

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE
LA VIE
Département DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**

N° D'ordre :

N° Série :

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHEMATIQUE

Option: *Mathématiques Appliquées*

Thème

**L'étude de la solution des problèmes pour une
classe d'équations aux dérivées partielles avec une
condition non locale de type intégrale**

Présentée par : OUSSAEIF Taki Eddine

Devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	MERAZGA Nabil	<i>Prof. Univ. Oum El Bouaghi</i>
<i>Rapporteur :</i>	BOUZIANI Abdelfatah	<i>Prof. Univ. Oum El Bouaghi</i>
<i>Examineurs :</i>	REBBANI Faouzia	<i>Prof. Univ. Annaba</i>
	KECHKAR Nacereddine	<i>Prof. Univ. Constantine</i>

Soutenue le : 17 septembre 2015

Remerciements

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux.

<< Gloire à Toi ! Nous n'avons de savoir que ce que Tu nous as appris. Certes, c'est Toi l'Omniscient, le Sage >>. Sourate Al-Baqara verset 32.

O Allah ! Envoie la paix et la bénédiction sur Abraham, Ismaël, Isaac, Jacob, Moïse, Jésus, sur Mohamed le sceau des prophètes, ses compagnons, sa famille et tous ceux qui les suivent sur le bon chemin jusqu'au jour dernier. Amen.

Gloire à Dieu Le Tout Puissant qui m'a guidé par sa grandeur et fait en sorte que mes promesses deviennent une réalité par ce modeste travail.

Au terme de cette recherche je suis très heureux de pouvoir remercier tous ceux et celles qui m'ont accompagné et soutenu tout le long de cette aventure.

*Je voudrais tout d'abord remercier très vivement et sincèrement mon encadreur Monsieur le Professeur **Abdelfatah BOUZIANI** de m'avoir confié Ce sujet de mémoire et qui m'a honoré d'avoir accepté de diriger ce travail, pour l'aide compétente qu'il m'a apporté, pour sa patience et son encouragement, pour ses conseils pratiques et scientifiques ainsi que pour l'inspiration et le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et son soutien qui m'a permis d'achever ce travail.*

*Mon respect et mes vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur **Nabil MERAZGA** pour ses conseils précieux, et qui m'a honorés en acceptant d'être président de ce jury d'examen.*

*Au Professeur **Faouzia REBBANI** qui m'a honoré d'accepter de critiquer et d'analyser ce travail. Vos qualités scientifiques et votre intérêt pour la recherche sont pour moi une source de motivation supplémentaire pour la suite de ma carrière. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale.*

*Je remercie très chaleureusement le Professeur **Nacreddine KECHKAR** d'avoir accepté de juger ce travail et pour l'intérêt qu'il a porté à ma thèse, sa présence dans ce Jury me fait un grand honneur. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité cordiale.*

*Je veux exprimer toute ma gratitude à remercier Mr **Naoui GATTAL** Professeur à l'Université de Tébessa pour m'avoir aidé à tout moment, pour ses conseils et son encouragement.*

*Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur le Docteur **Kamel AKROUT** pour sa permanente coopération et son aide.*

*Je remercie tout spécialement **mes chers parents** pour ses prières, ses recommandations, et pour m'avoir activement apporté un soutien inconditionnel tout au long de mes études.*

*Ma meilleure appréciation et tout mon respect vénérable vont à **mon père** qu'il a planifié ma vie afin que j'arrive à ce niveau et à **ma mère** qui a exécuté ce plan. Que ce travail soit leur récompense tant méritée. Je vous aime énormément et je vous dédie cette thèse.*

*Enfin, je remercie particulièrement Ma fiancée **Leila. B** pour pleine coopération et encouragement permanent, mon cher ami **S. BEKKAI** pour son aide à la vérification linguistique de cette thèse et à Mr **Amir Baaloul** administrateur à U. d'Oum El Bouaghi pour le soutien et l'aide, toujours avec une grande humanité.*

Résumé

Dans ce travail on a étudié divers problèmes non locaux pour plusieurs types d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites du type intégrale.

On a débuté par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail.

Les chapitres 2 et 3 traitent deux problèmes mixtes avec condition intégrale à deux bornes variables pour une équation parabolique. On transfère le problème à un autre non-locale aussi, mais moins compliqué et qui ne contient pas de condition intégrale, puis on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte.

La démonstration est basée sur l'inégalité d'énergie et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

En utilisant la même méthode dans le quatrième chapitre, on a étudié pour la première fois un problème mixte lié à une équation parabolique fractionnaire du second ordre mariant une condition classique de type Neumann et une condition intégrale.

Un cinquième chapitre dans lequel on a examiné une problématique émergente qui est l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution faible d'un problème mixte pour une équation hyperbolique non linéaire avec une condition intégrale et une condition de Neumann en utilisant un processus itératif basé sur les résultats obtenus pour le cas d'un problème linéaire.

Ensuite, le sixième chapitre est voué à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème inverse pour une équation parabolique avec une condition au bord non locale et une condition intégrale par l'application du théorème de point fixe de Banach.

Enfin en septième chapitre, une résolution numérique simple a été réalisée pour un problème avec des conditions intégrales pour une équation parabolique en utilisant la méthode des différences finies et la méthode spectrale.

Mots clés : Equations paraboliques, Equations hyperboliques non linéaires, Equations paraboliques fractionnaires, Inégalités d'énergie, Espaces de Sobolev avec poids, Problème inverse, Théorème du point fixe de Banach, Conditions intégrales avec deux bornes variables, Conditions intégrales.

Abstract

In this work we study several non-local problems for many types of partial differential equations with boundary conditions of the integral type.

We started by the recalls of some fundamental preliminary concepts and necessary tools.

Chapters 2 and 3 deal with two mixed problems with integral two space variable conditions for a parabolic equation. We transfer the problem to another classically less complicated which does not contain integral conditions, then we prove the existence and uniqueness of the strong solution.

The proof is based on a priori estimate "energy inequality" and on the density of the range of the operator generated by the considered problem.

Using the same method in the fourth chapter, for the first time we have studied a mixed problem for a fractional parabolic equation of the second order marrying a classical condition of Neumann type and an integral condition.

A fifth chapter which examines an emerging problem which was the study of the existence and uniqueness of a weak solution of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation with an integral condition and a Neumann condition by applying an iterative process based on results obtained for the linear problem.

Then, the sixth chapter is devoted to the study of the existence and uniqueness of the solution of an inverse problem for a parabolic equation with nonlocal boundary condition and an integral condition, by applying the fixed point theorem of Banach.

Finally, in the seventh chapter, a simple numerical resolution was carried out to a problem with two integral conditions for a parabolic equation by using the finite difference method and the spectral method.

Keywords: Parabolic equations, Nonlinear hyperbolic equations, Fractional parabolic equations, Energy inequality, Weighted Sobolev spaces, Fixed point theorem of Banach, Inverse problem, Two space variable condition, Integral condition.

ملخص

يهدف هذه العمل إلى دراسة العديد من المسائل الحدية لأنواع كثيرة من المعادلات التفاضلية الجزئية مقرونة بشروط حدية من نوع تكامل.

نبدأ بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية والأولية والأدوات المهمة المستعملة في هذا العمل.

الفصلين الثاني والثالث يعالجان مسائل تكافئية مختلطة مع شرط حدي من نوع تكامل ذات متغيرين، أين نحول المسألة المطروحة إلى أخرى أقل تعقيدا ولا تحتوي على شرط التكامل، من ثم نبرهن على وجدانية ووحداية الحل القوي لهذه المسألة.

البرهان يعتمد على طريقة التقديرات القبلية وخاصة كثافة صورة التطبيق الناتج من المشكل المدروس.

باستخدام نفس الطريقة في الفصل الرابع، ندرس للمرة الأولى مسألة تكافئية كسرية حدية مختلطة من الدرجة الثانية تحتوي على شرط تكامل وشرط حدي من نوع نيومان.

الفصل الخامس يتناول إشكالية مستجدة أين تمت دراسة وجدانية ووحداية حل ضعيف لمسألة مختلطة حدية تحتوي على معادلة قطعية غير خطية مع شرط تكامل وشرط حدي من نوع نيومان باستعمال عملية تكرارية قائمة على أساس النتائج المتحصل عليها من دراسة المسألة الخطية.

بعد ذلك، الفصل السادس خصص لدراسة وجدانية ووحداية الحل لمسألة تكافئية عكسية بوجود شرط حدي من نوع تكامل مع شرط حدي آخر معقد بواسطة تطبيق نظرية النقطة الثابتة لـ **لبناخ**.

أخيرا، في الفصل السابع، دراسة رقمية بسيطة أجريت على مسألة تكافئية تحتوي على شرطين حديين من نوع تكامل باستعمال طريقة الفروق المنتهية و طريقة التقريب الطيفي.

الكلمات المفتاحية:

معادلة تكافئية، معادلة قطعية غير خطية، معادلة تكافئية كسرية، طريقة التقديرات القبلية، فضاء **سوبوليف**، نظرية النقطة الثابتة لـ **لبناخ**، المسائل العكسية، شرط حدي من نوع تكامل، شرط حدي من نوع تكامل ذات متغيرين.

Table des matières

Introduction générale	4
1 Notions préliminaires	11
1.1 Opérateurs linéaires non-bornés	11
1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert .	13
1.3 Traces des fonctions des espaces de Sobolev	13
1.3.1 Existence de trace	13
1.3.2 La densité de $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$	14
1.4 Dérivation fractionnaire	15
1.4.1 Approche de Riemann-Liouville	15
1.4.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	16
1.4.3 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo . . .	17
1.4.4 Intégration par parties fractionnaire	18
1.5 Espaces fonctionnels et inégalités élémentaires	18
1.5.1 L'espace $L^2_\rho(\Omega)$	18
1.5.2 L'espace de Bouziani	19
1.5.3 Les espaces fractionnaires ${}^R H^\sigma_0(\Omega)$ et ${}^R B^\sigma_0(\Omega)$:	20
1.6 Lemme de Gronwall	24
2 Problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition de Neumann pour certaines classes d'équations paraboliques	27

2.1	Introduction	27
2.2	Position du problème	28
2.3	Estimation a priori	30
2.4	Existence de la solution	42
3	Problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition périodique pour une classe d'équations paraboliques	47
3.1	Introduction	47
3.2	Position du problème	48
3.3	Estimation a priori et ses conséquences	50
3.4	Solvabilité du problème	60
4	Existence et unicité d'une solution d'un problème mixte pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition intégrale	68
4.1	Introduction	68
4.2	Position du problème	69
4.3	Estimation a priori et l'unicité de la solution	71
4.4	Existence de la solution	77
5	Existence et unicité d'une solution faible d'un problème mixte pour une équation hyperbolique non linéaire avec une condition intégrale	80
5.1	Introduction	80
5.2	Formulation du problème non linéaire	81
5.3	L'inégalité d'énergie et ses conséquences pour le problème linéaire . . .	83
5.4	L'existence de la solution pour le problème linéaire	88
5.5	Existence et unicité d'une solution faible du problème non linéaire . . .	95
6	Un problème inverse pour une équation parabolique avec une condition au bord non locale et une condition intégrale	105
6.1	Formulation du problème inverse	105
6.2	Le problème spectral auxiliaire	107

6.3	L'existence et l'unicité de la solution du problème inverse	110
6.4	La dépendance continue de la solution (a, u) par rapport aux données . .	116
	Conclusion	118
	Bibliographie	119

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et leur étude occupe les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et de Laplace...; au fil de cette dernière quarantaine d'années beaucoup de phénomènes et de problèmes modernes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques ont été modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP), paraboliques ou hyperboliques, mais avec des conditions non locales. Ainsi, les conditions aux bords de type intégrales peuvent être utilisées quand il est impossible de mesurer directement la quantité recherchée sur la frontière où sa valeur totale ou moyenne est connue. Plus précisément, les conditions standards (Dirichlet, Neumann, ...) qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours adéquates car elles dépendent du contexte physique où les données peuvent être mesurées à la frontière du domaine étudié. Dans certains cas, il n'est pas possible de prescrire la solution (pression, température, ...) ponctuellement aux bords, parce que la valeur moyenne de la solution peut être mesurée le long du bord ou le long d'une partie de celui-ci.

La signification physique de base des conditions intégrales (énergie totale, température moyenne, masse totale des impuretés, flux total, moments, ... etc.) a servi la raison essentielle d'intérêt croissant à ce genre de problèmes.

La modélisation mathématique des problèmes avec conditions intégrales est rencontrée en physique des plasmas (les processus de diffusion des particules dans un plasma turbulent.) [2], théorie de transmission de chaleur [3 – 9], thermo-élasticité [10 – 12], certains procédés technologiques [13], oscillations d'un milieu [14], dynamique des eaux souterraines [15 – 16], propagation

de l'humidité [17], génie chimique [18], semi-conducteurs [19], modèles démographiques [20] et en problèmes mathématiques en biologie [21].

Les conditions intégrales sont également utilisées pour les problèmes inverses de la théorie de la conduction thermique [22 – 29].

Pour tous ces motifs, les EDP avec des conditions intégrales ont bénéficié d'une très grande attention. Le premier qui s'est intéressé à l'étude de ces problèmes avec une condition intégrale :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0,$$

était Cannon [1] en 1963, où il démontra par la méthode du potentiel, l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème mixte combinant une condition de Dirichlet et une condition intégrale pour l'équation de la chaleur lors de l'étude de la conduction thermique dans une barre métallique mince chauffée. En utilisant toujours la méthode du potentiel, Kamynin a établi dans [30] l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème similaire avec une représentation plus générale en utilisant un système d'équations intégrales.

Lors des études relatives à la diffusion des particules dans un plasma turbulent et à la propagation de la chaleur dans une tige mince, N. I. Ionkin démontra dans [64], en se servant de la méthode de Fourier, l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte associant une condition de Dirichlet à une condition intégrale pour l'équation de la chaleur.

Les résultats les plus proches des problèmes étudiés peuvent être trouvés dans Benouar-Yurchuk [31], Kartynnik [37] et Yurchuk [40] dans lesquels les auteurs ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour des problèmes mixtes combinant une condition de Dirichlet et une condition intégrale pour certaines équations paraboliques du second ordre en utilisant la méthode des estimations a priori.

Ensuite plusieurs travaux ont été réalisés en modifiant l'équation parabolique ou les conditions utilisées dans Bouziani-Benouar [9, 58], Bouziani [45 – 47, 53, 59, 61, 79, 89] et dans Denche-Marhoune [63].

Par la suite, plusieurs travaux relatifs à ces problèmes ont été publiés parmi lesquels on citera les travaux de Cannon - Van Der Hoek [32 – 33], Cannon-Esteva-Van Der Hoek [34], Ionkin [35], Jumarhon-McKee [36], Lin [38], Shi [39], Gasymov [41], Batten [42] et de Cahlon-Kulkarni-

Shi [43]. Dans ces travaux, l'objet de la question était sur les problèmes mixtes liés à l'étude des équations paraboliques unidimensionnelles du second degré combinant une condition locale et une condition intégrale par différentes méthodes. Autres résultats sur quelques problèmes différents ont été établis, dans une série de travaux séparés, par Bouziani [52, 91, 92] pour des équations pluri-paraboliques et bidimensionnelles, pour des équations pseudo-paraboliques dans Bouziani [93, 94], pseudo-hyperboliques dans Bouziani [101] et pour des équations opérationnelles dans Rebbani-Chasarain [56, 57], aussi pour les équations paraboliques de haut ordre dans les articles de Bouziani [54, 88], Bouziani-Benouar [55] et de Denche-Marhoune [143, 145, 62].

Aussi des problèmes ont été étudiés dans Mesloub-Bouziani [50, 99, 100], Pulkina [48, 49], Muravei, Philinovskii [44] et dans Bouziani [51, 60, 86, 87, 95 – 98] pour les équations hyperboliques avec des conditions intégrales.

Ensuite, on ne peut également citer qu'un nombre important limité de problèmes semi-linéaires et non linéaires pour des équations paraboliques et hyperboliques [102 – 105] dans lesquels les auteurs ont étudié des problèmes mixtes avec conditions intégrales.

Aussi, Bouziani et Merazga dans [82 – 85, 106 – 108] ont étudié des problèmes linéaires et semi-linéaires mixtes avec une condition intégrale par la méthode de Rothe basée sur une semi-discrétisation de temps du problème donné.

La méthode adoptée dans la plupart des articles précédents est celle des inégalités d'énergie. Cette dernière appelée la méthode d'analyse fonctionnelle ou la méthode des estimations a priori. Cette méthode basée sur les idées de I.G. Pétrovski [65] qui l'a utilisé dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique, par la suite J.Leray [66] et L. Garding [67] ont fait des développements importants de la méthode et son schéma a été présenté par A.A. Dezin [68]. La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O.A.Ladyzenskaya [69], K. Friedrichs [70], N. I. Yurchuk [71 – 78], A.V. Kartynnik [37] et de A. Bouziani [50 – 55], [58 – 60], [81]. En fait, en Cannon [1], Ionkin [6] et Yurchuk [40] ont utilisé la condition intégrale :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t). \quad (1)$$

Pour certaines classes d'équations paraboliques. Jusqu'en 1990, Kartynnik [37] a développé la

méthode des inégalités d'énergie en prenant la condition intégrale avec une borne variable :

$$\int_0^b u(x, t) dx = E(t), \quad b < 1,$$

À la lumière des études précédentes, plusieurs travaux ont été réalisés en modifiant l'équation (hyperboliques, paraboliques, pseudo-paraboliques et de type mixte) ou en changeant l'ordre des dérivées et les conditions aux limites des problèmes étudiés.

En 2003 A. Bouziani [81] a développé l'étude des problèmes non-locaux en examinant une classe d'équations pseudo-paraboliques non linéaires avec une condition intégrale.

Aussi, en 2007 A. L. Marhoune [80] a modifié la condition intégrale en prenant :

$$\int_0^\alpha u(x, t) dx + \int_\beta^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 < \alpha < \beta < 1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

appelée condition intégrale à deux bornes variables, et en prenant aussi une condition périodique au lieu des conditions de Neumann-Dirichlet.

Le but de la présente thèse est de développer la méthode des inégalités d'énergie pour différents problèmes avec un nouveau type de conditions intégrales de type (2), pour un nouveau type de problèmes associant des équations fractionnaires avec une condition intégrale de type (1) et pour des problèmes hyperboliques non-linéaires avec une condition intégrale de type (1), dans les espaces fonctionnels de type Sobolev. Le schéma de la méthode peut être résumé comme suit :

* D'abord on écrit le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L); \quad (3)$$

où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F convenablement choisis.

* Puis on établit les estimations a priori pour l'opérateur L .

* Ensuite on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F .

En outre, l'objectif de cette thèse est d'aborder quelques problèmes différents avec une condition intégrale et les mettre en évidence. Où on a pu étudier l'existence et l'unicité d'une solution

d'un problème parabolique inverse avec une condition intégrale, ainsi d'étudier une approche numérique de la solution d'un problème parabolique avec des conditions intégrales.

Plus précisément on suit dans ce travail les deux schémas suivants :

1. Schéma pour l'étude des solutions des problèmes linéaires avec la condition de type (2) :

On démontre l'inégalité d'énergie du type

$$\|u\|_B \leq c \|Lu\|_F. \quad (4)$$

On note que pour tous les problèmes posés dans la thèse, ce type d'estimations a priori est obtenu en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentiel Mu (contenant la fonction u et ses dérivées et une certaine fonction du poids) définie sur trois domaines : $\Omega_\alpha^\tau = (0, \alpha) \times (0, \tau)$, $\Omega_{\alpha,\beta}^\tau = (\alpha, \beta) \times (0, \tau)$ et $\Omega_\beta^\tau = (\beta, 1) \times (0, \tau)$, et en intégrant sur le domaine $\Omega^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$.

Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite, on montre que l'opérateur L de B dans F admet une fermeture \bar{L} , donc la solution de l'équation opérationnelle :

$$\bar{L}u = \mathcal{F}, \quad u \in D(\bar{L}), \quad (5)$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré. Par passage à la limite, l'estimation (4) sera prolongée à \bar{L} , c'est à dire :

$$\|u\|_B \leq c \|\bar{L}u\|_F.$$

Ainsi, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (5). Comme l'image de l'opérateur \bar{L} est fermée dans F et que $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$, l'établissement de la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F garantit l'existence de la solution forte du problème (3).

2. Schéma pour l'étude des solutions des problèmes non-linéaires avec la condition de type (1) :

Pour l'étude d'un problème non-linéaire avec condition intégrale (1), on doit d'abord étudier l'existence et l'unicité d'une solution forte pour le problème linéaire avec la même condition intégrale (1), en utilisant la méthode des inégalités d'énergie décrite dans le schéma précédent avec la condition intégrale de type (1). Puis en appliquant un processus itératif basé sur les résultats obtenus pour le problème linéaire, on montre l'existence, l'unicité de la solution généralisée faible du problème non linéaire.

Contenu de la thèse

La présente thèse comporte des résultats intéressants et originaux ayant faits l'objet des publications dans des revues internationales. Celles-ci pourront être consultées selon les références citées dans la bibliographie.

La thèse est débutée par une introduction où on a présenté un historique sur les problèmes non classiques étudiés, l'intérêt, l'objectif du thème abordé et elle est composée de sept chapitres présentés comme suit :

Chapitre 1 est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail concernant les opérateurs linéaires non bornés, les espaces fonctionnels et quelques lemmes techniques.

Chapitre 2 est réservé à l'étude d'un problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition au limite de type Neumann pour une équation parabolique avec l'opérateur de Bessel. On transfère le problème à un autre non-locale aussi, mais moins compliqué et qui ne contient pas de condition intégrale. Puis, on décrit le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité d'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème étudié dans l'espace d'arrivée F . Ce résultat est tout à fait nouveau, à cause du type de la condition intégrale qui résulte d'une très grande difficulté dans l'étude du problème.

Chapitre 3 peut être considéré comme un prolongement du chapitre précédent dans la mesure où d'une part, l'équation étudiée est plus générale que la précédente, et d'autre part la condition de Neumann est de type périodique.

Chapitre 4 où sera exposé et étudié, pour la première fois, un problème mixte lié à une équation parabolique fractionnaire du second ordre mariant une condition classique de type Neumann et une condition intégrale.

Chapitre 5 est voué à l'étude d'un problème mixte pour une équation hyperbolique non-linéaire avec une condition intégrale et une condition de Neumann.

Chapitre 6 est destiné à l'étude d'un problème inverse pour une équation parabolique avec une condition au bord non locale et une condition intégrale.

Il est important de noter qu'il n'existe pas encore, pour les problèmes non-locaux, une théorie générale analogue à celle des problèmes classiques. Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité des questions qu'elle soulève d'autre part. Chaque problème nécessite alors un traitement spécifique, ce qui souligne l'actualité du sujet abordé dans cette thèse.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Le présent chapitre est consacré aux rappels essentiels des notions et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail, à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur T est une application de E dans F :*

$$T : E \rightarrow F.$$

Tout opérateur T linéaire est complètement défini par son graphe $G(T)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$, où $D(T)$ est le domaine de définition de l'opérateur T .

Définition 1.2 *Un opérateur T de E dans F est dit linéaire si et seulement si :*

$$\forall u_1, u_2 \in E, \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}, T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2),$$

où \mathbb{C} est le corps des scalaires de E et F .

Définition 1.3 On dit que S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in D(T)$ (Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$).

Remarque 1.1 Il n'est pas vrai que tout sous espace de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur.

