qu'ils forment une base pour  $K$  sur  $\mathbb{Q}$ .

Avec la notation de la définition 1.2.5, il est bien connu que les entiers algébriques de  $K$  forment un sous-anneau de  $K$ , noté  $\mathbb{Z}_K$ , appelé anneau des entiers de  $K$ . De plus  $\mathbb{Z}_K$  est un groupe libre engendré par  $d$  éléments, c.-à-d., qu'il existe  $(\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_K^d$  tel que tout élément de  $\mathbb{Z}_K$ , s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$m_1\beta_1 + \dots + m_d\beta_d, \quad m_j \in \mathbb{Z}.$$

La base  $\{\beta_1, \dots, \beta_d\}$ , qui est aussi une base de  $K$  sur  $\mathbb{Q}$ , est dite base entière de  $K$ .

La propriété fondamentale des bases entières de  $K$  est qu'elles possèdent le même discriminant : c'est un invariant du corps.

**Définition 1.2.6.** *Le discriminant d'un corps de nombres  $K$ , noté  $\text{disc}(K)$ , est le discriminant de l'une de ses bases entières.*

**Définition 1.2.7.** *Soit  $K$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ , les différents plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors, la trace (resp., la norme) d'un élément  $x \in K$  est la somme  $\text{Tr}(x) = \sum_{j=1}^d \sigma_j(x) \in \mathbb{Q}$  (resp., le produit  $\text{Norm}(x) = \prod_{j=1}^d \sigma_j(x) \in \mathbb{Q}$ ). En particulier, si  $x \in \mathbb{Z}_K$  alors  $\text{Tr}(x) \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{Norm}(x) \in \mathbb{Z}$ , et  $x$  est dit unité lorsque  $\text{Norm}(x) = \pm 1$ .*

Il s'ensuit de la formule bien connue

$$\text{disc}(x_1, \dots, x_d) = \det[\text{Tr}(x_j x_k)],$$

que  $\text{disc}(K)$  est un entier rationnel.

### 1.3 Sur l'ensemble des nombres de Pisot.

Les nombres de Pisot et de Salem sont des entiers algébriques réels riches en propriétés arithmétiques, ce qui explique leur apparition dans plusieurs domaines des mathématiques. Ces nombres étaient étudiés pendant une période qui dépasse un demi-siècle. Les preuves de la majeure partie des résultats énoncés dans ce paragraphe se trouvent dans [3, 19, 20].

Beaucoup de résultats sont connus sur l'ensemble, usuellement noté  $\mathbb{S}$ , des nombres de Pisot. Citons quelques uns : Un algorithme a été introduit par Dufresnoy et Pisot pour déterminer les éléments de  $\mathbb{S} \cap ]1, 1.6183[$  [6], et cet algorithme a été généralisé par D. W. Boyd [4] pour trouver les nombres de Pisot dans certains intervalles. Salem avait montré que l'ensemble  $\mathbb{S}$  est fermé pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  [20]. Les points limites de  $\mathbb{S}$  inférieurs à 2 peuvent être déterminés explicitement [1]. Rappelons également une caractérisation des nombres de Pisot, due à C. Pisot [19] et qui dit pour qu'un nombre réel  $\theta > 1$ , soit un élément de  $\mathbb{S}$  il faut et il suffit qu'il existe un réel non nul  $t$  et une suite d'entiers rationnels  $(p_k)_{k \geq 1}$  tels que  $\sum_{k \geq 0} (t\theta^k - p_k)^2 < \infty$ . Une autre caractérisation des nombres de Pisot, parmi les nombres algébriques [19], dit aussi pour qu'un nombre algébrique réel  $\theta > 1$ , soit un nombre de Pisot il faut et il suffit qu'il existe un réel non nul  $t$  et une suite d'entiers rationnels  $(p_k)_{k \geq 1}$  tels que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (t\theta^k - p_k) = 0$ .

Comme précédemment, le polynôme minimal, le degré et les conjugués d'un nombre algébrique sont considérés sur le corps  $\mathbb{Q}$ .

**Définition 1.3.1.** *Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel plus grand que 1, dont les conjugués autres que lui-même sont de modules inférieurs à 1.*

#### **Exemple 1.3.1.**

1. Tout entier rationnel plus grand que 1 est un nombre de Pisot.
2. Le nombre  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est un nombre de Pisot de degré 2, car son polynôme minimal admet une autre racine (qui est  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ) de module  $< 1$ .

Pour montrer, d'une manière simple, qu'il existe des nombres de Pisot de degré arbitrairement grand, rappelons les deux résultats connus qui suivent :

**Proposition 1.3.1.** *Soit  $P$  un polynôme unitaire, à coefficients entiers rationnels, possédant une seule racine réelle  $\theta$  plus grande que 1, et les autres racines de module strictement inférieur à 1. Alors  $P(x) = x^s M_\theta(x)$ , où  $s \in \mathbb{N}^*$ , et  $\theta \in \mathbb{S}$ .*

**Preuve.** Comme  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  et  $P(\theta) = 0$ , alors  $\theta$  est un entier algébrique et il existe  $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$  tel que  $P = M_\theta P_1$ . De plus  $P_1$  est unitaire, car les polynômes  $P$  et  $M_\theta$  le sont, et admet toutes ses racines à l'intérieur du disque unité. Par suite le produit des racines de  $P_1$  est nul car il est de module strictement inférieur à 1; d'où  $P_1(x) \equiv x^s$ . ■

Pour montrer l'assertion qui suit, rapellons un corollaire du théorème de Rouché, vrai pour des fonctions analytiques au lieu des polynômes.

**Lemme 1.3.1.** *Si  $f$  et  $g$  sont deux polynômes tels que  $|f(z)| > |g(z)|$  sur le cercle  $|z| = \rho$ , où  $\rho > 0$ , alors le polynôme  $f + g$  admet le même nombre de racines que  $f$  dans le disque ouvert  $|z| < \rho$ .*

Pour la preuve de ce lemme on peut consulter un livre d'analyse complexe élémentaire.

**Proposition 1.3.2.** *Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers rationnels, tel que  $P(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_0 \neq 0$ , et*

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|.$$

*Alors  $P$  possède une unique racine  $\theta$  dans  $|z| > 1$  et ses autres racines sont de module  $< 1$ . Ainsi  $\pm\theta$  est un nombre de Pisot.*

**Preuve.** On a les relations suivantes, pour  $|z| = 1$ ,

$$|z^n + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0| \leq 1 + |a_{n-2}| + \dots + |a_0| < |a_{n-1}z^{n-1}| = |a_{n-1}|. \quad (1.4)$$

D'après le lemme ci-haut, le polynôme  $P$  possède dans  $|z| < 1$ , le même nombre de zéros que  $a_{n-1}z^{n-1}$ , soit  $n-1$ . Comme  $P$  n'a pas de racines sur  $|z| = 1$ , à cause de l'inégalité stricte dans (1.4), il admet donc une seule racine  $\theta$  dans  $|z| > 1$  et qui est réelle, car sinon par conjugaison complexe on obtient deux racines. Comme  $a_0 \neq 0$ , de la proposition 1-3-1, on déduit que  $\theta$  ou bien  $-\theta$  est un nombre de Pisot. ■

Ce corollaire appliqué par exemple au polynôme  $P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 1$ , où  $n \geq 2$ , montre que  $P$  est le polynôme minimal d'un réel  $\theta$  tel que  $\pm\theta$  est un nombre de Pisot. De plus, comme  $P(1) = -1 < 0$  et  $0 < P(3) = 1$ ,  $\theta$  est un nombre de Pisot de degré  $n$ . On déduit alors le résultat suivant :

**Corollaire 1.3.1.** *Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , il existe un nombre de Pisot de degré  $d$ .*

**Preuve.** D'après l'exemple 1.3.1, tout  $\theta \in \mathbb{N}^* - \{1\}$  est un nombre de Pisot de degré  $d = 1$ . Pour  $d \geq 2$ , et d'après le calcul ci-dessus il existe toujours un nombre de Pisot de degré  $d$ . □

On remarque que la somme et le produit des nombres de Pisot n'est pas toujours un nombre de Pisot, par exemple :  $(1 + \sqrt{5})/2 + (1 + \sqrt{5})/2 = 2(1 + \sqrt{5})/2 = 1 + \sqrt{5} \notin \mathbb{S}$ . Toutefois on la propriété suivante :

**Proposition 1.3.3.** *Soit  $\theta$  un nombre de Pisot de degré  $d$ , alors  $\theta^n$  est aussi un nombre de Pisot de degré  $d$ .*

**Preuve.** Il est clair que  $\mathbb{Q}(\theta^n) \subset \mathbb{Q}(\theta)$ , et si  $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$  sont des conjugués de  $\theta$ , alors il existe  $d$  plongements  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ , de  $\mathbb{Q}(\theta)$  dans  $\mathbb{C}$  tels que  $\sigma_i(\theta) = \theta_i$   $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ . Donc  $\sigma_i(\theta^n) = \theta_i^n$  et les conjugués de  $\theta^n$  sont parmi les nombres  $\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_d^n$ . Supposons que  $\theta^n$  soit de degré  $d'$ . Alors d'après la relation

$$[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\theta^n)] [\mathbb{Q}(\theta^n) : \mathbb{Q}],$$

on a  $d = md'$ , où  $m \in \mathbb{N}$ , et donc chaque conjugué de  $\theta^n$  est répété  $m$  fois dans l'ensemble  $\{\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_d^n\}$ . Comme  $\theta^n > 1$ , et  $|\theta_i^n| < 1$  pour tout  $i \geq 2$ , on obtient  $m = 1$  et  $d = d'$ . Ainsi  $\theta^n$  est aussi un nombre de Pisot de degré  $d$ . ■

Une autre classe remarquable d'entiers algébriques, notée  $\mathbb{T}$ , et qui a des liens avec l'ensemble  $\mathbb{S}$ , est la classe des nombres de Salem.

**Définition 1.3.2.** *Un nombre de Salem est un entier algébrique réel plus grand que 1, dont les autres conjugués sont de module inférieur ou égal à 1, avec au moins un conjugué de module 1.*

Soient  $M_\tau$  le polynôme minimal d'un nombre de Salem  $\tau$ , et soit  $M_\tau^*(x) = x^n M_\tau(1/x)$  le polynôme réciproque de  $M_\tau$ . Si  $\alpha$  une racine de module 1 de  $P$ , alors  $\bar{\alpha} = 1/\alpha$  est également racine des deux polynômes  $M_\tau$  et  $M_\tau^*$ . Par suite,  $M_\tau$  et  $M_\tau^*$  ont une racine commune et comme  $M_\tau$  est unitaire et irréductible, alors  $M_\tau = \lambda M_\tau^*$ ,  $M_\tau(0) = \lambda$  et  $1 = \lambda M_\tau(0)$ ; d'où  $\lambda^2 = 1$ . Si  $\lambda = -1$ , alors  $\pm 1$  est racine de  $M_\tau$ , et cela conduira une contradiction puisque  $M_\tau$  est irréductible. Par conséquent,  $\lambda = 1$  et  $M_\tau = M_\tau^*$ . De plus le degré de  $M_\tau$  est un entier pair au moins égal à 4. On résume cela dans la proposition suivante.

**Proposition 1.3.4.** *Le polynôme minimal d'un nombre de Salem  $\tau$  est réciproque et est de degré  $\geq 4$ . De plus,  $\tau$  possède un seul conjugué de module inférieur à 1, qui est son inverse, et ses autres conjugués sont tous de module 1.*

**Preuve.** La première partie de la proposition résulte du calcul précédent. Si  $\alpha$  est racine de  $M_\tau$  alors  $1/\alpha$  est aussi racine de  $M_\tau$ , car il est réciproque. Ainsi  $1/\tau$  est le seul conjugué de  $\tau$  ayant un module  $< 1$ , car  $\tau$  n'admet pas d'autres conjugués, autre que lui-même de module  $> 1$ . ■

Contrairement à l'ensemble des nombres de Pisot, qui satisfait  $\min \mathbb{S} = 1.3247\dots$  [25], on ne sait pas s'il y a un plus petit nombre de Salem. Plus précisément on ne sait pas, si l'égalité  $\inf \mathbb{T} = 1$  a lieu ou non. Ce dernier problème avait été posé, en 1933, par D. H. Lehmer [10]. Le polynôme

minimal du plus petit nombre de Salem connu est :  $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$ , ce nombre vaut approximativement  $1,1762\dots$  [3]. La plupart des exemples de nombres de Salem sont fournis par la célèbre construction de Salem, qui dit que tout nombre de Pisot est limite d'une suite de nombres de Salem [20]. La question si l'ensemble dérivé de  $\mathbb{T}$  est réduit à  $\mathbb{S}$ , reste ouverte. Rappelons finalement une caractérisation des nombres de Pisot et des nombres de Salem parmi les nombres algébriques (dont on aura besoin dans le dernier chapitre) [19], dit pour q'un nombre algébrique réel  $\theta > 1$ , soit un nombre de Pisot ou bien un nombre de Salem, il faut et il suffit que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un réel non nul  $t$  et une suite d'entiers rationnels  $(p_k)_{k \geq 1}$  tels que  $|t\theta^k - p_k| \leq \varepsilon, \forall k \geq 0$ .

