

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE (U.S.T.H.B.) - ALGER

INSTITUT DE PHYSIQUE



T H E S E

14^e Exp. p. H. 03

Présentée à l'U.S.T.H.B. pour l'obtention du grade de **MAGISTER**

Spécialité: **PHYSIQUE THEORIQUE**

Par

Salim HOUAMER

Sujet: CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA DENSITE
DE LA MATIERE NUCLEAIRE

Soutenue publiquement le
devant le Jury composé de:

Abdelaziz SALEM
Mohamed FELLAH
Muhammed ASGHAR
Mohamed MOULAY
Saad OUICHAOUI

Professeur USTHB
Professeur USTHB
Professeur USTHB
Chargé de Recherche HCR
Maitre de Conf. USTHB

Président
Rapporteur
Examineurs

OSIASS

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au laboratoire de physique théorique de l'institut de physique de l'U.S.T.H.B.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur FELLAH , Professeur à l'U.S.T.H.B, qui m'a suggéré ce travail et m'a constamment orienté, par ses conseils et son aide, tout au long de ce présent travail.

Je remercie Monsieur A.SALEM, Professeur à l'U.S.T.H.B, pour m'avoir fait honneur en acceptant de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur M.ASGHAR, Professeur à l'U.S.T.H.B, Monsieur M.MOULAY, chargé de recherche au H.C.R, ainsi que Monsieur S.OUICHAOUI, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B, pour avoir bien voulu accepter la participation en tant qu'examineurs au jury de cette thèse.

Je ne saurais oublier de remercier MM T.A.MINELLI et A.PASCOLINI, Professeurs à l'université de GALILEO GALILEI de Padova (ITALIE), pour m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire et pour leur précieuse collaboration.

Les calculs numériques ont été réalisés grâce aux moyens mis à notre disposition par le groupe de physique théorique et des méthodes numériques du H.C.R ainsi qu'au centre de calcul de l'U.S.T.H.B.

Je remercie également tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé dans ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : PRINCIPE DE LA METHODE	
1.1 - Introduction	6
1.2 - Densité nucléaire	7
a- Principe de la méthode	7
b- Equation intégrale électron-noyau de Fredholm	12
c- Forme différentielle de l'équation de Fredholm	16
d- Forme différentielle et résolution du problème	19
1.3 - Potentiels du modèle en couches	21
a- Equation différentielle générant le potentiel du modèle	
en couches	21
b- Expression des potentiels central et spin-orbite	24
CHAPITRE II : CALCUL EXPLICITE DE LA DENSITE NUCLEAIRE	
2.1 - Introduction	28
2.2 - Modèles de protons utilisés	28
2.3 - Solutions générales de l'équation de Fredholm	31
2.3.1+ Différents cas possibles de la résolution	31
2.3.2- Solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce	
ap = 1	35
2.3.3- Solution de l'équation de Fredholm de première espèce	
ap = 1	37
2.3.4- Solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce	
ap = 1	38

2.4 - Densités nucléaires relatives aux quatre modèles	44
a- Solution du modèle I	45
b- Solution du modèle II	45
c- Solution du modèle III	47
d- Solution du modèle IV	48
2.5 - Densités de charge utilisées	50
2.6 - Conclusion	51

CHAPITRE III : POTENTIELS DU MODÈLE EN COUCHES

3.1 - Introduction	52
3.2 - Résolution de l'équation différentielle régissant la matière nucléaire	53
3.3 - Calcul des potentiels du modèle en couches	64
3.3.1- Potentiel à particule indépendante	64
3.3.2- Détermination des potentiels $v_{so}(r)$ et $v_c(r)$	65
3.4 - Phénomène de bifurcation	66
3.5 - Conclusion	67

CHAPITRE IV : RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS

I - Paramètres utilisés et méthodes numériques	68
a- Paramètres utilisés	68
b- Méthodes numériques	69
II - Résultats numériques	73
1- Densité nucléaire	73
2- Potentiel nucléaire	75
a- Calcul des paramètres v et μ	75
b- Calcul du paramètre β	76
c- Potentiels du modèle en couches	78
d- Conclusion	79

CONCLUSION80

ANNEXE A84

ANNEXE B87

ANNEXE C90

ANNEXE D91

FIGURES

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

Dans la théorie de la matière nucléaire infinie qui considère la substance nucléaire comme un liquide incompressible, la densité est supposée uniforme à l'intérieur et nulle au delà du rayon nucléaire. On considère, en outre, que le noyau possède le même nombre de protons et de neutrons fortement liés et de dimensions infinies de sorte que les effets de surface deviennent négligeables [SI.75]. Cela se traduit, en fait, par les propriétés de saturation des forces nucléaires. D'autre part, l'existence de noyaux et quelques observables associées très stables indiquent l'existence de couches dans le noyau. De ce fait, le noyau peut être considéré d'une part, comme un système de particules fortement liées, et d'autre part, comme un système de particules pratiquement indépendantes avec des propriétés d'états gazeux. Ainsi, et pour rendre compte de cette dualité, deux grands modèles ont été construits : le modèle de la goutte [BO.39] ou de la gouttelette [MY.69] liquide utilisé en fission nucléaire et illustré par la formule de Weizsaker, et le modèle microscopique illustré par le modèle en couches [GO.49.MA.49] qui a permis l'explication des nombres magiques en considérant que les nucléons se meuvent dans un champ moyen avec un fort couplage spin-orbite.

Dans les deux modèles, la densité nucléaire apparaît comme une quantité essentielle pour l'étude des propriétés nucléaires et notamment la détermination du potentiel.

L'interaction nucléaire étant plus importante que l'interaction coulombienne, les dimensions et la distribution nucléaires sont principalement déterminées par les forces nucléaires. Pour un noyau à symétrie sphérique, les dimensions nucléaires sont caractérisées par un seul paramètre : le rayon nucléaire. ce dernier est en général déduit ainsi que la densité nucléaire à partir des expériences de la diffusion électron-noyau à haute énergie.

On estime, à partir de ces expériences, que la densité est pratiquement constante à l'intérieur du noyau puis chute rapidement vers zéro sur une distance qui est très petite comparée aux dimensions du noyau.

Les forces nucléaires étant indépendantes de la charge, les distributions de protons et de neutrons à l'intérieur sont pratiquement identiques. En outre, malgré un excès de neutrons par rapport aux protons, les volumes occupés par ces particules sont les mêmes; ceci est du à l'interaction coulombienne qui a tendance à éloigner les protons et à leur faire occuper un volume beaucoup plus grand. Ainsi, il est en général supposé que les dimensions du noyau sont déterminées avec une bonne approximation

par la densité de charge. Aussi, il serait donc légitime de remplacer la densité nucléaire par la densité de charge pour décrire certains phénomènes nucléaires.

La diffusion des électrons donne un maximum d'informations concernant la densité de charge plus que toute autre technique. Elle a d'ailleurs été souvent utilisée par les physiciens [HO.56] et [DO.75] pour obtenir des formes consistantes de cette fonction. On considère pour cela une fonction $\rho(\vec{r}, a_1, a_2, \dots)$ du vecteur position r et des paramètres a_i caractérisant la forme et la dimension du noyau, puis on ajuste ces derniers de façon que les sections efficaces théoriques concordent avec leurs homologues expérimentales [BA.77].

Les premières expériences notables de la diffusion des électrons qui furent réalisées à de basses valeurs du moment transféré q conduisirent à des formes exponentielles ou uniformes [BO.53] de la densité de charge.

Quand des expériences avec des moments transférés plus grands furent réalisées pour des noyaux plus lourds, on aboutit à une forme plus ou moins constante [BR.55]. La fonction de Fermi

$$\rho_{ch} = \rho_{och} / (1 + \exp((r-a)/b))$$

devint ainsi la plus courante et fut ensuite améliorée par l'introduction d'un terme parabolique multiplicatif :

$$\rho_{ch} = \rho_{och} (1 + c \cdot r^2 / a^2) / (1 + \exp((r-a)/b))$$

Les expériences les plus récentes ont indiqué que la distribution de Fermi ne donnait pas exactement la forme convenable comme dans le cas de l'analyse de la diffusion de Pb à haute énergie [HE.69], où un meilleur ajustement est obtenu à l'aide d'une densité gaussienne:

$$\rho_{ch} = \rho_{och} (1 + c \cdot r^2 / a^2) / (1 + \exp((r^2 - a^2) / b^2))$$

D'un autre côté, les forces nucléaires étant de courte portée, on estime que le champ moyen du modèle en couche suit approximativement la densité nucléaire. C'est ainsi que, tenant compte de cette considération, des potentiels phénoménologiques ont été proposés tels que le potentiel de Yukawa [BO.69] ou celui de Woods-Saxon [PA.73].

La densité nucléaire étant une quantité fondamentale à partir de laquelle on peut déduire d'autres quantités nucléaires en particulier le potentiel nucléaire [MI.85]b, il importe donc de la déterminer de la façon la plus réaliste.

A cet effet, nous nous proposons de déduire, dans ce travail, la densité nucléaire non pas en l'assimilant à la densité de charge, et encore moins en la donnant phénoménologiquement, mais en la calculant de façon exacte à partir de la définition générale:

$$\rho_{ch}(r) = \int \rho_p(\vec{r}-\vec{s}) \rho(s) d\vec{s}$$

Pour ce faire, et à l'aide d'un modèle de protons [MI.85]a déduit

À partir des données expérimentales de la diffusion électron-noyau, nous essayerons de trouver des solutions exactes de la densité. Nous pourrons alors comparer celle-ci avec la densité de charge et voir les différences qualitatives et quantitatives qui pourraient exister entre elles. Comme application, nous déterminerons les potentiels du modèle en couches à l'aide de la densité nucléaire ainsi calculée. Nous utiliserons à cet effet les propriétés de saturation des forces nucléaires et les résultats de la diffusion étudiée par la méthode d'Hartree-fock.