Définition 1.4 On dit que T est fermé si son graphe $G(T)$ est un fermé de $E \times F$.

Proposition 1.1 Un sous espace $G \subset E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si :

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0. \quad (1.1)$$

Preuve On note $p_1 : G \rightarrow E$ la projection donnée par $p_1(x, y) = x$. Si la propriété (1.1) est vraie, alors $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$.

Donc, l'application $T : p_1G \rightarrow F$ qui associe à $x \in p_1G$, l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. ■

Définition 1.5 On dit qu'un opérateur linéaire T est fermable dans E s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que T est fermable dans E si et seulement si l'adhérence $\overline{G(T)}$ de son graphe est un graphe (Car, on a $T \subset \overline{T}$ implique $G(T) \subset G(\overline{T})$, comme le prolongement \overline{T} est fermé, alors $G(\overline{T})$ est fermé. Donc $G(T) \subset G(\overline{T})$ implique $\overline{G(T)} \subset \overline{G(\overline{T})} = G(\overline{T})$).

Autrement dit T est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset D(T)$ telle que $u_n \rightarrow 0$ et $Tu_n \rightarrow v$, alors $v = 0$.

L'opérateur fermé \overline{T} dont le graphe $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ est appelé fermeture de T . ($G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ implique que $\overline{G(T)}$ soit un graphe : $\forall (u_n, Tu_n) \in G(T) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n) \in \overline{G(T)}$ et $(0, v) \in \overline{G(T)}$, qui nécessite $v = 0$ pour assurer que $\overline{G(T)}$ soit un graphe).

Théorème 1.1 (Théorème de l'isomorphisme). - Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F . Alors T^{-1} est continu de F dans E .

Théorème 1.2 (Théorème du graphe fermé). - Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F . On suppose que le graphe de T , $G(T)$, est fermé dans $E \times F$. Alors T est continu.

1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.6 Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F , on définit M^\perp l'orthogonal de M , par

$$M^\perp = \{f \in F, \langle f, g \rangle_F = 0, \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.2 Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F . Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Preuve Supposons d'abord que M est dense dans F . Soit $f \in M^\perp \subset F$, soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de M qui converge vers f . On a $\langle f, f_n \rangle_F = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on en conclut que $\|f\|_F = 0$. Donc $f = 0$, qui donne $M^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $M^\perp = \{0\}$. Alors on a $(M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = F$, et comme $M \subset \overline{M}$ il s'en suit que $(\overline{M})^\perp \subset M^\perp$, et donc $(M^\perp)^\perp \subset ((\overline{M})^\perp)^\perp$, mais \overline{M} est un fermé, alors $((\overline{M})^\perp)^\perp = \overline{M}$, alors on trouve $(M^\perp)^\perp \subset \overline{M} \Rightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$. ■

1.3 Traces des fonctions des espaces de Sobolev

1.3.1 Existence de trace

On considère l'ensemble $L^2(\partial\Omega) = \{w \text{ mesurable sur } \partial\Omega, \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} w^2 d\Gamma < +\infty\}$ C'est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire usuel.

Théorème 1.3 (Existence de trace) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , à frontière « suffisamment régulière ». Alors l'application trace

$$l: \begin{array}{l} C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u \rightarrow lu = u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

se prolonge par continuité en application linéaire continue, notée encore l , de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et il existe une constante c^* indépendante de u telle que

$$\|lu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque 1.2 L'application trace l n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Par contre, elle est surjective sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, où $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'indice fractionnaire $1/2$.

On a :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{w \in L^2(\partial\Omega), \text{ tel que } \exists v \in H^1(\Omega), w = l(v)\}.$$

1.3.2 La densité de $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$

Proposition 1.3 On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 dans \mathbb{R}^N , Alors $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

Preuve Puisque Ω est de classe C^1 , il existe un prolongement g linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Soit $U \in W^{1,p}(\Omega)$, alors on a $l(U) = u \in L^2(\partial\Omega)$.

Par la densité de $D(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donc il existe une suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$\|U_n - g(U)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad g(U) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit u_n la restriction de U_n à Ω ($\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega)$). Comme la restriction de $g(U)$ à Ω est U , on en déduit que :

$$\|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad U \in W^{1,p}(\Omega).$$

Par l'utilisation de la continuité de l'application de trace l , il en résulte :

$$\|l(u_n - U)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

où c^* est une constante positive. Ensuite, d'après la linéarité de l'application de trace l , on a

$$\|l(u_n) - u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|l(u_n - U)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

qui implique :

$$\|l(u_n) - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Donc, on trouve

$$\|l(u_n) - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \rightarrow 0.$$

Or, comme $l(u_n) \in l(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, on conclut que $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. ■

1.4 Dérivation fractionnaire

Définition 1.7 On appelle fonction Gamma Eulérienne (ou intégrale Eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

où x est un nombre complexe quelconque tel que $Re(x) > 0$.

Définition 1.8 L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a, b]$ d'ordre $\sigma \in \mathbb{R}^+$; est définie par

$$I_a^\sigma h(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-\sigma}} ds.$$

1.4.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.9 Soit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et h une fonction localement intégrable définie sur $[0, T]$. La dérivée d'ordre σ de h est définie par :

1. Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à gauche**

$${}^R_0\partial_t^\sigma h(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{\sigma-n+1}} d\tau. \quad (1.2)$$

2. Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à droite**

$${}^R_t\partial_T^\sigma h(t) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_t^T \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{\sigma-n+1}} d\tau. \quad (1.3)$$

où le nombre entier n est choisi de telle manière que : $n-1 < \sigma < n$.

En général, la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$\begin{aligned} {}^R_0\partial_t^\sigma C &= \frac{1}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{C}{(t-\tau)^{\sigma-n+1}} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\sigma-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[-(t-\tau)^{n-\sigma} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} t^{n-\sigma} \\ &= \frac{Ct^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4 [131] *Si $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $h(0) = 0$ et $t > 0$, alors*

$${}^R_0\partial_t^{p+q} h(t) = {}^R_0\partial_t^p {}^R_0\partial_t^q h(t) = {}^R_0\partial_t^q {}^R_0\partial_t^p h(t).$$

1.4.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

La dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et des intégrales fractionnaires en vue de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries, ...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et du mécanique du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des

équations différentielles d'ordre fractionnaire, d'où la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a); f^{(1)}(a), \dots$ etc. Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ces problèmes a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélasticité, donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.10 Soit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et h une fonction localement intégrable définie sur $[0, T]$. La dérivée d'ordre σ de h est définie par :

1. Dérivée au sens de **Caputo à gauche**

$${}_0^C \partial_t^\sigma h(t) := \frac{1}{\Gamma(n - \sigma)} \int_0^t \frac{h^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\sigma - n + 1}} d\tau. \quad (1.4)$$

2. Dérivée au sens de **Caputo à droite**

$${}_t^C \partial_T^\sigma h(t) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \sigma)} \int_t^T \frac{h^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\sigma - n + 1}} d\tau, \quad (1.5)$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité : $n - 1 < \sigma < n$.

1.4.3 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $n - 1 < \sigma < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$). Supposons que h est une fonction, telles que ${}_0^C \partial_t^\sigma h(t)$, ${}_0^R \partial_t^\sigma h(t)$ existent, alors

$${}_0^R \partial_t^\sigma h(t) = {}_0^C \partial_t^\sigma h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0) (t)^{k-\sigma}}{\Gamma(k - \sigma + 1)}. \quad (1.6)$$

Si $n = 1$, on a

$${}_0^R \partial_t^\sigma h(t) = {}_0^C \partial_t^\sigma h(t) + \frac{h(0)}{\Gamma(1 - \sigma) t^\sigma}. \quad (1.7)$$

1.4.4 Intégration par parties fractionnaire

Si $v \in L^p(\Omega)$, $w \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \sigma$, alors la formule suivante

$$\int_0^T v(t) \cdot ({}_0I_t^\sigma w)(t) dt = \int_0^T w(t) \cdot ({}_tI_T^\sigma v)(t) dt.$$

définit l'intégration par parties fractionnaire [138].

1.5 Espaces fonctionnels et inégalités élémentaires

1.5.1 L'espace $L^2_\rho(\Omega)$

Pour l'étude de quelques problèmes posés, on a besoin de rappeler quelques espaces fonctionnels. Soit $L^2(0, l)$, $l \in \mathbb{R}_+^*$, l'espace de Hilbert usuel muni d'un produit scalaire noté $(\bullet, \bullet)_{L^2(0, l)}$ et d'une norme associée $\|u\|_{L^2(0, l)}$. L'espace de Hilbert $L^2(\Omega) := L_2(0, T, L_2(0, l))$ ($\Omega = (0, l) \times (0, T)$) est constitué de (classes de) fonctions définies et de carrés intégrables dans Ω . Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ est noté $(\bullet, \bullet)_{L^2(\Omega)}$ avec la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)}$. On désigne par $L^2_\rho(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions des carrés intégrables avec poids muni d'un produit scalaire dénoté $(\bullet, \bullet)_{L^2_\rho(\Omega)}$, défini par :

$$(u, v)_{L^2_\rho(\Omega)} = (\sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}v)_{L^2(\Omega)}$$

et d'une norme associée dénotée $\|u\|_{L^2_\rho(\Omega)}$ définie par :

$$\|u\|_{L^2_\rho(\Omega)} = \|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \rho(x) |u(x, \cdot)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Si $\rho(x) = 1$, $L^2_\rho(\Omega)$ sont identifiés avec les espaces standards $L^2(\Omega)$.

1.5.2 L'espace de Bouziani

On dénote par $C_0(0, l)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans $(0, l)$. Comme une telle fonction est intégrable au sens de Lebesgue par rapport à dx , on peut définir sur $C_0(0, l)$ la forme bilinéaire donnée par :

$$(u, w) = \int_0^l \mathfrak{S}_x^* u \cdot \mathfrak{S}_x^* w \, dx, \quad (1.8)$$

où

$$\mathfrak{S}_x^* u = \int_x^l u(\xi) \, d\xi,$$

qui est considéré comme un produit scalaire dans $C_0(0, l)$ pour lequel $C_0(0, l)$ n'est pas complet.

On dénote $B_2^1(0, l)$ la complétée de $C_0(0, l)$ pour le produit scalaire défini par (1.2), où $B_2^1(0, l)$ est appelé **l'espace de Bouziani** ou l'espace des fonctions primitives de carré intégrable sur $(0, l)$. La norme associée au produit scalaire (1.2) est

$$\|u\|_{B_2^1(0, l)} = \sqrt{(u, u)_{B_2^1(0, l)}} = \|\mathfrak{S}_x^* u\|_{L^2(0, l)}. \quad (1.9)$$

Lemme 1.1 *Pour $u \in B_2^1(0, l)$, on a l'estimation :*

$$\|u\|_{B_2^1(0, l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0, l)}. \quad (1.10)$$

Preuve L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_x^* u)^2 &= \left[\int_x^l u(\xi, t) \, d\xi \right]^2 \leq \left[\int_x^l d\xi \right] \left[\int_x^l (u(\xi, t))^2 \, d\xi \right] \\ &\leq (l-x) \int_x^l (u(\xi, t))^2 \, d\xi \leq (l-x) \int_0^l (u(x, t))^2 \, dx, \end{aligned}$$

par l'intégration sur $(0, l)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^l (\mathfrak{S}_x^* u)^2 dx &\leq \left(\int_0^l (l-x) dx \right) \left(\int_0^l (u(x,t))^2 dx \right) \\ &\leq l^2 \int_0^l (u(x,t))^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura :

$$\|u\|_{B_2^1(0,l)}^2 \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(0,l)}^2.$$

■

Remarque 1.3 *L'inégalité (1.4) reste valable si on remplace l'intervalle $(0, l)$ par une région bornée Ω de \mathbb{R}^n . Il suffit de remplacer l par $\text{mes}(\Omega)$ (mesure de Ω) dans (1.4).*

On dénote par $L^2(0, T; B_2^1(0, l)) := B_2(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables sur $[0, T]$ à valeurs dans $B_2^1(0, l)$, telles que

$$(u, w)_{L^2(0,T; B_2^1(0,l))} = \int_0^T (u(\bullet, t), w(\bullet, t))_{B_2^1(0,l)} dt.$$

Puisque l'espace $B_2^1(0, l)$ est un espace de Hilbert, on peut montrer que $L^2(0, T; B_2^1(0, l))$ est un espace de Hilbert aussi, avec la norme :

$$\|u\|_{L^2(0,T; B_2^1(0,l))} = \sqrt{(u, u)_{L^2(0,T; B_2^1(0,l))}} = \int_0^T \|u(\bullet, t)\|_{B_2^1(0,l)}^2 dt < +\infty. \quad (1.11)$$

1.5.3 Les espaces fractionnaires ${}^R H_0^\sigma(\Omega)$ et ${}^R B_0^\sigma(\Omega)$:

Soit $C^\infty(0, T)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $(0, T)$ et $C_0^\infty(0, T)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $(0, T)$.

Définition 1.11 [131] *pour tout réel $\sigma > 0$, L'application :*

$${}^R H_0^\sigma(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; u \longmapsto \left\| {}_0^R \partial_t^\sigma u \right\|_{L_2(\Omega)},$$

définit une semi-norme sur ${}^R H_0^\sigma(\Omega)$. On note :

$$|u|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)} := \left\| {}_0^R \partial_t^\sigma u \right\|_{L_2(\Omega)},$$

et l'application :

$${}^R H_0^\sigma(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; u \mapsto \left(\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme sur ${}^R H_0^\sigma(\Omega)$. On note :

$$\|u\|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)} := \left(\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| {}_0^R \partial_t^\sigma u \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

Donc, on définit l'espace ${}^R H_0^\sigma(\Omega)$ comme une complétion de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)}$.

Remarque 1.4 Premièrement, On a $|u|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)}$ est une semi norme et pas une norme car, si on met :

$$u = (t - \tau)^\sigma (t - 2\tau),$$

pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} |u|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{[(t-\tau)^\sigma (t-2\tau)]}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \right)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-2\tau) d\tau \right)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors, on trouve $u \neq 0$, malgré que $|u|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)} = 0$. Deuxièmement, il suffit d'appliquer la définition d'une norme, et de vérifier les trois propriétés essentielles. La difficulté principale est l'inégalité triangulaire, et pour la norme $\|u\|_{{}^R H_0^\sigma(\Omega)}$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.12 [131] pour tout réel $\sigma > 0$, on définit sur l'espace usuel de Sobolev $H_0^\sigma(\Omega)$, le semi-norme

$$|u|_{H_{l,r}^\sigma(\Omega)} := \left\langle {}_0^R \partial_t^\sigma u, {}_t^R \partial_T^\sigma u \right\rangle_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.13 Pour tout réel $\sigma > 0$, L'application :

$${}^R B_0^\sigma(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad u \mapsto \left\| {}_0^R \partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L_2(\Omega)},$$

définit une semi-norme sur ${}^R B_0^\sigma(\Omega)$. On note :

$$|u|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)} := \left\| {}_0^R \partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L_2(\Omega)},$$

et l'application :

$${}^R B_0^\sigma(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad u \mapsto \left(\|u\|_{B_2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme sur ${}^R B_0^\sigma(\Omega)$. On note :

$$\|u\|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)} := \left(\|u\|_{B_2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|_{B_2(\Omega)}^2 + \left\| {}_0^R \partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.13)$$

Donc, on définit l'espace ${}^R B_0^\sigma(\Omega)$ comme une complétion de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)}$.

Remarque 1.5 D'après la définition et la remarque précédente, on peut prouver que $|u|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)}$ est une semi norme et $\|u\|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)}$ est une norme, alors que pour l'inégalité triangulaire, on va utiliser l'inégalité de Minkowski.

Lemme 1.2 $\forall \sigma > 0$, si $w \in {}^R B_0^\sigma(\Omega)$ et $v \in C_0^\infty(\Omega)$, alors :

$$\left({}_0^R \partial_t^\sigma w(\bullet, y), v(\bullet, y) \right)_{(0,T)} = \left(w(\bullet, y), {}_t^R \partial_T^\sigma v(\bullet, y) \right)_{(0,T)}.$$

Preuve Par l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 ({}^R_0\partial_t^\sigma w(\bullet, y), v(\bullet, y))_{(0,T)} &= \int_0^T {}^R_0\partial_t^\sigma w \cdot v \, dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T {}^R_0\partial_t^\sigma w \cdot v \, dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \right) \cdot v \, dt \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \right) \cdot v' \, dt,
 \end{aligned}$$

et par l'intégration par parties fractionnaires, on retrouve

$$\begin{aligned}
 ({}^R_0\partial_t^\sigma w(\bullet, y), v(\bullet, y))_{(0,T)} &= \int_0^T {}^R_0\partial_t^\sigma w \cdot v \, dt \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \right) \cdot v' \, dt \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T \left(\int_t^T \frac{v'(\tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \right) \cdot w \, dt \\
 &= \int_0^T {}^R_t\partial_T^\sigma v \cdot w \, dt \\
 &= (w(\bullet, y), {}^R_t\partial_T^\sigma v(\bullet, y))_{(0,T)}.
 \end{aligned}$$

■

Lemme 1.3 (Lemme 2.6 [130]) *Pour $0 < \sigma < 1$, les semi-normes $|u|_{RH_0^\sigma(\Omega)}$ et $|u|_{H_{t,r}^\sigma(\Omega)}$ sont équivalentes. On pose*

$$|u|_{RH_0^\sigma(\Omega)} \cong |u|_{H_{t,r}^\sigma(\Omega)}.$$

Lemme 1.4 *Pour tout réel $\sigma > 0$, L'espace ${}^R B_0^\sigma(\Omega)$ avec la norme (1.13) est complet.*

Preuve Soit v_n une suite de Cauchy sous la norme $\|\bullet\|_{{}^R B_0^\sigma(\Omega)}$, alors il existe v, w vérifiant :

$$\mathfrak{S}_x v_n \rightarrow \mathfrak{S}_x v \text{ dans } L_2(\Omega), \quad (1.14)$$

$${}^R_0\partial_t^\sigma(\mathfrak{S}_x v_n) \rightarrow \mathfrak{S}_x w \text{ dans } L_2(\Omega). \quad (1.15)$$

Dans ce qui suit, on veut prouver que ${}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x v) = \mathfrak{S}_x w$.

D'après (1.15), on a :

$$\int_{\Omega} {}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x v_n) \cdot \varphi \, d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} \mathfrak{S}_x w \cdot \varphi \, d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.16)$$

D'autre part, à partir du lemme 1.2 et (1.14), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x v_n) \cdot \varphi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\mathfrak{S}_x v_n) \cdot {}^R_t\partial_T^\sigma \varphi \, d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} \mathfrak{S}_x v \cdot {}^R_t\partial_T^\sigma \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} {}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x v) \cdot \varphi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En combinant (1.16) et (1.17),

$$\int_{\Omega} {}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x v) \cdot \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathfrak{S}_x w \cdot \varphi \, d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On conclut :

$${}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_x v) = \mathfrak{S}_x w.$$

■

1.6 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall joue un grand rôle dans les estimations des termes intégro-différentiels et dont l'utilisation est fréquente pour l'obtention des estimations a priori dans les normes des espaces sus-cités et autres.

Lemme 1.5 (Gronwall) *Si a, b sont des fonctions non négatives et intégrables sur $(0, T)$, comme la fonction b soit non-décroissante sur $(0, T)$, et $\lambda \in L^1(0, T)$, $\lambda > 0$, il s'ensuit à partir de :*

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t \lambda(s) a(s) \, ds, \quad (1.18)$$

alors

$$a(t) \leq b(t) \exp(\Lambda(t)),$$

où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Preuve On met

$$k(t) = \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s) a(s) ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, l'estimation

$$\frac{\partial}{\partial t} k(t) = \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)) \left(a(t) - \int_0^t \lambda(s) a(s) ds \right) \leq \lambda(t) b(t) \exp(-\Lambda(t)),$$

résulte de (1.18) et $\lambda(t) > 0$. Avec $k(0) = 0$ par définition, l'intégration sur t conduit à

$$k(t) \leq \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(-\Lambda(s)) ds.$$

Encore, une autre fois on utilise (1.18),

$$\exp(-\Lambda(t)) (a(t) - b(t)) \leq \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s) a(s) ds = k(t) \leq \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(-\Lambda(s)) ds.$$

Donc, on trouve

$$a(t) - b(t) \leq \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) ds, \tag{1.19}$$

si b est non-décroissante sur $(0, T)$, de (1.19) et en vertu de $\lambda(t) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} a(t) &\leq b(t) + \int_0^t \lambda(s) b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) ds \\ &\leq b(t) \left[1 + \int_0^t \lambda(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s)) ds \right] \\ &\leq b(t) \left[1 + \exp(\Lambda(t)) \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} [-\exp(-\Lambda(s))] ds \right] \\ &\leq b(t) [1 + \exp(\Lambda(t)) [-\exp(-\Lambda(t)) + 1]] \\ &\leq b(t) \exp(\Lambda(t)). \end{aligned}$$

Qui prouve le lemme. ■

On conclut que si : $f_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) sont des fonctions non négatives et intégrables sur $(0, T)$, et que la fonction $f_3(\tau)$ est non-décroissante sur $(0, T)$, et à partir de

$$\mathfrak{S}_\tau f_1 + f_2 \leq f_3 + c\mathfrak{S}_\tau f_2, \quad c > 0,$$

alors il s'ensuit

$$\mathfrak{S}_\tau f_1 + f_2 \leq \exp(c\tau) \cdot f_3,$$

où

$$\mathfrak{S}_\tau f_i = \int_0^\tau f_i(t) dt.$$

Chapitre 2

Problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition de Neumann pour certaines classes d'équations paraboliques

2.1 Introduction

Les problèmes avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition au bord du type Dirichlet pour certaines classes d'équations paraboliques ont été traités par Marhoune [80], Marhoune et Lakhal [90]. A l'ombre de cela, on étudie un problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables pour une équation parabolique avec l'opérateur de Bessel [109], en prenant une condition au bord du type Neumann au lieu de condition de Dirichle. Ce travail est considéré comme une généralisation du problème de Bouziani [89], cela est dû au type de la condition intégrale étudiée.

2.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$, avec $T < \infty$, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad (2.1)$$

avec la condition initiale

$$\ell u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (2.2)$$

la condition limite de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad (2.3)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^\alpha xu(x, t) dx + \int_\beta^1 xu(x, t) dx = 0, \quad \beta > \alpha > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad t \in (0, T), \quad (2.4)$$

où φ est une fonction connue.

