



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université de L'arbi Ben M'hidi, Oum-El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Thème

**La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour
le système le plus général de dimension quatre**

Présenté par :

Beghdouche Sabrina

Sous la direction de :

Pr. Rezzag Samia

Soutenu le : 24/06/2023, devant le jury

Dr. Beghou Samira

Présidente

Univ. d'Oum EL Bouaghi

Pr. Rezzag Samia

Rapporteuse

Univ. d'Oum El Bouaghi

Dr. Soula Yamina

Examinatrice

Univ. d'Oum El Bouaghi

Année universitaire : 2022-2023

Table des matières

Introduction générale	6
1 Généralités sur le système dynamique	7
1.1 Système dynamique	7
1.2 Orbite	8
1.3 Flot	8
1.4 Invariance et attraction	9
1.4.1 Ensemble invariant	9
1.4.2 Attracteurs	9
1.4.3 Bassin d'attraction	9
1.4.4 Différents types d'attracteurs	9
1.5 Points d'équilibres	11
1.6 Etude de stabilité	11
1.6.1 Stabilité des systèmes non linéaires	11
1.6.2 Stabilité au sens de Lyapunov	13
1.7 Bifurcation	15
1.8 Théorie de chaos	19
1.8.1 Propriétés du chaos	19
1.8.2 Transition vers le chaos	21
1.8.3 Exposant de Lyapunov	22
1.8.4 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	24

1.8.5	Utilisation des exposants de Lyapunov au calcul de dimension de l'attracteur	25
2	Systèmes hyperchaotiques	26
2.1	Hyperchaotification de système chaotique	26
2.2	Premier système hyperchaotique	27
2.3	Système de Pan	28
2.3.1	Comportement dynamique du système hyperchaotique de Pan . . .	29
3	La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre	32
3.1	La borne extrême et l'ensemble positivement invariant	33
3.2	L'estimation de la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre	33
3.3	Application	37
	Conclusion générale	39

Remerciements

- Je tiens avant tout à remercier Dieu, qui m'a béni de la patience et de la détermination pour entreprendre et achever mon mémoire.
- Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à Pr. Rezzag Samia de m'avoir encadré dans mon mémoire de fin d'étude.
- Je tiens à remercier Dr. Beghou Samira pour avoir accepté de présider le jury de soutenance et pour avoir pris le temps de lire attentivement mon mémoire.
- J'aimerais également remercier Dr. Soula Yamina d'avoir accepté de participer au jury de soutenance et d'avoir pris le temps de lire attentivement et d'examiner en détail mon mémoire.

Je dédie mon mémoire à toute ma famille et particulièrement mes parents LAKHDAR et FATIHA, je les remercie beaucoup pour leur soutien moral et matériel qu'il m'ont apporté durant les années d'études que dieu leurs prête une longue vie.

A mes soeurs : Kenza, Hiba, Rania et leurs maris.

A leurs enfants : Adem, Chihab, Nesrine, Lina, Mounib.

A mes amies sans exception.

Introduction générale

Le chaos est un phénomène complexe et imprévisible qui se produit dans les systèmes dynamiques non linéaires. Il se caractérise par une sensibilité extrême aux conditions initiales, ce qui signifie que de petites variations dans les conditions initiales peuvent conduire à des résultats très différents à long terme.

Au XIXe siècle, les mathématiciens ont commencé à s'intéresser de manière plus approfondie aux systèmes dynamiques non linéaires présentant des comportements complexes tels que le chaos et les attracteurs étranges. L'un des premiers mathématiciens à étudier les systèmes dynamiques non linéaires était **Henri Poincaré**.

En 1963, le météorologue américain E. Lorenz a fait une découverte révolutionnaire qui allait changer la façon dont les scientifiques percevaient les systèmes dynamiques non linéaires et leur comportement. Lorenz travaillait sur des modèles mathématiques simplifiés pour la prédiction du temps atmosphérique à l'aide d'équations différentielles. Lors d'une simulation informatique, il a accidentellement introduit des valeurs arrondies au lieu des valeurs précises dans les équations. Il s'attendait à ce que les résultats soient similaires, mais il a été surpris de constater que de petites différences dans les conditions initiales conduisaient à des résultats radicalement différents. Cette découverte a conduit Lorenz à formuler l'idée que de petites variations dans les conditions initiales d'un système peuvent conduire à des résultats différents à long terme.

Dans les années 1970 et 1980, la théorie du chaos a commencé à prendre forme avec les contributions de chercheurs tels que Michell Feigenbaum, James Yorke et Benoit Mandelbrot. Des concepts tels que les bifurcations, les attracteurs étranges, les fractales et les exposants de Lyapunov ont été développés pour caractériser et comprendre les comportements chaotiques. Des outils mathématiques tels que les systèmes dynamiques

et la théorie de l'information ont été appliqués à l'étude du chaos.

Selon Alexandre Lyapunov, la façon la plus pertinente pour la description de cette caractéristique est à travers l'utilisation des exposants positifs de Lyapunov. Un système dynamique est dit hyperchaotique s'il a plus d'un exposant de Lyapunov positif.

En particulier, l'estimation de bornes d'un système chaotique est importante pour l'étude du comportement qualitatif de ce système. Si nous arriverons à montrer qu'un système chaotique a un ensemble globalement attractif, alors nous pourrons déduire que le système ne peut pas avoir des points d'équilibres, des solutions périodiques, des solutions quasi-périodiques, ou d'autres attracteurs chaotiques en dehors de cet ensemble. Cela simplifie l'analyse des propriétés dynamiques du système chaotique.

Nous avons présenté dans ce mémoire trois chapitres :

– Dans le premier chapitre, nous introduisons brièvement le concept de la théorie de système dynamique chaotique, en commençant par la présentation mathématique des systèmes dynamiques (orbite, flot, étude de stabilité...) et finissant par la théorie de chaos.

– Dans le second chapitre, nous traitons des systèmes dynamiques hyperchaotiques et nous donnons un exemple tels que le modèle de Pan.

– Dans le troisième chapitre, nous étudions la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de quatre dimension en utilisant la théorie de fonction de Lyapunov et l'optimisation.

Chapitre 1

Généralités sur le système dynamique

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales sur la base des systèmes dynamiques : flot, attracteurs, bifurcation...., puis on donne un aperçu générale sur la théorie de chaos.

1.1 Système dynamique

Un système dynamique est un structure qui évolue au cours du temps.

Un système peut être :

* Continu : il se représente par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t, \mu) \quad (1.1)$$

$X \in \omega \subseteq \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état.

$\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$: le vecteur des paramètres.

$F : \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$: champ de vecteur sur ω .

* Discret : il se représente par une itération de la forme :

$$X_{n+1} = F(X_n, \mu), n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

avec

$$F : \omega \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

1.2 Orbite

Définition 1.2.1 [1] Une orbite du système (1.1) est une fonction dérivable $t \rightarrow X(t)$, définie d'un intervalle $I \in \mathbb{R}$ dans ω telle que pour tout $t \in I$ on a $X'(t) = F(X, t, \mu)$. L'image d'une solution X est appelée orbite et notée :

$$\gamma_x = \{a \in \omega; \exists t \in I : X(t) = a\} \quad (1.3)$$

1.3 Flot

Définition 1.3.1 [1] Considérons le système autonome :

$$\frac{dX}{dt} = F(X), X \in \mathbb{R}^n, F \in C^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

Soit $X(t, X_0)$, $X_0 \in D$, une solution de (1.4) avec conditions initiales $X(0) = X_0$.

On appelle flot de (1.4) l'application : $\varphi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi_t(X_0) = X(t, X_0) \quad (1.5)$$

$\varphi_t(X_0)$ possède les propriétés suivantes :

- (i) $\varphi_t(X_0)$ est de classe C^r .
- (ii) $\varphi_0(X_0) = X_0$.
- (iii) $\varphi_{t+s}(X_0) = \varphi_t(\varphi_s(X_0))$.

1.4 Invariance et attraction

1.4.1 Ensemble invariant

Définition 1.4.1 *Un ensemble S est invariant par le flot φ_t si pour tout $x \in S$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi_t(x) \in S$.*

1.4.2 Attracteurs

Définition 1.4.2 [1] *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases.*

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $X(t, X_0) = \varphi_t(X_0)$ restera dans U si $X_0 \in V$.
- $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$.
- Il existe une orbite dense dans A .

