

REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET PULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI- OUM ELBOUAGHI

Faculté de sciences exactes, sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatique

Numéro d'ordre :.....

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Thème

ESTIMATION DE LA RÉGION D'ATTRACTION À L'AIDE D' UN
PRINCIPE DE LASALLE

Présentée par : Bouzghaia Mebarka

Soutenu le 25/06/ 2023, devant le jury:

Pr Okba Zehrour	Univ. d'oum Elbouaghi	Président
Dr Kamel Djeddi	Univ. d'oum Elbouaghi	Rapporteur
Dr Samira Beghou	Univ. d'oum Elbouaghi	Examinatrice

SESSION: JUIN 2023

Année universitaire 2022-2023

Résumé

L'objectif de cette mémoire est d'étudier l'une des méthodes des systèmes dynamiques non linéaires continus en estimant la région d'attraction afin d'obtenir la meilleure estimation possible en appliquant plus spécifiquement le principe de La salle.

Nous nous intéressons à la dynamique continue chaotique non linéaire.

On obtenu Les systèmes par des équations différentielles et des conditions initiales.

Les mots clés systèmes dynamiques chaotiques, exposant de Lyapunov, attracteurs, principe de la salle modèle de Lorenz, modèle de Rössler, modèle Qi, modèle Lorenz modifier

Abstract

The objective of this memory is to study one of the methods of continuous nonlinear dynamical systems, by estimating the region of attraction in order to obtain the best possible estimate by applying more specifically La Salle's principle.

We are interested in nonlinear chaotic continuous dynamics. Systems, it is obtained by differential equations and initial conditions.

Keywords: dynamical system chaos, lyapunov exponents, attractors, Lorenz model , Rossler model, Qi model, model Lorenz modification.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة إحدى طرق أساليب التقدير الأنظمة الديناميكية اللاخطية المستمرة ، من خلال تقدير منطقة الجذب للحصول على أفضل تقدير ممكن بشكل أكثر تحديدا قمنا بتطبيق مبدأ La Salle. يتم الحصول على هذه الأنظمة من خلال المعادلات التفاضلية وفقى الشروط الأولية.

الكلمات المفتاحية: الأنظمة الفوضوية الديناميكية, تابع ليونف , جاذب

نموذج Lorenz , نموذج Rössler , نموذج Qi , نموذج Lorenz المعدل

REMERCIEMENT

J'exprime ma profonde gratitude à mon superviseur, le Dr Djeddi Kamel, pour tous les efforts qu'il a déployés

Ils sont fournis pour me faciliter et m'aider dans la réalisation de mon travail placé à la fin de l'étude.

Je remercie profondément le professeur Okba Zehrou d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens également à remercier Mme Dr. Samira Beghou d'avoir été membre du jury et de lui avoir présenté ma thèse.

J'adresse également mes remerciements particuliers à Pr Imad Rezzoug et Dr Taki-Eddine Oussaeif ainsi qu'à tous les enseignants et à tous les travailleurs du Département de mathématiques et d'informatique.

DÉDICACE

Avec un grand plaisir, une immense joie et un coeur ouvert

Merci Allah Avant tout

Je dédie mon simple travail à mes très chers, respectueux et magnifiques ma mère et mon père qui m'ont soutenu tout au long de ma vie .ainsi à mes frères Mouhamed Ali ; Mouhamed Mouldi mes chers amies Amira et Rayan, et aussi a tout personne qui m'ont encouragé au long de mes étude.

TABLE DES FIGURES

1.1	[2]Classification des poits d'équilibre dans \mathbb{R}^2	16
1.2	[1]Section de poincar	18
1.3	Oscillation d' un pendule	19
2.1	[2]attracteur étrange de Rössler	24
2.2	[2]attracteur étrange de Lorenz	24
2.3	[2]Fonction de Lyaunov et les Fonctions a,b et c	28
2.4	[2]Derivée de la fonction de Lyapunov	29
2.5	[2]X(t)Approche de l'ensemble invariant	29
2.6	[2](a) $(x(t),y(t),z(t))$, $(a,b,c)=(9.5,26.6,2.8)$	34
2.7	[2]Estimztion uniforme d'attracteur de Lorenz $(x_0,y_0,z_0)=(20,-70,40)$	34
2.8	[2]Estimation de l'attracteur de Rossler	36
3.1	[15]Localisation de l'attracteur chaotique du système Qi $xOyz$	40

TABLE DES MATIÈRES

Notation	7
Introduction	8
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	10
1.1 système dynamique	10
1.1.1 système dynamique continue	10
1.1.2 système discret	12
1.1.3 Espace de phase	12
1.1.4 Ensemble ω limite	12
1.1.5 Point d'équilibre	13
1.1.6 Point périodique	14
1.2 système dynamique autonome et non autonome	14
1.3 Linearisation	14
1.4 Stabilité	14
1.4.1 Cas des systèmes dynamiques continues	14
1.4.2 Cas des systèmes dynamiques discrets	16
1.4.3 Méthode de Lyapunov	17
1.5 Stabilité au sens de Lyapunov	17
1.5.1 Généralités et définition	17
1.6 Section de Poincaré	18
1.6.1 Flot d'un système dynamique	18
1.6.2 Le déterminisme	19
2 Théorie du chaos	20
2.1 Introduction	20
2.1.1 Chaos au sens de Devaney	20
2.2 Caractéristique du chaos	21
2.2.1 La non linéarité	21
2.2.2 Sensibilité aux conditions initiales	21

2.2.3	Exposants de Lyapunov	21
2.3	Attracteur	22
2.3.1	Définition d'attracteur	22
2.3.2	Bassin d'attraction	22
2.3.3	Les propriétés d'un attracteur	23
2.3.4	Les types d'attracteur	23
2.4	Le Principe d'invariance de LaSalle	25
2.5	Introduction	25
2.5.1	Le Principe d'invariance de LaSalle classique	25
2.5.2	Le Principe d'invariance de LaSalle globale	25
2.5.3	Principe d'invariance de LaSalle uniforme	25
2.5.4	Principe d'invariance uniforme globale	28
2.6	Estimation uniforme de l'attracteur du système de Lorenz	29
2.7	Estimation de l'attracteur de Rössler	34
2.7.1	D' détermination <i>d'un ensemble</i> $\bar{\Omega}_M$	35
3	APPLICATION	37
3.1	Le système de Qi	37
3.1.1	Comportement dynamique du système (3.1)	37
3.2	Fonctions de Lyapunov pour l'estimation de la dissipative au sens de Levinson pour le système modifié de Lorenz	42
	Conclusion	47
	Bibliographie	48

NOTATION

x^* :point fixe.

λ :valeur propre.

$\text{Re}(\lambda)$:partie réel du valeur propre.

$\text{Im}(\lambda)$:partie imaginaire du valeur propre.

$DF(x)$:détérminant de matrice jacobienne.

$V(t)$: la fonction de lyapunov.

$\dot{V}(t)$:La dérive de fonction de lyapunov.

Ω : le domaine ouvert de \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^m : L'ensemble des réels de dimensions m .

$\varphi_t(x)$:flot du système.

A :attracteur.

$B(A)$:bassin d'attracteur.

$\lambda(x_0)$:exposant de Lyapunov.

f^j : j ème itération de f .

d :la distance.

INTRODUCTION

Le comportement chaotique a été considéré comme un phénomène exotique qui peut être seulement d'intérêt mathématique et ne serait jamais rencontré dans la pratique. Plus tard, le chaos a été largement appliqué à beaucoup de disciplines scientifiques mathématiques, la programmation, la microbiologie, la biologie, l'informatique, l'économie, l'ingénierie, la chimie, le financé, la philosophie, la physique, la dynamique de la population, la communication, médecine.

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant la système dynamique étudié, nature qui dépend des outil utilisés.

En 1963, le titre de la communication du météorologue Edward Lorenz énonce bien le problème "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas?". Il y analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible.

Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non- linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables.

La théorie de chaos née avec Poincaré au XIX sème siècle, dans son étude du système solaire et de sa stabilité. Il cherchait à savoir si le système était stable, ou s'il allait un jour se dissoudre, pouvant engendrer des collisions entre les corps. .

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'estimation de la région d'attraction pour des systèmes de dynamiques chaotiques continus par la méthode de principe de la salle, Le mémoire se compose de trois chapitres Dans le premier chapitre on introduit quelque notions

et rappels de base sur les systèmes dynamiques (continues et discrets), nous représentons aussi la notion de point fixe et la stabilités des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre nous considérons la théorie de principe de LaSalle, et quelques définitions du chaos, caractéristique du chaos, et les attracteurs, et Nous donnons quelques exemples des systèmes chaotiques, nous prenons les deux modèles (Lorenz et Rössler) dans le temps continue et applique le principe de LaSalle.

et enfin le troisième chapitre On applique le principe de LaSalle les deux modèles (Qi et Lorenz modèfier).

CHAPITRE 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1 système dynamique

1.1.1 système dynamique continue

Définition 1.1 *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplé (X, T, F) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $F : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système à toute instant.*

Définition 1.2 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ telle que :

- $U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x_0$
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1 *Soit le système dynamique linéaire :*

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est une matrice constante.

. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x,$$

(1) soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| = \|\exp^{At}(x_0) - \exp^{At}(y_0)\| = \exp^{At} \|x_0 - y_0\|$$

et comme

$$\|\exp^{At}\| = \left\| \frac{(At)^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|(At)^n\|}{n!} = \exp^{\|A\|t}$$

donc

$$\leq \exp^{\|A\|t} \|x_0 - y_0\|$$

$$\lim_{x \rightarrow y} \|\mu(t, x) - \mu(t, y)\|$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow y} \exp^{\|A\|t} \|x_0 - y_0\| \rightarrow 0$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow y} \|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| = 0$$

donc $\mu(\cdot, x)$ est continue.

(2) soit $t, s \in \mathbb{R}$

$$\|\mu(t + s, x) - \mu(t, s)\| = \|\exp^{A(t+s)}(x_0) - \exp^{At}(x_0)\|$$

$$\leq \exp^{At} \cdot \|\exp^{As} x_0 - x_0\|$$

$$\leq \exp^{\|A\|t} \cdot \|x_0\| \|\exp^{A(s)} - I\|,$$

alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|\mu(t + s, x) - \mu(t, x)\| = 0$$

donc $\mu(t, \cdot)$ est continue.

$$(3) \quad \mu(0, x) = \exp^{0 \cdot A} x = I \cdot x = x.$$

$$(4) \quad \mu(t + s, x) = \exp^{A(t+s)} x = \exp^{tA+sA} x = \exp^{tA} \exp^{sA} x,$$

alors

$$\mu(t + s, x) = \exp^{tA} \mu(s, x) = \mu(t, \mu(s, x)).$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.1.2 système discret

Définition 1.3 La notion de système dynamique présentée au paragraphe précédent peut être étendue aux systèmes discrets. On appelle système dynamique discret tout système d'équations algébriques récurrentes défini par :

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda)$$

ou

f la fonction de récurrence.