On suppose que la fonction φ satisfait aux conditions de compatibilité (2.3) et (2.4) et f satisfait la condition de compatibilité (2.4) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1) = 0, \quad \int_0^\alpha x\varphi(x) dx + \int_\beta^1 x\varphi(x) dx = 0, \quad (2.5)$$

et

$$\int_0^\alpha xf(x, t) dx + \int_\beta^1 xf(x, t) dx = 0. \quad (2.6)$$

La présence du terme intégrale dans les conditions limites peut, généralement compliquer grandement l'application des techniques numériques ainsi que les méthodes fonctionnelles standards, spécialement l'intégrale à deux bornes variables. Alors, pour dépasser cette difficulté, on introduit une technique de transfert du problème (2.1) – (2.4) à un autre moins compliqué qui ne contient pas de condition intégrale. Pour cela, on établit le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Le problème (2.1) – (2.4) est équivalent au problème (PR) suivant :*

$$(PR) : \begin{cases} \mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \\ lu = u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = \beta \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0. \end{cases}$$

Soit $u(x, t)$ une solution de (2.1) – (2.4), on prouve que

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = \beta \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t).$$

En multipliant l'équation (2.1) par x , l'intégrant par rapport à x sur $(0, \alpha)$ et $(\beta, 1)$ et en tenant compte de (2.4) et (2.6), alors on obtient

$$x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=\alpha} dx + x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\beta}^{x=1} dx = 0,$$

ceci implique

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \beta \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) = 0.$$

Donc, à partir de (2.3), on trouve

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = \beta \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t).$$

Soit maintenant $u(x, t)$ une solution de (PR), on doit donc prouver que

$$\int_0^\alpha xu(x, t) dx + \int_\beta^1 xu(x, t) dx = 0.$$

En multipliant l'équation (2.1) par x , l'intégrant par rapport à x sur $(0, \alpha)$ et $(\beta, 1)$ en tenant compte de

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = \beta \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha xu(x, t) dx &= \int_0^\alpha xf(x, t) dx, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_\beta^1 xu(x, t) dx &= \int_\beta^1 xf(x, t) dx,\end{aligned}$$

par combinaison des deux équations précédentes, et à partir de (2.6) et (2.5), on trouve

$$\int_0^\alpha xu(x, t) dx + \int_\beta^1 xu(x, t) dx = 0.$$

2.3 Estimation a priori

Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte dans un espace fonctionnel de Sobolev à poids du problème (2.1) – (2.4). La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème (PR) équivalent au problème (2.1) – (2.4) d'après le lemme 2.1 en suivant le schéma 1 cité dans l'introduction. Le problème (PR) peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lu = \mathcal{F}, \tag{2.7}$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec un domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L_\rho^2(\Omega)$; où $\rho(x) = (x^2 + x)$, telles que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \in L_\rho^2(\Omega)$ et u satisfait les conditions de limite dans (PR); l'opérateur L est considéré de B dans F , où B est l'espace de Banach des fonctions $u \in L_\rho^2(\Omega)$ et dont la norme :

$$\|u\|_B^2 = \int_\Omega (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx,$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ dont la norme :

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_\Omega f^2 dxdt + \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx$$

est finie.

Théorème 2.1 *Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation*

$$\|u\|_B \leq m \|Lu\|_F \quad (2.8)$$

où m est une constante positive indépendante de u .

Preuve Multipliant l'équation (2.1) par le suivant Mu :

$$Mu = \begin{cases} (x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ -x \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t}, & \alpha \leq x \leq \beta, \\ (x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t}, & \beta \leq x \leq 1, \end{cases}$$

et en intégrant sur le sous-domaine $\Omega^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$, où $\tau \in [0, T]$, on obtient

1) Sur Ω_α^τ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} \mathcal{L}u \cdot Mu dxdt \\ &= \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt + \int_{\Omega_\alpha^\tau} (1 - x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt \\ & \quad + \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\ & \quad + \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdt - \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x + 1) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\ &= \int_{\Omega_\alpha^\tau} f \cdot \left((x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt, \end{aligned}$$

2) Sur $\Omega_{\alpha,\beta}^\tau$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} \mathcal{L}u \cdot M u dx dt \\
 = & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 & + \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
 & + \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt - \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} (x+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 = & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} f \cdot \left(-x \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt,
 \end{aligned}$$

3) Sur Ω_β^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} \mathcal{L}u \cdot M u dx dt \\
 = & \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 & + \int_{\Omega_\beta^\tau} (1 - x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
 & + \int_{\Omega_\beta^\tau} (x - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt - \int_{\Omega_\beta^\tau} (x+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 = & \int_{\Omega_\beta^\tau} f \cdot \left((x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt.
 \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on aura

1) Sur Ω_α^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \right)^2 dt - \int_{\Omega_\alpha^\tau} \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_{\alpha}^{\tau}} (x+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt & (2.10) \\
 = & - \int_0^{\tau} (\alpha^2 + \alpha) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t) dt + \int_{\Omega_{\alpha}^{\tau}} x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx,
 \end{aligned}$$

2) Sur $\Omega_{\alpha, \beta}^{\tau}$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^{\tau}} x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt & (2.11) \\
 = & \frac{\beta}{2} \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \right)^2 dt - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \right)^2 dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^{\tau}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^{\tau}} (x+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt & (2.12) \\
 = & - \int_0^{\tau} (\beta^2 + \beta) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) dt \\
 & + \int_0^{\tau} (\alpha^2 + \alpha) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t) dt + \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^{\tau}} x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx,
 \end{aligned}$$

3) Sur Ω_{β}^{τ} ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\beta}^{\tau}} (x - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt & (2.13) \\
 = & \int_0^{\tau} \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \right)^2 dt - \int_{\Omega_{\beta}^{\tau}} \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_\beta^\tau} (x+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \tag{2.14} \\
 = & \int_0^\tau (\beta^2 + \beta) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) dt + \int_{\Omega_\beta^\tau} x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
 & + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_\beta^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx,
 \end{aligned}$$

et en utilisant l' ε -inégalité de Cauchy, on trouve

1) Sur Ω_α^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha^\tau} x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \tag{2.15} \\
 \leq & \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_\alpha^\tau} x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_\alpha^\tau} x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
 \leq & \frac{1}{4} \int_{\Omega_\alpha^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \frac{1}{4(\alpha^2 + \alpha)} \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt \\
 & + \frac{(\alpha^2 + \alpha)}{2} \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha^\tau} f \cdot \left((x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt \tag{2.16} \\
 \leq & (\alpha^2 + \alpha)^2 \int_{\Omega_\alpha^\tau} f^2 dxdt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_\alpha^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt \\
 & + \frac{1}{4(\alpha^2 + \alpha)} \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt \\
 & + \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)} \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt
 \end{aligned}$$

2) Sur $\Omega_{\alpha,\beta}^\tau$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} f \cdot \left(-x \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt \tag{2.17} \\
 & \leq \left(\frac{(\beta - \alpha) ((\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha))}{2} + \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} f^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{4 ((\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha))} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2,
 \end{aligned}$$

3) Sur Ω_β^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta^\tau} x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \tag{2.18} \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_\beta^\tau} x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_\beta^\tau} x \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
 & \leq \frac{\varepsilon(1-\beta)}{2} \int_{\Omega_\beta^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
 & \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega_\beta^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + (1-\beta) \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta^\tau} f \cdot \left((x^2 - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt \tag{2.19} \\
 & \leq ((1-\beta)^2 + (1-\beta)) \int_{\Omega_\beta^\tau} f^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega_\beta^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\
 & \quad + \frac{1}{4 ((1-\beta)^2 + (1-\beta))} \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\
 & \quad + \frac{1}{2 ((1-\beta)^2 + (1-\beta))} \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2
 \end{aligned}$$

Substituons (2.9) – (2.19) en $\int_{\Omega^\tau} \mathcal{L}u \cdot M u dxdt$, il devient

1) Sur Ω_α^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)}\right) \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \int_0^\tau \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t)\right)^2 dt - \int_0^\tau (\alpha^2 + \alpha) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t) dt \quad \Omega_\alpha^\tau \quad (2.20) \\
 & \leq (\alpha^2 + \alpha)^2 \int_{\Omega_\alpha^\tau} f^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)} \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt,
 \end{aligned}$$

2) Sur $\Omega_{\alpha, \beta}^\tau$,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & - \int_0^\tau (\beta^2 + \beta) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) dt + \int_0^\tau \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t)\right)^2 dt \\
 & \quad \frac{\beta}{2} \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t)\right)^2 dt - \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t)\right)^2 dt \quad \Omega_{\alpha, \beta}^\tau \quad (2.21) \\
 & \leq \left(\frac{(\beta - \alpha)^2(\beta + \alpha + 1)}{2} + \frac{1}{2}\right) \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} f^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{1}{4((\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha))} \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt,
 \end{aligned}$$

3) Sur Ω_β^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \left(\beta - \frac{1}{2((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))}\right) \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \int_0^\tau \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t)\right)^2 dt + \int_0^\tau (\beta^2 + \beta) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) dt \quad \Omega_\beta^\tau \quad (2.22) \\
 & \leq ((1 - \beta)^2 + (1 - \beta)) \int_{\Omega_\beta^\tau} f^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{1}{4((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))} \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les conditions du (PR) dans (2.20), (2.21) et (2.22) respectivement, on obtient

1) Sur Ω_α^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)}\right) \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \leq (\alpha^2 + \alpha)^2 \int_{\Omega_\alpha^\tau} f^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)} \int_{\Omega_\alpha^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

2) Sur $\Omega_{\alpha, \beta}^\tau$,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \leq \left(\frac{(\beta - \alpha)^2(\beta + \alpha + 1)}{2} + \frac{1}{2}\right) \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} f^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{1}{4((\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha))} \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

3) Sur Ω_β^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \left(\beta - \frac{1}{2((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))}\right) \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \leq ((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))^2 \int_{\Omega_\beta^\tau} f^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{1}{4((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))} \int_{\Omega_\beta^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Or dans Ω^τ , en combinant les inégalités (2.23), (2.24) et (2.25), on aboutit à

$$\begin{aligned}
 & \min \left(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)}, \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))}\right) \int_{\Omega^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \leq \max \left((\alpha^2 + \alpha)^2, \left(\frac{(\beta - \alpha)^2(\beta + \alpha + 1)}{2} + \frac{1}{2}\right), ((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))^2\right) \int_{\Omega^\tau} f^2 dxdt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx \\
 & \quad + \max \left(\frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)}, \frac{1}{4((\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha))}, \frac{1}{4((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))}\right) \int_{\Omega^\tau} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

En vertu du Lemme de Gronwall, on trouve

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \right) \\ & \leq m_1 \left(\int_{\Omega} f^2 dx dt + \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

tel que

$$m_1 = m_2 \exp(m_3),$$

où

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\max \left((\alpha^2 + \alpha)^2, \left(\frac{(\beta - \alpha)^2(\beta + \alpha + 1)}{2} + \frac{1}{2} \right), ((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))^2 \right)}{\min \left(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)}, \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))} \right)}; \\ m_3 &= \max \left(\frac{1}{2(\alpha^2 + \alpha)}, \frac{1}{4((\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha))}, \frac{1}{4((1 - \beta)^2 + (1 - \beta))} \right) T. \end{aligned}$$

Comme le côté droit de (2.26) est indépendant de τ , on passe au supremum du côté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0; T]$, on obtient l'inégalité désirée, où $m = (m_1)^{\frac{1}{2}}$. ■

Proposition 2.1 *L'opérateur L de B dans F est fermable.*

Preuve Soit $\{u_n\} \in D(L)$ une suite telle que :

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } B, \quad (2.27)$$

et

$$Lu_n \rightarrow (f, \varphi) \quad \text{dans } F, \quad (2.28)$$

il faut démontrer que

$$f \equiv 0 \text{ et } \varphi \equiv 0.$$

La convergence de u_n vers 0 dans B entraîne :

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } D'(\Omega). \quad (2.29)$$

D'après la continuité de la dérivation de $D'(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$. (2.29) implique :

$$\mathcal{L}u_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } D'(\Omega). \quad (2.30)$$

Par ailleurs, la convergence de $\mathcal{L}u_n$ vers f dans $L^2(\Omega)$ engendre :

$$\mathcal{L}u_n \rightarrow f \quad \text{dans } D'(\Omega). \quad (2.31)$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D'(\Omega)$, on conclut de (2.30) et (2.31) que $f = 0$.

Ensuite, il s'engendre de (2.28) :

$$\frac{d\ell u_n}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{dans } L^2(0,1). \quad (2.32)$$

D'un autre coté, d'après que

$$\|u_n\|_B^2 = \int_{\Omega} (x^2 + x) \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx,$$

on a

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\ & \geq \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{d\ell u_n}{dx} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

donc, on trouve

$$\int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{d\ell u_n}{dx} \right)^2 dx \leq \|u_n\|_B^2, \quad \forall n,$$

alors, compte tenu de (2.29), on aura

$$\frac{d\ell u_n}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0,1). \quad (2.33)$$

D'après l'unicité de la limite dans $L^2(0, 1)$, en vertu de (2.32) et (2.33) on obtient

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

et en tenant compte la condition de compatibilité suivante :

$$\int_0^\alpha x\varphi(x) dx + \int_\beta^1 x\varphi(x) dx = 0,$$

on conclut : que $\varphi = 0$. ■

Soit \bar{L} la fermeture de L , et $D(\bar{L})$ le domaine de définition de \bar{L} .

Définition 2.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = \mathcal{F},$$

est dite solution forte du problème (PR).

Théorème 2.1 est valide pour une solution forte, i.e. ; on a l'inégalité :

$$\|u\|_B \leq m \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \quad (2.34)$$

Par conséquent, cette dernière inégalité entraîne les corollaires suivants :

Corollaire 2.1 *La solution du problème (2.1) – (2.4) est unique, si elle existe, et dépend continûment de $\mathcal{F} \in F$.*

Corollaire 2.2 *L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est égale à la fermeture $\overline{R(\bar{L})}$ de $R(L)$.*

Preuve Soit $z \in \overline{R(\bar{L})}$, alors il existe une suite de Cauchy $\{z_n\}_n$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z.$$

Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(L)$ telle que

$$Lu_n = z_n.$$

De l'estimation (2.8), on obtient :

$$\|u_p - u_q\|_B \leq m \|Lu_p - Lu_q\|_F \rightarrow 0,$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans B , ainsi il existe $u \in B$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \text{ dans } B.$$

En vertu de la définition de \bar{L} ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ dans B ; si $\lim_{n \rightarrow +\infty} Lu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{L}u_n = z$ et comme \bar{L} est fermé donc $\bar{L}u = z$), la fonction u vérifie que :

$$u \in D(\bar{L}), \bar{L}u = z.$$

Ainsi $z \in R(\bar{L})$, alors

$$\overline{R(L)} \subset R(\bar{L}).$$

Aussi on conclut ici que $R(\bar{L})$ est fermé parce qu'il est complet (tout sous-espace complet d'un espace métrique (non nécessairement complet) est fermé).

Il reste à montrer l'inclusion inverse.

Soit $z \in R(\bar{L})$, alors il existe une suite $\{z_n\}_n$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(\bar{L})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z.$$

où $z \in R(\bar{L})$, car $R(\bar{L})$ est un sous-ensemble fermé d'un espace complet F , donc $R(\bar{L})$ est complet.

Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(\bar{L})$ telle que

$$\bar{L}u_n = z_n.$$

De l'estimation (2.34), on obtient :

$$\|u_p - u_q\|_B \leq m \|\bar{L}u_p - \bar{L}u_q\|_F \rightarrow 0,$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans B , ainsi il existe $u \in B$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \text{ dans } B.$$

Une fois encore, il existe une suite correspondante $\{L(u_n)\}_n \in R(L)$ telle que

$$Lu_n = \bar{L}u_n \text{ sur } R(L), \forall n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Lu_n = z,$$

En conséquence $z \in \overline{R(\bar{L})}$, et alors on conclut que

$$R(\bar{L}) \subset \overline{R(L)}.$$

■

Corollaire 2.3 *Une solution du problème (2.1) – (2.4) est unique, si elle existe, et dépend continûment $\mathcal{F} \in F$.*

2.4 Existence de la solution

Pour montrer l'existence de solutions, on doit prouver que $R(L)$ soit dense dans F pour tout $u \in B$ et pour tout arbitraire $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$.

Théorème 2.2 *Si les conditions du théorème 2.1 sont satisfaites. Alors, pour chaque $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, le problème (2.1) – (2.4) admettra une solution forte unique $u = \bar{L}^{-1}\mathcal{F}$.*

Preuve En vertu de l'inégalité (2.34), il s'ensuit que l'opérateur \bar{L} admet un inverse continu \bar{L}^{-1} et comme l'ensemble $R(\bar{L})$ est fermé (En raison du corollaire 2), d'où il suffit de démontrer

la densité de l'ensemble $R(L)$ dans l'espace F pour le cas particulier où $D(L) \equiv B$ est réduite à $D_0(L)$, où $D_0(L) = \{u, u \in D(L) : \ell u = 0\}$. Dans ce but, on démontre la proposition suivante :

■

Proposition 2.2 *Soit les conditions du théorème 2.2 remplies. Si, pour $\omega \in L^2(\Omega)$ et pour tout $u \in D_0(L)$, on a*

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt = 0, \quad (2.35)$$

alors ω s'annule presque partout dans Ω .

Preuve Le produit scalaire de F est défini par :

$$(Lu, \omega)_F = \int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt + \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) dx. \quad (2.36)$$

L'égalité (2.35) peut s'écrire comme suit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \omega dxdt = \int_{\Omega} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \omega dxdt, \quad (2.37)$$

on met

$$u(x, t) = \begin{cases} z(x, t), & \text{si } t \in]0, T] \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

où $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} \in L^2_{\rho}(\Omega)$, et z satisfait les conditions aux limites de (PR). De (2.37), on obtient l'égalité :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \omega dxdt = \int_{\Omega} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \omega dxdt. \quad (2.38)$$

Et à partir de l'égalité (2.38), on donne la fonction ω en terme de z comme suit :

$$\omega = \begin{cases} - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(x^2 - \frac{1}{4}x^3 \right) \frac{\partial z}{\partial t} & 0 \leq x \leq \alpha, \\ -x \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial t} & \alpha \leq x \leq \beta, \\ - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(x^2 - \frac{1}{4}x^3 \right) \frac{\partial z}{\partial t} & \beta \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.39)$$

Chapitre 2. Problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition de Neumann pour certaines classes d'équations paraboliques

Donc, $\omega \in L^2(\Omega)$: (par ce que, si $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} \in L^2_\rho(\Omega)$, alors $\omega \in L^2(\Omega)$). Et z satisfait aux mêmes conditions que la fonction u dans (PR) :

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial x}(\alpha, t) = \beta \frac{\partial z}{\partial x}(\beta, t), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) = 0, \quad (2.40)$$

$$z(\alpha, t) = z(\beta, t) = 0. \quad (2.41)$$

Remplaçant ω dans (2.38) par sa représentation (2.39), par l'intégration par parties, et en tenant compte des conditions (2.40) et (2.41), on obtient :

$$\int_{\Omega^\tau} \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \omega dx dt = \begin{cases} - \int_{\Omega^\tau_\alpha} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega^\tau_\alpha} \left(x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx dt & \Omega^\tau_\alpha = (0, \alpha) \times (0, \tau) \\ - \int_{\Omega^\tau_{\alpha, \beta}} x \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega^\tau_{\alpha, \beta}} x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx dt & \Omega^\tau_{\alpha, \beta} = (\alpha, \beta) \times (0, \tau) \\ - \int_{\Omega^\tau_\beta} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega^\tau_\beta} \left(x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx dt & \Omega^\tau_\beta = (\beta, 1) \times (0, \tau) \end{cases} .$$

De même, on trouve

1) Sur Ω^τ_α ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau_\alpha} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \omega dx dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left(\frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x}\right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau_\alpha} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx dt \\ & \quad - \int_{\Omega^\tau_\alpha} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left(x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx, \end{aligned}$$

2) Sur $\Omega^\tau_{\alpha, \beta}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau_{\alpha, \beta}} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \omega dx dt \\ &= -\frac{\beta}{2} \int_0^\tau \left(\frac{\partial z(\beta, t)}{\partial x}\right)^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \left(\frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x}\right)^2 dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau_{\alpha, \beta}} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx dt - \int_{\Omega^\tau_{\alpha, \beta}} x \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx, \end{aligned}$$

3) Sur Ω_β^τ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \omega dx dt \\
 = & \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\beta - \frac{\beta^2}{2} \right) \left(\frac{\partial z(\beta, t)}{\partial x} \right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta^\tau} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
 & - \int_{\Omega_\beta^\tau} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_\beta^1 \left(x^2 - \frac{1}{4} x^3 \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx,
 \end{aligned}$$

Maintenant, par substitution de ces dernières égalités dans (2.38) et en utilisant les conditions (2.40), il devient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha^\tau} \left(x^2 - \frac{1}{4} x^3 \right) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{\Omega_{\alpha, \beta}^\tau} x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
 & + \int_{\Omega_\beta^\tau} \left(x^2 - \frac{1}{4} x^3 \right) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
 = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left(x^2 - \frac{1}{4} x^3 \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_\beta^1 \left(x^2 - \frac{1}{4} x^3 \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx \\
 \leq & 0.
 \end{aligned}$$

Donc, $z = 0$ dans Ω , qui donne $\omega = 0$ dans Ω . Cela fait la preuve de la proposition 2.2. ■

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.2.

On considère une fonction $W = (\omega, \omega_0) \in R(L)^\perp$ et pour tout $u \in D(L) \equiv B$, alors W vérifie l'égalité :

$$\begin{aligned}
 & (Lu, \omega)_F \\
 = & \int_\Omega \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt + \int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) dx \\
 = & 0.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Puis. On doit prouver que $W = 0$. On suppose $u \in D_0(L)$ dans (2.42), on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega \, dxdt = 0, \quad u \in D_0(L).$$

De la proposition 2.1, on déduit que $\omega = 0$. Ainsi (2.42) prend la forme :

$$\int_0^1 (x^2 + x) \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) dx = 0, \quad u \in D(L). \quad (2.43)$$

Puisque l'ensemble des valeurs de l'opérateur ℓ est dense partout dans l'espace de Hilbert F avec la norme

$$\left(\int_0^1 \left[(x^2 + x) \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'égalité (2.43) implique que $\omega_0 = 0$. Donc $W = 0$ implique $\overline{R(L)} = F$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.

Chapitre 3

Problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition périodique pour une classe d'équations paraboliques

3.1 Introduction

Actuellement, le développement de l'étude des problèmes non locaux pour les EDP se poursuit vigoureusement, où beaucoup de problèmes avec des conditions intégrales ont été étudiés dans plusieurs travaux en utilisant la méthode des inégalités d'énergie, le théorème du point fixe de Schauder, la méthode de Galerkin, la théorie de caractéristiques, et la méthode du Rothe pour différents types d'équations avec des conditions intégrales. Contrairement à ces travaux, on applique dans le présent chapitre la méthode des inégalités d'énergie pour étudier un problème mixte avec un nouveau type de condition intégrale (**condition intégrale à deux bornes variables**) et une condition périodique de type Neumann pour une classe d'équations paraboliques ; une étude menée par T-E Oussaeif, A Bouziani [136].

Ce chapitre peut être considéré comme un prolongement du chapitre précédent dans la mesure où l'équation étudiée est plus généralisée que la précédente.

3.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$, avec $T < \infty$, on considère l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad (3.1)$$

où le coefficient $a(x, t)$ satisfait aux conditions :

$$0 < c_0 \leq a(x, t) \leq c_1, \quad 0 < \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \leq c_2. \quad (\text{H})$$

Dans le reste du chapitre, $c_i, i = \overline{1, 3}$, désignent des constantes strictement positives.

A l'équation (3.1), on associe la condition initiale :

$$\ell u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.2)$$

la condition périodique de type Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.3)$$

et la condition intégrale :

$$\int_0^\alpha u(x, t) dx + \int_\beta^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad \alpha + \beta = 1, \quad t \in (0, T), \quad (3.4)$$

où $a(x, t)$, $f(x, t)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions données.