# Chapitre 2

## Ensembles harmonieux

- 
- 1- Dualité de Pontryagin.
  - 2- Modèles dans un g.t.a.l.c.
  - 3- Ensembles harmonieux.
-

Le but de ce chapitre est de définir des modèles et des ensembles harmonieux dans un contexte général, c.-à-d., dans des g. t. a. l. c., et des ensembles de Meyer dans les espaces euclidiens  $\mathbb{R}^n$ . Le présent chapitre, comme celui qui l'a précédé, se compose aussi de trois paragraphes. Dans la première partie on donne une brève description de la théorie de Pontryagin, et on énonce en particulier le théorème de la dualité de Pontryagin. Ensuite, on définit les modèles à partir des schémas coupe-et-projection, et on en déduit qu'un modèle est un ensemble de Delone. Enfin, dans le dernier paragraphe, on considère quelques propriétés des ensembles de Meyer dans les groupes  $\mathbb{R}^n$ , et on montre en particulier d'un modèle de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de Meyer.

### 2.1 Dualité de Pontryagin.

Le but de cette partie est d'énoncer les déductions d'une théorie importantes des g.t.a.l.c. : la dualité de Pontryagin. Nous commencerons par définir les caractères d'un groupe abélien localement compact, le groupe dual et la topologie "usuelle" du groupe dual qui le rend aussi un g.t.a.l. c., et ensuite on énoncera un des résultats de Pontryagin. La majeure partie des résultats de cette partie se trouve dans les livres [5, 12, 15, 23, 26, 30] et les articles [14, 16, 28, 29].

**Définition 2.1.1.** *Un caractère d'un groupe  $G$  est un homomorphisme de  $G$  dans le groupe  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .*

**Remarque.** Dans certains livres, un caractère de  $G$  est défini comme étant un homomorphisme de  $G$  dans le groupe  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . La surjection canonique  $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad x \longmapsto x + \mathbb{Z}$  est un caractère de  $\mathbb{R}$ . Rappelons que  $U(1)$  est un sous-groupe topologique du groupe topologique  $\mathbb{C}^*$ , et qu'il existe un morphisme bijectif entre les groupes  $U(1)$  et  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Notons aussi qu'un caractère n'est pas nécessairement continu.

**Définition 2.1.2.** *Soient  $\chi$  et  $\psi$  deux caractères d'un g.t.a.l.c.  $G$ , alors le caractère produit de  $\chi$  et  $\psi$ , noté  $\chi\psi$ , est défini par la relation*

$$\chi\psi(x) = \chi(x) \cdot \psi(x)$$

pour tout  $x \in G$ .

**Proposition 2.1.1.** *Muni du produit défini ci-dessus, l'ensemble des caractères de  $G$ , noté  $\hat{G}_{\text{alg}}$ , est un groupe abélien. De plus, les caractères continus de  $G$  forment un sous groupe de  $\hat{G}_{\text{alg}}$ , noté  $\hat{G}$  et appelé groupe dual de  $G$ .*

**Preuve.** Il est clair que  $\forall x, y \in G$  on a

$$\chi\psi(x+y) = \chi(x+y) \cdot \psi(x+y) = \chi(x) \cdot \chi(y) \psi(x) \cdot \psi(y) = \chi\psi(x) \chi\psi(y),$$

et par suite  $\chi\psi$  est bien un caractère de  $G$  (et la définition 2.1.2 est cohérente). Un simple calcul permet de vérifier que ce produit est commutatif, associatif, et que le caractère trivial  $I$ , qui a tout élément  $x$  de  $G$  associe 1, est l'élément neutre pour ce produit. De plus l'inverse de tout caractère  $\chi$  et le caractère qui a tout  $x$  associe le conjugué complexe de  $\chi(x)$ . Ainsi  $\hat{G}_{\text{alg}}$  est un groupe abélien.

Il est clair que l'application constante  $I$  est continue, et donc  $I \in \hat{G}$ . Comme le produit de deux applications continues de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , est continue, on voit que  $\hat{G}$  est stable pour le produit. De plus comme la conjugaison complexe est continue de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , et la composée de deux applications continues dans des espaces quelconques est continue, on déduit que l'inverse d'un caractère continue est aussi un caractère continue. Donc  $\hat{G}$  est un sous groupe de  $\hat{G}_{\text{alg}}$ . ■

**Remarque.** Il est important de signaler qu'on a utilisé la notation multiplicative pour le groupe dual malgré que c'est un groupe abélien. Si le groupe  $G$  est muni de sa topologie discrète, alors tout caractère de  $G$  est continue, et donc  $\hat{G}_{\text{alg}}$  est le groupe dual de  $G$ . En d'autres termes  $\hat{G}_{\text{alg}}$  est aussi un groupe dual. Dans ce cas on utilisera la notation  $\hat{G}_{\text{alg}} = \hat{G}_d$  et  $G = G_d$ .

**Exemple 2.1.1.** Le groupe  $\mathbb{R}^n$  est isomorphe à son groupe dual  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ . Pour prouver cela, montrons d'abord qu'un caractère continu de  $\mathbb{R}^n$  est de la forme

$$\chi_u(x) = e^{i2\pi\langle u, x \rangle},$$

où  $u = (u_1, \dots, u_n)$  est fixé dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , et  $\langle u, X \rangle = u_1x_1 + \dots + u_nx_n$ . En effet, il est clair dans ce cas que  $|\chi_u(x)| = 1$ ,  $\chi_u(x+y) = e^{i2\pi\langle u, x+y \rangle} = e^{i2\pi\langle u, x \rangle} e^{i2\pi\langle u, y \rangle} = \chi_u(x) \cdot \chi_u(y)$  et donc  $\chi_u$  est un caractère. De plus, si  $X_k = (X_{1k}, \dots, X_{nk})_{k \geq 1}$  est une suite de  $\mathbb{R}^n$  convergeant vers  $(x_1, \dots, x_n) = X$ , alors chaque composante  $X_{ik}$  converge vers la composante correspondante  $X_i$ ; donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u, X_k \rangle = \langle u, X \rangle$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{i2\pi\langle u, X_k \rangle} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{i2\pi\langle u, X \rangle}$  et  $\chi_u$  est continu. Ainsi, on peut définir une correspondance  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans son groupe dual  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ , définie par

$$f(u) = \chi_u.$$

Il est clair que si  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , alors on a,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\chi_{u+v}(x) = e^{i2\pi\langle u+v, x \rangle} = e^{i2\pi\langle u, x \rangle} \cdot e^{i2\pi\langle v, x \rangle} = \chi_u(x) \cdot \chi_v(x)$ , c.-à-d., que  $\chi_{u+v} = \chi_u \chi_v$  et

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : f(u+v) = f(u) + f(v).$$

Soit  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \ker f$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on a  $e^{i2\pi\langle u, x \rangle} = 1$ . Si l'on choisit  $x = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{2u_i}, 0, \dots, 0\right)$  lorsque  $u_i \neq 0$ , alors les relations suivantes :  $\chi_u(x) = e^{i2\pi\left(\frac{u_i}{2u_i}\right)} = e^{i\pi} = -1$ , contredisent la dernière égalité. Ainsi,  $\ker f = \{0\}$  et  $f$  est un isomorphisme de groupes, puisque  $f$  est surjective par hypothèse.

On peut munir le groupe dual  $\widehat{G}$  d'un g.t.a.l.c.  $G$  de plusieurs topologies qui le rendent aussi un g.t.a.l.c., mais la topologie la plus courante (la topologie usuelle) est celle de la convergence uniforme sur les compacts de  $G$ . Cette topologie est aussi dite topologie des ouverts-compacts (voir [13], [14]) et est définie comme suit :

**Définition 2.1.3.** *Soit  $G$  un g.t.a.l.c. et soit  $(\chi_n)_{n \geq 1}$  une suite de caractères de  $G$ . On dit que la suite  $(\chi_n)_{n \geq 1}$  converge vers le caractère  $\chi$  de  $G$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout compact  $K$  de  $G$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  dépendant de  $\varepsilon$  et de  $K$ , tels que  $|\chi_n(x) - \chi(x)| < \varepsilon$ ,  $\forall x \in K$  et  $\forall n \geq N$ .*

Un moyen rapide (équivalent à la définition 2.1.3) pour définir la topologie de  $\widehat{G}$  est comme

suit : Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout compact  $K$  de  $G$ , soit

$$N(K, \varepsilon) = \{\chi \in \widehat{G} \mid |\chi(K) - 1| < \varepsilon\},$$

c.-à-d., l'ensemble des caractères qui envoient le compact  $K$  en un intervalle ouvert centré en 1 (la notation  $|\chi(K) - 1| < \varepsilon$  veut dire  $|\chi(x) - 1| < \varepsilon, \forall x \in K$ ). Il est clair que  $I(K) = 1$  et donc  $I \in N(K, \varepsilon)$ . En fait, l'ensemble de tels  $N(K, \varepsilon)$  est une base des ouverts en  $I$ , et par suite les translatés  $\psi N(K, \varepsilon)$  par  $\psi$  des  $N(K, \varepsilon)$ , où  $\psi \in \widehat{G}$ , forment une base des ouverts en  $\psi$ .

En fait l'un des intérêts de cette topologie est qu'elle permet une correspondance entre le groupe  $G$  et le groupe dual  $\widehat{\widehat{G}}$  de son groupe dual  $\widehat{G}$ , de la manière suivante :

Pour tout  $g \in G$  fixé, on définit un caractère de son groupe dual, qui a tout élément  $\chi \in \widehat{G}$  fait associer  $\chi(g)$ . En d'autres termes on a défini une application de  $\widehat{G} \rightarrow U(1)$ , telle que  $\chi \mapsto \chi(g)$ . Il est clair que cette application est un caractère de  $\widehat{G}$ , puisque  $\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g)$ , et de plus si le groupe  $\widehat{G}$  est muni de la topologie usuelle, ce caractère est continue (pour plus de détails sur ce sujet voir [14]). Ainsi on a défini une application

$$D : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}, \quad g \mapsto \widehat{g}$$

où  $\widehat{\widehat{g}}(\chi) = \chi(g)$ . Il est facile de vérifier que  $D$  est un homomorphisme injectif. En fait par la théorie de dualité de Pontryagin, cette application est continue et bijective :

**Proposition 2.1.2. (Pontryagin)** *Avec la notation ci-dessus on a les propriétés suivantes.*

(i) *Les groupes topologiques  $G$  et  $\widehat{\widehat{G}}$  sont isomorphes.*

(ii)  *$G$  est discret si et seulement si  $\widehat{G}$  est compact.*

(iii) *Soient  $G$  et  $G_1$  sont deux g.t.a.l.c. et  $f$  est un homomorphisme continu de  $G$  dans  $G_1$ .*

*Alors, l'application  $\widehat{f} : \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}$ , définie par  $\widehat{f}(\chi)(x) = \chi(f(x)), \forall x \in G_1$ , est un homomorphisme continu. De plus, on a les relations suivantes :*

1)-  *$f(G)$  est dense dans  $G_1 \Leftrightarrow \widehat{f}$  est injective,*

2)-  *$\widehat{f}(\widehat{G}_1)$  est dense dans  $\widehat{G} \Leftrightarrow f$  est injective,*

3)- *si on identifie les groupes isomorphes  $G$  et  $\widehat{\widehat{G}}$ , et  $G_1$  et  $\widehat{\widehat{G}}_1$  alors  $f = \widehat{f}$ .*

La preuve de cette proposition sort de notre contexte. Le lecteur intéressé est dirigé vers les références [5,16].

**Corollaire 2.1.1.** *Avec la notation ci-dessus on a l'équivalence :  $G$  est compact  $\Leftrightarrow \widehat{G}$  est discret.*

**Preuve.** Du (ii), on voit que  $\widehat{G}$  est discret si et seulement si  $\widehat{\widehat{G}}$  est compact, et comme  $G$  et  $\widehat{\widehat{G}}$  sont isomorphes, on déduit le résultat voulu. ■

Une autre conséquence importante de ce résultat de Pontryagin est la compactification de Bohr d'un g.t.a.l.c.  $G$  : Comme on l'a déjà signalé, si l'on note  $G_d$  le groupe  $G$  muni de sa topologie discrète, alors l'identité  $i : G_d \rightarrow G, x \mapsto x$ , est un homomorphisme continu et injectif.