1.4.3 Bassin d'attraction

Définition 1.4.3 *Le bassin d'attraction $D(A)$ d'un ensemble attractant A est l'ensemble ouvert de tous les points x tel que : $F^n(X)$ tend vers A lorsque n tend vers ∞ .*

$$D(A) = \{X \in \mathbb{R}^p : F^n(X) \rightarrow A, n \rightarrow \infty\} \quad (1.6)$$

1.4.4 Différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs :

a) Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : C'est l'attracteur le plus simple, il est représenté par un point dans l'espace des phases vers lequel tendent les trajectoires.

– **Le cycle limite périodique** : C'est une trajectoire fermée qui attire toutes les trajectoires proches.

– **Le cycle limite pseudo-périodique (tore)** : C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplit sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle-même au bout d'un temps infini.

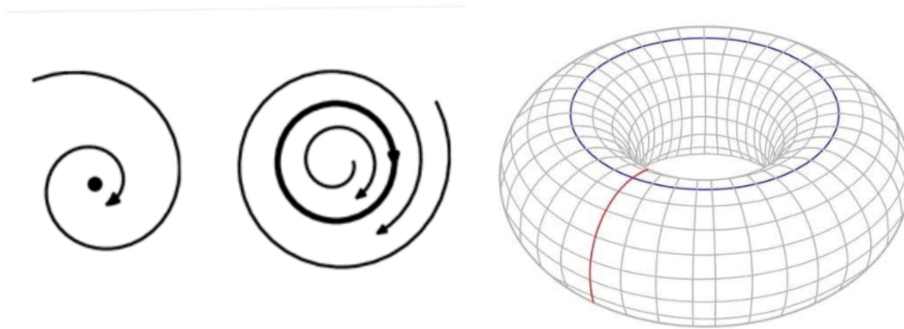


Figure 1.1 : point fixe, cycle périodique, tore

b) Attracteurs étranges :

[1] Les attracteurs étranges sont plus complexes que les autres. Ils caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques, toutes les trajectoires de l'espace des phases tendent à former l'attracteur étrange.

Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- Sensibilité aux conditions initiales.
- La dimension de l'attracteur étrange est fractale (non entière) pour un système continue autonome $2 < d < n$, n : la dimension de l'espace des phases.
- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.

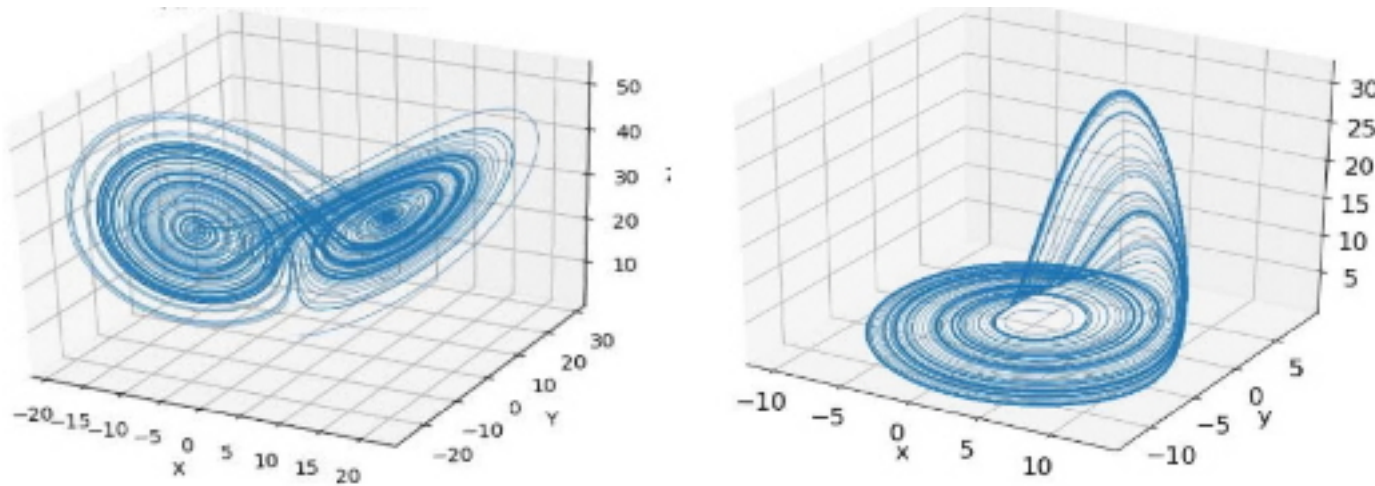


Figure 1.2 : Attracteurs étranges (Lorenz, Rössler)

1.5 Points d'équilibres

Définition 1.5.1 On appelle *point fixe*, ou *point stationnaire* ou *critique* ou *point d'équilibre* tout point \bar{X} de l'espace des phases tel que : $F(\bar{X}) = 0$.

1.6 Etude de stabilité

1.6.1 Stabilité des systèmes non linéaires

L'étude des systèmes non linéaires est difficile en général. C'est pourquoi on va présenter la méthode de linéarisation.

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n) \quad (1.7)$$

et soit x_0 un point fixe (d'équilibre) de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point fixe.

La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage de x_0 comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}_0 = f(\varepsilon(t) + x_0) \simeq f(x_0) + Jf(x_0)\varepsilon(t) \quad (1.8)$$

avec $Jf(x_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction f défini par :

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

comme $f(x_0) = 0$, alors l'équation (1.8) redevient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = Jf(x_0) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.10)$$

L'écriture (1.10) veut dire que le système (1.8) est linéarisé.

Il s'agit de distinguer ces points fixes par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé associée au système différentiel initial en ce point. Pour cette raison on va supposer que les valeurs propres de la matrice sont définies par :

$$\lambda_i = \omega_i + j\sigma_i, i = \overrightarrow{1..n}$$

Pour indiquer la nature des points fixes en étudiant la nature des λ_i .

1- Si $\omega_i < 0$ pour $i = \overrightarrow{1..n}$: le point fixe est un asymptotiquement stable.

On dit que le point est un : $\begin{cases} \text{foyer si } \sigma_i \neq 0 & \text{pour } i = \overrightarrow{1..n} \\ \text{noeud si } \sigma_i = 0 & \text{pour } i = \overrightarrow{1..n} \end{cases}$

2- Si $\omega_i > 0$ pour $i = \overrightarrow{1..n}$: le point fixe est un instable.

On dit que le point est un : $\begin{cases} \text{source si } \sigma_i \neq 0 & \text{pour } i = \overrightarrow{1..n} \\ \text{noeud si } \sigma_i = 0 & \text{pour } i = \overrightarrow{1..n} \end{cases}$

3- Si les valeurs propres sont réelles, non nulles et de signe différent : le point fixe est un point selle.

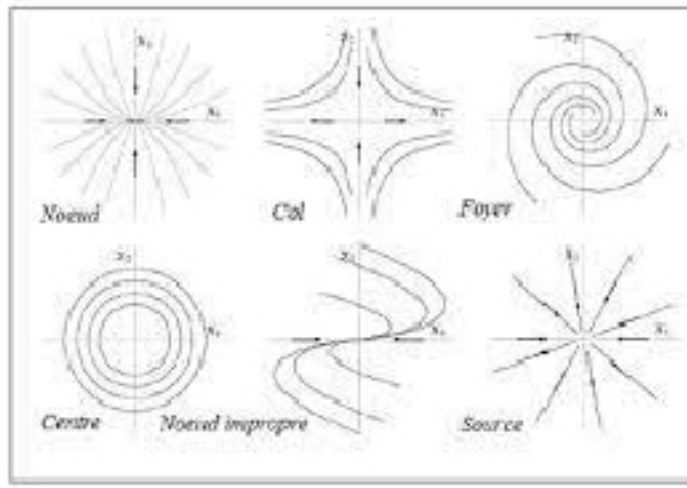


Figure 1.3 : Les différents types d'états d'équilibres

1.6.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Théorème de Lyapunov étudie la stabilité d'un système dynamique, donc le comportement des trajectoires du système.

[1] Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.11)$$

où f une fonction non linéaire.

