

**UNIVERSITÉ OUM-EL BOUAGHI  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

En vue l'obtention du Diplôme de  
Master en Mathématiques Appliquées

Présenté et soutenu par  
**Derbal Oumaima et Maziani Asma**

---

**LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES  
"ILLUSTREES PAR DES APPLICATIONS"**

---

Sous direction de : Dr. Nabil LAICHE U. OEB

**Jury**

Président : Nacer HABBIR

Encadrant : Nabil LAICHE

Examineur : Sara GUACHY

Examineur : Abd El Halim NECIB

**Oum El Bouaghi 26 Juin 2023**

## Remerciements

*Ce memoire est le fruit d'une année de travail. Et ici, nous tenons à remercier **Dieu** et les nombreuses personnes qui, à divers titres, ont participé à son élaboration. Le bon déroulement de mémoire se jusqu'à son heureuse issue grâce à notre encadrant de mémoire Monsieur Dr **Laiche Nabil**, qui nous a dirigés et qu'il nous a laissé une certaine liberté d'action, et nous avons d'ailleurs beaucoup apprécié la confiance qu'il nous a accordé. Nous le remercions chaleureusement pour sa disponibilité, son dynamisme et sa patience. Nous remercions les membres du jury qui ont accepté de discuter de notre thèse pour améliorer ce travail. Et pour leur présence et leurs remarques constructives. C'est aussi l'occasion de remercier nos parents. Enfin, nous remercions le public qui a envie pour la présence dans cette soutenance. .*

*Je tiens ma gratitude les membres du **jury** qui ont accepté de discuter le memoire pour améliorer ce travail. et pour leur présence et leurs remarques constructives.*

*C'est aussi l'occasion de remercier mes chers **parents**.*

---

## Dédicace

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...*

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, L'amour, le respect, la reconnaissance...*

*Aussi, c'est tout simplement que*

*Je dédie ce travail . . .*

Mes parents

Mes enseignants

*DERBALOUMAIMA MAZIANIASM*



## Résumé

Notre contribution dans ce memoire est basée sur l'étude d'un échantillons de équations différentielles stochastiques, dans ce papier nous cherchons les solutions généralisées d'un type des equations différentielles à l'aide d'approche d'Ito. Cette etude permet d'éclairer des comportement des propriétés fondamentales, et découvrir un type de calcul différentiel particulier différent au calcul différentiel classique équations. Cette etude permet de faire des simulations et illustrations numeriques avec l'outil MATLAB.

**Mots clés : ESD, Mouvement Brownian, Simulations.**

## Abstract

Our contribution in this thesis is based on the study of a sample of stochastic differential equations, in this paper we seek the generalized solutions of a type of differential equations using Ito's approach. This study sheds light on the behavior of fundamental properties, and discovers a particular type of differential calculus different from classical differential calculus equations. This study allows to make simulations and digital illustrations with the MATLAB tool.

**Keywords : ESD, Brownian Motion, Simulations.**

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Mouvement brownien</b>	<b>12</b>
2.1	Préliminaires . . . . .	12
2.1.1	Espace probabilisé . . . . .	12
2.1.2	Généralités sur les Processus Stochastiques . . . . .	13
2.1.3	Lois des processus gaussiens . . . . .	15
2.1.4	Accroissements indépendants et stationnaires . . . . .	15
2.2	Discrétisation en temps . . . . .	16
2.3	Quelques Méthodes de Simulation. . . . .	17
2.3.1	Méthode Aléatoire d'Euler . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Espace des équations différentielles stochastique</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Simulation d'un modèle bilinéaire stochastique</b>	<b>32</b>
4.0.1	L'outil MATLAB . . . . .	32
4.0.2	Pourquoi Nous Utilisons MATLAB . . . . .	32
4.0.3	La situation discrète de problème stochastique . . . . .	33
4.0.4	Conclusion . . . . .	34
4.1		
	Illustration des courbes représentative . . . . .	34
4.2	Annexe de quelques programmes de simulation avec l'outil Matlab . . . . .	36
4.2.1	Programme d'un modèles bilinéaires avec des coefficients périodiques . . . . .	36
4.2.2	Programme d'un modèle bilinéaire (7 coefficients périodiques) . . . . .	39
4.2.3	Programmes d'un modèle bilinéaires avec deux régimes . . . . .	41

---

4.2.4	Programme d'estimation . . . . .	44
-------	----------------------------------	----

# CHAPITRE 1

---

## Introduction Générale

---

Le calcul stochastique fait partie des outils qui résolvent les grands problèmes de la physique moderne, et vraiment c'est un domaine très efficace et ses applications sont illimitées car il a connu d'autres applications en économie et d'autres lendemains de la science et de l'ingénierie. Ce calcul touche le champ de probabilité classique [6], il s'applique à des épreuves où chaque résultat possible est un nombre. Or il existe beaucoup de situations réelles relevant de modèles aléatoires, mais d'une nature plus complexe. Considérons, par exemple, l'évolution d'une rivière : en raison du caractère périodique du phénomène, on peut l'étudier au cours d'une année, et, dans ce cas, une épreuve consiste à observer les débits au cours d'une année entière. Un événement élémentaire est alors une fonction  $t \mapsto x$  qui, au temps  $t$ , compté en année et variant de 0 à 1, associe le débit  $x(t)$  à la date  $t$ .

Nous rappelons que EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrés par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes. Les extensions de calcul différentiel posent des problèmes de modélisation ce qui pousse les mathématiciens à chercher un autre outil de calcul comme un cas urgent les **équations différentielles stochastiques**. **La question qui se pose pourquoi EDS.**

Les **EDS** sont présentées dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (**équations de Maxwell**), ou des mathématiques financières (équation de **Black-Scholes**). Elles sont

primordiales dans des domaines tels que la simulation numérique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des **EDS**. L'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'EDS appelé équations de **Navier-Stokes**.

De nombreux domaines utilisent des observations en fonction du temps. Dans les cas les plus simples, ces observations se traduisent par une courbe bien définie. En réalité, des sciences de la terre aux sciences humaines, les observations se présentent souvent de manière plus ou moins erratique. L'interprétation de ces observations est donc sujette à une certaine incertitude qui peut se traduire par l'utilisation de probabilités pour les représenter. Dans cette base, les processus stochastiques sont apparus comme un cas très urgent pour résoudre les problèmes posés dans notre vie. Ces modèles jouent un rôle fondamental dans la modélisation d'événements probabilistes, leurs applications sont infinies, en physique en biologie, chimie, mécanique, sciences de la terre, théorie des jeux, médecine, interprétations des phénomènes économiques. Par exemple physique, en économie, les conditions de marché et la concurrence dans le métier de l'assurance ont conduit les entreprises à développer de tels modèles, notamment pour déterminer leurs allocations stratégiques. Intégrant les risques d'actif et de passif, ces modèles permettent notamment d'associer niveaux de risque et allocations d'actifs. Les données des entreprises ont été modélisées par les processus stochastiques.

Le mouvement Brownien voir [21] est avant tout un processus aléatoire continu, et c'est le nom donné aux trajectoires irrégulières des grains de pollen en suspension dans l'eau, elle a été remarquée par le botaniste Robert Brown en 1828 en raison des chocs successifs entre les grains de pollen et les molécules d'eau.

Cependant, la portée du mouvement brownien est beaucoup plus large que l'étude des particules microscopiques en suspension, il implique la modélisation des cours boursiers, du bruit chimique dans les circuits électroniques du comportement aux limites des problèmes d'attente et des perturbations aléatoires dans un large éventail de systèmes physiques [?], biologiques et économiques, du comportement aux limites des problèmes d'attente et des perturbations aléatoires dans un large éventail de systèmes physiques [?], biologiques et économiques par conséquent de nombreux scientifiques se sont intéressés à l'étudier, car Bachelier est le premier à obtenir des résultats quantitatifs en se concentrant sur les fluctuations des cours boursiers dans l'économie, quand à Einstein a déterminé la densité de la loi de position à un instant précise pour une particule se déplaçant selon le mouvement Brownien sous

des hypothèses mathématiques précisées sa méthode reposait sur des considérations de mécanique statistique, que l'on a conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne, alors que la première traitement mathématiques rigoureux remonté à Wiener qui a conclu que le mouvement brownien peut être approximé par des mathématiques rigoureux remonté à Wiener qui a conclu que le mouvement brownien peut être approximé par des processus aléatoires discrets, le crédit revient également à Lévy [3], qui a pu étudier la courbe brownien et ses propriétés telle que le coefficient de continuité et la structure du groupe de temps que le processus passe par un certain point, la dernière étape importante pour étudier ce mouvement était par Ito, qui a établi le calcul aléatoire, qui est considéré comme l'un des éléments les plus importants que nous avons abordés dans notre travail.

Un processus stochastique ou processus aléatoire ou fonction aléatoire représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire. Celle-ci intervient dans le calcul classique des probabilités, où elle mesure chaque résultat possible (ou réalisation) d'une épreuve. Cette notion se généralise à plusieurs dimensions. Un cas particulier important, le champ aléatoire de Markov, est utilisé en analyse spatiale.

Le mouvement Brownien est avant tout un processus aléatoire continu, et c'est le nom donné aux trajectoires irrégulières des grains de pollen en suspension dans l'eau, elle a été remarquée par le botaniste Robert Brown en 1828 en raison des chocs successifs entre les grains de pollen et les molécules d'eau.

