

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI- OUM EL BOUAGHI  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

MÉMOIRE  
Pour l'obtention du diplôme de  
MAGISTER  
SPÉCIALITÉ: **MATHEMATIQUES**  
OPTION: **MATHEMATHIQUE APPLIQUEE**  
Présenté par : **Mokhtar MERZOUGUI**  
Intitulé:

## **ESTIMATION DU TERME DE POLLUTION D'UN SYSTEME GOUVERNE PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES**

Soutenu le .../.../...

Devant le jury			
Mr Abdelhamid AYADI	Pr	Univ. L. BEN M'HIDI- OEB	Président.
Mr Merzouk DJEBRANI	M.C	Univ. L. BEN M'HIDI- OEB	Rapporteur.
Mr Mohamed BOUZIT	M.C	Univ. L. BEN M'HIDI- OEB	Examineur.
Mr Salah DJAZAR	M.C	Univ. MENTOURI- Constantine	Examineur.
Mr Nacer ADJROUD	M.C	C. Univ de Khenchela	Examineur.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Rappels et définitions</b>	<b>8</b>
1.1 Les opérateurs . . . . .	8
1.1.1 L'opérateur linéaire . . . . .	8
1.1.2 L'opérateur continue . . . . .	9
1.1.3 L'opérateur borné . . . . .	9
1.1.4 L'opérateur fermé . . . . .	9
1.1.5 Ensemble et l'opérateur résolvant, Spectre de $A$ . . . . .	10
1.2 Les semi-groupes . . . . .	12
1.2.1 Les semi-groupes . . . . .	12
1.3 Semi-groupes analytiques . . . . .	15
1.4 Problèmes d'évolution non homogènes . . . . .	16
1.5 Semi groupe de l'équation des ondes (Hyperboliques) . . . . .	18
<b>2 Contrôlabilité des systèmes évolutifs</b>	<b>21</b>
2.1 Position du problème . . . . .	21
2.1.1 Hypothèses . . . . .	22

2.2	Contrôlabilité . . . . .	23
2.2.1	Contrôlabilité exacte . . . . .	24
2.2.2	Contrôlabilité approchée . . . . .	31
2.2.3	Contrôlabilité aux trajectoires . . . . .	31
2.2.4	Contrôlabilité faible . . . . .	32
2.2.5	Contrôlabilité régionale . . . . .	36
2.3	Notion d'actionneur . . . . .	43
2.3.1	Ponctuel fixe . . . . .	43
2.3.2	Ponctuel mobile . . . . .	43
2.3.3	Zone . . . . .	44
2.3.4	Filament . . . . .	44
2.3.5	Applications . . . . .	45
2.3.6	Actionneur stratégique . . . . .	47
2.4	Difficultés . . . . .	49
2.4.1	Sur le choix de l'espace d'état . . . . .	49
2.4.2	Sur le nombre d'actionneurs . . . . .	50
2.5	Contrôle assurant le transfert régional . . . . .	50
2.5.1	Approche général . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Les Sentinelle</b>	<b>54</b>
3.1	Introduction . . . . .	54
3.2	Sentinelle Régionale . . . . .	55
3.2.1	Les conditins initiales . . . . .	57

3.2.2	Les conditions aux limites . . . . .	58
3.2.3	Utilisation de la contrôlabilité régionale . . . . .	61
3.2.4	Estimation du terme de pollution . . . . .	61
3.3	Sentinelle ponctuelle . . . . .	63
3.3.1	Utilisation de la contrôlabilité régionale . . . . .	65
3.3.2	Estimation du terme de pollution . . . . .	66

<b>Bibliographie</b>		<b>68</b>
----------------------	--	-----------

# Notation

p.p.	presque partout.
i. e.	c'est-à-dire.
$T$	un nombre réel positif.
$p$	un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$ .
$p'$	l'exposant conjugué de Hölder de $p$ i.e. : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .
$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}^N$	l'espace euclidien réel $N$ -dimensionnel.
$x$	$= (x_1, x_2, \dots, x_N)$ point générique de $\mathbb{R}^N$ .
$A, B,$	opérateur linéaire
$Im(A)$	image de $A$
$Ker(A)$	noyau de $A$
$\rho(A)$	l'ensemble résolvante de $A$
$A^*$	adjoint de $A$
$A \subset B,$	i.e. $D(A) \subset D(B)$
$\Omega$	un ouvert à mesure quelconque de $\mathbb{R}^N$ .
$\partial\Omega$	$=$ la frontière de $\Omega$ .
$Q_T$	le cylindre $\Omega \times ]0, T[$ .
$\Sigma_T$	$= \partial\Omega \times ]0, T[$ la frontière latérale de $Q_T$ .

## Notation

---

$\Gamma_i$	une partie de la frontiere, $i=0,1\dots n$
$\omega$	un sous domaine non vide de
$\text{supp}(f)$	support de la fonction $f$
$\chi_A$	la fonction caractéristique de l'ensemble $A$ .
$\Delta,$	laplacien
$\text{div}u$	$= \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}$ , la divergence de $u$ .
$G(t)$	semi groupe
$S(\lambda, \tau)$	sentinelle
$V, E, U$	sont des espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$
$L(V, E)$	espace des application lineaires continue de $V$ dans $E$
$\lambda \hat{\xi}$	terme de pollution
$\tau \hat{y}^0$	terme de manquant
<i>resp</i>	respectivement

$D(\Omega)$	$= C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega$ .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions.
$C_0^1(\mathbb{R}^N)$	$= C^1(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$ , espace des fonctions une fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}^N$ à support compact.
$L^p(\Omega)$	$= \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega}  u ^p dx < \infty\}$ ; $1 \leq p < \infty$ .
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u \text{ mesurable sur } \Omega / \exists C > 0,  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$ .
$L^p(0, T; X)$	$= \{u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \int_0^T \ u(t)\ _X^p < \infty\}$ ; $1 \leq p < \infty$ .
$L^\infty(0, T; X)$	$= \{u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \sup_{[0, T]} \text{ess}\ f\ _X < \infty\}$ .
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in L^p(\Omega), \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$ .
$W_0^{1,p}(\Omega)$	$= \{u, u \in W^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ , l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ ( $p < \infty$ ).
$\ \cdot\ _X$	la norme dans l'espace $X$ .
$\ u\ _{L^p(\Omega)}$	$= \left( \int_{\Omega}  u ^p \right)^{\frac{1}{p}}$ pour $u \in L^p(\Omega)$ , $1 \leq p < \infty$ .
$\ u\ _{L^\infty(\Omega)}$	$= \sup_{\Omega} \text{ess} u $ .
$\ u\ _{L^p(0, T; X)}$	$= \left( \int_0^T \ u\ _X^p \right)^{\frac{1}{p}}$ .
$\ u\ _{L^\infty(0, T; X)}$	$= \sup_{[0, T]} \text{ess}\ u\ $ .
$\ u\ _{W^{1,p}(\Omega)}$	$= \ u\ _{L^p(\Omega)} + \sum \ D_i u\ _{L^p(\Omega)}$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$	crochet de dualité.

# Introduction générale

Nous nous intéressons dans ce mémoire au système de distribué gouverné par des équations dérivées partielles. Nous faisons allusion à l'état  $y$  la solution du système d'évolution (le temps intervient).

A un équation aux dérivées partielles d'évolution dans un domaine  $\Omega$  de  $(\mathbb{R}^N)$ , et pour  $t$  dans l'intervalle  $(0, T)$ , on doit ajouter des conditions initiales et des conditions limites. Précisons un peu. la structure générale de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne l'état du système étudié est supposée connue, soit, formellement

$$(1) \dots \frac{\partial y}{\partial t} + A(y) = \text{source dans l'ouvert } \Omega \times ]0, T[ .$$

Pour que l'état puisse être défini, il faut donc connaître :

(2)...les coefficients de l'opérateur  $A$  et la structure des non linéarités éventuelles,

(3)...les termes sources qui apparaissent au 2ème membre de (1),

(4)...les conditions initiales,

(5)...les conditions aux limites,

et (6)...l'ouvert  $\Omega$ .

Le système est dit à données incomplètes si l'une au moins des informations (2),...et(6) n'est que partiellement connue.

Dans presque tous les problèmes de météorologie, ou océanographie, les condition initiales ne sont pas complètement connues (noter d'ailleurs que l'on a une grande variété de possibilité quant aux choix de l'état initiale).

Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire.

Par exemple, la suie qui joue un rôle important pour causer le problème de pollution de l'environnement, atmosphérique, et territoires, avec la respiration de l'air carbonise ( $CO_2, CO\dots$ ), et les pluie acidité

Naturellement les problèmes évoqués sont modélisés par des équations d'évolution de type parabolique linéaire ou non linéaire à termes manquants.

Dans ce travail on considère uniquement le cas linéaire.

Trouver des informations sur le terme de pollution indépendamment du terme manquant est un sujet qui préoccupe la communauté scientifique, l'idée habituelle est celle des moindres carrés où on considère les termes manquant et de pollution comme deux variables indépendants de contrôle et on cherche à minimiser l'écart entre l'état mesuré sur une partie du domaine et l'état calculé par la résolution du système considéré (voir [16]). Dans ce type de méthode, les termes de pollution et les termes manquants jouent le même rôle, il y a possibilité de ne pas pouvoir nettement séparer les rôles des uns et des autres, sans bien sûr, négliger cette méthode fondamentale qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problème. Il est utile de tenter une nouvelle méthode dite méthode de sentinelle, dont la construction se ramène à l'étude de divers problèmes de type contrôlabilité.

L'objectif de notre travail consiste à estimer le terme de pollution (fonction source) d'un système d'évolution parabolique indépendamment du terme manquant ( la donnée initial du système ) en utilisant le concept de sentinelle régionale et ponctuelle à travers la théorie de la contrôlabilité régionale.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le **premier chapitre** , on rappelle quelques propriétés de la théorie des semi groupes et techniques de résolution des problèmes d'évolutions .

Dans le **deuxième chapitre**, nous donnons les principes généraux que concernent l'analyse des systèmes distribués. Plus précisément, nous introduisons les notions d'exakte et de faible contrôlabilité, ainsi nous celles d'actionneur et d'actionneur stratégique.

Dans le **troisième chapitre**, on va estimer le terme de pollution du système considéré, indépendamment du terme manquant en utilisant le concept de sentinelle régionale et ponctuelle.

# Chapitre 1

## Rappels et définitions

### 1.1 Les opérateurs

Soient  $E, F$  deux espaces normes  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ .  
 $E$ , et  $F$  espace vectoriel sur même corps  $K(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

#### 1.1.1 L'opérateur linéaire

##### Définition 1.1

i) Un application  $A$  défini :

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto A(x) = Ax \text{ Notation.} \end{aligned}$$

*est dit opérateur.*

ii)  $D(A) = \{x \in E; Ax \in F\} \subseteq E$ .

$D(A)$  domaine de définition de l'opérateur  $A$ .

iii) L'opérateur  $A$  est **linéaire** ssi

$$\forall \alpha; \beta \in K, \forall x, x' \in D(A) : A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax'.$$

### 1.1.2 L'opérateur continue

i) L'opérateur  $A$  est dit **continu** on point  $x_0 \in E; \forall x \in E$

$$\forall \epsilon > 0; \exists \eta > 0, \|x - x_0\|_E < \eta \implies \|Ax - Ax_0\|_F < \epsilon.$$

ii)  $A$  est dit continue dans  $E$  s'il est continue en tout point de  $E$ .

#### Proposition 1.1

Un opérateur linéaire est continue dans  $E$  ssi il si continue a l'origine (i.e. continue en 0).

### 1.1.3 L'opérateur borné

On dit que  $A$  est **borné** s'il existe un constante  $c \geq 0$  tell que

$$\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in D(A)$$

**Définition 1.2** (*Graph, Image et Noyau de A*)

i) **Graphe** de  $A = G(A) = \cup[x, Ax] = \{(x, Ax)/x \in D(A)\} \subseteq E \times F$ .

ii) **Image** de  $A = R(A) = \cup Ax \subset F$ .

iii) **Noyau** de  $A = \ker A = N(A) = \{x \in D(A); Ax = 0\} \subset E$ .

### 1.1.4 L'opérateur fermé

On dit qu'on opérateur  $A$  est **fermé** si

$$G(A) := \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D(A)\}.$$

est fermé dans  $E \times F$ . Ceci équivaut à dire que si une suite  $(x_n)$  dans  $D(A)$  telle que  $x_n \longrightarrow x$  dans  $D(A)$  et  $Ax_n \longrightarrow f$  dans  $F$ , alors

$$\begin{cases} x \in D(A), \\ f = Ax. \end{cases}$$

#### Remarque 1

Si  $A$  est fermé, alors  $N(A)$  est fermé.

### 1.1.5 Ensemble et l'opérateur résolvant, Spectre de $A$

#### Définition 1.3

i) L'ensemble des toutes les valeurs propres de  $A$  est appelé **spectre l'opérateur  $A$** . et toutes les autres valeurs de  $\lambda$  n'appartiennent pas au spectre sont dites valeurs régulières.

$$\lambda \in K, Ax = \lambda x .$$

ii) **Ensemble résolvant** qu'on notera par  $\rho(A)$  on dit  $\lambda \in \rho(A)$  ssi  $A - \lambda I$  est inversible (i.e.  $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E, F)$ ).

on note  $(A - \lambda I)^{-1} = (A_\lambda)^{-1} = R(\lambda, A)$ .

$R(\lambda, A)$  est appelé l'opérateur résolvant ou résolvant de  $A$ .

lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on écrira  $R(\lambda)$  au lieu de  $R(\lambda, A)$ .

iii) On désigne par  $\sigma(A)$  l'ensemble complémentaire dans  $C$  de l'ensemble  $\rho(A)$ .