Le point d'équilibre \bar{x} du système (1.11) est :

– Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.12)$$

– Asymptotiquement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \quad (1.13)$$

– Exponentiellement stable s'il existe deux réels positifs a et b tels que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < a \|x(t_0) - \bar{x}\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0 \quad (1.14)$$

– Instable si la condition (1.12) n'est pas satisfaite.

première méthode indirecte de Lyapunov

La méthode de Lyapunov est basé sur l'examen de linéarisation autour du point d'équilibre \bar{x} du système (1.11). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre.

- Si $\forall i$, telle que $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \implies \bar{x}$ est exponentiellement stable.
- Si $\exists i$, telle que $\text{Re}(\lambda_i) > 0 \implies \bar{x}$ est instable.

Exemple 1.6.1 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases}$$

L'origine 0 est un point critique.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont toutes négatives $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, alors le point d'équilibre est exponentiellement stable.

Seconde méthode directe de Lyapunov

Théorème 1.6.1 Soit x_0 point d'équilibre du système (1.11).

et soit V fonction de Lyapunov de classe C^1 telle que $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec U un voisinage de x_0 .

On a $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq x_0$ alors :

- Si $\frac{d}{dt}V(x, t) \leq 0 \implies x_0$ est stable.
- Si $\frac{d}{dt}V(x, t) < 0 \implies x_0$ est asymptotiquement stable.
- Si $\frac{d}{dt}V(x, t) > 0 \implies x_0$ est instable.

Exemple 1.6.2 Soit le système :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Soit

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

et $x_0 = 0$ est un point d'équilibre.

D'autre part, on a $V(0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x) = x_1^2 + x_2^2 \succ 0$.

de plus

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{d}{dt}(V(x)) = \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \\ &= 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2x_1(x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)) + 2x_2(-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)^2 \succ 0\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème précédent l'origine est instable.

1.7 Bifurcation

[1] La théorie des bifurcations est l'étude de certains aspects des systèmes dynamiques. Une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre de contrôle μ produit un changement majeur dans l'organisation du système.

Il existe quatre types de bifurcations : noeud-col, transcritique, fourche et hopf.

Soit le système non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \tag{1.15}$$

où $x \in \omega \subset \mathbb{R}$, $\mu \in D \subset \mathbb{R}^p$, $f \in C^r$.

1- Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque μ franchit 0, elle est représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \tag{1.16}$$

qui s'appelle équation générique de bifurcation noeud-col.

* Si $\mu < 0$: $f(x, \mu) = 0 \implies$ aucune solution \implies aucune points fixes.

* Si $\mu > 0$ on a :

$$\mu - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\mu} \text{ alors}$$

$$\frac{df}{dt}(x, \mu) = -2x \text{ donc } \frac{df}{dt}(-\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu} \text{ et } \frac{df}{dt}(\sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu}.$$

le point fixe $x = \sqrt{\mu}$ est stable, mais $-\sqrt{\mu}$ est instable.

* Si $\mu = 0$ le seul point fixe est $x = 0$, par intégration :

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}$$

d'où le point $x = 0$ est semi-stable (stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

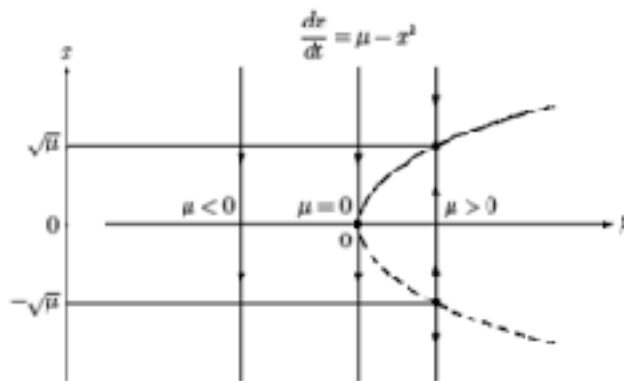


Figure 1.4 : Diagramme de bifurcation noeud-col

2- Bifurcation transcritique

Représentée par l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \tag{1.17}$$

qui s'appelle équation générique de bifurcation transcritique. On a alors :

$$\mu x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ où } x = \mu.$$

$$\frac{df}{dt}(x, \mu) = \mu - 2x \implies \begin{cases} \frac{df}{dt}(0) = \mu \\ \frac{df}{dt}(\mu) = -\mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Si } \mu < 0, \text{ donc } & \begin{cases} x = 0 \implies \text{stable} \\ x = \mu \implies \text{instable} \end{cases} \\ * \text{ Si } \mu > 0, \text{ donc } & \begin{cases} x = 0 \implies \text{instable} \\ x = \mu \implies \text{stable} \end{cases} \end{aligned}$$

* Si $\mu = 0$ le seule point fixe est $x = 0$, par intégration :

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}$$

d'où le point $x = 0$ est semi-stable (stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

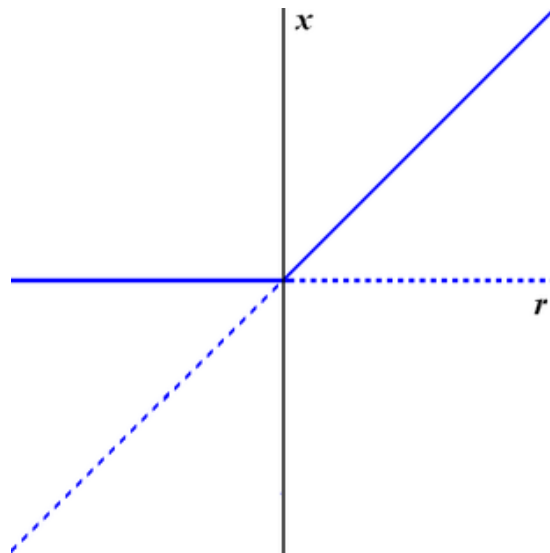


Figure 1.5 : Diagramme de bifurcation transcritique.

3- Bifurcation de fourche (Pitchfork)

L'équation générique d'une bifurcation fourche (sur-critique) est :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \tag{1.18}$$

et pour la sous-critique c'est:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3 \quad (1.19)$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a :

$$\mu x - x^3 = 0 \implies x = 0 \text{ où } x = \pm\sqrt{\mu}.$$

* Si $\mu < 0$, on a un seul point fixe $x = 0$.

* Si $\mu > 0$, on a trois points fixes $x = 0, x = \sqrt{\mu}, x = -\sqrt{\mu}$.

$$\frac{df}{dt}(x, \mu) = \mu - 3x^2 \implies \begin{cases} \frac{df}{dt}(0) = \mu \\ \frac{df}{dt}(\pm\sqrt{\mu}) = -2\mu \end{cases}$$

* Si $\mu < 0$, on a un seul point fixe stable $x = 0$.

* Si $\mu > 0$, le point fixes $x = 0$ est instable, $x = \pm\sqrt{\mu}$ sont stables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes et dans la stabilité en $\mu = 0$.

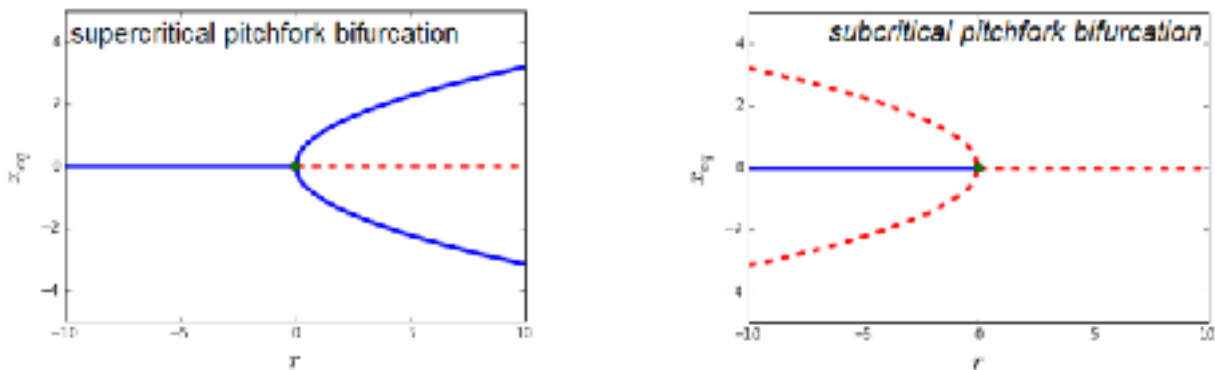


Figure 1.6 : Diagramme de bifurcation fourche

4- Bifurcation de hopf

La bifurcation hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparaition d'un cycle limite.