Cependant, la portée du mouvement brownien est beaucoup plus large que l'étude des particules microscopiques en suspension, il implique la modélisation des cours boursiers, du bruit chimique dans les circuits électroniques du comportement aux limites des problèmes d'attente et des perturbations aléatoires dans un large éventail de systèmes physiques [?], biologiques et économiques, du comportement aux limites des problèmes d'attente et des perturbations aléatoires dans un large éventail de systèmes physiques [?], biologiques et économiques par conséquent de nombreux scientifiques se sont intéressés à l'étudier, car Bachelier est le premier à obtenir des résultats quantitatifs en se concentrant sur les fluctuations des cours boursiers dans l'économie, quand Einstein a déterminé la densité de la loi de position à un instant précise pour une particule se déplaçant selon le mouvement Brownien sous des hypothèses mathématiques précisées sa méthode reposait sur des considérations de mécanique statistique, que l'on a conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne, alors que la première traitement mathématiques rigoureux remonté à Wiener qui a conclu que le mouvement brownien peut être approximé par des mathématiques rigoureux remonté à Wiener, qui a conclu que le mouvement brownien

peut être approximé par des processus aléatoires discrets, le crédit revient également à Lévy, qui a pu étudier la courbe brownienne et ses propriétés telle que le coefficient de continuité et la structure du groupe de temps que le processus passe par un certain point, la dernière étape importante pour étudier ce mouvement était par Ito, qui a établi le calcul aléatoire, qui est considéré comme l'un des éléments les plus importants que nous avons abordés dans notre travail. Notre travail est organisé comme suit, Le premier chapitre est consacré à des initiations sur le mouvement brownien, deuxième chapitre est une présentation de théorème de Ito, troisième chapitre est une généralisation des équations différentielles stochastiques, on va finaliser le travail par des simulations et illustrations numériques pour faire une comparaison dans le chapitre quatrième.

# CHAPITRE 2

---

## Mouvement brownien

---

### 2.1 Préliminaires

On rappelle que  $P(\Omega)$  désigne l'ensemble des parties de  $\Omega$ , et soit  $F \subset P(\Omega)$ .

**Definition 1** On dit qu'une partie  $F \subset P(\Omega)$  est une algèbre si elle vérifie les propriétés suivantes :

C.1)  $\emptyset \in F$

C.2)  $\forall x \in F : x^c \in F$

C.3) Pour tous  $x$  et  $y$  dans  $F$  on a  $x \cup y \in F$

**Definition 2** La tribu ( $\sigma$ -algèbre)

On dit qu'une partie  $F \subset P(\Omega)$  est une tribu si elle vérifie les propriétés suivantes :

C.1)  $\emptyset \in F$ .

C.2)  $\forall x \in F : x^c \in F$ .

C.3) Pour toute suite  $(A_i)_{i \geq 0}$  d'éléments de  $F$  on a  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$ .

#### 2.1.1 Espace probabilisé

On appelle probabilité sur  $(\Omega, F)$  toute application  $P : F \rightarrow [0, 1]$  vérifiant les propriétés suivantes

1)  $P(\emptyset) = 0$ . 2)  $P(\Omega) = 1$

3) Pour toute suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  deux à deux disjoints, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(x_i)$$

Le triplet  $(\Omega, F, P)$  est alors appelé espace probabilisé, on remarque qu'un espace probabilisé est un espace mesuré associé à une mesure positive de masse totale 1.

### 2.1.2 Généralités sur les Processus Stochastiques

Un processus Stochastique est un modèle probabiliste permettant d'étudier un phénomène aléatoire au cours du temps, nous expliquons ce concept dans la définition suivante :

**Definition 3** *[[14]]* Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace probabilisé et soit  $(E, A)$  un espace muni d'une tribu appelé espace des états un processus Stochastique est une famille de variables aléatoires réelles  $(x_t)_{t \in T}$  définies sur  $(\Omega, F, P)$  à valeurs dans  $(E, A)$ .

L'ensemble  $T$  représente le temps par suite, la variable aléatoire  $x_t$  correspond à l'état du phénomène à le moment  $t$ .

Si  $T$  est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si  $T = \mathbb{N}$  alors le processus est une suite de variable aléatoire, plus généralement quand  $T \subset \mathbb{Z}$  le processus est dit discrète pour  $T \subset \mathbb{R}^d$ , on parle de champ aléatoire.

-Un processus dépend de deux paramètres.  $x_t(\omega)$  dépend de  $t$  et l'aléatoire  $\omega \in \Omega$ .

-Pour tout  $t \in T$  fixé  $\omega \in \Omega \rightarrow x_t(\omega)$  est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$ .

-Pour  $\omega \in \Omega$  fixé  $t \in T \rightarrow x_t(\omega)$  est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, c'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables continues, dérivables ou encore plus régulières processus Stochastique.

**Definition 4** *[[18]]*.

Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in T}$  est dit mesurable si pour tout ensemble  $A \in B(E)$  ( tel que  $B(E)$  est la tribu borélienne )

## Continuité Stochastique

**Definition 5** On dit qu'un processus aléatoire  $X(t)$  défini sur un intervalle  $T$  est stochastiquement continu en un point  $t_0 \in T$  si pour tout  $\varphi > 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(X(t) - X(t_0) > \varphi) = 0 \quad (2.1)$$

Si un processus est stochastiquement continu en chaque point d'un intervalle  $T$ , on dit qu'il est stochastiquement continue sur l'intervalle  $T$  (cette définition est valable pour les processus aléatoires

numériques et vectoriels ) il est clair que la continuité  $\tilde{A}(\mathcal{C})$  stochastique d'un processus aléatoire  $\tilde{A}(\mathcal{C})$  sur l'ensemble  $T$  n'implique pas nécessairement la continuité de ses réalisations sur cet ensemble.

## Continuité Stochastique uniforme

**Definition 6** Un processus  $X(t)$  est uniformément stochastique continu, pour  $t_0 \in T$  si

$$\forall \varphi > 0, \exists \delta > 0 : P\{w : |X(t) - X(s)| > \varphi\} < \varphi$$

dès que  $0 < |t - s| < \delta$

## Continuité en moyenne

**Definition 7** Un processus aléatoire  $X(t)$  est dit continu en moyenne  $L_p$  si

$$\lim_{s \rightarrow t} E|X(s) - X(t)|^p = 0$$

Si  $p = 1, 2$  on dit qu'on a une continuité en moyenne  $L_p$  et en moyenne quadratique (respectivement)

**Proposition 8** Si un processus  $X(t)$  est stochastiquement continu sur  $T$  (fermé et borné) il est borné stochastiquement

**Definition 9** On dit que le processus aléatoire  $X(t) : \mathbb{R} * \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est borné en moyenne  $L_p$  ( $p \geq 1$ ) s'il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\sup_{t \geq 0} E|X(t)|^p \leq C$$

**Definition 10 :**

On dit que  $Y$  est une modification ou encore modification de  $X$  si pour tout  $t \in T$ ,  $P(X_t = Y_t) = 1$ . les processus stochastiques  $X$  et  $Y$  possèdent les mêmes lois finies dimensionnelles ou encore qu'ils sont égaux au sens des lois finies dimensionnelles, si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$  les vecteurs aléatoires

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ et } (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$$

sont de même loi i.e, pour tout ensemble  $A \in B(E^n)$ , on a :

$$P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A] = P[(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A]$$

### 2.1.3 Lois des processus gaussiens

Dans cette partie nous allons rappeler quelques notions et résultats pour une classe importante de processus stochastiques les processus gaussienne.

**Definition 11** *[[20]](processus stochastique)*

un processus stochastique  $(x_t)_{t \in T}$  est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaires de ses marginales  $a_1 x_{t_1} \dots + a_p x_{t_n}$  suit une loi gaussienne ( pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ). Autrement dit  $(x_t)_{t \in T}$  est un processus gaussien si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour  $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$  le vecteur aléatoire  $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$  est un vecteur gaussien.

**Proposition 12** *La loi d'un processus gaussien  $(x_t)_{t \in T}$  est déterminée par sa fonction moyenne :*

$$\begin{aligned} m_x : T &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow E(x_t) \end{aligned}$$

Et par la fonction de covariance

$$\begin{aligned} \Gamma_x : T \times T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) &\rightarrow cov(x_s, x_t) \end{aligned}$$

### 2.1.4 Accroissements indépendants et stationnaires

**Definition 13** *la processus stochastique  $(x_t)_{t \in T}$  a des accroissements indépendants si  $\forall k \in \mathbb{N}$  et  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$  les variables aléatoires  $x_{t_0}, x_{t_1} - x_{t_0}, x_{t_2} - x_{t_1}, x_{t_3} - x_{t_2}, \dots, x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$  sont indépendantes.*

*Le processus stochastique  $(x_t)_{t \in T}$  a des accroissements stationnaires si  $\forall h > 0$ , les variables aléatoires  $x_{t+h} - x_t$  ont la meme distribution  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .*

## Aperçu Historique

Le **mouvement Brownien** est avant tout un processus aléatoire continue et c'est le nom donné aux trajectoires irrégulières des grains de pollen en suspension dans l'eau, elle a été remarquée par le botaniste **Robert Brown** en **1828** en raison des chocs successifs entre les grains de pollen et les molécules d'eau.