$\sigma(A)$  est le spectre de  $A$ .

#### Proposition 1.2

Si  $A$  est fermé  $\rho(A) = \{\lambda \in C; R(\lambda) \in L(E, F)\}$  et  $(D(A), \|\cdot\|_A)$  est un espace de Banach.

Où  $\|x\|_A = \|Ax\|_F + \|x\|_E$  est la norme de graphe.

#### Théorème 1.1

Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$  dans l'espace de Banach  $E$ , Alors :

i) L'ensemble  $\rho(A)$  est un ensemble ouvert dans le plan complexe.

ii) La fonction  $\lambda \rightarrow R(\lambda)$  est une fonction analytique de  $\lambda$  dans chaque composante connexe de  $\rho(A)$ .

#### Théorème 1.2

Si  $\lambda$  et  $\mu \in \rho(A)$  et si  $R(\lambda), R(\mu)$  dans  $L(E)$ , alors  $R(\lambda)$ , et  $R(\mu)$  satisfont l'équation de la résolvante

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

**Démonstration.**

On a

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) &= R(\lambda)A_\mu R(\mu) \\
 &= R(\lambda)(\mu I - A)R(\mu) \\
 &= R(\lambda)[(\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)]R(\mu) \\
 &= (\mu - \lambda)R(\lambda) + R(\mu).
 \end{aligned}$$

**Définition 1.4** *L'adjoint de A*

Soit  $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$  un opérateur non borné à domaine dense, on va définir un opérateur non borné  $A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$ . Comme suit, on pose

$$D(A^*) = \{y \in F'; \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle y, Ax \rangle| \leq c\|x\| \quad \forall x \in D(A)\}.$$

Il est claire que  $D(A^*)$  est un sous espace vectoriel de  $F'$ . On va maintenant définir  $A^*y$  pour  $y \in D(A^*)$ , etait donné  $y \in D(A^*)$ .

On considère l'application  $g : D(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ ; défini par :  $g(x) = \langle y, Ax \rangle$ ;  $x \in D(A)$ .

On a  $|g(x)| \leq c\|x\|$ ;  $\forall x \in D(A)$ .

Grace au théorème(Hanh-Banach form analytique) on sait que  $g$  peut être prolongé en un application linéaire  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ . Tell que  $|f(x)| \leq c\|x\|$ ;  $\forall x \in D(A)$  .

Par suite  $f \in E'$ , on remarque que le prolongement de  $g$  est unique puisque  $f$  est continue sur  $E$  et que  $D(A)$  est dense on posé :  $A^*y = f$ .

Il est claire que  $A^*$  est linéaire, l'opérateur  $A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$  est appelle **l'adjoint de A**.

On par consequent la relation fondamentale suivant que lie  $A$  et  $A^*$

$$\langle y, Ax \rangle_{F' \times F} = \langle A^*y, x \rangle_{E' \times E} \quad x \in D(A), \forall y \in D(A^*)$$

.

**Proposition 1.3**

Soit  $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$  un opérateur non borné a domaine dense alors  $A^*$  est fermé (i.e. $G(A^*)$  est fermé dans  $F' \times E'$ ).

**Théorème 1.3**

Soit  $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$  un opérateur non borné fermé avec  $\overline{D(A)} = E$  le propriétés suivants sont équivalantes :

i)  $D(A) = E$ .

- ii)  $A$  est borné.
- iii)  $D(A^*) = F'$ .
- iv)  $A^*$  est borné.

Dans ces conditions on a :  $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F', E')}$ .

### Définition 1.5

Soit  $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ .

- $A$  est dit **autoadjoint** si  $D(A) = D(A^*)$  et  $A = A^*$ .
- $A$  est **symétrique** si  $(y, Ax) = (Ay, x), \forall x, y \in D(A)$ .

### Définition 1.6

Soit  $(A, D(A))$  un opérateur linéaire dans  $H$ . On dit que :

- $A$  est **dissipatif** si  $(Ax, x) \leq 0 \quad \forall x \in D(A)$ .
- $A$  est **maximal** si  $R(I - A) = E$ .

### Théorème 1.4

$(A, D(A))$  est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert  $H$  alors :

- i)  $A$  est fermé.
- ii)  $\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)$  est bijectif de  $D(A)$  sur  $H$  et  $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$  avec :  
 $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}$ .
- iii)  $D(A)$  est dense dans  $H$ .

*Démonstration.* voir [11].

## 1.2 Les semi-groupes

### 1.2.1 Les semi-groupes

Soit  $E$  un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme  $x \longmapsto \|x\|_E$ .

### Définition 1.7

On appelle **semi-groupe** d'opérateurs dans  $E$  une application  $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(E)$  qui vérifie :

- i)  $G(0) = I$  (identité dans  $L(E)$ ).
- ii)  $G(t + s) = G(t)G(s)$ , pour tout  $s, t \geq 0$  (propriété algébrique).

**Remarque 2**

Comme  $t + s = s + t$ , on a  $G(t + s) = G(s + t) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$ . Donc les opérateurs d'un semi-groupe **commutent**.

Soit  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe.  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  est appelé semi-groupe **uniformément continu** si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t) - I\|_{L(E)} = 0.$$

**Définition 1.8 (Générateur Infinitésimal)**

On appelle **générateur infinitésimal** du semi-groupe  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ , l'opérateur linéaire non borné  $A$  défini par :

$$A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}$$

et

$$D(A) = \{\varphi \in E / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } E\}$$

**Définition 1.9**

Un semi-groupe est dit **fortement continu** (de classe  $C_0$ ) si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t)x = x; \quad \forall x \in E.$$

**Remarque 3**

1. Un semi-groupe  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  uniformément continu est fortement continu car

$$\|G(t) - I\|_{L(E)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|G(t)x - x\|_E.$$

2. Si  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ - semi-groupe, l'application  $t \mapsto G(t)x$  est continue sur  $[0, +\infty[$ ,  $\forall x \in E$ .
3. Si  $A$  est un opérateur linéaire borné, il existe un semi-groupe uniformément continu  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  unique ayant  $A$  comme générateur infinitésimal.

**Théorème 1.5**

Soit  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu. Alors il existe deux nombres  $M \geq 1$  et  $\omega \geq 0$  tels que :

$$\|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0,$$

est dit exponentiellement stable.

En particulier, si  $M = 1$  et  $\omega = 0$ , alors on dit que  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de contraction.

**Théorème 1.6**

Soit  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu. Alors le domaine  $D(A)$  de son générateur infinitésimal est caractérisé par :

$$D(A) = \{x \in E : \text{l'application } t \longrightarrow G(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+)\}.$$

De plus, on a

- $AG(t)x = G(t)Ax.$
- Pour  $x \in D(A)$ , on a  $G(t)x \in D(A).$
- $\frac{d}{dt}G(t)x = G(t)Ax = AG(t)x.$

**Théorème 1.7 (Hille-Yosida)**

Un opérateur linéaire  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$

- i)  $A$  est fermé et  $\overline{D(A)} = E.$
- ii)  $\exists \omega > 0, \exists M > 0,$  tels que  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}\lambda > \omega\},$  et  $\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{\text{Re}\lambda - \omega},$  pour  $\text{Re}\lambda > \omega.$

Rappelons le résultat suivant qui généralise le théorème de Hille-Yosida.

**Théorème 1.8 (Phillips-Myadera-Feller)**

Un opérateur linéaire  $A$  vérifie les deux conditions suivantes :

- i)  $A$  est fermé et  $\overline{D(A)} = E.$
- ii) il existe deux nombres réels  $M \geq 1$  et  $\omega$  tels que  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}\lambda > \omega\},$  et  $\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\text{Re}\lambda - \omega)^n},$  pour  $\text{Re}\lambda > \omega,$   $n = 1, 2, \dots,$   
 . Si et seulement si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ - semi-groupe  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  tels que  $\|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t},$  pour  $t \geq 0.$

**Remarque 4**

Une C.N.S. pour que l'opérateur  $A$  engendre un semi group est il existe  $M$  et  $\omega$  reel, telle que :

$$\text{Pour tout } \operatorname{Re}\lambda > \omega \quad \|(A - \lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Si  $A$  admet un système orthonormé complet de fonction propres  $\varphi_{nj}$ . Associées aux valeurs propres  $\lambda_n$

On a aussi le théorème essentiel suivant :

**Théorème 1.9**

Soit  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe et  $A$  son générateur infinitésimal.

Alors :

- i) Pour  $x \in X$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x \, ds = G(t)x$ .
- ii) Pour  $x \in X$ ,  $\int_0^t G(s)x \, ds \in D(A)$  et  $A(\int_0^t G(s)x \, ds) = G(t)x - x$ .
- iii) Pour  $x \in D(A)$ ,  $G(s)x \in D(A)$  et  $\frac{d}{dt}G(t)x|_{t=s} = AG(s)x = G(s)Ax$ .
- iv) Pour  $x \in D(A)$ ,  $G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AG(\tau)x \, d\tau$ .

### 1.3 Semi-groupes analytiques

Au lieu de  $t \in [0, +\infty[$  dans la définition de  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ , on peut penser à élargir ce domaine à  $\Delta \subset \mathbb{C}$ .

On doit choisir nécessairement  $\Delta$  tel que

$$\begin{cases} s \in \Delta \\ \text{et} \\ t \in \Delta \end{cases} \implies s + t \in \Delta.$$

En général, on pose  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$ , avec  $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$ .

Soit  $E$  un espace de Banach complexe .

**Définition 1.10**

Soit  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$ , avec  $\varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$  ou  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < |\arg z| < \varphi_2\}$  un secteur dans  $\mathbb{C}$ .

Une famille  $\{G(z)\}_{z \in \Delta} \subset L(E)$  forme un semi-groupe d'opérateurs dans  $E$  **analytique** dans  $\Delta$ , si elle vérifie les conditions suivantes :

- i)  $G(z_1 + z_2) = G(z_1).G(z_2)$ , pour  $z_1, z_2 \in \Delta$ .
- ii)  $G(0) = I_E$ .
- iii)  $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} G(z)x = x, \forall x \in E$ .
- iv) L'application  $z \in \Delta^* = \Delta \setminus \{0\} \mapsto G(z)x \in E$  est analytique,  $\forall x \in E$ .

**Remarque 5**

1. En général on parle d'un semi-groupe analytique lorsque le secteur  $\Delta$  contient l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
2. Un semi-groupe analytique est fortement continu.

**Théorème 1.10**

Soit  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu et  $A$  son générateur infinitésimal. Si on suppose que  $0 \in \rho(A)$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  peut s'étendre à un semi-groupe analytique dans un secteur  $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$  et  $\|G(t)\|_{L(E)}$  est uniformément bornée. (i.e.,  $\exists M > 0, \|G(t)\|_{L(E)} < M$ ) sur chaque sous-secteur fermé  $\overline{\Delta_{\delta'}}$  de  $\Delta_\delta$  tel que  $\Delta_{\delta'} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \delta' < \delta\}$ .
- ii) Il existe une constante  $C$  telles que pour chaque  $\sigma > 0, \tau \neq 0$

$$\|(A - (\sigma + i\tau))^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

- iii) Il existe  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$  et  $M > 0$  telles que

$$\rho(A) \supset \Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$$

, et

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{|\tau|}, \text{ pour } \lambda \in \Sigma \text{ et } \lambda \neq 0.$$

## 1.4 Problèmes d'évolution non homogènes

Soient  $E, V$  deux espaces normes  $(E, \|\cdot\|_E), (V, \|\cdot\|_V)$ .

$E$ , et  $V$  espace vectoriel sur même corps  $K (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

On suppose que  $V \hookrightarrow E$ , l'injection (i.e.  $V \subset E$  et  $V$  est dense dans  $E$ ).

## Chapitre 1 : Rappels et définitions

---

On indentifie  $E$  à son dual alors :  $V \subset E \cong E^* \subset V^*$

On considère la forme bilinéaire

$$u, v \rightarrow a(u, v) \quad \text{d'finiesur } V \times V.$$

Tel que la forme  $a$  coerecitivité, et continue.

Soit  $(A, D(A))$  le générateur infintésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $(G(t)_{t>0})$  sur un espace de Hilbert  $E$ . on veut résoudre :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), t \in (0, T) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ou  $f \in [0, T] \longrightarrow E$ .

### Définition 1.11

Soit  $f \in L^1((0, T); E)$  et  $y_0 \in E$ .

On appelle **solution faible** de (1.1) la fonction  $y \in C([0, T]; E)$  donnée par

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

On appelle **solution classique** de (1.1) toute fonction

$$y \in C([0, T]; E) \cap C^1((0, T); E) \text{ telle que } y(t) \in D(A).$$

Pour tout  $t \in (0, T)$  et vérifiant (1.1) dans  $[0, T]$ .

### Théorème 1.11

Soit  $f \in L^1((0, t); E)$  et  $y_0 \in H$  le problème (1.1) admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule (1.2).

### Démanstration.

Il suffit de démontrer que toute solution classique est donnée par la formule (1.2). soit  $y$  un solution classique. Pour tout  $t \in (0, T]$ , on considère la fonction  $z : (0, t) \longrightarrow E$  définie par :

$$z(s) = G(t-s)y(s), s \in (0, t).$$

Puisque  $y(s) \in D(A)$ , la fonction  $\tau \mapsto G(\tau)y(s)$  est dérivable pour tout  $\tau > 0$ .

Par conséquent,  $z$  est dérivable sur  $(0, t)$  et on a

$$\begin{aligned} z'(s) &= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)y'(s) \\ &= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)Ay(s) + G(t-s)f(s) \\ &= G(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Comme  $f^1((0, T); E)$  on en déduit que  $z' \in L^1((0, T); E)$  et en l'intégrant entre 0 et  $t$  on obtient

$$z(t) = z(0) + \int_0^t G(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

c'est-à-dire

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

D'ou le résultat.