$x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k .

$\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres et $k \in \mathbb{N}$.

L'astronome Michel Hénon permet de réagir rapidement et de produire un système très simple.

Ce système dynamique discret de dimension 2, à temps discret car les points évoluent par étape et non continument. Il est défini par la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

1.1.3 Espace de phase

Définition 1.4 L'espace des phases (ou espace d'états) est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié.

1.1.4 Ensemble ω limite

Définition 1.5 soit $x(t, t_0, x_0) \in D$ une solution de l'équation $\dot{x} = F(x, t)$ défini par $t \geq t_0$.

S'il existe une suite d'instant $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} k = +\infty$ et un point $\phi \in D$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi\| = 0.$$

On dit que ϕ est un point ω -limite de la solution $x(t)$.

L'ensemble des point ω -limite de $x(t)$ est appelé l'ensemble ω -limite de la solution, noté $\omega\text{-lim } \{x(t)\}$.

1.1.5 Point d'équilibre

1. Cas des systèmes dynamiques continues :

Définition 1.6 Soit le système suivant :

ou $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x' = f(x) \quad (1.2)$$

On appelle point d'équilibre du système (1.2) ; le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

2. Cas des systèmes dynamiques discrets :

Définition 1.7 Un point fixe d'une application $x_{K+1} = f(x_K)$ est un point invariant par f , c'est-à-dire un point x de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x) = x$. Géométriquement le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction $y = f(x)$ avec la ligne $y = x$.

Exemple 2 soit le système du Michel Hénon est définie par la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, représentent des paramètres

La valeur de la constante a control la non linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour a, b sont $a = 1.4$, et $b = 0.3$. L'application de Hénon est inversible, son inverse est :

$$H^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne $DH_{a,b}$ est :

$$DH_{a,b} \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$, cette application possédé deux points d'équilibres hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} p_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, b \frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a} \right), \text{ si } 0 < b < 1, \\ p_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, b \frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a} \right), \text{ si } 0 < b < 1. \end{cases}$$

1.1.6 Point périodique

Définition 1.8 On dit que x^* est un point périodique si $n \geq 1$, tel que $f^n(x^*) = x^*$. La période d'un point périodique x^* est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que : $f^n(x^*) = x^*$.

1.2 système dynamique autonome et non autonome

Définition 1.9 .Lorsque la fonction f dans le système précédent ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome

Remarque 1 Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n + 1$.

1.3 Linearisation

Soit le système dynamique non linéaire défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \\ x(t_0) = x(0) \end{cases} \quad (1.3)$$

et soit x^* un point d'équilibre de ce système .

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point d'équilibre. La fonction $F(x)$ peut être développée en série de Taylor au voisinage de point x^* comme suite :

$$\varepsilon'(t) + x'^* = F(x'^* + \varepsilon'(t)) \simeq F(x^*) + J_D(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.4)$$

Avec $DF(x^*)$ est la matrice jacobienne de la fonction F défini par :

$$DF(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x^*)}{\partial x_1} & & \frac{\partial F_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n(x^*)}{\partial t_1} & & \frac{\partial F_n(x^*)}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Comme $F(x^*) = x^*$ alors l'équation (1.3) redevient :

$$\varepsilon'(t) = DF(x^*)\varepsilon(t). \quad (1.5)$$

L'écriture (1.5) veut dire que le système (1.3) est linéarisé.

1.4 Stabilité

1.4.1 Cas des systèmes dynamiques continus

Classification des points d'équilibre

Considérons le système linéaire (1.1), où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.10 Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles et de même signe, la solution $x = 0$ est appelée noeud.

Donc λ, μ réels distincts et $\lambda, \mu > 0$.et appelée Noeud asymptotiquement instable si $\lambda + \mu < 0$.

Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.

Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec

$$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

les solution $x = 0$ est appelée foyer.

Définition 1.11 Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec

$$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

les solution $x = 0$ est appelée foyer.

$$\lambda = \alpha + i\beta \text{ et } \mu = \lambda$$

avec α, β réels,

$$\alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0$$

Définition 1.12 Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec

$$\text{Re}(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

.La solution $x = 0$ est appelée centre. Donc

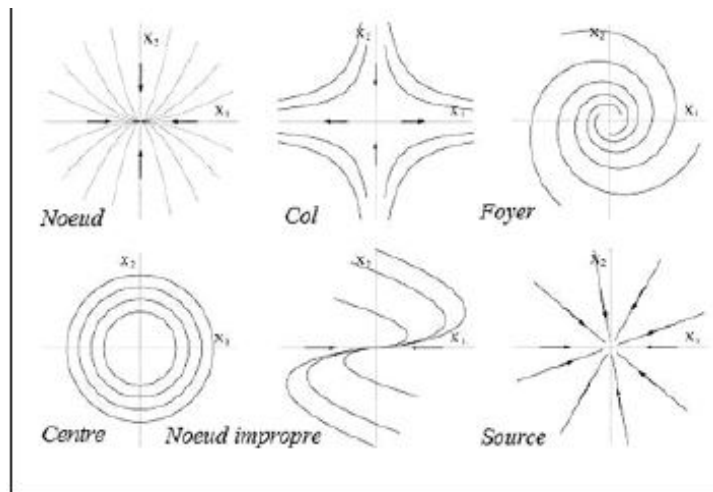
$$\alpha = i\beta \text{ et } \mu = i\beta$$

avec $\beta \neq 0$. Centre (stable). Toutes les trajectoires sont fermées (solution périodique).

Théorème 1 Les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont de partie réelle négative, x est stable et instable si l'une de ces valeurs propres de $Df(x^*)$ est de partie réelle positive

Cas des systèmes non linéaires :

Définition 1.13 Un point critique de x_0 de (1.2) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, il est appelé sources si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives, il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec

FIG. 1.1: Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .

1.4.2 Cas des systèmes dynamiques discrets

Définition 1.14 Considérons une application non-linéaire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le multiplicateur m de f au point d'équilibre x^* comme suit :

$$m = f'(x^*).$$

Il est clair que m est la pente de la tangente au point d'équilibre x^* de f qui détermine le type de point d'équilibre.

Théorème 2 Soit x un point d'équilibre de $x_{K+1} = f(x_K)$ alors le point d'équilibre est :

1. Attractif si $|m| < 1$.
2. Répulsif si $|m| > 1$.
3. Indifférent si $|m| = 1$.
4. Super stable si $|m| = 0$.

Exemple 3 soit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

Le point 0 est 3-périodique car :

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0.$$

On a

$$f'(0) = \frac{5}{2}, \quad f'(1) = \frac{-1}{2}, \quad f'(2) = \frac{-7}{2}$$

$$f^3(0) = 0, \quad f'(0) \times f'(1) \times f'(2) = \frac{35}{8} > 1$$

Ainsi 0 est point 3-périodique répulsif.

1.4.3 Méthode de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire :

si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable).

– **La méthode directe de Lyapunov**

cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

– **Méthode indirecte de Lyapunov**

La méthode indirecte, aussi appelée première méthode de Lyapunov, considère à linéariser le système dynamique autour d'un point fixe x^* et à tester la stabilité du système

Théorème 3 *L'état d'équilibre $x_0 = 0$ est stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que*

1. $U(0) = 0$;
2. $U(x) > 0 \forall x \neq 0; x \in \mathbb{R}^n$;
3. $\dot{U}(x) \leq 0 \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, où \dot{U} est la dérivée de U par rapport au temps et \mathbb{R}^n est une région autour de 0.

Remarque 2 *Si la condition (3) dans la théorème(4) est remplacée par $\dot{U}(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable. La fonction $U(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.*

Le théorème (3) est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre $x_0 = 0$.

1.5 Stabilité au sens de Lyapunov

1.5.1 Généralités et définition

Définition 1.15 (*Fonction définie positive*) *Une fonction scalaire $U(x)$ continûment différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si*

1. $U(0) = 0$;
2. $U(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega / x \neq 0$.

Si (2) est remplacé par $U(x) \geq 0$ alors la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 1.16 *On dit que x_0 , point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x)$$

est stable (au sens de Lyapunov) si pour tout ouvert U contenant x_0 , il existe un ouvert V de conditions initiales, que pour tout $y \in V$ et pour $t \geq 0$, on dit :

$$x(t, y) \in U.$$

Théorème 4 (Poincaré-Lyapunov) On considère le système, $\dot{x} = f(x)$ et x_0 un point d'équilibre.

1) Si $Df(x_0)$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, alors x_0 est asymptotiquement stable.

2) Si $Df(x_0)$ a (au moins) une valeur propre à partie réelle strictement positive alors x_0 est instable.

1.6 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation est une réduction d'une unité de l'ordre du système. Faire une section de Poincaré revient à compter la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire (en dimension trois, par exemple), avec un plan

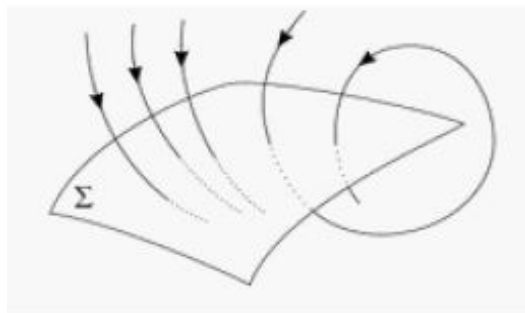


FIG. 1.2: Section de Poincaré

1.6.1 Flot d'un système dynamique

Définition 1.17 Soit système non linéaire

$$\dot{x} = f(x)$$

et le problème à valeurs initiales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Pour $x_0 \in E$ et $\varphi(t, x_0)$ la solution de problème à valeurs initiales, l'ensemble des applications φ_t défini par

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

est appelé le flot d'un système dynamique.

1.6.2 Le déterminisme

Un système dynamique déterministe est un système évoluant avec le temps en suivant une loi pré-établie.

En général, la loi d'évolution est locale : à chaque instant elle ne donne l'évolution du système que sur un temps très court. On cherche à connaître l'évolution globale du système, en particulier son comportement quand le temps tend vers l'infini.

Exemple 4 *oscillation d'un pendule.*

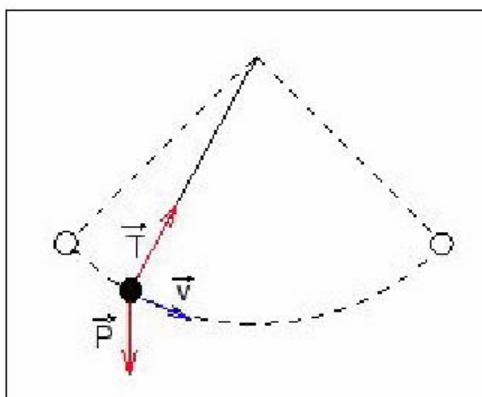


FIG. 1.3: Oscillation d'un pendule

Le bilan des forces permet de connaître l'accélération. Pour connaître l'évolution à long terme, il faut résoudre une équation différentielle.