Cependant, la portée du mouvement brownien est beaucoup plus large que l'étude des particules méicroscopiques en suspension, il implique la modélisation des cours boursiers, du bruit thermique dans

les circuits électroniques du comportement aux limites des problèmes d'attente et des perturbations aléatoires dans un large éventail de systèmes physiques, biologiques et économiques,

Par conséquent de nombreux scientifiques se sont intéressés par l'étude de phénomène stochastique, car **Bachelier** est le premier à obtenir des résultats quantitatifs en se concentrant sur les fluctuations des cours boursiers dans l'économie, quand à **Einstein**, il a franchi une étape importante par la quelle il a déterminé la densité de la loi de position à un instant précis pour une particule se déplaçant selon le mouvement brownien sous des hypothèses mathématiques précisés sa méthode reposait sur des considérations de mécanique statistique qui l'ont conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité Gaussienne, alors que la première traitement mathématiques rigoureux remonté à Wiener qui a conclu que le **mouvement Brownien**

**Definition 14** Soit  $(w_t)_{t \geq 0}$  une famille de variable aléatoire. On dit que cette famille forme un mouvement Brownien standard si

C.1)  $\forall t \geq 0 : w_t \rightarrow N(0, t) \quad \forall s \leq t, w_t - w_s$  est une variable réelle suit loi Gaussienne, centré de variance  $(t - s)$ .

C.2)  $\forall n, \forall t_i$  si  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  les variables  $(w_{t_n} - w_{t_{n-1}}, \dots, w_{t_1} - w_{t_0}, w_{t_0})$  sont indépendantes.

C.3)  $P(w_0 = 0) = 1$  (le mouvement brownien est issu de l'origine).

## 2.2 Discrétisation en temps

Nous prenons le mouvement brownien standard  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$  L'objectif est de simuler ce processus afin de discrétiser l'intervalle de temps  $[0, T]$ . En sélectionnant le pas de discrétisation  $\Delta t = T/N$  Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ . Nous simulons alors une réalisation du processus selon l'expression suivante

$$\Delta t = \frac{T}{N} \Rightarrow N\Delta t = T$$

C'est-à-dire une réalisation du vecteur  $(B_{\Delta t}, B_{2\Delta t}, \dots, B_{N\Delta t})$ . Nous allons ensuite approcher la trajectoire du mouvement  $B_t$  à partir de cette réalisation.

## 2.3 Quelques Méthodes de Simulation.

### 2.3.1 Méthode Aléatoire d'Euler

Soit  $(B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t})_{k \in \mathbb{N}}$  Est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et de variance  $\Delta t$  D'après la définition du mouvement Brownien  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  Par ailleurs, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$

$$B_{m\Delta t} = \sum_{k=0}^{m-1} (B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t})$$

### Algorithme

- 1- Générer  $N$  variables aléatoires  $z_k$  qui suit de la loi  $N(0, 1)$
- 2- Poser  $B_0 = 0$  et

$$B_{k\Delta t} = B_{(k-1)\Delta t} + \sqrt{\Delta t} z_k \text{ Pour } k \in \{1, N\}.$$

### Programme en Matlab

```
K=5 %% Nombres de trajectoires
%% Temps final
T=1
%% pas de discrétisation
N=1000
delta=T/N;
%% construction des K traj
%% chaque colonne de B est une réalisation
B = [zeros(1, k); cumsum (sqrt(delta).* randn(N,K))];
%% trace
Temps =[0 : delta : T]; % vecteur des temps k* delta t
plot (temps, B) % représente la courbe de la fonction
```

### Formule d'Ito

La formule d'Ito a été démontrée dans les années 1940, et cette expression joue un rôle fondamental pour interpréter les outils principaux de calcul stochastique. Le lemme d'Ito ou bien formule stochas-

tique a ouvert un moyen de manipeller le mouvement Brownien avec une construction et découverte des solutio,s dans l'espace des equations aux dérivées partielles.

### Formule d'Ito

Supposons que  $\mathbf{X}(\cdot)$  est un processus stochastique à valeur réelles

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dw \quad (2.2)$$

Telle que  $F \in L^1(0, T)$  et  $G \in L^2(0, T)$  sur le domaine  $0 \leq s \leq r \leq T$ . On dit que  $\mathbf{X}(\cdot)$  est une equation différentielle stochastique si

$$dX = F dt + G dw \quad (2.3)$$

Pour  $0 \leq t \leq T$ .

Supposons que  $u : \mathbb{R} \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction soit continue et  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  existent et sont continues autrement dit la fonction  $u$  est continument dérivable en temps  $t$ , et deux fois continument dérivable en  $x$ . On pose  $Y(t) = u(x(t), t)$ , donc

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt G^2 dt \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dw \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nous appelons (2.4) la formule d'Ito [?] on a

$$dX = F(x, t)dt + G(x, t)dw \quad (2.5)$$

où  $d\omega = \xi \sqrt{dt}$  avec  $\xi \rightarrow N(0, 1)$  loi normal  $\left( \begin{array}{l} E(\xi) = 0 \\ var(\xi) = 1 \end{array} \right)$  permièrement en va d'écrire le developpement limité de  $u(x, t)$ .

$$du(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dX)^2 + \dots \quad (2.6)$$

$$du(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} (F(x, t)dt + G(x, t)dw) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} [F'(x, t)dt + G(x, t)dw]^2$$

en remplace  $dw$  par  $\xi \sqrt{dt}$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} F(x, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x} G(x, t)dw + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} [F(x, t)dt + G(x, t)\xi \sqrt{dt}]^2$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} F(x, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x} G(x, t)dw + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (dt)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} [F^2(x, t)(dt)^2 + 2F(x, t).G(x, t)\xi(dt)^{\frac{3}{2}} + G^2(x, t)\xi^2 dt]$$

troncature de  $du(x,t)$  à l'ordre 1 ( négligeant l'ordre  $> 1$ )

$$du(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} F(x,t) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G(x,t) dw + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2(x,t) \xi^2 dt$$

nous avons calculer l'espérance de  $G^2(x,t) \xi^2 dt$

par la linéarité de l'espérance

$$E[G^2(x,t) \xi^2 dt] = G^2(x,t) dt E[\xi^2]$$

on a d'après la formule

$$\begin{aligned} \text{var}(\xi) &= E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 \\ \Rightarrow E(\xi^2) &= \text{var}(\xi) + [E(\xi)]^2 = 1 + 0 = 1 \\ \Rightarrow E[G^2(x,t) \xi^2 dt] &= G^2(x,t) dt \\ \text{var}(G^2(x,t) \xi^2 dt) &= G^4(x,t) dt \text{ var}(\xi^2) \end{aligned}$$

car  $\text{var}(\alpha x) = \alpha^2 \text{var}(x)$   $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{dt \rightarrow 0} (\text{var } G^2(x,t) \xi^2 dt) = 0 \Rightarrow G^2(x,t) \xi^2 dt \rightarrow G^2(x,t) dt$$

$$du(x,t) = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} F(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2(x,t) \right] dt + \frac{\partial u}{\partial x} u(x,t) dw$$

$$\Rightarrow du(x,t) = A(x,t) dt + B(x,t) dw$$

## Exemple

Dans notre travail il y a boucoup des applications sur la dérivée stochastique à l'aide de formule d'Ito

Soit  $x(t) = w(t)$ , on pose  $u(x) = x^m$  alors selon l'expression de Ito on a

$$dw^m(t) = mw^{m-1}(t)dw + \frac{1}{2}m(m-1)w^{m-2}(t)dt \quad (2.7)$$

On peut remarquer ou le cas  $m = 2$  on trouvera

$$dw^2(t) = mw(t)dw + \frac{1}{2}m(m-1)dt$$

Dans ce cas on va déduire que l'intégrale de quantité

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} dw^2(t) &= \int_{s_0}^{s_1} mw(s)dw + \frac{1}{2}m(m-1)ds \\ &= \frac{w^2(s_1) - w^2(s_0)}{2} - \frac{(s_1 - s_0)}{2} \end{aligned}$$

**Theorem 15** Soit  $T \in \mathbb{R}_+$ . On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t)dt + \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)d\omega_t \\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{Z} \end{cases} \quad (2.8)$$

Et soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux fonctions boréliennes, on suppose qu'il existe une constante  $\mathbf{K}$  telle que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^n$

1) Condition Lipshitzienne en espace uniforme en temps

$$|\mathbf{a}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{a}(t, \mathbf{y})| + |\mathbf{b}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{b}(t, \mathbf{y})| \leq \mathbf{K}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

2) Croissance linéaire : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, T]$

$$|\mathbf{a}(t, \mathbf{x})| + |\mathbf{b}(t, \mathbf{y})| \leq \mathbf{K}(1 + |\mathbf{x}|)$$

3)  $E(\sup_{t \in T} |X(t)|^2) < +\infty$

Alors l'EDS (2.8) accepte une solution unique.

Preuve voir référence [?]