## 1.5 Semi groupe de l'équation des ondes (Hyperboliques)

Soit  $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$\langle (y, z), (f, g) \rangle = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla f dx + \int_{\Omega} z g dx.$$

On définit l'opérateur

$$\begin{cases} D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \\ A(y, z) = (z, \Delta y) \end{cases} \quad (1.3)$$

On a le résultat suivant

### Proposition 1.4

*L'opérateur  $A$  est maximal dissipatif et anti-symétrique :*

$$\langle A(y, z), (y, z) \rangle = -\langle (y, z), A(y, z) \rangle \forall (y, z) \in D(A).$$

**Proposition 1.5**

*l'opérateur  $\tilde{A}$  est maximal dissipatif et anti-symétrique.*

**Remarque 6**

*Des propositions (1.2) et (1.3), on peut déduire que  $A$  et  $\tilde{A}$  sont anti-adjoints :  $A = -A^*$  et  $\tilde{A} = -\tilde{A}^*$ .*

*On considère l'équation des ondes*

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y, (0, T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0, \text{sur}(0, T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ y(0, \cdot) = y_0, y_t(0, \cdot) = y_1 \end{cases} \quad (1.4)$$

*Avec les notations, le système (1,4) s'écrit dans  $E$  (resp.  $\tilde{E}$ )*

$$\begin{cases} Y_t = AY \\ Y = Y^0 \in E \end{cases} \quad (1.5)$$

**Proposition 1.6**

*$A$  (resp.  $\tilde{A}$ ) est générateur infinitésimal d'un  $C_0$ - semi-groupe de contractions  $(G(t))_{t \geq 0}$  (resp.  $(\tilde{G}(t))_{t \geq 0}$ ) sur  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  (resp.  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ ).*

*Soit  $(\lambda_k)_{k \in N}$  la suite des valeurs propres de  $-\Delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $(\phi_k)_{k \in N}$  la suite de fonctions propres correspondantes. On sait que celles-ci forment une base orthonormée de  $E = L^2(\Omega)$ .*

*On note alors pour tout  $x \in L^2(\Omega)$  (voir [10]).*

$$\cos(\sqrt{-\Delta}t)x = \sum_{k \in N} \cos(\sqrt{\lambda_k}t)(x, \phi_k)\phi_k$$

$$\sin(\sqrt{-\Delta}t)x = \sum_{k \in N^*} \sin(\sqrt{\lambda_k}t)(x, \phi_k)\phi_k$$

*On note que :*

$$\sigma(A) = \{\pm i\sqrt{\lambda_k}, k \in N\}$$

$$AE_k^\pm = \pm i\sqrt{\lambda_k}E_k^\pm$$

$$E_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \\ \pm 1 \end{pmatrix} \phi_k$$

et la famille  $(E_k^\pm)_{k \in N}$  forme une base orthonormée du complexifié de  $E$ . On peut aisément établir que :

$$G(t) \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\Lambda}t & \sqrt{\Lambda}\sin\sqrt{\Lambda}t \\ -\sqrt{\Lambda}\sin\sqrt{\Lambda}t & \cos\sqrt{\Lambda}t \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

On considère le problème non homogène

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + f, (0, T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0, \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ y(0, \cdot) = y_0, y_t(0, \cdot) = y_1 \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

Comme conséquence des propriétés de la solution faible d'un problème non homogène (voir Définition (1.11))

**Théorème 1.12**

Soit  $T > 0$ . Pour tout  $f \in L^1((0, t); L(\Omega))$  et tout  $(y_0, y_1) \in H_0^1 \times L^2$  il existe une solution faible  $(y; y_t) \in (C([0, T]); H_0^1 \times L^2(\Omega))$  de (1, 7). De plus, cette solution dépend continuellement des données initiales et du second membre. Plus précisément

$$\max_{t \in [0, T]} |y_t(t)| + \max_{t \in [0, T]} \|y_t(t)\|_{H_0^1} \leq |y_1| + \|y_0\|_{H_0^1} + \|f\|_{L^1((0, t); L^2)}$$

*Démonstration.* voir [10].

# Chapitre 2

## Contrôlabilité des systèmes évolutifs

### 2.1 Position du problème

Soit  $T > 0$ ;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné représentant le domaine géométrique du système (2, 1), on suppose que la frontière  $\partial\Omega$  est assez régulière.

$$Q = \Omega \times ]0, T[$$

On considère les systèmes suivants décrits par l'équation différentielle opérationnelle :

Trouver  $y(t)$  tel que :

$$\begin{cases} \dot{y} + Ay = Bu \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où

$y$  : La fonction de l'état du système (2, 1),  $y(x; t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0; T)$ .

$$\dot{y} = \frac{\partial(y)}{\partial(t)}.$$

$y_0$  : L'état initial.

$$A \in L(V, E).$$

$$B \in L(U, E).$$

$u \in L^2(0, T; U)$  : La fonction de contrôle.

Nous supposons que le système (2, 1) est augmenté de l'équation de sortie  $z = Cy$  ( $C$  est un opérateur).

Mathématiquement cette formulation est assez générale et se prête mieux à certaines démonstrations et aux définitions des diverses notions liées à l'analyse des systèmes.

Dans tout ce travail, nous ramènerons systématiquement tout les systèmes étudiés à la formulation (2, 1) ci dessus.

Nous allons rappeler diverses notions liées à l'analyse à travers le Choix d'opérateur  $B$ , c'est-à-dire encore à travers les divers types d'excitations aux quels peut être soumis le système (2,1), par exemple nous rappelons dans ce chapitre les excitations de type suivant :

- **Zone** : sur une partie de  $\Omega$  ou de sa frontière.
- **Ponctuelle** : sur  $\Omega$  ou sa frontière.
- **Filament** : dans  $\Omega$  ou sa frontière.

Mathématiquement cela correspond au cas où le support de l'action est de dimension :

Egal à celle de  $\Omega$ , ou à celle de sa frontière pour le cas zone.

Egal à 0, pour le cas ponctuel.

Egal à 1, pour le cas filament.

### 2.1.1 Hypothèses

Dans l'étude de système (2,1), on fait les hypothèses suivantes :

**H(1)** :  $E; U$  sont des espaces de Hilbert séparables désignant respectivement l'espace l'état, de contrôlé .

**H(2)** :  $u \in L^2((0, T), U)$  ;  $B \in \mathcal{L}(U, E)$ .

**H(3)** :  $A$  est auto-adjoint à résolvante compact, et engendre un semi-groupe fortement continu  $(G(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$ .

#### **Théorème 2.1**

Sous les hypothèses ci-dessus, (2,1) admet une solution faible unique fortement continue sur  $[0; T]$  et donnée par

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t - \tau)Bu(\tau)d\tau. \quad (2.2)$$

#### **Remarque 7**

- i) Les hypothèse de continuité faite sur  $B$  est forte, elle sera modifiée dans les cas ponctuel et frontière( voir [5]).

ii) La régularité de la solution de (2,1) dépendra du terme  $Bu$  et de  $y_0$ , en pratique on dispose d'un nombre fini d'actionneurs (pour la définition voir page (46,47) ) ainsi  $B$  est en général est un opérateur compact.

iii) Dans la plupart des situations citées nous aurons :

$$E = L^2((0, T), U); U = \mathbb{R}^p.$$

$p$  désigne en fait le nombre fini d'actionneurs.

iv) **H(3)**  $\implies A$  admet un spectre dénombrable discret

$$\delta(A) = \{\lambda_1; \lambda(2); \dots; \lambda(k); \dots \text{ avec } \lim \lambda_k = -\infty; k \longrightarrow +\infty.$$

## 2.2 Contrôlabilité

### *Introduction*

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis (2,1) de dimension infinie, l'état du système ne peut pas être atteint en général. C'est le cas, par exemple, où l'opérateur  $A$  n'est pas borné et que  $D(A)$  peut être différent de  $E$ , mais les éléments qui ne sont pas atteints, peuvent être approchés ceci nous amène à introduire divers degrés de contrôlabilité.

Notons  $N$  opérateur linéaire borné,  $u \in L^2((0, T), U); Nu \in L(E)$  définie par

$$Nu = \int_0^T G(t - \tau)Bu(\tau)d\tau; (\text{l'état final}) \tag{2.3}$$

$N$  désigne l'opérateur  $N_T$ .  $N$  sera utilisé par la suite, pour diverses définitions et propriétés.

### **Proposition 2.1**

$$N_T \in \mathfrak{L}((L^2([0, T]); U); E)$$

$$\text{et } \|N_T\| \leq \sqrt{T} \|G\|_{C([0, T]; E)} \|B\|_{L(U, E)}$$

**Définition 2.1**

On définit,  $R_T(a)$ , l'ensemble des l'état atteignables au temps  $T$  à partir de  $a$ . On a :

$$R_T(a) = G(T)a + \text{Im}(N_T)$$

l'étude de la contrôlabilité au temps  $T$  revient à l'étude de  $\bigcup_{a \in E} R_T(a) = R_T(a)$ . Du fait de la dimension infinie, on peut avoir

$$\begin{aligned} R_T(E) &\neq \overline{R_T(E)} \\ \text{et } G(t)E &\neq E \end{aligned}$$

On introduit l'opérateur de contrôlabilité  $Q_T$ ,  $x \in E, T > 0$

$$Q_T x = \int_0^T G(r) B B^* G^*(r) x dr; \quad (2.4)$$

**Remarque 8**

$Q_T$  est un opérateur borné, donc il existe  $c > 0$  tel que

$$|Q_T x| \leq c|x|; x \in E, T > 0$$

$Q_T$  est aussi auto-adjoint et positif

**Proposition 2.2**

$$R(N_T) = R(Q_T^{\frac{1}{2}}) \quad (2.5)$$

### 2.2.1 Contrôlabilité exacte

Le système considère est (2,1), et  $E$  désigne l'espace de l'état  $T > 0$ .

**Définition 2.2**

le système (2,1) est dit **exactement contrôlable** sur  $[0, T]$  si  $\forall y_d \in E, \exists u \in L^2(0, T; U)$  tel que :

$$y(T) = y_d \quad (2.6)$$

**Remarque 9**

L'opérateur  $N$  étant défini en (2,3), la définition précédente équivaut à

$$R(N) = E \quad (2.7)$$

**Théorème 2.2**

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Le système (2,1) est exactement contrôlable au temps  $T > 0$
- ii) Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x \in E$

$$\int_0^T |B^*G^*(t)x|^2 \geq c|x|^2 \quad (2.8)$$

iii)

$$R(Q_T^{\frac{1}{2}}) = E \quad (2.9)$$

- iv)  $x \mapsto |\sqrt{Q_T}x|$  définit sur  $E$  une norme équivalente à la norme de  $E$

*Démonstration.* voir [10].

**Définition 2.3**

Soit  $E_1$  un sous espace vectoriel de  $E$ , le système (2,1) est dit exactement contrôlable dans  $E_1$ ,  $\forall y_d \in E_1, \exists u \in L^2(0, T; U)$  tel que :

$$y(T) = y_d \quad (2.10)$$

**Remarque 10**

La définition précédente équivaut à :

$E_1 \subset \text{Im}(N)$ ,  $N$  étant toujours défini par (2,3)

**Caractérisations**

De la définition (2,2) résultent les propriétés de caractérisations suivantes :

**Proposition 2.3**

Le système (2,1) est exactement contrôlable sur  $[0, T]$ , si et seulement si  $\exists \gamma > 0$  tel que :

$$\|y^*\|_{E^*} \leq \gamma \|B^*G^*(\cdot)y^*\|_{L^2(0,T;U)} \quad (2.11)$$

Pour tout  $y^*$  dans  $E^*$

Où  $(G^*(t))_{t \geq 0}$  est semi group adjoint de semi group  $(G(t))_{t \geq 0}$

**Lemme 01**

Soient  $E, F$  et  $G$  des espace de Banach réflexifs et  $f \in L(E, G), g \in L(F, G)$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1)  $Im f \subset Im g$ .

2)  $\exists c > 0$  tel que  $\|f^*y^*\|_{E^*} \leq c\|g^*y^*\|_{F^*}, \forall y^* \in G^*$ .

La propriété de caractérisation donnée ci- dessus est intéressante dans la mesure ou on ramène l'exact contrôlabilité a un inégalité assez facile a expliciter pour un système (2,1) donné.

Il y a des cas ou certaines hypothèses sur les paramètres du système permettent directement de savoir si le système est exactement contrôlable ou non, ainsi nous avons :

**Définition 2.4**

Soit  $N_t : L(0, T; U) \longrightarrow E$  l'opérateur défini par :

$$N_t u = \int_0^t G(t - \tau) B u(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

**Proposition 2.4**

Si pour tout  $t \geq 0$ ,  $N_t$  est compact pour tout  $t > 0$ , alors le système (2,1) n'est pas exactement contrôlable.

**Corollaire 01 :**

Si  $(G(t))_{t > 0}$  est compact pour tout  $t > 0$ , alors le système (2,1) n'est pas exactement contrôlable.

**Corollaire 02 :**

Si  $B$  est compact, alors le système (2,1) n'est pas exactement contrôlable.

Dans le système (2,1), n'est pas être exactement contrôlable, au sens de la définition (2,2), si  $B$  ou  $(G(t))_{t > 0}$  sont comacts.

## Contrôlabilité exacte de l'équation Hyperbolique

### Contrôle interne

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier (de frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne) de  $R^n$  et  $\omega \subset \Omega$  un deuxième ouvert. On considère le problème de contrôle

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + 1_\omega u, & (0, T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ y(0, \cdot) = y_0, \quad y_t(0, \cdot) = y_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (2, 13). soit  $T > 0$ . On cherche  $u \in L^2(Q_T)$  tel que pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1) \in E = H_0^1 \times L^2(\Omega)$  il existe un unique solution  $y$  de (2, 13) vérifiant  $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$  dans  $\Omega$ .