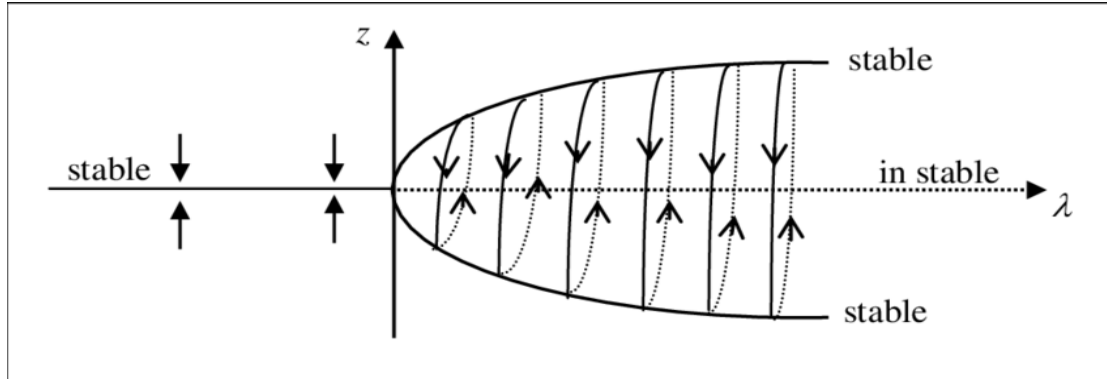


Figure 1.7 : Diagramme de bifurcation hopf

1.8 Théorie de chaos

La théorie de chaos étudie des systèmes dynamiques dont l'évolution au cours du temps est extrêmement sensible aux conditions initiales. Dans cette théorie il est impossible de prédire l'évolution d'un système si on le connaît pas avec exactitude.

Définition 1.8.1 *Un système chaotique est un système dynamique non linéaire déterministe qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales.*

1.8.1 Propriétés du chaos

– **La non linéarité**

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

– **Le déterminisme**

Le système chaotique a des règles fondamentales déterministe et non probabilistes.

– **La sensibilité aux conditions initiales**

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique tel que un petit changement sur l'état initial peut mener à un comportement absolument différent sur

l'état final c'est-à-dire que pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.

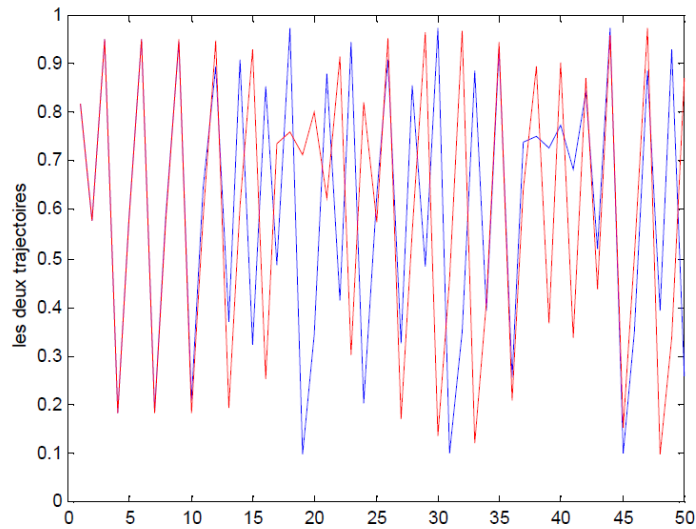


Figure 1.8 : La sensibilité des conditions initiales.

– **L'imprévisibilité**

En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

– **L'attracteur étrange**

[2] Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale et non entière; sa trajectoire est complexe; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant " t " voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré " vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur.

1.8.2 Transition vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcation.

On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

– **Le doublement de période**

Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcations de fourche. À mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8,....., ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

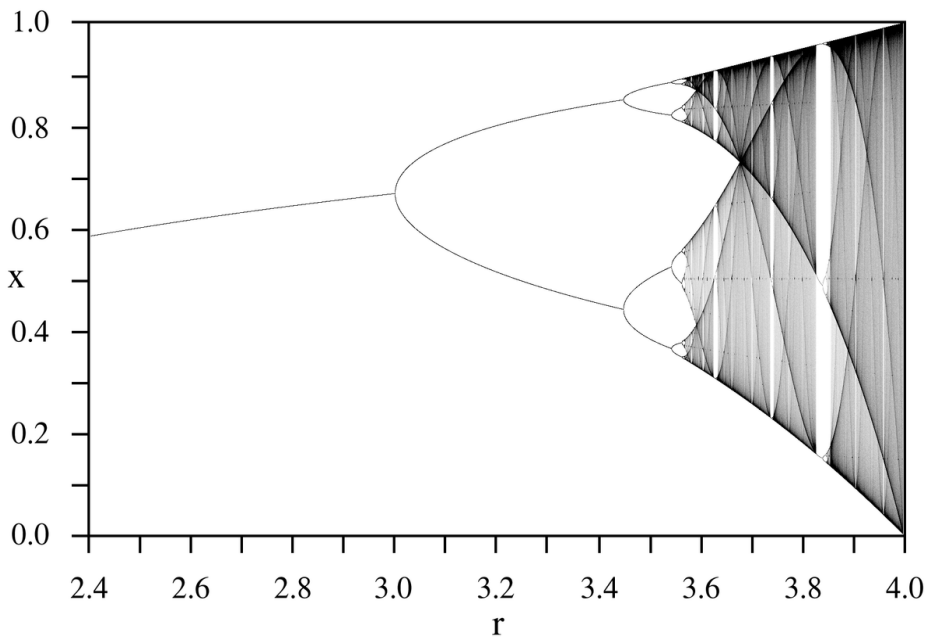


Figure 1.9 : Transition de chaos par le doublement période.

– **L'intermittence vers le chaos**

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière.

– La quasi-périodicité

Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais si le rapport est irrationnelle, le comportement est quasi-périodique.

Dans ce cas, les trajectoires couvrent la superficie d'un tore. Alors on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

1.8.3 Exposant de Lyapunov

[3] Les exposants de Lyapunov permettant de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la stabilité aux conditions initiales que présente un attracteur étrange. Autrement dit, nous allons exposer comment calculer le taux de divergence entre l'évolution des trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

1- Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ deux conditions initiales, supposons qu'elle s'écartent en moyenne exponentiellement, il existe un réel λ tel que après n itérations on a :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \simeq \varepsilon e^{n\lambda} \quad \text{d'où} \quad n\lambda \simeq \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a

$$\begin{aligned} \lambda &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{d(x_{n-1})} \frac{df(x_{n-2})}{d(x_{n-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{d(x_i)} \right| \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow \infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln | f' (x_i) | \quad (1.20)$$

avec la notation $f' (x_i) = \frac{df(x_i)}{d(x_i)}$, λ est appelé exposant de Lyapunov, il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

2- Cas d'une application continue multidimensionnelle

Pour un système différentiel de dimension n défini par f tel que :

$$x' = f(x(t)) \quad \text{tel que : } t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

L'exposant de Lyapunov dans la direction i est donné par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| x_i(t) - x'_i(t) \|}{\| x_i(0) - x'_i(0) \|} \quad (1.21)$$

Différents algorithmes ont été développés pour calculer les exposants de Lyapunov, l'un des algorithmes utilisé pour le calcul est appelé algorithme de Wolf.