# CHAPITRE 3

---

## Espace des équations différentielles stochastique

---

### Intégrale stochastique

Le calcul différentiel forme un espace pour le concept de l'équation différentielle ordinaire, qui est un modèle pour les phénomènes qui changent dans le temps par conséquent, lorsqu'ils ont voulu ajouter des perturbations aléatoires à cette équation, ils ont été gênés par la méconnaissance du mouvement brownien, résultat, ils ont commencé à construire une intégrale liée à celle-ci puis ils ont déterminé l'équation différentielle aléatoire, et donc ils ont d'abord dû connaître

$$\int_0^t H_s dB_s$$

#### (paley-zygmund)

Supposons que  $H : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction soit continûment dérivable avec  $H(0) = H(T) = 0$  telle que  $H$  est une fonction déterministe ordinaire et non un processus stochastique alors définissons  $A_n$  ne peut pas être compris comme

$$\int_0^T H(t) dw(t) = - \int_0^T H'(t) w(t) dt$$

Notez que  $\int_0^T H(t) dw(t)$  est donc une variable aléatoire voyons les propriétés qui découlent de cette définition

On a  $H(0) = H(T) = 0$

$$\int_0^T H(t) dw(t) = - \int_0^T H'(t) w(t) dt$$

En utilisant la formule d'intégration par partie

$$\begin{aligned}\int_0^T H(t)dw(t) &= \dots - \int_0^T H'(t)w(t)dt \\ &= - \int_0^T H'(t)w(t)dt\end{aligned}$$

**(propriétés de l'intégrale de P-w-z) :**

i)  $E\left(\int_0^T Hdw\right) = 0$

ii)  $E\left(\left(\int_0^T Hdw(t)\right)^2\right) = \int_0^T H^2(t)dt$

On a d'après la définition précédent

$$\int_0^T H(t)dw(t) = - \int_0^T H'(t)w(t)dt$$

alors

$$\begin{aligned}E\left(\int_0^T H(t)dw(t)\right) &= E\left(- \int_0^T H'(t)w(t)dt\right) \\ &= - \int_0^T H'(t)E(w(t))dt = 0\end{aligned}$$

Car  $E(w(t)) = 0$

ii)  $E\left(\left(\int_0^T H(t)dw(t)\right)^2\right) = \int_0^T H^2(t)dt$

$$\begin{aligned}E\left(\int_0^T H(t)dw(t)\right)^2 &= E\left(- \int_0^T H'(t)w(t)dt\right)^2 \\ &= E\left(\int_0^T H'(t)w(t)dt\right)^2 \\ &= E\left(\int_0^T H'(t)w(t)dt \cdot \int_0^T H'(s)w(s)ds\right) \\ &= \int_0^T \int_0^T H'(t)H'(s)E(w(t)w(s))dsdt \\ &= \int_0^T H'(t)\left(\int_0^T sH'(s)ds + \int_0^T tH'(s)ds\right)dt \\ &= \int_0^T H'(t)\left(tH(t) - \int_0^T Hds - tH(t)\right)dt \\ &= \int_0^T H'(t)\left(- \int_0^T H(t)ds\right)dt \\ &= \int_0^T H^2(t)dt\end{aligned}$$

**variation quadratique :**

Soit  $[a, b]$  un intervalle dans  $[0; +\infty[$

Supposons que :

$$P^n = \{a = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_{m_n}^n = b\}$$

Soit des partitions de  $[a, b]$  avec  $|p^n| \rightarrow 0$  comme  $n \rightarrow \infty$

Alors  $\sum_{k=0}^{m_n-1} (w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n))^2 \rightarrow b - a$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $x \rightarrow \infty$  On pose  $a_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} (w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n))^2$

On a

$$\begin{array}{l} t_1 - t_0 \\ t_2 - t_1 \\ t_3 - t_2 \\ \vdots \\ t_{k-1} - t_k \end{array} \quad a_n - (b - a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} (w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)$$

$$\Rightarrow E((a_n - (b - a))^2) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} E((w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \cdot [w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n)]^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))$$

pour  $k \neq j$  le terme dans la double somme est

$$E((w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)) E((w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))$$

Selon les incréments indépendantes et donc égal à 0 puisque  $w(t) - w(s)$  est  $N(0, t - s)$  pour les  $0 \leq s \leq t$  d'où

$$E((a_n - (b - a))^2) = \sum_{k=0}^{m_n-1} E((y_k^2 - 1)^2 (t_{k+1}^n - t_k^n)^2)$$

## Introduction (motivation)

Soit  $(w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un MB standard défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$ , il y a plusieurs méthodes dans la littérature probabiliste pour approcher la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) de forme

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = \varphi_0(x, t)dt + \varphi_1(x, t)dw \\ X(0) = X_0, \quad t \in [0, T] \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Avec une condition initiale  $X_0$  déterministe et  $t \in [0, T]$  ou  $t \in [0; +\infty[$  cette équation se résout sous la forme intégrale suivante

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \varphi_0(X, s)ds + \int_0^t \varphi_1(X, s)dw(s), \quad \forall t \in I$$

avec  $I = [0, T]$  ou  $\mathbb{R}_+$ . Dans cette équation pour chaque  $w \in \Omega$  l'intégrale  $\int_{\Omega} \varphi_0(X(s), s) ds$  à comprendre au sens de lebesgue et on peut donc l'approcher par des méthode du types déterministe (Simpson, Riemman, trapèzes...)

La partie non classique de L'EDS est l'intégrale stochastique  $\int_0^t \varphi_1(X, S) dw(s)$ .

**Definition 16** Soit  $(X_t)_{t \in T}$  un processus stochastique vérifiant

$$\begin{cases} dX(t) = \varphi_0(X_t, t)dt + \varphi_1(X(t), t)dw(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$   $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont des coefficients de modèle stochastique

Dans le cas si  $\varphi_1 = 0$  l'équation (3.2) devient une équation différentielle ordinaire  $dX(t) = \varphi_0(X(t), t)dt$

Dans cette partie nous reppelons tout d'abord le théorème d'existence et d'unicité dans le champs des équations différentielles stochastique "EDS".

**Definition 17** on se place toujours sur un espace de probabilité complet, disons  $(\omega, \mathcal{F}, P)$  et on se donne  $w$  un mouvement brownien  $d$ - dimensionnel sur cet espace ,

On considère également une variable aléatoire  $z$  de carré intégrable et indépendante du mouvement brownien  $(w)$ .

Soit  $T$  un réel strictement positive ( $T \in \mathbb{R}_+$ ) on considère deux fonctions  $a : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX(t) = a(X_t, t)dt + b(X(t), t)dw \\ X_0 = z, \end{cases}$$

Comme nous allons la voir par la suite cette équation est à interpréter au sens d'une équation intégrale à savoir

$$X(t) = z + \int_0^t a(X(r), r)dr + \int_0^t b(X(r), r)dw_i(r) \quad a \leq t \leq T$$

**Definition 18** solution forte de l'EDS,  $X$  est un processus continu tel que

1.  $X$  est progressivement mesurable

$$2. \text{ p.p.s } \int_0^t |a(X(r), r)| + \|b(X(r), r)\|' dr < \infty$$

$$3. \text{ p.p.s on a } X(t) = z + \int_0^t a(X_r, r)dr + \int_0^t b(X_r, r)dw_r \quad 0 \leq t \leq T$$

### Contre exemple

soit

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{1}{t}dt + dw(t) \\ \int_0^2 \frac{1}{t}dt &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_R^2 \frac{1}{r}dr \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} [\ln t]_R^2 = \lim_{R \rightarrow 0} [\ln 2 - \ln R] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

la méthode itérative de Picard comme dans le cas déterministe, est utilisé pour processus et il est également possible de prouver sur la base d'un argument de point fixe

pour  $X \in \sigma_c^2$  possons pour toute  $t \in [0, T]$

$$\varphi(X_t) = z + \int_0^t a(X_r, r)dr + \int_0^t b(X_r, r)dw_r$$

le processus  $\varphi(X)$  est bien défini et est continu si  $X \in \sigma_c^2$

Si  $X$  et  $Y$  deux éléments de  $\sigma_c^2$

Comme

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

On a pour tout  $0 \leq t \leq s \leq T$

$$\begin{aligned} |\varphi(X)_t - \varphi(Y)_t|^2 &\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq s} |a(X(r), r)dr + \int_0^t b(y(r), r)dw(r)|^2 \\ &\quad + 2 \sup_{0 \leq t \leq s} \left| \int_0^t (b(X(r), r) - b(Y(r), r))dw(r) \right|^2 \end{aligned}$$

On utilisant les propriété de l'intégrale stochastique

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |\varphi(X)_t - \varphi(Y)_t|^2 \right] \leq 2E \left[ \left| \int_0^s a(X_r, r)dr - a(Y_r, r)dr \right|^2 \right] + 8E \left[ \left| \int_0^s b(X_r, r)dr - b(Y_r, r)dr \right|^2 \right]$$

Inégalité de Holder donne alors la majoration

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |\varphi(X)_t - \varphi(Y)_t|^2 \right] \leq 2K^2(T + 4)E \left[ \int_0^s \sup_{0 \leq t \leq s} |X_t - Y_t|^2 dr \right] \dots (2)$$

de plus, notant  $o$  la processus nul On a comme

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$|\varphi(0)_t|^2 \leq 3z^2 + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |d(0, r)dr|^2 + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |b(0, r)dw(r)|^2$$

en utilisant l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de  $a$  et  $b$

$$E[\sup |\varphi(0)_t|^2] \leq 3(E[z^2] + K^2T^2 + 4K^2T)$$

les estimations (2) et (3) montrent alors que la processus  $\varphi(X)$  appartient à  $\sigma_c^2$  des que  $X$  appartient à  $\sigma_c^2$