Dans toute cette on fait l'identification  $\dot{E} = E$ .

Pour se ramener au cadre abstrait, on définit sur  $E$  l'opérateur  $(A, D(A))$ .

et  $B : U = L^2(\Omega) \longrightarrow E$  par

$$u \longrightarrow Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_\omega \end{pmatrix} u$$

Le système (2, 13) s'écrit alors dans  $E$  :

$$\begin{cases} Y_T = AY + Bu \\ Y(0) = Y^0 \in E \end{cases}$$

On sait que  $A$  est générateur d'un semi groupe de contractions  $(G(t))_{t>0}$  sur  $E$  et il est clair que  $B \in \mathcal{L}(U, E)$  D'après le théorème (2, 2) il faut trouver des conditions sur  $T$  et  $\omega$  pour qu'il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $z^0 \in E$

$$\int_0^T |B^* G^* z^0|^2 dt \geq c |z^0|^2 \quad (2.14)$$

Mais  $z(t) = G^*(t)x$  est la solution du problème

$$\begin{cases} z_t = A^* z \\ z(0) = z^0 \in E \end{cases}$$

Or, un calcul simple montre que  $A$  est anti-adjoint :  $A^* = -A$ . il est alors clair que si  $z = (z_1, z_2)$  et  $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ , l'inégalité (2, 14) s'écrit

$$\int_0^T \int_{\omega} |z^2|^2 dx dt \geq c \left( \int_{\Omega} |\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2 \right)$$

On peut ailleurs vérifier directement que puisque  $z_2 = -z_{1t}$  et  $z_{2t} = -\Delta z_1$ , il s'ensuit que  $z_{1tt} = \Delta z_1$  et que, en posant  $z = z_1$ , il s'agit de démontrer que

$$\int_0^T \int_{\omega} |z_t|^2 dx dt \geq c \left( \int_{\Omega} |\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2 \right) \quad (2.15)$$

pour  $z$  solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} z_{tt} = \Delta z, (0, T) \times \Omega = Q_T \\ z = 0, \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ z(0, \cdot) = z_1^1, z_t(0, \cdot) = z_2^0 \end{cases} \quad (2.16)$$

le cas  $\omega = \Omega$

### Théorème 2.3

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $R^n$  de frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne. Pour toute donnée initiale  $(z_1^0, z_2^0) \in E$ , on a

$$\int_0^T \int_{\omega} |z_t|^2 dx dt \geq c \left( \int_{\Omega} (|\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2) dx \right)$$

pour tout solution  $z$  de (2, 16)

### Remarque 11

Ce théorème implique bien entendu, d'après les développements précédents, la contrôlabilité exacte du système (2, 13) pour tout  $T > 0$

**Le cas  $\omega \neq \Omega$**

L'inégalité d'observabilité (2, 15) n'est en général pas vraie pour un ouvert  $\omega$  quelconque comme nous le verrons sur un exemple ( voir [11]). A cause de caractère heperbolique de l'équation des ondes, il faudra d'un part un temps minimal de contrôle et d'autre part, des conditions géométrique sur  $\omega$ .

Soit  $x_0 \in R^n$  et  $q(x) = x - x_0$  pour tout  $x \in R^n$ . On note  $\nu$  la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  que l'on suppose de classe  $C^2$ . On définit :

$$\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega; q(x) \cdot \nu(x) > 0\}; \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0. \Sigma_i = \Gamma_i \times (0, T); i = 0, 1.$$

## Chapitre 2 : Contrôlabilité des systèmes évolutifs

---

Pour  $\varepsilon > 0$  arbitrairement fixé, on considère  $O_\varepsilon$ , voisinage ouvert d'ordre  $\varepsilon$  dans  $R^n$  de  $\Gamma_0$ , et on prend  $\omega = \Omega \cap O_\varepsilon$ .

### **Théorème 2.4**

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $R^n$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Et  $\omega \subset \Omega$  l'ouvert défini dans les lignes précédentes. Il existe  $T_0 > 0$  tel que  $\forall T > T_0, \exists c = c_T > 0$  vérifiant

$$\left( \int_\omega |\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0| \right) \leq c \int_0^T \int_\omega |z_t|^2 dx dt \quad (2.17)$$

pour tout solution  $z$  de (2, 16) correspondant à des données initiales  $(z_1^0, z_2^0) \in E$

### **Remarque 12**

Par rapport au cas précédent ( $\omega = \Omega$ ), On constate que la contrôlabilité exacte nécessite un temps minimal. C'est en fait dû au caractère hyperbolique : la vitesse de propagation le long des bicaractéristique est finie et il faut donc un temps pour atteindre  $\omega$

la démonstration de ce théorème nécessite quelques résultats intermédiaires

Dans la suite,  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $R^n$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Et  $\omega \subset \Omega$  l'ouvert défini précédemment.

### **Lemme 02**

Soit  $h \in (C^1(\overline{Q_T}))^n$ . Pour toute solution (faible)  $z$  de (2, 16), on a l'identité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \int_{\Sigma_T} h \cdot \nu \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T \right) &= \left[ \int_\omega z_t \cdot h \cdot \nabla z \right]_0^T + \int_{Q_T} \frac{1}{2} (\nabla \cdot h) (z_t^2 - |\nabla z|^2) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_T} \{ -(h_t \cdot \nabla z) z_t + (D_x h \cdot \nabla z) \cdot \nabla z \} dx dt \end{aligned}$$

ou  $D_x h$  désigne la différentielle de  $h$ .

### **Contrôle par le bord**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^2$ . ( de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  avec  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \neq \emptyset$  et soit  $T > 0$ ). On veut déterminer, quand cela est possible,  $u \in L^2((0, T) \times \Gamma_0) = L^2(\Sigma_0)$  tel que pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1)$  dans un espace  $E$  à déterminer, il existe une unique "solution"  $y$  de

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y, (0, T) \times \Omega = Q_T \\ y = 0, \text{sur}(0, T) \times \Gamma_1 \\ y = u, \text{sur} \Sigma_0 \\ y(0, \cdot) = y_0, y_t(0, \cdot) = y_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

telle que  $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$ . Il s'agit bien d'un problème de contrôlabilité exacte mais qui ne s'insère pas directement dans le cadre abstrait car les données au bord ne sont pas homogènes. l'opérateur de "contrôl" est l'opérateur "trace sur  $\Gamma_0$ " et il est non borné de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . La théorie précédente a donc besoin d'être généralisée.

Dans un premier temps, on va définir l'espace  $E$  et l'opérateur de contrôl  $N_T$ . Il s'agit de pouvoir assurer l'existence d'une notion de solution du système (2,18).

### Définition 2.5

$y$  est solution ou sens de la transposition du système (2,18) si  $y$  vérifie sur  $Q_T$  :

$$\int_{\Sigma_T} y \cdot f \, dx \, dt = - \int_{\omega} y_0 \cdot \theta_t \, dx + \langle y_1, \theta(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} u \, d\Sigma_T \quad (2.19)$$

pour tout  $f \in D(Q_T)$ , ou  $\theta(f) = \theta$  est solution de

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta \theta = f, (0, T) \times \Omega = Q_T \\ \theta = 0, \text{sur}(0, T) \times \Gamma_1 \\ \theta(T, \cdot) = \theta_t(T, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

### Théorème 2.5

Soit  $T > 0$ . Pour toutes données initiales  $(y_0, y_1) \in E = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  et tout  $u \in L^2(\Sigma_0)$ , il existe une solution unique  $y$  (ou sens de la transposition) du système (2,18), telle que  $y \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^1(\Omega))$ .

De plus, il existe  $c_T > 0$  tel que  $y$  vérifie pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|y(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|y_t(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_T (\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Sigma_0)})$$

### Remarque 13

Pour  $u = 0$ , on définit une application  $G_1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $L(E)$  par :  
pour tout  $(y_0, y_1) \in E$

$$G_1(t)(y_0, y_1) = (y(t), y_t(t))$$

Cette application définit un semi groupe fortement continu de  $R$  dans  $\mathfrak{L}(R)$ .

Et donc pour tout  $t \in R$ ,  $G_1(t)E = E$ .

### 2.2.2 Contrôlabilité approchée

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on définit :

**Définition 2.6**

la paire  $(A, B)$  est **approximativement contrôlable** au temps  $T > 0$  si

$$\overline{R(N_T)} = E.$$

**Théorème 2.6**

Les propriétés suivantes sont équivalentes

- i)  $(A, B)$  est approximativement contrôlable au temps  $T > 0$ ,
- ii)  $\text{Ker}(N_T^*) = \{0\}$ ,
- iii)  $B^*G^*(t)x = 0, ; p.p.t \in (0, T) \implies x = 0$ ,
- iv)  $\sqrt{(Q_T x, x)}$  est une norme sur  $E$ .

### 2.2.3 Contrôlabilité aux trajectoires

**Définition 2.7**

La paire  $(A, B)$  est dit **contrôlable à zéro** au temps  $T > 0$  si tout état  $a \in E$  peut être transféré à 0 au temps  $T$  :

$$\forall a \in E, \exists u \in L^2((0, T); U); G(T)a + N_T u = 0$$

**Remarque 14**

La contrôlabilité exacte revient à pouvoir résoudre en  $u$ ,  $G(T)a + N_T u = b$ . Si  $G(\cdot)$  est un groupe, alors

$$\begin{aligned} G(t)a + N_T u = b &\iff G(T)a + N_T u = G(T)G(-T)b \\ &\iff G(T)(a - G(-T)b) + N_T u = 0 \end{aligned}$$

Et donc la contrôlabilité exacte est, dans ce cas, équivalente à la contrôlabilité à 0

**Définition 2.8**

Soit  $b$  une "trajectoire" au temps  $T > 0$  : il existe  $c \in E, v \in L^2((0, T); U)$  tel que

$$y(T, c, v) = b = G(T)c + L_T v$$

Le système est dit contrôlable au temps  $T > 0$  aux **trajectoires** si pour tout  $a, c \in E, v \in L^2((0, T); U)$ , il existe  $u \in L^2((0, T); U)$  tel que

$$G(T)a + N_T u = G(T)c + N_T v$$

**Proposition 2.5**

La contrôlabilité aux trajectoires est équivalente à la contrôlabilité à zéro.

**Théorème 2.7**

Les propriétés suivantes sont équivalentes

- i)  $(A, B)$  est contrôlable à zéro au temps  $T > 0$
- ii) Il existe  $c_T > 0$  tel que pour tout  $x \in E$

$$\|G(T)^* x\| \leq c_T \int_0^T \|B^* G^*(t)x\|^2 dt$$

- iii)  $R(G(T)) \subseteq R(N_T)$

**Proposition 2.6**

- La contrôlabilité exact **implique** la contrôlabilité approchée mais **la réciproque est fautive**.
- La contrôlabilité exact **implique** la contrôlabilité aux trajectoires mais **la réciproque est fautive**.
- Il n'y a aucune relation entre contrôlabilité approchée et contrôlabilité aux trajectoires.

## 2.2.4 Contrôlabilité faible

**Définition 2.9**

Le système  $(2, 1)$  est dit **faiblement contrôlable** dans  $E$  sur  $[0, T]$  si

$$\forall y_d \in E, \forall \epsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que : } \|y_u(T) - y_d\| \leq \epsilon.$$

**Remarque 15**

Dans la définition précédente le choix de  $y_d$  dans  $E$  est important.

Nous restreignons à un sous espace vectoriel  $E_1$  de  $E$  pour obtenir l'exacte contrôlabilité sur  $E_1$ .

**Caractérisation**

Pour les systèmes distribués, la notion faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée.

Nous pouvons la caractériser par la :

**Proposition 2.7** Il y a équivalence entre :

- i) Le système (2, 1) est faiblement contrôlable sur  $[0, T]$
- ii)  $\overline{Im(N)} = E$
- iii)  $Ker(N^*) = Ker(N^*N) = \{0\}$
- iv)  $\{\langle y, G(s)Bv \rangle_E = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall v \in U\} \implies y = 0$ .
- iiiv) Si le semi group  $(G(t))_{t>0}$  est analytique alors on a :

$$\overline{\cup Im(A^n G(s)B)} = E, \forall s \in [0, T] \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

**Démonstration**

$i \implies ii$ .

Le système (2, 1) faiblement contrôlable sur  $[0, T]$

$$\iff \forall y_d \in L^2(\Omega), \forall \epsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } : \|y_u(T) - y_d\| \leq \epsilon.$$

On a  $y(t) = Nu$  alors

$$\forall y_d \in E, \forall \epsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } : \|Nu - y_d\| \leq \epsilon.$$

$$\iff \overline{Im(N)} = E$$

$ii \implies iii$ .

On a

$$(\overline{Im(N)})^\perp = (E)^\perp$$

$$\implies (\overline{Im(N)})^\perp = \{0\}.$$

Et comme

$$(\overline{Im(N)})^\perp = Ker N^*$$

alors

$$Ker N^* = \{0\}$$

On calcule  $Ker(N^*N)$ , on suppose que

$$\exists x \in E \text{ tel que } \langle (N^*Nx, y) \rangle = 0, \forall y \in E$$

$$\implies \exists x \in E \text{ tel que } \langle (N^*x, N^*y) \rangle = 0, \forall y \in E.$$

Pour  $y = x$  on a

$$\exists x \in E \text{ tel que } \langle (N^*x, N^*x) \rangle = \{0\},$$

$$\implies \exists x \in E \text{ tel que } \|N^*\| = 0,$$

et comme  $Ker(N^*) = 0$

$$\implies x = 0$$

$$\implies ker(N^*N) = \{0\}$$

d'où

$$Ker(N^*) = Ker(N^*N) = \{0\}.$$

*iii*  $\implies$  *iv*.