**Corollaire 2.1.2.** *Le groupe  $\widehat{G}_{\text{alg}}$  est compact, et  $\widehat{G}$  est un sous groupe dense de  $\widehat{G}_{\text{alg}}$ .*

**Preuve.** Avec la notation ci-dessus, il s'ensuit de la Proposition 2.1.2 (ii) et (iii) respectivement, que  $\widehat{G}_{\text{alg}}$  est compact, et que  $\widehat{i} = i : \widehat{G} \rightarrow \widehat{G_d} = \widehat{G}_{\text{alg}}$ , et  $\widehat{G}$  est dense dans  $\widehat{G}_{\text{alg}}$ . ■

**Exemple 2.1.2.** On a déjà vu que l'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$ , définie dans l'exemple 2.1.1, est un isomorphisme de groupes. En fait, si le groupe dual  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  est muni de sa topologie usuelle, cette application est continue et ouverte, c.-à-d., que  $f^{-1}$  est aussi continue. En conclusion, dans ce cas particulier l'isomorphisme de groupes topologiques entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\widehat{\widehat{\mathbb{R}^n}}$  (obtenu aussi par la proposition 2.1.2) est aussi ouvert.

## 2.2 Modèles dans un g.t.a.l.c.

Pour définir un modèle dans un g. t. a. l. c. on va d'abord introduire la notion de schéma coupe-et-projection ainsi quelques unes de ses propriétés. Pour plus de détails sur ce sujet le lecteur intéressé est dirigé au livre de Meyer [15] ainsi qu'aux articles [16] et [29].

**Définition 2.2.1.** *Un schéma coupe-et-projection, est un triplet  $(G_1, G_2, D)$ , où  $G_1, G_2$  sont deux g. t. a. l. c., et  $D$  est un réseau de  $G_1 \times G_2$  tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

- (i) *La restriction à  $D$  de la première projection  $p_1 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1$   
 $(y_1, y_2) \mapsto y_1$  est injective.*
- (ii) *L'image de  $D$  par la deuxième projection  $p_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$   
 $(y_1, y_2) \mapsto y_2$  est dense dans  $G_2$ .*

**Remarque.** La condition (i) de la définition 1 est équivalente à l'égalité suivante :

$$D \cap (\{0\} \times G_2) = \{(0, 0)\}. \quad (2.1)$$

En effet, supposons la condition (i) satisfaite et soit  $(g_1, g_2) \in D \cap (\{0\} \times G_2)$ . Alors  $g_1 = 0$ , et comme  $(0, 0) \in D \cap (\{0\} \times G_2) \Rightarrow p_1(g_1, g_2) = p_1(0, 0) \Rightarrow (g_1, g_2) = (0, 0)$ . Inversement supposons (2.1) vérifiée, alors si  $(g_1, g_2), (g'_1, g'_2)$  sont deux éléments de  $D$  tel que  $p_1(g_1, g_2) = p_1(g'_1, g'_2)$  alors  $g_1 = g'_1 \Rightarrow g_1 - g'_1 = 0$  donc  $(g_1 - g'_1, g_2 - g'_2) \in D \cap (\{0\} \times G_2) \Rightarrow g_2 - g'_2 = 0 \Rightarrow g_2 = g'_2$  et par suite  $p_1$  est injective.

**Exemple 2.2.1.**  $(\mathbb{R}, \{0\}, \mathbb{Z} \times \{0\})$  est un schéma coupe et projection.

En effet, il est clair que  $\mathbb{R}$  et  $\{0\}$  sont des deux groupes topologiques abéliens localement compacts et que  $D = \mathbb{Z} \times \{0\}$  est un sous groupe de  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Comme  $[0, 1] \times \{0\}$  est un compact (c'est un produit des compacts) et  $\mathbb{Z} \times \{0\} + ([0, 1] \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$ , on voit que  $D$  est relativement dense. Le produit de deux espaces discrets étant discret, on déduit que le groupe  $\mathbb{Z} \times \{0\}$  est discret et par suite d'après la proposition 1.1.3, le groupe  $\mathbb{Z} \times \{0\}$  est uniformément discret. Ainsi  $D$  est un réseau et  $(\mathbb{R}, \{0\}, \mathbb{Z} \times \{0\})$  est un schéma coupe-et-projection, car  $\mathbb{Z} \times \{0\} \cap \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\}$  et  $p_2(\mathbb{Z} \times \{0\}) = \{0\}$  est dense dans  $\{0\}$ .

On verra plus loin d'autres schémas coupe-et-projection, en lien avec des corps de nombres.

**Définition 2.2.2.** Soit  $M$  une partie non vide d'un groupe topologique  $G_1$ . Alors on dit que  $M$  est un modèle de  $G_1$ , s'il existe un schéma coupe-et-projection  $(G_1, G_2, D)$  et une partie  $\Omega$

de  $G_2$  qui soit relativement compact, c.-à-d., dont l'adhérence  $\overline{\Omega}$  est un compact de  $G_2$ , et dont l'intérieur  $\overset{\circ}{\Omega}$  est non vide, telle que :

$$M = \{p_1(d) \mid d \in D \text{ et } p_2(d) \in \Omega\}.$$

Dans ce cas l'ensemble  $\Omega$  s'appelle fenêtre du modèle  $M$ .

**Exemple 2.2.2.** Si l'on considère le schéma coupe-et-projection défini dans l'exemple précédent, on obtient que  $\mathbb{Z}$  est un modèle. En effet, on a  $p_1(d, 0) = d, \forall d \in \mathbb{Z}, p_2(\mathbb{Z} \times \{0\}) = \{0\}$  et si on pose  $\Omega = \{0\}$  alors  $\overline{\Omega} = \{0\}$  est un compact,  $\overset{\circ}{\Omega} = \{0\}$  et

$$M = \{p_1(d) \mid d \in \mathbb{Z} \times \{0\} \text{ et } p_2(d) = 0\} = \{d \mid d \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Il est parfois utile d'exprimer les définitions précédentes par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xleftarrow{P_1} & G_1 \times G_2 & \xrightarrow{P_2} & G_2 \\ & & \underbrace{D_1 \xleftarrow{p_1=P_1|_D} D \xrightarrow{p_2} D_2}_{p=p_2 \circ p_1^{-1}} & & \\ \cup & & & & \cup \\ M & & & & \Omega \end{array}$$

On peut aussi définir l'ensemble  $M$  comme suit :

$$M = \{y \in D_1 \mid p(y) \in \Omega\},$$

où  $p_2 \circ p_1^{-1} = p$  et  $D_1 = p_1(D)$ . En effet, si l'on pose  $p_1(d) = y$ , alors  $d = p_1^{-1}(y)$  et  $p_2(d) \in \Omega$  (car  $y \in M \implies p_2(p_1^{-1}(y)) \in \Omega$  donc  $p(y) \in \Omega$ )

La proposition suivante est une propriété des schémas coupe-et-projection qui nous sera utile par la suite.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $(G_1, G_2, D)$  un schéma coupe-et-projection, et soit  $U$  un ouvert non vide de  $G_2$ . Alors il existe un compact  $K$  de  $G_1$  tel que  $G_1 \times G_2 = D + (K \times U)$ .*

**Preuve.** Comme  $D$  est relativement dense, il existe un compact  $C$  de  $G_1 \times G_2$  tel que  $G_1 \times G_2 = D + C$ . Si  $P_1(C) = K_1$  et  $P_2(C) = K_2$ , alors  $K_1$  est un compact de  $G_1$ ,  $K_2$  est un compact de  $G_2$  et  $C \subset K_1 \times K_2$ . Ainsi  $G_1 \times G_2 \subset D + C \subset D + K_1 \times K_2$  et

$$G_1 \times G_2 = D + (K_1 \times K_2). \quad (2.2)$$

Notons qu'il existe un ouvert  $\theta$  de  $G_2$  tel que  $G_2 = D_2 + \theta$ , où  $p_2(D) = D_2$  est dense dans  $G_2$ . En effet, soit  $\theta$  un ouvert quelconque de  $G_2$  contenant 0 et soit  $g \in G_2$ . Si  $g \in D_2$  alors  $g = g + 0 \in D_2 + 0 \subset D_2 + \theta$ . Si  $g \notin D_2$ , on considère l'ouvert  $g - \theta$ , et qui contient  $g$ , puisque  $0 \in \theta$ . L'ensemble  $g - \theta = T_g(-\theta)$  est le translaté par  $g$  de l'ensemble  $-\theta$  et ce dernier est un ouvert car c'est l'image de  $\theta$  par l'application  $\iota$  de la définition 1.1.1. Comme  $D_2$  est dense dans  $G_2$ , alors  $(g - \theta) \cap D_2 \neq \emptyset$  et  $\exists d \in D_2$  et  $\exists \alpha \in \theta$  tel que  $g - \alpha = d$ . Ainsi  $g = d + \alpha \in D + \theta$ , d'où

$$G_2 = D_2 + \theta. \quad (2.3)$$

Soit maintenant  $U$  ouvert non vide de  $G_2$  et soit  $u_0 \in U$ . Alors  $-u_0 + U = T_{-u_0}(U)$  est un ouvert contenant 0. Il s'ensuit de (2.3) que  $G_2 = D_2 + (-u_0 + U)$ , c.-à-d.,  $\forall g \in G_2, \exists d \in D_2$  et  $\exists u \in U$  tel que  $g + u_0 = d + u$ . Comme l'application  $T_{u_0}$  est une bijection de  $G_2$  dans  $G_2$ , on déduit que  $G_2 = D_2 + U$ . Les égalités (2.2) et (2.3), impliquent  $K_2 \subset G_2 = \bigcup_{d_2 \in D_2} (d_2 + U)$ , et comme  $d_2 + U$  est un ouvert, et  $K_2$  est un compact, on peut extraire du recouvrement  $\bigcup_{d_2 \in D_2} (d_2 + U)$  un recouvrement fini :  $K_2 = \bigcup_{d_2 \in F_2} (d_2 + U)$ , où  $F_2$  est une partie finie de  $D_2$ . Si pour tout  $d_2 \in F_2$  on choisit  $d \in D$  tel que  $d_2 = P_2(d)$ , et  $F$  est l'ensemble de tels éléments, alors

$$K_2 \subset \bigcup_{d \in F} (p_2(d) + U). \quad (2.4)$$

Soit

$$K = \bigcup_{d \in F} (K_1 - p_1(d)).$$

Alors  $K$  compact car c'est une réunion finie des compacts de la forme  $K_1 - p_1(d)$ , et  $K_1 - p_1(d)$

est un compact car c'est le translaté par  $-p_1(d)$  du compact  $K_1$ , et il suffit donc de prouver l'inclusion  $G_1 \times G_2 \subset D + (K \times U)$ , puisque l'inclusion inverse est évidente. Soit  $x \in G_1 \times G_2$ . D'après la relation (2.2),  $\exists d' \in D$  tel que  $x - d' \in K_1 \times K_2$  et par suite  $p_1(x - d') \in K_1$  et  $p_2(x - d') \in K_2$ . Il s'ensuit de (2.4) :  $\exists d \in F, \exists u \in U$  tels que  $p_2(x - d') = p_2(d) + u$  et

$$p_2(x - d' - d) = u \in U. \quad (2.5)$$

D'autre part comme  $p_1(x - d') \in K_1$ , alors

$$p_1(x - d' - d) = p_1(x - d') - p_1(d) \in K, \quad (2.6)$$

et des relations (2.5) et (2.6) on déduit que  $x - (d' + d) \in K \times U$  et  $x \in D + (K \times U)$ , puisque  $(d' + d) \in D$ . Ainsi  $G_1 \times G_2 = D + (K \times U)$ . ■

**Proposition 2.2.2.** *Un modèle est un ensemble de Delone.*

**Preuve.** Avec la notation de la définition 2.1.2, soit  $(G_1, G_2, D)$  le schéma coupe-et-projection associé au modèle  $M$ . Pour montrer que  $M$  est uniformément discret, on se restreindra, au cas qui nous interesse par la suite, c'est-à-dire, lorsque  $G_1 = \mathbb{R}^k$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$ . De manière identique on montre le résultat dans cas général (pour d'autres généralisations de ce résultat voir [10]). Soit donc  $M$  un modèle de  $\mathbb{R}^k$ . On va montrer qu'il existe  $r_0 > 0$  tel que  $B(0, r_0) \cap (M - M) = \{0\}$ , c'est-à-dire,

$$\forall x, y \in M, \|x - y\| < r_0 \Rightarrow x = y. \quad (2.7)$$

Si  $x$  et  $y \in M$ , alors  $x, y \in D_1 = p_1(D)$  et donc

$$x - y \in D_1, \quad (2.8)$$

car  $D_1$  est un sous groupe de  $\mathbb{R}^k$ . Comme  $p$  est un homomorphisme de groupes surjectif, on a  $p(x - y) = p(x) - p(y)$ , et alors  $p(x - y) \in \Omega - \Omega \subset \bar{\Omega} - \bar{\Omega}$ , car  $p(x)$  et  $p(y) \in \Omega$ . Posons  $C = \bar{\Omega} - \bar{\Omega}$ . Alors,  $C$  est un compact de  $G_2$ , puisqu'il est image par l'application continue  $\rho : G_2 \times G_2 \rightarrow G_2 \quad (x, y) \mapsto x - y$ , du compact  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  (le produit de compacts est un compact).