On définit alors par récurrence une suite de processus de  $\sigma_c^2$ , en posant pour  $X_0 = 0$  et  $X^{n+1} = \varphi(X)^n$  pour  $n \geq 0$

On obtient a l'aide de la formule (2) pour tout  $n \geq 0$  notant  $c = 2K^2(T + 4)$

$$E[\sup |X_t^{n+1} - X_t^n|^2] \leq \frac{c^n T^n}{n!} E[\sup |X_t^2|^2]$$

Soit encore notant  $D$  le majorant de l'inégalité (3)

$$E[\sup |X_t^{n+1} - X_t^n|^2] \leq D \frac{c^n T^n}{n!} E[\sup |X_t^2|^2]$$

danc résultat de cette inégalité que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq 0} \|\sup |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\|_{L^2} &\leq \sum_{n \leq 0} \|\sup |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{D} \sum \frac{(cT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} E[\sup |X_t^2|^2] < \infty \end{aligned}$$

Ainsi  $\sum_{n \leq 0} \sup |X_t^{n+1} - X_t^n|$  converge p.p.s et donc p.p.s  $X^n$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers un processus  $X$  continu de plus  $X \in \sigma_c^2$  puisque la convergence à lieu dans  $\sigma_c^2$ , voir l'inégalité précédent, on vérifie très facilement que  $X$  est solution de l'EDS (1) en passant à la limite dans la définition  $X^{n+1} = \varphi(X^n)$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux solutions de l'EDS (1) dans  $\sigma_c^2$  alors  $X = \varphi(X)$  et  $Y = \varphi(Y)$  l'inégalité (2) donne alors pour tout  $s \in [0, T]$

$$E[\sup_{0 \leq t \leq s} |X_t - Y_t|^2] \leq 2K^2(T + 4) \int_0^s E[\sup_{0 \leq t \leq s} |X_t - Y_t|^2] dr$$

et le comme de ronwalle montrer que

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2] = 0$$

ce que prouve que  $X$  et  $Y$  sont indistinguables

Pour montrer l'unicité des solutions de (1) au sens de la définition (2) nous devons montrer que toute solution appartenant à  $\delta_c^2$  c'est à dire comme toute solution est continue par définition, appartenant à  $\delta^2$

pour cela considère le temps d'arrêt  $t_n = \inf$

$$T_n = \inf\{t \in [0, T]; |X_t| > n\}$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$  si  $s \in [0, Tt]$  on a

$$|X_{n \wedge T_n}| \leq 3(|z|^2 + \sup) \int_0^{s \wedge T_n} a(X_r, r) dr + \sup \int_0^{s \wedge T_n} b(X_r, r) dw_r$$

il vient alors

$$E[\sup_{0 \leq s \leq s \wedge T_n} |X_s|^2] \leq 3E[|z|^2] + E[(\int_0^{s \wedge T_n} a(X_r, r) dr)^2] + 4E[\int_0^{s \wedge T_n} \|b(X_r, r)\|^2 dr]$$

et utilisant la croissance linéaire de  $a$  et  $\sigma$  On obtient

$$E[\sup |X_s|^2] \leq 3(E[|z|^2] + 2K^2T^2 + 8K^2T + (2K^2T + 8K^2) \int_0^t E[\sup_{0 \leq s \leq s \wedge T_n} |X_s|^2])$$

On obtient en appliquant le lemme de Gronwall à la fonction  $t \mapsto E[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge T_n}]$

$$E[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge T_n} |X_s|^2] < 3(E[|z|^2] + 2k^2T^2 + 8k^2T) \exp(3(2k^2T + 8k^2)^2)$$

ceci implique l'unicité des solution de l'Eds(1).

l' existence de solution

l'unicité des solutions

Eventuellement en fonctions de données aux limites prescrites. Cependant, des questions nouvelles et propres aux EDP apparaissent aussi, comme la régularité des solutions. Comme pour les équations ordinaires voire encore beaucoup plus, des propriétés qualitatives, comme des bornes sur diverses quantités ponctuelles ou intégrales sont fondamentales. Ces dernières s'avèrent souvent cruciales pour établir l'existence même des solutions : c'est la méthode des estimations. Dans cette méthode, on commence par étudier les solutions et décrire un certain nombre et pour généraliser la définition des EDP on a la définition suivante

Soit  $X(\cdot)$  un processus stochastique a valeur dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $X(\cdot)$  est une solution de l'EDS d'Ito pour  $0 \leq t \leq T$  prouvu que :

$$\begin{cases} dX = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dw \\ X(0) = X_0, \quad \text{valeur initiale} \end{cases}$$

i)  $X(\cdot)$  est progressivement mesurable par rapport à  $F$

ii)  $F = a(X(t), t) \in L^2(0, T)$

iii)  $G = b(X(t), t) \in L^2(0, T)$

iv) Pour tout  $t \in [0, T]$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(X(s), s)ds + \int_0^t b(X(s), s)dw$$

supposons que  $f$  est une fonction continue alors l'unique solution de

$$\begin{cases} dX(t) = f(t)X(t)dw \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

est

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t f^2(s)ds} + \int_0^t f dw \quad \text{pour } t \in [0, T]$$

Pour vérifier cela

On pose

$$Y(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t f^2(s)ds + \int_0^t f dw$$

Alors

$$dY(t) = -\frac{1}{2}f^2(t)dt + f(t)dw$$

Donc on applique la loi de la formule d'Ito

$$dU(X(t), t) = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial x}dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} G^2 dt$$

On pose

$$U(Y) = X(t) = e^{Y(t)}$$

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds} + \int_0^t f dw$$

Et on a

$$dY = -\frac{1}{2}f^2(t)dt + f(t)dw$$

Alors

$$F = -\frac{1}{2}f^2 \quad \text{et} \quad G = f$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial Y} dY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} G^2 dt \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0$$

$$\begin{aligned} &= e^Y dy + \frac{1}{2} e^Y g^2 dt \\ &= e^Y \left( -\frac{1}{2} f^2(t) dt + f dw \right) + \frac{1}{2} e^Y g^2 dt \\ &= e^Y \left( -\frac{1}{2} f^2(t) dt + f dw + \frac{1}{2} g^2 dt \right) \\ &= e^Y f dw \\ &= X(t) f dw \quad \text{d'après l'hypothèse } X(t) = e^Y \end{aligned}$$

Soit l'Eds suivante

$$(1) \begin{cases} dX = fX dt + gX dw \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(t) = e^{\int_0^t f - \frac{1}{2} g^2 ds} + \int_0^t g dw$$

solution de (1)

On pose

$$Y(t) = \int_0^t f - \frac{1}{2}g^2 ds + \int_0^t g dw$$

Alors

$$dY(t) = (f - \frac{1}{2}g^2)dt + gdw$$

$$\Rightarrow F = f - \frac{1}{2}g^2 \quad \text{et} \quad G = g$$

On pose

$$U(y) = X(t) = e^{y(t)}$$

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} G^2 dt \\ &= e^y dy + \frac{1}{2} e^y g^2 dt \\ &= e^y (f - \frac{1}{2}g^2) dt + gdw + \frac{1}{2} e^y g^2 dt \\ &= e^y (f dt - \frac{1}{2}g^2 dt + gdw + \frac{1}{2}g^2 dt) \\ &= e^y (f dt + gdw) \\ &= X(t)(f dt + gdw) \\ dU &= fX dt + gX dw \end{aligned}$$

On peut modéliser l'évolution du cours de l'action pour l'instant  $t$  que l'on désigne par le symbole  $s(t)$ , en supposant que  $\frac{ds}{s}$  est la variation relative du cours qui évolue selon l'équation d'EDS

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dw$$

Pour certaines constantes  $\mu > 0$  et  $\sigma$  appelées dérive et volatilité des actions telle que

$$(1) \begin{cases} ds = \mu s dt + \sigma s dw \\ s(0) = s_0, \end{cases}$$

Notez que  $dt$  fait référence au temps de production et  $dw$  fait référence à la qualité de la production et

$$\begin{aligned} d(\log s) &= \frac{ds}{s} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 s^2 dt}{s^2} \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dw \end{aligned}$$

Alors

$$s(t) = s_0 e^{\sigma w(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

.

On a

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dw$$

On pose

$$U(s) = \log s$$

Alors

$$\begin{aligned} d(\log s) &= \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} G^2 dt \quad (D'après la formule d'Itô) \\ &= \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} G^2 dt \\ &= \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{s^2} G^2 dt\right) \\ &= \frac{1}{s} ds - \frac{1}{2s^2} G^2 dt \end{aligned}$$

et on a aussi

$$ds = \mu s dt + \sigma s dw$$

alors

$$\begin{aligned} d(\log s) &= \frac{1}{s} (\mu s dt + \sigma s dw) - \frac{1}{2s^2} s^2 dt \\ &= \mu dt + \sigma dw - \frac{1}{2s^2} s^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2s^2} s^2\right) dt + \sigma dw \\ \Rightarrow \log s &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2s^2} s^2\right) dt + \int_0^t \sigma dw \\ s &= s_0 e^{\int_0^t (\mu - \frac{1}{2s^2} s^2) dt + \int_0^t \sigma dw} \end{aligned}$$

# CHAPITRE 4

---

## Simulation d'un modèle bilinéaire stochastique

---

La simulation joue un rôle fondamental pour la vérification théorique [20], elle permet d'extraire des propriétés principales non remarquées dans l'étude théorique, La simulation numérique permet une meilleure prise en compte des besoins et des contraintes ainsi qu'une modification rapide des paramètres à moindres coûts. Cela permet, par conséquent, de tester des concepts innovants plus facilement. Certaines techniques d'optimisation permettent également de faire des économies rationnelles de matériaux et d'améliorer la qualité et la durée de vie des produits et ou d'optimiser des processus de production.