On a

$$Ker(H^*) = Ker(H^*H) = \{0\},$$

C'est-à-dire

$$\{\langle y, G(s)Bv \rangle_E = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall v \in U\} \implies y = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} & (\langle y, G(s)Bv \rangle_E = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall v \in U) \\ \implies & \{ \langle B^*G(s)^*y, v \rangle_E = 0, \forall s \in [0, T] \text{ et } \forall v \in U \} \\ & \implies N^*y = 0 \\ & \implies y = 0. \end{aligned}$$

***iv***  $\implies$  ***iiiv***

On suppose que

$$\exists s \in ]0, T[ \text{ tel que } \overline{\cup \text{Im}(A^n G(s)B)} \neq E, \text{ et } n \in N$$

$$\implies \exists s \in ]0, T[ \exists y \neq 0 \text{ tel que } \langle y, A^n G(s)Bv \rangle = 0, \forall n \in N, \forall v \in U.$$

Or

$$\langle y, A^n G(s)Bv \rangle = \frac{\partial}{\partial^n s} \langle y, G(s)Bv \rangle, \forall n.$$

Et par l'analytique on en déduit que

$$\langle y, G(s)Bv \rangle = 0, \forall v \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s$$

$$\langle y, G(s)Bv \rangle = 0, \forall v \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s \text{ c'est-à-dire } \mathbf{iiiv}.$$

***iiiv***  $\implies$  ***i***

Si non

$$\begin{aligned} & \exists y \neq 0 \text{ tel que } \langle y, G(s)Bv \rangle = 0, \forall v \in U, \forall n \in N \\ \implies & \forall n \in N \forall v \in U : \frac{\partial}{\partial^n s} \langle y, G(s)Bv \rangle = 0, \forall s \in ]0, T[ \\ \implies & \langle y, A^n G(s)Bv \rangle = 0, \forall s \in ]0, T[, \forall n \in N, \forall v \in U \\ \implies & \overline{\cup \text{Im}(A^n G(s)B)} \neq E, \forall s \in [0, T] \text{ et } n \in N \end{aligned}$$

C'est-à-dire non E.

### 2.2.5 Contrôlabilité régionale

Les concepts d'état de système sont attachés un certain nombre qui jouent un rôle fondamental dans la théorie de la commande. Il s'agit en général, d'amener l'état du système à des valeurs désirées sur une partie de  $\Omega$ .

#### Définition de la contrôlabilité régionale et caractérisation

Soit  $y_d \in L^2(\omega)$  un état désiré donné, le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle  $u \in U$  permettant d'amener l'état du système (2,1) de  $y_0$  à  $y_d$  sur la région  $\omega$ .

#### Définition 2.10

Le système(2,1) est dit **exactement régionalement contrôlable** sur  $\omega$  si pour tout  $y_d \in E$ , il existe un contrôle  $u \in U$  tel que  $y_u(T)|_\omega = y_d$ .

Le système(2,1) est dit **faiblement régionalement contrôlable** sur  $\omega$  si  $\forall \epsilon \geq 0$ , il existe un control  $u \in U$  tel que :

$$\|y_u(T)_\omega - y_d\|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon.$$

Le système (2,1) sera aussi dit  $\omega$  – exactement (resp.faiblement) contrôlable où  $y_u(\cdot)$  est donné par (2,2) et  $y|_\omega$  désigne la restriction de  $y$  à  $\omega$

#### Remarque 16

Les définition ci- dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'état atteint sur la région  $\omega$ .

La contrôle  $u$  dépend de la variable du temps mais implicitement, il dépend aussi du sous-domaine  $\omega$

Plusieurs difficultés sont sous-jacentes à ces définitions.

Notons, en partie que l'opérateur  $B$  est lié au mode d'excitation du système. Si le système excite par une action ponctuelle ou frontière, l'opérateur  $B$  n'est plus borné donc il faut revoir le choix des espaces. Cependant l'étude peut être faite de la même manière.

On pose

$$N : L^2(0, T; U) \longrightarrow E \text{ et } \chi_\omega : L^2 \longrightarrow L^2(\omega)$$

défini par :

$$Nu = \int_0^t G(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \text{ et } \chi_\omega y = y|_\omega$$

L'adjoint de  $\chi_\omega$  est  $(\chi_\omega)^* : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  défini par :

$$(\chi_\omega^* y)(x) = \begin{cases} (x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

L'opérateur  $N$  étant défini, les définitions précédentes sont équivalentes à

1)  $Im \chi_\omega N = L^2(\omega)$  dans le cas de la contrôlabilité régionale exacte.

2)  $\overline{Im \chi_\omega N} = L^2(\omega)$  dans le cas de la contrôlabilité régionale faible.

La contrôlabilité régionale exacte peut être caractérisée par :

**Proposition 2.8**

Si  $u \in L^2(0, T; U)$ , alors le système (2, 1) est exactement régionalement contrôlable si et seulement si pour tout  $y^* \in L^2(\omega)$  il existe  $\gamma > 0$ , tel que

$$\gamma \|B^*G^*(\cdot)(\chi_\omega)^*y^*\|_{L^2(0,T;U)} \geq \|y^*\|_{L^2(\omega)}$$

**Proposition 2.9**

1) Le système (2, 1) est dit exactement régionalement contrôlable si et seulement si

$$Ker \chi_\omega + Im N = L^2(\Omega)$$

2) Le système (2, 1) est faiblement régionalement contrôlable si et seulement si

$$Ker \chi_\omega + \overline{Im N} = L^2(\Omega)$$

**Démonstration**

1) Soit  $y \in L^2(\Omega)$ , on a  $y = y_1 + y_2$  avec  $y_1 = 0$  sur  $\omega$  et  $y_2 = 0$  sur  $\Omega \setminus \omega$  le système (2, 1)

## Chapitre 2 : Contrôlabilité des systèmes évolutifs

---

étant exactement régionalement contrôlable, donc  $y_2 \in \text{Im}\chi_\omega N$ , autrement dit il existe  $u \in U$  tel que

$$\begin{aligned}y_2 &= Nu. \\y_1 &= 0\end{aligned}$$

Donc

$$y_1 \in \text{Ker}\chi_\omega$$

alors

$$y \in \text{Ker}\chi_\omega + \text{Im}N \implies \text{Ker}\chi_\omega + \text{Im}N = L^2(\Omega)$$

Maintenant, soit  $y \in L^2(\omega)$  alors

$$(\chi_\omega)^* y \in L^2(\omega) \implies \exists y_1 \in \text{Ker}\chi_\omega, \exists y_2 \in \text{Im}N$$

Tel que

$$(\chi_\omega)^* y = y_1 + y_2 \implies \exists y_1 \in \text{Ker}\chi_\omega, \exists y_2 \in \text{Im}N$$

Tel que

$$\chi_\omega(\chi_\omega)^* y = \chi_\omega y_1 + \chi_\omega y_2 \implies \exists z_1 \in \text{Ker}\chi_\omega, \exists y_2 \in \text{Im}N$$

Tel que

$$y = \chi_\omega y_2 \implies y \in \text{Im}(\chi_\omega N)$$

Donc

$$\text{Im}(\chi_\omega N) = L^2(\omega)$$

alors le système (2,1) est exactement régionalement contrôlable.

2) Si le système (2,1) est faiblement régionalement contrôlable  $y_2 \in \overline{\text{Im}\chi_\omega N}$  ou encore  $\forall \epsilon > 0, \exists u \in U$  tel que

$$\|y_2 - \chi_\omega N u\|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$$

il vient

$$\|y_2 - N u\|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$$

*c'est -à-dire*

$$y_2 \in \overline{ImN}$$

*alors*

$$y \in Ker\chi_\omega + \overline{ImN}$$

*donc*

$$Ker \chi_\omega + \overline{ImN} = L^2(\Omega).$$

**Remarque 17**

*Le système (2,1) est faiblement régionalement contrôlable sur  $\omega$  si et seulement si :*

$$Ker N^* + Im(\chi_\omega)^* = \{0\}$$

**Corollaire :**

*Le système (2,1) est faiblement régionalement contrôlable dans  $L^2(\omega)$  sur  $[0, T]$  si et seulement si l'un des propriétés suivante est satisfaite :*

- i)**  $(\chi_\omega H)^*(\chi_\omega N)$  est inversible.
- ii)**  $\overline{\chi_\omega ImN} = L^2(\omega)$ .
- iii)**  $Ker(\chi_\omega N)^* = Ker(\chi_\omega N)^*(\chi_\omega N) = \{0\}$ .
- iv)**  $B^*G^*((s)(\chi_\omega N)^*)y = 0 \forall s \in [0, T] \implies y = 0$ .
- iiiv)** *Si le semi groupe est analytique tel que :*  

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\overline{Im(\chi_\omega A^n S(s)B)}] = L^2(\omega), \forall s \in ]0, T[.$$

**Remarque 18**

*IL est clair que :*

*-Un système(2,1) qui est exactement (resp. faiblement) contrôlable est exactement (resp.*

faiblement) régionalement contrôlable.

-Un système (2,1) qui est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur  $\omega_1$ , est exactement (resp. faiblement) régionalement contrôlable sur  $\omega_2$  pour tout  $\omega_2 \subset \omega_1$

-La définition (2,9) est générale et englobe le cas de la contrôlabilité classique ( $\omega = \Omega$ )

-Si  $J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$  désigne le coût de transfert, alors pour tout  $\omega \subset \Omega$ , le coût de transfert régional sur  $\omega$  est inférieur à celui sur tout  $\Omega$ .

En effet

$$W_\Omega = \{u \in L^2(0, T, U) \text{ tel que } y_u(T) = y_d \text{ sur } \Omega\},$$

et

$$W_\omega = \{u \in L^2(0, T, U) \text{ tel que } y_u(T) = y_d \text{ sur } \omega\}$$

Alors  $W_\Omega \subset W_\omega$  et donc

$$\min_{W_\omega} J(u) \leq \min_{W_\Omega} J(u).$$

On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlables mais qui ne sont pas contrôlables sur tout le domaine.

Ceci est illustré par l'exemple suivant.

**Contre-exemple :**

Considérons le système décrit par l'équation parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, l) - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, l) = \chi_{[a,b]} u(l) \text{ dans } ]0, 1[ \times ]0, T[ \\ y(x, 0) = 0 \text{ dans } ]0, 1[ \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 \text{ dans } ]0, T[ \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec  $a$  et  $b$  tels que  $(b - a) \in \mathcal{Q}$  et  $]a, b[ \subset ]0, 1[$ . Alors on a le résultat suivant :

Le système (2,21) n'est pas contrôlable sur  $]0, 1[$  (voir [5]). Mais il peut être contrôlable sur un région  $[\alpha, \beta]$  pour  $\alpha$  et  $\beta$  convenablement choisis (voir [5], [9]).

Dans la suite on suppose que  $A$  admet un système complet de fonction propres  $(\varphi_i)_{i \geq 1}$  associées aux valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ . Sans perte de généralité, supposées simples.

Le semi- groupe engendré par  $A$  est donné par

$$G(t)y = \sum_{i \geq 1} \exp \lambda_i t \langle \varphi_i, y \rangle_E \varphi_i$$

Et la solution de (2,1) s'exprime.

Pour  $y_0 = 0$

$$y_u(t) = \sum_{i \geq 1} \int_0^T \exp \lambda_i(t-s) \langle B^* \varphi_i, u(s) \rangle_{U^* \times U} ds \varphi_i$$

On note par

$$I = \{i \geq 1 / B^* \varphi_i = 0\} \text{ et } J = I^c$$

On a (2,1) est faiblement contrôlable si et seulement si  $I = \emptyset$ .

Dans le cas de la contrôlabilité régionale nous avons le résultat :

**Théorème 2.8**

On suppose que (2,1) est non contrôlable ( $I \neq \emptyset$ ), alors nous avons l'équivalence entre :

- 1). Le système (2,1) est régionalement faiblement contrôlable sur  $\omega$ .
- 2). La famille  $\{\chi_\omega \varphi_i\}_{i \in J}$  est totale dans  $L^2(\omega)$ .
- 3). Si  $y \in L^2(\Omega)$  vérifiant  $\int_\omega y(x) \varphi_i(x) dx = 0$  pour tout  $i \in J$  alors  $y = 0$ .
- 4). Si  $\sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i = 0$  sur  $\Omega \setminus \omega \implies \alpha_i = 0 \forall i \in I$ .