Algorithme de Wolf

Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont :

1. Changement du paramètre de contrôle,
2. Choix aléatoire d'une condition initiale,
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une perturbation,
4. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires,
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence,

6. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné,
7. Retour au point (1),
8. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

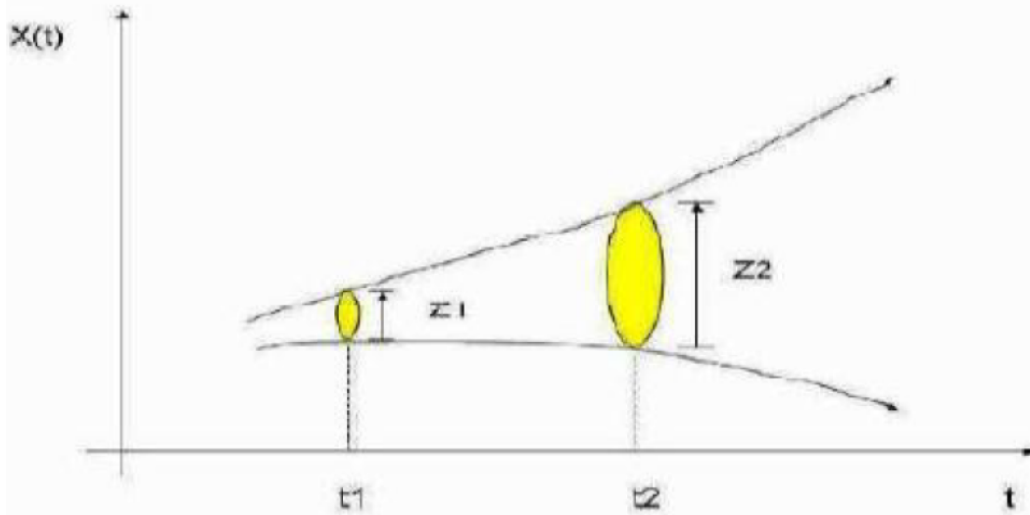


Figure 1.10 : Divergence de deux trajectoires dans le plan des phases.

1.8.4 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Le tableau suivant résume le lien entre les exposants de Lyapunov et les formes d'attracteurs et donne les signes des exposants de Lyapunov pour chaque type d'attracteur.

Type d'attracteur	Signe des exposants de lyapunov
Point fixe	$0 \succ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Cycle	$\lambda_1 = 0, 0 \succ \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, 0 \succ \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \dots \geq \lambda_n$
Attracteur étrange	$\lambda_1 \succ 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i \prec 0$

Table 1.1: Type d'attracteurs d'après le signe des exposants de Lyapunov.

1.8.5 Utilisation des exposants de Lyapunov au calcul de dimension de l'attracteur

Paramètre permettant de mesurer la dimension du chaos suivant le type de chaos généré. La dimension par définition est un nombre entier.

- Le point fixe est un attracteur de dimension 0.
- La dimension d'une courbe fermée ou une ligne est 1.

a) Dimension de mori

Soit m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\bar{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs : la dimension de mori est donnée par la relation suivante :

$$D = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right) \quad (1.22)$$

b) Dimension de kaplan et yorke

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

La dimension de Kaplan et Yorke est donnée par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|} \quad (1.23)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exhibé les notions de base des systèmes dynamiques comme flot, orbite, classification des points fixes,..., et les différentes caractéristiques intrinsèques aux systèmes chaotiques.

Chapitre 2

Systèmes hyperchaotiques

Introduction

Le comportement hyperchaotique a été étudié dans différentes applications telle que :

l'oscillateur de Colpitts [4], les circuits non-linéaires [5]-[6], les systèmes de communications et la synchronisation [7]-[8]. Pour cela, la génération de ce comportement dynamique complexe devient un sujet de recherche très important.

En 1973, Rössler a été découvert le comportement hyperchaotique par une boucle de retour appliquée sur son système original. En général, un système hyperchaotique est un système chaotique qui possède au moins deux exposants positifs. Le comportement dynamique des systèmes hyperchaotiques va donc être très compliqué, c'est pour cela que ces systèmes offrent plus de sécurité dans la communication chaotique.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'hyperchaotification. D'abord, nous abordons le premier système hyperchaotique, puis nous traitons le système hyperchaotique de Pan, nous terminons par l'étude du comportement dynamique de ce dernier.

2.1 Hyperchaotification de système chaotique

[9] Pour générer un comportement hyperchaotique à partir d'un système chaotique, il faut satisfaire les deux conditions suivantes :

- 1) La dimension du système doit être supérieure ou égale à 4.
- 2) Le système doit avoir au moins deux exposants de Lyapunov positifs et la somme de tout les exposants doit être négative.

2.2 Premier système hyperchaotique

Le premier système hyperchaotique à 4 dimensions a été proposé en 1979 par Rössler.

Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x' = -(y + z) \\ y' = x + ay + w \\ z' = b + xz \\ w' = -cz + dw \end{cases} \quad (2.1)$$

Le système suit un comportement hyperchaotique, quand les paramètres a , b , c et d prennent les valeurs suivantes : $a = 0.25, b = 3, c = 0.5, d = 0.05$.

Les conditions initiales peuvent prendre les valeurs suivantes : $x_0 = -10, y_0 = -6, z_0 = 0, w_0 = 10$.

les quatre exposants de Lyapunov correspondants sont : $\lambda_1 = 0.112, \lambda_2 = 0.019, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -25.118$.

On constate bien que ce système répond aux conditions de passage du chaos vers l'hyperchaos déjà prédéfinies.

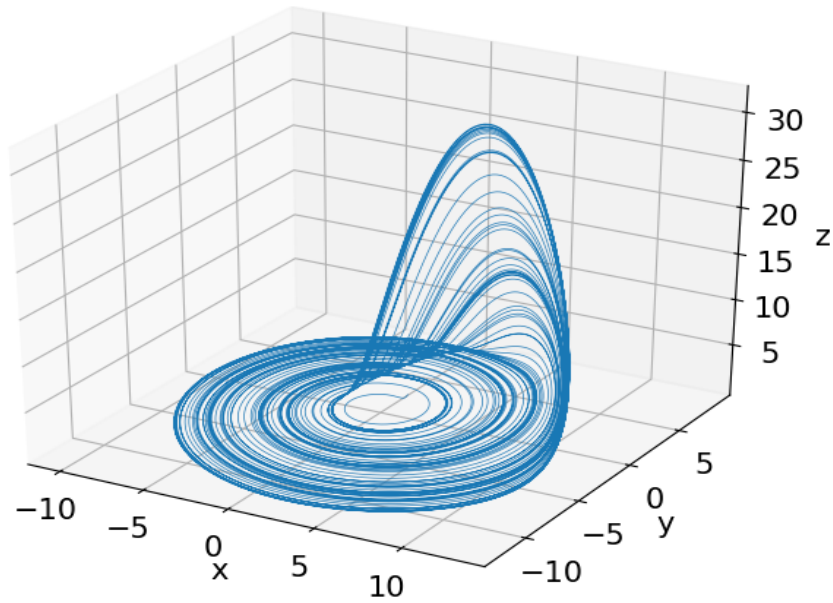


Figure 2.1 : Attracteur hyperchaotique 4D Rössler

2.3 Système de Pan

Le système de Pan est décrit par :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}, \quad (2.2)$$

où a , b , c sont des paramètres réelles. Quand $a = 10$, $b = 2$, $c = 16$, le système (2.2) a un attracteur chaotique avec les exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.8311$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -12.5113$.

On remarque que le premier exposant est positif, ce qui signifie pour ces paramètres le système de Pan est plein chaos.

Pour faire l'hyperchaotification du système de Pan, en introduisant un contrôleur de retour d'état, Comme le suivant [10] :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - xz + u \\ z' = xy - bz \\ u' = -dy \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec a, b, c sont des paramètres constants, d est le paramètre de contrôle. Le système (2.3) affiche un attracteur hyperchaotique lorsque $(a, b, c, d) = (10, \frac{8}{3}, 28, 10)$, les diagrammes de phase tridimensionnels correspondants dans les espaces $(x - y - z)$, $(x - z - u)$ sont représentés sur la figure (2.2).