Dans le chapitre I, Nous rappelons les différentes étapes qui nous permettent de déterminer la densité nucléaire puis le potentiel nucléaire. Nous calculons dans le chapitre II, la densité nucléaire concernant le problème dans toute sa généralité mathématique. Dans le troisième chapitre, nous déterminerons les potentiels du modèle en couches à l'aide des densités nucléaires déjà trouvées. Les résultats numériques sont alors présentés et discutés dans le chapitre IV. Rappelons que nous considérons uniquement des noyaux à symétrie sphérique, il ne sera donc tenu compte d'aucune déformation.

-CHAPITRE I -

PRINCIPE DE LA METHODE

1- Introduction

La connaissance de la densité nucléaire et donc du potentiel nucléaire permet d'expliquer et de prédire un grand nombre de phénomènes nucléaires. Aussi, importe-t-il de les déterminer avec la meilleure approximation possible.

Au début, et en se basant sur les premières propriétés connues de la matière nucléaire, les auteurs ont commencé à donner de nouvelles formes en procédant de différentes façons. C'est ainsi que Yukawa, par exemple, aboutit à son fameux potentiel en faisant une analogie avec l'électrodynamique quantique. La densité nucléaire quant à elle, fut donnée sous formes empiriques telle que la forme de Fermi [DA.69] grâce aux résultats expérimentaux de cette époque. On l'assimile encore, grâce aux propriétés de l'atome, tout simplement à la densité de charge qui est donnée dans la littérature.

Une détermination consistante du potentiel nucléaire dépend de celle de la densité nucléaire car c'est à partir de cette dernière que l'on peut étudier d'une manière assez rigoureuse les processus nucléaires.

Il s'agit, dans ce chapitre, de déterminer la densité nucléaire $\rho(r)$ non pas en l'assimilant au modèle de Fermi ou à la densité

de charge, mais en utilisant une définition plus générale.

Nous utiliserons à cet effet la relation connue :

$$\rho_{ch}(r) = \int \rho_p(|\vec{r} - \vec{s}|) \rho(s) d\vec{s}$$

Le problème consiste alors à résoudre l'équation à l'aide d'une méthode mathématique exacte en utilisant un modèle de proton obtenu à partir des données expérimentales de la diffusion électron-noyau.

Nous pourrions alors déterminer le potentiel du modèle en couches à l'aide de la densité nucléaire ainsi trouvée et en utilisant quelques définitions de la théorie des collisions étudiée par la méthode d'Hartree-Fock.

Notons enfin que le noyau sera supposé à symétrie sphérique; il ne sera donc tenu compte d'aucune déformation.

2- Densité nucléaire

a-principe de la méthode

La densité de charge peut s'écrire en fonction de la densité nucléaire sous la forme suivante :

$$\rho_{ch}(r) = \int \rho_p(|\vec{r} - \vec{s}|) \rho(s) d\vec{s} \quad (1.1)$$

ou $\rho(s)$ est la densité nucléaire et $\rho_p(r)$ la distribution de protons.

C'est une équation intégrale que l'on peut résoudre numériquement une fois que $\rho_{ch}(r)$ est connue et $\rho_p(s)$ convenablement choisie.

Dans un premier temps, nous supposerons que les densités de charge

$\rho_{ch}(r)$ ne sont pas connues et nous essayerons de résoudre le problème différemment.

Pour la résolution du problème, le modèle de proton que nous utiliserons est celui considéré par T.A. MINELLI et A. PASCOLINI [MI.85]a. Ce dernier a été déduit à partir des expériences de la diffusion électron-noyau. Il s'agit ensuite de chercher les solutions $\rho(r)$ sans connaître la forme exacte de $\rho_{ch}(r)$.

Dans la littérature, les $\rho_{ch}(r)$ sont données soit sous formes paramétrisées soit sous forme de tables de données empiriques.

Notre but est de résoudre le problème à l'aide d'une méthode mathématique exacte sans connaître la forme explicite de $\rho_{ch}(r)$.

Nous aurons ainsi résolu le problème pour toutes formes de la densité de charge qui puissent exister.

Le modèle de proton que nous avons retenu est de la forme :

$$\rho_p(r) = \frac{\mu_p^3}{4\pi} (a_p - 2b_p + b_p \cdot \mu_p \cdot r) Y(\mu_p \cdot r) + (1 - a_p) \delta(r) \quad (1.2)$$

où $Y(\mu_p r)$ est la fonction de Yukawa donnée par :

$$Y(\mu_p \cdot r) = \exp(-\mu_p \cdot r) / \mu_p \cdot r$$

et $\delta(r)$ la distribution de Dirac.

De plus amples informations concernant ce modèle seront données dans le chapitre II.

Le rayon carré moyen (r.m.s) relatif à cette densité est :

$$R_p^2 = \int r^2 \rho(r) d\vec{r}$$

En remplaçant $\rho(r)$ par la forme choisie, nous obtenons:

$$\rho^2 = \int r^2 \left[\frac{\mu p^3}{4\pi} (ap - 2bp + bp \cdot \mu p \cdot r) \cdot Y(\mu p \cdot r) + (1 - ap) \delta(r) \right] d\vec{r}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

Les intégrales $I_1, I_2,$ et I_3 sont données respectivement par les expressions suivantes:

$$- I_1 = \frac{\mu p^3}{4\pi} \int r^2 (ap - 2bp) \exp(-\mu p \cdot r) / \mu p \cdot r d\vec{r}$$

$$= \frac{ap - 2bp}{4\pi} \mu p^2 \int_0^\infty r^2 \exp(-\mu p \cdot r) dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha$$

Ayant considéré la symétrie sphérique, et en posant $\mu p \cdot r = x$, nous obtenons:

$$I_1 = \frac{ap - bp}{4\pi} \int_0^\infty x^3 \exp(-x) dx = \frac{6}{\mu p^2} (ap - bp) = 6 (ap - bp) sp^2$$

$$- I_2 = \frac{bp \cdot \mu p}{4\pi} \int r^3 \frac{\exp(-\mu p \cdot r)}{\mu p r} d\vec{r} = \frac{bp \cdot \mu p^3}{4\pi} \int_0^\infty r^4 \exp(-\mu p \cdot r) dr$$

De même, en posant $\mu p \cdot r = x$, nous obtenons:

$$I_2 = \frac{bp}{4\pi^2} \int_0^\infty x^4 \exp(-x) dx = 24 bp \cdot sp^2$$

$$\text{avec } sp = 1/\mu p$$

$$- I_3 = (1 - ap) \int r^2 \delta(\vec{r}) d\vec{r}$$

En utilisant une propriété de la distribution de Dirac:

$$f(x) \delta(x) dx = f(x)$$

nous déduisons que :

$$I_3 = 0$$

R_p s'écrit donc comme :

$$R_p = I_1 + I_2 + I_3 = 6(ap - 2bp)sp^2 + 24bpsp^2 \quad (1.3)$$

$$R_p = 6(ap + 2bp)sp^2$$

$$\text{avec } sp = 1/\mu p$$

Les paramètres ap et bp sont connus pour chaque modèle utilisé. Nous pouvons donc connaître, pour chaque modèle, la valeur de sp en utilisant dans la relation (1.3) la valeur expérimentale de R_p .

Nous allons maintenant développer l'équation (1.1) et essayer d'arriver à une forme qui nous permettra de calculer la densité nucléaire $\rho(r)$.

$$\text{Posons } \vec{t} = \vec{r} - \vec{s} \quad (1.4.a)$$

$$\text{nous aurons donc } t^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta) \quad (1.4.b)$$

et

$$\begin{aligned} \rho_{ch}(r) &= \int \left[\frac{\mu p^3}{4\pi} ((ap - 2bp)Y(\mu p |\vec{r} - \vec{s}|) + bp \mu p |\vec{r} - \vec{s}| Y(\mu p |\vec{r} - \vec{s}|)) \right. \\ &\quad \left. + (1 - ap) \delta(\vec{r} - \vec{s}) \right] \rho(s) d\vec{s} \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mu p^3}{4\pi} (ap - 2bp) \int Y(\mu p |\vec{r} - \vec{s}|) \rho(s) d\vec{s} \\ &= \frac{\mu p^3}{4\pi} (ap - 2bp) \int_0^\infty s^2 \rho(s) ds \int_0^\pi Y(\mu p |\vec{r} - \vec{s}|) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \end{aligned}$$

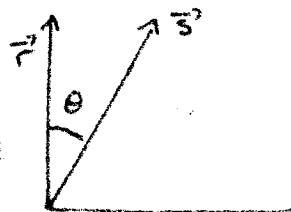
A l'aide du changement de variable (1.3) et en choisissant l'axe Oz suivant r nous obtenons :

$$2t dt = 2rs \sin\theta d\theta \quad \sin\theta d\theta = t dt / rs$$

nous obtenons donc :

$$I_1 = \frac{\mu p^3 (ap - 2bp)}{4\pi} \int_0^\infty s^2 \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} \frac{t Y(\mu p \cdot t) dt}{r \cdot s} 2\pi$$

$$= \frac{\mu p^3 (ap - 2bp)}{2r} \left[\int_0^\infty s \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} t Y(\mu p \cdot t) dt \right]$$



que nous pouvons écrire sous la forme :

$$I_1 = (ap - 2bp) \sigma_1(r)$$

De la même façon,

$$I_2 = \frac{bp \mu p^4}{4\pi} \int_0^\infty |\vec{r} - \vec{s}| Y(\mu p |\vec{r} - \vec{s}|) \rho(s) d\vec{s}$$

En procédant de la même manière que pour I1, nous obtenons :

$$I_2 = \frac{bp \cdot \mu p^4}{4\pi} \int_0^\infty s^2 \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} \frac{t Y(\mu p \cdot t) dt}{r \cdot s} \int_0^{2\pi} d\bar{s}$$

$$= \frac{bp \mu p^4}{2r} \int_0^\infty s \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} t Y(\mu p t) dt$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$I_2 = bp \sigma_2(r)$$

et

$$I_3 = (1 - ap) \int \delta(\vec{r} - \vec{s}) \rho(s) d\vec{s} = (1 - ap) \rho(r)$$

où nous avons utilisé la propriété :

$$f(x) \delta(r-x) dx = f(r)$$

Finalement, $\rho_{ch}(r)$ s'écrit :

$$\rho_{ch}(r) = I_1 + I_2 + I_3$$

c'est à dire :

$$\rho_{ch}(r) = (1-ap)\rho(r) + (ap-2bp)\sigma_1(r) + bp\sigma_2(r) \quad (1.5)$$

$$\text{où } \sigma_n(r) = \frac{\mu p^{n+2}}{2r} \int_0^\infty s \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} t^n Y(\mu p, t) dt \quad (1.6)$$

b- Equation intégrale électron-noyau de Fredholm

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation (1.5) et d'obtenir une forme explicite de $\rho(r)$.