**Démonstration**

(1)  $\iff$  (2) et (2)  $\iff$  (3),

résultent du fait que

$$\overline{\text{Im} \chi_\omega N} = L^2(\omega) \iff \text{Ker} N^*(\chi_\omega)^* = \{0\}$$

(3)  $\implies$  (4)

Considérons  $(\alpha_i)_{i \in I}$  tel que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega$$

Soit

$$y = \chi_\omega \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i \in L^2(\Omega)$$

On a

$$\int_{\omega} y(x)\varphi_i(x)dx = 0 \text{ pour tout } i \in J \implies y = 0 \text{ par conséquent } \alpha_i = 0 \forall i \in I$$

(4)  $\implies$  (3)

soit  $y \in L^2(\Omega)$  tel que

$$\int_{\omega} y(x)\varphi_i(x)dx = 0 \forall i \in J$$

$$\chi_{\omega}^* y = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i$$

Ou

$$\alpha_i = \int_{\Omega} \chi_{\omega}^* y(x)\phi_i(x)dx$$

$$\alpha_i = \int_{\omega} y(x)\phi_i(x)dx$$

$$\implies \alpha_i = 0$$

### **Conclusion**

1. Si  $I^c$  est fini alors (2,1) n'est pas contrôlable sur aucun  $\omega \subset \Omega$ .

2. Si  $I$  est fini alors (2,1) est contrôlable sur tout  $\omega \subset \Omega$ .

## 2.3 Notion d'actionneur

*Les échanges entre un système réel et son environnement se font par l'intermédiaire des actionneurs, il permettent d'exister le système. Ils peuvent être de nature, de forme, de conception diverses. Les actionneurs que l'on rencontre, dans les systèmes physiques, peuvent être de type :*

### 2.3.1 Ponctuel fixe

*Tel un brûleur dans un système de diffusion.*

*Fig(2,1) Système monodimensionnel excité par deux actionneurs ponctuels.*

### 2.3.2 Ponctuel mobile

*C'est un actionneur de type ponctuel, dont la position varie avec le temps. C'est le cas, par exemple, d'un système excité par un rayon laser de direction variable.*

### 2.3.3 Zone

*Tel est le cas, par exemple d'un système de diffusion avec une zone de chauffe important.*

*Fig(2,2) Système monodimensionnel excité par un actionneur zone.*

### 2.3.4 Filament

*Tel un four chauffé par une résistance électrique dans un système bidimensionnel.*

*Fig(2,3) Système excité par un actionneur filament.*

#### **Définition 2.11**

*Soit  $\Omega_i$  fermé contenu dans  $\Omega$  et  $g_i \in L^2(\Omega_i)$ .*

*On appelle **actionneur zone** le couple  $(\Omega_i, g_i)$  ou*

*\*  $\Omega_i$  représente le support de l'actionneur.*

*\*  $g_i$  définit la répartition spatiale de l'actionneur.*

*Fig(2,4) : Support et répartition spatiale de l'actionneur.*

### 2.3.5 Applications

*A-Actionneur ponctuel dans les systèmes de diffusion :*

considérons le système (2,22), décrit par :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) - \Delta y(t) = \sum_{i=1}^p \delta_{b_i} u_i(t), & \text{dans } Q \\ y(x, 0) = 0, & \text{dans } \Omega \\ y(\xi, t) = 0, & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.22)$$

Le (2,22) est un système excité par  $p$  actionneur ponctuels  $(b_i, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$  localisés aux points  $b_i$  de  $\Omega$ , (2,22) est également un cas particulier du système (2,1) avec :

$$Ay(t) = \Delta y(t)$$

pour

$$y(t) \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Et

$$B : \mathbb{R}^p \longrightarrow D(A)$$

Avec

$$Bu(t) = \sum_{i=1}^p \delta_{b_i} u_i(t)$$

ou :  $u = (u_1, \dots, u_p)$

**Remarque 19**

Dans la cas d'actionneur frontière les définitions restent les mêmes. Nous parlerons d'actionneur zone frontière  $(\Gamma_i, g_i)$  ou  $\Gamma_i \in \Gamma, g_i \in L^2(\Gamma_i)$  et d'actionneur ponctuel frontière  $(b_i, \delta_{b_i}), b_i \in \Gamma$ .

**B-Actionneur frontières dans les systèmes de diffusion**

Deux cas sont distingués

**B<sub>1</sub>-Actionneur zones frontières :**

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) - \Delta y(t) = 0 & \text{dans } Q \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y(\zeta, t) = \sum_{i=1}^p g_i(\zeta) u_i(t) & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.23)$$

Le (2,23) est un modèle d'un système excité sur sa frontière, par  $p$  actionneurs zone  $(\Gamma_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  avec  $\Gamma_i \subset \Gamma, g_i \in L^2(\Gamma_i)$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq p$ . (2,23) est également un cas particulier de (2,1), pour cela :

On pose  $Ay(t) = \Delta y(t)$ , et on introduit l'opérateur de Green  $G$ , avec

$$\begin{aligned} Gr : L^2(\Gamma) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ h &\longrightarrow Grh = y \end{aligned}$$

avec  $\Delta y = 0$  dans  $\Omega$  et  $y = h$  sur  $\Gamma$

(2,23) admet une solution faible unique donnée par :

$$y(t) = - \sum_{i=1}^p \int_0^t AG(t - \tau) Gr g_i u_i(\tau) d\tau$$

La difficulté, dans ce cas, vient du fait que, en général, pour  $u \in L^2(0, T; R^p)$ , alors  $y(T) \notin L^2(\Omega)$ , il est possible de choisir des contrôles  $u$  plus réguliers.

**B<sub>2</sub>-Actionneur ponctuels frontières**

le système est décrit par

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) - \Delta y(t) = 0 & \text{dans } Q \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y(\zeta, t) = \sum_{i=1}^p \delta_{b_i}(\zeta) u_i(t) & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.24)$$

Le (2,24) représente un système excité sur sa frontière en  $p$  points  $b_i$

Pour définir la solution d'un tel système, il faut utiliser la méthode de transposition proposée par Lions et Magenes (voir [9]). Ainsi (2,21) admet une solution faible unique telle que  $y(.,T)$  a un sens  $H^{-\beta-1}(\Omega)$ ,  $\beta > \frac{1}{2}$ , quand  $u \in L^2(0,T,U)$ .

Nous verrons plus loin, qu'en imposant plus de régularité à  $u$ , il est possible de ramener  $y(.,T)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

la difficulté dans l'analyse de la contrôlabilité des systèmes que nous venons de voir, vient donc essentiellement du fait que l'état atteint, pour une certaine régularité sur  $u$  peut être dans un espace plus grand que l'espace d'état  $E$ . En changeant l'espace d'état, nous pouvons avoir la contrôlabilité seulement en pratique les états à atteindre sont de type  $L^2$ , donc il faudra nécessairement, pour les systèmes (2,24) et (2,22) jouer sur la régularité des contrôles  $u$ .

Avant de s'intéresser à l'étude des actionneurs et la relation liant les actionneurs à la notion de contrôlabilité.

### 2.3.6 Actionneur stratégique

La contrôlabilité d'un système peut être affectée par le choix des actionneurs ; que ce soit par la localisation du support des actionneurs, ou par la répartition de l'action sur ces supports.

Nous introduisons les définitions suivantes :

#### **Définition 2.12**

Soit  $E_i$  un sous-espace vectoriel de l'espace de l'état  $E$ , nous dirons que l'actionneur  $(\Omega_i, g_i)$  (ou  $(b, \delta_{b_i})$ ) est **stratégique** dans  $E_i$  si le système qu'il excite est exactement contrôlable dans  $E_i$

#### **Définition 2.13**

Nous dirons que l'actionneur  $(\Omega_i, g_i)$  (ou  $(b, \delta_{b_i})$ ) est **stratégique** si le système qu'il excite est faiblement contrôlable dans  $E$ .

Ces définitions restent valables pour des actionneurs de type frontière.

Si le système est excité par  $p$  actionneurs zones  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  (ou ponctuels  $(b, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$ ).

## Chapitre 2 : Contrôlabilité des systèmes évolutifs

---

Alors nous dirons que : La suite d'actionneurs  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  ( ou  $(b, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$ ) est stratégique si le système excité par ces  $p$  actionneurs est faiblement contrôlable.

### Remarque 20

Il est évident que si le système est excité par  $p$  actionneurs et si, pour un certain  $i_0$   $1 \leq i_0 \leq p$ , l'actionneur d'indice  $i_0$  est stratégique, alors la suite des  $p$  actionneurs est stratégique.

### Caractérisation des actionneurs stratégiques

Considérons le système :

$$\begin{cases} y(t) + Ay(t) = Bu(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Supposons que  $A$  vérifie l'hypothèse  $(H_3)$  et admet un système orthonormé complet de fonction propres  $(\phi_{nj})$  associées aux valeurs propres  $(\lambda_n)$ ,  $\lambda_n$  étant de multiplicité  $r_n$ .

Nous avons alors la propriété de caractérisation suivant :

### Proposition 2.10

La suite d'actionneurs  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  est stratégique si et seulement si :

i)  $p \geq \sup r_n$ .

ii)  $\text{rg}(G_n) = r_n$  pour tout  $n$  ou  $G_n$  est la matrice d'ordre  $(p, r_n)$  et d'éléments :

$$(G_n)_{ij} = \langle g_i, \phi_{nj} \rangle_{L^2(\Omega)}, i = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, r_n.$$

Cette caractérisation suppose donc, en particulier que le plus grand ordre de multiplicité des valeurs propre de  $A$  est fini.

### Existence actionneurs stratégiques

Supposons que le système (2,1) est excité par  $p$  actionneurs dont les supports  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont fixes.

Nous avons le résultat suivant :

### Proposition 2.11

Supposons que  $p \geq \sup r_n$ . Pour toute suite  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq p}$  d'ouverts contenus dans  $\Omega$ , il existe des fonctions  $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$  telles que :

- i)  $\text{supp}(g_i) \subset (\Omega_i)$  et  $g_i \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, p$ .  
 ii) La suite d'actionneurs zones  $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$  est stratégique.

## 2.4 Difficultés

Dans ce qui précède; au moins deux difficultés d'ordre mathématique ou conceptuel sont à souligner.

### 2.4.1 Sur le choix de l'espace d'état

Nous avons choisi comme espace d'état  $E = L^2(\Omega)$ . Ce choix est raisonnable, compte tenu des états qu'on peut considérer et que ceux-ci sont d'énergie finie.

Si maintenant, l'actionneur  $(D, g)$  amène le système vers un état  $\tilde{y}$  qui est moins régulier.

C'est-à-dire  $\tilde{y} \in Y$  avec  $E \subset Y$ , alors on a deux possibilités :

\* Ou bien  $Y$  est tel qu'on peut le choisir comme espace d'état.

\* Ou bien on peut agir sur la régularité du contrôle pour ramener l'état  $\tilde{y}$  à  $E$

#### **Exemple**

Considérons deux situations nous conduisant vers cette difficulté.

soit le système de diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) = \Delta y(x, t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{dans } \Omega \\ y(\xi, t) = g_i(\xi)u(t) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Qu'on suppose excité par un actionneur zone frontière  $(\Gamma_0, g)$ , avec  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ .

Dans ce cas, on obtient la même caractérisation avec des états finaux dans  $E = L^2(\Omega)$  et le contrôle  $u \in L^r(0, T)$  avec  $r > 4$  (voir [9]).

Si on considère la même système avec un action ponctuelle exercée sur la frontière au point  $b \in \Gamma$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) = \Delta y(x, t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y(x, 0) = y^0(x) & \text{dans } \Omega \\ y(\xi, t) = \delta(\xi - b)u(t) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

On obtient la même caractérisation avec des états finaux dans  $X = L^2(\Omega)$  et  $u \in C_0^\infty(0, T)$  (voir[4]).

## 2.4.2 Sur le nombre d'actionneurs

La caractérisation des actionneurs fait apparaître une condition sur le nombre minimum d'actionneurs pouvant ramener le système vers des états dans  $E$ . En fait, cette condition peut être relaxée avec la considération suivante :

Si on suppose que le domaine géométrique  $\Omega$  du système (2, 1) est connu avec une certaine précision, alors de cette précision près, le choix d'un seul actionneur ( $p = 1$ ) peut suffire pour assurer la contrôlabilité du système moyennant une faible perturbation de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  ou  $\Gamma'$  est très voisine de  $\Gamma$  dans le sens que

$$\forall \epsilon > 0, \sup_{x \in \Gamma, x' \in \Gamma'} d(x, x') \leq \epsilon$$

Nous obtenons un système dont les valeurs propres sont simples (voir[6]).

## 2.5 Contrôle assurant le transfert régional

Le but de cette section est de trouver un contrôle assurant le transfert régional et a énergie minimale. Evidemment on peut utiliser les résultats connus sur la contrôlabilité des systèmes dynamiques, mais la difficulté apparaît si l'état désiré est donné uniquement sur la région  $\omega$ . De plus nous avons montré que le coût de transfert régional est inférieur au coût de transfert globale. Considérons le système (2, 1)

$$\begin{cases} y(t) + Ay(t) = Bu(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Où  $A$  génère un semi-groupe fortement continu sur

$E = L^2(\Omega)$ ,  $B \in L(U, E)$ ,  $ety(0) \in E$ .

Le système (2,1) admet une solution unique tel que  $y_u() \in L^2(0, T, E)$ .

Soit  $y_d \in L^2(\omega)$  un état désiré. On se pose le problème de transférer a moindre coût de l'état  $y_0$  du système (2,1) à  $y_d$  a l'instant  $T$ .

Considérons l'ensemble,  $G = \{g \in E \quad \text{tel que } g = 0, \quad \text{sur } \omega\}$ .

Alors existe-t-il un contrôle a énergie minimale  $u \in U$  tel que  $y_u(t) - y_d \in G$  ?.

Soit  $U_{ad} = \{u \in U \mid y_u(T) - y_d \in G\}$ . Alors le problème est de minimiser

$$\begin{cases} \text{in} \|u\|_U^2 \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

Pour cela nous proposons l'approche générale suivante

### 2.5.1 Approche général

Considérons le système (2,1) et posons

$$G^0 = \{g \in E^* \quad \text{tel que } g = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus \omega\}$$

Pour  $\varphi^0 \in G^0$ , considérons le système

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -A\varphi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et

$$\|\varphi^0\|_{G^0}^2 = \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 dt,$$

Nous considérons aussi le système

$$\begin{cases} \psi'(l) = A\psi(l) + BB^*\varphi(l) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

ensuite on définit l'opérateur  $M$  par

$$M\varphi^0 = P(\psi(T))$$

Ou

$$P = \chi_\omega^* \chi_\omega$$

$M$  est un opérateur affine que l'on décompose

$$M\varphi^0 = P(\psi_0(T)) + \psi_1(T)$$

ou

$$\begin{cases} \psi_0'(t) = A\psi_0(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi_0(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = A\psi_1(t) + BB^*\varphi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \psi_1(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On pose :

$$\Lambda\varphi^0 = p(\psi_1(T)) \tag{2.25}$$

$\Lambda$  est un opérateur borné et symétrique. En effet pour  $\varphi^0, \tilde{\varphi}^0 \in G^0$  nous avons

$$\langle \Lambda\varphi^0, \tilde{\varphi}^0 \rangle = \langle \psi_1(T), \tilde{\varphi}^0 \rangle = \int_0^T B^*\varphi(t)B^*\tilde{\varphi}(t)dt$$

## Chapitre 2 : Contrôlabilité des systèmes évolutifs

---

Avec ces notations, le problème de la contrôlabilité régionale conduit à la résolution de l'équation

$$\Lambda\varphi^0 = \chi_\omega^* y_d - p(\psi_1(T))$$

nous avons alors le résultat.