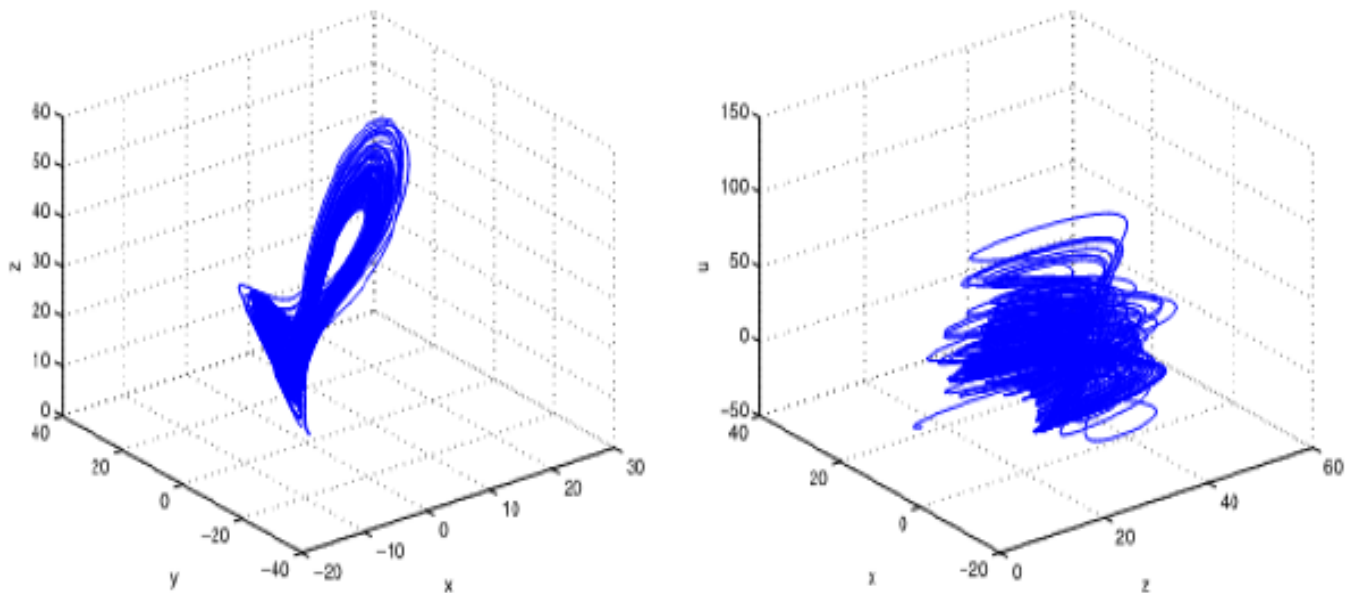


Figure 2.2 : Attracteur hyperchaotique du système de Pan avec $(a, b, c, d) = (10, \frac{8}{3}, 28, 10)$ et la valeur initiale $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1, 1, 1, 1)$.

2.3.1 Comportement dynamique du système hyperchaotique de Pan

Cette section étudie le comportement dynamique de système hyperchaotique de Pan, y compris : point fixe, exposant de Lyapunov :

a) point fixe

Il est clair que le point $O(0, 0, 0, 0)$ est un point fixe du système (2.3).

La matrice jacobienne du système hyperchaotique est décrit par :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c - z & 0 & -x & 1 \\ y & x & -b & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autour de point O, cette matrice devient

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J) &= \begin{vmatrix} \lambda + a & a & 0 & 0 \\ c & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + b & 0 \\ 0 & -d & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + a) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + b & 0 \\ -d & 0 & \lambda \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + b & 0 \\ -d & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + a) (\lambda^3 + b\lambda^2 + b\lambda + bd) - c (a\lambda^2 + ab\lambda) \end{aligned}$$

Donc

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^4 + (a + b)\lambda^3 + (ab - ac + d)\lambda^2 + (ad - abc + bd)\lambda + abd = 0$$

Les valeurs propres sont donc en fonction des paramètres du système (a, b, c) et du paramètre de contrôle d , donc les valeurs propres du système vraie avec la variation du

paramètre de contrôle. Alors, avec ce paramètre on peut choisir des valeurs propres à partie réelle positive ou négative (ce qui signifie la stabilité ou l'instabilité du système).

b)Exposant de Lyapunov

Nous calculons l'exposant de Lyapunov pour un système hyperchaotique (2.3) en utilisant logiciel MATLAB, $a = 10$, $b = \frac{8}{8}$, $c = 28$, $d = 10$.

Pour la valeur initiale (1, 1, 1, 1), on obtient les quatres exposants de Lyapunov du système hyperchaos (2.3) :

$$\lambda_1 = 0.38352, \lambda_2 = 0.12714, \lambda_3 = -0.00044514, \lambda_4 = -13.1741.$$

Le spectre de l'exposant de Lyapunov et de l'attracteur du système (2.3) sont représentés sur la figure suivante :

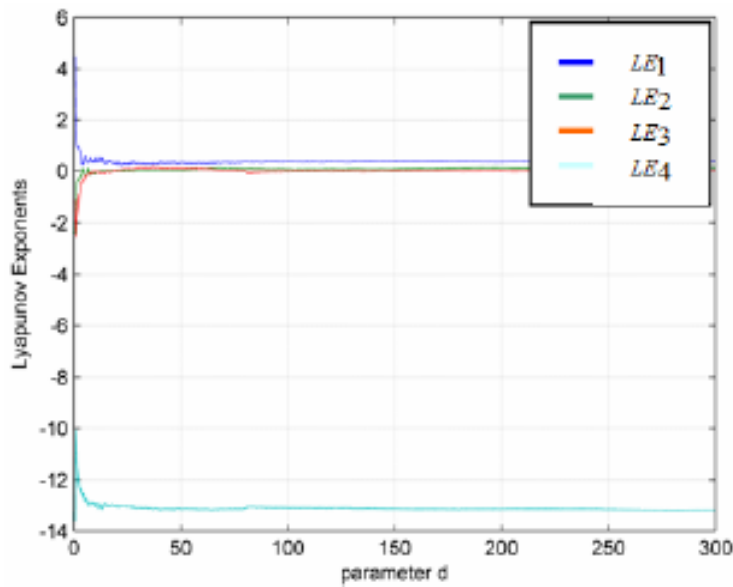


Figure 2.3 : Spectre des esxposants de Lyapunov du système de Pan par rapport au paramètre c.

Conclusion

Ce chapitre est consacré à le système dynamique hyperchaotique, nous avons donné la définition du premier système hyperchaotique et un exemple d'un système hyperchaotique et son comportement.

Chapitre 3

La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre

Introduction

Ce chapitre se concentre sur l'étude de la borne extrême et de l'ensemble positivement invariant d'un système à temps continu de dimension quatre, en utilisant une approche qui combine la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée et l'optimisation. Plus précisément, nous présentons des conditions suffisantes pour que ce système puisse être inclus dans un ensemble ellipsoïde de dimension quatre.

Considérons le système dynamique le plus général de dimension quatre à temps continu suivant [11] :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, w, \delta) \\ y' = g(x, y, z, w, \delta) \\ z' = h(x, y, z, w, \delta) \\ w' = k(x, y, z, w, \delta) \end{cases}, \quad (3.1)$$

où f , g , h et k sont des fonctions réelles et $\delta \in \mathbb{R}^m$ est le paramètre de bifurcation.

Supposons que le système (3.1) a au moins un point d'équilibre, alors les orbites bornées sont possibles. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que l'origine est un point d'équilibre, c-à-d, $f(0, 0, 0, 0, \delta) = g(0, 0, 0, 0, \delta) = h(0, 0, 0, 0, \delta) = k(0, 0, 0, 0, \delta) = 0$.

3.1 La borne extrême et l'ensemble positivement invariant

Soit le système :

$$\dot{X} = f(X), \quad (3.2)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $t_0 \geq 0$ est le temps initial, et $X(t, t_0, X_0)$ est une solution de système (3.1) vérifiant $X(t_0, t_0, X_0) = X_0$, pour plus de simplicité est notée $X(t)$. Supposons $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact. On définit la distance entre la solution $X(t, t_0, X_0)$ et l'ensemble Ω par $\rho(X(t, t_0, X_0), \Omega) = \inf_{Y \in \Omega} \|X(t, t_0, X_0) - Y\|$, et on note $\Omega_\varepsilon = \{X/\rho(X, \Omega) < \varepsilon\}$, il est clair que $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$.