D'autre part  $(x - y, p(x - y)) \in D$ , car  $p_1(x - y, p(x - y)) = x - y \in D_1$  d'après (2.8) et

$$p_2(x - y, p(x - y)) = p(x - y) \in \Omega - \Omega \subset D_2$$

donc  $x - y \in D$ . Posons maintenant  $K_r = \overline{B(0, r)} \times C$ . Alors  $K_r$  est un compact de  $G_1 \times G_2$ , et si  $\exists r > 0, (x, y) \in B(0, r)$  alors

$$(x - y, p(x - y)) \in D \cap K_r.$$

Pour prouver (2.7) il suffit de montrer qu'il existe  $r_0 > 0$  tel que  $D \cap K_{r_0} = \{(0, 0)\}$ . En effet si  $x, y \in M$  et  $\|x - y\| < r_0$ , alors  $(x - y, p(x - y)) \in D \cap K_{r_0} = \{(0, 0)\}$

$$\implies x - y = 0$$

$$\implies x = y$$

$$\implies B(0, r_0) \cap (M - M) = \{0\}.$$

Supposons au contraire que  $\forall r > 0, D \cap K_r \neq \{0\}$ . Alors, pour  $r = r_1 = 1, \exists (\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0) \in D \cap K_1$  tel que  $K_1 = \overline{B(0, 1)} \times C$ . Notons que  $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0) \implies \alpha_1 \neq 0$  (si  $\alpha_1 = 0$  alors  $\beta_1 = 0$  car  $p$  surjectif). Ainsi,  $\|\alpha_1\| > 0$  et on choisit ensuite  $r = r_2 = \frac{\|\alpha_1\|}{2}$ . Par hypothèse,  $\exists (\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0) \in D \cap K_{r_2}$ , et de la même manière on obtient  $\alpha_2 \neq 0, \alpha_2 \in \overline{B(0, r_2)} \implies \|\alpha_2\| \leq r_2 = \|\alpha_1\|/2 \implies \|\alpha_2\| < \|\alpha_1\| \implies (\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$ . Ensuite on choisit  $r = r_3 = \|\alpha_2\|/2$ , d'où  $\exists (\alpha_3, \beta_3) \neq (0, 0) \in D \cap K_{r_3}$ , avec

$$\alpha_3 \neq 0, \alpha_3 \in \overline{B(0, r_3)} \implies \|\alpha_3\| \leq r_3 = \|\alpha_2\|/2 < \|\alpha_2\|;$$

donc on a

$$0 < \|\alpha_3\| < \|\alpha_2\| < \|\alpha_1\|.$$

Par induction on obtient une suite d'éléments distincts  $(\alpha_n, \beta_n) \in D \cap K_r \subset K_1$ . Comme  $K_1$  est fermé ( $K_1$  est un compact dans l'espace séparé  $G_1 \times G_2$ ), on peut extraire de la suite  $(\alpha_n, \beta_n)$ , une sous suite, notée de même façon, qui converge vers  $(\alpha, \beta) \in K_1$ . D'autre part,  $(\alpha, \beta) \in D$ , car  $D$  est fermé d'après la proposition 1.1.3, et donc  $(\alpha, \beta) \in D \cap K_1$ . Il s'ensuit que  $\forall v \in V(\alpha, \beta), \exists N \mid \forall n \geq N, (\alpha_n, \beta_n) \in v$ , où  $V(\alpha, \beta)$  est l'ensemble des voisinages de  $(\alpha, \beta)$ , et  $v = (\alpha, \beta) + u$

où  $u \in V(0,0) \implies (\alpha_n - \alpha, \beta_n - \beta) \in u$ . D'autre part  $(\alpha_n, \beta_n) \in D$  et  $(\alpha, \beta) \in D \implies (\alpha_n - \alpha, \beta_n - \beta) \in D$  et par suite  $\forall u \in V(0,0), \exists N \mid \forall n \geq N : (\alpha_n - \alpha, \beta_n - \beta) \in D \cap u$ . Mais, comme  $D$  est uniformément discret on a  $D \cap u = \{0\}$  et cela conduit à une contradiction ; donc  $M$  est uniformément discret.

Pour compléter la preuve, il reste à montrer que  $M$  est relativement dense. Pour cela posons  $u = -\overset{\circ}{\Omega}$ , où  $\overset{\circ}{\Omega}$  désigne l'intérieur de la fenêtre  $\Omega$  associée au modèle  $M$ . Comme  $u$  est un ouvert non vide de  $G_2$ , alors d'après la proposition 2.1.1,  $\exists K$  compact de  $G_1$  tel que  $G_1 \times G_2 = D + (K \times u)$ . Soit  $x \in G_1$ . Alors  $(x, 0) \in G_1 \times G_2 \implies \exists w \in \overset{\circ}{\Omega}, \exists k \in K$  et  $\exists d \in D$  tels que  $(x, 0) = d + (k, -w) \implies x = p_1(d) + k$  et  $0 = p_2(d) - w$ . Comme  $p_1(d) \in M, \exists m \in M$  tel que  $p_1(d) = m \implies x = m + k \in M + K \implies G_1 \subset M + K$ , c.-à-d., que  $M$  est relativement dense et ainsi  $M$  est un ensemble de Delone. ■

## 2.3 Ensembles harmonieux.

Soit  $G$  un g.t.a.l.c. et soit  $\langle \Lambda \rangle$  le sous groupe de  $G$ , engendré par la partie non vide  $\Lambda$  de  $G$ . Tout caractère  $\chi$  de  $\langle \Lambda \rangle$ , est dit caractère de  $\Lambda$ .

**Définition 2.3.1.** Une partie  $\Lambda$  d'un g.t.a.l.c.  $G$ , est dite harmonieuse, si pour tout caractère  $\chi$  de  $\Lambda$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un caractère continu  $\chi_0$  de  $\Lambda$  tel que

$$|\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon,$$

pour tout  $x \in \Lambda$ .

Il est bien évident que la restriction, à  $\langle \Lambda \rangle$ , de tout caractère de  $G$  est un caractère de  $\Lambda$ . La réciproque de ce résultat est aussi vraie d'après un résultat de Rudin (voir [5]), c.-à-d., que tout caractère d'un sous groupe  $H$  de  $G$  est la restriction d'un caractère de  $G$ . Il s'ensuit qu'une

partie  $\Lambda$  de  $G$  est harmonieuse, si pour tout caractère  $\chi$  de  $G$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un caractère continu  $\chi_0$  de  $G$  tel que  $|\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon$ , pour tout  $x \in \Lambda$ .

On déduit immédiatement que si  $\Lambda$  est harmonieuse, il en est de même pour  $-\Lambda$ ,  $\Lambda \pm \Lambda$ , et toute sous partie de  $\Lambda$ .

**Exemple 2.3.1.** Toute partie finie  $\Lambda$  d'un g.t.a.l.c  $G$  est harmonieuse. En effet, d'après le corollaire 2.1.2, on sait que  $\widehat{G}$  est dense de  $\widehat{G}_{\text{alg}}$ , et comme les compacts de  $G_d$  sont les ensembles finis, on déduit alors que  $\forall \chi \in \widehat{G}_{\text{alg}}, \forall \varepsilon > 0, \forall K$  compact (=fini) de  $G = G_d, \exists \chi_0 \in \widehat{G}$ , tel que

$$|\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon,$$

pour tout  $x \in K$ .

Notons aussi qu'on a déjà vu, dans l'exemple 2.1.1, que les caractères continus de  $\mathbb{R}^n$ , sont de la forme  $\chi_u(x) = e^{i2\pi\langle u, x \rangle}$ , où  $u \in \mathbb{R}^n$ . La définition suivante est donc une précision de la définition 2.3.1.

**Définition 2.3.2.** Une partie  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$ , est dite harmonieuse, si pour tout caractère  $\chi$  de  $\Lambda$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in \mathbb{R}^n$ , tel que

$$|\chi(x) - e^{i2\pi\langle u, x \rangle}| < \varepsilon,$$

pour tout  $x \in \Lambda$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , et  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , on note

$$V^\varepsilon(\Lambda) = \{\chi \in \widehat{\mathbb{R}^n}_{\text{alg}} \mid |\chi(x) - 1| < \varepsilon, \forall x \in \Lambda\}.$$

Alors, de l'exemple 2.3.1 on déduit l'équivalence :  $\Lambda$  est harmonieuse  $\Leftrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}_{\text{alg}} = \widehat{\mathbb{R}^n}.V^\varepsilon(\Lambda)$ .

Le résultat suivant est dû à Y. Meyer [14] :

**Proposition 2.3.1.** *Tout modèle de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble harmonieux.*

Pour prouver cette proposition on va utiliser un résultat de Rudin (pour plus des détails voir [16]). Pour cela, rappelons que si  $H$  est un sous groupe fermé d'un g.t.a.l.c.  $G$ , alors le groupe quotient  $G/H$  muni de la topologie quotient est aussi un g.t.a.l.c., et tout élément du sous groupe

$$Z = Z(H) := \left\{ \chi \in \widehat{G} / \langle \chi, x \rangle = 1 \text{ pour tout } x \in H \right\},$$

de  $\widehat{G}$ , dit l'annulateur de  $H$ , détermine un élément de  $\widehat{G/H}$ . De plus tout élément de  $\widehat{G/H}$  est défini de cette manière, et l'application restriction  $\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ ,  $\chi \mapsto \chi_H$  qui à l'élément  $\chi \in \widehat{G}$  associe sa restriction à  $\widehat{H}$  est un homomorphisme continu dont le noyau est  $Z$ . La proposition suivante résume quelques faits importants sur ce sujet :

**Proposition 2.3.2.** (Rudin [5]) *Soit  $Z$  l'annulateur d'un sous groupe fermé  $H$  d'un g.t.a.l.c.  $G$ , alors on a les propriétés suivantes :*

- (i)  $Z$  est un groupe topologique isomorphe au groupe  $\widehat{G/H}$ .
- (ii)  $H$  est l'annulateur de  $Z$  dans  $G$ .
- (iii) Les groupes topologiques  $\widehat{H}$  et  $\widehat{G/Z}$  sont isomorphes.
- (iv) Tout caractère  $\chi \in \widehat{H}$  peut être prolongé en un caractère de  $\widehat{G}$ .

**Preuve.** Le premier point est évident, alors que le (ii) est une conséquence du fait que  $Z$  sépare les éléments de  $G/H$ . En échangeant les rôles de  $H$  et  $Z$ , et en appliquant le (i) on obtient le (iii), d'après la dualité de Pontryagin. La dernière assertion est une conséquence immédiate du (iii). ■

**Preuve de la proposition 2.3.1.** Soit  $M = M(\Omega)$  un modèle de  $\mathbb{R}^n$ , ayant pour fenêtre  $\Omega$ . En considérant l'application inclusion  $\langle M \rangle \rightarrow D$ , on obtient de la proposition 2.3.2 (iv) que

$\chi_D$  et  $\chi_C$  sont continues, rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times H & \xrightarrow{\chi_C} & U(1) \\ \uparrow D & \xrightarrow{\chi_D} & U''(1) \\ \langle M \rangle & \xrightarrow{\chi_0} & U''(1) \end{array}$$

Si on dualise le schéma coupe-et-projection on obtient un autre de la forme  $(\widehat{\mathbb{R}^k \times H}, Z)$ . Choisissons maintenant  $\varepsilon > 0$  et considérons le voisinage ouvert

$$N = N(\overline{\Omega}, \varepsilon) = \left\{ \Psi \in \widehat{H} \mid |\Psi(x) - 1| < \varepsilon, \forall x \in \overline{\Omega} \right\}.$$

D'après la proposition 2.2.1 on a l'égalité

$$\widehat{\mathbb{R}^k \times H} = Z + (\widehat{\mathbb{R}^k \times N}),$$

et donc on peut écrire :  $\chi_c = \chi_z + (\chi, x_N)$ . Il s'ensuit que pour tout  $x \in M \subset \langle M \rangle$  on ait

$$\chi_0(x) = \chi_D(x, x^*) = \chi_c(x, x^*) = \chi_z(x, x^*) \cdot \chi(x) \cdot \chi_N(x^*) = \chi(x) \cdot \chi_N(x^*),$$

puisque  $\chi_z \in Z$ . Enfin, comme  $x^* \in \Omega \subset \overline{\Omega}$ , on a

$$|\chi(x) - \chi_0(x)| = |\chi(x) - \chi(x) \chi_N(x^*)| = |\chi(x)| |1 - \chi_N(x^*)| = |1 - \chi_N(x^*)| < \varepsilon,$$

et par suite le modèle  $M$  est harmonieux. ■

Dans l'étude qui suit des ensembles de Meyer, on se restreindra, aux sous-parties de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.3.3.** Une partie  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite ensemble de Meyer si elle est à la fois de Delone et harmonieuse.

**Exemple 2.3.2.** Un modèle de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de Meyer. En effet, d'après les propositions 2.2.2 et 2.3.1, on déduit que tout modèle est un ensemble de Delone harmonieux, d'où le résultat.