### **Proposition 2.12**

Si le système (2,1) est  $\omega$  faiblement régionalement contrôlable alors l'équation (2,25) admet une solution unique  $\varphi^0 \in G^0$ . le contrôle

$$u^*(t) = B^* \varphi(T)$$

Permet le transfert du système (2,1) dans  $G$  a l'instant  $T$ , ou encore

$$y(T, u^*)|_\omega = y_d$$

De plus ce contrôle minimise la fonction coût

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \quad \text{sur } U_{ad}.$$

# Chapitre 3

## Les Sentinelle

### 3.1 Introduction

*Dans presque tout les problème de météorologie, ou d'océanographie, les conditions initiales ne sont pas complètement connues. ( Noter d'ailleurs l'on a une grande variété de possibilités quant au choix de l'instant initial).*

*Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire etc.*

*Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues, ou seulement partiellement connues, sur une partie de la frontière, que peut, par exemple, être inaccessible aux mesures, qu'il s'agisse de situations bio-médicales ou la situations correspondant à des accidents. Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficile.*

*Lorsque la structure de  $\Omega$  n'est pas entièrement connue, ou d'accès difficile (ou impossible), les coefficients de l'opérateur  $A$  peuvent aussi être imparfaitement connue, comme par exemple, dans la gestion de puits de pétrole.*

*Naturellement les problèmes évoques brièvement sont classiques et ont donné lieu à beaucoup de développement.*

*L'idée la plus habituelle est celle des moindres carrés.*

#### **Moindres carrés**

*Soit le système évolutif suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) + Ay(t) = \xi(t) + \lambda\hat{\xi}(t) & \text{dans } Q \\ y(0) = y^0 + \tau\hat{y}^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

*On considère les inconnues  $\{\lambda\hat{\xi}, \tau\hat{y}^0\} = \{v, w\}$ .*

*$\lambda\hat{\xi}$  est un terme de pollution.*

$\tau\hat{y}^0$  est un terme de manquant.

Comme des variables de contrôle de l'état  $y(x, t, v, w)$  du système et on veut que cet état soit "aussi proche que possible" de l'état mesuré  $y_m$ .

On pose :

$$J(v, w) = \text{distance de } y(x, t, v, w) \text{ sur } O \times ]0, T[ \text{ à } y_m$$

(la distance étant prise dans un norme convenable) et on cherche  $v, w$  qui minimise cette distance), et  $O \subset \Omega$ .

Du point de vue technique, cela conduit à des problème de contrôle optimal pour des systèmes distribués.

Naturellement, la formulation précédente est complètement générale, et s'applique en principe, à toutes les situations évoquées précédemment. Dans ce type de méthode, les termes de pollution et les termes manquantes jouent le même rôle.

On cherche à déterminer les uns et des autres. Il y a possibilité de ne pas pouvoir nettement séparer les rôles des uns et des autres. Pour les problèmes non linéaires, il n'y a pas unicite de la solution numérique autour de la solution correspondante à ( $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$ ). Les problèmes correspondants peuvent être mal posés. IL faut alors introduire dans le système (3, 1) correspondant à  $\lambda = 0$  et  $\tau = 0$  des termes régularisant ou stabilisateurs qui induisent des erreurs d'approximation supplémentaires.

Bien sûr cette méthode reste toujours la plus importante pour ce type de problème mais il peut être utile de tenter "autre chose". **"La notion de la sentinelle"**.

## 3.2 Sentinelle Régionale

Si, pour fixe les idées, considérons l'observatoire  $O \subset \Omega$ . Soit  $y(\lambda, \tau) = y(x, t, \lambda, \tau)$  l'état correspondant à une pollution  $\lambda\hat{\xi}$  et à un terme manquant  $\tau\hat{y}^0$ . On écrit cela formellement  $y(\lambda, \tau)$  pour simplifier l'écriture.

$\lambda\hat{\xi}$  et  $y(\lambda, \tau)$  correspondant a la situation réelle satisfont à

$$y(\lambda, \tau) = y_m \quad \text{sur} \quad O \times ]0, T[$$

### Chapitre 3 : Les Sentinelle

---

Un idée standart est prendre une valeur moyenne, pour savoir si "quelque chose se passe". Soit donc  $h_0$  un fonction donneé sur  $O \times ]0, T[$ , tell que

$$h_0 \geq 0 \text{ et } \int_0^T \int_O h_0(x, t) dx dt = 1$$

On considère alors

$$S(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_O (h_0 + u)y(\lambda, \tau) dx dt$$

ou  $u = u(x, t)$  est une fonction a déterminer de la manière a vérifier :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0, 0) = 0 \quad (3.2)$$

et

$$\|u\|_{L^2(O \times ]0, T])} = \min \|\varphi\|_{L^2(O \times ]0, T])} \text{ pour tout } \varphi \text{ vrfiant (3, 2)} \quad (3.3)$$

La condition (3, 2) exprime l'insensibilité (désirée) de la fonctionnelle par rapport à  $\tau$  (au premier ordre près) et la condition (3, 3) exprime que l'on s'éloigne le "moins possible" de la moyenne.

Soit  $\omega \subset \Omega$  un région fermée, On considère un système évolutif dans  $\Omega$  dont son état  $y$  est solution de

$$+\frac{\partial y}{\partial t}(t) + Ay(t) = \xi(t) + \lambda \hat{\xi}(t) \text{ dans } \mathcal{Q} \quad (3.4)$$

Dans (3, 4), l'opérateur  $A$  est un opérateur différentiel elliptique du 2<sup>eme</sup> ordre

$$+Ay = -\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j})$$

où on adopte -ici et dans la suite la convention de sommation des indices répétés. On suppose que

$$a_{ij} \in L^\infty(\mathcal{Q})$$

(mais on aura plus loin besoin d'hypothèses de régularité sur les  $a_{ij}$  de façon à pouvoir appliquer des théorèmes d'unicité).

On suppose que  $A$  est elliptique, donc

$$a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_j, \forall \xi \in R, \alpha > 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{Q}$$

Dans le 2<sup>ème</sup> membre de (3,4),  $\xi$  est connu, dans un espace de Hilbert, de norme notée  $\|\cdot\|$ .

Le terme  $\lambda\hat{\xi}$  n'est pas connu, avec  $\lambda$  "petit"

Le terme  $\lambda\hat{\xi}$  présente un "**terme de pollution**".

Les méthodes que l'on va étudier ont pour objet d'obtenir des informations sur ce terme de pollution, à partir d'observation comme indiqué ci-après, mais le système étant soumis à d'autres aléas, comme on l'indiquera maintenant.

### 3.2.1 Les conditions initiales

On désignera par  $y(0)$  la fonction  $x \rightarrow y(x, 0)$

Les conditions initiales sont incomplètes. Il s'agit donc des systèmes à données manquantes.

On suppose que

$$y(0) = y^0 + \tau\hat{y}^0 \tag{3.5}$$

avec  $\tau$  "petit"

Le terme  $\tau\hat{y}^0$  est "manquant"

On va essayer d'estimer  $\lambda\hat{\xi}$  sans chercher à connaître ou estimer le terme manquant  $\tau\hat{y}^0$ .

$y^0$  est donné dans un espace de Hilbert ou de Banach convenable.

Dans la méthode des sentinelles, on va essayer d'estimer  $\lambda\hat{\xi}$  sans chercher à connaître ou estimer le terme  $\tau\hat{y}^0$  manquant.

On cherche à estimer la pollution. On ne cherche pas les termes manquants.

### 3.2.2 Les conditins aux limites

Pour fixe les idées, considère la condition au limite de Dirichlet

$$y = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times ]0, T[ \quad (3.6)$$

Plusieurs remarques s'imoposent ici :

On peut remplacer (3, 6), par toute autre condition aux limite assurant encore l'existence d'un solution  $y$  ci-dessous, ce point est essintiel. On peut avoir également des termes de pollution et des termes manquants dans les conditions aux limites, par exemple :

$$\begin{cases} y = g_0 + \lambda_0 \hat{g}_0 & \text{sur} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \\ y = g_1 + \tau_1 \hat{g}_1 & \text{sur} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \setminus \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \end{cases}$$

ou  $\hat{g}_0$  ,  $\hat{g}_1$  sont dans un espace de Hilbert convenable et ou  $\lambda_0$  (resp.  $\tau_1$  est un terme (petit) de pollution (resp. manquant).

En résumé, l'état du système est donnée par(3, 4), (3, 5) et (3, 6).

#### Définition 3.1

On dira que la fonctionnelle  $S(\lambda, \tau)$  est sentinelle régionale définie par la fonction  $h_0$  si les conditions suivantes ont lieu :

Il existe  $\varphi$  tel que

$$+\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = 0 \forall \hat{y}^0 \quad \text{a support dans } \omega \quad (3.7)$$

Et

$$\|u\|_{L^2(O \times ]0, T])} = \min \|\varphi\|_{L^2(O \times ]0, T])} \quad \text{pour tout } \varphi \text{ vriifiant (3, 11)} \quad (3.8)$$

#### Remarque 21

En fait  $h_0$  étant donnée, les conditions(3, 7),(3, 8) définissent  $u$  de manière unique. On dira alors que  $S$  est la sentinelle régionale définiie par  $h_0$

#### Remarque 22

La condition (3, 7) est naturelle. Elle exprime que la sentinelle n'est pas effectuée( ou premier ordre) par l'absence d'inforemation sur les termes manquants.

**Remarque 23**

Si la fonction  $h_0$  vérifie

$$h_0 \geq 0, \quad \int_0^T \int_O h_0(x, t) dx dt = 1$$

alors

$$\int_0^T \int_O h_0 y(x, t; \lambda, \tau) dx dt$$

est une moyenne. La condition (3, 8) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne.

Soit  $y_m(x, t)$  un état mesuré du système sur  $O$  pendant l'intervalle  $]0, T[$  on construit la sentinelle mesurée.

$$S_m(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_O (h_0 + \varphi) y_m(x, t, \lambda, \tau) dx dt$$

on a

$$S(\lambda, \tau) = S(0, 0) + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0}$$

où

$$S(0, 0) = \int_0^T \int_O (h_0 + \varphi) \hat{y}(x, t) dx dt$$

et  $\hat{y}(x, t)$  est la solution de

$$\begin{cases} \hat{y}(t) + A(\hat{y}) = \xi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \hat{y}(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{y}(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.9)$$

et

$$+ \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = \int_0^T \int_O (h_0 + u) y_\lambda(x, t) dx dt$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = \int_0^T \int_O (h_0 + u) y_\tau(x, t) dx dt$$

et  $y_\lambda(x, t)$  est la solution de

$$\begin{cases} \dot{y}_\lambda(t) + A(y) = \xi(\hat{t}) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y_\lambda(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \\ y_\lambda(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.10)$$

et  $y_\tau(x, t)$  est la solution de

$$\begin{cases} \dot{y}_\tau(t) + A(y) = \xi(\hat{t}) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y_\tau(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \\ y_\tau(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour définir la sentinelle régionale, on doit déterminer  $u$  qui assure les conditions (3,7) et (3,8) soit  $q(x, t)$  la solution de

$$\begin{cases} \dot{q}(t) + A^*q(t) = 1_0(h_0 + u)(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour tout  $u$  dans  $L^2(O \times ]0, T[$ .

$$1_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in O \\ 0 & \text{si } x \notin O \end{cases}$$

En multipliant l'équation (3,11) par  $q(t)$  et en intégrant par partie, on déduit que

$$(q(0), \hat{y}_0) = - \int_0^T \int_O (h_0 + u) y_\tau(x, t) dx dt$$

où

$$(q(0), \hat{y}_0) = \int_\Omega q(x, 0) y_\tau(x, 0) dx dt$$

pour que les conditions (3,7) et (3,8) soient satisfaites il suffit qu'il existe une fonction  $u \in L^2(O \times ]0, T[$ . Tel que  $(q(0), \hat{y}_0)$ . Pour cela on décompose le système (3,12) en deux systèmes

$$\begin{cases} \dot{q}_0(t) + A^*q_0(t) = 1_0h(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_0(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_0(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) + A^*q_1(t) = 1_0u(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_1(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_1(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.13)$$

Donc  $q = q_0 + q_1$

Déterminer la sentinelle régionale revient à étudier la contrôlabilité régionale du système (3, 13).

### 3.2.3 Utilisation de la contrôlabilité régionale

Soit  $q_0(0) \in L^2(\Omega)$  l'état désiré, donné par la résolution du système (3, 12) <sub>$u=0$</sub> , le problème de la contrôlabilité régionale consiste trouver un contrôle  $u$  de l'espace de contrôle  $U = L^2(O \times ]0, T[)$  permettant de ramener en un temps fini, l'état  $q_1(t)$  du système (3, 13) d'un état initial  $q_1(T) = 0$ , à un état final désiré  $-q_0(0)$ , sur  $\omega = \Omega/O$ .