Considérons l'équation (1.5) et calculons $\sigma_1(r)$ et $\sigma_2(r)$.

$\sigma_1(r)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1(r) &= \frac{\mu p^3}{2r} \int_0^\infty s \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} t Y(\mu p, t) dt \\ &= \frac{\mu p}{2r} \int_0^r s \rho(s) I_1(r, s) ds + \int_r^\infty s \rho(s) I_2(r, s) ds \end{aligned}$$

Les quantités $I_1(r, s)$ et $I_2(r, s)$ s'écrivent respectivement comme :

$$I_1(r, s) = \int_{r-s}^{r+s} t Y(\mu p, t) dt = \int_{r-s}^{r+s} \frac{\exp(-\mu p t)}{\mu p} dt = \frac{2}{\mu p} \exp(-\mu p r) \text{sh}(\mu p s)$$

$$I_2(r, s) = \int_{s-r}^{r+s} t Y(\mu p, t) dt = \int_{s-r}^{r+s} \frac{\exp(-\mu p t)}{\mu p} dt = \frac{2}{\mu p} \exp(-\mu p s) \text{sh}(\mu p r)$$

Nous pouvons, de la même façon, calculer $\sigma_2(r)$:

$$\begin{aligned} \sigma_2(r) &= \frac{\mu p}{2r} \int_0^\infty s \rho(s) ds \int_{|r-s|}^{r+s} t Y(\mu p, t) dt \\ &= \frac{\mu p}{2r} \int_0^r s \rho(s) I_1'(r, s) ds + \int_r^\infty s \rho(s) I_2'(r, s) ds \end{aligned}$$

avec

$$I1'(r, s) = \int_{r-s}^{r+s} t Y(\mu p, t) dt = \frac{1}{\mu p} \int_{r-s}^{r+s} t \exp(-\mu p t) dt$$

$$= \frac{\exp(-\mu p, r)}{\mu p^2} (2r \operatorname{sh} \mu p s - 2s \operatorname{ch} \mu p s) + 2 \frac{\exp(-\mu p, r)}{\mu p^3} \operatorname{sh} \mu p s$$

$$I2'(r, s) = \int_{s-r}^{r+s} t Y(\mu p, t) dt = \frac{1}{\mu p} \int_{s-r}^{r+s} t \exp(-\mu p t) dt$$

$$= \frac{\exp(-\mu p, s)}{\mu p^2} (2s \operatorname{sh} \mu p r - 2r \operatorname{ch} \mu p r) + 2 \frac{\exp(-\mu p, s)}{\mu p^3} \operatorname{sh}(\mu p r)$$

Considérons maintenant la quantité $(ap-2bp)\sigma_1(r) + bp\sigma_2(r)$ et remplaçons $\sigma_1(r)$ et $\sigma_2(r)$:

Si $s \leq r$, nous obtenons :

$$(ap-2bp) \frac{\mu p^3}{2r} \int_0^r s f(s) \left(\frac{2}{\mu p^2} \exp(-\mu p, r) \operatorname{sh}(\mu p, s) ds \right.$$

$$+ bp \frac{\mu p^4}{2r} \int_0^r s f(s) \left(\frac{\exp(-\mu p, r)}{\mu p^2} (2r \operatorname{sh} \mu p s - 2s \operatorname{ch} \mu p s) + \frac{2}{\mu p^3} \exp(-\mu p r) \operatorname{sh} \mu p s \right) ds$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^r s f(s) ((ap-bp+bp\mu p r) \operatorname{sh} \mu p s - bp\mu p s \operatorname{ch} \mu p s) \mu p \exp(-\mu p r) ds$$

Si $s \geq r$, nous obtenons :

$$(ap-2bp) \frac{\mu p}{2r} \int_r^\infty s f(s) \left(\frac{2}{\mu p^2} \exp(-\mu p, s) \operatorname{sh} \mu p, r \right) ds$$

$$+ bp \frac{\mu p^4}{2r} \int_r^\infty s f(s) \left(\frac{\exp(-\mu p, s)}{\mu p^2} (2s \operatorname{sh} \mu p r - 2r \operatorname{ch} \mu p r) + \frac{2}{\mu p^3} \exp(-\mu p s) \operatorname{sh} \mu p r \right) ds$$

$$= \frac{1}{r} \int_r^\infty s f(s) ((ap-bp+bp\mu p s) \operatorname{sh} \mu p r - bp\mu p r \operatorname{ch} \mu p r) \mu p \exp(-\mu p s) ds$$

Nous pouvons donc mettre $f_{ch}(r)$ sous la forme :

$$f_{ch}(r) = (1-ap) f(r) + \frac{1}{r} \int_0^{\infty} s K(r,s) f(s) ds \quad (1.7)$$

où $K(r,s)$ est donné par :

$$K(r,s) = \mu p \begin{cases} ((ap-bp+bp\mu r)sh\mu s - bp\mu s ch\mu s) \exp(-\mu r) & \text{si } s \leq r \\ ((ap-bp+bp\mu s)sh\mu r - bp\mu r ch\mu r) \exp(-\mu s) & \text{si } s \geq r \end{cases}$$

L'équation (1.7) est appelée équation de Fredholm non homogène à noyau symétrique ; le noyau étant la fonction $K(r,s)$ donnée ci-dessus et vérifiant la propriété de symétrie $K(r,s) = K(s,r)$.

Cette équation peut être résolue numériquement en connaissant à chaque fois la densité de charge $f_{ch}(r)$ qu'on trouve aisément dans la littérature.

Nous allons cependant, au lieu de cette procédure, résoudre le problème à l'aide d'une méthode mathématique exacte et sans connaître les densités de charge $f_{ch}(r)$.

Posons maintenant :

$$x = \mu r$$

$$y = \mu s$$

$$f_{ch}(r) = \frac{\mu p^2}{4\pi r} f_{ch}(x) \quad f(s) = \frac{\mu p^2}{4\pi s} f(y) \quad (1.8)$$

L'équation (1.7) devient alors :

$$\frac{\mu p^2}{4\pi r} f_{ch}(x) = \frac{\mu p^2}{4\pi r} (1-ap) f(x) + \frac{\mu p^2}{4\pi r} (I1 + I2)$$

où $I1$ et $I2$ sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} I1 &= \int_0^x ((ap-bp+bp\mu x)shy - bp\mu y chy) \exp(-x) f(y) dy \\ &= \int_0^x ((ap-bp+bp-bp+bp\mu x)shy - bp\mu y chy) \exp(-x) f(y) dy \\ &= (ap-2bp) \int_0^x \exp(-x) shy f(y) dy + bp \int_0^x ((1+x)shy - y chy) \exp(-x) f(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_x^\infty ((ap-bp+bp) shx - bpx chx) \exp(-y) f(y) dy \\
 &= \int_x^\infty ((ap-bp+bp-bp+bp) shx - bpx chx) \exp(-y) f(y) dy \\
 &\quad - (ap-2bp) \int_x^\infty \exp(-y) shx f(y) dy + bp \int_x^\infty ((1+y) shx - xchx) \exp(-y) f(y) dy
 \end{aligned}$$

La fonction fch(x) peut donc se mettre sous la forme :

$$fch(x) = (1-ap)f(x) + (ap-2bp) \int_0^\infty G(x,y) f(y) dy + 2bp \int_0^\infty H(x,y) f(y) dy \quad (1.9)$$

$$\text{où } G(x,y) = \begin{cases} shx \exp(-y) & \text{si } x \leq y \\ shy \exp(-x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

$$\text{et } H(x,y) = \frac{1}{2} \begin{cases} ((1+y) shx - xchx) \exp(-y) & \text{si } x \leq y \\ ((1+x) shy - ychy) \exp(-x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

L'équation (1.9) peut encore s'écrire :

$$fch(x) = (1-ap)f(x) + (ap-2bp)g(x) + 2bp.h(x) \quad (1.10)$$

Les fonctions G(x,y) et H(x,y) vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 G(0,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} G(x,y) = 0 \\
 G(x,x-0) - G(x,x+0) &= 0 \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G'(x,x-0) - G'(x,x+0) &= -1 \\
 H(0,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} H(x,y) = 0 \\
 H''(0,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} H''(x,y) = 0 \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

$$H'''(x,x-0) - H'''(x,x+0) = 1$$

H(x,y), H'(x,y), et H''(x,y) continues.

De plus, g(x), et h(x) satisfont à :

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad (1.13.a)$$

$$h(0) = h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = 0$$

Notons que les primes indiquent les dérivées par rapport à x .

c- Forme différentielle de l'équation de Fredholm

Notre méthode consiste à transformer l'équation intégrale (1.9) en une équation différentielle.