Un pendule sans frottement oscille de façon périodique sans jamais s'arrêter.

Définition 1.18 *Au sens de Levinsons, le terme "dissipative" est utilisé pour décrire un système dynamique complexes et non linéaires caractérisé par la dissipation d'énergie ou l'irréversibilité des processus qui s'y déroulent.*

Définition 1.19 *Les exponentiels attracteurs sont souvent associés à des systèmes dynamiques chaotiques, où de petites variations initiales peuvent conduire à des résultats très différents. Dans ces systèmes, l'attracteur exponentiel peut représenter un état stable ou périodique bien que le systèmes dynamiques chaotiques, il préfère revenir à la stabilité.*

Définition 1.20 *Dans la théorie des systèmes dynamiques, un ensemble est dit "positivement invariant" s'il satisfait cette propriété : toute trajectoire du système qui commence dans cet ensemble reste dans cet ensemble pour tout moment.*

Définition 1.21 *Attracteurs étranges : L'attracteur étrange est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.*

CHAPITRE 2

Théorie du chaos

2.1 Introduction

Depuis la fin des années 70, la théorie du chaos la plupart des sciences sont physique, chimie, mécanique, géophysique, psychologie, économie et sociologie etc Le système chaotique est un système sensible aux les conditions initiales

le domaine des mathématiques s'intéresse depuis longtemps aux systèmes dynamiques chaotiques, cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques..

Définition 2.1 *On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux les conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique ; pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoires, relevant du seul calcul des probabilités..*

Définition 2.2 *soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite f une application sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et un entier $j \geq 0$ satisfaisant : $d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta$ ou d représente la distance et $f^{(j)}$ la j ième itération de f .*

Définition 2.3 *Soit f une application de \mathbb{R}^n de lui-même et U, V sont deux ensembles non vides ouverts dans \mathbb{R}^n , alors f est topologiquement transitive s' il existe $x_0 \in U$ et un entier positif $j \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $f^{(j)}(x_0) \in V$ c'est-à-dire $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

2.1.1 Chaos au sens de Devaney

Définition 2.4 *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite constituée d'une dynamique chaotique si :*

- (i) f possède une sensibilité aux conditions initiales,
- (ii) f est topologiquement transitive,
- (iii) L'ensemble des points périodiques de f est dense dans \mathbb{R}^n .

2.2 Caractéristique du chaos

Les définitions et les propriétés suivantes permettant de comprendre qualitativement les points remarquants des systèmes chaotiques.

2.2.1 La non linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire.

2.2.2 Sensibilité aux conditions initiales

Sensibilité aux conditions initiales ou simplement sensitive cette propriété a été observée pour la première fois par Edward Lorenz sur son modèle météorologique. Elle est connue sous le nom populaire d'effet papillon. Pour un système chaotique presque toujours, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial x_0 dans l'espace des phases va se trouver rapidement amplifiée.

On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists n \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{R}^n : |x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \delta.$$

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique.

2.2.3 Exposants de Lyapunov

Pour quantifier la sensibilité par rapport aux conditions initiales, on utilise souvent la notion de "nombre de Lyapunov" ou "exposants de Lyapunov".

La divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide qui cause la difficulté à appréhender l'évolution d'un flot chaotique, c'est pourquoi on essaye si c'est possible de mesurer ou estimer la vitesse de divergence (convergence). Cette dernière est donnée par les exposants de Lyapunov.

Les exposants de Lyapunov permettent de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange.

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.[1]

Soit f une application discrète définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$x_{K+1} = f(x_K)$$

L'exposant de Lyapunov qu'il indique le taux moyen de divergence est définie par :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |(f')^n(x_i)|.$$

Exemple 5 *L'application logistique*

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i), \quad x_i \in [0, 1]$$

l'exposant de Lyapunov de f est :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \ln |4(1 - 2x_i)|.$$

soit $\lambda = \log 2 \geq 0$ d'où le comportement est chaotique.

2.3 Attracteur

2.3.1 Définition d'attracteur

Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions d'attracteurs. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui attire toute les autres trajectoires vers elle. On donne quelque définition possible d'attracteur :

Définition 2.5 *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases c'est-à-dire une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales, si A ensemble compact fermée de l'espace des phases, en dit que A est attracteur si :*

1. Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(t, x_0) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U pour $x_0 \in V$.
2. L'ensembles des trajectoires sont dense dans A :
3. A est invariant pour φ_t , c'est-à-dire $\cap \varphi_t(V) = A; \forall t \geq 0$.

2.3.2 Bassin d'attraction

Définition 2.6 *Le bassin d'attracteur $B(A)$ d'un attracteur A est l'ensemble des points de l'espaces des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers A , donc*

$$B(A) = \cup \varphi_t(V)$$

V est un voisinage de A .

On appelle bassin d'attracteur $B(A)$ de A le plus grand des tels voisinages attirés c'est-à-dire :

$$B(A) = \cup \varphi_t(U)$$

U est le plus grand voisinage de A .

2.3.3 Les propriétés d'un attracteur

Un attracteur avoir les propriétés suivantes :

1. Tout point de l'espace d'état qui appraient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .
2. Il existe un ensemble A, B , tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bord d'un temps fini dans se voisinage de A .
3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

2.3.4 Les types d'attracteur

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs régulier (non chaotique) et les attracteurs étranges (chaotique).

1. **Attracteurs réguliers** : Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :
 - Un attracteur réduit un point fixe, c'est le plus simple attracteur.
 - Un attracteur formant une courbe fermée est appelé cycle limite.
 - L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que loin appelle parfois "mouvements quasi périodique".
2. **Attracteurs étranges** : est caractérisé par :
 - la sensibilité aux conditions initiales
 - La dimension D de l'attracteur est fractale (non entière).
 - L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.
 - Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov $\lambda_k > 0$.

Quelques exemples d'attracteurs étranges

Dans toutes les références qui traitent les systèmes dynamiques on trouve beaucoup d'exemples sur les attracteurs étranges, par exemple : L'attracteur de Lorenz, attracteur de Rössler, la transformation de Hénon, l'attracteur du Double-scroll; observé dans le circuit de Chua, etc...

Définition 2.7 Soit $\dot{x} = F(t, x)$ un système déterministe défini sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Chaque solution $x(t, t_0, x_0)$ de cette équation, défini pour $t \in I$, où I est intervalle contenant t_0 , est représentée par une courbe de l'espace \mathbb{R}^{n+1} , contenue dans Ω , dont chaque point $(t, x(t))$ donne l'état du système à l'instant t . L'ensemble de ces points est appelé une trajectoire (ou courbe intégrale). On peut considérer les n fonctions $x_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) coordonnées de $x(t)$, comme la représentation paramétrique d'une courbe dans l'espace \mathbb{R}^n appelé espace des phases du système.

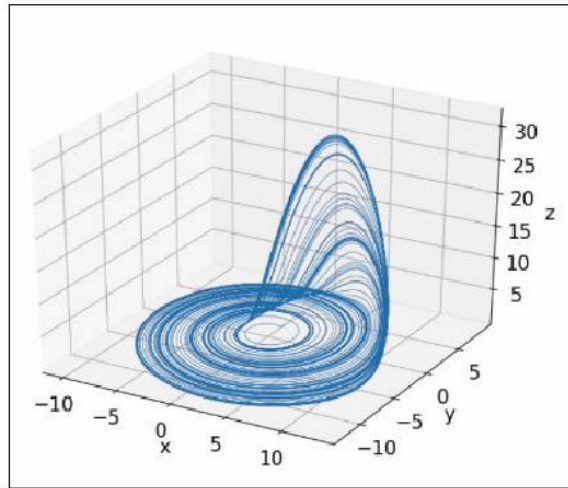


FIG. 2.1: [2]attracteur étrange de Rössler

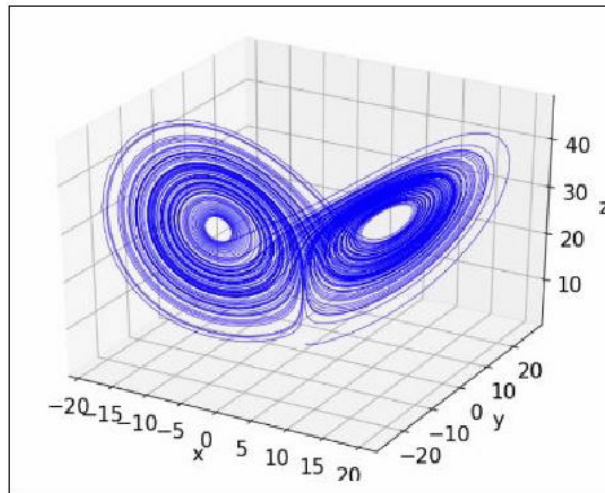


FIG. 2.2: [2]attracteur étrange de Lorenz

Définition 2.8 La trajectoire est une solution $x(t, t_0, x_0)$ du système $\dot{x} = F(t, x)$ est l'ensemble $\{F_n(x)$ tel que $n \geq 0\}$. pour $t \in I$, dans l'espace des phases . Si F est bijective, l'orbite de x est $\{F_n(x)$ tel que $n \in \mathbb{Z}\}$. Chaque orbite est orientée dans le sens du déplacement de $x(t)$ pour t croissants. On appelle portrait de phase du système différentiel l'ensemble des orbites des solutions de ce système.

Définition 2.9 La trajectoire est une solution du système différentiel.

Définition 2.10 Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variable d'état, qui est la propriété de défini complètement d'état du système à un instant donnée. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état de le point associé à cet état décrit une trajectoire.

2.4 Le Principe d'invariance de LaSalle

2.5 Introduction

Le Principe d'invariance de La Salle fournit un cadre théorique solide pour l'analyse de la stabilité et de la convergence des systèmes dynamiques non linéaires. Il permet de caractériser le comportement asymptotique des trajectoires et de déterminer les ensembles invariants dans le système. Ce principe est largement utilisé dans de nombreux domaines, tels que la physique, la biologie, ...ect, pour comprendre et prédire le comportement des systèmes dynamiques complexes.

2.5.1 Le Principe d'invariance de LaSalle classique

Soit le système dynamique autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ou $x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$

Théorème 5[3] soient $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 soit $L > 0$ une constante tel que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ est bornée. Supposons que $\dot{V}(x) \leq 0$, pour tout $x \in \Omega_L$ et définissons $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$ Posons B le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans E . Alors toutes solutions de (2.1) dans Ω_L convergent vers B quand $t \rightarrow +\infty$.