### 4.0.1 L'outil MATLAB

MATLAB (« Matrix Laboratory ») est un langage muni par un environnement mathématique et logique [22] ; il est utilisé dans calculs numériques compliqués et les domaines d'ingénierie et sciences. Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran.

### 4.0.2 Pourquoi Nous Utilisons MATLAB

L'environnement de programmation Matlab possède de nombreux avantages :

- a) Développement rapide pour le calcul et pour l'affichage,
- b) Un environnement facile d'accès pour un débutant,
- c) Un éditeur intégré,
- d) Une librairie riche,
- e) La possibilité d'intégrer un programme en C++/C++,
- f) Une documentation bien faite.

### 4.0.3 La situation discrète de problème stochastique

On pose  $x(t) = X_{2t+v}$  aussi nous avons connu que  $(w(t))' = \varepsilon_{2t+v}$  dans ce cas nous trouverons le modèle suivant

$$X_{2t+v} = b(v) X_{2(t-1)+v} \varepsilon_{2t+v-1} + \varepsilon_{2t+v} \quad (4.1)$$

Pour  $v = 1, 2$ ,  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc  $N(0, 1)$ . Il s'agit d'un modèle  $PBL(0, 0, 2, 1)_2$ . Avec les notations utilisées dans la section ( $N$  la taille d'échantillon,  $\text{var}$  la variance,  $s$  la période,  $b$  valeur vrai, et  $\hat{b}$  leur valeur estimé). Les simulations de ce modèle (4.1) selon la taille d'échantillon et nombre des simulations donnent les résultats suivants

**Tableau 1**

Pour $N = 500, s = 2$	$ns = 250$
$(b(1), b(2))$	$(0.05, 0.4500)$
$(\hat{b}(1), \hat{b}(2))$	$(0.0515, 0.4542)$
$(\text{var}_{\hat{b}(1)}, \text{var}_{\hat{b}(2)})$	$(0.0100, 0.0098)$
$(\text{mse}(1), \text{mse}(2))$	$(0.1957, 0.0018)$

**Tableau 2**

pour $N = 1000$ et $s = 2$	et $ns = 500$
$(b(1), b(2))$	$(0.05, 0.45)$
$(\hat{b}(1), \hat{b}(2))$	$(0.0517, 0.4442)$
$(\text{var}_{\hat{b}(1)}, \text{var}_{\hat{b}(2)})$	$(0.0041, 0.0058)$
$(\text{mse}(1), \text{mse}(2))$	$(0.0943, 0.0086)$

On considère maintenant un modèle bilinéaire de période 7

$$X_{7t+v} = b(v) X_{7t+v-2} \varepsilon_{7t+v-1} + \varepsilon_{7t+v} \quad (4.2)$$

Où  $v \in \{1, 2, \dots, 7\}$ , les simulations de ce modèles sont présentés dans les tableaux suivants

**Tableau 3 (ns=500)**

N	$b(v) = (0.0100, 0.1500, 0.3000, 0.4000, -0.4000, 0.5000, 0.7000)$
100	$\hat{b}(v) = (0.0173, 0.2255, 0.2768, 0.3459, -0.3697, 0.4447, 0.5227)$
500	$\hat{b}(v) = (0.0181, 0.2316, 0.2786, 0.3518, -0.3712, 0.4502, 0.5159)$
1000	$\hat{b}(v) = (0.0125, 0.2307, 0.2785, 0.3553, -0.3695, 0.4512, 0.5151)$

**Tableau 4 (kurtoisis ku)**

N	$b(v)=(0.0100,0.1500,0.3000,0.4000,-0.4000,0.5000,0.7000)$
700	$ku(v)=(4.2013,3.7909,3.7373,5.6398,11.4534,7.0754,4.1555)$
1400	$ku(v)=(4.2153,3.7758,3.7373,4.222,11.0232,7.0712,3.9925)$
2100	$ku(v)=(4.1221,3.3521,3.2331,3.9152,4.0484,3.7472,3.6833)$

**Tableau 5 (variance)**

N	$b(v)=(0.0100,0.1500,0.3000,0.4000,-0.4000,0.5000,0.7000)$
700	$var(v)=(0.1789\ 0.1383\ 0.1210\ 0.1352\ 0.1475\ 0.1521\ 0.1623)$
1400	$var(v)=(0.1058\ 0.0799\ 0.0674\ 0.0779\ 0.0910\ 0.0911\ 0.0975)$
2100	$var(v)=(0.1058\ 0.0799\ 0.0674\ 0.0779\ 0.0910\ 0.0911\ 0.0975)$

#### 4.0.4 Conclusion

Cette section est consacrée de présenter les simulations des propriétés théoriques des estimateurs pour deux modèles avec deux périodes différentes. Où on trouve que les résultats empiriques obtenus dans les tableaux permettent d'observer les conclusions suivantes. L'accroissement de la taille d'échantillon  $N$  améliore de une façon substantielle les résultats en termes de réduction de biais et de précision pour les estimateurs. En effet, les estimateurs  $\hat{b}_{i,N}(v)$  calculés sur les 500 simulations est d'autant plus proche de la vraie valeur  $b_i(v)$ . En plus quand la taille d'échantillon augmente plus variance des estimations est proche de zéro, ce qui améliore la précision des estimations. Ces résultats numériques confirment la théorie asymptotique et existence de convergence. Plus que l'échantillon élevé la kurtosis tend vers 3 dans le cas gaussien, et l'observation des tableaux souligne que la moyenne des coefficients de kurtosis sur les 500 simulations a tendance à se rapprocher de la valeur de référence 3 lorsque la taille d'échantillon s'accroît. Cette observation empirique précise normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{b}_{i,N}(v)$ .

## 4.1

### Illustration des courbes représentative

Cette section est consacré de présenter les courbes ou bien les graphes d'un échantillon des modèles stochastique, premièrement nous visons le comportement de Mouvement Brownian