Nous remarquons que les fonctions $G(x,y)$ et $H(x,y)$ vérifient les équations différentielles :

$$H''''(x,y) - 2H''(x,y) + h(x,y) = 0$$

$$H''(x,y) = H(x,y) - G(x,y) \quad (1.13.b)$$

$$G''(x,y) = G(x,y)$$

$g(x)$ et $h(x)$ sont données respectivement par :-

$$g(x) = \int_0^{\infty} G(x,y) f(y) dy = \Omega G f(x) \quad (1.14)$$

$$h(x) = \int_0^{\infty} H(x,y) f(y) dy = \Omega H f(x) \quad (1.15)$$

Calculons maintenant la quantité $\int_0^{\infty} G(x,t) G(t,y) dy$:

pour $x \leq y$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G(x,t) G(t,y) dt &= \int_0^x G(x,t) G(t,y) dt + \int_x^y G(x,t) G(t,y) dt \\ &\quad + \int_y^{\infty} G(x,t) G(t,y) dt \\ &= \int_0^x \exp(-x-y) \operatorname{sh} t dt + \int_x^y \operatorname{sh} x \operatorname{sh} t \exp(-y-t) dt \\ &\quad + \int_y^{\infty} \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \exp(-2t) dt \\ &= \frac{1}{2} ((1+y) \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x) \end{aligned}$$

Pour $x \geq y$, nous trouvons de la même façon :

$$\begin{aligned} G(x,t) G(t,y) dt &= \int_0^y G(x,t) G(t,y) dt + \int_y^x G(x,t) G(t,y) dt \\ &+ \int_x^\infty G(x,t) G(t,y) dt \\ &= \frac{1}{2} ((1+x) \operatorname{sh} y - y \operatorname{ch} y) \end{aligned}$$

Nous déduisons donc :

$$H(x,y) = \int_0^\infty G(x,t) G(t,y) dt \quad (1.16)$$

Calculons maintenant $h(x)$ en utilisant la définition (1.16).

$$\begin{aligned} h(x) &= \Omega H f(x) = \int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty G(x,t) G(t,y) dt \right) f(y) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty G(x,t) G(t,y) f(y) dt dy = \Omega^2 G f(x) \quad (1.17) \end{aligned}$$

L'équation (1.9) peut donc s'écrire comme :

$$fch(x) = (1-ap)f(x) + (ap-2bp) \Omega G f(x) + 2bp \Omega^2 G f(x) \quad (1.18)$$

Les propriétés (1.11), (1.12) et (1.13) caractérisent $G(x,y)$ et $H(x,y)$ comme fonctions de Green (voir annexe A).

Essayons maintenant de développer l'équation (1.18).

Pour cela, calculons $g''(x)$.

$$g''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \Omega G f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty G(x,y) f(y) dy$$

Nous utiliserons à cet effet la relation générale [PA.85]_b :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y) dy &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) dy + f(x,b(x)) \frac{db(x)}{dx} \\ &- f(x,a(x)) \frac{da(x)}{dx} \quad (1.19) \end{aligned}$$

Nous aurons donc :

$$\frac{d}{dx} \Omega G f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x G(x,y) f(y) dy + \int_x^\infty G(x,y) f(y) dy \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} f(y) dy + (G(x,x-0) - G(x,x+0)) f(x) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} f(y) dy \\
\frac{d^2}{dx^2} \Omega G f(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} f(y) dy + (G'(x,x-0) - G'(x,x+0)) f(x) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} f(y) dy - f(x)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés (1.11) de $G(x,y)$.

La dernière relation peut encore se mettre sous la forme :

$$D^2 \Omega G f(x) = \Omega G f(x) - I f(x)$$

$$\text{ou bien} \quad (I - D^2) \Omega G f(x) = I f(x) \quad (1.20.a)$$

où D désigne la dérivée par rapport à la variable x et I l'opérateur unité.

A partir de la relation (1.20.a), nous pouvons écrire :

$$(I - D^2) \Omega G = I \quad \text{ou encore} \quad (I - D^2) = \Omega^{-1} G$$

A l'aide de la relation (1.17), nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
(I - D^2) &= \Omega^{-1} G \\
\Omega G^2 &= \Omega H \quad (I - D^2) = \Omega^{-2} G \quad (1.20.b)
\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (1.18) à gauche par $\Omega^{-2} G$, nous obtenons :

$$((1-ap)\Omega^{-2} G + (ap-2bp)\Omega^{-1} G + 2bp)f(x) = \Omega^{-2} G fch(x) \quad (1.21)$$

En utilisant (1.20.b), la dernière relation devient :

$$((1-ap)D^4 + (ap+2bp-2)D^2 + I)f(x) = (I-D^2)^2 fch(x) \quad (1.22)$$

Nous sommes donc arrivés, à partir de l'équation intégrale (1.9), à une équation différentielle en $f(x)$. Il suffit donc de calculer $f(x)$ et d'en déduire $f(r)$ grâce à la relation (1.8).

Notre but est de résoudre le problème analytiquement. Nous allons pour cela, au lieu de résoudre l'équation (1.22), considérer l'équation (1.18) laquelle peut être transformée en une équation différentielle contenant des fonctions ayant les propriétés des fonctions de Green. La résolution peut alors se faire sans connaître la densité de charge $fch(r)$.

Considérons donc l'équation (1.18). Cette dernière s'écrit, en tenant compte des relations (1.14) et (1.17) :

$$(1-ap)f(x) + (ap-2bp)g(x) + 2bph(x) = fch(x) \quad (1.23)$$

d- Forme différentielle et résolution du problème

Il reste maintenant à éliminer $f(x)$ et $g(x)$ pour obtenir une équation en $h(x)$. nous utiliserons à cet effet le théorème fondamentale suivant :

une fonction $f(x)$ est de classe C_n si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^i f^{(i)}(x) = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

et $\int_0^{\infty} x^i f^{(i)}(x) dx$ existe

Si $f(x)$ est de classe C_0

$$\text{et } h(x) = \int_0^{\infty} H(x,y)f(y)dy \quad (1.24)$$

alors $h(x)$ est de classe C_4 et satisfait à (annexe B) :

$$h''''(x) - 2h''(x) + h(x) = f(x) \quad (1.25)$$

A l'aide des relations (1.13) et (1.19), il s'en suit :

$$h''''(x) = h(x) - g(x) \quad (1.26.a)$$

$$h''''(x) = h'(x) - G'(x,y)f(y)dy \quad (1.26.b)$$

$$h''''(x) = h''(x) - g(x) + f(x) \quad (1.26.c)$$

Par conséquent, l'équation intégrale non homogène (1.9) se transforme en une équation différentielle non homogène du quatrième ordre :

$$(1-ap)h''''(x) + (ap+2bp-2)h''(x) + h(x) = fch(x) \quad (1.27.a)$$

Si $ap = 1$, l'élimination du terme $h''''(x)$ à l'aide de la relation (1.26.c) donne :

$$f(x) = \frac{1}{1-ap} ((fch(x) + (ap-2bp)h''(x) - aph(x))) \quad (1.27.b)$$

Les relations (1.27) représentent la solution de notre problème, c'est à dire le calcul de la densité nucléaire à partir de la densité de charge.

Le problème d'extraction de la distribution nucléaire à partir de la densité de charge peut donc être formulé de la façon suivante:

"Etant donnée une fonction $fch(x)$ satisfaisant les conditions A et B (annexe C), pour les modèles de protons tels que $ap \neq 1$, on obtient une fonction $f(x)$ de classe C_4 (annexe B) en résolvant une équation différentielle du quatrième ordre (1.27.a); la fonction inconnue $f(x)$, de classe C_0 et satisfant

les conditions A et B, est donc calculée à l'aide de l'équation (1.27.b)

Les équations (1.27) constituent le système d'équations à résoudre déduit à partir de l'équation de Fredholm exprimée sous la forme fonctionnelle (1.10).

3- Potentiels du modèle en couches

Il s'agit de trouver une méthode qui permet de déduire les potentiels du modèle en couches à partir de ceux à particules indépendantes. Nous utiliserons à cet effet la densité nucléaire calculée auparavant par une méthode mathématique exacte ainsi que les conditions de stabilité de la matière nucléaire.

a- Equation différentielle générant le potentiel du modèle en couches

On considère en général que le potentiel du modèle en couches peut, pour un nucléon individuel, être scindé en une partie centrale et une partie spin-orbite décrites par les fonctions radiales $v_c(r)$ et $v_{so}(r)$:

$$V_{sm}(r) = v_c(r) + \delta \lambda^2 (\vec{s} \cdot \vec{l}) v_{so}(r) \quad (1.28)$$

On utilise en général des formes phénoménologiques telles que [MO.54] pour $v_c(r)$ et [GO.71] pour $v_{so}(r)$.

Au lieu d'une telle procédure, nous allons résoudre le problème autrement.

A ce stade, $v_c(r)$ et $v_{so}(r)$ sont des fonctions inconnues et

notre but est de trouver le lien existant entre $V_{sm}(r)$ et $v_{sp}(r)$; $v_{sp}(r)$ étant le potentiel à particules indépendantes obtenu à partir des propriétés de stabilité de la matière nucléaire.

Le potentiel nucléaire peut s'écrire :

$$V[\rho] = \frac{A}{2} \int \rho(r) v_{sp}(r) dr^3 \quad (1.29)$$

la condition de la stabilité nucléaire nous permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^A \int \frac{1}{2} V_{sm}(r) \rho(r) dr^3 = V[\rho] \quad (1.30.a)$$

à l'aide des relations (1.29) et (1.30.a), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^A \int \frac{1}{2} (v_c(r) + \delta \lambda^2 (\vec{s}_i \cdot \vec{1}) v_{so}(r)) \rho(r) dr^3 = \frac{A}{2} \int \rho(r) v_{sp}(r) dr^3 \quad (1.30.b)$$

le potentiel moyen étant le même pour tous les noyaux, il vient :

$$\frac{A}{2} v_c(r) \rho(r) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \delta \lambda^2 (\vec{s}_i \cdot \vec{1}) v_{so}(r) \rho(r) dr = \frac{A}{2} \int \rho(r) v_{sp}(r) dr \quad (1.30.c)$$

Cette dernière relation peut encore être simplifiée en prenant une valeur moyenne constante du facteur de couplage $(\vec{s}_i \cdot \vec{1})$.