On suppose que la fonction φ satisfait les conditions de compatibilité (3.3) et (3.4) et f satisfait celle de (3.4), i.e.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1) = 0, \quad \int_0^\alpha \varphi(x) dx + \int_\beta^1 \varphi(x) dx = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_0^\alpha f(x, t) dx + \int_\beta^1 f(x, t) dx = 0. \quad (3.6)$$

La présence du terme intégrale dans les conditions limites peut, généralement compliquer grandement l'application des techniques numériques et des méthodes fonctionnelles standards, spécialement la condition intégrale à deux bornes variables. Ensuite, pour surmonter cette difficulté, on introduit une technique de transfert du problème (3.1) – (3.4) à un autre classique moins compliqué et qui ne contient pas de condition intégrale. Pour cela, on établit le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Le problème (3.1) – (3.4) est équivalent au problème non local suivant (PR) :*

$$(PR) : \begin{cases} \mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \\ 0 < c_0 \leq a(x, t) \leq c_1, \quad 0 < \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \leq c_2 \\ \ell u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \\ a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t). \end{cases} .$$

Preuve Soit $u(x, t)$ une solution de (3.1) – (3.4), on prouve que :

$$a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t).$$

en intégrant l'équation (3.1) par rapport à x sur $(0, \alpha)$ et $(\beta, 1)$, en tenant compte de (3.6), on obtient

$$\int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \int_\beta^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0,$$

et l'usage de (3.3) donne :

$$a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t). \quad (3.7)$$

Soit maintenant $u(x, t)$ une solution de (PR), donc on est en train de prouver que :

$$\int_0^\alpha u(x, t) dx + \int_\beta^1 u(x, t) dx = 0.$$

On intègre l'équation (3.1) par rapport à x sur $(0, \alpha)$ et sur $(\beta, 1)$, en tenant

$$a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t),$$

et en se servant des conditions (3.3) et (3.6), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\alpha u(x, t) dx + \int_\beta^1 u(x, t) dx \right) = 0,$$

alors, on trouve

$$\int_0^\alpha u(x, t) dx + \int_\beta^1 u(x, t) dx = m,$$

où m est une constante. Sous la condition initiale (3.2) et la condition de compatibilité (3.5), on trouve

$$\int_0^\alpha u(x, t) dx + \int_\beta^1 u(x, t) dx = 0.$$

■

3.3 Estimation a priori et ses conséquences

Dans ce chapitre, on démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) – (3.4). Cette démonstration est basée sur des estimations a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème (PR) qui est équivalent au problème (3.1) – (3.4), d'après le lemme 3.1, en suivant le schéma 1 cité dans l'introduction.

Le problème (PR) peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lu = \mathcal{F}, \tag{3.8}$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec le domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\Omega)$ et u satisfait les conditions limites dans (PR); l'opérateur L est considéré de B dans F , où B est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ et dont la norme :

$$\|u\|_B^2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \sup_{0 \leq \tau \leq T} \int_0^1 \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ dont la norme :

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_{\Omega} f^2 dxdt + \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx$$

est finie.

Théorème 3.1 *Pour toute fonction $u \in B$, on a l'inégalité*

$$\|u\|_B \leq c \|Lu\|_F, \quad (3.9)$$

où c est une constante positive indépendante de u .

Preuve Multiplions l'équation (3.1) par le suivant Mu :

$$Mu = \begin{cases} Mu_1 = (2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi & 0 \leq x \leq \alpha \\ Mu_2 = (2-\alpha) \frac{\partial u}{\partial t} & \alpha \leq x \leq \beta \\ Mu_3 = (2-\alpha+\beta-x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi & \beta \leq x \leq 1 \end{cases},$$

puis, intégrons sur le sous-domaine Ω^τ , où $\Omega^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$.

1) En intégrant sur $\Omega_\alpha^\tau = \Omega_\alpha = (0, \alpha) \times (0, \tau)$, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} \mathcal{L}u.Mu_1 dxdt \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\ & \quad - \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] f dxdt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En utilisant une intégration par parties dans (3.10), et en tenant compte de la condition (3.3),

on obtient par conséquent

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
 = & \int_{\Omega_\alpha} (2-x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 dt, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \\
 = & - \int_0^\tau \left(a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha,t) \right) dt \\
 & + \int_{\Omega_\alpha} (2-x) a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx dt \\
 = & - \int_0^\tau \left(a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha,t) \right) dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (2-x) a(x,\tau) \left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\alpha (2-x) a(x,0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (2-x) \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

En appliquant l' ε -inégalité de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] f dx dt \\
 \leq & \int_{\Omega_\alpha} (2-x)^2 f^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt^2 \\
 & + \int_{\Omega_\alpha} \left(\int_x^\alpha f \right)^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

À la lumière de l'inégalité :

$$\int_{\Omega_\alpha} \left(\int_x^\alpha f \right)^2 dxdt \leq 4 \int_{\Omega_\alpha} x^2 f^2 dxdt,$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} \left[(2-x) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \right] f dxdt \\ & \leq 8 \int_{\Omega_\alpha} f^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

En substituant (3.11) – (3.13) dans (3.10), on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} (2-x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (2-x) a(x, \tau) \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\ & - \int_0^\tau \left(a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\ & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t) \right) dt \\ & \leq 8 \int_{\Omega_\alpha} f^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\alpha (2-x) a(x, 0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (2-x) \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant les conditions (H), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 dt \\
 & + \frac{c_0}{2} \int_0^\alpha \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & - \int_0^\tau \left(a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t) \right) dt \\
 & \leq 8 \int_{\Omega_\alpha} f^2 dxdt + c_1 \int_0^\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + c_2 \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

2) En intégrant sur $\Omega_{\alpha, \beta}^\tau = \Omega_{\alpha, \beta} = (\alpha, \beta) \times (0, \tau)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha, \beta}} \mathcal{L}u.Mu_2 dxdt \\
 & = \int_{\Omega_{\alpha, \beta}} \left[(2 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
 & \quad - \int_{\Omega_{\alpha, \beta}} \left[(2 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdt \\
 & = \int_{\Omega_{\alpha, \beta}} \left[(2 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial t} \right] f dxdt.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En utilisant une intégration par parties dans (3.15), et en tenant compte les conditions aux limites dans (PR), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha, \beta}} \left[(2 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
 & = \int_{\Omega_{\alpha, \beta}} (2 - \alpha) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \left[(2-\alpha) \frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \\
= & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\beta,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta,t) \right) dt \\
& + \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha,t) \right) dt \\
& + \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} (2-\alpha) a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx dt \\
= & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\beta,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta,t) \right) dt \\
& + \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha,t) \right) dt \\
& + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (2-\alpha) a(x,\tau) \left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (2-\alpha) a(x,0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} (2-\alpha) \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \left[(2-\alpha) \frac{\partial u}{\partial t} \right] f dx dt \\
\leq & 2 \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} f^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

En substituant (3.16) – (3.18) dans (3.15) et selon les conditions (H), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{c_0}{2} \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
& - \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\beta,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta,t) \right) dt \\
& + \int_0^\tau \left((2-\alpha) a(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t) \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha,t) \right) dt \\
\leq & 2 \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} f^2 dx dt + c_1 \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \\
& + c_2 \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

3) En intégrant sur $\Omega_\beta^\tau = \Omega_\beta = (\beta, 1) \times (0, \tau)$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta} \mathcal{L}u.Mu_3 dxdt \\
 = & \int_{\Omega_\beta} \left((2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
 & - \int_{\Omega_\beta} \left((2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdt \\
 = & \int_{\Omega_\beta} \left((2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) f dxdt. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties dans (3.20), et en tenant compte des conditions aux limites dans (PR), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta} \left[(2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right] \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
 = & \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 dt, \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_\beta} \left[(2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \\
= & - \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
& + \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) \right) dt \\
& + \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx dt \\
= & - \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
& + \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) \right) dt \\
& + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (2 - \alpha + \beta - x) a(x, \tau) \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_\beta^1 (2 - \alpha + \beta - x) a(x, 0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\beta} \left[(2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right] f dx dt \\
\leq & \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x)^2 f^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& + \int_{\Omega_\beta} \left(\int_\beta^x f \right)^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

À la lumière de l'inégalité :

$$\int_{\Omega_\beta} \left(\int_\beta^x f \right)^2 dx dt \leq 4 \int_{\Omega_\beta} (1 - x)^2 f^2 dx dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha} \left[(2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial u}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right] f dx dt \\
 & \leq 8 \int_{\Omega_\beta} f^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt^2.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

En substituant (3.21) – (3.23) dans (3.20), on aura

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (2 - \alpha + \beta - x) a(x, \tau) \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & - \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
 & + \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) \right) \\
 & \leq 8 \int_{\Omega_\beta} f^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_\beta^1 (2 - \alpha + \beta - x) a(x, 0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy et selon les conditions (H), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 dt \\
 & + \frac{c_0}{2} \int_\beta^1 \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & - \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right) dt \\
 & + \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\beta, t) \right) dt \\
 & \leq 8 \int_{\Omega_\beta} f^2 dx dt + c_1 \int_\beta^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + c_2 \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Par l'addition des inégalités (3.14), (3.19) et (3.24), en selon les conditions de (PR), il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{c_0}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\ & \leq 8 \int_{\Omega} f^2 dxdt + c_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + c_2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt, \end{aligned}$$

en vertu du Lemme 1 dans [22], on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_0^1 \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx \\ & \leq c_3 \left(\int_{\Omega} f^2 dxdt + \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où

$$c_3 = \frac{\max(c_1, 8)}{\min\left(\frac{1}{2}, \frac{c_0}{2}\right)} \exp(c_2 T).$$

Comme le côté droit de (3.25) est indépendant de τ , on passe au supremum du côté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient l'inégalité désirée, où $c = (c_3)^{\frac{1}{2}}$. ■

Proposition 3.1 *L'opérateur L de B dans F est fermable.*

La démonstration de la proposition est analogue à celle de la proposition 2.1 du chapitre 2.

Soit \bar{L} la fermeture de L , et $D(\bar{L})$ le domaine de définition de \bar{L} .

Définition 3.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = \mathcal{F},$$

est dite solution forte du problème (PR).

Théorème 3.1 est valide pour une solution forte, c'est à dire on a l'inégalité

$$\|u\|_B \leq c \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \quad (3.26)$$

Par conséquent, cette inégalité entraîne les corollaires suivants :

Corollaire 3.1 *L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est égale à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.*

Corollaire 3.2 *Une solution du problème (3.1) – (3.4) est unique, si elle existe et dépend continûment de $\mathcal{F} \in F$.*

3.4 Solvabilité du problème

Pour montrer l'existence de solutions, on prouve que $R(L)$ est dense dans F pour tout $u \in B$ et pour tout arbitraire $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$.

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions du théorème 3.1 ainsi que la condition (H) sont satisfaites. Alors, le problème (3.1) – (3.4) admet une solution forte unique $u = \bar{L}^{-1}\mathcal{F}$.*

Preuve Premièrement, on montre que $R(L)$ est dense dans F pour le cas particulier où $D(L) \equiv B$ est réduit à $D_0(L)$, où $D_0(L) = \{u, u \in D(L) : \ell u = 0\}$. Dans ce but, on démontre la proposition suivante : ■

Proposition 3.2 *Soit les conditions du théorème 3.2 satisfaites. Si, pour $\omega \in L^2(\Omega)$ et pour toute $u \in D_0(L)$, on a*

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt = 0, \quad (3.27)$$

alors ω s'annule presque partout dans Ω .

Preuve Le produit scalaire de F est défini par

$$(Lu, \omega)_F = \int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt + \int_0^1 \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) dx. \quad (3.28)$$

L'égalité (3.27) peut s'écrire comme suit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \omega dxdt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \omega dxdt. \quad (3.29)$$

On met

$$u(x, t) = \begin{cases} z(x, t), & \text{si } t \in]0, T] \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

d'après (3.29), on a l'égalité

$$\int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial t} \omega dx dt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \omega dx dt. \quad (3.30)$$

Au cours de l'établissement de la fonction ω , et à partir de l'égalité (3.30), on la donne en terme de la fonction z comme suit :

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = \left((2-x) \frac{\partial z}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} & 0 \leq x \leq \alpha \\ \omega_2 = \left((2-\alpha) \frac{\partial z}{\partial t} \right) e^{kt} & \alpha \leq x \leq \beta \\ \omega_3 = \left((2-\alpha+\beta-x) \frac{\partial z}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} & \beta \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (3.31)$$

où k est une constante négative avec $kc_0 + c_2 \leq 0$, et $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} \right) \in L^2(\Omega)$, aussi z satisfait aux mêmes conditions que la fonction u dans (PR).

Remplaçant ω dans (3.30) par sa représentation (3.31) et par l'intégration par parties de chaque terme dans (3.30) avec l'utilisation des conditions de la fonction z , on aura :

1) sur le domaine $\Omega_{\alpha} = (0, \alpha) \times (0, \tau)$, on a

$$\int_{\Omega_{\alpha}} \frac{\partial z}{\partial t} \omega_1 dx dt = \int_{\Omega_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \omega_1 dx dt, \quad (3.32)$$

Par l'intégration par parties de chaque terme de (3.32) par rapport à x et t , et en employant les conditions de la fonction z , il donne

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left((2-x) \frac{\partial z}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial t} a(\alpha, t) \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & + \int_0^\tau \left(\left(\int_0^\alpha \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) a(\alpha, t) e^{kt} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & - \int_{\Omega_\alpha} a(x, t) e^{kt} (2-x) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial t} a(\alpha, t) \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & + \int_0^\tau \left(\left(\int_0^\alpha \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) a(\alpha, t) e^{kt} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\alpha (2-x) e^{kt} a(x, t) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} e^{kt} (2-x) \left(ka(x, t) + \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

donc, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left((2-x) \frac{\partial z}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial t} a(\alpha, t) \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & + \int_0^\tau \left(\left(\int_0^\alpha \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) a(\alpha, t) e^{kt} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\alpha e^{kT} (2-x) a(x, T) \left(\frac{\partial z(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} e^{kt} (2-x) \left(ka(x, t) + \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\alpha} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \omega_1 dx dt & (3.34) \\
 & \int_{\Omega_\alpha} \frac{\partial z}{\partial t} \left((2-x) \frac{\partial z}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} dx dt \\
 = & \int_{\Omega_\alpha} e^{kt} (2-x) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{kt} \left(\int_0^\alpha \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right)^2 dt.
 \end{aligned}$$

2) Dans le domaine $\Omega_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta) \times (0, \tau)$, on a

$$\int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \frac{\partial z}{\partial t} \omega_2 dx dt = \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \omega_2 dx dt. \quad (3.35)$$

Utilisons encore une fois une intégration par parties de chaque terme dans (3.35) par rapport à x et t , et selon les conditions de la fonction z , il donne

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\left((2-\alpha) \frac{\partial z}{\partial t} \right) e^{kt} \right) dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} a(\beta, t) \frac{\partial z(\beta, t)}{\partial t} \frac{\partial z(\beta, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} a(\alpha, t) \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial t} \right) dt \\
 & - \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} (2-\alpha) e^{kt} a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} a(\beta, t) \frac{\partial z(\beta, t)}{\partial t} \frac{\partial z(\beta, t)}{\partial x} \right) dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} a(\alpha, t) \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial x} \frac{\partial z(\alpha, t)}{\partial t} \right) dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (2-\alpha) e^{kt} a(x, t) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \Big|_{t=0}^{t=\tau} dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} (2-\alpha) e^{kt} \left(ka(x, t) + \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

donc, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x,t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\left((2-\alpha) \frac{\partial z}{\partial t} \right) e^{kt} \right) dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} a(\beta,t) \frac{\partial z(\beta,t)}{\partial t} \frac{\partial z(\beta,t)}{\partial x} \right) dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2-\alpha) e^{kt} a(\alpha,t) \frac{\partial z(\alpha,t)}{\partial x} \frac{\partial z(\alpha,t)}{\partial t} \right) dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (2-\alpha) e^{kT} a(x,T) \left(\frac{\partial z(x,T)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} (2-\alpha) e^{kt} \left(ka(x,t) + \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt, \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} \frac{\partial z}{\partial t} \omega_2 dx dt \\
 = & \int_{\Omega_{\alpha,\beta}} e^{kt} (2-\alpha) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

3) Dans le domaine $\Omega_\beta = (\beta, 1) \times (0, \tau)$, on a

$$\int_{\Omega_\beta} \frac{\partial z}{\partial t} \omega_3 dx dt = \int_{\Omega_\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x,t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \omega_3 dx dt. \tag{3.38}$$

Aussi, une autre intégration par parties de chaque terme dans (3.38) par rapport à x et t , aux conditions de la fonction z , il vient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\left((2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial z}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} \right) dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial z}{\partial x} (\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial z}{\partial x} (\beta, t) \frac{\partial z}{\partial t} (\beta, t) \right) e^{kt} dt \\
 & - \int_{\Omega_\beta} a(x, t) (2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial z}{\partial x} (\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial z}{\partial x} (\beta, t) \frac{\partial z}{\partial t} (\beta, t) \right) e^{kt} dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_\beta^1 (2 - \alpha + \beta - x) e^{kt} a(x, t) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) e^{kt} \left(ka(x, t) + \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\left((2 - \alpha + \beta - x) \frac{\partial z}{\partial t} - \int_x^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} \right) dx dt \\
 = & \int_0^\tau \left(a(\beta, t) \frac{\partial z}{\partial x} (\beta, t) \int_\beta^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right) e^{kt} dt \\
 & - \int_0^\tau \left((2 - \alpha) a(\beta, t) \frac{\partial z}{\partial x} (\beta, t) \frac{\partial z}{\partial t} (\beta, t) \right) e^{kt} dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (2 - \alpha + \beta - x) e^{kT} a(x, T) \left(\frac{\partial z(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\beta} (2 - \alpha + \beta - x) e^{kt} \left(ka(x, t) + \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt, \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\beta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \omega_3 dx dt \\ &= \int_{\Omega_\beta} e^{kt} (2 - \alpha + \beta - x) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{kt} \left(\int_\beta^1 \frac{\partial z}{\partial t} d\xi \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (3.40)$$

En combinant les inégalités (3.33), (3.34) et (3.36), (3.37) et (3.39), (3.40) dans (3.30), on parvient au résultat suivant

$$\begin{aligned} & \int_\Omega e^{kt} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ & \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{kT} a(x, T) \left(\frac{\partial z(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_\Omega e^{kt} (kc_0 + c_2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dt \\ & \leq 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

ceci implique que $z = 0$ sur Ω , donc $\omega = 0$ sur Ω . Cela prouve la proposition 3.2. ■

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.2, on a déjà noté qu'il suffit de prouver que l'ensemble $R(L)$ est dense dans F .

Supposons que : pour $W = (\omega, \omega_0) \in R(L)^\perp$, et $\forall u \in D(L) \equiv B$, alors W vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & (Lu, \omega)_F \\ &= \int_\Omega \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt + \int_0^1 \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) dx \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ensuite, on doit prouver que $W = 0$. Mettons $u \in D_0(L)$ dans (3.42), on obtient

$$\int_\Omega \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt = 0, \quad u \in D_0(L).$$

Chapitre 3. Problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition périodique pour une classe d'équations paraboliques

En vertu de la proposition 3.2, on déduit que $\omega = 0$. Donc (3.42) prend la forme suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) dx = 0, \quad u \in D(L). \quad (3.43)$$

Comme l'ensemble des valeurs de l'opérateur ℓ est partout dense dans l'espace de Hilbert F avec la norme

$$\left(\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \ell u}{\partial x} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'égalité (3.43) implique que $\omega_0 = 0$, alors $W = 0$ donne $(\overline{R(L)} = F)$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

Chapitre 4

Existence et unicité d'une solution d'un problème mixte pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition intégrale

4.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont obtenues en généralisant les équations différentielles à un ordre arbitraire, elles jouent un rôle crucial dans l'ingénierie, la physique et les mathématiques appliquées. Des phénomènes complexes peuvent être modélisés en utilisant ces équations.

De ce fait, on peut trouver de nombreuses applications dans l'étude de la viscoélasticité, l'électrochimie, traitement du signal, théorie du contrôle, milieux poreux, mécanique des fluides, la rhéologie, le transport par diffusion, les réseaux électriques, la théorie électromagnétique et de nombreux autres processus physiques [110 – 114]. Récemment, il ya eu un développement significatif dans le domaine des équations fractionnaires aux dérivées partielles ; voir les monographies de Kilbas et al. [115] et dans les papiers [116 – 129].

La théorie de l'existence et l'unicité des solutions des problèmes aux limites et aux valeurs

initiales pour les équations différentielles fractionnaires est largement étudiée par de nombreux auteurs, voir par exemple [117 – 120, 130, 132 – 133].

Quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution d'équations aux dérivées partielles fractionnaires ont été obtenus en utilisant le fameux théorème de Lax-Milgram et le théorème du point fixe. Parmi eux, on cite les papiers [130, 134, 135].

La formulation variationnelle convenable est le point de départ de nombreuses méthodes numériques, telles que les méthodes des éléments finis et les méthodes spectrales. L'existence et l'unicité de la solution variationnelle sont donc essentielles pour que ces méthodes soient efficaces.

La construction de la formulation variationnelle dépend fortement du choix des espaces et des normes appropriées, ce que nous a motivé pour faire étendre et généraliser l'étude des problèmes des EDP avec condition intégrale à l'étude des EDP fractionnaires avec une condition intégrale. C'est ainsi pour développer les travaux sur les problèmes classiques des EDP fractionnaires à l'étude des problèmes non standards.

L'objectif de ce chapitre est d'élargir l'application de la méthode des inégalités d'énergie pour aboutir à l'existence et l'unicité de la solution dans des espaces fonctionnels de Sobolev pondérés "avec poids" pour une classe de problèmes aux limites et aux valeurs initiales avec une condition intégrale pour une classe des EDP "paraboliques" fractionnaires qui incluent une dérivée fractionnaire de Caputo, discutée dans T-E. Oussaeif, A. Bouziani [139].

4.2 Position du problème

Pour tout entier positif $0 < \sigma < 1$, la dérivée de Caputo et de Riemann Liouville sont respectivement définies comme suit :

(i) Dérivée au sens de **Caputo à gauche**

$${}^C_0\partial_t^\sigma u(x, t) := \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{(t-\tau)^\sigma} d\tau. \quad (4.1)$$

(ii) Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à gauche**

$${}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) := \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau. \quad (4.2)$$

D'après (1.7), on trouve

$${}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) = {}^C_0\partial_t^\sigma u(x, t) + \frac{u(x, 0)}{\Gamma(1 - \sigma)t^\sigma}. \quad (4.3)$$

Dans le domaine $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$, $T < \infty$, on considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaire de type parabolique suivante :

$$\mathcal{L}v = {}^C_0\partial_t^\sigma v(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = F(x, t), \quad (4.4)$$

avec la condition initiale

$$\ell u = v(x, 0) = \phi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (4.5)$$

la condition au bord de type Neumann

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \mu(t), \quad (4.6)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 v(x, t) dx = m(t), \quad t \in (0, T), \quad (4.7)$$

où F , ϕ , μ et m sont des fonctions données.

On suppose que la fonction φ vérifie les conditions de compatibilité (4.6) et (4.7), i.e.

$$\frac{d\phi(0)}{dx} = \mu(0), \quad \int_0^1 \phi(x) dx = m(0).$$

Etant donné que les conditions aux limites sont non homogènes, il est commode de les ramener à des conditions homogènes. On construit la fonction

$$U(x, t) = x \left(1 - \frac{3}{2}x \right) \mu(t) + 3x^2 m(t),$$

en introduisant une nouvelle fonction inconnue \tilde{v} définie par

$$\tilde{v}(x, t) = v(x, t) - U(x, t).$$

Alors, cette transformation nous permet de formuler le problème (4.4) – (4.7) à :

$$\mathcal{L}\tilde{v} = {}_0^C\partial_t^\sigma \tilde{v}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = F(x, t) - \ell U = \tilde{F}(x, t), \quad (4.8)$$

$$\ell \tilde{v} = \tilde{v}(x, 0) = \phi(x) - \ell U = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (4.10)$$

$$\int_0^1 \tilde{v}(x, t) dx = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4.11)$$

où φ satisfait aux conditions de compatibilité (4.10) et (4.11).