**Proposition 2.3.3.** *Une partie relativement dense d'un ensemble de Meyer est un ensemble de Meyer.*

**Preuve.** Soient  $\Lambda'$  partie relativement dense d'un ensemble de Meyer  $\Lambda$ . Comme  $\Lambda$  est harmonieuse et uniformément discrète, il en est de même pour ses sous parties. De plus, si  $K$  et  $K'$  sont deux compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\Lambda + K = \mathbb{R}^n$ , et  $\Lambda' + K' = \Lambda$  alors  $\Lambda' + (K' + K) = \mathbb{R}^n$ , et  $K' + K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , puisque l'application  $+$  est continue de  $G \times G$  dans  $G$  (d'après la définition 1.1.1) et l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi,  $\Lambda'$  est un ensemble de Delone, et est donc de Meyer. ■

**Corollaire 2.3.1.** *Une partie relativement dense d'un modèle de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de Meyer.*

**Preuve.** De l'exemple et de la proposition ci-dessus on déduit le résultat. ■

# Chapitre 3

## Application à des problèmes diophantiens

- 
- 1- Des modèles réels.
  - 2- Une généralisation du théorème de Kronecker.
  - 3- Caractérisation de certaines classes d'entiers algébriques.
-

On va appliquer dans ce chapitre des résultats précédemment montrés, pour obtenir des caractérisations des nombres de Pisot et des nombres de Salem. A cette fin, on montre d'abord, dans le premier paragraphe, quelques théorèmes d'Yves Meyer, permettant la construction de modèles réels, et cela est en liaison étroite avec l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Ensuite on cite une généralisation du théorème d'approximation de Kronecker à un nombre infini d'inégalités. C'est d'ailleurs le point de départ de la définition originale des ensembles harmonieux réels. Enfin on déduit, dans le dernier paragraphe, plusieurs résultats permettant de distinguer les nombres de Pisot et des nombres de Salem parmi les nombres réels plus grand que 1.

### 3.1 Des modèles réels.

Les théorèmes qui suivent sont dûs à Y. Meyer [13, 14, 15, 22]. On convient que  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ , puisque  $\{0\}$  est un g.t.a.l.c., et on identifie les espaces  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$  et  $\mathbb{R}^m$ .

**Théorème 3.1.1.** *Soient  $l_1, l_2, \dots, l_m$  des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^m$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $\Omega$  un ouvert non vide et borné de  $\mathbb{R}^{m-1}$ .*

*Supposons les trois conditions suivantes satisfaites.*

(i) *Les applications  $l_1, l_2, \dots, l_m$  sont linéairement indépendantes.*

(ii) *Les coefficients de la forme linéaire  $l_1$  sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants.*

(iii) *Dans l'espace vectoriel réel engendré par les applications  $l_2, \dots, l_m$ , il n'y a pas de forme linéaire non nulle à coefficients entiers.*

*Alors, l'ensemble des nombres réels  $l_1(p)$ , pour tout  $p \in \mathbb{Z}^m$  tels que  $(l_2(p), \dots, l_m(p)) \in \Omega$  est un modèle réel, c.-à-d., contenu dans  $\mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Notons d'abord et si l'on note les formes linéaires ci-dessus sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 l_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \dots + \alpha_{m1}x_m \\
 &: \\
 &: \\
 l_n(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_m
 \end{aligned}$$

où  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  et les  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ , alors la condition (i) se traduit par le fait que la partie  $\{(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}), \dots, (\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{mm})\} \subset \mathbb{R}^m$  est libre. En effet, s'il existe  $(r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$  tel que  $(r_1, \dots, r_m) \neq (0, \dots, 0)$  et  $r_1(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}) + \dots + r_m(\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{mm}) = (0, \dots, 0)$  alors on obtient  $r_1\alpha_{i1} + \dots + r_m\alpha_{im} = 0$  pour tout  $i = \overline{1 \dots m}$ , et par suite  $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  on a  $\sum_{i=1}^m (r_1\alpha_{i1} + \dots + r_m\alpha_{im})x_i = 0$ , c.-à-d.,  $r_1l_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + r_ml_m(x_1, \dots, x_m) = 0$ ; donc  $r_1l_1 + \dots + r_ml_m = 0$  et  $\{l_1, \dots, l_m\}$  est liée. Réciproquement, s'il existe  $(r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$  tel que  $(r_1, \dots, r_m) \neq (0, \dots, 0)$  et  $r_1l_1 + \dots + r_ml_m = 0$  alors  $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  on a  $(r_1\alpha_{11} + \dots + r_m\alpha_{1m})x_1 + \dots + (r_1\alpha_{m1} + \dots + r_m\alpha_{mm})x_m = 0$ . En affectant à  $(x_1, \dots, x_m)$  tous les éléments de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$  on obtient par les mêmes calculs que la famille  $\{(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}), \dots, (\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{mm})\}$  est liée.

Signalons aussi, comme  $\Omega$  est un ouvert non vide borné que  $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega \neq \phi$ ,  $\Omega$  est contenu dans une boule fermée  $\overline{B(0, r)}$  et par suite  $\overline{\Omega} \subset \overline{B(0, r)}$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^{m-1}$ ; donc  $\Omega$  est relativement compact.

Pour prouver que triplet  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m-1}, D = \lambda(\mathbb{Z}^m))$  est un schéma coupe-et-projection, où l'application  $\lambda$  est définie par la relation

$$\lambda(x) = (l_1(x), \dots, l_m(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

montrons d'abord que  $D = \lambda(\mathbb{Z}^m)$  est un réseau de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ . De sa définition, l'application  $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$ , et est donc continue. Il est clair que  $D$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}^m$  puisque c'est l'image du sous-groupe  $\mathbb{Z}^m$  de  $\mathbb{R}^m$  par l'homomorphisme de groupes  $\lambda$ . De plus, si  $(x_1, \dots, x_m) \in \ker \lambda \implies \lambda(x_1, \dots, x_m) = 0 \implies l_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = l_m(x_1, \dots, x_m) = 0 \implies$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \alpha_{1m} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

et de ce qui a précédé on voit que  $(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)$ . Ainsi, l'endomorphisme  $\lambda$  est injectif et

par suite c'est un automorphisme de  $\mathbb{R}^m$ . Il s'ensuit immédiatement que  $D = \lambda(\mathbb{Z}^m)$  est un réseau de  $\mathbb{R}^m$ . En effet, d'une part d'après l'exemple 1.1.8, il existe un compact  $K$  tel que  $\mathbb{Z}^m + K = \mathbb{R}^m$ , et donc

$$D + \lambda(K) = \lambda(\mathbb{Z}^m) + \lambda(K) = \lambda(\mathbb{Z}^m + K) = \lambda(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m,$$

c.-à-d.,  $D$  est relativement dense puisque l'image du compact  $K$  par l'application continue  $\lambda$  est un compact. D'autre part, si  $d \in D$  alors  $\exists k \in \mathbb{Z}^m$  unique tel que  $d = \lambda(k)$ ; donc  $\{d\} = \lambda(\{k\}) = (\lambda^{-1})^{-1}(\{k\})$  est un ouvert de  $D$ , puisque  $\{k\}$  est un ouvert de  $\mathbb{Z}^m$  ( $\mathbb{Z}^m$  est discret d'après l'exemple 1.1.10 et la proposition 1.1.3) et la bijection  $\lambda^{-1}$  de  $\mathbb{R}^m$  est continue car elle est aussi application linéaire. Ainsi  $D$  est discret et d'après la proposition 1.1.3, le groupe  $D$  est uniformément discret. Donc  $D$  est un réseau.

Montrons maintenant que la restriction  $p_1|_D$  de l'homomorphisme de groupes  $p_1$  à  $D$  est injectif. Soit  $(l_1(k), \dots, l_m(k)) \in \ker(p_1|_D)$ , où  $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ . Alors  $p_1(l_1(k), \dots, l_m(k)) = l_1(k) = 0 \implies \sum_{i=1}^m \alpha_{i1} k_i = 0$  et donc  $(k_1, \dots, k_m) = (0, \dots, 0)$  puisque d'après la condition (ii) les coefficients de  $l_1$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$ . Ainsi  $k = 0$ ,  $(l_1(k), \dots, l_m(k)) = (0, \dots, 0)$  et  $p_1|_D$  est injective.

Pour finir la preuve il reste à vérifier que le groupe

$$E = p_2(D) = \{ (l_2(k), \dots, l_m(k)) \mid k \in \mathbb{Z}^m \}$$

est dense dans  $\mathbb{R}^{m-1}$ . Si l'on identifie le groupe  $\mathbb{R}^{m-1}$  et le dual de son dual, dans la dualité de Pontryagin  $(x, y) \mapsto e^{i2\pi\langle x, y \rangle}$ , alors l'orthogonal de  $E$  est l'ensemble

$$E^\perp = \{ (y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid y_2 l_2(k) + \dots + y_m l_m(k) \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}^m \}.$$

La forme linéaire sur  $\mathbb{R}^m$ ,  $y_2 l_2 + \dots + y_m l_m$ , doit donc être à valeurs entières sur  $\mathbb{Z}^m$ , et donc d'après la condition (iii) on a  $y_2 = \dots = y_m = 0$ . Ainsi,  $E^\perp = \{ (0, \dots, 0) \}$ ,  $\overline{E^\perp} = \{ (0, \dots, 0) \}$ ,  $\overline{E} = \mathbb{R}^{m-1}$  et  $E$  est dense dans  $\mathbb{R}^{m-1}$  (si  $H$  est un sous groupe fermé de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $H = \mathbb{R}^n$  ou bien il existe une forme linéaire  $l$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $l(H) \subset \mathbb{Z}$  [13]). Il s'ensuit que l'ensemble  $\{ l_1(p) \mid p \in \mathbb{Z}^m, (l_2(p), \dots, l_m(p)) \in \Omega \} = p_1(D \cap p_2^{-1}(\Omega))$  est un modèle réel. ■

On peut généraliser le théorème 3.1.1, en considérant des applications linéaires à valeurs complexes de la manière suivante :

**Théorème 3.1.2.** *Soient  $L_1, \dots, L_m$ , des applications linéaires de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{C}$ . Supposons les conditions suivantes satisfaites :*

(i) *Les applications  $L_1, \dots, L_m$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ .*

(ii) *La forme linéaire  $L_1$  satisfait  $L_1(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}$ , et ses coefficients sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$ .*

(iii) *Dans l'espace vectoriel réel engendré par  $L_2, \dots, L_m$  il n'existe pas de forme linéaire non nulle à coefficients entiers.*

(iv) *L'ensemble  $\{L_1, \dots, L_m\}$  est stable par conjugaison complexe.*

*Supposons  $L_k$  réelle pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ , et  $L_{k+(m-r)/2}$  est conjugué complexe de  $L_k$  si  $r+1 \leq k \leq (m+r)/2$ . Soit  $W$  un ouvert non vide et borné de  $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^{(m-r)/2}$  (on convient que  $\mathbb{R}^0 \times \mathbb{C}^{(m-1)/2} = \mathbb{C}^{(m-1)/2}$  et  $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{C}^0 = \mathbb{R}^{m-1}$ ). Alors, l'ensemble des nombres réels  $L_1(p)$ , pour  $p \in \mathbb{Z}^m$  tel que :  $(L_2(p), \dots, L_{(m+r)/2}(p)) \in W$ , est un modèle réel.*

**Preuve.** Comme l'ensemble  $\{L_1, \dots, L_m\}$  est stable par conjugaison complexe, de la condition (iv), on voit que l'entier  $m-r$  est pair, et cela justifie l'indexation. Le résultat est une conséquence du théorème précédent, appliqué aux formes linéaires réelles sur  $\mathbb{R}^m : (l_k)_{k \in \{1, \dots, m\}}$  définies par les relations :  $l_k = L_k$  pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ , puis, si  $r+1 \leq k \leq (m+r)/2$  et  $x \in \mathbb{R}^m$  alors

$$l_k(x) = \frac{L_k(x) + L_{k+(m-r)/2}(x)}{2} = \operatorname{Re}(l_k(x))$$

et

$$l_{k+(m-r)/2}(x) = \frac{L_k(x) - L_{k+(m-r)/2}(x)}{2i} = \operatorname{Im}(l_k(x)).$$

L'application  $\lambda$  de  $\mathbb{R}^{m-1}$  dans  $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^{(m-r)/2}$  définie par

$$\lambda(z_2, \dots, z_m) = (Z_2, \dots, Z_{(m+r)/2})$$

où

$$Z_k = z_k$$

si  $2 \leq k \leq r$  et

$$Z_k = z_k + iz_{k+(m-r)/2}$$

lorsque  $r+1 \leq k \leq (m+r)/2$  (dans cette preuve  $i$  désigne une racine carrée de  $-1$ ), est linéaire.