En effet, nous obtenons :

$$\frac{A}{2} v_c(r) \rho(r) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \delta \lambda^2 \gamma v_{so}(r) \rho(r) dr = \frac{A}{2} \int v_{sp}(r) \rho(r) dr$$

ou bien

$$\frac{A}{2} v_c(r) \rho(r) dr + \frac{A}{2} \delta \lambda^2 \gamma v_{so}(r) \rho(r) dr = \frac{A}{2} \int v_{sp}(r) \rho(r) dr$$

ou encore

$$\frac{A}{2} (vc(r) + \delta\lambda^2 \eta vso(r)) f(r) dr = \frac{A}{2} vsp(r) (r) dr$$

où η est un paramètre dont la détermination se fait à l'aide de calculs compliqués dans la théorie d' Hartree-fock.

Nous obtenons donc :

$$vc(r) + \delta\lambda^2 \eta vso(r) = vsp(r) \quad (1.31.a)$$

En posant $\delta\lambda^2 \eta = \sigma$, la dernière relation devient :

$$vc(r) + \sigma vso(r) = vsp(r) \quad (1.31.b)$$

cette équation exprime la condition de la stabilité nucléaire.

La relation (1.31.a) est en quelque sorte trompeuse car la dépendance de $vc(r)$ et $vso(r)$ en σ n'est pas explicite. Il serait donc faux de conclure que $vc(r) = vsp(r)$ lorsque $\sigma=0$.

Essayons maintenant de transformer l'équation (1.31.a) en une équation différentielle. Pour cela, nous allons utiliser un résultat de la théorie des collisions d'Hartree-Fock [M1. 85]

La partie spin-orbite totale du potentiel du modèle en couches

(1.28) s'écrit :

$$Wso(r) = \sum_{i=1}^{A-1} \exp(i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')) \Psi_i^*(\vec{r}') \Psi_j(\vec{r}') g(\vec{k}', \vec{q}) \vec{s} \cdot (\vec{q}_A \vec{k}') d\vec{k}' d\vec{q} dr' \quad (1.32)$$

où les $\Psi_j(r)$ sont les fonctions d'onde individuelles des nucléons et $g(\vec{k}', \vec{q})$ une fonction dépendant de l'amplitude de diffusion dans la matière.

$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$, où \vec{k}' est le moment d'un nucléon diffusé après la collision avec les autres (A-1) nucléons.

$W_{so}(r)$ peut être mis sous la forme :

$$W_{so}(r) = \vec{s} \cdot ((\vec{\nabla} W(r)) \wedge \vec{k}) \quad (1.33.a)$$

avec

$$W(r) = \sum_{j=A}^A \exp(i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')) \Psi_j^*(\vec{r}') \Psi_j(\vec{r}') g(\vec{k}', \vec{q}) d\vec{k}' d\vec{q} d\vec{r}' \quad (1.33.b)$$

La dépendance étant radiale, nous avons :

$$\vec{\nabla} W(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{dW(r)}{dr} \quad \text{avec} \quad \vec{r} \wedge \vec{k} = \vec{l}$$

\vec{l} étant le moment cinétique orbital.

$W_{so}(r)$ se transforme donc en :

$$W_{so}(r) = (\vec{s} \cdot \vec{l}) \frac{1}{r} \frac{dW(r)}{dr} = (\vec{s} \cdot \vec{l}) v_{so}(r) \quad (1.33.c)$$

Le terme $W(r)$ étant radial et ne contenant pas de termes de couplage, nous allons supposer que :

$$W(r) \propto v(r)$$

nous obtenons alors :

$$v(r) + \frac{\sigma}{r} \frac{dv(r)}{dr} = v_{sp}(r)$$

ou bien

$$\frac{dv(r)}{dr} + \frac{r}{\sigma} v(r) = \frac{r}{\sigma} v_{sp}(r) \quad (1.34)$$

La relation (1.34) représente l'équation différentielle générant le potentiel du modèle en couche.

b- Expression des potentiels central et spin-orbite

A présent, nous allons résoudre l'équation différentielle

(1.34) et en déduire $vc(r)$ et $vso(r)$.

La solution de l'équation homogène est :

$$vc(r) = C \exp(-r^2/2\sigma)$$

La solution générale est trouvée en utilisant la méthode de la variation de la constante.

$$\frac{dC}{dr} = - \frac{1}{\sigma} vsp(r) \exp(-r^2/2\sigma)$$

En intégrant par partie, il s'en suit :

$$C = vsp(r)G(r, \sigma) - vsp(0) - \int_0^r G(r', -\sigma) \frac{dvsp(r')}{dr'} dr'$$

$$\text{où } G(r, \sigma) = \exp(-r^2/2\sigma)$$

La solution générale de $vc(r)$ est donc :

$$vc(r) = CG(r, \sigma) + vsp(r) - vsp(0)G(r, \sigma) - G(r, \sigma) \int_0^r G(-r', \sigma) \frac{dvsp(r')}{dr'} dr' \quad (1.35)$$

La valeur de $vc(r)$ à l'origine est :

$$vc(0) = C + vsp(0) - vsp(0) = C$$

En supposant qu'à l'origine, $vc(0) = vsp(0)$, $vc(r)$ s'écrit :

$$vc(r) = vsp(r) - G(r, \sigma) \int_0^r G(-r', \sigma) \frac{dvsp(r')}{dr'} dr' \quad (1.36.a)$$

$$\text{avec } G(r, \sigma) = \exp(-r^2/2\sigma) \quad (1.36.b)$$

En conclusion, nous avons :

$$vso(r) = \frac{1}{\sigma} (vsp(r) - vc(r)) \quad (1.37)$$

et donc

$$v_{sm}(r) = v_c(r) + \frac{1}{\sigma} (\vec{s} \cdot \vec{1}) (v_{sp}(r) - v_c(r)) \quad (1.38)$$

Nous pouvons encore simplifier cette dernière relation en utilisant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{G(r, \sigma) G(r', -\sigma)}{\eta} &= 2\sqrt{\pi} \delta \lambda^2 \delta(r - r') \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} \delta \lambda^2}{r} (\delta(r+r') + \delta(r-r')) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} v_{sm}(r) &= v_c(r) + (\vec{s} \cdot \vec{1}) \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{G(r, \sigma) G(r', -\sigma)}{\eta} \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' \\ &= v_c(r) + (\vec{s} \cdot \vec{1}) \frac{2\sqrt{\pi} \delta \lambda^2}{r} (\delta(r+r') + \delta(r-r')) \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' \\ &= v_c(r) + \delta \lambda^2 \sqrt{\pi} \frac{1}{r} \frac{dv_{sp}(r)}{dr} \end{aligned} \quad (1.39)$$

A l'aide des relations (1.36) et (1.37) il vient :

$$v_{so}(r) = \frac{1}{\sigma} G(r, \sigma) \int_0^r G(r', -\sigma) \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' \quad (1.40)$$

En conclusion, nous avons décrit dans cette partie, le lien existant entre les différents potentiels du modèle en couches. Il suffit donc de calculer l'intégrale apparaissant dans (1.36) et déduire ainsi les potentiels $v_c(r)$ et $v_s(r)$.

Cependant, le calcul de l'intégrale n'est pas aussi simple à cause de la présence du paramètre σ . Il faut donc, ou bien donner phénoménologiquement la valeur de σ , ou bien trouver une

méthode qui permettra de déterminer de façon consistante ce paramètre sans recourir à la phénoménologie.

La détermination des potentiels sera faite , non pas de façon phénoménologique , mais à l'aide d'une méthode dont les détails seront donnés dans le chapitre III .

- CHAPITRE II -

CALCUL EXPLICITE DE LA DENSITE NUCLEAIRE

2.1- Introduction

Nous nous efforcerons, dans cette partie, de résoudre l'équation (1.27.a) dans toute sa généralité mathématique. Il s'agira ensuite de retenir les solutions correspondant à notre problème. Nous pourrons alors tracer les courbes représentatives de la densité nucléaire et la densité de charge et voir les différences qualitatives et quantitatives qui pourraient exister entre elles.

Pour le modèle de proton (1.2) que nous avons choisi, nous considérerons quatre cas particuliers dont les paramètres caractéristiques a_p et b_p sont regroupés dans le tableau I.

2.2- Modèles de proton utilisés

Il existe différents modèles de proton déduits à partir des expériences de la diffusion électron-noyau.

Dans le modèle (1.2) considéré par T.A. MINELLI et A. PASCOLINI, nous étudierons les cas particuliers suivants :

a- le modèle ponctuel "Point-libre"; modèle I.

b- modèle de Drell ; modèle II

c- modèle de Hofstader ; modèle III

d- modèle de Clementell et Villi ; modèle IV

paramètres	modèle I	modèle II	modèle III	modèle IV
ap	0	1	1	1
bp	0	0	0.5	0
sp	0	0.352	0.249	0.321

tableau I : modèles de protons décrits par la densité (2.2).

Le paramètre sp , exprimé en unité Fermi , a été évalué à partir du rayon du proton expérimental .

$$R_p = (0.862 \pm 0.012) \text{ fm}$$

[81.78]

Pour le modèle III par exemple [BU.57] où $\rho(r) = \frac{\alpha^3}{8\pi} \exp(-\alpha r)$, la distribution est exponentielle où $\frac{\alpha^3}{8\pi}$ est un facteur de

normalisation . La valeur du paramètre α est calculée telle que la valeur du rayon carré moyen soit égale à la valeur expérimentale $R_p = (0.862 \pm 0.012) \text{ fm}$.