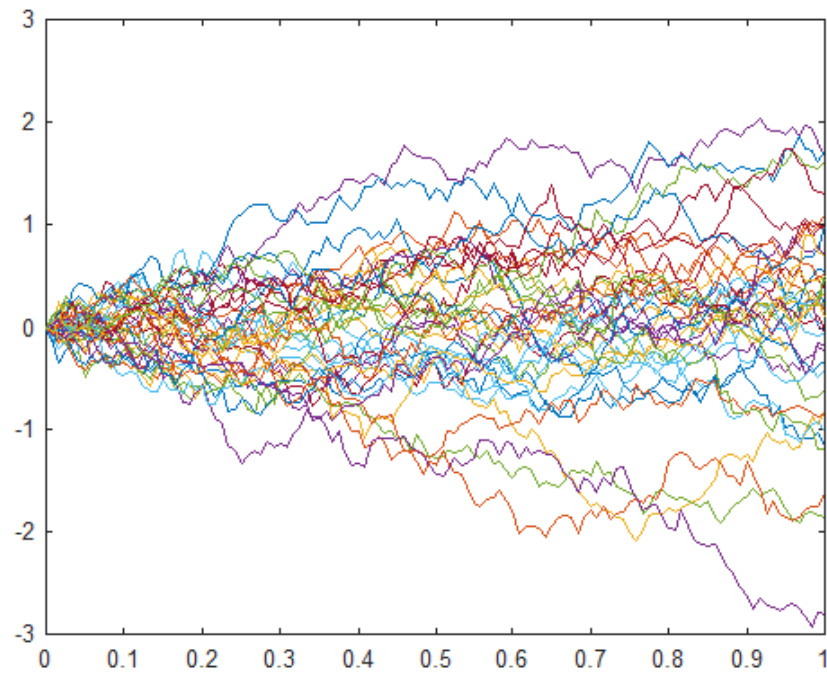


Figure 1

Figure 1 presente le Mouvement Brownien de Grand taille

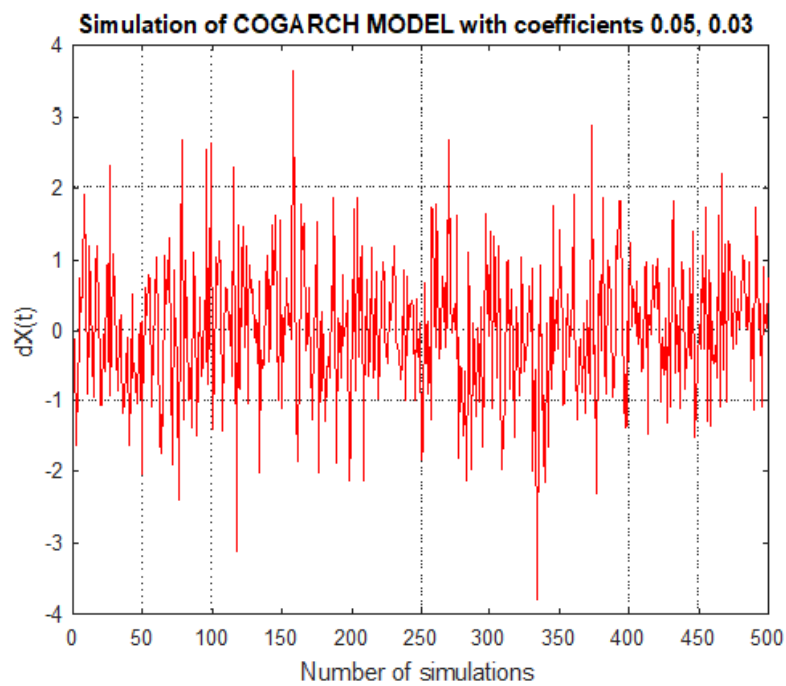


Figure 2

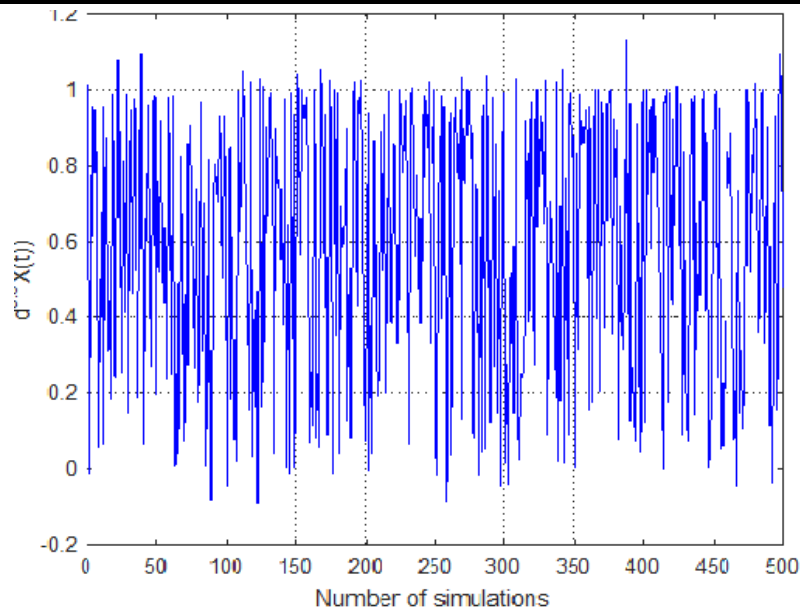


Figure 3

## 4.2 Annexe de quelques programmes de simulation avec l'outil Matlab

### 4.2.1 Programme d'un modèles bilinéaires avec des coefficients périodiques

```

clc;clear all;close all;
% Initiations des paramètres
b_1=input('b_1=');
b_2=input('b_2=');
b_3=input('b_3=');
N=input('N=');
% La taille d'échantillon
%N=4k
ns=input('ns=');
b_v=[b_1,b_2,b_3];
%XX=[3*b_1^4,3*b_2^4,b_1^2*b_2^2];
max(XX);
randn('seed',0);
s=3;

```

```

NN=N/4;
M=(N-NN)/3;
if max(((b_1)^2)*((b_3)^2),((b_2)^2))<1
%c=zeros(2*maxlag+1,ns);
x=zeros(ns,N+s);xx=zeros(ns,M);yy=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);c=zeros(ns,1);cc=zeros(ns,1);
%Simulation d'une série périodique à deux régimes
Mdl0 = garch('Constant',0.0001,'GARCH',0.5,'ARCH',0.2);
[v,y] = simulate(Mdl0,250);
for t=3:N+s
    v=t+1-3*floor((t)/3);
    x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
x=x(:,NN-2:N+s);
%Estimation des fonction des covariances
%Le modèle est  $X(t)=b(t)*X(t-2)*u(t-1)+u(t)$ 
%u(t) bruit blanc gaussien
% Après l'estimation on va faire plot(x(:,t))
for v=1:s
    for t=1:M
        xx(:,t)=x(:,3*t+v-1).*x(:,3*t+v-1);
        yy(:,t)=x(:,3*t+v-1).*x(:,3*t+v-2).*x(:,3*t+v-3);
    end
end
for i=1:ns
% Initiations des moments empiriques
    c(i,:)=mean(xx(i,:));
    cc(i,:)=mean(yy(i,:));
    par(i)=cc(i,:)/c(i,:);
end
b_v_est(v)=mean(par);
var_est(v)=var(par);

```

```
mse_est(v)=mse(par);
rmse_est(v)=sqrt(mse(par));
SK_est(v)=skewness(par);
KU_est(v)=kurtosis(par);
max_est(v)=max(par);
min_est(v)=min(par);
end
[b_v(1),b_v(2),b_v(3)]
disp('les paramètres estimés');
[b_v_est(1),b_v_est(2),b_v_est(3)]
disp('leurs variances');
[var_est(1),var_est(2),var_est(3)]
disp('leurs mse')
[mse(b_1),mse(b_2),mse(b_3)]
disp('leurs rmse')
[(mse(b_1))^0.5,(mse(b_2))^0.5,(mse(b_3))^0.5]
disp('leurs kurtosis')
[KU_est(1),KU_est(1),KU_est(3)]
disp('leurs skewness')
[SK_est(1),SK_est(1),SK_est(3)]
disp('leurs min')
[min_est(1),min_est(1),min_est(3)]
disp('leurs max')
[max_est(1),max_est(1),max_est(3)]
disp('la différence')
[b_v_est(1)-b_v(1),b_v_est(2)-b_v(2),b_v_est(3)-b_v(3)]
else
  no
end
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),
```

```
grid
xlabel('nombre de simulation'),
ylabel('t'),
title('SIMULATION DE MODELE BILINAIRE')
figure(2)
plot([v,y], 'g'),
grid
figure(3)
plot(t,x(:,t), 'r', t, [v,y], 'g')
```

### 4.2.2 Programme d'un modèle bilinéaire (7 coefficients périodiques)

```
clear all;
% s est la période de modèles ici sera 7.
s=7;
ss=4;
% ns est un nombre des simulation
ns=500;
% l initialisation des coefficients
b_1=0.5;b_2=b_1;b_3=b_1;b_4=b_1;b_5=-0.5;b_6=b_5;b_7=b_5;
b_v=[b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7];
N=700;
M=N/s;
randn('seed',0);
x=zeros(ns,N+s);
xx=zeros(ns,M);
yy=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);
c=zeros(ns,1);
cc=zeros(ns,1);
%simulation d'une séries périodiques à quatres régimes
for t=3:N+s
```

```

v=t-s*floor((t-1)/s);
if v<=ss
% Le modèle bilinéaire défini
x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
else
x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
end
%Estimation des fonction des covariances
for v=1:s
for t=1:M
xx(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v);
yy(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v-1).*x(:,s*t+v-2);
end
for i=1:ns
c(i,:)=mean(xx(i,:));
cc(i,:)=mean(yy(i,:));
par(i)=cc(i,:)./c(i,:);
rms(i)=(b_v(v)-par(i))^2;
end
max_est(v)=max(par);
min_est(v)=min(par);
b_v_est(v)=mean(par);
Var_est(v)=sqrt(var(par));
rmse(v)=sqrt(mean(rms));
KU(v)=kurtosis(par);
SK(v)=skewness(par);
x(:,t)=b_v_est(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
% Les coefficients réels
y1=[b_v(1),b_v(2),b_v(3),b_v(4),b_v(5),b_v(6),b_v(7)]

```

```
% Les coefficients estimés
y2=[b_v_est(1),b_v_est(2),b_v_est(3),b_v_est(4),b_v_est(5),b_v_est(6),b_v_est(7)]
% Les coefficients estimés supérieurs
y3=[max_est(1),max_est(2),max_est(3),max_est(4),max_est(5),max_est(6),max_est(7)]
% Les coefficients estimés inférieurs
y4=[min_est(1),min_est(2),min_est(3),min_est(4),min_est(5),min_est(6),min_est(7)]
% Les variances estimées
y5=[Var_est(1),Var_est(2),Var_est(3),Var_est(4),Var_est(5),Var_est(6),Var_est(7)]
% Les racines des erreurs quadratiques moyennes
y6=[rmse(1),rmse(2),rmse(3),rmse(4),rmse(5),rmse(6),rmse(7)];
% Kurtosis
y7=[KU(1),KU(2),KU(3),KU(4),KU(5),KU(6),KU(7)]
% Skewnesse
y8=[SK(1),SK(2),SK(3),SK(4),SK(5),SK(6),SK(7)]
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),hold on;
plot(z(:,t),'g'),hold off;
title('Comparaison entre les coefficients')
xlabel('Time'),ylabel('x(:,t)')
```