Une version globale de ce Théorème peut être formulé comme suit :

2.5.2 Le Principe d'invariance de LaSalle globale

Théorème 6[17] soient $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 suppose que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega_L$ et définissons $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$ Posons B le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans E . Alors toutes solutions de (3.1) bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B quand $t \rightarrow +\infty$.

2.5.3 Principe d'invariance de LaSalle uniforme

Considérons l'équation différentielle ordinaire et autonome suivante :

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (2.2)$$

ou $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 7soient $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $V : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 et $a, b, c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues tels que :

$a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x)$ et $-\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x), \forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$
 pour $\rho > 0$ soit $\mathcal{L}_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) < \rho\}$ (voir Fig 2.4), ou \mathcal{L}_ρ est un ensemble borné non-vide.

Considérons les ensembles :

$$\mathcal{F}_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) < \rho\},$$

$$E_\rho := \{x \in \mathcal{F}_\rho : c(x) = \rho\},$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) < \rho\},$$

Supposons que $\sup_{x \in C} b(x) \leq R < \rho$ et soient les ensembles

$$A_R := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq R\}$$

$$B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \leq R\}$$

Soit λ un paramètre fixé dans Λ et toutes les conditions précédentes sont satisfaites, alors pour $x_0 \in \mathcal{F}_\rho$ la solution $\varphi(t, x_0, \lambda)$ est définie dans $[0, +\infty)$ et les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Si $x_0 \in B_R$ alors $\varphi(t, x_0, \lambda) \in A_R$, pour $t \geq 0$ et $\varphi(t, x_0, \lambda)$ converge vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans A_R , quand $t \rightarrow +\infty$.
2. Si $x_0 \in \mathcal{F}_\rho - B_R$ alors $\varphi(t, x_0, \lambda)$ converge vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans $A_R \cup E_\rho$, quand $t \rightarrow +\infty$.

Preuve. Tout d'abord, il est important de montrer que

$$\mathcal{F}_\rho \subset \{x \in \mathbb{R}^n : V(x, \lambda) \leq \rho\} \subset \mathcal{L}_\rho$$

et

$$-\dot{V}(x_0, \lambda) \leq \rho \geq c(x_0) \geq 0$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et toute $x_0 \in \mathbb{R}^n - B_R$.

On considère deux cas :

1) pour $x_0 \in B_R$ soit $[0, t_+)$ l'intervalle maximal d'existence de la solution $\varphi(t, x_0, \lambda)$ de (2.1).

Supposons qu'il existe $\bar{t} \in [0, t_+)$ tel que $\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda) \in A_R$. Alors $a(\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda)) > R$. Alors

$$V(x_0, \lambda) = V(\varphi(0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(\varphi(0, x_0, \lambda)) = b(x_0) \leq R$$

et

$$V(\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda), \lambda) \geq a(\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda)) > R$$

Ceci implique qu'il existe $\tilde{t} < \bar{t}$, tel que $V(\varphi(\tilde{t}, x_0, \lambda), \lambda) = R$ et $V(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) > R$ pour $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$. Donc pour $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$ on a :

$$b(\varphi(t, x_0, \lambda)) \geq V(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) > R$$

Alors $\varphi(t, x_0, \lambda) \notin B_R$ pour $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$. Ceci est une contradiction puisque

$$-\dot{V}(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) \geq c(\varphi(t, x_0, \lambda)) \geq 0,$$

ce qui implique que $V(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda)$ est une fonction décroissante en t dans cet intervalle.

Donc $\varphi(t, x_0, \lambda) \in A_R$, pour $t \in [0, t_+)$ ce qui implique $t_+ = +\infty$.

L'ensemble ω -limite de $\varphi(t, x_0, \lambda)$ est contenu dans A_R et $\varphi(t, x_0, \lambda)$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant de (2.3), inclus dans A_R , quand $t \rightarrow +\infty$.

2) Pour $x_0 \in \mathcal{F}_\rho - B_R$, soit $[0, t_+)$ un intervalle maximal d'existence de la solution $\varphi(t, x_0, \lambda)$, dans (2.3) s'il existe $s \in (0, t_+)$ tel que $\varphi(s, x_0, \lambda) \in B_R$ alors le problème est réduit au partie 1).

En supposant que $\varphi(t, x_0, \lambda) \in B_R$, $t \in [0, t_+)$. S'il existe $\bar{t} \in (0, t_+)$ tel que

$$\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda) \notin \mathcal{L}_\rho$$

alors

$$\rho \leq a(\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda)) \leq V(\varphi(\bar{t}, x_0, \lambda), \lambda)$$

et

$$V(\varphi(0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(\varphi(0, x_0, \lambda)) = b(x_0) < \rho,$$

Ce qui conduit à une contradiction parce que ailleurs de B_R , $\dot{V}(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) \leq 0$.

Pour $t \in [0, t_+)$ on a :

$$a(\varphi(0, x_0, \lambda)) \leq V(\varphi(0, x_0, \lambda), \lambda) \leq V(\varphi(0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(\varphi(0, x_0, \lambda)) = b(x_0) < \rho,$$

et aussi $(\varphi(0, x_0, \lambda) \in \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq b(x)\})$.

Danc $t_+ = +\infty$.

Soit ω_λ l'ensemble ω -limite de $(\varphi(t, x_0, \lambda))$ alors $\omega_\lambda \subset \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq b(x)\}$, comme $V(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda)$ est une fonction décroissante et borné alors il existe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) := l \in \mathbb{R}.$$

Alors $V(., \lambda) \equiv l$ et que $\dot{V}(., \lambda) \equiv 0$ sur ω_λ .

Puisque $C \cap \omega_\lambda = \emptyset$ et $\omega_\lambda \subset A_\rho$, alors $0 = -\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x) = 0$ par conséquent pour $x \in \omega_\lambda$. ainsi $\omega_\lambda \in E_\rho$

Ce qui implique que $\varphi(t, x_0, \lambda)$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant de (2.3) inclus dans E_ρ , quand $t \rightarrow +\infty$.

Si $c(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n - \bar{C}$, si $x_0 \in E_\rho - \bar{C}$, $\varphi(t, x_0, \lambda) \notin E_\rho$, pour tout $t > 0$ suffisamment petit, et les conditions précédentes du théorème sont satisfaites, alors

on conclut que toute solution avec condition initiale dans \mathcal{F}_ρ , tend vers le plus grand sous ensemble invariant inclus dans A_R quand $t \rightarrow +\infty$ dans ce cas \mathcal{L}_ρ, A_R seront l'estimation uniforme de l'attracteur et \mathcal{F}_ρ sera l'estimation uniforme du bassin de l'attraction.

Remarque 3 *Le théorème précédent peut être rétabli avec les modifications appropriées pour couvrir le cas ou \mathcal{L}_ρ est non borné, mais possède un composant relié.*

2.5.4 Principe d'invariance uniforme globale

Théorème 8 Soient $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $V : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathbb{C}^1 et $a, b, c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues tels que :

$$a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x)$$

et

$$-\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x), \forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda,$$

considérons les ensembles :

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) < 0\}, \quad E := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0\}.$$

Supposons que $\sup_{x \in C} b(x) \leq R < r < +\infty$ et soient :

$$A_R := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq R\}, \quad B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \leq R\},$$

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) < r\}$$

où A_R est un ensemble borné non-vide (Fig 2.3) et (Fig2.4)

λ est un paramètre fixé dans Λ et toutes les conditions précédentes sont satisfaites, alors les conditions sont vérifiées :

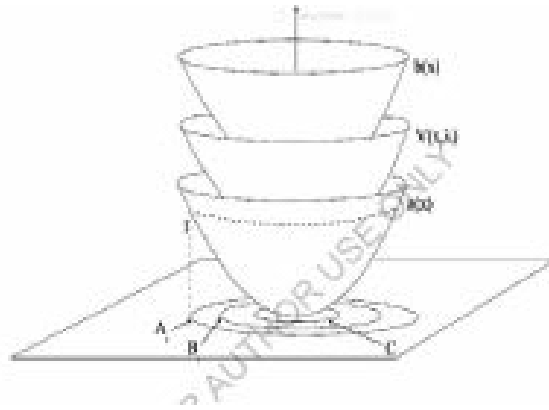


FIG. 2.3: [2] Fonction de Lyapunov et les Fonctions a, b et c

1. Si $x_0 \in B_R$ alors $\varphi(t, x_0, \lambda)$ est défini et appartient à A_R , pour $t \geq 0$, converge, quand $t \rightarrow +\infty$, vers le plus grand sous-ensemble invariant dans (3.2) inclus dans A_R .
2. Si $x_0 \in B_r - B_R$ alors la solution $\varphi(t, x_0, \lambda)$ bornée pour $t \geq 0$ et converge, quand $t \rightarrow +\infty$, vers le plus grand sous-ensemble invariant dans (3.2) inclus dans $A_R \cup E$, (voir Fig5).

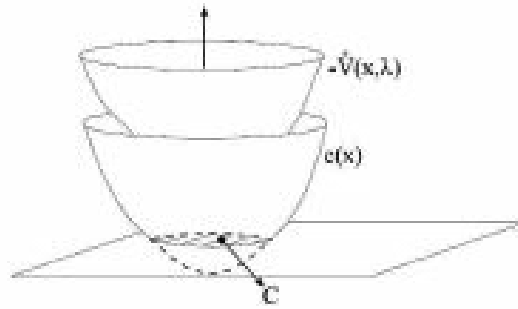


FIG. 2.4: [2]Dérivée de la fonction de Lyapunov

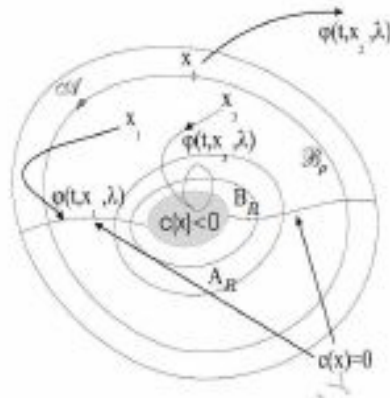


FIG. 2.5: [2]X(t)Approche de l'ensemble invariant

2.6 Estimation uniforme de l'attracteur du système de Lorenz

En 1963, Lorenz a établi un modèle atmosphérique très simplifié qui possède une forte sensibilité aux conditions initiales. Cette propriété explique le comportement chaotique des solutions du modèle. C'est un exemple célèbre de système différentielle au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres

Le système de Lorenz ultra simplifié, avec seulement trois variables, est représenté par les équations ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = cX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ. \end{cases} \quad (2.3)$$

où :

a : représente le nombre de Prandtl du fluide,

c : est proportionnel au nombre de Rayleigh,

b : est relié au vecteur d'onde convectif.

Les variables X et Y sont respectivement proportionnelles.