Le modèle IV [CL.56] décrit par :

$$\rho_p(r) = \eta \frac{k^2}{4\pi r} \exp(-kr) - (\eta-1)\delta(r) \quad \text{avec } \eta = 1.2$$

et proposé par E. Clementell et C. Villi, est une amélioration du modèle de Yukawa (modèle II) avec $\eta = 1$. En effet, le terme $-(\eta-1)\delta(r)$ représente une singularité négative à l'origine et le terme $(\eta-1)$ est la quantité fractionnaire de la charge du proton placée dans la singularité. L'autre terme étant la distribution de Yukawa avec η charges totales de protons.

Les modèles III et IV ont été déduits à partir des données expérimentales de la diffusion électron-noyau au dessous de $q^2 = 20 \text{ fm}^{-2}$ où q est le moment transféré. Ces modélisations perdent leur validité pour des q^2 plus élevés où un traitement relativiste s'avère nécessaire. Cela affecte, cependant, les détails de la structure de proton à très petites distances. Le modèle IV tient compte de ce manque d'information détaillée aux distances les plus petites en introduisant la distribution de Dirac. En d'autres termes, les expériences de la diffusion avec $q^2 \leq 20 \text{ fm}^{-2}$ examinent uniquement la partie externe de la structure du proton ($r \leq 0.4 \text{ fm}$). Le modèle (1.2) utilisé est donc une combinaison des quatre modèles sus-cités dont les paramètres a_p et b_p (sans dimension) sont connus à partir des expériences de la diffusion électron-noyau.

3- Solutions générales de l'équation de Fresholm

Nous allons à présent, résoudre l'équation différentielle (1.27.a) non homogène du quatrième ordre à l'aide de la méthode de Green (annexe A).

Nous poserons à cet effet :

$$h(x) = \int_0^{\infty} U(x,y) fch(y) dy$$

La solution sera déterminée complètement à l'aide des conditions aux limites (1.13.a) vérifiées par $h(x)$:

$$\begin{aligned} h(0) = h''(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h''(x) = 0 \end{aligned}$$

3.1- Différents cas possibles de la résolution

L'équation non homogène (1.27.a) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} (1-ap)h''''(x) + (ap+2bp-2)h''(x) + h(x) \\ = (1-ap)[(\tau_1-D^2)(\tau_2-D^2)]h(x) = Ifch(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où τ_1 et τ_2 sont les carrés des racines caractéristiques associées à l'équation homogène :

$$(1-ap)u''''(x) + (ap+2bp-2)u''(x) + u(x) = 0 \quad (2.2)$$

τ_1 et τ_2 sont solutions de l'équation :

$$(1-ap)\tau^2 + (ap+2bp-2)\tau + 1 = 0 \quad (2.3)$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est :

$$\Delta(ap, bp) = (ap+2bp-2)^2 - 4(1-ap) \quad (2.4)$$

Pour connaître le signe de $\Delta(ap, bp)$, il faut considérer tous les cas possibles.

a- cas où $ap > 1$

Dans ce cas, $\Delta(ap, bp) > 0$ quelle que soit la valeur de bp .

Les racines sont donc :

$$r_{1,2} = \frac{-(ap+2bp-2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1-ap)} \quad (2.5.a)$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{1-ap} < 0 \quad r_1 < 0$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{ap+2bp-2}{1-ap} > 0 \quad r_2 > 0$$

En posant $\alpha^2 = -r_1$ (2.5.b)
 $\beta^2 = r_2$

nous obtenons :

$$r_1 \cdot r_2 = -\alpha^2 \beta^2 = \frac{1}{1-ap} \quad (2.5.c)$$

$$r_1 + r_2 = \beta^2 - \alpha^2 = -\frac{ap+2bp-2}{1-ap}$$

b- cas où $ap < 1$

$\Delta(ap, bp)$ peut se mettre sous la forme :

$$\Delta(ap, bp) = [2bp - (1 + \sqrt{1-ap})][2bp - (1 - \sqrt{1-ap})]$$

Il existe donc trois possibilités .

b1- $\Delta(ap, bp) > 0$

donc
$$\begin{cases} 2bp < (1 - \sqrt{1-ap})^2 \\ 2bp > (1 + \sqrt{1-ap})^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

les racines sont
$$r_{1,2} = \frac{-(ap+2bp-2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1-ap)}$$

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{1}{1-ap} > 0$$

2 racines du même
signe

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{-(ap+2bp-2)}{1-ap}$$

*Pour $2bp < (1-\sqrt{1-ap})^2$, nous avons :

$$-(ap+2bp-2) > 2\sqrt{1-ap} > 0$$

Les racines r_1 et r_2 sont donc positives et les solutions sont :

$$(r_1, -r_1, r_2, -r_2) \quad (2.7.a)$$

*Pour $2bp > (1+\sqrt{1-ap})^2$, nous avons :

$$-(ap+2bp-2) < -2\sqrt{1-ap} < 0$$

Les racines r_1 et r_2 sont donc négatives et les solutions sont :

$$(ir_1, -ir_1, ir_2, -ir_2) \quad (2.7.b)$$

$$b^2 - \Delta(ap, bp) = 0$$

$$2bp = (1-\sqrt{1-ap})^2$$

ou

$$2bp = (1+\sqrt{1-ap})^2$$

Les racines sont :

$$r_{1,2}^2 = -\frac{ap+2bp-2}{1-ap} = r^2$$

* pour $2bp = (1-\sqrt{1-ap})^2$, nous avons :

$$-(ap+2bp-2) = 2\sqrt{1-ap} > 0$$

une racine double positive et les solutions sont :

$$(r, -r, r, -r)$$

*pour $2bp = (1+\sqrt{1-ap})^2$, nous avons :

$$-(ap+2bp-2) = -2(\sqrt{1-ap})$$

une racine double négative et les solutions sont :

$$(ir, -ir, ir, -ir)$$

$$b3- \Delta(ap, bp) < 0$$

Dans ce cas, nous avons :

$$(1-\sqrt{1-ap})^2 < 2bp < (1+\sqrt{1-ap})^2$$

$$r_1^2 + r_2^2 = -\frac{ap+2bp-2}{1-ap}$$

$$r_1 r_2 = \frac{1}{1-ap}$$

(2.9.a)

Le premier terme de (2.9.a) peut se mettre sous la forme :

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1+r_2)^2 - 2r_1 r_2$$

$$(r_1+r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 = -\frac{ap+2bp-2}{1-ap} + \frac{2}{\sqrt{1-ap}}$$

On en déduit donc :

$$r_1+r_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{1-ap}} - \frac{ap+2bp-2}{1-ap} \right)^{1/2}$$

$$\text{avec } r_1 r_2 = \frac{1}{\sqrt{1-ap}}$$

d'où r satisfait à l'équation :

$$r - \left(\frac{2}{\sqrt{1-ap}} - \frac{ap+2bp-2}{1-ap} \right)^{1/2} r + \frac{1}{\sqrt{1-ap}} = 0$$

$$\Delta(ap, bp) = - \left(\frac{ap+2bp-2}{1-ap} + \frac{2}{\sqrt{1-ap}} \right) < 0$$

Les solutions sont donc :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{1-ap}} + \frac{2-ap-2bp}{1-ap} \right)^{1/2} \pm i \left(\frac{2}{\sqrt{1-ap}} - \frac{2-ap-2bp}{1-ap} \right)^{1/2} \right]$$

que nous pouvons mettre sous la forme :

$$r_{1,2} = \Gamma \pm i\alpha$$

avec

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{1-ap}} + \frac{2-ap-2bp}{1-ap} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{1-ap}} - \frac{2-ap-2bp}{1-ap} \right)^{1/2}$$

(2.9.b)

2.3.2- Solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

A l'aide de la relation (2.5.b), l'équation différentielle

(2.1) s'écrit dans le cas où $ap > 1$:

$$h''''(x) - (\beta^2 - \alpha^2)h''(x) - \alpha^2\beta^2h(x) = -\alpha^2\beta^2f(x) \quad (2.10)$$

Cherchons la solution sous la forme :

$$h(x) = \int_0^{\infty} U(x,y) f(y) dy$$

où la fonction $U(x,y)$ est appelée fonction de Green.

L'équation (2.10) devient alors (voir annexe A) :

$$U''''(x,y) - (\beta^2 - \alpha^2)U''(x,y) - \alpha^2\beta^2U(x,y) = 0$$

et

$$U''(x, x-0) - U''(x, x+0) = -\alpha^2\beta^2 \quad (2.11)$$

$U(x,y)$, $U'(x,y)$ et $U''(x,y)$ continues

où les primes indiquent les dérivées par rapport à x .

Le noyau $U(x,y)$ étant symétrique (fonction de Green), la

solution s'écrit :

$$U(x,y) = \begin{cases} A(y)\exp(\beta x) + B(y)\exp(-\beta x) + C(y)\cos \alpha x + D(y)\sin \alpha x & x \leq y \\ A(x)\exp(\beta y) + B(x)\exp(-\beta y) + C(x)\cos \alpha y + D(x)\sin \alpha y & x \geq y \end{cases} \quad (2.12)$$

A partir des conditions aux limites (1.13.a) vérifiées par $h(x)$ nous déduisons :

$$U(0,y) = U''(0,y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} U(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} U''(x,y) = 0 \quad (2.13)$$

La solution devient alors :

$$U(x,y) = \begin{cases} 2A(y)\operatorname{sh} \beta x + D(y)\sin \alpha x \\ 2A(x)\operatorname{sh} \beta y + D(x)\sin \alpha y \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} D(x) = 0 \quad (2.15)$$

Les conditions de continuité (2.11) donnent :

$$\begin{cases} 2A'(x)\operatorname{sh} \beta x - \beta A(x)\operatorname{ch} \beta x + D'(x)\sin \alpha x - \alpha D(x)\cos \alpha x = 0 \\ 2(A''(x) - \beta A'(x))\operatorname{sh} \beta x + (D''(x) + \alpha D'(x))\sin \alpha x = 0 \\ 2A'''(x)\operatorname{sh} \beta x - \beta A''(x)\operatorname{ch} \beta x + D'''(x)\sin \alpha x - \alpha D''(x)\cos \alpha x = -\alpha^2 \beta^2 \end{cases}$$