#### **Théorème 3.1**

Si le système (3, 13) est régionalement contrôlable, alors il existe une fonction  $u \in L^2(O \times ]0, T[)$  qui vérifie (3, 7) et (3, 8)

#### **Démonstration**

Si le système (3, 13) est régionalement contrôlable sur  $\omega$ , alors pour  $q_0(0)$  est donné dans  $L^2(\Omega)$  il existe,  $u \in L^2(O \times ]0, T[)$  tel que  $\int_{\Omega} q(0) \hat{y}_0 dx = 0$  et donc

$$\begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= \int_0^T \int_O (h_0 + u) y_{\tau}(x, t, \lambda, \tau) dx dt \\ + \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= (q(0), \hat{y}_0) = 0 \end{aligned}$$

ce que prouve (3, 7), (3, 8)

Dans ce que suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution du système (3, 10)

### 3.2.4 Estimation du terme de pollution

#### **Théorème 3.2**

Puisque le système (3, 13) est régionalement contrôlable dans  $L^2(\omega)$  alors on a

$$\lambda \int_0^T \int_{\Omega} q f dx dt = \int_0^T \int_O (h_0 + u) (y_m(x, t) - \hat{y}(x, t)) dx dt.$$

### Chapitre 3 : Les Sentinelle

---

ou  $\hat{y}(x, t)$  est la solution de (3, 9) et  $(y_m(x, t))$  est l'état observé sur  $O$  pendant l'intervalle du temps  $[0, T]$ .

#### Démonstration

Soit  $S(\lambda, \tau)$  la sentinelle régional définie par  $h_0$  de les équations (3, 10) et (3, 12) on déduit

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = \lambda \int_0^T \int_O (h_0 + u) y_\lambda(b, t) dx dt$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = S(\lambda, \tau) - S(0, 0) - \tau \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0}$$

et sur l'observatoire  $O$  on pose  $y = y_m$  alors on a :

$$S(\lambda, \tau) = S_m(\lambda, \tau)$$

d'un part on a

$$\int_0^T \int_\Omega q f dx dt = \int_0^T \int_O (h_0 + u) (y_\lambda(x, t)) dx dt$$

et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= \int_0^T \int_O (h_0 + u) (y_\lambda(x, t)) dx dt \\ \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= (q(0), y_0) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= 0 \end{aligned}$$

finalemt on obtient

$$\begin{aligned} + \lambda \int_0^T \int_\Omega q f dx dt &= S_m(\lambda, \tau) - S(0, 0) \\ \lambda \int_0^T \int_\Omega q f dx dt &= \int_0^T \int_O (h_0 + u) (y_m(x, t) - \hat{y}(x, t)) dx dt \end{aligned}$$

D'ou le résultat du théorème.

### 3.3 Sentinelle ponctuelle

Soit maintenant  $O = \{b\} \subset \Omega$ , considéré comme un observation, et soit  $h_0$  une fonction donnée

$$h_0 \in L^2(]0, T[)$$

on considère la fonctionnelle

$$S(\lambda, \tau) = \int_0^T (h_0 + \varphi)y(b, t, \lambda, \tau)dt$$

ou  $\varphi \in L^2(]0, T[)$ .

#### Définition 3.2

On dira que la fonctionnelle  $S(\lambda, \tau)$  est un sentinelle ponctuelle définie par  $h_0$  si les conditions suivantes ont lieu :

il existe  $\varphi \in L^2(]0, T[)$  tel que

$$+\frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = 0 \quad (3.14)$$

Pour tout  $y_0$  tel que son support est dans  $\Omega/O$

Et

$$|u|_{L^2(]0, T[)} = \min|\varphi|_{L^2(]0, T[)} \quad \text{pour tout } \varphi \text{ vrie(3, 14)} \quad (3.15)$$

Soit  $y_m(b, t)$  un état mesuré du système pendant l'intervalle  $]0, T[$ , on construit la sentinelle mesurée

$$S_m(\lambda, \tau) = \int_0^T (h_0 + \varphi)y_m(b, t, \lambda, \tau)dt \quad (3.16)$$

On a

$$S(\lambda, \tau) = S(0, 0) + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} \quad (3.17)$$

Ou

$$S(0, 0) = \int_0^T (h_0 + u)\hat{y}(b, t)dt$$

et  $\hat{y}(x, t)$  est la solution de

$$\begin{cases} \hat{y}(t) + A(\hat{y}) = \xi(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ \hat{y}(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{y}(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.18)$$

et

$$\begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= \int_0^T (h_0 + u) y_\lambda(b, t) dt \\ \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= \int_0^T (h_0 + u) y_\tau(b, t) dt \end{aligned}$$

et  $y_\lambda$  est un solution de

$$\begin{cases} y_\lambda(t) + A(y_\lambda) = \hat{\xi}(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y_\lambda(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y_\lambda(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.19)$$

et  $y_\tau$  est un solution de

$$\begin{cases} y_\tau(t) + A(y_\tau) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q} \\ y_\tau(0) = \hat{y}_0 & \text{dans } \Omega \\ y_\tau(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour définir la sentinelle ponctuelle, on doit déterminer  $\varphi$  qui assure les conditions (3, 15) et (3, 14). soit  $q(x, t)$  la solution de

$$\begin{cases} -\dot{q}(t) + A^*q(t) = \delta_b(h_0 + u)(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

pour tout  $u$  dans  $L^2(]0, T[)$ . En multipliant l'équation (3, 20) par  $q(t)$  et en intégrant par partie, on déduit que

$$(q(0), \hat{y}_0) = - \int_0^T (h_0 + u) y_\tau(b, t) dt$$

où

$$(q(0), \hat{y}_0) = - \int_0^T q(x, 0) y_\tau(x, 0) dx.$$

pour que les conditions (3, 15) et (3, 14) soient satisfaites il suffit qu'il existe une fonction  $u \in L^2(]0, T[)$  telle que  $(q(0), \hat{y}_0)$ . Pour cela on décompose le système (3, 12) en deux systèmes

$$\begin{cases} -\dot{q}_0(t) + A^*q_0(t) = \delta_b h(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_0(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_0(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.21)$$

et

$$\begin{cases} -\dot{q}_1(t) + A^*q_1(t) = \delta_b u(t) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ q_1(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q_1(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.22)$$

Donc  $q = q_0 + q_1$

Déterminer la sentinelle ponctuelle revient à étudier la contrôlabilité régionale du système (3, 23)

### 3.3.1 Utilisation de la contrôlabilité régionale

Soit  $q_0(0) \in L^2(\Omega)$  l'état désiré donné par la résolution du système (3, 23), le problème de la contrôlabilité régionale excité par actionneur ponctuel défini en point  $b$  consiste à trouver un contrôle  $u$  de l'espace de contrôle  $U = L^2(]0, T[)$  permettant de ramener en temp fini, l'état  $q_1(t)$  du système (3, 23) d'un état final  $q_1(T) = 0$ , à un état final désiré  $-q_0(0)$  sur  $\omega = \Omega/O$

#### **Théorème 3.3**

Si le système (3, 23) est régionalement contrôlable alors il existe un fonction  $u \in L^2(]0, T[)$  que vérifie (3, 14) et (3, 15)

#### **Démonstration**

Si le système (3, 23) est régionalement contrôlable sur  $\omega$ , alors pour  $q_0(0)$  est donnée dans  $L^2(\Omega)$  il existe  $u \in L^2(]0, T[)$  tel que

$$\int_{\Omega} q(0) \hat{y}_0 dx = 0$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} s(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= \int_0^T (h_0 + u) y_\tau(b, t; \lambda, \tau) dt \\ \frac{\partial}{\partial \tau} s(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= (q(0), \hat{y}_0) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} s(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= 0\end{aligned}$$

ce que prouve (3, 14) et (3, 15)

Dans ce qui suit nous appliquons le résultat précédent pour estimer le terme de pollution du système (3.19)

### 3.3.2 Estimation du terme de pollution

#### **Théorème 3.4**

Puisque le système (3.23) est régionalement contrôlable dans  $L^2(\omega)$  alors on a

$$\lambda \int_0^T \int_{\Omega} q f dx dt = \int_0^T (h_0 + u) (y_m(x, t) - \hat{y}(b, t)) dx dt.$$

où  $\hat{y}(x, t)$  est la solution de (3.18) et  $y_m(x, t)$  est l'état observé en point  $b$  pendant l'intervalle du temps  $[0, T]$ .

#### **Démonstration**

Soit  $S(\lambda, \tau)$  la sentinelle ponctuelle défini par  $h_0$ , de les équations (3.19), (3.21) on déduit

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = \lambda \int_0^T (h_0 + u) y_\lambda(b, t) dt$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} = S(\lambda, \tau) - S(0, 0) + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0}$$

et sur l'observation  $O$  on a

$$S(\lambda, \tau) = S_m(\lambda, \tau)$$

d'une part d'après (3.16) on à

$$\int_0^T (h_0 + u) (y_\lambda(b, t) dt = \int_0^T \int_{\Omega} q f dx dt$$

et d'autre part de (3.17) on à

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \tau)|_{\lambda=0, \tau=0} &= \int_0^T (h_0 + u)(y_\tau(b, t, \lambda, \tau)) dt \\ &= (q(0), y_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

finalment on obtient

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^T \int_{\Omega} q f dx dt &= S_m(\lambda, \tau) - S(0, 0) \\ \lambda \int_0^T \int_{\Omega} q f dx dt &= \int_0^T (h_0 + u)(\hat{y}_m(b, t) - \hat{y}(b, t)) dt\end{aligned}$$

d'où le résultat du théorème.

# Bibliographie

- [1] A. AYADI; *Controllabilité et observabilité cours spéciaux magister math, app c,u,o,b 2006-2007.*
- [2] A. AYADI, A. BERHAIL; *Système parabolique F- controlable et les actionneurs frontières, Tech. AN22, Déc 2004 pp 13-16 U. mentouri Constantine.*
- [3] A. AYADI, M. DJEBARNI; *Pollution terms estimaion in parabolic system wih incomplete data, Far east Math. Sci. (FJMS), Pushpa Publishing House 2005.*
- [4] A. EL JAI; *Eléments d'analyse et de controle des systèmes. Masson RMA. Paris 2004.*
- [5] A.El Jai - A. J. Pritchard; *Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués. Masson RMA 3. Paris 1986*
- [6] A. BOUTOULOUD; *Contrôlabilité régionale, cible frontière et controlabilité de gradient dans les systèmes distribues. Thèse de doctorat L'université Moulay Ismail 2000.*
- [7] A.PAZY; *Smigroups of linear opérateurs and applications to partial differential equation, Springer, Applied Mathematical Sciences 1983.*
- [8] BODART-DEMEESTERE; *Sentinels for the identification of an unknown boundary. M3AS, 7(6), p. 871-885(1997). Compiégne(France) 1997.*
- [9] E. H. ZERRIK; *Analyse régionale des systèmes distribues, Thèse Univ Mohammed V. Maroc. 1993.*
- [10] F.A.KHODJA, A.BENABDLLAH; *Une introduction a la théorie de contrôl, Univ de France, cedex13 2005.*

## *Bibliographie*

---

- [11] H. BRÉZIS; *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*. Masson, 1987.
- [12] J. KLAMKA; *Contrôlabilité of dynamical systèm*, Kluwer AcademicPublishers 1990.
- [13] J. SAINT JEAN PAULIN, et M. VANNINATHAN; Sentinelles et pollutions frontières dans des domaines minces, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Serie I, p. 1299-1304, (1997) Contrôle optimal*.
- [14] J. L. LIONS; *Sentinelles pour les systèmes distribués a données incomplètes"*, Masson, Paris (1992).
- [15] J.L. LIONS; *Controlabilite exacte, stabilisation et pertubations Des systèmes distribués a , Masson, Paris (1988)*.
- [16] J. L. LIONS; *Contrôl optimal des systèmes gouvernes par des équations aux derivées partielles*, Dunod, Paris (1968).
- [17] J. L. LIONS -E. MAGENES; *Problèmes aux limites non homogènes et applications vol 1 . Dunod Paris 1968*.
- [18] O. NAKOULIMA; *Contôlabilité à zèro avec contraintes sur le contrôle. C.R.A.S. Paris, Ser. I 339 (2004), pp 405-410*.
- [19] S.BENHADID; *Observabilité régionale des systèmes hyperboliques approches e simulations. Thèse de doctorat en sciences Univ Mentouri de Constantine 2008*.
- [20] Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE; *A méthode for detcting pollution in dissipative systèm with incomplet data. ESAIM. Procedings April (2007), Vol17, pp 67-79*.

## ملخص

في نظام توزيعي موصوف بمعادلات تفاضلية جزئية، لقد تم تقييم التلوث، وذلك ببناء حراسة جهوية ونقطية انطلاقاً من نظرية المراقبة، دون الاعتماد على المقدار الناقص ذي الحامل الموجود في منطقة قابلة للمراقبة مع شروط حدية وابتدائية.

## الكلمات المفتوحة:

مراقبة- نظام تغييري- نظام توزيعي- مؤثر- حراسة- التلوث.

## RESUME

**Nous avons estime la pollution dans système gouverne par des équations aux dérivées partielles. Cela par la mise en œuvre d'un sentinelle régionale et ponctuelle, a' partir de la théorie de la contrôlabilité, sans se baser sur le terme manquant dont le support existe dans un régional controllable sons conditions limitées et initiales.**

## Mots-clés :

**Contrôlabilité- système évolutif - system distribué- sentinelle- opérateur- terme pollution.**

## ABSTRACT

**We have estimation pollution in system govern by partial derivative equations. That by the implementation of a regional and punctual sentinel, a' to leave the theory of controllability, without basing itself on the missing term whose support exists in regional controllable sounds limited and initial conditions.**

## Key words:

**Controllability- evaluative system – distributes system – sentinel – operator- pollution term.**