Nous choisissons à la fonction de Lyapunov $V(x, y, z)$, définie par :

$$V(x, y, z) = \frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}{2},$$

$$\alpha = \beta = 0 \text{ et } \gamma = a + c.$$

Alors

$$V(X, Y, Z) = \frac{X^2 + Y^2 + (Z - (a + c))^2}{2},$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(X, Y, Z) &= \dot{X} \cdot X + \dot{Y} \cdot Y + \dot{Z} (Z - (a + c)) \\ &= a(Y - X)X + (cX - Y - X \cdot Z)Y \\ &\quad + (X \cdot Y - bZ)(Z - (a + c)) \\ &= aXY - aX^2 + cXY - Y^2 - XZY \\ &\quad + X \cdot Y \cdot Z - (a + c)X \cdot Y - b^2 + b(a + c)Z \\ &\quad + -aX^2 - Y^2 - b(Z^2 - (a + c)Z) \end{aligned}$$

alors

$$\frac{dV}{dt}(X, Y, Z) = -aX^2 - Y^2 - b\left(Z - \frac{a + c}{2}\right)^2 + b\left(\frac{a + c}{2}\right)^2$$

Γ et donné par :

$$\Gamma \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{X^2}{\frac{b}{a} \left(\frac{a+c}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{b \left(\frac{a+c}{2}\right)^2} + \frac{\left(Z - \frac{a+c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2} = 1, \quad a, b, c > 0 \right\}.$$

alors si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ le système de Lorenz (3.3) est inclus dans la sphère suivante

$$\Omega = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / X^2 + Y^2 + (Z - a - c)^2 = R^2\},$$

où

$$R^2 = \begin{cases} \frac{(a+c)^2 b^2}{4(b-1)}, & \text{si } a \geq 1, b \geq 2 \\ (a+c)^2, & \text{si } a > \frac{b}{2}, b < 2 \\ \frac{(a+c)^2 b^2}{4a(b-a)^2}, & \text{si } a < 1, b \geq 2a \end{cases}$$

Avec le changement des variables dans le système (2.3), donné par $x = X$, $y = Y$,

$z = Z - \frac{5}{4}$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + ay, \\ \dot{y} = -y - x \left(z + \frac{5}{4}c \right) cx, \\ \dot{z} = -b \left(z + \frac{5}{4}c \right) xy. \end{cases}$$

Les valeurs des paramètres sont $a_N = 10$, $c_N = 28$, et $b_N = \frac{8}{3}$.

Une incertitude de $\pm 5\%$ est admise dans la détermination de ces paramètres.

Soient

$$a_m := 9.5, a_M := 10.5, c_m := 20 - \frac{28}{20} = \frac{93}{5}, c_M := 20 + \frac{28}{20} = \frac{107}{5},$$

$$b_m := \frac{8}{3} - \frac{8}{60} = \frac{38}{15}, \text{ et } b_M := \frac{8}{3} + \frac{8}{60} = \frac{42}{15},$$

où a_m désigne au a_{\min} et a_M désigne au a_{\max} .

On définit l'ensemble A par

$$A := \left\{ \lambda := (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a_m \leq a \leq a_M, b_m \leq b \leq b_M, c_m \leq c_M \right\}.$$

Pour estimer l'attracteur de ce système on utilise définition suivante :

Définition 2.11 Soit le système couplé de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \lambda_1), \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda_2), \end{cases}$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, λ_1 et λ_2 deux paramètres inclus dans \mathbb{R} avec

$$V(X, Y, Z) := cx^2 + 4ay^2 + 4az^2,$$

$$a(X, Y, Z) := c_mx^2 + 4a_my^2 + 4a_mz^2,$$

$$b(X, Y, Z) := c_Mx^2 + 4a_My^2 + 4a_Mz^2,$$

où a et b sont des fonctions, V est une fonction de Lyapunov, c'est-à-dire

$$a(x, y, z) \leq V(x, y, z) \leq b(x, y, z)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= 2c\dot{x} \cdot x + 8a\dot{y} \cdot y + 8a\dot{z} \cdot z \\ &= 2c(-ax + ay)x + 8a \left(-b \left(z + \frac{5}{4} + c \right) + xy \right) z \\ &\quad + 8a \left(-y - x \left(z + \frac{5}{4}c \right) + cx \right) y \\ &= -2acx^2 + 2ayx - 8ay^2 - 8axzy - 10acxy \\ &\quad + 8acxy - 8abz^2 + 10abcz + 8axyz \end{aligned}$$

alors

$$\dot{V}(a, b, c, x, y, z) = -2a(cx^2 - 4y^2) - 8abz^2 - 10abcz$$

donc

$$\begin{aligned} -\dot{V}(a, b, c, x, y, z) &= -2a(cx^2 - 4y^2) - 8abz^2 - 10abcz \\ &\geq 2a_m(c_mx^2 + 4y^2) + 8a_mb_mz^2 - 10a_Mb_Mc_M|z| \\ &= 2a_m(c_mx^2 + 4y^2) + 8a_mb_m \left[z^2 - \frac{5a_Mb_Mc_M}{4a_mb_m}|z| \right] \\ &= 2a_m(c_mx^2 + 4y^2) + 8a_mb_m \left[z^2 - 2\frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m}|z| + \left(\frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m} \right)^2 - \left(\frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m} \right)^2 \right] \\ &= 2a_m(c_mx^2 + 4y^2) + 8a_mb_m \left[z^2 - 2\frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m}|z| + \left(\frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m} \right)^2 \right] - 8a_mb_m \left(\frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m} \right)^2 \\ &= 2a_m(c_mx^2 + 4y^2) + 8a_mb_m \left(|z| - \frac{5a_Mb_Mc_M}{8a_mb_m} \right)^2 - \frac{(5a_Mb_Mc_M)^2}{8a_mb_m} \end{aligned}$$

alors

$$-\dot{V}(a, b, c, x, y, z) \geq c(x, y, z)$$

où

$$c(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma(|z| - \rho)^2 - \mu$$

pour

$$\alpha = 2a_m c_m, \beta = 8a_m, \gamma = 8a_m b_m, \rho = \frac{5a_M b_M c_M}{8a_m b_m}, \mu = \frac{(5a_M b_M c_M)^2}{8a_m b_m}$$

Nous allons maintenant utiliser théorème (3.1) avec $h(x, y, z) = c(x, y, z)$

$$f_1(x, y, z) := \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma(z - \rho)^2 - \mu,$$

$$f_2(x, y, z) := \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma(z + \rho)^2 - \mu$$

et

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c(x, y, z) < 0\}, F_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) < 0\},$$

d'où $\sup_{x \in H} b(x) \leq \sup_{x \in F_1} b(x)$ on calcule $\sup_{x \in F_1} b(x)$ par la technique des multiplicateurs de

Lagrange, en prenant comme fonction de Lagrange :

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \mu) &= c_M x^2 + 4a_M y^2 + 4a_M z^2 \\ &+ \mu \left[2a_m c_m x^2 + 8a_m y^2 + 8a_m b_m \left(z - \left(\frac{5a_M b_M c_M}{8a_m b_m} \right)^2 - \frac{(5a_M b_M c_M)^2}{8a_m b_m} \right) \right] \end{aligned}$$

Il reste alors de vérifier les conditions suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z) = 2x(c_m + 2\mu a_m c_m) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z) = 8y(a_M + 2\mu a_m) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z) = 8a_M z + 16\mu a_m b_m \left(z - \frac{5a_M b_M c_M}{8a_m b_m} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu}(x, y, z) = 2a_m(c_m x^2 + 4y^2) + 8a_m b_m \left(|z| - \frac{5a_M b_M c_M}{8a_m b_m} \right)^2 - \frac{(5a_M b_M c_M)^2}{8a_m b_m} = 0.$$

implique $x = 0, \mu = \frac{-a_M}{2a_m},$

$$(8a_M + 16\mu a_m b_m) z = 10_M b_M c_M$$

alors

$$z = \frac{10\mu a_M b_M c_M}{8a_M + 16\mu a_m b_m}$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{10 \left(\frac{-a_M}{a_m} \right) a_M b_M c_M}{8 \left(a_M + 2 \left(\frac{-a_M}{a_m} \right) a_m b_m \right)}$$

donc

$$z = \frac{5a_M b_M c_M}{8a_m (b_m - 1)}$$

et avec quatrième équation

$$8a_m y^2 + 8a_m b_m \left(\frac{5a_M b_M c_M}{8a_m (b_m - 1)} - \frac{5a_M b_M c_M}{8a_m b_m} \right)^2 - \frac{(5a_M b_M c_M)^2}{8a_m b_m} = 0$$

implique

$$y^2 = \frac{a_M^2 b_M^2 c_M^2 (b_m - 2)}{64a_m^2 (b_m - 1)^2},$$

Le maximum est atteint à :

$$x = 0$$

$$y^2 = \frac{25a_M^2 b_M^2 c_M^2 (b_m - 2)}{64a_m^2 (b_m - 1)}$$

$$z = \frac{5a_M b_M c_M}{8a_m (b_m - 1)}$$

et donc

$$b(x, y, z) := c_M x^2 + 4a_M y^2 + 4a_M z^2$$

implique

$$\sup_{(x,y,z) \in F_1} b = c_M + 4a_M \left(\frac{a_M^2 b_M^2 c_M^2 (b_m - 2)}{64a_m^2 (b_m - 1)^2} \right) + 4a_M \left(\frac{5a_M b_M c_M}{8a_m (b_m - 1)} \right)^2$$

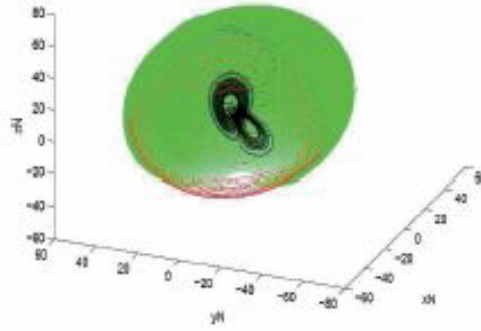
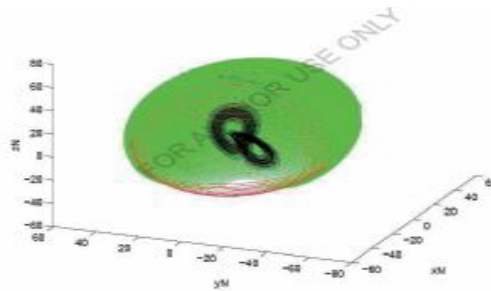
alors

$$\sup_{(x,y,z) \in F_1} b = \left(\frac{25a_M^2 b_M^2 c_M^2}{16a_m^2 (b_m - 1)} \right) = \frac{3^6 \times 7^9}{2^3 \times 5 \times 19^2 \times 23} < 88575,75 < R < 88576.$$

Ainsi, du théorème (3.3), on déduit que l'attracteur de Lorenz est à l'intérieur d'une ellipsoïde :

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c_m x^2 + 4a_m y^2 + 4a_m z^2 < R = 88576\}.$$

L'estimation ci-dessus est une idée de l'attracteur de Lorenz, où l'extérieur d'une ellipsoïde correspond à l'ensemble A_R et l'intérieur d'une ellipsoïde correspond à l'ensemble B_R .