La solution du système, tenant compte des contraintes (2.15), est :

$$A(x) = K_1 \exp(-\beta x) \quad \text{et} \quad D(x) = K_2 \cos \alpha x$$

$$\text{avec} \quad K_1 = \frac{1}{\beta} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

La solution est alors :

$$U(x,y) = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{1}{\beta} G(\beta x, \beta y) - \frac{1}{\alpha} S(\alpha x, \alpha y) \right) \quad (2.16.a)$$

$$\text{avec } G(x,y) = \begin{cases} \exp(-x)shy & \text{si } x \leq y \\ \exp(-y)shx & \text{si } x \geq y \end{cases} \quad G''(x,y) = G(x,y) \quad (2.16.b)$$

$$S(x,y) = \begin{cases} \cosx \sin y & \text{si } x \geq y \\ \sinx \cos y & \text{si } x \leq y \end{cases} \quad S''(x,y) = -S(x,y)$$

2.3.3- Solution de l'équation de Fredholm de première espèce $a_p=1$

Premier cas : $2bp > 1$

En posant $\alpha = \sqrt{2bp-1}$, nous obtenons :

$$h''(x) + \alpha^2 h(x) = \alpha^2 fch(x) \quad (2.17)$$

En cherchant la solution sous la forme :

$$h(x) = \int_0^{\infty} V1(x,y) fch(y) dy$$

Il vient : $V1''(x,y) + \alpha V1(x,y) = 0$

$$V1'(x,x-0) - V1'(x,x+0) = \alpha^2 \quad (2.18)$$

A l'aide des conditions aux limites (1.13.a), la solution du système (2.18) est donc :

$$V1(x,y) = \begin{cases} A(y) \sin \alpha x & \text{si } x \leq y \\ A(x) \sin \alpha y & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

$$\text{avec } A'(x) \sin \alpha x - \alpha A(x) \cos \alpha x = \alpha^2$$

La solution est donc :

$$V1(x,y) = -\alpha \begin{cases} \cos \alpha y \sin \alpha x & \text{si } x \leq y \\ \cos \alpha x \sin \alpha y & \text{si } x \geq y \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\text{ou bien } V1(x,y) = -\alpha S(\alpha x, \alpha y)$$

Deuxième cas : $2bp = 1$

En remplaçant dans (2.1), la solution est :

$$h(x) = fch(x) \quad (2.20)$$

Troisième cas :

En posant $\beta = \sqrt{1-ap}$, nous obtenons :

$$h''(x) - \beta^2 h(x) = -\beta^2 fch(x) \quad (2.21)$$

En cherchant la solution sous la forme :

$$h(x) = \int_0^{\infty} V_2(x,y) fch(y) dy$$

Il vient :

$$\begin{aligned} V_2''(x,y) - \beta^2 V_2(x,y) &= 0 \\ V_2'(x, x-0) - V_2'(x, x+0) &= -\beta^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

A l'aide des conditions aux limites (1.13.a), la solution du système est :

$$V_2(x,y) = \begin{cases} 2A(y) \operatorname{sh}\beta x & \text{si } x \leq y \\ 2A(x) \operatorname{sh}\beta y & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

avec $A'(x) \operatorname{sh}\beta x - \beta A(x) \operatorname{ch}\beta x = -\frac{\beta^2}{2}$

La solution finale est donc :

$$V_1(x,y) = \beta \begin{cases} \operatorname{sh}\beta x \exp(-\beta y) & \text{si } x \leq y \\ \operatorname{sh}\beta y \exp(-\beta x) & \text{si } x \geq y \end{cases} \quad (2.23)$$

2.3.4- Solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce $a_p < 1$

Premier cas : $2bp > (1 + \sqrt{1-ap})^2$

Si nous posons :

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ap+2bp-2}{1-ap} + \frac{2}{\sqrt{1-ap}} \right)^{1/2} \pm \left(\frac{ap+2bp-2}{1-ap} - \frac{2}{\sqrt{1-ap}} \right)^{1/2} \right] \quad (2.24)$$

l'équation (1.27.a) devient :

$$h''''(x) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) h''(x) + \alpha_1^2 \alpha_2^2 h(x) = \alpha_1^2 \alpha_2^2 fch(x) \quad (2.25)$$

Si nous cherchons la solution sous la forme :

$$h(x) = \int_0^{\infty} W_1(x,y) fch(y) dy$$

nous obtenons :

$$\begin{cases} W_1''''(x,y) + (\alpha_1 + \alpha_2) W_1'''(x,y) + \alpha_1 \alpha_2 W_1''(x,y) = 0 \\ W_1'''(x, x-0) - W_1'''(x, x+0) = \alpha_1 \alpha_2 \\ W_1(x,y), W_1'(x,y), W_1''(x,y) \text{ continues} \end{cases} \quad (2.26)$$

En tenant compte des conditions aux limites (1.13.a), la solution du système (2.26) est :

$$W_1(x,y) = \begin{cases} A(y) \sin \alpha_1 x + B(y) \sin \alpha_2 x \\ A(x) \sin \alpha_1 y + B(x) \sin \alpha_2 y \end{cases}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) \text{ existent}$$

et

$$\begin{cases} A'(x) \sin \alpha_1 x - \alpha_1 A(x) \cos \alpha_1 x + B'(x) \sin \alpha_2 x - \alpha_2 B(x) \cos \alpha_2 x = 0 \\ (A''(x) - \alpha_1 A'(x)) \sin \alpha_1 x + (B''(x) - \alpha_2 B'(x)) \sin \alpha_2 x = 0 \\ A'''(x) \sin \alpha_1 x - \alpha_1 A''(x) \cos \alpha_1 x + B'''(x) \sin \alpha_2 x - \alpha_2 B''(x) \cos \alpha_2 x = \alpha_1 \alpha_2 \end{cases}$$

A(x) et B(x) sont donc donnés par :

$$A(x) = K_1 \cos \alpha_1 x \quad \text{et} \quad B(x) = K_2 \cos \alpha_2 x$$

$$\text{avec} \quad K_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \quad \text{et} \quad K_2 = - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

La solution finale est donc :

$$W_1(x,y) = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \left(\frac{1}{\alpha_1} S(\alpha_1 x, \alpha_1 y) - \frac{1}{\alpha_2} S(\alpha_1 x, \alpha_2 y) \right) \quad (2.27)$$

La fonction S(x,y) étant donnée dans (2.16.a)

Deuxième cas : $2bp = (1 + \sqrt{1 - ap})^2$

Dans ce cas , posons : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = (1 - ap)^{1/4}$

L'équation (1.27.a) devient alors :

$$h''''(x) + 2\alpha^2 h''(x) + \alpha^4 h(x) = \alpha^4 fch(x) \quad (2.28)$$

$$\text{avec } h(x) = \int_0^{\infty} W_2(x,y) fch(y) dy$$

ce qui conduit à :

$$W_2''''(x,y) + 2\alpha^2 W_2''(x,y) + \alpha^4 W_2(x,y) = 0$$

$$W_2'''(x,x-0) - W_2'''(x,x+0) = \alpha^4 \quad (2.29)$$

$W_2(x,y)$, $W_2'(x,y)$ et $W_2(x,y)$ continues

Compte tenu des conditions aux limites (1.13.a) , la solution du système (2.29) est :

$$W_2(x,y) = \begin{cases} A(y)\sin ax + B(y)\cos ax & \text{si } x \geq y \\ A(x)\sin ay + B(x)\cos ay & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

avec $A(0) = B(0) = 0$ et

$$\begin{cases} (A'(x) - \alpha B(x)) \sin ax + (B'(x) + \alpha A(x)) \cos ax = 0 \\ ((A''(x) + \alpha A(x)) \sin ax + (B''(x) - \alpha B(x)) \cos ax = 0 \\ (A'''(x) + \alpha B(x)) \sin ax + (B'''(x) - \alpha A(x)) \cos ax = \alpha \end{cases}$$

En résolvant ce dernier système , nous obtenons :

$$A(x) = -\frac{\alpha}{2} \sin ax + \frac{\alpha^2}{2} x \cos ax$$

$$B(x) = \frac{\alpha^2}{2} x \sin ax$$

ce qui réduit la solution $W_2(x,y)$ à :

$$W_2(x,y) = -\frac{\alpha}{2} T(ax, ay) \quad (2.30.a)$$

$$\text{avec } T(x,y) = \begin{cases} (\sin x - x \cos x) \cos y - x \sin x \sin y & \text{si } x \leq y \\ (\sin y - y \cos y) \cos x - y \sin y \sin x & \text{si } x \geq y \end{cases} \quad (2.30.b)$$

Troisième cas : $2bp < (1 - \sqrt{1-ap})^2$

D'après (2.7.b), nous avons :

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2-ap-2bp}{1-ap} + \frac{2}{\sqrt{1-ap}} \right) \pm \left(\frac{2-ap-2bp}{1-ap} - \frac{2}{\sqrt{1-ap}} \right) \right] \quad (2.31)$$