Définition 3.1.1 *Supposons qu'il existe un ensemble compact $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si pour chaque $X_0 \in \mathbb{R}^n/\Omega$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(X(t), \Omega) = 0$, c'est-à-dire, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $T > t_0$, tel que pour $t \geq T$, $X(t, t_0, X_0) \subset \Omega_\varepsilon$, alors l'ensemble Ω est appelé une borne extrême pour (3.2). Si pour chaque $X_0 \in \Omega$ et pour $t \geq t_0$, $X(t, t_0, X_0) \subset \Omega$, alors Ω est appelé l'ensemble positivement invariant pour le système (3.2).*

3.2 L'estimation de la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre

Théorème 3.2.1 *Supposons que les conditions (3.10), (3.11) et (3.12) sont vérifiées, alors il existe un nombre positif δ tel que l'ensemble (3.14) est la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système (3.1).*

Preuve. Pour estimer la borne extrême et l'ensemble positivement invariant de système (3.1), nous définissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x, y, z, w) = \frac{(x - \alpha(X))^2 + (y - \beta(X))^2 + (z - \gamma(X))^2 + (w - \theta(X))^2}{2}, \quad (3.3)$$

avec $X = (x, y, z, w)$, $(\alpha(X), \beta(X), \gamma(X), \theta(X)) \in \mathbb{R}^4$ sont des fonctions réelles, pour lesquelles la dérivée de (3.3) le long des orbites de système (3.1) est donnée par

$$\frac{dV}{dt} = (x - \alpha)(x' - \alpha') + (y - \beta)(y' - \beta') + (z - \gamma)(z' - \gamma') + (w - \theta)(w' - \theta'), \quad (3.4)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial x} x' + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y' + \frac{\partial \alpha}{\partial z} z' + \frac{\partial \alpha}{\partial w} w' = \psi_1 f + \psi_2 g + \psi_3 h + \psi_4 k \\ \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial x} x' + \frac{\partial \beta}{\partial y} y' + \frac{\partial \beta}{\partial z} z' + \frac{\partial \beta}{\partial w} w' = \mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h + \mu_4 k \\ \gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial x} x' + \frac{\partial \gamma}{\partial y} y' + \frac{\partial \gamma}{\partial z} z' + \frac{\partial \gamma}{\partial w} w' = \xi_1 f + \xi_2 g + \xi_3 h + \xi_4 k \\ \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial x} x' + \frac{\partial \theta}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial z} z' + \frac{\partial \theta}{\partial w} w' = \zeta_1 f + \zeta_2 g + \zeta_3 h + \zeta_4 k \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & c_1(x, y, z, w)x - \omega x^2 + c_2(x, y, z, w)y - \varphi y^2 + c_3(x, y, z, w)z - \phi z^2 + \\ & c_4(x, y, z, w)w - \eta w^2 + c_5(x, y, z, w), \end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(x, y, z, w) = f - \psi_1 f - \psi_2 g - \psi_3 h - \psi_4 k + \omega x \\ c_2(x, y, z, w) = g - \mu_1 f - \mu_2 g - \mu_3 h - \mu_4 k + \varphi y \\ c_3(x, y, z, w) = h - \xi_1 f - \xi_2 g - \xi_3 h - \xi_4 k + \phi z \\ c_4(x, y, z, w) = k - \zeta_1 f - \zeta_2 g - \zeta_3 h - \zeta_4 k + \eta w \\ c_5(x, y, z, w) = c_6(x, y, z, w) + c_7(x, y, z, w) \\ c_6(x, y, z, w) = -\alpha f - \beta g - \gamma h - \theta k + \alpha(\psi_1 f + \psi_2 g + \psi_3 h + \psi_4 k) \\ c_7(x, y, z, w) = \beta(\mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h + \mu_4 k) + \\ \gamma(\xi_1 f + \xi_2 g + \xi_3 h + \xi_4 k) + \theta(\zeta_1 f + \zeta_2 g + \zeta_3 h + \zeta_4 k) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Supposons que l'équation (3.6) a la forme

$$\frac{dV}{dt} = -\omega(x - \alpha_1)^2 - \varphi(y - \beta_1)^2 - \phi(z - \gamma_1)^2 - \eta(w - \theta_1)^2 + r, \quad (3.8)$$

où $\omega, \varphi, \phi, \eta$ et r sont des constantes strictement positives, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_1$ sont des constantes inconnus et doivent être déterminées dans lequel l'équation $\frac{dV}{dt} = 0$ détermine un ellipsoïde dans \mathbb{R}^4 . L'équation (3.8) est équivalente à

$$\frac{dV}{dt} = -\omega x^2 + 2\omega\alpha_1 x - \varphi y^2 + 2\varphi\beta_1 y - \phi z^2 + 2\phi\gamma_1 z - \eta w^2 + 2\eta\theta_1 w - \omega\alpha_1^2 - \varphi\beta_1^2 - \phi\gamma_1^2 - \eta\theta_1^2 + r \quad (3.9)$$

Par identification avec (3.6) nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{c_1(x, y, z, w)}{2\omega} \\ \beta_1 = \frac{c_2(x, y, z, w)}{2\varphi} \\ \gamma_1 = \frac{c_3(x, y, z, w)}{2\phi} \\ \theta_1 = \frac{c_4(x, y, z, w)}{2\eta} \\ r = \omega\alpha_1^2 + \varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2 + \eta\theta_1^2 + c_5(x, y, z, w) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Puisque $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_1$ et r sont des constantes réelles, alors les fonctions $\{c_i(x, y, z, w), i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ sont aussi des constantes, c-à-d,

$$\frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial x} = \frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial y} = \frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial z} = \frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial w} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (3.11)$$

Maintenant, pour prouver que le système (3.1) est borné, nous supposons que $\omega, \varphi, \phi, \eta$ et r sont strictement positives, c-à-d,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_5(x, y, z, w) + \omega\alpha_1^2 + \varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2 + \eta\theta_1^2 > 0 \\ \omega > 0, \varphi > 0, \phi > 0, \eta > 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

donc, l'équation $\frac{dV}{dt} = 0$, signifie que la surface

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \frac{(x - \alpha_1)^2}{\frac{r}{\omega}} + \frac{(y - \beta_1)^2}{\frac{r}{\varphi}} + \frac{(z - \gamma_1)^2}{\frac{r}{\phi}} + \frac{(w - \theta_1)^2}{\frac{r}{\eta}} = 1, \omega, \varphi, \phi, \eta, r > 0 \right\} \quad (3.13)$$

est un ellipsoïde dans l'espace à quatre dimensions. En dehors de Γ , c-à-d, lorsque $\omega(x - \alpha_1)^2 + \varphi(y - \beta_1)^2 + \phi(z - \gamma_1)^2 + \eta(w - \theta_1)^2 > r$, on a $\frac{dV}{dt} < 0$, ce qui implique que la surface $V = \text{const}$ est monotone décroissante.

Puisque Γ est un ensemble fermé et V est continue sur Γ , alors, les valeurs extrêmes de V peuvent être atteints sur Γ . Notons la valeur maximale de V par l , c-à-d $l = \max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} V$.

Soit

$$\Omega = \left\{ X : \frac{(x - \alpha(X))^2 + (y - \beta(X))^2 + (z - \gamma(X))^2 + (w - \theta(X))^2}{2} \leq l \right\} \quad (3.14)$$

Nous avons $\Gamma \subset \Omega$. Ensuite, nous allons montrer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(X(t), \Omega) = 0 \quad (3.15)$$

en utilisant la démonstration par l'absurde, où $X(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$. Supposons que (3.15) n'est pas réalisée, alors nous pouvons conclure que les orbites de système (3.1) sont en dehors de Ω de façon permanente, donc $\dot{V} < 0$. C-à-d, la fonction V est décroissante en dehors de Ω , ce qui conduit au résultat suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t)) = v^* > l$$

Soit

$$s = \inf_{X \in D} \left(-\dot{V}(X(t)) \right)$$

où $D = \{X(t)/V^* \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0))\}$, et t_0 est le temps initial. Par conséquent, nous avons que s, V^* sont des constantes positives, et

$$\frac{dV(X(t))}{dt} \leq -s$$

Comme $t \rightarrow \infty$, nous avons

$$0 \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0)) - s(t - t_0) \rightarrow -\infty$$

cela est une contradiction. Par conséquent (3.15) est vraie, c-à-d Ω est la borne extrême de système (3.1).