FIG. 2.6: [2](a) $(x(t),y(t),z(t))$, $(a,b,c)=(9.5,26.6,2.8)$ FIG. 2.7: [2]Estimztion uniforme d'attracteur de Lorenz $(x_0,y_0,z_0)=(20,-70,40)$

2.7 Estimation de l'attracteur de Rössler

Soit le système de Rössler suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = - (y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + xz - cx. \end{cases}$$

où a , b et c sont les paramètres du système nous utilisons les valeurs usuelles suivantes :

$$a = b = 0.2, c = 14.0.$$

Détermination de l'ensemble $\bar{\Omega}_M$

Nous cherchons une estimation théorique de l'attracteur de Rössler. Pour cela posons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1(x, y, z) = cx^2 + cy^2 + az^2$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt}(x, y, z) &= -2c\dot{x}x + 2c\dot{y}y + 2c\dot{z}z \\ &= 2c(-y - z)x + 2c(x + ay)y + 2a(b + xz - cz)z \end{aligned}$$

alors

$$\frac{dV_1}{dt}(x, y, z) = -2(acy^2 + acz^2 - abz + cxz + axz^2)$$

$$C_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (-acy^2 + acz^2 - abz + cxz + axz^2) < 0\},$$

c'est-à-dire que la fonction φ proposée dans la Théorème (3.3) est donnée par :

$$\varphi(x, y, z) = 2(-acy^2 + acz^2 - abz + cxz + axz^2).$$

On trouve alors :

$$\sup_{X \in C_1} V(X) = 9,8 \cdot 10^7$$

Ainsi, $\bar{\Omega}_M$ est l'ellipsoïde définie par :

$$\bar{\Omega}_M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : cx^2 + cy^2 + az^2 \leq 9,8 \cdot 10^7\}.$$

Toutes les solutions bornées du système de Rössler, pour les paramètres fixés auparavant, convergent dans cet ellipsoïde (selon le principe d'invariance étendu). Ce résultat peut être affiné (on peut trouver une autre fonction V_2 conduisant à un rayon plus petit).

2.7.1 D'étermination d'un ensemble $\bar{\Omega}_M$

L'attracteur de Rössler se situe dans le demi-espace $z > 0$

Nous allons démontrer que, pour l'attracteur classique de Rössler, les solutions (asymptotiquement) sont toujours strictement au-dessus du plan $z = 0$. Nous utiliserons pour cela la variance du Principe d'invariance de LaSalle pour montrer que les solutions bornées de l'attracteur convergent dans le demi-espace $z > 0$.

Considérons donc la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2(x, y, z) = z.$$

On a

$$L_t V_2(x, y, z) = xz - cz + b$$

par définition

$$C_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -xz + cz - b > 0\}.$$

On cherche la valeur de $m := \inf_{(x, y, z) \in A} V_2(x, y, z)$; on la calcule comme précédemment grâce au programme d'optimisation Knitro, et on obtient numériquement :

$$m := \inf_{(x, y, z) \in A} V_2(x, y, z) = 6,5 \cdot 10^{-7}.$$

Définissons alors : $\bar{\Omega}_M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 6,5 \cdot 10^{-7}\}$. On en conclut donc, d'après le Théorème (3.4), que l'attracteur de Rössler est inclus dans l'ensemble

$$\bar{\Omega}_M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 6,5 \cdot 10^{-7}\}$$

Par ailleurs, pour affiner au maximum notre ensemble, $\bar{\Omega}_m$ on peut démontrer que les solutions de l'attracteur de Rössler ne rentrent jamais dans une région située le long du demi-axe positif, en prenant par exemple comme fonction de Lyapunov une parabolôïde elliptique orientée selon l'axe Oz contenant l'origine et en montrant que les solutions ne rentrent jamais à l'intérieur (voir Figure 2.8).

D'après les Théorèmes (3.3) et (3.4), toutes les solutions bornées (Figure.8). Estimation de l'attracteur de Rössler.

du système de Rössler convergent .

$$\bar{\Omega}_M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : cx^2 + cy^2 + az^2 \leq 9,8 \cdot 10^7\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 6,5 \cdot 10^{-7}\}.$$

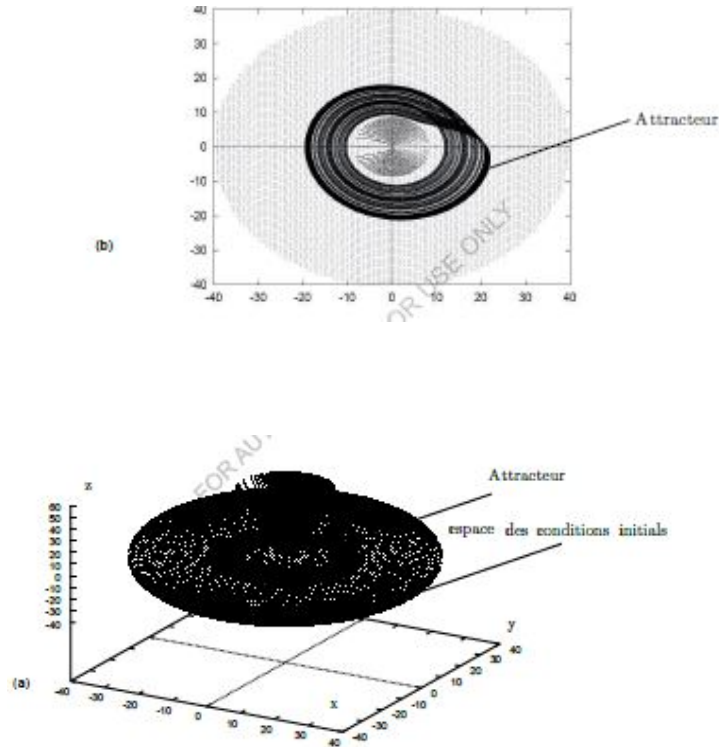


FIG. 2.8: [2]Estimation de l'attracteur de Rössler

(Fig 8). Illustration numérique de l'estimation de l'attracteur de Rössler, et du «trou» le long du demi axe positif Oz , pour les paramètres $a = b = 0.2$ et $c = 14$ du système.

(a) Vue tridimensionnelle, (b) projection sur le plan xy . L'attracteur (en noir foncé) est strictement contenu dans l'ellipsoïde et à l'extérieur de l'hyperboloïde infinie d'axe de révolution Oz , et vérifie $z > 0$.

CHAPITRE 3

APPLICATION

3.1 Le système de Qi

Le système de Qi a été étudié en 1992 par Leonov et Boichenko [9] est donnée comme suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) + yz, \\ \frac{dy}{dt} = cx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (3.1)$$

où x, y , et $z \in \mathbb{R}^3$, a, b et c des paramètres positive de système (3.1) quand $a = 35$, $b = 7$, et $c = 25$, est chaotique.

système (3.1) est différent du système bien connu Lorenz système Rössler système chen, système Lü et même famille de système Lorenz. Ainsi, de nombreux comportements dynamiques du système chaotique (3.1) sont encore inconnus, motivant le travail à présenter.

Dans cette partie allons étudier les comportements dynamiques du système Lorenz dans le cas particulier où $a = -1$ et nous comparons nos résultats avec les résultats obtenus précédemment pour le cas général $a \in \mathbb{R}$.

3.1.1 Comportement dynamique du système (3.1)

Théorème 9 *supposer que $\lambda > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $m > 0$, $c > 0$ avec*

$$\Omega_{\lambda, m} \left\{ (x, y, z) / \lambda x^2 + (\lambda + m) y^2 + m \left[z - \frac{(a + c) \lambda + mc}{m} \right]^2 \leq R_{\lambda, m}^2 \right\}, \quad (3.2)$$

où

$$R_{\lambda,m}^2 = \begin{cases} \frac{b^2}{4a(b-a)} \frac{[(a+c)\lambda+mc]^2}{m}, & a \geq 1, b \geq 2a, \\ \frac{b^2}{4(b-1)} \frac{[(a+c)\lambda+mc]^2}{m}, & a > 1, b \geq 2, \\ [(a+c)\lambda+mc]^2 & b < 2a, b < 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

alors $\Omega_{\lambda,m}$ est ensemble bromée et invariance positive de système (3.1).

Preuve. Définir la fonction de type Lyapunov

$$V_{\lambda,m}(x) = V_{\lambda,m}(x, y, z) = \lambda x^2 + (\lambda + m)y^2 + m \left[z - \frac{(a+c)\lambda+mc}{m} \right]^2, \quad \forall m > 0, \lambda > 0. \quad (3.4)$$

alors la dérivée de est $V_{\lambda,m}(x)$ est

$$\frac{dV_{\lambda,m}(X)}{dt} \Big|_2 = 2\lambda x \frac{dx}{dt} + 2(m+\lambda)y \frac{dy}{dt} + 2m \left[z - \frac{(a+c)\lambda+mc}{m} \right] \frac{dz}{dt}, \quad (3.5)$$

$$= 2\lambda x (ay - ax + az) + 2(m+\lambda)y(cx - y - xz) + 2m \left[z - \frac{(a+c)\lambda+mc}{m} \right] (xy - bz), \quad (3.6)$$

$$= -2a\lambda x^2 - 2(m+\lambda)y^2 - 2mbz^2 + 2b[(a+c)\lambda+mc]z.$$

soit $\frac{dV_{\lambda,m}(X)}{dt} = 0$ avec le condition $\lambda < \frac{-mc}{a+b}$,

on pose

$$c(x) = 2a\lambda x^2 + 2mbz^2 - 2b[(a+c)\lambda+mc]z$$

on a $-\dot{V}(x) > c(x)$ et $\dot{V} < 0$,

donc

$$-\dot{V}(x) \geq 2a\lambda x^2 + 2mbz^2 - 2b[(a+c)\lambda+mc]z$$

si $c(x) \geq 0$ et $z \leq 0$ on obtenir

$$\begin{cases} 2mbz = 2b[(a+c)\lambda+mc], \\ \vee \\ z = 2b[(a+c)\lambda+mc] \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} z < 0 \quad \wedge \quad z > \frac{b[(a+c)\lambda+mc]}{m}, \\ \vee \\ z > 0 \quad \wedge \quad z < \frac{b[(a+c)\lambda+mc]}{m} \end{cases}$$

on peut obtenir un ensemble fermé borné

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{\lambda x^2}{b[(a+c)\lambda+mc]^2/4am} + \frac{(m+\lambda)^2}{b[(a+c)\lambda+mc]^2/4m} + \frac{m[z - ((a+c)\lambda+mc)/2m]^2}{[(a+c)\lambda+mc]^2/4m} = 1 \right\}. \quad (3.7)$$

Alors si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ le système de Qi (3.1) est inclus dans la sphère.