Encore une fois, on introduit une nouvelle fonction $u(x, t) = \tilde{v}(x, t) - \varphi(x)$, et à l'aide de (4.3) le problème (4, 8) – (4, 11) devient sous la forme :

$$\mathcal{L}u = {}_0^R\partial_t^\sigma u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \tilde{F}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) = f(x, t), \quad (4.12)$$

$$\ell u = u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (4.14)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4.15)$$

4.3 Estimation a priori et l'unicité de la solution

Dans ce chapitre on étudie un problème mixte lié à une équation parabolique fractionnaire du second ordre, mariant une condition classique de type Neumann et une condition intégrale. On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel fractionnaire de Sobolev.

Cette étude menée principalement à l'aide de la méthode des inégalités d'énergie.

Ainsi, pour étudier le problème posé, nous introduisons les espaces fonctionnels nécessaires.

On peut ramène le problème (4.12) – (4.15) à l'équation opérationnelle suivante :

$$Lu = f. \quad (4.16)$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec le domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L_2(0, T, L_2(0, 1)) := L^2(\Omega)$ telles que ${}^R_0\partial_t^\sigma u, u_x, u_{xx} \in L^2(\Omega)$ et u satisfait la condition (4.15); l'opérateur L est considéré de E dans $L^2(\Omega)$, où E est l'espace de Banach des fonctions (il peut être vérifié en utilisant le lemme 1.4) constitué de tous les éléments $u(x, t)$ ayant la norme finie

$$\|u\|_E^2 = \|u\|_{{}^R_0B_0^{\frac{\sigma}{2}}(\Omega)}^2,$$

et $L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments f .

Théorème 4.1 *Si $a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, où $\varepsilon \ll 1$. Alors, pour toute fonction $u \in E$, on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_E \leq q \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.17)$$

où q est une constante positive indépendante de u .

Preuve Multiplions scalairement l'équation (4.12) par le suivant Mu :

$$Mu = \int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi,$$

puis en intégrant sur le sous-domaine $\Omega^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$, où $0 \leq \tau \leq T$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} \mathcal{L}u \cdot Mu \, dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} {}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ & \quad - \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} f(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Par l'intégration par parties de la première intégrale du côté gauche de l'égalité (4.18), on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} {}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left[{}^R_0\partial_t^\sigma \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right] \cdot \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt, \end{aligned}$$

par l'application du lemme 2.8 [130, formule (2.21a)], on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} {}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left[{}^R_0\partial_t^\sigma \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right] \cdot \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \cdot \left({}^R_t\partial_T^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt. \end{aligned}$$

On peut réécrire la formule précédente comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} {}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \cdot \left({}^R_t\partial_T^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt \\ &= \left\langle {}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi, {}^R_t\partial_T^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right\rangle_{L^2(\Omega^\tau)} \\ &= : |(\mathfrak{S}_x u)|_{H_{l,r}^{\frac{\sigma}{2}}}^2. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.6 [130] et à partir du lemme 2.4 [131], on peut conclure que les semi-normes des espaces $H_{l,r}^{\frac{\sigma}{2}}$ et ${}^R H_0^{\frac{\sigma}{2}}$ sont équivalentes, alors on obtient

$$|(\mathfrak{S}_x u)|_{H_{l,r}^{\frac{\sigma}{2}}}^2 \cong \left\| {}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 := |u|_{{}^R B_0^{\frac{\sigma}{2}}(\Omega)}^2.$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} {}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} u(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\
 = & \quad : \quad |(\mathfrak{S}_x u)|_{RH_{l,r}^{\frac{\sigma}{2}}}^2 \\
 \cong & \quad \left\| {}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
 = & \quad \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Utilisant une intégration par parties sur la deuxième intégrale du côté gauche de l'égalité (4.18) en tenant compte des conditions (4.13) – (4.15), on obtient

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\
 = & - \int_0^\tau \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\
 & - \int_{\Omega^\tau} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt \\
 = & - \int_0^\tau \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \left(a(x, t) u(x, t) \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\
 & + \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial a}{\partial x} u(x, t) \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt + \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dxdt \\
 = & \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{\partial a}{\partial x} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
 & + \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dxdt \\
 = & \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt. \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en appliquant l' ε -inégalité de Cauchy sur le côté droit de l'égalité

(4.18), on aura

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} f(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dx dt \\
 = & - \int_0^\tau \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) \left(\int_0^x f(\xi, t) d\xi \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\
 & + \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x f(\xi, t) d\xi \right) \cdot \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dx dt \\
 \leq & \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x f(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt \\
 \leq & \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dx dt. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Substituons (4.19) – (4.21) en (4.18), on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} \left({}_0^R \partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right)^2 dx dt + \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dx dt \\
 \leq & \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dx dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt \\
 \leq & \int_{\Omega^\tau} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) (u(x, t))^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

comme $a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\tau} \left({}_0^R \partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right)^2 dx dt \\
 & + \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dx dt \\
 \leq & \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dx dt, \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

à partir de (1.10), on a

$$\int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dx dt,$$

Donc, (4.22) devient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right)^2 dxdt \\ & + 2 \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt. \end{aligned}$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right)^2 dxdt + \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\ & \leq q_1 \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt, \end{aligned} \tag{4.23}$$

où

$$q_1 = \frac{1}{2\varepsilon \min \left(1, 2 \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)}.$$

Comme la partie droite de (4.23) est indépendante de τ , passant au supremum du côté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0; T]$, on obtient l'inégalité désirée, où $q = (q_1)^{\frac{1}{2}}$. ■

Proposition 4.1 *L'opérateur L de E dans $L^2(\Omega)$ est fermable.*

Théorème 4.1 est valide pour une solution forte, c.-à-d que l'on peut prolonger à l'inégalité

$$\|u\|_E \leq q \|\bar{L}u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \tag{4.24}$$

Par conséquent, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 4.1 *Une solution du problème (4.12) – (4.15) est unique, si elle existe, et dépend continûment de $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$.*

Corollaire 4.2 *L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est égale à la fermeture $\overline{R(\bar{L})}$ de $R(\bar{L})$.*

4.4 Existence de la solution

Pour montrer l'existence de la solution, on fait la preuve que $R(L)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour tout $u \in E$ et pour tout arbitraire $f \in L^2(\Omega)$.

Théorème 4.2 *Si les conditions du théorème 4.1 sont satisfaites. Donc pour chaque $\omega \in L^2(\Omega)$ et $u \in E$, si on a*

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt = 0, \quad (4.25)$$

alors ω s'annule presque partout dans Ω , ce qui implique que le problème (4.12) – (4.15) admette une solution forte unique $u = \bar{L}^{-1}f$.

Preuve Le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est défini par

$$(Lu, \omega)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dx dt,$$

On peut reformuler l'égalité (4.25) comme suit :

$$\int_{\Omega} {}^R_0\partial_t^\alpha u(x, t) \cdot \omega dx dt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \omega dx dt. \quad (4.26)$$

Pour assurer que ${}^R_0\partial_t^\sigma u(x, t) = {}^C_0\partial_t^\sigma u(x, t)$, on met

$$u(x, t) = \mathfrak{S}_t(z(x, \tau)) = \int_0^t z(x, \tau) d\tau,$$

où $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right), {}^R_0\partial_t^\sigma z \in L^2(\Omega)$ et z satisfait aux mêmes conditions (4.13) – (4.15).

À partir de (4.26), on obtient l'égalité

$$\int_{\Omega} {}^R_0\partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_t(z(x, \tau))) \cdot \omega dx dt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right) \omega dx dt. \quad (4.27)$$

Maintenant, on est en train de déterminer la fonction ω en se servant de l'égalité (4.27), on donne ω en fonction de z comme suit :

$$\omega = \int_x^1 \left(\int_0^\xi (\mathfrak{S}_t(z(\eta, \tau)) d\tau) d\eta \right) d\xi. \quad (4.28)$$

Donc, $\omega \in L^2(\Omega)$.

Remplaçant ω dans (4.27) par sa représentation (4.28) ; et suite à une intégration par parties de chaque terme dans (4.27) en tenant compte des conditions de la fonction z , on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}_0^R \partial_t^\sigma (\mathfrak{S}_t(z(x, \tau))) \cdot \omega dx dt \\ & \cong \int_{\Omega} \left({}_0^R \partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau \right) d\xi \right)^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.29)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right) \omega dx dt \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right) \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi (\mathfrak{S}_t(z(\eta, \tau)) d\tau) d\eta \right) d\xi \right) dx dt \\ & = \int_0^T \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi (\mathfrak{S}_t(z(\eta, \tau)) d\tau) d\eta \right) d\xi \right) \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z)}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z)}{\partial x} \right) \left(\int_0^x (\mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau) d\xi \right) dx dt \\ & = \int_0^T \left(a \int_0^x (\mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau) d\xi \right) (\mathfrak{S}_t(z)) \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\ & \quad - \int_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial x} (\mathfrak{S}_t(z)) \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z) \right) dx dt - \int_{\Omega} a (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial a}{\partial x} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z) \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z) \right)^2 dx dt \\ & \quad - \int_{\Omega} a (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau \right)^2 dx dt - \int_{\Omega} a(x, t) (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.30)$$

En combinant (4.29) et (4.30), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right) \right)^2 dxdt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right)^2 dxdt - \int_{\Omega} a(x, t) (\mathfrak{S}_t(z))^2 dxdt, \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

estimons le côté droit de (4.31), il se cède

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right) \right)^2 dxdt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right)^2 dxdt - \int_{\Omega} a(x, t) (\mathfrak{S}_t(z))^2 dxdt \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a(x, t) \right] (\mathfrak{S}_t z(\xi, \tau))^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

Quand $a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, il parvient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\sigma}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right) \right)^2 dxdt \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a(x, t) \right] (\mathfrak{S}_t z(\xi, \tau))^2 dxdt \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

ceci implique que $z = 0$ sur Ω , il s'ensuit que $\omega = 0$ sur Ω . Ce qui achève la démonstration du théorème 2. ■

Chapitre 5

Existence et unicité d'une solution faible d'un problème mixte pour une équation hyperbolique non linéaire avec une condition intégrale

5.1 Introduction

Dans [96], Bouziani a traité l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données de la solution forte pour un problème mixte combinant une condition de Neumann avec une condition intégrale pour une équation de viscosité. Ceci m'a motivé pour étudier dans T-E. Oussaeif, A. Bouziani [137] un tel problème non local mixte pour une équation hyperbolique non linéaire dont le terme non linéaire $f(x, t, u, u_x)$ est ajouté au côté droit de l'équation étudiée avec une condition de type intégrale (1).

5.2 Formulation du problème non linéaire

Dans le domaine $Q = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x < \beta, 0 < t < T\}$ où $\alpha, \beta > 0, T > 0$, on considère le problème de l'inconnue $\theta(x, t), (x, t) \in \bar{Q}$:

$$\mathcal{L}\theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + c(x, t)\theta = h(x, t, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}), \quad (5.1)$$

A l'équation (5.1), on associe les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \ell_1 \theta &= \theta(x, 0) = \Phi(x), & x \in (\alpha, \beta), \\ \ell_2 \theta &= \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = \Psi(x), & x \in (\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (5.2)$$

la condition au bord de type Neumann :

$$\frac{\partial \theta(\alpha, t)}{\partial x} = \mu(t), \quad t \in (0, T), \quad (5.3)$$

et la condition intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \theta(x, t) dx = E(t), \quad t \in (0, T), \quad (5.4)$$

où $\Phi, \Psi, \mu, E, a, b, c$ et h sont des fonctions données.

Conditions C(1). Pour tout $(x, t) \in \bar{Q}$, on suppose que :

$$\begin{aligned} c_0 &\leq a(x, t) \leq c_1, \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \leq c_2, \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} \leq c_3, c_4 \leq b(x, t) \leq c_5, \\ c_6 &\leq \frac{\partial b(x, t)}{\partial t} \leq c_7, \frac{\partial b(x, t)}{\partial x} \leq c_8, \frac{\partial^2 b(x, t)}{\partial t^2} \leq c_9, \frac{\partial^2 b(x, t)}{\partial x \partial t} \leq c_{10}, c(x, t) \leq c_{11}. \end{aligned}$$

Conditions C(2). Pour tout $(x, t) \in \bar{Q}$, on suppose que :

$$\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x \partial t} \leq c_{12}, \frac{\partial^2 b(x, t)}{\partial x^2} \leq c_{13}, \frac{\partial^3 b(x, t)}{\partial x \partial t^2} \leq c_{14}.$$

Dans les conditions **C(1)**, **C(2)** et dans le reste du chapitre, on suppose que $c_i, i = 0, \dots, 18$ sont des constantes positives.

Conditions C(3). Les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ vérifient les conditions de compatibilités suivantes :

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{dx} = \mu(0), \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x)dx = E(0), \frac{d\Psi(\alpha)}{dx} = \mu'(0), \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(x)dx = E'(0).$$

Il est commode de ramener les conditions aux limites non homogènes à des conditions homogènes, en introduisant une nouvelle fonction inconnue u définie par :

$$u(x, t) = \theta(x, t) + K(x, t),$$

où

$$K(x, t) = \frac{(x - \alpha)}{2(\beta - \alpha)} \left\{ (3x - \alpha - 2\beta)\mu(t) - \frac{6(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)^2} E(t) \right\}.$$

On peut vérifier facilement que la fonction $K(x, t)$ satisfait aux conditions (5.3), (5.4). Cette transformation nous emmène à l'étude du problème suivant :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t)u = f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}), \quad (5.5)$$

$$\ell_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.6)$$

$$\ell_2 u = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varkappa(x),$$

$$\frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.7)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x, t)dx = 0. \quad (5.8)$$

Où

$$f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = h(x, t, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \mathcal{L}K(x, t),$$

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \ell_1 K,$$

$$\varkappa(x) = \Psi(x) + \ell_2 K.$$

De les conditions $\mathbf{C(3)}$, on obtient les conditions de compatibilité suivantes :

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{dx} = 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx = 0, \quad \frac{d\mathcal{K}(\alpha)}{dx} = 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{K}(x)dx = 0.$$

Ainsi, au lieu de rechercher la solution θ du problème (5.1) – (5.4), on établit l'existence et l'unicité de la solution u du problème (5.5) – (5.8). La solution θ sera tout simplement donnée par :

$$\theta(x, t) = u(x, t) - K(x, t).$$

On doit assumer qu'il existe une constante positive k telle que :

$$|f(x, t, u_1, v_1) - f(x, t, u_2, v_2)| \leq k (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|), \quad (x, t) \in Q. \quad (\mathbf{H}_1)$$

5.3 L'inégalité d'énergie et ses conséquences pour le problème linéaire

Commençons par l'étude du problème linéaire associé ; précisément on considère l'équation :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (5.9)$$

avec les conditions (5.6) – (5.8).

La solution du problème (5.9), (5.6) – (5.8) peut être considérée comme une solution du problème sous forme opérationnelle

$$Lu = (f, \varphi, \mathcal{K}),$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$ est considéré de B dans F , où B est l'espace de Banach des fonctions $\mathfrak{S}_x u \in L^2(Q)$, où $\mathfrak{S}_x u = \int_{\alpha}^x u(\xi, \cdot) d\xi$, dont la norme :

$$\|u\|_B = \left\{ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \|u\|_{C(0,T;L^2(\alpha,\beta))}^2 + \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{C(0,T;L^2(\alpha,\beta))}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi, \varkappa)$ dont la norme :

$$\|Lu\|_F = \left\{ \|\mathfrak{S}_x f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \|\mathfrak{S}_x \varkappa\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est finie aussi.

Le domaine $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble de toutes les fonctions u telles que $\mathfrak{S}_x u \in L^2(Q)$, $\mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}$, $\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(Q)$ et u vérifie (5.7) ainsi que (5.8).

Théorème 5.1 *Soient les conditions **C(1)** satisfaites, alors on a l'estimation*

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_F, \quad (5.10)$$

où C est une constante positive indépendante de u , $u \in D(L)$.

Preuve Appliquant l'opérateur \mathfrak{S}_x à l'équation (5.9) en tenant compte de la condition (5.7), et en multipliant l'équation obtenue par $2\mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}$ puis l'intégrant sur $Q^\tau := (\alpha, \beta) \times (0, \tau)$, où $0 \leq \tau \leq T$, on trouve

$$\begin{aligned} & 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - 2 \int_{Q^\tau} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ & - 2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x (cu) \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ & = 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x f \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Par l'intégration par parties des trois premières intégrales dans le côté gauche de (5.11), on obtient

$$2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_\alpha^\beta \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial t} \right)^2 dx - \int_\alpha^\beta (\mathfrak{S}_x \varkappa)^2 dx, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} -2 \int_{Q^\tau} a \frac{\partial u}{\partial x} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt & = \int_\alpha^\beta a(x, \tau) u^2(x, \tau) dx - \int_\alpha^\beta a(x, 0) \varphi^2 dx \\ & - \int_{Q^\tau} \frac{\partial a}{\partial t} u^2 dx dt + 2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial a}{\partial x} u \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \tag{5.14} \\
 = & 2 \int_{Q^\tau} b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_\alpha^\beta \frac{\partial b(x, \tau)}{\partial t} u^2(x, \tau) dx \\
 & - \int_\alpha^\beta \frac{\partial b(x, 0)}{\partial t} \varphi^2 dx - \int_{Q^\tau} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} u^2 dxdt \\
 & + 2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt + 2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} u \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt.
 \end{aligned}$$

En substituant (5.12) – (5.14) dans (5.11), on aura

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{Q^\tau} b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \tag{5.15} \\
 & + \int_\alpha^\beta \left\{ \left(a + \frac{\partial b}{\partial t} \right) u^2(x, \tau) + \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \\
 = & 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x f \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt + \int_\alpha^\beta \left\{ \left(a(x, 0) + \frac{\partial b(x, 0)}{\partial t} \right) \varphi^2 + (\mathfrak{S}_x \varphi)^2 \right\} dx \\
 & + \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \right) u^2 dxdt - 2 \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} \right) u \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
 & - 2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt - 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x (c(x, t)u) \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt.
 \end{aligned}$$

L'estimation de la première et la troisième intégrale dans la partie droite de (5.15), en appliquant les inégalités élémentaires, donne :

$$2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x f \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \leq \int_{Q^\tau} (\mathfrak{S}_x f)^2 dxdt + \int_{Q^\tau} \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt, \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} \right) u \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \tag{5.17} \\
 \leq & 2 \int_{Q^\tau} \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\} u^2 dxdt \\
 & + \int_{Q^\tau} \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \tag{5.18} \\
 & \leq c_4 \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{c_4} \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x (cu) \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \tag{5.19} \\
 & \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \int_{Q^\tau} c^2 u^2 dx dt + \int_{Q^\tau} \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Donc, par l'emploi des formules (5.16) – (5.19) et les conditions **C(1)** dans (5.15), on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt + \|u(\bullet, \tau)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 & \leq c_{15} \left\{ \int_0^\tau \|\mathfrak{S}_x f\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt + \|\varphi\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \|\mathfrak{S}_x \mathcal{K}\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\} \\
 & + c_{16} \int_0^\tau \left\{ \|u\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\} dt, \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

où

$$c_{15} = \frac{\max(1, c_1 + c_7)}{\min(c_4, c_0 + c_5, 1)}$$

et

$$c_{16} = \frac{\max(c_2 + c_9 + c_3^2 + c_{10}^2, 3 + c_8^2/c_4)}{\min(c_4, c_0 + c_5, 1)}.$$

L'élimination de la dernière intégrale sur la partie droite de l'inégalité (5.20) en utilisant le lemme de Gronwall, donne :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt + \|u(\bullet, \tau)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \tag{5.21} \\
 & \leq c_{17} \left\{ \int_0^T \|\mathfrak{S}_x f\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt + \|\varphi\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \|\mathfrak{S}_x \mathcal{K}\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\},
 \end{aligned}$$

où

$$c_{17} = c_{15} \exp(c_{16}T).$$

Comme le côté droit de (5.21) est indépendant de τ , on passe au supremum du côté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0; T]$, alors on obtient l'inégalité désirée (5.10), où $C = c_{17}^{\frac{1}{2}}$. ■

On montre que $L : B \rightarrow F$ avec le domaine $D(L)$ a une fermeture, *i.e.*, la fermeture du graphe $G(L) \subset B \times F$ de L est un graphe $G(\bar{L}) = \overline{G(L)}$ de \bar{L} , la fermeture de L .

Proposition 5.1 *L'opérateur L de B dans F admet une fermeture.*

Preuve Supposant que $u_n \in D(L)$ est une suite telle que :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{dans } B \quad (5.22)$$

et

$$Lu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (f, \varphi, \varkappa) \quad \text{dans } F, \quad (5.23)$$

il nous faut montrer que $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ et $\varkappa \equiv 0$.

De (5.22) on a

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q).$$

D'après la continuité de la dérivation de $\mathcal{D}'(Q)$ dans $\mathcal{D}'(Q)$, on obtient

$$\mathcal{L}u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (5.24)$$

Par ailleurs, il vient de (5.23) que

$$\mathfrak{S}_x \mathcal{L}u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathfrak{S}_x f \quad \text{dans } L^2(Q),$$

alors

$$\mathcal{L}u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (5.25)$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on conclut de (5.24) et (5.25) que $f \equiv 0$.

De (5.23) on a

$$\ell_1 u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \quad \text{dans } L^2(\alpha, \beta). \quad (5.26)$$

D'après la norme de l'espace B , on trouve

$$\|\ell_1 u_n\|_{L^2(\alpha, \beta)} \leq \|u_n\|_B, \quad \forall n,$$

alors

$$\ell_1 u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{dans } L^2(\alpha, \beta). \quad (5.27)$$

De (5.26), (5.27), et en vertu de l'unicité de la limite dans $L^2(\alpha, \beta)$, on conclut que $\varphi \equiv 0$. De façon analogue, on démontre que $\varkappa \equiv 0$. ■

Définition 5.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = (f, \varphi, \varkappa),$$

est dite solution forte du problème (5.9), (5.6) – (5.8).

L'inégalité (5.10) peut être prolongée à \bar{L} .

Corollaire 5.1 *Sous les conditions du théorème 5.1, il existe une constante $C > 0$ indépendante de u telle que*

$$\|u\|_B \leq C \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}).$$

Donc, la solution forte du problème (5.9), (5.6) – (5.8) est unique, si elle existe, et dépend continûment de $\mathcal{F} \in F$.

Corollaire 5.2 *L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est égale à la fermeture $\overline{R(\bar{L})}$ de $R(L)$.*

5.4 L'existence de la solution pour le problème linéaire

Théorème 5.2 *Soient les conditions C(1) et C(2) satisfaites, alors le problème (5.9), (5.6) – (5.8) admet une solution forte unique $u = \bar{L}^{-1}(f, \varphi, \varkappa) = \overline{L^{-1}}(f, \varphi, \varkappa)$.*

Preuve Pour prouver que le problème (5.9), (5.6) – (5.8) admet une solution forte pour tout arbitraire $(f, \varphi, \varkappa) \in F$, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F , tout d'abord pour le cas particulier où L est réduit à $L_0 = (\mathcal{L}_0, \ell_1, \ell_2)$ avec le domaine $D_0(L_0) = D_0(L)$, où \mathcal{L}_0 est la partie principale de \mathcal{L} , *i.e.*,

$$\mathcal{L}_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5.28)$$

et $D_0(L) = \{u/u \in D(L) : \ell_1 u = 0 \text{ et } \ell_2 u = 0\}$. Dans ce but, on démontre la proposition suivante : ■

Proposition 5.2 *Sous les conditions du théorème 5.2. Si, pour $\mathfrak{S}_x \omega \in L^2(Q)$ et pour tout $u \in D_0(L)$, on a*

$$\int_Q \mathfrak{S}_x \mathcal{L}_0 u \cdot \mathfrak{S}_x \omega \, dx dt = 0, \quad (5.29)$$

alors ω s'annule presque partout dans Q .