Enfin, pour voir que Ω est aussi l'ensemble positivement invariant, supposons que V atteint sa valeur maximale sur la surface Γ au point $P_0(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{w}_0)$. Puisque $\Gamma \subset \Omega$, alors pour tout point $X(t)$ sur Ω et $X(t) \neq P_0$, on a $\dot{V}(X) < 0$, donc toute orbite $X(t)$ ($X(t) \neq P_0$) de système (3.1) ira à l'intérieure de Ω . Quand $X(t) = P_0$, par le théorème de continuation [12], $X(t)$ ira aussi dans Ω . En résumant ce qui précède, nous concluons que Ω est l'ensemble positivement invariant de système (3.1). Ceci termine la preuve. ■

3.3 Application

Exemple 3.3.1 Dans cette partie, nous montrons que l'ensemble des systèmes qui vérifient les conditions du théorème (3.2.1) n'est pas vide. En effet, considérons le système de Pan donnée par :

$$\begin{cases} x' = ay - ax \\ y' = cx - xz + w \\ z' = xy - bz \\ w' = -dy \end{cases} \quad (3.16)$$

choisissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x, y, z, w) = x^2 + dy^2 + d \left(z - c - \frac{a}{d} \right)^2 + w^2 \quad (3.17)$$

Supposons que d est strictement positive et notons $\sqrt{\lambda}y = \tilde{y}$, $\sqrt{d}(z - \lambda a - c) = \tilde{z}$

Alors, on a

$$V(x, \tilde{y}, \tilde{z}, w) = x^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 + w^2 \quad (3.18)$$

c -à- d , $\alpha = \beta = \theta = 0$, $\gamma = \lambda a + c$.

On a

$$\frac{dV}{dt} = ax^2 + db \left(\frac{\tilde{z}}{\sqrt{d}} + \frac{cd+a}{2d} \right)^2 - \frac{b(cd+a)^2}{4d} \quad (3.19)$$

c -à- d

$$\frac{dV}{dt} = ax^2 + db \left(z - \frac{cd+a}{2d} \right)^2 - \frac{b(cd+a)^2}{4d} \quad (3.20)$$

Par conséquent, il est facile de vérifier que toutes les conditions du théorème (3.2.1) sont vérifiées pour a, b, c, d et λ strictement positives. D'après (3.13) l'ellipsoïde Γ de dimension quatre est donné par

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \frac{x^2}{\frac{b(cd+a)^2}{4ad}} + \frac{\left(\frac{\tilde{z}}{\sqrt{d}} + \frac{cd+a}{2d} \right)^2}{\frac{b(cd+a)^2}{4bd^2}} = 1 \\ a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \end{array} \right\}, \quad (3.21)$$

c -à- d

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \lambda ax^2 + y^2 + b \left(z - \frac{\lambda a + c}{2} \right)^2 + \lambda adw^2 = \frac{b(\lambda a + c)^2}{4} \\ a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, \lambda > 0 \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

Alors le système de Pan est contenu dans l'ensemble suivant :

$$\omega_\lambda = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + dy^2 + d \left(z - c - \frac{a}{d} \right)^2 + w^2 \leq R^2 \right\} \quad (3.23)$$

où

$$R^2 = \begin{cases} \frac{b^2(dc+a)^2}{4ad(b-a)}, & \text{Si } b \geq 2a \\ \frac{(cd+a)^2}{d}, & \text{Si } b < 2a \end{cases} \quad (3.24)$$

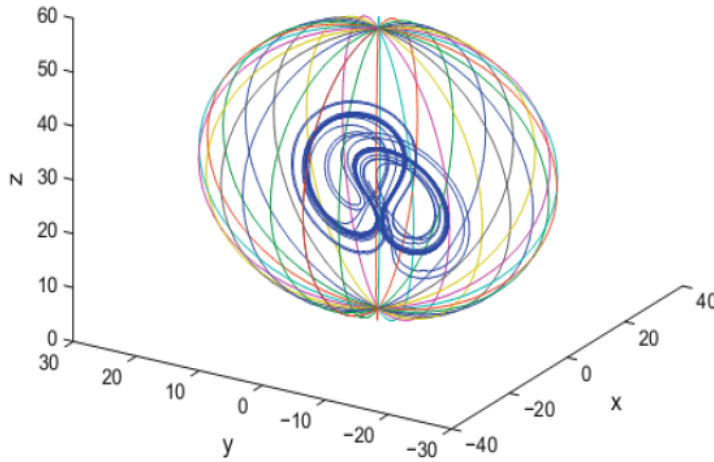


Figure 3.1

Conclusion

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée, nous avons estimé la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre à temps continu . En particulier, nous avons établi des conditions suffisantes pour que ce système soit inclus dans un ensemble ellipsoïde de dimension quatre

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire se base sur l'étude de la bornitude du système hyperchaotique plus général de dimension 4. Ce travail se compose de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les notions fondamentales de base des systèmes dynamiques, nous avons défini la théorie de chaos et ses caractéristique et la transition du chaos.

Le deuxième chapitre étudie le premier système hyperchaotique, et discute de l'hyperchaotification du système de Pan et son comportement.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié la borne extrême et l'ensemble positivement invariant du système hyperchaotique plus général de dimension 4 en utilisant la théorie de fonction de Lyapunov et l'optimisation. Plus précisément, nous avons proposé des conditions suffisantes pour que le système soit contenu dans l'ensemble ellipsoïde à quatre dimension.

Bibliographie

- [1] Rezzag Samia, 3Etude et estimation des bornes de systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques", thèse de doctorat Université L.arbi Ben M.hidi.
- [2] Ruelle, D and Takens, F. "On the nature of turbulence," Commun Math Phys, 20, 167-192 (1971).
- [3] C.Morel « Analyse et contrôle de dynamiques Chaotiques, application à des circuits électroniques non-linéaires ». Thèse de Doctorat de l'école Doctorale d' Angers.2005.
- [4] Cenys, A. Tamasevicius, A. Baziliauskas, A. Krivickas, R. and Lindberg, E. "Hyperchaos in coupled colpitts oscillator," Chaos Solitons and Fractals, 17 (2-3), 349-353 (2003).
- [5] Kapitaniak, T. and Steeb, W. H. "Transition to hyperchaos in coupled generalized van der pol equations," Phys. Lett. A. 152, 33-36 (1991).
- [6] Yujun, N. Xingyuan,W. Mingjun,W. and Huaguang, Z. "A new hyperchaotic system and its circuit implementation," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15 (11), 3518-3524 (2010).
- [7] Guo, R. "A simple adaptive controller for chaos and hyperchaos synchronization," Phys. Lett. A. 372, 5593-5597 (2008).
- [8] Wu, X. J. Wang, H. and Lu, H. T. "Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization," Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12, (2), 1288-1299 (2011).

- [9] Wang, G. Zhang, X. Zheng, Y. and Li, Y. .A new modified hyperchaotic Lü system,.Phys. A. 371, 260- 272 (2006).
- [10] Alazzawi, S. F. "Study of dynamical properties and effective of a state u for hyperchaotic Pan systems". Al-Rafiden J. Comput. Sci. Math. 10 (2013) 89-99.
- [11] Rezzag, S. Zehrou, O. and Aliouche, A. "Estimating the bounds for the general 4-D continuous-time autonomous system," Nonlinear Dynamics and Systems Theory 15 (3), 313.320 (2015).
- [12] Lefchetz S. "Dierential equations: geometric theory," New York: Interscience Publishers (1963).

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de la borne extrême et l'ensemble positivement invariant du système hyperchaotique le plus général de dimension quatre à l'aide de fonction de Lyapunov. Plus précisément, nous présentons des conditions suffisantes pour que ce système soit inclus dans une surface ellipsoïde à 4 dimension.

Mots clés : Système hyperchaotique de dimension 4, borne extrême, ensemble positivement invariant.

Abstract

This work focuses on studying the extrem bound and the positively invariant set of the most general hyperchaotic system of dimension four using Lyapunov functions. Specifically, we present sufficient conditions for this system to be included within a four-dimensional ellipsoidal surface.

Keywords : 4-D hyperchaotic system, ultimate bound, positively invariant set.

المخلص

هذا العمل يهتم بدراسة الحد الاقصى و المجموعة الثابتة ايجابا لنظام شديد الفوضى فائق العمومية ذو البعد الرابع باستخدام تقنية دالة ليابونوف. بشكل اكثر تحديد, نقدم شروطا كافية من اجل تضمين هذا النظام في سطح بيضوي رباعي الابعاد.

الكلمات المفتاحية : نظام شديد الفوضى, الحد الاعلى, مجموعة ثابتة بشكل ايجابي.