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda x^2 + (m + \lambda)y^2 + m[z - ((a + c)\lambda + mc)/2m]^2 = R^2\}.$$

Le système chaotique (3.1) étant borné la fonction continue peut atteindre sa valeur maxi-male sur l'ensemble fermé borné Γ l'ci-dessus. Ainsi, les solutions du système de chaos (3.1) sont contenues dans l'ensemble défini par :

$$\{(x, y, z) \mid V_{\lambda,m}(X) \leq \max V_{\lambda,m}(X) = R_{\lambda,m}^2, X \in \Gamma\}.$$

Nous obtiendrons la valeur maximale de la fonction (3.4) sur Γ en traitant le problème extremum conditionnel ci-dessous :

$$\max V_{\lambda,m}(X) = \max \left\{ \lambda x^2 + (\lambda + m)y^2 + m \left[z - \frac{(a + c)\lambda + mc}{m} \right]^2 \right\}, \quad (3.8)$$

où

$$\frac{\lambda x^2}{b[(a+c)\lambda+mc]^2/4am} + \frac{(m+\lambda)y^2}{b[(a+c)\lambda+mc]^2/4am} + \frac{m[z - ((a+c)\lambda+mc)/2m]^2}{[(a+c)\lambda+mc]^2/4m} = 1.$$

Dénoter

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}x &= x_1, & \sqrt{\lambda+m}y &= y_1, & \sqrt{m}z &= z_1 \\ \frac{(a+c)\lambda+mc}{2\sqrt{m}} &= l, & \frac{b[(a+c)\lambda+mc]^2}{4am} &= n^2, & \frac{b[(a+c)\lambda+mc]^2}{4m} &= k^2, \end{aligned}$$

alors (3.8) devient la form suivante :

$$\max V_{\lambda,m}(X) = \max \{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - 2l)^2\}, \quad (3.9)$$

où

$$\frac{x_1^2}{n^2} + \frac{y_1^2}{k^2} + \frac{(z_1 - l)^2}{l^2} = 1$$

On peut résoudre le problème (3.9) selon la méthode d'optimisation et obtenir l'expression de $R_{\lambda,m}^2$ comme suit :

$$R_{\lambda,m}^2 = \begin{cases} \frac{b^2}{4a(b-a)} \frac{[(a+c)\lambda+mc]^2}{m}, & a \geq 1, b \geq 2a, \\ \frac{b^2}{4(b-1)} \frac{[(a+c)\lambda+mc]^2}{m}, & a > 1, b \geq 2, \\ [(a+c)\lambda+mc]^2, & b < 2a, b < 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Remarque 4 Supposons $m = 1$ et $\lambda = 1$ dans le théorème , alors on à que

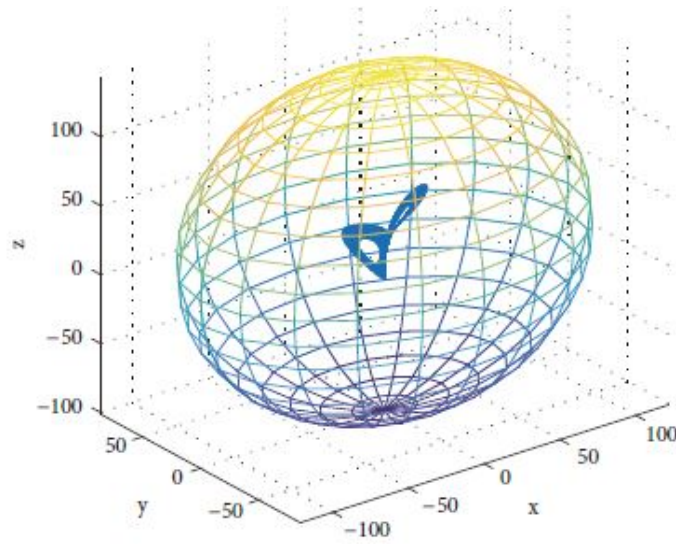


FIG. 3.1: [15]Localisation de l'attracteur chaotique du système Qi xOyz

$$\Omega_{1,1} = \{(x, y, z) / x^2 + 2y^2 + (z^2 - a - 2c)^2 \leq L^2\}.$$

est l'ensemble ultime $\Omega_{1,1}$ est bornée et positivement invariant du système (3.1) où

$$L^2 = \begin{cases} \frac{b^2(a+2c)^2}{4a(b-a)}, & a \geq 1, b \geq 2a, \\ \frac{b^2(a+2c)^2}{4(b-1)}, & a > 1, b \geq 2, \\ (a+2c)^2 & b < 2a, b < 2. \end{cases} \quad (3.11)$$

prenons des valeurs de paramètres positives $a = 35, b = 7$, et $c = 25$ dans $\Omega_{1,1}$ alors nous pouvons conclure que

$$\Omega_{1,1} = \{((x, y, z) / x^2 + 2y^2 + (z - 20.25)^2 \leq 121.45^2)\} \quad (3.12)$$

l'ensemble est borné. Sur la Figure (10) nous étudions localisation de l'attracteur chaotique du système (3.1) dans l'espace $xOyz$ défini par $\Omega_{1,1}$

En utilisant la méthode directe de Lyapunov, ils ont prouvé sa dissipative au sens de Levinson, c'est-à-dire l'existence d'un ensemble absorbant globale borné contenant un attracteur global, et ont également construit plusieurs ensembles positivement invariants en present les résultats suivants :

Théorème 10 soit $2\sigma - b \geq 0$ et $a(b-2) \geq 0$, puis, pour un solution arbitraire $(x(t), y(t), z(t))$ du système (3.1) la suivante l'estimation est vraie :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} [y^2(t) + (z(t) - r)^2] \leq l^2 r^2, \quad (3.13)$$

où

$$l = \begin{cases} 1, & b \leq 2, \\ \frac{b}{2\sqrt{b-1}}, & b > 2. \end{cases}$$

Théorème 11 Toutes les trajectoires $(x(t), y(t), z(t))$, du système entrent l'ellipsoïde (3.1)

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} [2(\sigma - ar)z(t) - x^2(t) + ay^2(t)] \geq 0.$$

Théorème 12

$$x^2 + \delta y^2 + (a + \delta) \left(z - \frac{\sigma + \delta r}{a + \delta} \right)^2 \leq R^2, \quad (3.14)$$

où

$$R = \sqrt{\frac{b}{2c(a + \delta)}}(\sigma - \delta r),$$

$$\delta > -a, c = \min\left(\sigma, 1, \frac{b}{2}\right). \quad (3.15)$$

Notre approche pour construire l'ultime limite et les ensembles d'attractivité globalement exponentiels supposent que ensembles correspondants dépendent de certains paramètres λ et m , c'est-à-dire que pour les paramètres λ et m fixes du système (3.1), nous avons un série d'ensembles dépendant de λ et m . Soit $\lambda = 1$ et $m = (\delta - 1) \forall (\delta > 1)$ dans (3.2), alors l'ensemble $\Omega_{\lambda, m}$ dans (3.2) coïncide avec (3.14).

Bien que le théorème (10) donne l'ensembel du système (3.1), les ensembles attractifs exponentiels globaux du système (3.1) sont toujours inconnu. Les ensembles attractifs exponentiels globaux.

Théorème 13 Supposons que $a > 0, b > 0$ et $c > 0$ et nous dénoter $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

$$V_{\lambda, m}(X) = V_{\lambda, m}(x, y, z) = \lambda x^2 + (\lambda + y^2) + m \left[z - \frac{(a + c)\lambda + mc}{m} \right]^2, \forall \lambda > 0, m > 0,$$

$$L_{\lambda, m}^2 = \frac{b[(a + c)\lambda + mc]}{\theta m}, \theta = \min(a, b, 1) > 0$$

Puis l'estimation

$$[V_{\lambda, m}(X(t)) - L_{\lambda, m}^2] \leq [V_{\lambda, m}(X(t_0)) - L_{\lambda, m}^2] \exp^{-\theta(t-t_0)}$$

pour le système (3.1)

Ainsi, par définition, $\Psi_{\lambda, m} = \{V_{\lambda, m}(X) \leq L_{\lambda, m}^2\}$ est l'ensemble attractif globalement exponentiel du système (3.1) c'est

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_{\lambda, m}(X) \leq L_{\lambda, m}^2.$$

Preuve. $V_{\lambda, m}(X) = V_{\lambda, m}(x, y, z) = \lambda x^2 + (\lambda + y^2) + m \left[z - \frac{(a+c)\lambda + mc}{m} \right]^2, \forall \lambda > 0, m > 0,$

puis la dérivée de $V_{\lambda,m}(X)$ est

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_{\lambda,m}(X)}{dt} \right|_2 &= 2\lambda x \frac{dx}{dt} + 2(m+\lambda)y \frac{dy}{dt} + 2m \left[z - \frac{(a+c)\lambda + mc}{m} \right] \frac{dz}{dt}, \\ &= 2\lambda x (ay - ax + az) + 2(m+\lambda)y(cx - y - xz) + 2m \left[z - \frac{(a+c)\lambda + mc}{m} \right] (xy - bz), \\ &= 2a\lambda x^2 - 2(m+\lambda)y^2 - 2mbz^2 + 2b[(a+c)\lambda + mc]z, \\ &\leq -a\lambda x^2 - (\lambda+m)y^2 - mbz + 2b[(a+c)\lambda + mc]z, \\ &= -a\lambda x^2 - (\lambda+m)y^2 - mb \left(z - \frac{(a+c)\lambda + mc}{m} \right)^2 + b \frac{[(a+c)\lambda + mc]^2}{m}, \\ &\leq -\theta V_{\lambda,m}(X) + b \frac{[(a+c)\lambda + mc]^2}{m}, \\ &\leq -\theta [V_{\lambda,m}(X) - L_{\lambda,m}^2]. \end{aligned}$$

Donc nous avons

$$-\theta [V_{\lambda,m}(X(t)) - L_{\lambda,m}^2] \leq -\theta [V_{\lambda,m}(X(t_0)) - L_{\lambda,m}^2] \exp^{-\theta(t-t_0)},$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_{\lambda,m}(X) \leq L_{\lambda,m}^2.$$

Par définition, $\Psi_{\lambda,m} = \{V_{\lambda,m}(X) \leq L_{\lambda,m}^2\}$ est la attractif exponentiel du système (3.1).