Preuve On construit la fonction $\mathfrak{S}_x \omega$. En utilisant le fait que la relation (5.29) est valable pour tout $u \in D_0(L)$, on peut exprimer $\mathfrak{S}_x u$ dans une forme spécifique, soit :

$$\mathfrak{S}_x u = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t (t - \tau) \frac{\partial^2 (\mathfrak{S}_x u)}{\partial \tau^2} d\tau, & 0 \leq t \leq s, \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

avec $\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est une solution de l'équation

$$a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{S}_t^* (\mathfrak{S}_x \omega) = \int_t^T \mathfrak{S}_x \omega \, d\tau, \quad (5.31)$$

où σ est un nombre fixe dans $[\alpha, \beta]$. Donc, on a

$$\mathfrak{S}_x \omega = \mathfrak{S}_t^{*-1} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \quad (5.32)$$

Les relations (5.30) et (5.31) impliquent que u est dans $D_s(L)$, où $D_s(L)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $D(L)$ sachant que u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ s'annule au voisinage de $t \leq s$.

Si on met $s = 0$, alors u est dans $D_0(L)$. En substituant (5.28) et (5.32) dans (5.29), on trouve

$$\begin{aligned}
 & - \int_{Q_s} \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt \\
 & + \int_{Q_s} a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt \\
 & + \int_{Q_s} \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt = 0.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Intégrant par parties chaque terme de l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
 & - \int_{Q_s} \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} a(\sigma, s) \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u(\xi, s)}{\partial t^2} \right)^2 dx \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_{Q_s} a'(\sigma, t) \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt,
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_s} a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt \\
 & = \int_{Q_s} \left(a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} u \right) a(\sigma, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt \\
 & \quad + \int_{Q_s} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 a}{\partial t \partial x} u \right) a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt,
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_s} \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt \tag{5.36} \\
&= \int_{Q_s} ba(\sigma, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial b}{\partial t} a(\sigma, T) \left(\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \right)^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{Q_s} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} a(\sigma, t) \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt - \\
&\quad \int_{Q_s} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} a(\sigma, t) + \frac{\partial b}{\partial t} a'(\sigma, t) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
&\quad + 2 \int_{Q_s} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} a(\sigma, t) \frac{\partial u}{\partial t} \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt \\
&\quad + \int_{Q_s} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} a(\sigma, t) u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt + \int_{Q_s} \frac{\partial^3 b}{\partial x \partial t^2} a(\sigma, t) u \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt.
\end{aligned}$$

Substituant (5.34) – (5.36) dans (5.33), on aura

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{a(\sigma, s)}{2} \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u(\xi, s)}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{\partial b}{\partial t} a(\sigma, T) \left(\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \\
&+ \int_{Q_s} ba(\sigma, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_s} \left(a'(\sigma, t) + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} a(\sigma, t) \right) \left(\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt \\
&+ \int_{Q_s} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} a(\sigma, t) + \frac{\partial b}{\partial t} a'(\sigma, t) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
&- \int_{Q_s} \left\{ a \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \right) u \right\} a(\sigma, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt \\
&- \int_{Q_s} \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^3 b}{\partial x \partial t^2} \right) u \right\} a(\sigma, t) \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt.
\end{aligned}$$

En vertu des conditions **C(1)** et **C(2)**, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{c_0}{2} \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + c_0 c_5 \left\| \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 \leq & \frac{1}{2} \left\{ c_2 + c_1 c_{13} + \frac{c_1^2}{2} \right\} \int_s^T \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt \\
 & + \left\{ c_1 c_9 + c_2 c_7 + \frac{c_4^2}{2c_0 c_4} + c_3^2 + 4c_{10}^2 \right\} \int_s^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt \\
 & + \left\{ \frac{c_1^2 (c_2^2 + c_9^2)}{2c_0 c_4} + c_{12}^2 + c_{14}^2 \right\} \int_s^T \|u\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Friedrichs,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 \leq & c_{18} \int_s^T \left\{ \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\} dt,
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

où

$$c_{18} = \frac{\max \left(\frac{c_2 + c_1 c_{13}}{2} + \frac{c_1^2}{4}, c_1 c_9 + c_2 c_7 + \frac{c_4^2}{2c_0 c_4} + c_3^2 + 4c_{10}^2 + \gamma \left(\frac{c_1^2 (c_2^2 + c_9^2)}{2c_0 c_4} + c_{12}^2 + c_{14}^2 \right) \right)}{\min \left(\frac{c_0^2}{2}, c_0 c_5 \right)}$$

et γ est la constante de l'inégalité Friedrichs.

L'inégalité (5.37) est indispensable à la preuve. Pour l'utiliser, on introduit une nouvelle fonction z définie par la formule

$$z(x, t) = \mathfrak{S}_t^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \int_t^T \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} d\tau.$$

Alors, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = z(x, s) - z(x, t)$, $\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = z(x, s)$ et on a

$$\int_s^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt \leq 2 \int_s^T \|z(x, t)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt + (T - s) \|z(x, s)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2.$$

Par conséquent, (5.37) devient

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + (1 - 2c_{18}(T - s)) \|z(x, s)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\ & \leq 2c_{18} \int_s^T \left\{ \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \|z(x, t)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Donc, si $s_0 > 0$ et $1 - 2c_{18}(T - s) = 1/2$, alors (5.38) implique

$$\left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \|z(x, s)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \leq 4c_{18} \int_s^T \left\{ \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \|z\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right\} dt. \quad (5.39)$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$ on note l'intégrale sur la partie droite de (5.39) par $y(s)$, alors on trouve

$$-\frac{dy(s)}{ds} \leq 4c_{18}y(s),$$

et, par conséquent

$$-\frac{d}{ds} (y(s) \exp(4c_{18}s)) \leq 0. \quad (5.40)$$

Il résulte de (5.40) que $y(s) = 0$, et donc $\mathfrak{S}_x \omega \equiv 0$ presque partout dans Q_{T-s_0} . En procédant dans cette étape pas à pas sur le long de rectangle de côté s_0 , on montre que $\mathfrak{S}_x \omega \equiv 0$, et donc $\omega \equiv 0$ presque partout dans Q . ■

Lemme 5.1 *Sous les conditions de la proposition 5.2, la fonction $\mathfrak{S}_x u$ définie par (5.30) et (5.31) a des dérivées par rapport à t jusqu'au troisième ordre appartenant à l'espace $L^2(Q_s)$, où $Q_s = (\alpha, \beta) \times (s, T)$.*

Preuve Est similaire à la preuve du lemme 1 dans Bouziani [53]. ■

Maintenant, passant à la démonstration du théorème 5.2. Pour cette fin, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F .

On suppose que, pour certain $W = (\omega, \omega_1, \omega_2) \in F$ soit orthogonale à $R(L_0)$, alors

$$\int_Q \mathfrak{S}_x \mathcal{L}_0 u \cdot \mathfrak{S}_x \omega \, dx dt + \int_\alpha^\beta \ell_1 u \omega_1 \, dx + \int_\alpha^\beta \mathfrak{S}_x \ell_2 u \mathfrak{S}_x \omega_2 \, dx = 0. \quad (5.41)$$

Il faut prouver que $W \equiv 0$. Mettant $u \in D_0(L)$ dans (5.41), on obtient

$$\int_Q \mathfrak{S}_x \mathcal{L}_0 u \cdot \mathfrak{S}_x \omega \, dx dt = 0, \quad u \in D_0(L).$$

Alors la proposition 5.2 implique que $\omega \equiv 0$. Donc (5.41) prend la forme

$$\int_\alpha^\beta \ell_1 u \omega_1 \, dx + \int_\alpha^\beta \mathfrak{S}_x \ell_2 u \mathfrak{S}_x \omega_2 \, dx = 0.$$

Puisque les ensembles des valeurs des opérateurs ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendants et les ensembles des valeurs ℓ_1 et ℓ_2 sont partout denses dans $L^2(\alpha, \beta)$. Alors on trouve que $\omega_1 \equiv 0$ et $\omega_2 \equiv 0$. Donc $W \equiv 0$, ce qui implique que $\overline{R(L_0)} = F$.

Considérons maintenant le cas général. Du fait que $R(L_0)$ est dense dans F , ainsi que $L - L_0 = (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0, \ell_1, \ell_2)$ sont des fonctions continues de B dans F , on conclut qu'on peut prouver que $R(L)$ est dense dans F au moyen de la méthode de continuation le long du paramètre. On ne va pas décrire l'application de cette méthode car elle est analogue à celle utilisée dans [140]. Cela achève la démonstration du théorème 5.2.

5.5 Existence et unicité d'une solution faible du problème non linéaire

Cette section est consacrée à la preuve de l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème (5.5) – (5.8). On considère le problème auxiliaire suivant avec l'équation homogène :

$$\mathcal{L}w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + c(x, t)w = 0, \quad (5.42)$$

$$\ell_1 w = w(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.43)$$

$$\ell_2 w = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \varkappa(x),$$

$$\frac{\partial w(\alpha, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.44)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(x, t) dx = 0. \quad (5.45)$$

Si u est une solution du problème (5.5) – (5.8) et w est une solution du problème (5.42) – (5.45), puis $y = u - w$ satisfait

$$\mathcal{L}y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + c(x, t)y = G \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (5.46)$$

$$\ell_1 y = y(x, 0) = 0, \quad (5.47)$$

$$\ell_2 y = \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial y(\alpha, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.48)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} y(x, t) dx = 0. \quad (5.49)$$

où $G(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x}) = f(x, t, y + w, \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x})$. Comme la fonction f , la fonction G satisfait aussi la condition (H_1) , alors il existe une constante positive k telle que

$$|G(x, t, u_1, v_1) - G(x, t, u_2, v_2)| \leq k(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|) \quad (x, t) \in Q. \quad (\mathbf{H}_2)$$

Conformément aux résultats de la section précédente, on déduit que le problème (5.42) – (5.45) admet une solution unique qui dépend continûment des conditions initiales (5.44). Par conséquent, il reste à résoudre le problème (5.46) – (5.49), alors on doit prouver que le problème (5.46) – (5.49) a une solution unique faible.

Tout d'abord, on propose le concept de la solution étudiée.

Soit $v = v(x, t)$ n'importe quelle fonction de $\widetilde{C}^1(Q)$, l'espace de fonctions v appartenant à $C^1(Q)$ ayant $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ continues dans Q .

On doit calculer l'intégrale $\int_Q G \mathfrak{S}_x v dx dt$, pour cela on suppose que $y, v \in \widetilde{C}^1(Q)$, $y(x, 0) = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0$, $v(x, T) = 0$ et $\int_\alpha^\beta y(x, t) dx = \int_\alpha^\beta v(x, t) dx = 0$. En utilisant les conditions sur y et v , on trouve

$$\int_Q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathfrak{S}_x v dx dt = - \int_Q v \mathfrak{S}_x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dx dt, \quad (5.50)$$

$$- \int_Q \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) \mathfrak{S}_x v dx dt = \int_Q v a(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} dx dt, \quad (5.51)$$

$$- \int_Q \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right) \mathfrak{S}_x v dx dt = - \int_Q b(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} dx dt, \quad (5.52)$$

$$\int_Q c(x, t) y \mathfrak{S}_x v dx dt = - \int_Q v \mathfrak{S}_x (cy) dx dt, \quad (5.53)$$

$$\int_Q G \mathfrak{S}_x v dx dt = - \int_Q v \mathfrak{S}_x G dx dt. \quad (5.54)$$

Il résulte alors de (5.50) – (5.54) que

$$A(y, v) = - \int_Q v \mathfrak{S}_x G dx dt, \quad (5.55)$$

où

$$A(y, v) = - \int_Q v \mathfrak{S}_x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dxdt + \int_Q va(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} dxdt - \int_Q b(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} dxdt - \int_Q v \mathfrak{S}_x (c(x, t)y) dxdt.$$

Définition 5.2 Une fonction $y \in L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))$ est dite une solution faible du problème (5.46) – (5.49) si (5.48) et (5.55) sont réalisées.

On construit une suite récurrente de la façon suivante :

Commençons par $y^{(0)} = 0$, la suite $\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est définie comme suit : étant donné l'élément $y^{(n-1)}$, ensuite pour $n = 1, 2, \dots$

On va résoudre le problème :

$$\frac{\partial^2 y^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} \right) + c(x, t)y^{(n)} = G \left(x, t, y^{(n-1)}, \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x} \right), \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial y^{(n)}(x, 0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial y^{(n)}(\alpha, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.58)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} y^{(n)}(x, t) dx = 0. \quad (5.59)$$

Le théorème 5.2 affirme que, pour n fixé, chaque problème (5.56) – (5.59) a une solution unique $y^{(n)}(x, t)$.

Si on pose $Z^{(n)}(x, t) = y^{(n+1)}(x, t) - y^{(n)}(x, t)$, alors on a le nouveau problème

$$\frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right) + c(x, t)Z^{(n)} = P^{(n-1)}(x, t), \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} Z^{(n)}(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial Z^{(n)}(x, 0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial Z^{(n)}(\alpha, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.62)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} Z^{(n)}(x, t) dx = 0. \quad (5.63)$$

Où

$$P^{(n-1)}(x, t) = G\left(x, t, y^{(n)}, \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x}\right) - G\left(x, t, y^{(n-1)}, \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x}\right).$$

Lemme 5.2 *On suppose que la condition (H_2) soit satisfaite. Alors, pour le problème linéaire (5.60) – (5.63), on a l'estimation a priori*

$$\|Z^{(n)}\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))} \leq \sqrt{T} g^* \|Z^{(n-1)}\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))}, \quad (5.64)$$

où g^* est une constante positive donnée par

$$g^* = \exp\left(\max\left(\frac{c_2 + c_9}{2}, \frac{(\beta - \alpha)^2 c_{11}^2}{4c_4}\right) T\right) \frac{(8c_{17}(\beta - \alpha)^2 + 1) k^2}{\min\left(1, \frac{c_0 + c_6}{2}\right)}.$$

Preuve Appliquant l'opérateur \mathfrak{S}_x à l'équation (5.60) en tenant compte des conditions (5.61) et (5.63), multipliant l'égalité obtenue par $2\mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t}$ puis en intégrant sur $Q^\tau := (\alpha, \beta) \times (0, \tau)$, où $0 \leq \tau \leq T$, on trouve

$$\begin{aligned} & 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial t^2} \mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} dx dt - 2 \int_{Q^\tau} a(x, t) \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} dx dt \\ & - 2 \int_{Q^\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(b(x, t) \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right) \mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} dx dt \\ & + 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x (c(x, t) Z^{(n)}) \mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} dx dt \\ & = 2 \int_{Q^\tau} \mathfrak{S}_x P^{(n-1)} \mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Une intégration standard par parties de chaque terme dans (5.65) avec l'utilisation de condition

C(1), en suivant la même méthode de la section 3, donne

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt + \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial Z^{(n)}(x, \tau)}{\partial \tau} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 & + \left\| Z^{(n)}(x, \tau) \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 & \leq c_{17} \int_0^\tau \left\| \mathfrak{S}_x P^{(n-1)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 dt,
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

à la lumière de l'inégalité précédente, on a

$$\left\| \mathfrak{S}_x P^{(n-1)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \leq 4(\beta - \alpha)^2 \left\| P^{(n-1)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2.$$

Ainsi, en vertu de la condition H_2 , on aura

$$\begin{aligned}
 & 4(\beta - \alpha)^2 \left(\int_{Q^\tau} (P^{(n-1)})^2 dx dt \right) \\
 & \leq 4(\beta - \alpha)^2 k^2 \int_{Q^\tau} \left(\left| Z^{(n-1)}(x, t) \right| + \left| \frac{\partial Z^{(n-1)}(x, t)}{\partial x} \right| \right)^2 dx dt \\
 & \leq 8(\beta - \alpha)^2 k^2 \int_0^\tau \left(\left\| Z^{(n-1)}(\bullet, t) \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial Z^{(n-1)}(\bullet, t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right) dt.
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

En substituant (5, 67) dans (5.66), on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{B_2^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta)}^2 + \left\| Z^{(n)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 & \leq 8c_{17} (\beta - \alpha)^2 k^2 \int_0^\tau \left(\left\| Z^{(n-1)}(\bullet, t) \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial Z^{(n-1)}(\bullet, t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right) dt.
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

D'une autre part, en appliquant l'opérateur \mathfrak{S}_x à l'équation (5.60), on trouve

$$\mathfrak{S}_x \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial t^2} - \left(a(x, t) \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(b(x, t) \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right) + \mathfrak{S}_x (c(x, t) Z^{(n)}) = \mathfrak{S}_x (P^{(n-1)}).$$

Multipliant l'égalité obtenue par $-\frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x \partial t}$, intégrant sur $Q^\tau := (\alpha, \beta) \times (0, \tau)$, où $0 \leq \tau \leq T$, et

en utilisant les conditions (5.61), (5.62) et (5.63), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{c_0 + c_6}{2} \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
& + c_4 \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
\leq & \frac{c_2 + c_9}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{c_{11}^2}{2\varepsilon} \int_0^\tau \|Z^{(n)}\|_{B_2^1(\alpha, \beta)}^2 \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|P^{(n-1)}\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2, \tag{5.69}
\end{aligned}$$

où on a

$$\|Z^{(n)}\|_{B_2^1(\alpha, \beta)}^2 \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \|Z^{(n)}\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2, \tag{5.70}$$

et par l'utilisation de (5.67) et (5.70), l'inégalité (5.69) devient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{c_0 + c_6}{2} \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
& + c_4 \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
\leq & \frac{c_2 + c_9}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{(\beta - \alpha)^2 c_{11}^2}{4\varepsilon} \int_0^\tau \|Z^{(n)}\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
& + k^2 \int_0^\tau \left(\|Z^{(n-1)}(\bullet, t)\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial Z^{(n-1)}(\bullet, t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right) dt \tag{5.71}
\end{aligned}$$

En combinant (5.68) avec (5.71), et en mettant $\varepsilon = c_4$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial t} \right\|_{B_2^1(\alpha, \beta)}^2 + \frac{c_4}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 Z^{(n)}}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 & + \left\| Z^{(n)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{c_0 + c_6}{2} \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 \leq & \frac{c_2 + c_9}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \frac{(\beta - \alpha)^2 c_{11}^2}{4c_4} \int_0^\tau \left\| Z^{(n)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \\
 & + (8c_{17}(\beta - \alpha)^2 + 1) k^2 \int_0^\tau \left(\left\| Z^{(n-1)}(\bullet, t) \right\|_{H^1(\alpha, \beta)}^2 \right) dt, \tag{5.72}
 \end{aligned}$$

Après avoir éliminé les trois premiers termes du côté gauche de (5.72), et à l'aide du lemme de Gronwall, il en résulte

$$\begin{aligned}
 & \left(\left\| Z^{(n)} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 + \left\| \frac{\partial Z^{(n)}}{\partial x} \right\|_{L^2(\alpha, \beta)}^2 \right) \\
 \leq & g^* \left\| Z^{(n-1)} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))}^2, \tag{5.73}
 \end{aligned}$$

où

$$g^* = \exp \left(\max \left(\frac{c_2 + c_9}{2}, \frac{(\beta - \alpha)^2 c_{11}^2}{4c_4} \right) T \right) \frac{(8c_{17}(\beta - \alpha)^2 + 1) k^2}{\min \left(1, \frac{c_0 + c_6}{2} \right)},$$

ensuite, en intégrant l'inégalité (5, 73) sur l'intervalle $(0, T)$, on obtient

$$\left\| Z^{(n)} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))}^2 \leq T g^* \left\| Z^{(n-1)} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))}^2. \tag{5.74}$$

■

À partir des critères de convergence des séries, on voit que la série $\sum_{n=1}^\infty Z^{(n)}$ est convergente si $Tg^* < 1$, c'est le cas où

$$k < \sqrt{\frac{\min \left(1, \frac{c_0 + c_6}{2} \right)}{T \exp \left(\max \left(\frac{c_2 + c_9}{2}, \frac{(\beta - \alpha)^2 c_{11}^2}{4c_4} \right) T \right) (8c_{17}(\beta - \alpha)^2 + 1)}}.$$

Comme $Z^{(n)}(x, t) = y^{(n+1)}(x, t) - y^{(n)}(x, t)$, alors la suite $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$y^{(n)}(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} Z^{(i)} + y^{(0)}(x, t),$$

est convergente vers un élément $y \in L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))$.

On doit montrer que la fonction limite y est une solution du problème en cours d'étude. Pour le faire, on va montrer que y vérifie les conditions (5.48) et (5.55) comme mentionné dans la définition 3.

Donc, on considère la formulation faible du problème (5.56) – (5.59) :

$$A(y^{(n)}, v) = - \int_Q v \mathfrak{S}_x G \left(x, t, y^{(n-1)}, \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x} \right) dx dt. \quad (5.75)$$

De (5.75), on a

$$\begin{aligned} & A(y^{(n)} - y, v) + A(y, v) \\ &= - \int_Q v \left(\mathfrak{S}_x G \left(x, t, y^{(n-1)}, \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x} \right) - \mathfrak{S}_x G \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx dt \\ & \quad - \int_Q v \mathfrak{S}_x G \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy - Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} & A(y^{(n)} - y, v) \quad (5.77) \\ &= - \int_Q v \mathfrak{S}_x \left(\frac{\partial^2 y^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dx dt + \int_Q v a(x, t) \left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx dt \\ & \quad + \int_Q v \frac{\partial}{\partial t} \left[b(x, t) \left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] dx dt - \int_Q v \mathfrak{S}_x [c(y^{(n)} - y)] dx dt \\ &\leq g_2 \|v\|_{L^2(0, T; L_2(\alpha, \beta))} \left[\begin{array}{l} \|y^{(n)} - y\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))} \\ + \left\| \frac{\partial^2 y^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, T; L_2(\alpha, \beta))} \\ + \left\| \frac{\partial^2 y^{(n)}}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(0, T; L_2(\alpha, \beta))} \end{array} \right], \end{aligned}$$

où

$$g_2 = \max \left(c_5, (c_1 + c_7), \frac{(\beta - \alpha) c_{11}}{\sqrt{2}} \right),$$

et comme

$$\begin{aligned} & - \int_Q v \left(\mathfrak{S}_x G \left(x, t, y^{(n-1)}, \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x} \right) - \mathfrak{S}_x G \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx dt \\ & \leq \frac{(\beta - \alpha) c_{11}}{\sqrt{2}} k \left(\|y^{(n)} - y\|_{L^2(0,T; H^1(\alpha,\beta))} \|v\|_{L^2(0,T; L^2(\alpha,\beta))} \right). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Alors d'après (5.77), (5.78) et en passant à la limite dans (5.76) où $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$A(y, v) = - \int_{\Omega} v \mathfrak{S}_x G \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx dt.$$

Ainsi, on a prouvé le résultat suivant :

Théorème 5.3 *On suppose que la condition (H_2) soit satisfaite, et que*

$$k < \sqrt{\frac{\min \left(1, \frac{c_0 + c_6}{2} \right)}{T \exp \left(\max \left(\frac{c_2 + c_9}{2}, \frac{(\beta - \alpha)^2 c_{11}^2}{4c_4} \right) T \right) (8c_{17} (\beta - \alpha)^2 + 1)}},$$

alors le problème (5.46) – (5.49) admet une solution faible appartenant à $L^2(0, T; H^1(\alpha, b))$.