De plus, comme le noyau de  $\lambda$  est réduit à  $\{0\}$  et  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{m-1} = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^{(m-r)/2})$ , alors  $\lambda$  est un isomorphisme et par suite les applications  $\lambda$  et  $\lambda^{-1}$  sont des morphismes. Il s'ensuit que l'image réciproque, par  $\lambda$ , de l'ouvert non vide et borné  $W$ , est un ouvert non vide et borné, disons  $\Omega$ , de  $\mathbb{R}^{m-1}$ . Les conditions du théorème 2.1.1 sont alors satisfaites et donc l'ensemble  $\{L_1(p), p \in \mathbb{Z}^m \mid (L_2(p), \dots, L_{(m+r)/2}(p)) \in W\} = \{l_1(p), p \in \mathbb{Z}^m \mid (l_2(p), \dots, l_m(p)) \in \Omega\}$  est un modèle réel. ■

## 3.2 Une généralisation du théorème de Kronecker.

En fait la définition originale des ensembles harmonieux, était consacrée à des suites réelles, et est une sorte d'extension du théorème de Kronecker. Rappelons d'abord l'une des versions de ce théorème, avec la notation dans ce chapitre  $\|x\| = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

*Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  nombres réels linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute suite  $x_1, \dots, x_n$ , de nombres réels, les inégalités diophantiennes*

$$\|t\lambda_j - x_j\| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq n$$

*ont une solution  $t \in \mathbb{R}$ .*

Ce dernier théorème peut être reformuler de la façon qui suit, avec la notation  $|||\xi||| = \min\{|x| \mid h(x) = \xi, x \in \mathbb{R}\}$ , où  $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et  $h$  désigne l'homomorphisme canonique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n$ ,  $2n$  nombres réels. Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

(a) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\|t\lambda_j - x_j\| \leq \varepsilon, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

(b) Pour toute suite d'entiers rationnels  $p_1, \dots, p_n$ , on a :  $p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n = 0 \Rightarrow p_1x_1 + \dots + p_nx_n \in \mathbb{Z}$ .

(c) Soit  $H$  le sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , engendré par  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , alors il existe un homomorphisme de groupes  $\chi$  de  $H$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (c.-à-d., un caractère de  $H$ ), tel que  $\chi(\lambda_j) = h(x_j), \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Preuve.** Supposons (a) vraie. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $|t\lambda_j - x_j - q_j| \leq \varepsilon, q_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{Z}$  tel que  $p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n = 0$ . Alors  $|tp_j\lambda_j - p_jx_j - p_jq_j| \leq \varepsilon|p_j|$ , et de la relation  $p_1t\lambda_1 + \dots + p_nt\lambda_n = 0$ , on déduit que  $\|p_1x_1 + \dots + p_nx_n\| \leq \varepsilon(|p_1| + \dots + |p_n|) < 1$  et donc  $p_1x_1 + \dots + p_nx_n \in \mathbb{Z}$ .

Supposons maintenant (b) vraie et soit  $\chi$  l'application du sous groupe  $H$  engendré par  $\Lambda$ , dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et définie par la relation

$$\chi(p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n) = p_1h(x_1) + \dots + p_nh(x_n),$$

où  $p_j \in \mathbb{Z}$ . Alors du (b), on voit que  $\chi$  est bien définie. De plus, il est facile de vérifier que  $\chi$  est un homomorphisme de groupe et  $\chi(\lambda_j) = \chi(1\lambda_j) = 1h(x_j) = h(x_j), \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

Finalement, si (c) est vraie, alors  $H$  est un sous groupe ayant un nombre fini de générateurs. Alors,  $H$  est un groupe libre, c.-à-d., qu'il existe une partie  $\mathbb{Z}$  (ou bien  $\mathbb{Q}$ )–libre,  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  qui est une base de  $H$ . Ainsi,  $\forall h \in H, h$  s'écrit d'une manière unique  $h = p_1\omega_1 + \dots + p_m\omega_m$ , où  $p_j \in \mathbb{Z}$ . Soient  $\chi(\omega_j) = h(r_j), r_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ . Alors  $h(x_j) = \chi(\lambda_j) = \chi(p_{1j}\omega_1 + \dots + p_{mj}\omega_m) = p_{1j}r_1 + \dots + p_{mj}r_m + \mathbb{Z}$ , pour certains  $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Du théorème de Kronecker, on sait qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\|t\omega_j - r_j\| \leq \varepsilon, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ , et des relations  $t\lambda_j = p_{1j}t\omega_1 + \dots + p_{mj}t\omega_m, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ , on déduit le résultat. ■

Rappelons qu'on identifiant les groupes topologiques isomorphes  $U(1)$  et  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , tout homomorphisme du groupe  $H$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , est aussi dit caractère de  $H$ . Soit maintenant une suite  $(\lambda_j)_{j \geq 1}$  de nombres réels. On s'intéresse aux suites réelles  $(\beta_j)_{j \geq 1}$  telles que :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $\|t\lambda_j - \beta_j\| \leq \varepsilon, \forall j \geq 1$ .

De manière identique au cas fini, traité ci-dessus, on a l'assertion suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Soient  $(\lambda_j)_{j \geq 1}$  et  $(\beta_j)_{j \geq 1}$  deux suites de nombres réels, et considérons les trois assertions :*

(a) *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\|t\lambda_j - \beta_j\| \leq \varepsilon, \forall j \geq 0$ .*

(b)  *$\forall n \in \mathbb{N}$ , et  $\forall p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ , on a :  $p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n = 0 \Rightarrow p_1\beta_1 + \dots + p_n\beta_n \in \mathbb{Z}$ .*

(c) *Si  $H$  est le sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , engendré par  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ , alors il existe un caractère  $\chi$  de  $H$ , tel que  $\chi(\lambda_j) = h(\beta_j), \forall j \geq 1$ .*

*Alors les implications (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c), sont vraies.*

**Preuve.** La preuve est identique à celles de la proposition 3.2.1. ■

Rappelons que les homomorphismes continus de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , sont de la forme  $\chi_t : x \mapsto tx + \mathbb{Z}$ , où  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$ . Cela découle aussi du fait que les caractères continus de  $\mathbb{R}$  dans  $U(1)$  sont de la forme  $x \mapsto e^{i2\pi tx}$ , où  $t \in \mathbb{R}$  (voir l'exemple 2.1.1). Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate de la proposition 3.2.2 et la définition 2.3.1.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. Alors l'ensemble  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  est harmonieux si et seulement si toute suite de nombres réels  $(\beta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  satisfaisant la proposition 3.2.2 (b) satisfait aussi la proposition 3.2.2 (a). En d'autres termes, pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathbb{R}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\|\chi(\lambda_j) - h(t\lambda_j)\| < \varepsilon, \forall j \geq 1$ .*

**Preuve.** Supposons la proposition 3.2.2 (b) vraie. Comme l'application  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow U(1), h(x) \mapsto e^{i2\pi x}, \forall x \in \mathbb{R}$ , est un isomorphisme continu de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans  $U(1)$ , de la définition 2.3.1, on déduit que  $\Lambda$  est harmonieuse si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathbb{R}$  (ou bien tout caractère de  $H$ , d'après le résultat de Rudin) il existe un caractère continu  $\chi_t$  de  $\mathbb{R}$ , tel que  $\|\chi(\lambda_j) - \chi_t(\lambda_j)\| < \varepsilon, \forall j \geq 1$ . Comme  $\chi(\lambda_j) = h(\beta_j)$  et  $\chi_t(\lambda_j) = t\lambda_j, \forall j \geq 1$ , on obtient la proposition 3.2.2 (a). L'implication inverse se montre de manière identique. ■

En d'autres termes, l'ensemble  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  est harmonieux, si et seulement si les assertions de la proposition 3.2.2 sont toutes équivalentes. On déduit immédiatement du théorème 3.2.1 et la proposition 3.2.1, qu'une partie réelle finie est harmonieuse (c'est l'exemple 2.3.1). Le résultat suivant, dû à Y. Meyer [15], est une caractérisation des ensembles harmonieux réels, puisqu'un ensemble harmonieux est uniformément discret [15].

**Proposition 3.2.3.** *Soit  $(\lambda_j)_{j \geq 1}$  une suite de nombres réels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *L'ensemble  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  est harmonieux.*
- (b)  *$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon > 0$  | pour tout caractère  $\chi$  de  $R$ ,  $\exists t \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon]$  satisfaisant  $\|\chi(\lambda_j) - h(t\lambda_j)\| < \varepsilon, \forall j \geq 1$ .*
- (c)  *$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon > 0$  | tout intervalle de longueur  $2T_\varepsilon$ , contient une solution  $t$  du système  $\|t\lambda_j\| \leq \varepsilon$  ( $j \geq 1$ ).*
- (d)  *$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon > 0$  |  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , tout intervalle de longueur  $2T_\varepsilon$ , contient une solution  $t$  du système  $\|t\lambda_j\| \leq \varepsilon$  ( $1 \leq j \leq n$ ).*

**Preuve.** L'implication (c)  $\Rightarrow$  (d) étant triviale, pour montrer (d)  $\Rightarrow$  (c), fixons  $\varepsilon > 0$  et  $j \geq 1$ . Alors  $\exists T_\varepsilon > 0$ , tel que pour tout intervalle  $I$  de longueur  $2T_\varepsilon$ ,  $\exists t_n \in I$ , et  $p_{n,j} \in \mathbb{Z}$  satisfaisant  $|t_n\lambda_j - p_{n,j}| \leq \varepsilon, \forall n \geq j$ . Ainsi  $p_{n,j} \in [-\varepsilon + t_n\lambda_j, \varepsilon + t_n\lambda_j]$  et la suite  $(p_{n,j})_{n \geq j}$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, puisque la suite  $(t_n)_{n \geq j}$  est bornée. Donc on peut extraire une sous suite de la suite  $(t_n\lambda_j - p_{n,j})_{n \geq j}$ , de la forme  $t_{\varphi(n)}\lambda_j - p$ , où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\varphi(n)$  est une fonction croissante de  $n$ , et par suite si  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\varphi(n)} = t$  alors  $\|t\lambda_j\| \leq |t\lambda_j - p| \leq \varepsilon$ ,  $t$  est indépendant de  $j$  et  $t \in I$ , d'où le (d).

Pour montrer que (c)  $\Leftrightarrow$  (b), on va d'abord prouver l'équivalence des propositions suivantes, où  $T > 0, \varepsilon > 0$  et  $n$  sont fixées :

- (i) *Pour toute suite  $x_1, \dots, x_n$  de nombres réels satisfaisant la proposition 3.2.1 (b), il existe une solution  $t$  du système  $\|t\lambda_j - x_j\| \leq \varepsilon$  et  $|t| \leq T$ .*
- (ii) *Tout intervalle de longueur  $2T$  contient une solution  $t$  du système  $\|t\lambda_j\| \leq \varepsilon$ .*

Si on applique le (i) avec  $x_j = -s\lambda_j$ , où  $s$  est le milieu de l'intervalle donné de longueur  $2T$ ,

on obtient (ii). Inversement, en utilisant la condition de la proposition 3.2.1 (b), soit  $(s_p)_{p \geq 1}$  une suite de nombres réels tels que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|s_p \lambda_j - x_j\| = 0$ . L'intervalle de centre  $s_p$  et de longueur  $2T$ , contient un réel  $y_p$  tel que  $\|y_p \lambda_j\| \leq \varepsilon$ , pour tout  $j = 1, \dots, n$ . Soit  $t_p = s_p - y_p$ . Alors  $|t_p| \leq T$  et on peut extraire de la suite des  $t_p$  une sous suite convergeant vers un certain  $t$ , et qui vérifie donc  $|t| \leq T$  et  $\|t \lambda_j - x_j\| \leq \varepsilon$ , pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

On peut maintenant prouver (d)  $\implies$  (b). En effet de ce qui a précédé, pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $t_n$  tel que  $|t_n| \leq T_\varepsilon$  et  $\|h(t_n \lambda_j) - \chi(\lambda_j)\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Maintenant, on peut extraire de la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  une sous suite convergeant vers un certain  $t$  et qui satisfait alors  $|t| \leq T_\varepsilon$  et  $\|h(t \lambda_j) - \chi(\lambda_j)\| \leq \varepsilon$ , d'où (b); les mêmes outils conduisent à l'implication inverse.