3.2 Fonctions de Lyapunov pour l'estimation de la dissipative au sens de Levinson pour le système modifié de Lorenz

Le système modifié de Lorenz est donné en 2018 avec [8] comme suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - dy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (3.16)$$

où σ et b sont des paramètres positifs, d est une paramètre réel où $r > d$. Pour le système de Lorenz, on a $d = 1$. Au même temps, pour les systèmes Lu et Chen on obtient $d < 0$. [5] et [6].

Lemme 3.1 [7] *si $2\sigma \leq b$, alors, pour toute solution du système (3.16), l'inégalité suivant.*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \left[z(t) - \frac{x^2(t)}{2\sigma} \right] \geq 0, \quad (3.17)$$

est vrai.

Pour prouver le lemme, il suffit de noter que, pour la fonction

$$V(x, z) = z - \frac{x^2}{2\sigma},$$

La relation

$$\dot{V}(x(t), z(t)) = -bV(x(t), z(t)) + \left(1 + \frac{x^2}{2\sigma}\right) - x^2(t)$$

est vrais. Par conséquent

$$V(x(t), z(t)) \geq \exp^{-bt} V(x(0), z(0))$$

Cela donne l'estimation (3.17). Rappelons que le système (3.16) est dissipatif au sens de Levinson s'il existe un nombre R tel que, pour tout $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ la relation

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t), y^2(t), z^2(t)) \leq R$$

est vrais.

Théorème 14 Soient $2\sigma \geq b$ et $b + 2d > 0$, alors le système (3.16) est dissipatif au sens de Levinson.

La preuve est basée sur la construction de la fonction de Lyapunov

$$V(x, y, z) = y^2 + z^2 + Ax^2 - Bxy + Cz,$$

où A , B et C sont certains paramètres. Le paramètre C est choisi tel que

$$\frac{d}{dt} V = (x(t), y(t), z(t)) = -2(bz^2(t) + dy^2(t) + A\sigma x^2(t)) - B(\sigma y^2(t) + rx^2(t)z(t) - bCz(t)).$$

Autrement dit, C est tel que le membre de droite de cette relation ne contient pas les termes $Dx(t)y(t)$

De plus, en utilisant le lemme, nous pouvons facilement prouver l'existence de $A > 0$, $B > 0$, $Q > 0$, et $P > 0$ tels que, pour toute solution du système (3.16) et t suffisamment grand, la relation

$$\dot{V}(x, y, z) \leq -PV(x, y, z) + Q$$

est vrai. Cela donne l'inégalité

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} V = (x(t), y(t), z(t)) \leq \frac{Q}{P},$$

ce qui prouve le théorème.

pour $2\sigma \leq b$, on transforme le système (3.16) comme suit : Par le changement de variables

$$\eta = \sigma(y - x), \quad \zeta = z - \frac{x^2}{b},$$

on réduit le système (3.16) à la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta \\ \dot{\eta} = -(\sigma + d)\eta + \sigma\zeta x + \sigma(r - d)x - \frac{\sigma}{b}x^3, \\ \dot{\zeta} = -b\zeta - \end{cases}$$

De plus, par le changement de variables alors

$$t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad x \rightarrow \sqrt{b(r-d)}x,$$

$$\eta \rightarrow \sqrt{b\sigma}(r-d)v, \quad \zeta \rightarrow (r-d)u,$$

on ramène ce système à la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -\lambda v - xv + x - x^3, \\ \dot{u} = -\alpha u - \beta xv, \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$$\lambda = \frac{\sigma + d}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-d)}}, \quad \beta = \frac{2\sigma - b}{\sigma}.$$

Nous listons maintenant les systèmes qui peuvent être réduits à (3.16) et donc au système (3.18) :

le système de Lorentz [4] : $d = 1, r > 0$,

le système de Chen [6] : $d = -c, c > \frac{\sigma}{2}, r = c - \sigma$,

le système Lu [5] : $d = -c, c > 0, r = 0$,

le système Yang [12] : $d = 0$.

Le système Shimizu-Morioka [13]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\lambda y + x - xz, \quad \dot{z} = -\alpha(x - z^2).$$

Nous réduisons le système (3.18) par le changement $v = y, u = z - x^2$ Ici $\beta = 2$ Nous introduisons maintenant la fonction de Lyapunov

$$V(x, v, u) = v^2 - \frac{u^2}{\beta} - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

La dérivée de la fonction V sur les solutions du système (3.18) à la forme

$$\frac{dV(x(t), v(t), u(t))}{dt} = 2(-\lambda v^2(t) + \frac{\alpha}{\beta}u^2(t)). \quad (3.19)$$

Par le raisonnement standard de la théorie contemporaine de la stabilité, on déduit facilement l'assertion suivante de (3.18)

Théorème 15 Soient $\lambda < 0$ et $\beta > 0$, alors toute trajectoire du système (3.18) qui n'appartient pas aux variétés stables des selles $x = v = u = 0$, $x = \pm 1$, $v = u = 0$ tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow +\infty$.

et si $\lambda > 0$ et $\beta < 0$, alors toute trajectoire du système (3.18) s'approche d'un certain état d'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Notons que, pour le système (3.16), ces conditions prennent la forme $\sigma + d < 0$, $2\sigma > b$, $\sigma + d > 0$, $2\sigma < b$.

Il est facile de voir que, pour $\beta = 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0.$$

Cela implique que, pour $\lambda > 0$ (c'est-à-dire pour $\sigma + d > 0$, $2\sigma = b$), toutes les trajectoires se rapprochent de l'état d'équilibre

comme $t \rightarrow +\infty$.

Ainsi, les théorèmes (3) et (4) donnent l'assertion suivante :

Corollary 16 suppose que $2\sigma > b$ si $b + 2d > 0$, alors le système (3.16) est dissipatif au sens de Levinson ;

si $\sigma + d < 0$, alors le système (3.16) n'est pas dissipatif au sens de Levinson.

Nous introduisons maintenant un opérateur de translation le long des trajectoires du système $F^t(x_0)$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{3.20}$$

$$F^t(x_0) = x(t, x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad x(0, x_0) = x_0.$$

Supposons que les solutions du système (3.20) sont définies pour tout $t \in [0, +\infty)$.

On sait que si, pour certains $\zeta > 0$,

$$\operatorname{div} f(x) < -\zeta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.21}$$

alors, pour tout ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ avec dimension fini n de volume $V(K)$, la relation

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(F^t(K)) = 0 \tag{3.22}$$

est vrai.

La propriété (3.22) est vraie pour le système (3.16) avec la condition

$$\sigma + b + d > 0.$$

Ainsi, pour

$$-\sigma > d > -\sigma - b,$$

le système (3.16) est un système avec contraction des volumes et presque toutes ses solutions tendent vers l'infini lorsque $t \rightarrow +\infty$.

D'après les théorèmes (15 et 16), ce la implique que si $2\sigma > b$, alors la dissipative au sens de Levinson a lieu pour $d > -\frac{b}{2}$. En même temps, cette propriété est absente pour $d < -\sigma$.

Notons que la dissipative au sens de Levinson pour $d \geq 0$ a été prouvée dans [14]. La condition $d > -\frac{b}{2}$ pour le système de Chen avec $2\sigma > b$ a été établi dans [15]. La condition $d < -\sigma$, $2\sigma > b$ a été présentée dans [16].

CONCLUSION

On a étudié dans ce travail de mémoire le système dynamique chaotique, on consacré la première partie à l'étude des définitions des systèmes dynamiques et leurs types.

La deuxième partie est dédiée à l'étude de système dynamique chaotique, fonction de Lyapunov, attracteur, la sensibilité aux conditions initiales sont leurs principes caractéristiques et étudié théorème de le principe de LaSall , à la fin nous abordons quelques exemples de système dynamique chaotique en temps continue et on appliquent le principe de LaSall.

BIBLIOGRAPHIE

- [11] [1] Floriane Anstett, Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : synthèse et cryptanalyse, Université Henri Poincaré Nancy I, 2006. 18, 21
- [2] [2] S. Derivière & M.A. Aziz-Alaoui, Estimation d'attracteurs étranges, application à l'attracteur de Rössler, Compte Rendu de 5^{ème} Rencontre du Non-linéaire 2002, pp. 67-71 (2002). 16, 24, 28, 29, 34, 36
- [13] [3] J.P. LaSalle, The stability of Dynamical Systems, Z. Artstein (1976). 25
- [15] [4] E. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," J. Atmospheric Sci., 20, 130–141 (1963). 44
- [16] [5] J. Lu and G. Chen, "A new chaotic attractor coined," Intern. J. Bifurcat. Chaos, 12, No. 3, 652–661 (2002). 42, 44
- [17] [6] G. Chen and X. Dong, From Chaos to Order : Methodologies, Perspectives and Applications, World Scientific Publishing, Singapore (1998). 42, 44
- [18] [7] G. A. Leonov, A. I. Bunin, and N. Kokschi, "Attractor localisation of the Lorenz system," Z. Angew. Math. Mech., 67, No. 12, 649–656 (1987). 42
- [1] [8] G. A. Leonov LYAPUNOV FUNCTIONS IN THE GLOBAL ANALYSIS OF CHAOTIC SYSTEMS. Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 70, No. 1, June, 2018 42
- [31] [9] [31] G. A. Leonov and V. A. Boichenko, "Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors," Acta Applicandae Mathematicae, vol. 26, no. 1, pp. 1–60, 1992. 37
- [19] [10] G. Tigan and D. Opris, "Analysis of a 3D chaotic system," Chaos, Solutions Fractals, 36, No. 5, 1315–1319 (2008).
- [20] [11] G. Tigan and D. Constanţinescu, "Heteroclinic orbits in T and Lu systems," Chaos, Solutions Fractals, 42, No. 7 (2014).
- [21] [12] Q. Yang and G. Chen, "A chaotic system with one saddle and two stable node-foci," Intern. J. Bifurcat. Chaos, 18, 1393–1414 (2008). 44
- [22] [13] T. Shimizu and N. Morioka, "On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one," Phys. Lett. A, 76, No. 3–4, 201–204 (1980). 44

- [23] [14] G. A. Leonov, “Fishing principle for homoclinic and heteroclinic trajectories,” *Non-linear Dynam.*, 78, 2751–2758 (2014). 46
- [24] [15] F. Zhang, X. Liao, C. Mu, G. Zhang, and Y. A. Chen, “On global boundedness of the Chen system,” *Discrete Contin. Dynam. Syst., Ser. B*, 22, No. 4, 1673–1681 (2017).
- [25] [16] G. A. Leonov, B. R. Andrievskii, and R. N. Mokaev, “Asymptotic behavior of solutions of Lorenz-type systems. Analytic results and structures of computer errors,” *Vestn. St.-Petersburg. Univ., Ser. 1, Mat. Mekh. Astronom.*, 4, No. 1, 25–37 (2017).
- [6] [17] H.M. Rodrigues, *Abstract Methods for Synchronization and Applications, Applicable Analysis*, Vol 62, pp. 263-296, (1996).