Il reste à prouver que le problème (5.46) – (5.49) admet une solution unique.

Théorème 5.4 *Sous la condition (H_2) , la solution du problème (5.46) – (5.49) est unique.*

Preuve On suppose que y_1 et y_2 dans $L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))$ sont deux solutions de (5.46) – (5.49), alors $h = y_1 - y_2$ permet que $h \in L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))$ et

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + c(x, t) h = \psi(x, t) \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial h(x, 0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial h(\alpha, t)}{\partial x} = 0, \quad (5.81)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x, t) dx = 0. \quad (5.82)$$

$$\psi(x, t) = G\left(x, t, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) - G\left(x, t, y_2, \frac{\partial y_2}{\partial x}\right).$$

En suivant la même méthode que celle utilisée pour la preuve du lemme 2, on obtient

$$\|h\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))} \leq Tg^* \|h\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))}, \quad (5.83)$$

comme $Tg^* < 1$, alors d'après (5.83) il vient

$$(1 - Tg^*) \|h\|_{L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))} \leq 0,$$

à partir de laquelle, on conclut que $y_1 = y_2$ dans $L^2(0, T; H^1(\alpha, \beta))$. ■

Chapitre 6

Un problème inverse pour une équation parabolique avec une condition au bord non locale et une condition intégrale

6.1 Formulation du problème inverse

Supposons qu'on doit déterminer simultanément la distribution de la température $u(x, t)$ ainsi que le coefficient de diffusion thermique $a(t)$ qui satisfait l'équation de la chaleur

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (6.1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.2)$$

la condition au bord non locale généralisée

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.3)$$

et la condition d'énergie (intégrale)

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.4)$$

Où le paramètre α est un nombre réel arbitraire et $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $E(t)$ sont des fonctions données.

La deuxième condition au bord non locale dans (6.3) est la particularité principale et spécifique de ce problème ; pour $\alpha = 0$, elle acquiert la forme :

$$u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.5)$$

cette dernière a été étudiée de manière approfondie dans [35], bien connues comme les conditions de Samarskii - Ionkin. En outre, l'intégrale (6.4) désigne une spécification supplémentaire d'énergie.

Le problème de détermination d'une paire $\{a(t), u(x, t)\}$ est appelé un problème inverse.

On note le domaine Q_T par

$$Q_T = \{(x, t), 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}.$$

Définition 6.1 *La paire $\{a(t), u(x, t)\}$ de la classe $C[0, T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ pour laquelle les conditions (6.1) – (6.4) sont remplies et $a(t) \geq 0$ sur l'intervalle $[0, T]$, est appelée la solution classique du problème inverse (6.1) – (6.4).*

Divers travaux sur les problèmes inverses concernant la détermination du coefficient thermique dans une équation de chaleur ont été étudiés dans [25, 28, 141].

Il est important de noter que dans les papiers [25, 28] le coefficient thermique "qui dépend du temps" est déterminé à partir de la condition intégrale. En outre, dans [23, 28] les coefficients des équations de la chaleur sont déterminés dans le cas des conditions aux limites non locales.

Dans ce chapitre [142], le paramètre de contrôle de source $a(t)$ doit être déterminé par l'énergie thermique $E(t)$, et l'existence et l'unicité de la solution classique du problème (6.1) – (6.4) sont réduites aux principes du théorème du point fixe en appliquant la méthode de Fourier.

Les conditions aux limites non locales (6.3) admettent des expansions par un système de

fonctions propres et un système de fonctions associées correspondant au problème spectral.

Ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la deuxième section, les valeurs propres et les fonctions propres du problème spectral auxiliaire et certaines de leurs propriétés sont introduites par l'application de la méthode de Fourier au problème (6, 1) – (6, 4). Dans la troisième section, l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (6, 1) – (6, 4) sont prouvées. A la fin, la dépendance continue par rapport aux données de la solution du problème inverse est démontrée dans la quatrième section.

6.2 Le problème spectral auxiliaire

L'utilisation de la méthode de Fourier pour résoudre le problème (6.1) – (6.3) conduit au problème spectral pour l'opérateur donné par l'expression différentielle et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} LX(x) \equiv X''(x) = -\lambda X(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ X'(0) = X'(1) + \alpha X(1), & X(0) = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Dans ce chapitre, on propose d'utiliser les résultats décrits dans [144] pour résoudre le problème inverse (6.1) – (6.4). Donc, afin de construire la base des fonctions propres du problème (6.6), on cite les résultats nécessaires de [144].

Considérons le cas où $\alpha \neq 0$, on cherche des valeurs propres dans l'ensemble des nombres réels.

Noter que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre, car le problème (6.6) pour cette valeur de λ ne possède que la solution triviale.

On suppose que $\lambda > 0$, alors la fonction propre devrait avoir la forme $X(x) = \sin \sqrt{\lambda}x$.

En tenant compte des conditions aux limites non locales, on trouve que le problème spectral admet deux groupes des séries des valeurs propres et des fonctions propres de l'opérateur (6, 4).

La première série des valeurs propres et des fonctions propres prend de la forme :

$$\lambda_k^{(1)} = (2k\pi)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad X_k^{(1)}(x) = \sin 2k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Pour obtenir la deuxième série, on a besoin de résoudre l'équation suivante :

$$\cos \sqrt{\lambda} + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x = 1,$$

cette dernière peut se représenter comme suit :

$$\tan \beta = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} > 0,$$

avec $\alpha \neq 0$, cette équation a des solutions β_k , satisfont les inégalités $\pi k < \beta_k < \pi k + \pi/2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, pour la valeur positive α ;

$$\frac{\alpha}{2k\pi} \left(1 - \frac{1}{2k\pi}\right) < \beta_k - \pi k < \frac{\alpha}{2k\pi} \left(1 + \frac{1}{2k\pi}\right).$$

Pour un k suffisamment grand, donc il existe une deuxième série de valeurs propres et de fonctions propres de la forme :

$$\lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2, \quad X_k^{(2)}(x) = \sin 2\beta_k x, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

Ce système est presque normé, mais il ne forme même pas une base régulière dans $L_2(0, 1)$.

Le système auxiliaire correspondant

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0(x) = X_0^{(2)}(x) (2\beta_0)^{-1} \\ X_{2k}(x) = X_k^{(1)}(x), \quad k = 1, 2, \\ X_{2k-1}(x) = \left(X_k^{(2)}(x) - X_k^{(1)}(x)\right) (2(\beta_k - \pi k))^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (6.9)$$

forme une base de Riesz dans $L_2(0, 1)$.

Sur la base de ces fonctions propres, on peut construire une base permettant une utilisation de la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème aux limites et a valeur initiale; sujet des conditions aux bords (6.3).

Pour trouver le système bi-orthogonal de $\{X_k(x), k = 0, 1, 2, \dots\}$, on considère l'opérateur

Chapitre 6. Un problème inverse pour une équation parabolique avec une condition au bord non locale et une condition intégrale

différentiel adjoint L^* de L dans le sens du produit scalaire de l'espace $L_2(0, 1)$:

$$L^*Y(x) \equiv Y''(x) = -\lambda Y(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Donc, pour deux fonctions arbitraires deux fois continûment différentiables $X(x)$ et $Y(x)$ sur $[0, 1]$ telles que :

$$X'(0) = X'(1) + \alpha X(1), \quad X(0) = 0,$$

on a

$$(Lu, v) = \int_0^1 (-X''(x)) Y(x) dx = \int_0^1 X(x) (-Y''(x)) dx = (u, L^*v),$$

qui implique

$$-X(1)Y'(1) = -X'(1)Y(1) + X'(0)Y(0), \quad (6.10)$$

à l'aide de

$$X'(0) = X'(1) + \alpha X(1),$$

on a

$$-X(1)Y'(1) = -X'(1)Y(1) + [X'(1) + \alpha X(1)] Y(0),$$

alors, on obtient

$$X'(1) [Y(0) - Y(1)] - X(1) [Y'(1) + \alpha Y(0)] = 0$$

étant donné que α est un arbitraire, on trouve

$$Y(1) = Y(0), \quad Y'(1) + \alpha Y(0) = 0.$$

Alors, le problème adjoint du (6.6) a la forme suivante :

$$\begin{cases} L^*Y(x) \equiv Y''(x) = -\lambda Y(x), & 0 \leq x \leq 1. \\ Y'(1) + \alpha Y(0) = 0, & Y(1) = Y(0). \end{cases} \quad (6.11)$$

Il est facile de vérifier que les valeurs propres de ce problème sont les mêmes que pour le problème (6.6).

Le système des fonctions propres associées au problème (6.11) est désigné par :

$$\begin{aligned} Y_k^{(2)}(x) &= C_k^{(2)} \cos(\beta_k(1-2x)), k = 0, 1, 2, \dots; \\ Y_k^{(1)}(x) &= C_k^{(1)} \cos\left(\beta_k(1-2x) + \arctan\left(\frac{\alpha}{2\pi k}\right)\right), k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} &= -2 \left(\sin\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{2\pi k}\right)\right) \right)^{-1}, k = 1, 2, \dots \\ C_k^{(2)} &= 2 \left((\sin \beta_k) \left(1 + \frac{\sin(2\beta_k)}{2\beta_k}\right) \right)^{-1}, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pour le système des fonctions (6.9), il existe un système bi-orthogonal normalisé donné par

$$\begin{cases} Y_0(x) = Y_0^{(2)}(x) (2\beta_0) \\ Y_{2k}(x) = \left(Y_k^{(2)}(x) + Y_k^{(1)}(x) \right), k = 1, 2, \dots \\ Y_{2k-1}(x) = (2(\beta_k - \pi k)) Y_k^{(2)}(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.12)$$

Il est montré dans [154] que les systèmes (6.9) et (6.12) forment des systèmes bi-orthogonaux sur l'intervalle $[0, 1]$, i.e.

$$(X_i, Y_j) = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

6.3 L'existence et l'unicité de la solution du problème inverse

On donne les hypothèses suivantes sur les données du problème (6.1) – (6.4) :

$$(A_1) : \begin{cases} (A_1)_1 : & \varphi(x) \in C^2[0, 1]; \\ (A_1)_2 : & \varphi_x(0) = \varphi_x(1) + \alpha\varphi(1), \varphi(0) = 0; \\ (A_1)_3 : & \varphi_0 \geq 0, \varphi_{2k-1} \geq 0, k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(A_2) : \begin{cases} (A_2)_1 : & E(t) \in C^1[0, T]; \\ (A_2)_2 : & E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx; \\ (A_2)_3 : & E'(t) \leq 0, \end{cases}$$

$$(A_3) : \begin{cases} (A_3)_1 : & f(x, t) \in C(\overline{Q_T}), f(\bullet, t) \in C^2[0, 1]; \\ (A_3)_2 : & f_x(0, t) = f_x(1, t) + \alpha f(1, t), f(0, t) = 0, 0 \leq t \leq T; \\ (A_3)_3 : & F_0(t) \geq 0, F_{2k-1}(t) \geq 0, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

où

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Y_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots .$$

$$F_k(t) = \int_0^1 f(x, t) Y_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Le résultat principal est présenté comme suit :

Théorème 6.1 *Soit les suppositions (A_1) – (A_3) satisfaites, alors le problème inverse (6.1)–(6.4) a une solution classique unique.*

Preuve En appliquant la procédure standard de la méthode de Fourier, toute solution de l'équation (6.1) peut être représentée sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (6.13)$$

Alors, en remplaçant $u(x, t)$ dans l'équation (6.1) par la représentation (6.13), on trouve

$$\sum_{k=0}^{\infty} u'_k(t) X_k(x) = a(t) \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k''(x) + f(x, t), \quad (6.14)$$

en multipliant l'équation (6.14) par $Y_k(x)$, et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} u_0'(t) + \lambda_0^{(2)} a(t) u_0(t) &= F_0(t), \\ u_{2k}'(t) + \lambda_k^{(1)} a(t) u_{2k}(t) &= F_{2k}(t), \quad k = 1, 2, \dots \\ u_{2k-1}'(t) + \lambda_k^{(2)} a(t) u_{2k-1}(t) &= F_{2k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En substituant la solution de ce système d'équations et la condition initiale (6.2) dans (6.13), on parvient à la solution du problème (6.1) – (6.3) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[\varphi_0 e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_0(\tau) e^{-\lambda_0^{(2)} \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \right] X_0(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{2k} e^{-\lambda_k^{(1)} \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k^{(1)} \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \right] X_{2k}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-\lambda_k^{(2)} \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \right] X_{2k-1}(x). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Sous les conditions $(A_1)_1$ et $(A_3)_1$ les séries (6.15) et ses dérivées partielles par rapport à x sont uniformément convergentes dans \overline{Q}_T puisque leurs sommes sont normalement convergentes. Par conséquent, leurs sommes $u(x, t)$ et $u_x(x, t)$ sont continues dans \overline{Q}_T .

En outre, les séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sont convergentes uniformément dans Q_T . Ainsi on a $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$. Aussi $u_t(x, t)$ est continue dans \overline{Q}_T .

De (6.4) et sous la supposition $(A_2)_1$, on obtient

$$\int_0^1 u_t(x, t) dx = E'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.16)$$

l'utilisation de (6.15) et (6.16), donne

$$a(t) = P[a(t)], \quad (6.17)$$

où

$$P[a(t)] = \frac{\left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) F_0(t) e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) F_{2k-1}(t) e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds}\right] - E'(t)}{\left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) \lambda_0^{(2)} \varphi_0 e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds}\right]}. \quad (6.18)$$

On note

$$C^+[0, T] = \{a(t) \in C[0, T] : a(t) \geq 0\}.$$

Il est facile de vérifier que sous les conditions $(A_1)_3$, $(A_2)_3$ et $(A_3)_3$,

$$P : C^+[0, T] \rightarrow C^+[0, T].$$

Montrons que P est une fonction contractante dans $C^+[0, T]$, alors on a pour $a(t), b(t) \in C^+[0, T]$,

$$|P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{K[b(t)] |N[b(t)] - N[a(t)]|}{N[a(t)] N[b(t)]} + \frac{|K[a(t)] - K[b(t)]|}{N[a(t)]}, \quad (6.19)$$

où

$$\begin{aligned} & K[a(t)] \\ &= \left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) F_0(t) e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) F_{2k-1}(t) e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds}\right] - E'(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & N[a(t)] \\ &= \left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) \lambda_0^{(2)} \varphi_0 e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds}\right]. \end{aligned}$$

Comme $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$, les estimations

$$\begin{aligned} \left| e^{-\lambda \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-\lambda \int_{\tau}^t b(s) ds} \right| &\leq \xi \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|; \\ \left| e^{-\lambda \int_0^t a(s) ds} - e^{-\lambda \int_0^t b(s) ds} \right| &\leq \xi \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|, \end{aligned}$$

sont vraies selon le théorème des accroissements finis, où $\xi = \lambda \max_{t \in [0, T]} |a(t)|$.

Ensuite, à partir de ces dernières inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} &|K[a(t)] - K[b(t)]| \\ &\leq \left(\frac{1 - \cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2} \right) F_0(t) \left| e^{-\lambda_0^{(2)} \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-\lambda_0^{(2)} \int_{\tau}^t b(s) ds} \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k - \pi k)} \right) F_{2k-1}(t) \left| e^{-\lambda_k^{(2)} \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-\lambda_k^{(2)} \int_{\tau}^t b(s) ds} \right| \right] \\ &\leq \xi c_1 \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|, \end{aligned} \tag{6.20}$$

et

$$\begin{aligned} &|N[a(t)] - N[b(t)]| \\ &\leq \left(\frac{1 - \cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2} \right) \lambda_0^{(2)} \varphi_0 \left| e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} - e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t b(s) ds} \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k - \pi k)} \right) \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} \left| e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds} - e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t b(s) ds} \right| \right] \\ &\leq \xi c_2 \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|, \end{aligned} \tag{6.21}$$

En substituant (6, 20), (6.21) et les estimations ci-dessus en (6.19), on trouve

$$\max_{t \in [0, T]} |P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \xi \left(\frac{c_3 c_2 + c_1 c_4}{c_4^2} \right) \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|, \tag{6.22}$$

où

$$c_1 = \max_{t \in [0, T]} \left(\left(\frac{1 - \cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2} \right) \lambda_0^{(2)} F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k - \pi k)} \right) \lambda_k^{(2)} F_{2k-1}(t) \right] \right);$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \left(\frac{1 - \cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2} \right) \lambda_0^{(2)} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k - \pi k)} \right) \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} \right]; \\
 c_3 &= \left(\frac{1 - \cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2} \right) F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k - \pi k)} \right) F_{2k-1}(t) \right] - E'(t); \\
 c_4 &= \left(\frac{1 - \cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2} \right) \lambda_0^{(2)} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k - \pi k)} \right) \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} \right].
 \end{aligned}$$

Alors, dans le cas où

$$\xi \left(\frac{c_3 c_2 + c_1 c_4}{c_4^2} \right) < 1,$$

l'équation (6.22) a une solution unique $a(t) \in C^+[0, T]$, d'après le théorème du point fixe de Banach.

Maintenant, on montre que la solution (a, u) obtenue pour (6.1) – (6.4) est unique. Pour cela, on suppose que la paire (b, v) est aussi une solution de (6.1) – (6.4).

Puis, à partir de la représentation (6, 15) de la solution, on a

$$\begin{aligned}
 &u(x, t) - v(x, t) \\
 &= \left[\begin{aligned} &\varphi_0 \left(e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} - e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t b(s) ds} \right) \\ &+ \int_0^t F_0(\tau) \left(e^{-\lambda_0^{(2)} \int_\tau^t a(s) ds} - e^{-\lambda_0^{(2)} \int_\tau^t b(s) ds} \right) d\tau \end{aligned} \right] X_0(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} &\varphi_{2k} e \left(-\lambda_k^{(1)} \int_0^t a(s) ds - e^{-\lambda_k^{(1)} \int_0^t b(s) ds} \right) \\ &+ \int_0^t F_{2k}(\tau) \left(e^{-\lambda_{2k}^{(1)} \int_\tau^t a(s) ds} - e^{-\lambda_{2k}^{(1)} \int_\tau^t b(s) ds} \right) d\tau \end{aligned} \right] X_{2k}(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} &\varphi_{2k-1} \left(e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds} - e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t b(s) ds} \right) \\ &+ \int_0^t F_{2k-1}(\tau) \left(e^{-\lambda_{2k}^{(2)} \int_\tau^t a(s) ds} - e^{-\lambda_{2k}^{(2)} \int_\tau^t b(s) ds} \right) d\tau \end{aligned} \right] X_{2k-1}(x). \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

De l'équation (6.17) et (6.22), on a

$$\max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)| \leq \xi \left(\frac{c_3 c_2 + c_1 c_4}{c_4^2} \right) \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|,$$

comme $\xi \left(\frac{c_3 c_2 + c_1 c_4}{c_4^2} \right) < 1$, il implique que $a = b$. Puis par la substitution $a = b$ dans (6.23), on aura

$$u = v.$$

■

Le théorème 6.1 a été démontré.

6.4 La dépendance continue de la solution (a, u) par rapport aux données

Théorème 6.2 *Selon les suppositions $(A_1) - (A_3)$, la solution (a, u) dépend continûment des données.*

Preuve Soient $\Phi(\varphi, F, E)$ et $\bar{\Phi}(\bar{\varphi}, \bar{F}, \bar{E})$ deux ensembles de données qui correspondent respectivement aux suppositions $(A_1) - (A_3)$. Il existe des constantes positives M_i , $i = 1, 2, 3$ de telle sorte que

$$\|\varphi\|_{C^2[0,1]} \leq M_1, \quad \|F\|_{C^2[0,1]} \leq M_2, \quad \|E\|_{C^1[0,T]} \leq M_3, \quad (6.24)$$

$$\|\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} \leq M_1, \quad \|\bar{F}\|_{C^2[0,1]} \leq M_2, \quad \|\bar{E}\|_{C^1[0,T]} \leq M_3. \quad (6.25)$$

Soient (a, u) et (\bar{a}, \bar{u}) deux solutions du problème inverse (6.1) – (6.4) correspondant aux données Φ et $\bar{\Phi}$ respectivement. D'après (6.17) et (6.18), on a

$$a(t) = \frac{\left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) F_0(t) e^{-\lambda_0^{(2)} \int_\tau^t a(s) ds} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) F_{2k-1}(t) e^{-\lambda_k^{(2)} \int_\tau^t a(s) ds}\right] - E'(t)}{\left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) \lambda_0^{(2)} \varphi_0 e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t a(s) ds} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t a(s) ds}\right]},$$

et

$$\bar{a}(t) = \frac{\left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) \bar{F}_0(t) e^{-\lambda_0^{(2)} \int_\tau^t \bar{a}(s) ds} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) \bar{F}_{2k-1}(t) e^{-\lambda_k^{(2)} \int_\tau^t \bar{a}(s) ds}\right] - \bar{E}'(t)}{\left(\frac{1-\cos(2\beta_0)}{4\beta_0^2}\right) \lambda_0^{(2)} \bar{\varphi}_0 e^{-\lambda_0^{(2)} \int_0^t \bar{a}(s) ds} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-\cos(2\beta_k)}{4\beta_k(\beta_k-\pi k)}\right) \lambda_k^{(2)} \bar{\varphi}_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} \int_0^t \bar{a}(s) ds}\right]}.$$

Premièrement, on estime la différence $a - \bar{a}$. En utilisant (6.24) et (6.25), on obtient

$$|\varphi F E - \bar{\varphi} \bar{F} \bar{E}| \leq M_2 M_3 |\varphi - \bar{\varphi}| + M_1 M_3 |F - \bar{F}| + M_1 M_2 |E - \bar{E}|.$$

En utilisant l'inégalité précédente, on trouve

$$\|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \leq M_4 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + M_5 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} + M_6 \|F - \bar{F}\|_{C^2[0,1]} + M_7 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]},$$

ceci implique

$$\|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \leq \frac{M_8}{(1 - M_4)} \|\Phi - \bar{\Phi}\|,$$

où

$$\|\Phi - \bar{\Phi}\| = \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} + \|F - \bar{F}\|_{C^2[0,1]} + \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]}.$$

À partir de (6.15), une estimation similaire est également obtenue pour la différence $u - \bar{u}$ comme ceci :

$$\|u - \bar{u}\|_{C[0,T]} \leq M_9 \|\Phi - \bar{\Phi}\|.$$

■

Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes non locaux pour des équations aux dérivées partielles paraboliques et hyperboliques avec conditions aux limites de type intégrale.

Où, après développement de la méthode des inégalités d'énergie pour des problèmes très compliqués, on a pu établir ces résultats :

1. L'existence et l'unicité d'une solution forte dans un espace de Banach du problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition au limite de Neumann pour une équation parabolique avec l'opérateur de Bessel.

2. L'existence et l'unicité d'une solution forte dans un espace de Banach du problème mixte avec une condition intégrale à deux bornes variables et une condition au limite de Neumann de type périodique pour une équation parabolique plus généralisée que la précédente.

3. L'existence et l'unicité d'une solution forte dans un espace fonctionnel fractionnaire du problème mixte avec une condition intégrale et une condition au limite de Neumann pour une équation parabolique fractionnaire aussi à l'aide de la méthode des inégalités d'énergie utilisée pour la première fois pour ce nouveau type de problèmes.