Notons finalement que (b)  $\implies$  (a), d'après le théorème 3.2.1, et qu'on a besoin du théorème de Baire (Enoncer ici le théorème) pour montrer l'implication restante. Supposons donc la proposition 3.2.3 (b) vraie, et soit  $G$  le sous groupe du groupe produit  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ , constitué des suite  $(h(\beta_k))_{k \geq 1}$  satisfaisant la proposition 3.2.2 (b). Si la convergence dans  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ , veut dire la convergence de chaque composante dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , alors le groupe  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  est compact et  $G$  est un sous groupe fermé de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ . Donc  $G$  est un groupe compact et le théorème de Baire est valable dans  $G$ . Pour tout réel  $x$ , soit  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow G$ , l'homomorphisme défini par la relation

$$\rho(x) = (h(\lambda_1 x), h(\lambda_2 x), h(\lambda_3 x), \dots).$$

Du théorème de Kronecker, on déduit que  $\rho(\mathbb{R})$  est un sous groupe dense de  $G$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $v_\varepsilon$  le sous ensemble fermé de  $G$  défini par  $\|h(\beta_k)\| \leq \varepsilon$ . Il s'ensuit que  $\Lambda$  est harmonieuse si et seulement si  $\rho(\mathbb{R}) + v_\varepsilon = G$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , soit  $K_m = \rho([-m, m]) + v_\varepsilon$ . Alors,  $K_m$  est un compact de  $G$ , et  $G$  est la réunion de tous les  $K_m$  lorsque  $\Lambda$  est harmonieuse. Il s'ensuit du théorème de Baire, que l'un des  $K_m$  contient un ouvert  $\Omega$  de  $G$ . Comme  $\rho(\mathbb{R})$  est dense dans  $G$ , on a  $\rho(\mathbb{R}) + \Omega = G \implies \cup_{t \in \mathbb{R}} (\rho(t) + \Omega) = G$ , c.-à-d., les ouverts  $\rho(t) + \Omega$  constituent un recouvrement du compact  $G$ . Il existe donc une partie finie  $F$  de  $\mathbb{R}$ , telle que  $\rho(F) + \Omega = G$ . Soit  $l \in \mathbb{N}^*$  tel que  $F + [-m, m] \subset [-l, l]$ . Alors

$$G = \rho(F) + \Omega \subset \rho(F) + K_m = \rho(F) + \rho([-m, m]) + v_\varepsilon \subset \rho([-l, l]) + v_\varepsilon,$$

et en posant  $K_l = \rho([-l, l]) + v_\varepsilon$  on obtient le (b). ■

### 3.3 Caractérisation de certaines classes d'entiers algébriques.

De qui précédé on peut obtenir des modèles réels constitués d'entiers algébriques de la manière suivante :

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $K$  un corps de nombres réel, de degré  $m$ , et soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , les différents plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ , où  $\sigma_1$  est l'identité de  $K$ . On peut supposer  $\sigma_k$  réel pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ , et  $\sigma_{k+s}$  le conjugué complexe de  $\sigma_k$ , où  $s = (m - r) / 2$ , si  $r + 1 \leq k \leq r + s$ .*

*Soient  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r+s}$ , des nombres réels positifs. L'ensemble  $\Lambda_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r+s})}$  formé par les entiers algébriques  $\alpha \in K$  tels que  $0 < |\sigma_j(\alpha)| < \varepsilon_j$  pour  $j \in \{2, \dots, r + s\}$ , est un modèle de  $\mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathbb{Z}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ , et soit  $\{w_1, \dots, w_m\}$  une base de  $\mathbb{Z}_K$ . Considérons les applications linéaires  $L_1, \dots, L_m$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{C}$  définies par

$$L_k(x_1, \dots, x_m) = x_1 \sigma_k(w_1) + \dots + x_m \sigma_k(w_m).$$

Ces applications sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$  puisque le carré du discriminant du corps  $K$  est le carré du nombre  $\det_{1 \leq k, j \leq m} \sigma_k(w_j)$ , et est donc non nul.

L'application  $L_1$  est réelle car  $K \subset \mathbb{R}$  et  $L_1(x_1, \dots, x_m) = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$  ( $\sigma_1$  est l'identité de  $K$ ) et comme ses coefficients  $w_1, \dots, w_m$  forment une base, du groupe libre de rang  $m$ ,  $\mathbb{Z}_K$ , ils sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants.

La condition (iv) théorème 2.1.2 est trivialement satisfaite, puisque la conjugaison complexe est un automorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , et donc le conjugué complexe de  $L_k$  est  $L_{k+s}$  pour tout  $k \in \{r + 1, \dots, r + s\}$ .

Pour vérifier la condition (iii), supposons  $L$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{C}$  telle que :

$$L(x) = \lambda_1 L_1(x) + \dots + \lambda_m L_m(x) = u_1 x_1 + \dots + u_m x_m$$

pour  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$  et  $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$ . En d'autres termes

$$\begin{aligned} L(x) &= \lambda_1 (x_1 \sigma_1(w_1) + \dots + x_m \sigma_1(w_m)) + \dots + \lambda_m (x_1 \sigma_m(w_1) + \dots + x_m \sigma_m(w_m)) \\ &= x_1 (\lambda_1 \sigma_1(w_1) + \dots + \lambda_m \sigma_m(w_1)) + \dots + x_m (\lambda_1 \sigma_1(w_m) + \dots + \lambda_m \sigma_m(w_m)), \end{aligned}$$

et en effectant à  $x$  les éléments de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$  sur  $\mathbb{R}$ , on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 \sigma_1(w_1) + \dots + \lambda_m \sigma_m(w_1) = u_1 \\ \lambda_1 \sigma_1(w_2) + \dots + \lambda_m \sigma_m(w_2) = u_2 \\ \vdots \\ \lambda_1 \sigma_1(w_m) + \dots + \lambda_m \sigma_m(w_m) = u_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1(w_1) & \dots & \sigma_m(w_1) \\ \cdot & \dots & \sigma_m(w_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(w_m) & \dots & \sigma_m(w_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

c.-à-d.,

$$A\lambda = u,$$

$$\text{où } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \sigma_1(w_1) & \dots & \sigma_m(w_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(w_m) & \dots & \sigma_m(w_m) \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det A = \det_{1 \leq k, j \leq m} \sigma_k(w_j)$ , la matrice  $A$  est inversible. Soit  $\{w'_1, \dots, w'_m\}$  la base de  $K$  duale de la base  $\{w_1, \dots, w_m\}$ , c'est-à-dire la base de  $K$  qui vérifie les égalités suivantes :

$$Tr_{K/\mathbb{Q}}(w_k w'_j) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(w_k w'_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \text{ et } (j, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \\ 0 & \text{si } j \neq k \text{ et } (j, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \end{cases}$$

Alors la matrice

$$B = (\sigma_j(w'_k)) = \begin{pmatrix} \sigma_1(w'_{k1}) & \dots & \sigma_1(w'_m) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \sigma_m(w'_1) & \dots & \sigma_m(w'_m) \end{pmatrix}$$

est l'inverse de  $A$ , et l'on a :  $\lambda = Bu$ . Ainsi on a pour chaque  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\lambda_j = \sigma_j(w'_1) u_1 + \dots + \sigma_j(w'_m) u_m.$$

Comme les  $u_k$  sont des rationnels, on a  $\lambda_1 \in K$ , et  $\lambda_j = \sigma_j(w'_1 u_1 + \dots + w'_m u_m) = \sigma_j(\lambda_1)$ ; si de plus  $\lambda_1 = 0$ , alors  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , et donc  $L = 0$ . On peut ainsi appliquer le théorème 2.1.2, avec

$$w = \{(z_2, \dots, z_{r+s}) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \mid |z_j| < \varepsilon_j, \forall j \in \{2, \dots, r+s\}\}. \blacksquare$$

On va déduire maintenant de ce théorème que l'ensemble des nombres de Pisot est relativement dense dans l'intervalle  $[1, \infty[$ . Ce résultat était aussi montré il y a presque une dizaine d'années par A. H. Fan et J. Scheling [8], en utilisant des outils très différents, provenant de la théorie ergodique.

**Corollaire 3.3.1.** *Soit  $K$  un corps de nombres réel, de degré  $m$ . Alors l'ensemble des nombres de Pisot appartenant à  $K$ , de degré  $m$ , est un ensemble relativement dense dans  $[1, \infty[$ .*

**Preuve.** Le résultat est trivial pour  $m = 1$ , car les nombres de Pisot appartenant à  $\mathbb{Q}$  sont les éléments de  $\mathbb{N} \cap [2, \infty[$  et  $\mathbb{N}^+ \cap [0, 1] = [1, \infty[$ . Supposons  $m \geq 2$ . Avec la notation du théorème 3.3.1, et en posant  $\varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{r+s} = 1$ , on obtient que l'ensemble  $\Lambda_{(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r+s})}$  formé par les entiers algébriques  $\alpha \in K$  tels que  $0 < |\sigma_j(\alpha)| < 1$  pour  $j \in \{2, \dots, r+s\}$ , est un modèle de  $\mathbb{R}$ . Si

$\alpha \in \Lambda_{(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r+s})}$ , alors  $\alpha$  un entier algébrique de  $K$ , et sa norme

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{j=1}^m \sigma_j(\alpha)$$

pour l'extention  $K/\mathbb{Q}$ , est un entier non nul. L'inégalité  $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| \geq 1$ , donne immédiatement

$$|\alpha| \geq \prod_{j=2}^m \left| \frac{1}{\sigma_j(\alpha)} \right| > 1,$$

et donc  $\sigma_j(\alpha) \neq \alpha$  pour chaque  $j \in \{2, \dots, m\}$ . Ainsi  $\alpha$  est de degré exactement  $m$ ,  $\pm\alpha \in \mathbb{S}$  et le corollaire en découle, puisque qu'un modèle est relativement dense. ■

**Corollaire 3.3.2.** *Soit  $K$  un corps de nombres réel, de degré  $m$ . Alors, il existe un ensemble fini  $F$ , tel que tout nombre de Salem dans  $K$  de degré  $m$ , est la somme d'un nombre de Pisot appartenant à  $K$ , de degré  $m$ , et d'un élément de  $F$ .*

**Preuve.** Avec la notation du théorème 3.3.1 et de sa preuve, soit  $\Lambda_1$  le modèle défini par la fenêtre

$$[-1, 1] \times \prod_{j=1}^s \{(y_1, y_2, \dots, y_{2s}) \in \mathbb{R}^{2s}, y_j^2 + y_{j+s}^2 \leq 1\}.$$

Comme dans la preuve du corollaire ci-dessus, on a  $\eta \in \Lambda_1 \Leftrightarrow \eta \in \mathbb{Z}_K$  et  $|\sigma_j(\eta)| \leq 1$  pour tout  $j \in \{2, 3, \dots, 2+s\}$ . Donc, tout nombre de Salem dans  $K$  de degré  $m$ , appartient à  $\Lambda_1$ . Soit  $\Lambda_2$  le modèle défini par la fenêtre

$$(-1, 1] \times \prod_{j=1}^s \{(y_1, y_2, \dots, y_{2s}) \in \mathbb{R}^{2s}, y_j^2 + y_{j+s}^2 < 1\} - \{(0, 0, \dots, 0)\}.$$

Alors,  $\beta \in \Lambda_2 \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{Z}_K$  et  $|\sigma_j(\beta)| < \varepsilon$  pour tout  $j \in \{2, 3, \dots, 2+s\}$ . Donc la valeur absolue de tout élément de  $\Lambda_2$  est un nombre de Pisot de degré  $m$ , et le résultat suit directement en utilisant la proposition 7.9 de [16], et qui dit qu'il existe un ensemble fini  $F \subset \mathbb{R}$ , tel que  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 + F$ . ■

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $\theta$  un nombre réel plus grand que 1. Alors,  $\theta \in \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon > 0 \mid$  tout intervalle de longueur  $T_\varepsilon$  contient au moins une solution  $\lambda$  des inégalités diophantiennes :  $\|\lambda\theta^k\| \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}$ .*

**Preuve.** Avec la notation ci-dessus, on va montrer l'équivalence :  $\theta \in \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \Leftrightarrow \{\theta^k, k \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble harmonieux.

Supposons d'abord l'ensemble  $\Lambda$  harmonieux. Si  $\theta$  est algébrique, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\|t\theta^k\| \leq \varepsilon$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et donc  $\theta \in \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$  (voir chapitre 1). Supposons maintenant  $\theta$  transcendant. Alors les puissances de  $\theta : 1, \theta, \theta^2, \dots$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Soit  $X$  l'ensemble de toutes les applications de  $\Lambda$  dans le sous groupe  $\{h(0), h(1/2)\}$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Comme  $\text{Card}(X) = 2^{\mathbb{N}}$ , alors  $X$  est dénombrable. De plus tout élément de  $X$  peut être prolongé en un caractère du sous groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par  $\Lambda$ , puisque les éléments de  $\Lambda$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$ . Pour compléter la preuve de ce cas montrons le résultat intermédiaire suivant :

(R1) *Soient  $0 < \varepsilon < 1/(\theta + 1)$ , et  $(t_k)_{k \geq 0}$  une suite croissante de nombres réels telle que  $t_0 = 1, t_{k+1} \leq \theta t_k$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ . Si un réel  $x$  satisfait  $|x| \leq \varepsilon$  et  $\|xt_k\| \leq \varepsilon$  pour tout  $k \geq 1$ , alors  $x = 0$ .*

En effet, écrivons  $xt_k = p_k + r_k$  pour tout  $k \geq 1$ , où  $p_k \in \mathbb{Z}$  et  $|r_k| \leq \varepsilon$ , et supposons  $x \neq 0$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} xt_k = \pm\infty$ , il existe  $h \geq 1$  tel que  $p_h \neq 0$ . Donc  $|xt_h| \geq 1 - \varepsilon$ . Si l'on choisit  $h$  le plus petit possible, alors  $|xt_{h-1}| = |r_{h-1}| \leq \varepsilon$ , et  $t_h/t_{h-1} = |xt_h|/|xt_{h-1}| \geq (1 - \varepsilon)/\varepsilon > \theta$ , puisque  $\varepsilon < 1/(\theta + 1)$ ; mais cela contredit l'hypothèse  $t_{k+1} \leq \theta t_k$ , et donc  $x = 0$ .