### 4.2.3 Programmes d'un modèle bilinéaires avec deux régimes

```
clc;clear all;close all;
s=input('s=');
ns=input('ns=');
b1=input('b1=');
b2=input('b2=');
a1=input('a1=');
a2=input('a2=');
ss=input('ss=');
% ss la variance
N=input('N=');
```

```

if max(b1^2,b2^2)+ss*max(a1^2,a2^2)< 1
b=[b1,b2];a=[a1,a2];
c_v=[b,a];
M=N/2;
randn('seed',0);
x=zeros(ns,N+s);xx=zeros(ns,M);yy=zeros(ns,M);zz=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);c=zeros(ns,1);cc=zeros(ns,1);ccc=zeros(ns,1);
%simulation d'une séries périodiques à deux régimes
for t=4:N+s
    v=t-s*floor((t-1)/s);
    x(:,t)=b(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+a(v)*x(:,t-3).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
%Estimation des fonction des covariances
for v=1:s
    for t=2:M
        xx(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v);
        yy(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v-1).*x(:,s*t+v-2);
        zz(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v-1).*x(:,s*t+v-3);
    end
for i=1:ns
    c(i,:)=mean(xx(i,:));
    cc(i,:)=mean(yy(i,:));
    ccc(i,:)=mean(zz(i,:));
    par1(i)=cc(i,:)./c(i,:);
    par2(i)=ccc(i,:)./c(i,:);
    rms1(i)=(b(v)-par1(i))^2;
    rms2(i)=(a(v)-par2(i))^2;
end
max_best(v)=max(par1);
SK1(v)=skewness(par1);
KU1(v)=kurtosis(par1);

```

```
max_aest(v)=max(par2);
SK2(v)=skewness(par2);
KU2(v)=kurtosis(par2);
min_best(v)=min(par1);
min_aest(v)=min(par2);
b_est(v)=mean(par1);
a_est(v)=mean(par2);
Varb_est(v)=sqrt(var(par1));
Vara_est(v)=sqrt(var(par2));
b_rmse(v)=sqrt(mean(rms1));
a_rmse(v)=sqrt(mean(rms2));
end
y1=[c_v(1),c_v(2),c_v(3),c_v(4)]
y2=[b_est(1),b_est(2),a_est(1),a_est(2)]
y3=[max_best(1),max_best(2),max_aest(1),max_aest(2)]
y4=[min_best(1),min_best(2),min_aest(1),min_aest(2)]
y5=[Varb_est(1),Varb_est(2),Vara_est(1),Vara_est(2)]
y6=[(Varb_est(1))^0.5,(Varb_est(2))^0.5,(Vara_est(1))^0.5,(Vara_est(2))^0.5]
y7=[(b_rmse(1))^2,(b_rmse(2))^2,(a_rmse(1))^2,(a_rmse(2))^2]
y8=[b_rmse(1),b_rmse(2),a_rmse(1),a_rmse(2)]
y9=[KU1(1),KU1(2),KU2(1),KU2(2)]
y10=[SK1(1),SK1(2),SK2(1),SK2(2)]
else
    Le_modele_est_non_stationnaire
end
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),
grid
xlabel('nombre de simulation'),
ylabel('t'),
title('SIMULATION DE MODELE BILINAIRE')
```

#### 4.2.4 Programme d'estimation

```

% Kalman estimator filter
% Direct current motor characteristics
r=3; L=0.001;
f=0.002; J=0.01;
k=1.2;
a0=(k^2+r*f)/(L*J);
a1=f/J+r/L;
b0=k/(L*J);
% State model
A=[0 1; -a0 -a1];
B=[0 b0]';
C=[1 0];
D=0;
% State model discretization
Te=0.02;
[Ad,Bd]=c2d(A,B,Te)
sys=ss(Ad,Bd,C,D,Te);
% Process state representation
process=ss(Ad,[Bd Bd],C,0,Te,'inputname',{ 'u' 'w'},...
'outputname',{ 'y' });
% noises
n=100;
w=0.1*randn(n,1);
v=0.3*randn(n,1);
Q=std(w).^2;
R=std(v).^2;
wv=cov(v,w);
N=wv(1,2);
% Kalman estimator

```

```
[F_Kalman,L,P,M]=kalman(process,Q,R);
% State representation process + measurement noise
a=Ad;
b=[Bd Bd [0;0]];
c=[C;C];
d=[0 0 0;0 0 1];
process=ss(a,b,c,d,Te,'inputname',{'u' 'w' 'v'},...
'outputname',{'y' 'yb'})
% Parallel placing process + Kalman filter
sysp=parallel(process,F_Kalman,1,1,[],[]);
% yv feedback
syspb=feedback(sysp,1,4,2,1);
% yv input cancellation
syspb=syspb([1 2 3 4 5],[1 2 3]);
% Control square signal
t=[0:Te:(n-1)*Te];
u=square(2*pi*t)';
% Inputs representation
figure(1);
plot(t,u);
title('Control signal');
xlabel('Time'),ylabel('u(t)');
axis([0 2 -1.2 1.2]);
figure(2);
plot(t,w);
title('Process noise');
xlabel('Time'),ylabel('w(t)');
figure(3);
plot(t,v);
title('Measurement noise');
xlabel('Time'),ylabel('v(t)');
```

```
% Noisefree process simulation
[yp,t,xp]=lsim(sys,u,t);
% Full model simulation
[outputs,x]=lsim(syspb,[w v u],t);
% Results representation
figure(4);
plot(t,outputs(:,1)),hold on;
plot(t,yp,'r:'),hold off;
title('Output process with noise');
xlabel('Time'),ylabel('y(t)');
figure(5);
plot(t,outputs(:,2)),hold on;
plot(t,yp,'r:'),hold off;
title('process with noise + measurement noise outputs');
xlabel('Time'),ylabel('yb(t)');
figure(6);
plot(t,outputs(:,3)),hold on;
plot(t,yp,'r:'),hold off;
title('Estimated process output');
xlabel('Time'),ylabel('ye(t)');
figure(7);
plot(t,outputs(:,4)),hold on;
plot(t,yp,'r:'),hold off;
title('x1(t) estimation');
xlabel('Time'),ylabel('x1(t)');
figure(8);
plot(t,outputs(:,5)),hold on;
plot(t,xp(:,2),'r:'),hold off;
title('x2(t) estimation');
xlabel('Time'),ylabel('x2(t)');
% Errors variance calculation
```

```
% Modeling noise
e1=yp-outputs(:,1);
ec1=std(e1)

% Modeling and measurement noises
e2=yp-outputs(:,2);
ec2=std(e2)

% Filtered process
e3=yp-outputs(:,3);
ec3=std(e3)
```

---

## Bibliographie

---

- [1] Andersen. T. G. (1994). Stochastic autoregressive volatility : a framework for volatility modeling. *Mathematical Finance* 4 : 75-102.
- [2] Bhaskara Rao. M. And Subba Rao. T. And Walker. M. A. (1983). On the existence of some bilinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*. 4(2), 95-110.
- [3] Bibi A (2003). On the covariance structure of time varying bilinear models. *Stochastic Analysis and Applications*. 1, 25-60.
- [4] Bibi A and Antony G. Propriétés dans  $L^2$  et estimation des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux à coefficients périodiques. *The Canadian Journal of Statistics*. 1, 131-148.
- [5] Brockwell P and David R (1981) :Time series. Theory and methods. (second edition). New York. Springer.
- [6] Burrage, K., Burrage, P. M., Tian, T. (2004). Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations : an overview. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2041), 373-402.
- [7] Christian. F and Zakoian. J. M. (2010). *GARCH models : Structure, statistical inference and financial applications*. Hoboken, NJ : Wiley.
- [8] Doob, J. L.(1953). *Stochastic processes*. John wiley, New York.
- [9] Doob, J. L. (1942). The Brownian movement and stochastic equations. *Annals of Mathematics*, 351-369.
- [10] Evans, L. C. (2012). *An introduction to stochastic differential equations (Vol. 82)*. American Mathematical Soc..
- [11] Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V., Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V. (2007). *Stochastic differential equations (pp. 113-219)*. Springer Berlin Heidelberg.

- 
- [12] Klimko, L. A. And Nelson, P. I. (1978). On conditional least squares estimation for stochastic processes. *The Annals of Statistics*. 3, p 629-642.
- [13] Kumar, K. (1986) : On the identification of some bilinear time series. *Journal Time Series Analysis*. 2, 117-122.
- [14] Liu. J. (1989). On the existence of a general multiple bilinear time series. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 341-355.
- [15] Liu. J. (1990). Estimation for some bilinear time series. *Stochastic Models*. 6, 649-665.
- [16] Milstein, G. N. (1994). *Numerical integration of stochastic differential equations (Vol. 313)*. Springer Science and Business Media.
- [17] Mohler. R. P. (1973). *Bilinear control processes*. Academic Press.
- [18] Oksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations (pp. 65-84)*. Springer Berlin Heidelberg.
- [19] Pan. J, Li. G and Xie. Z. (2002). Stationary solution and parametric estimation for bilinear model driven by ARCH models. *Journal of Science in China*. 12, 1523-1537.
- [20] Pham, D. T and Tran, L. T. (1981). On the first order bilinear time series models. *J. Appl. Prob.* 18, 617-627.
- [21] R.S. Tsay. (2002). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New York,
- [22] Subba Rao. T. (1981). On the theory of bilinear models. *J. Roy. Statistics*. 2, 244-255.
- [23] Subba Rao T and M Gabr. (1984). *An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models*. Lecture notes in statistics. Springer verlag.
- [24] Terdik. G. (1999). *Bilinear Stochastic Models and Related Problems of Nonlinear Time Series : A Frequency Domain Approach*. Lecture Notes in Statistics 124, Springer, New York.
- [25] Tong. H. (1983). *Threshold models in nonlinear time series analysis*. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag.
- [26] Yu, Jun 2002. "Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market," *Applied Finan. Econ.*12, pp. 193–202.