Ensuite, en appliquant une méthode itérative pour obtenir un schéma convergent qui permet de démontrer le résultat suivant :

4. L'existence et l'unicité d'une solution faible dans un espace fonctionnel de Sobolev du problème mixte pour une équation hyperbolique non linéaire dont le terme non linéaire $f(x, t, u, u_x)$ est ajouté au côté droit de l'équation étudiée.

Ce travail peut être considéré comme une généralisation au cas non linéaire des problèmes

hyperboliques linéaires avec une condition intégrale traités par Bouziani.

Une autre direction importante est :

5. L'étude de l'existence et l'unicité d'une solution paire du problème inverse avec une condition intégrale pour une équation parabolique, pour lequel on applique la méthode de Fourier pour transformer le problème considéré a un problème spectral puis en utilisant la méthode usuelle du point fixe de Banach.

Il est important de noter une autre fois qu'il n'existe pas encore, pour les problèmes non-locaux une théorie générale analogue à celle des problèmes classiques.

Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité des questions qu'elle soulève d'autre part. Chaque problème nécessite alors un traitement spécifique, ce qui souligne l'actualité du sujet abordé dans cette thèse.

On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns :

– L'étude des solutions des problèmes pour une classe des EDP (paraboliques et hyperboliques) avec une condition de type intégrale (2) et avec une condition de Dirichlet.

Cette question semble très délicate et importante, et elle mérite d'être étudiée.

– Aussi, pour les EDP fractionnaires mais avec une condition intégrale de type (1), et une condition de Dirichlet.

– De plus, L'étude des solutions des problèmes fractionnaires linéaires et non linéaires avec des conditions non locales de type intégrale semble clairement difficile et qui exige certainement des hypothèses plus précises et un développement très difficile de la méthode des inégalités d'énergie et cela aussi pour la technique utilisée dans la démonstration de l'existence des solutions.

– Ainsi, de nombreuses perspectives intéressantes pour l'analyse numérique pourraient permettre de poursuivre les travaux entrepris dans cette thèse, surtout du côté du développement des méthodes numériques efficaces, afin d'être en compatibilité avec les conditions non locales de type intégrale.

Bibliographie

- [1] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, V 21 (1963), 155–160.
- [2] A. A. Samarskii, Some problems in differential equations theory, *Differents. Uravn.*, V 16 (1980), 1925-1935.
- [3] B. Cahlon, D. M. Kulkarni and P. Shi, Stepwise stability for the heat equation with non local constraint, *SIAM J. Numer. Anal.*, V 32 (1995), N 2, 571-593.
- [4] P. Cannarasa, V. Vespri, On Maximal Lp-regularity for abstract Cauchy problem, *Boll. Unione Mat. Italiana.*, (1986), 165-175.
- [5] R.E. Ewing, T. Lin, A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media, *Adv. Water Ressources.*, V 14 (1991), 89-97.
- [6] N. I. Ionkin, Stability of a problem in Heat-condition, *Differentsial'nye Uravneniya.*, V 13 (1977), No 2, 294-304.
- [7] N. I. Ionkin, A problem for the Heat-condition equation with a tow-point boundary condition, *Differentsial'nye Uravneniya.*, V 15 (1979), No 7, 1284-1295.
- [8] N. I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat condition with non classical boundary conditions, *Th. Vychist. Mat. Fiz.*, (1964) Vol. 43, No 6, 1006-1024.
- [9] A. Bouziani, N.E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris t.321, Série I.*, (1995), 1177-1182.

- [10] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, *SIAM. J. Math. Anal.*, (1979)24 (1993), 46-58.
- [11] P. Shi, M. Shillor, On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity, *Theoretical Aspects of Industrial Design (Wright-Patterson Air Force Base, OH,1990)*, SIAM, Pennsylvania., 1992, pp. 76–82.
- [12] L. A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, *Mat. Zametki* 54 (1993) 98–116.
- [13] L.A. Muravei, A.V. Filinovskii, On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation, *Mathematics of the USSR-Sbornik.*, V 74 (1993), No 1, 219-249.
- [14] D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, Solutions of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of the medium, *Mat. Model.*, V 12 (2000), No 1, 94-103.
- [15] A.M. Nakhushev, On a certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and their applications in ground waters dynamics, *Differ. Uravn.*, V 18 (1982), 72–81
- [16] V.A. Vodakhova, A boundary-value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic water transfer equation, *Differ. Uravn.*, V 18 (1982), 280–285.
- [17] A. M. Nakhushev, On one approximate method for the solution of boundary-value problems for differential equations and its application to the dynamics of soil moisture and subterranean waters, *Differents. Uravn.*, V 18 (1982), No. 1, 72–81.
- [18] Y.S. Choi, K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, *Nonlinear Anal.* 18 (1992), pp. 317–331.
- [19] W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou, A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems, *Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems.*, V 5 (1999), 573-578.
- [20] I. A. Belavin, S. P. Kapitsa and S. P. Kurdyumov, A mathematical model of global demographic processes with regard for a space distribution, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, V 38 (1998), No 6, 885–902.

- [21] A. M. Nakhushhev, The equations of the mathematical biology (Moscow : Vysshaya Shkola (Russian)), (1995).
- [22] M. Ivanchov, Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, VNTL, Lviv (2003).
- [23] J.R. Cannon, Y. Lin and S. Wang, Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation. *Journal of the Australian Mathematical Society, Series B*1991., V 33, 149–163.
- [24] M.I. Ismailov, F. Kanca, An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.* V 34 (2011) , N 6, 692–702.
- [25] M.I. Ivanchov, N.V. Pabyrivska, Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions, *Ukrainian Mathematical Journal.*, V 53 (2001), N 5, 674–684.
- [26] J.R. Cannon, Y. Lin, and S. Wang, Determination of source parameter in a parabolic equations, *Meccanica.*, V 27 (1992), N 2, pp. 85–94.
- [27] A.G. Fatullayev, N. Gasilov, and I. Yusubov, Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation, *Appl. Anal.*, V 87 (2008), pp. 1167–1177.
- [28] M.I. Ivanchov, Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition, *Ukrain. Math. J.*, V 45 (1993), N 8, pp. 1186–1192.
- [29] N B. Kerimov, M I. Ismailov, An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, V 396 (2012), 546–554.
- [30] N.I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, *Th., Vychisl., Mat., Mat., Fiz.*, V 41 (1964), N 6, 1006-1024.
- [31] N.E. Benouar, N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator, *Differentsial'nye Uravneniya.*, V 27 (1991), 2094-2098.
- [32] J.R. Cannon, J. Van der Hoek, The existence and the continuous dependence for the solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Boll. Uni. Math. Ital. Suppl.*, V 1 (1981), 253-282.

- [33] J.R. Cannon and J. Van der Hoek, An implicit finite difference scheme for the diffusion of mass in a portion of the domain, Numer. Solutions of PDEs (ed. by J. Noye), North-Holland, Amsterdam., (1982), 527-539.
- [34] J.R. Cannon, S. Perez Esteva and J. Van Der Hoek, A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass, (1987), SIAM. J. Numer. Anal., V 24, 499-515.
- [35] N.I. Ionkin, Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a non-classical boundary condition, Differential Equations., V 13 (1977), 204-211.
- [36] B. Jumarhon, S. McKee, On the heat equation with nonlinear and nonlocal boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., V 190 (1995), 806-820.
- [37] A.V. Kartynnik, Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation, Differ. Eqns., V 26 (1990), 1160-1166.
- [38] Y. LIN, Parabolic partial differential equation subject to nonlocal boundary conditions, Ph.D. thesis, Washington State University, Pullman, WA., 1988.
- [39] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, SIAM. J. Math. Anal., V 24 (1993), 46-58.
- [40] N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differentsial'nye Uravneniya., V 22 (1986), 2117-2126.
- [41] E.A. Gasymov, Mixed problems on the conjugation of parabolic systems of different order with non local boundary conditions, Differentsial'nye Uravneniya., V 26 (1991), N 8, p 1003-1012.
- [42] Jr. Batten, Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations, Math. Comp., V 17 (1963), 405-413.
- [43] B. Cahlon, D.M. Kulkarni and P. Shi, Stewise stability for the heat equation with a nonlocal constraint, SIAM J. Numer. Anal., V 32 (1995), 571-593.
- [44] L.A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain non-local boundary-value problem for hyperbolic equation, Matem. Zametski., V 54 (1993), 98-116.
- [45] A. Bouziani, Solution forte d'un problème mixte avec une condition intégrale pour une classe d'équations paraboliques. Maghreb Mathematical Review., V 6 (1997), N 1, 1-17.

- [46] A. Bouziani, On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition. Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale des Sciences de Belgique, V 10 (1999), 61-77.
- [47] A. Bouziani, Sur un problème parabolique avec des conditions aux limites non locales. Colloque : « Deuxième Colloque National en Analyse Fonctionnelle et Applications », Centre Universitaire Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès, 17-19 Novembre 1997. Ann. Math. Univ. Sidi Bel Abbès., 6 (1999), 55-66, MR1717171 (2000j :35166).
- [48] L. S. Pulkina, A non local problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electronic Journal of Differential Equations., V 45 (1999), 1-6.
- [49] L. S. Pulkina, On the solvability in L^2 of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Differentsial'nye Uravneniya., V 36 (2000), N 2, pp. 279–280.
- [50] S. Mesloub, A. Bouziani, On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition,” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences., V 22 (1999), N 3, pp. 511–519.
- [51] A. Bouziani, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations hyperboliques, Académie Royale de Belgique., V 8 (1997), pp. 53–70.
- [52] A. Bouziani, Mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equations, Hiroshima Math. J., V 27 (1997), 373-390.
- [53] A. Bouziani, Mixed problem with integral conditions for a certain parabolic equation, J. of Appl. Math. and Stoch. Anal., V 9 (1996), 323-330.
- [54] A. Bouziani, On a third order parabolic equation with a nonlocal boundary condition, J. Appl. Math. Stochastic. Anal., V 13 (2000), 181-195.
- [55] A. Bouziani, N.-E. Benouar, Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation, Kobe J. Math., V 15 (1998), N 1, 47–58.
- [56] F. Rebbani, V.I.Chasarain, Problème aux limites pour des équations différentielles opérationnelles d'ordre impair dans le rectangle, Uzvestis Akad. Nauk. BSSSR, Serie Phys. Mat. Nauk, N 3, 1984.

- [57] F. Rebbani, V.I.Chasarain, Sur un problème aux limites pour une équation différentielle opérationnelle, *Annales de la IX Ecole sur les opérateurs dans les espaces fonctionnelles*, TERNOPOL, 1984.
- [58] A. Bouziani, N.E. Benouar, Sur un problème mixte avec uniquement des conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques. *Maghreb Math Rev.*, V 9 (2000), N 1-2, 55-70.
- [59] A. Bouziani, On the solvability of a class of singular parabolic equations with nonlocal boundary conditions in nonclassical function spaces, *IJMMS.*, V 30 (2002), Issue 7, 435-447
- [60] A. Bouziani, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations hyperboliques, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, V 8 (1997), 53-70
- [61] A. Bouziani, On three-point boundary value problem with a weighted integral condition for a class of singular parabolic equations, *Abstract and Applied Analysis*, V 7 (2002), Issue 10, 517-530.
- [62] M. Denche, A. L. Marhoune, High-order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations.*, V 2000 (2000), N 60, pp. 1-10.
- [63] M. Denche, A.L. Marhoune, A three-point boundary value problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator, *Applied mathematics letters.*, V 13 (2000), 85-89.
- [64] N.I. Ionkin, Solution of boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary conditions, *Differentsial'nye Uravneniya.*, V 13 (1977), N 2, 294-304.
- [65] I. G. Petrovsky, Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partialen differentialgleichungen in gebit der nichtanalytischen funktionen, *Bull. Univ d'etat, Moscow.*, (1938), N 7, 1-74.
- [66] J. Leray, *Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients*, Princeton, Justfor adv. Study, 1952.

- [67] L. Garding, Cauchy's problem for hyperbolic equations, University of Chicago, Lecture notes, 1957.
- [68] A. A. Dezin, Existence and uniqueness theorems for solutions of boundary problems for partial differential equations in function spaces", Uspekhi Mat. Nauk, 14 :3 (87) (1959), 21-73.
- [69] O. A. Ladyzhenskaya, Mixed problem for hyperbolic equations, Edition Mir nauka, 1974.
- [70] K. Friderichs, Symetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., V 7 (1954), N 2, 345-392.
- [71] N. I. Yurchuk, Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m+1}}\right) + A$, Differential Equations., V 10 (1974), N 4, 589-592.
- [72] N. I. Yurchuk, Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m+1}}\right) + A$, Differential Equations., V 10 (1974), N 5, 735-737.
- [73] N. I. Yurchuk, A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations, Differential Equations., V 12 (1976), N 4, 512-518.
- [74] N. I. Yurchuk, Boundary value problems for differential equations whith operator valued coefficients depending on parameter, Differential Equations., V 12 (1976), N 9, 1157-1168.
- [75] N. I. Yurchuk, Solvability of boundary value problems for certain differential operationels equations, Differential Equations., V 13 (1977), N 4, 423-429.
- [76] N. I. Yurchuk, The energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equations, Differential Equations., V 14 (1978), N 12, 1558-1567.
- [77] N. I. Yurchuk, The method of energy inequalities in the study of operator differential equations, Dissertation, Moscow, (1981).
- [78] N. I. Yurchuk, Mixed problem for parabolic equations of variable order, Soviet. Math. Dokl., V 26 (1982), N 12, 39-41.
- [79] A. Bouziani, On the solvability of a class of parabolic equations with weighted integral conditions. Electron. Modelling., V 24 (2002), N 4, pp. 15-32.

- [80] Marhoune A.L., A three-point boundary value problem with an integral two-space variables condition for parabolic equations, *Computers and Mathematics with Applications.*, V 53 (2007), 940-947.
- [81] A. Bouziani, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, V 55 (2003), Issues 7–8, Pages 883–904.
- [82] A. Bouziani, N. Merazga, Rothe time-discretization method applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions, *Advances in Difference Equations.*, V 2004, Issue 3, Pages 211-235.
- [83] N. Merazga, A. Bouziani, Rothe time-discretization method for a nonlocal problem arising in thermoelasticity, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis.*, V (2005), Issue 1, Pages 13-28
- [84] N. Merazga, A. Bouziani, Rothe time-discretization method for the semilinear heat equation subject to a nonlocal boundary condition, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis.*, V 2006, Article ID 34053, 20 pages
- [85] N. Merazga, A. Bouziani, On a time-discretization method for a semilinear heat equation with purely integral conditions in a nonclassical function space, *Nonlinear Anal-Theory, Meth App.*, V 66 (2007), N 3, pp. 604-623.
- [86] A. Bouziani, On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral equation, *IJMMS* 31., V 4 (2002), 201-213.
- [87] A. Bouziani, On a class of nonclassical hyperbolic equations with nonlocal conditions. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis.*, V 2 (2002), 125-140.
- [88] A. Bouziani, On a third order parabolic equation with a nonlocal boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis.*, V 13 (2000), N 2, 181-195.
- [89] S. Mesloub, A. Bouziani, Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, V 15 (2002), 291 300.

- [90] A. L. Marhoune, F. Lakhal, An Integral Two Space-Variables Condition for Parabolic Equations, *Journal of Mathematics and Statistics.*, jmsp.2012.185.190, V 8, Issue 2, Pages 185-190.
- [91] A Bouziani, On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems, *Electronic Journal of Differential Equations.*, V 2001(2001), N 21, pp. 1-16.
- [92] S. Mesloub, A. Bouziani, Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles, *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale des Sciences de Belgique.*, V 9 (1998), 59-71.
- [93] A. Bouziani, Strong solution to a mixed problem for certain pseudoparabolic equation of variable order. *Annales de Mathématiques de l'Université de Sidi Bel Abbès*, V 5 (1998), 1-10.
- [94] A. Bouziani, Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, V 291, Issue 2, 15 March 2004, Pages 371–386.
- [95] A. Bouziani, Strong solution to an hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions, *Mag Math Rev.*, V 9 (2000), 71-84.
- [96] A. Bouziani, Initial-boundary value problem with a nonlocal condition for a viscosity equation, *Int J Math Math Sci.*, V 30 (2002), 327-338.
- [97] A. Bouziani, On initial boundary value problem with Dirichlet integral conditions for a hyperbolic equation with the Bessel operator, *Journal of Applied Mathematics.*, V 2003 (2003), Issue 10, Pages 487-502.
- [98] A. Bouziani, A mixed problem with only integral boundary conditions for a hyperbolic equation, *IJMMS.*, V 2004 (2004), Issue 24, Pages 1279-1291.
- [99] S. Mesloub, A. Bouziani, Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations, Said Mesloub and Abdelfatah Bouziani, *Journal of Applied Mathematics.*, V 1 (2001), Issue 3, Pages 107-116.
- [100] S. Mesloub, A. Bouziani, On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, *IJMMS.*, V 22 (1999), Issue 3, Pages 511-519.

- [101] A. Bouziani, T. S. Temsi, On a pseudohyperbolic equation with a nonlocal boundary condition. *Kobe Journal of Mathematics.*, V 21 (2004), 15–31.
- [102] A. Bouziani, Weak solutions to linear and semilinear parabolic equations with a nonlocal condition, *Engineering Simulation.*, V 18 (2001), 599-619.
- [103] A. Bouziani, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications.*, V 55, Issues 7–8, December 2003, Pages 883–904.
- [104] A. Bouziani, M. S. Temsi, On a Quasilinear pseudohyperbolic equations with a nonlocal boundary condition. *Int. Journal of Math. Analysis.*, V 3 (2009), N 3, 109 -120.
- [105] A. Bouziani, Solution of a transmission problem for semilinear parabolic-hyperbolic equations by the time-discretization method, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis.*, Volume 2006 (2006), Article ID 61439, 23 pages.
- [106] N. Merazga, A. Bouziani Rothe method for a mixed problem with an integral condition for the two-dimensional diffusion equation, *Abstract and Applied Analysis.*, V 2003 (2003), Issue 16, Pages 899-922.
- [107] A. Bouziani, N. Merazga; Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions., V 2006 (2006), N 115, pp. 1-18.
- [108] A. Bouziani, N. Merazga; Solution to a transmission problem for quasilinear pseudoparabolic by the Rothe method, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation*, 2007, N 14, 27 pp.
- [109] A. Bouziani, T-E. Oussaeif and L. Ben Aoua, Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for Parabolic Equation with The Bessel Operator, *Journal of Mathematics.* Vol 2013 (2013), Article ID 457631, 8 pages.
- [110] AA. Kilbas, HM. Srivastava and JJ. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam., (2006)
- [111] He, JH, Nonlinear oscillation with fractional derivative and its applications, In : *International Conference on Vibrating Engineering'98*, Dalian, China., pp. 288-291 (1998).

- [112] He, JH, Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations, *Bull Sci Technol*15., 86-90 (1999).
- [113] He, JH, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Comput Methods Appl Mech Eng.*, V 167 (1998), 57-68.
- [114] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Phys Rep.*, V 339 (2000), 1-77.
- [115] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam., 2006.
- [116] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, V 16 (2008), 181–196.
- [117] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, *Acta Appl. Math.* DOI 10.1007/s10440-008-9356-6.
- [118] A. Anguraj, P. Karthikeyan, Existence of solutions for fractional semilinear evolution boundary value problem, *Commun. Appl. Anal.*, V 14 (2010), 505–514.
- [119] M. Belmekki, M. Benchohra, Existence results for fractional order semilinear functional differential equations, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, V 146 (2008), 9–20.
- [120] M. Benchohra, J.R. Graef, S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, *Appl. Anal.*, V 87 (2008), 851–863.
- [121] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, Boundary value problems for fractional diffusion-wave equation, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, V 3 (2006), 1–8.
- [122] A.M.A. El-Sayed, Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders, *Nonlinear Anal, Theory Methods Appl.*, V 33 (1998), 181–186.
- [123] K.M. Furati, N. Tatar, Behavior of solutions for a weighted Cauchy-type fractional differential problem, *J. Fract. Calc.*, V 28 (2005), 23–42.
- [124] K.M. Furati, N. Tatar, An existence result for a nonlocal fractional differential problem, *J. Fract. Calc.* 26 (2004) 43–51.

- [125] E.R. Kaufmann, E. Mboumi, Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 3 (2007) 1–11.
- [126] A.A. Kilbas, S.A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differ. Equ.* V 41 (1) (2005), 84–89.
- [127] S.M. Momani, S.B. Hadid, Z.M. Alawenh, Some analytical properties of solutions of differential equations of noninteger order, *Int. J. Math. Math. Sci.*, V 13 (2004), 697–701.
- [128] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, *Electron. J. Differential Equations.*, V 36 (2006), 1–12.
- [129] D. Baleanu, J.A. Tenreiro Machado and Z.B. Guvenc, *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, Springer-Verlag, London, 2010.
- [130] X. J. Li, C. J. Xu, Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation,” *Communications in Computational Physics*, V 8 (2010), N 5, pp.1016–1051.
- [131] X. J. Li, C. J. Xu, A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.47, no.3, pp. 2108–2131, 2009.
- [132] B. Ahmad, J. Nieto, Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integro differential equations with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems.*, V 2009 (2009), Article ID 708576, 11 pages.
- [133] R.W. Ibrahim, S. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, 3334 (2007), 1–1.
- [134] N.J. Ford, J. Xiao and Y. Yan, A finite element method for time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis.*, V 14 (2011), N 3, 454-474. doi : 10.2478/s13540-011-0028-2.
- [135] O. Zigen, Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay, *Computers and Mathematics with Applications.*, Volume 61, Issue 4, February 2011, Pages 860–870.

- [136] T-E. Oussaeif, A. Bouziani, Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for a Parabolic Equation. *International Journal of Evolution Equations.*, V 9, N 2, pp. 181–198.
- [137] T-E. Oussaeif, A. Bouziani, Solvability of nonlinear viscosity equation with a boundary integral condition, Accepted in *JNEEA*.
- [138] S. Samko, A. Kilbas and O. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach, Berlin., 1993.
- [139] T-E. Oussaeif, A Bouziani ; Existence and uniqueness of solutions to parabolic fractional differential equations with integral conditions., V 2014 (2014), N 179, pp. 1-10.
- [140] A. Bouziani, Mixed problem for certain nonclassical equations with a small parameter, *Bull. Clas. Sci., Acad. Roy. Belgique.*, V 5 (1994), 389-400.
- [141] W. Liao, M. Dehghan, and A. Mohebbi, Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation, *J. Comput. Appl. Math.*, V 232 (2009), pp. 351–360.
- [142] T-E Oussaeif, A. Bouziani ; An Inverse Coefficient Problem for a Parabolic Equation under Nonlocal Boundary and Integral Overdetermination Conditions under Nonlocal Boundary and Integral Overdetermination Conditions, *IJPDEA.*, V 2 (2014), N 3, 38-43.
- [143] M. Denche, A.L. Marhoune, Mixed problem with non local boundary conditions for a third order partial differential equation of mixed type, *IJMMS.*, V 26 (2001), N 7, 417-426.
- [144] A. Yu. Mokin, On a Family of Initial-Boundary-Value Problems for the Heat Equation,” *Differents. Uravneniya.*, V 45 (2009), N 1, 123–137.
- [145] M. Denche, Marhoune A.L., Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation, *Journal of applied mathematics and stochastic analysis.*, V 16 (2003), N 1, 69-79.