Complétons maintenant la preuve de ce cas, où  $\theta$  est transcendant. Pour  $\varepsilon > 0$ , soit  $U_\varepsilon$  l'ensemble des réels  $t$  tels que pour un certain  $\chi \in X$  on ait  $\|\chi(\theta^k) - h(t\theta^k)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $k \geq 0$ . Si  $\varepsilon < 1/4$ , et  $\chi_1, \chi_2$  sont deux éléments différents de  $X$  alors  $t_1 \neq t_2$ . Donc  $\text{Card}(U_\varepsilon) = \text{Card}(X)$  si  $\Lambda$  est harmonieuse. On va obtenir une contradiction, en prouvant que l'ensemble  $U_\varepsilon$  est dénombrable pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Comme  $X$  est un groupe, on a  $U_\varepsilon - U_\varepsilon \subset U_{2\varepsilon}$ . Si  $t \in U_\varepsilon$ , alors  $\|2t\theta^k\| \leq 2\varepsilon$ , pour tout  $k \geq 0$ . En utilisant (R1), on obtient lorsque  $2\varepsilon < 1/(\theta + 1)$ ,

que soit  $t = 0$  soit  $|t| \geq \varepsilon$ . Comme  $U_\varepsilon - U_\varepsilon \subset U_{2\varepsilon}$ , la distance entre deux éléments distincts de  $U_\varepsilon$ , dépasse  $2\varepsilon$  si  $4\varepsilon < 1/(\theta + 1)$ . Donc  $U_\varepsilon$  est uniformément discret et par suite est dénombrable.

Pour montrer l'implication inverse il suffit de prouver également le résultat intermédiaire qui suit :

(R2) Soient  $\varepsilon > 0$  et  $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x - \theta_1)\dots(x - \theta_n)$  le polynôme minimal d'un entier algébrique  $\theta = \theta_1$ . Alors, pour tout caractère  $\chi$  du sous groupe  $H$  de  $\mathbb{R}$  engendré par  $\Lambda = \{1, \theta, \theta^2, \dots\}$ , il existe  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$  satisfaisant :

(a)  $\chi(\theta^k) = h(t_1\theta_1^k + \dots + t_n\theta_n^k)$ , pour tout  $k \geq 0$ ;

(b) si  $\theta_k = \bar{\theta}_l$  alors  $t_k = \bar{t}_l$ ;

(c)  $|t_k| \leq \varepsilon$  pour  $k \geq 2$ , et  $|t_1| \leq C_\theta \varepsilon^{1-n}$ , où  $C_\theta$  est une constante dépendant de  $\theta$ .

En effet, si  $\theta \in \text{SUT}$  de degré  $n$ , alors  $|\theta_k| \leq 1$  pour  $k \geq 2$ , et au lieu du (a) on a  $\|\chi(\theta^k) - h(t\theta^k)\| \leq (n-1)\varepsilon$ . Il s'ensuit de R2, qu'il existe une constante  $C_\theta$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout caractère  $\chi$  de  $H$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\|\chi(\theta^k) - h(t\theta^k)\| \leq \varepsilon$  et  $|t| \leq C_\theta \varepsilon^{1-n}$ . Ainsi tout intervalle de longueur  $C_\theta \varepsilon^{1-n}$  contient une solution  $t$  des inégalités :  $\|t\theta^k\| \leq \varepsilon, \forall k \geq 0$ . Montrons maintenant R2. Posons  $\chi'(\theta^k)$  le terme à droite de (a), où la suite non-spécifiée  $(t_1, \dots, t_n)$  satisfaisant (b) et (c). Alors,  $\chi'$  est un caractère de  $H$ . Pour prouver (a), il suffit de le montrer pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , et on est conduit à résoudre le système à  $n$  congruences :

$$\alpha_k \equiv t_1\theta_1^k + \dots + t_n\theta_n^k \pmod{1}, \forall k \in \{0, \dots, n-1\},$$

où les  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  et vérifient  $h(\alpha_k) = \chi(\theta^k)$ . Soit

$$C_\varepsilon = \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_k = t_1\theta_1^k + \dots + t_n\theta_n^k, t_1 \in \mathbb{R}, k \geq 2 \Rightarrow |t_k| \leq \varepsilon \text{ et vérifient (b)}\}.$$

Comme les vecteurs  $(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}), (1, \theta_2, \dots, \theta_2^{n-1}), \dots, (1, \theta_n, \dots, \theta_n^{n-1})$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{C}$ , l'ensemble  $C_\varepsilon$  contient un cylindre ouvert infini dont l'axe est la droite  $D$ , définie par

$$x_k = t\theta^k, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $\rho$  l'homomorphisme canonique  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . Alors  $\rho(D)$  est dense dans  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , puisque  $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{C}$ , et ainsi  $\rho(D) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , car  $\rho$  est ouverte et

$D$  est un fermé. ■

**Théorème 3.3.3.** Soit  $\theta$  un nombre réel plus grand que 1. Alors,  $\theta \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \Lambda = \left\{ \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \theta^k, n \in \mathbb{N}, \varepsilon_k \in \{0, 1\} \right\}$  est un ensemble harmonieux.

**Preuve.** Supposons d'abord  $\theta \in \mathbb{S}$ , et soient  $\theta_2, \dots, \theta_d$  les conjugués de  $\theta$ , autres que  $\theta$ . Il est clair que si  $\lambda = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \theta^k \in \Lambda$ , alors  $\lambda$  est un entier algébrique du corps  $\mathbb{Q}(\theta)$  et les autres conjugués de  $\lambda$  sont parmi les nombres  $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k \theta_j^k$ , où  $j \in \{2, \dots, d\}$ . Comme

$$\left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \theta_j^k \right| \leq \sum_{k=0}^n |\theta_j^k| \leq \frac{1}{|\theta_j| - 1}$$

on déduit que  $\Lambda \subset \Lambda_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r+s})}$ , où  $\Lambda_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{r+s})}$  est le modèle réel défini dans le théorème 3.3.1, avec  $\varepsilon_j = 1/(|\theta_j| - 1)$ . Comme un modèle est harmonieux, et que tout sous ensemble d'un ensemble harmonieux l'est aussi, on voit que  $\Lambda$  est harmonieux.

Réciproquement, si  $\Lambda$  est harmonieux, alors d'après la proposition 3.2.3 (c), il existe un réel non nul  $t$  tel que  $\|t\lambda\| \leq 1/5$ , pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Posons  $t\theta^k = p_k + r_k$  où  $p_k \in \mathbb{Z}$  et  $|r_k| \leq 1/5$ , et montrons que si  $s_k = \varepsilon_0 r_0 + \dots + \varepsilon_k r_k, \forall k \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$  alors

$$|s_k| \leq \frac{1}{5}. \quad (*)$$

Cette inégalité est vraie pour  $k = 0$ , puisque  $\varepsilon_0 r_0 \in \{0, r_0\}$ , et peut être prouvée par récurrence sur  $k$  : si  $\lambda = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_k \theta^k + \varepsilon_{k+1} \theta^{k+1}$ , alors

$$t\lambda = q + \varepsilon_0 r_0 + \dots + \varepsilon_k r_k + \varepsilon_{k+1} r_{k+1} = q + s_{k+1},$$

avec  $q \in \mathbb{Z}$  et  $|s_{k+1}| = |\varepsilon_0 r_0 + \dots + \varepsilon_k r_k + \varepsilon_{k+1} r_{k+1}| \leq 2/5$ . Donc  $|s_{k+1}| = \|t\lambda\| \Rightarrow |s_{k+1}| \leq 1/5$ .

En séparant nombres  $r_k$  qui sont positifs de ceux qui sont négatifs on obtient

$$|r_0| + \cdots + |r_k| \leq 2/5.$$

En passant à la limite dans cette somme, lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on déduit que  $\sum \|t\theta^k\| \leq 2/5 < \infty$  et par suite  $\theta \in \mathbb{S}$ . ■

L'une des applications de ce théorème, est liée au spectre d'un nombre de Pisot. Pour un nombre réel  $\theta > 1$ , et pour  $m \in \mathbb{N}$ , le spectre de  $\theta$ , est l'ensemble

$$B_m = B_m(\theta) := A_m(\theta) - A_m(\theta),$$

où

$$A_m = A_m(\theta) := \{a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in \{0, 1, \dots, m\}\}$$

et la notation  $[ ]$  désigne la fonction partie entière ( $[\theta]$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $\theta$ ). Il est clair que  $A_m$  est uniformément discret si et seulement si  $l_m(\theta) := \inf B_m(\theta) \cap ]0, \infty[ > 0$ . Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui suit, montré dans [29] : Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) *L'ensemble  $B_m(\theta)$  est uniformément discret pour tout  $m$ .*
- (ii) *L'ensemble  $B_m(\theta)$  est un ensemble de Meyer pour tout  $m \geq [\theta]$ .*
- (iii) *L'ensemble  $A_{[\theta]}(\theta) \cup (-A_{[\theta]}(\theta))$  est un ensemble de Meyer.*
- (iv) *Le nombre  $\theta$  appartient à l'ensemble  $\mathbb{S}$ .*

La preuve de ce résultat est une conséquence immédiate de simples implications, du théorème 3.3.3 et du résultat suivant : pour tout nombre réel  $\theta > 1$ , l'ensemble  $A_{[\theta]}(\theta) \cup (-A_{[\theta]}(\theta))$  est relativement dense, prouvé dans [29].

---

# Références

- [1] M. Amara, *Ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **83** (1966), 215-270.
- [2] M. A. Armstrong, *Basic topology*, Springer Verlag, 1997.
- [3] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugo, M. Pathiaux-Delefosse and J. P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag Basel, 1992.
- [4] D. W. Boyd, *Pisot numbers in a real intervalle*, Math. Comp. **65** (1996), 841-860.
- [5] D. Dikranjan, I. Prodanov and L. Stoyanov, *Introduction to topological groups*, Marcel-Dekker, New-York, 1989.
- [6] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **72** (1955), 69-92.
- [7] A. H. Fan and J. Schmeling,  *$\varepsilon$ -Pisot numbers in any real algebraic number field are relatively dense*, J. Algebra **272** (2004), 470-475.
- [8] M. Grandet-Hugo, *Ensembles fermés d'entiers algébriques*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. **92** (1965), 1-35.
- [9] J. C. Lagarias, *Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets*, Commun. Math. Phys. **179** (1996), 365-376.
- [10] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. Math. **34** (1933), 461-479.
- [11] D. A. Marcus, *Number fields*, 3rd ed., Springer, Berlin, 1977.
- [12] W. S. Massey, *Algebraic topology : An introduction*, New-York, 1967.

- 
- [13] Y. Meyer, *Nombres algébrique et analyse harmonique*, 4th series, **3** (1970), 75-110.
- [14] Y. Meyer, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lecture notes in math., 117, Berlin, Springer-Verlag, 1970.
- [15] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis*, North-Holland, London 1972.
- [16] R. V. Moody, *Meyer sets and their duals*, in : The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order, R. V. Moody, Ed., Kluwer 1997, 403-442.
- [17] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2004.
- [18] C. Pisot, *La répartition modulo un et les nombres algébriques*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **7** (1938), 205-248.
- [19] C. Pisot, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Montréal, Quebec, les presses de l'université de Montréal, 1966.
- [20] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, Boston, 1963.
- [21] R. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Paris, Hermann 1967.
- [22] J. P. Schreiber, *Sur la notion de modèles dans les groupes abéliens localement compacts*, Comptes-rendus Acad. Sci. Paris **272** (1971), 30-32.
- [23] J. P. Schreiber, *Thèse de doctorat*, Faculté des sciences, Orsay, France, 1972.
- [24] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses universitaires de France, 1970.
- [25] C. L. Siegel, *Algebraic numbers whose conjugates lie in the unit circle*, Duke Math. J. **11** (1944), 597-602.
- [26] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Reading, Paris, 1965.

- 
- [27] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1970.
- [28] T. Zaïmi, *On  $\varepsilon$ -Pisot numbers*, New York J. Math. **15** (2009), 415-422.
- [29] T. Zaïmi, *Commentaires sur quelques résultats sur les nombres de Pisot*, J. Théor. Nombres Bordeaux **22** (2010), 513-524.
- [30] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge, University press, 1968.

---

## Conclusion

Dans ce travail, on a présenté des résultats sur les ensembles harmonieux, les ensembles de Meyer et les modèles. On a signalé l'importance de cette théorie en exhibant quelques applications, très inattendues, à l'étude de quelques structures non-périodiques, notamment des ensembles d'entiers algébriques, en liaison avec les nombres de Pisot et les nombres de Salem.

## Mots clés

Ensemble harmonieux, Ensemble de Meyer, Modèle, Nombre de Pisot, Nombre de Salem.