L'équation (1.27.a) devient alors :

$$h'''(x) - (\beta_1^2 + \beta_2^2) h''(x) + \beta_1^2 \beta_2^2 h(x) = \beta_1^2 \beta_2^2 \quad (2.32)$$

$$\text{avec } h(x) = \int_0^{\infty} W_3(x,y) fch(y) dy$$

ce qui entraîne :

$$W_3'''(x,y) - (\beta_1^2 + \beta_2^2) W_3''(x,y) + \beta_1^2 \beta_2^2 W_3(x,y) = 0$$

$$W_3'''(x,x-0) - W_3'''(x,x+0) = \beta_1^2 \beta_2^2 \quad (2.33)$$

$W_3(x,y)$, $W_3'(x,y)$ et $W_3''(x,y)$ continues

La solution de ce système, compte tenu des conditions aux limites (1.13.a), est :

$$W_3(x,y) = \begin{cases} 2A(y) \operatorname{sh} \beta_1 x + 2B(y) \operatorname{sh} \beta_2 x & \text{si } x \leq y \\ 2A(x) \operatorname{sh} \beta_1 y + 2B(x) \operatorname{sh} \beta_2 y & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} A'(x) \operatorname{sh} \beta_1 x - \beta_1 A(x) \operatorname{ch} \beta_1 x + B'(x) \operatorname{sh} \beta_2 x - \beta_2 B(x) \operatorname{ch} \beta_2 x = 0 \\ (A''(x) - \beta_1^2 A(x)) \operatorname{sh} \beta_1 x + (B''(x) - \beta_2^2 B(x)) \operatorname{sh} \beta x = 0 \\ A'''(x) \operatorname{sh} \beta_1 x - \beta_1^3 A(x) \operatorname{ch} \beta_1 x + B'''(x) \operatorname{sh} \beta_2 x - \beta_2^3 B(x) \operatorname{ch} \beta_2 x = \beta_1 \beta_2 \end{cases}$$

$A(x)$ et $B(x)$ seront donc donnés par :

$$A(x) = K_1 \exp(-\beta_1 x) \quad B(x) = K_2 \exp(-\beta_2 x)$$

$$\text{avec } K_1 = \frac{1}{2} \frac{\beta_1 \beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \quad (2.34)$$

La solution $W_3(x,y)$ se réduit alors à :

$$W_3(x,y) = \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \left(\frac{1}{\beta_1} G(\beta_1 x, \beta_1 y) - \frac{1}{\beta_2} G(\beta_2 x, \beta_2 y) \right) \quad (2.35)$$

où la fonction $G(x,y)$ est donnée dans (2.16.a) .

Quatrième cas : $2bp = (1 - \sqrt{T - ap})^2$

Si nous posons $\beta_1 = \beta_2 = \beta = (1 - \sqrt{T - ap})^{-1/4}$

L'équation (1.27.a) devient :

$$h''''(x) - 2\beta^2 h''(x) + \beta^4 h(x) = \beta^4 fch(x) \quad (2.36)$$

$$\text{avec } h(x) = \int_0^{\infty} W_4(x,y) fch(y) dy$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} W_4''''(x,y) - 2\beta^2 W_4''(x,y) + \beta^4 W_4(x,y) = 0 \\ W_4''''(x,x-0) - W_4''''(x,x+0) = \beta^4 \\ W_4(x,y), W_4'(x,y) \text{ et } W_4''(x,y) \text{ continues} \end{cases} \quad (2.37)$$

A l'aide des conditions aux limites (1.13.a) , la solution du système (2.37) est :

$$W_4(x,y) = \begin{cases} A_1(y) \operatorname{sh} \beta x + B_1(y) x \operatorname{ch} \beta x & \text{si } x \leq y \\ A_2(y) \exp(-\beta x) + B_2(y) x \exp(-\beta x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2(x)\exp(-\beta x) + B_2(x)x\exp(-\beta x) - A_1(x)\operatorname{sh}\beta x - B_1(x)x\operatorname{ch}\beta x = 0 \\ B_2(x)(1-\beta x)\exp(-\beta x) - A_2(x)\beta\exp(-\beta x) - A_1(x)\beta\operatorname{ch}\beta x \\ \quad - B_1(x)(\operatorname{ch}\beta x + \beta x\operatorname{sh}\beta x) = 0 \\ B_2(x)(\beta x - 2\beta)\exp(-\beta x) + A_2(x)\beta\exp(-\beta x) - A_1(x)\beta\operatorname{sh}\beta x \\ \quad - \beta B_1(x)(2\operatorname{sh}\beta x + \beta x\operatorname{ch}\beta x) = 0 \\ B_1(x)(3\beta - \beta x)\exp(-\beta x) - A_2(x)\beta\exp(-\beta x) - A_1(x)\beta\operatorname{ch}\beta x \\ \quad - \beta B_1(x)\beta(3\operatorname{ch}\beta x + \beta x\operatorname{sh}\beta x) = \beta \end{array} \right.$$

Ce dernier système entraîne :

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{1}{2} \beta (1 + \beta x) \exp(-\beta x) & B_1(x) &= \frac{1}{2} \beta^2 \exp(-\beta x) \\ A_2(x) &= \frac{1}{2} \beta (\operatorname{sh}\beta x - \beta x \operatorname{ch}\beta x) & B_2(x) &= \frac{1}{2} \beta^2 \operatorname{sh}\beta x \end{aligned}$$

La solution $W_4(x, y)$ sera donc :

$$W_4(x, y) = \frac{\beta}{2} H(\beta x, \beta y) \quad (2.38.a)$$

$$\text{avec } H(x, y) = \begin{cases} [(1+y)\operatorname{sh}x - x\operatorname{ch}x] \exp(-y) \\ [(1+x)\operatorname{sh}y - y\operatorname{ch}y] \exp(-x) \end{cases} \quad (2.38.b)$$

Cinquième cas : $(1 - \sqrt{1 - ap})^2 < 2bp < (1 + \sqrt{1 - ap})^2$

A partir des relations (2.9.b), nous avons :

$$\frac{1}{1 - ap} = (\Gamma^2 + \alpha^2)^2 \quad \text{et} \quad \frac{ap - 2bp - 2}{1 - ap} = -2(\Gamma^2 - \alpha^2)$$

L'équation (1.27.a) devient donc :

$$h''''(x) - 2(\Gamma^2 - \alpha^2)h''(x) + (\Gamma^2 + \alpha^2)^2 h(x) = (\Gamma^2 + \alpha^2)^2 fch(x) \quad (2.39)$$

$$\text{avec } h(x) = \int_0^{\infty} W_5(x, y) fch(y) dy$$

ce qui se réduit au système :

$$W5''''(x,y) - 2(\Gamma^2 - \alpha^2)W5''(x,y) + (\Gamma^2 + \alpha^2)W5(x,y) = 0$$

$$W5''(x,x-0) - W5''(x,x+0) = (\Gamma^2 + \alpha^2) \quad (2.40)$$

$W5(x,y)$, $W5'(x,y)$ et $W5''(x,y)$ continues

Compte tenu des conditions aux limites (1.13.a) on trouve :

$$W5(x,y) = \begin{cases} (A(y)\cos\alpha x + B(y)\sin\alpha x) \exp(-\Gamma x) & \text{si } x \geq y \\ (A(x)\cos\alpha y + B(x)\sin\alpha y) \exp(-\Gamma y) & \text{si } x \leq y \end{cases} \quad (2.41)$$

avec $A(0) = A''(0) = B(0) = B''(0) = 0$ et

$$[A'(x) - \alpha B(x) + \Gamma A(x)]\cos\alpha x + [B'(x) + \alpha A(x) + \Gamma B(x)]\sin\alpha x = 0$$

$$[A''(x) - (\Gamma^2 - \alpha^2)A(x) + 2\alpha\Gamma B(x)]\cos\alpha x + [B''(x) - (\Gamma^2 - \alpha^2)B(x) - 2\alpha\Gamma A(x)]\sin\alpha x = 0$$

$$[A'''(x) - \alpha(3\Gamma^2 - \alpha^2)B(x) + \Gamma(\Gamma^2 - 3\alpha^2)A(x)]\cos\alpha x + [B'''(x) + \alpha(3\Gamma^2 - \alpha^2)A(x) + \Gamma(\Gamma^2 - 3\alpha^2)B(x)]\sin\alpha x = (\Gamma^2 + \alpha^2)^2$$

en résolvant ce système système $A(x)$ et $B(x)$ seront donc donnés par :

$$A(x) = \left[\frac{\Gamma^2 + \alpha^2}{2\alpha} \sin\alpha x \operatorname{ch}\Gamma x - \frac{\Gamma^2 + \alpha^2}{2\Gamma} \cos\alpha x \operatorname{sh}\Gamma x \right]$$

$$B(x) = - \left[\frac{\Gamma^2 + \alpha^2}{2\alpha} \cos\alpha x \operatorname{sh}\Gamma x + \frac{\Gamma^2 + \alpha^2}{2\Gamma} \sin\alpha x \operatorname{ch}\Gamma x \right] \quad (2.42)$$

La solution $W5(x,y)$ est donc donnée par les relations (2.41) et (2.42) .

2.4- Densités nucléaires relatives aux quatre modèles utilisés

Dans la partie (2.3) , nous avons résolu l'équation différentielle (1.27.a) à l'aide des fonctions de Green . Pour cela , nous avons trouvé les solutions de tous les cas qui

puissent exister . Nous allons maintenant donner les solutions finales correspondant aux variantes du modèle que nous avons choisi . Il s'agit donc de retenir , parmi les solutions trouvées dans la partie (2.3) celles qui conviennent .

a- Solution du modèle I

$$a_p = 0 \quad b_p = 0 \quad s_p = 0$$

En considérant l'équation (1.5) , nous obtenons la solution triviale :

$$f(r) = f_{ch}(r) \tag{2.43}$$

C'est une considération grossière où l'on admet que la densité nucléaire peut être assimilée à la densité de charge . Nous verrons avec les autres modèles si cette approche est consistante .

b- Solution du modèle II

$$a_p = 1 \quad b_p = 0 \quad s_p = 0.352$$

Dans ce cas, l'équation (1.27.a) devient :

$$h''(x) = - (f_{ch}(x) - h(x)) \tag{2.44}$$

Si $f_{ch}(x)$ est choisie telle qu'elle soit deux fois différentiable , nous obtenons , en dérivant deux fois la relation (2.44) :

$$h'''(x) = - (f_{ch}''(x) - h''(x)) \tag{2.45}$$

En remplaçant les relations (2.44) et (2.45) dans (1.25) , nous obtenons :

$$f(x) = f_{ch}(x) - f''_{ch}(x) \tag{2.46}$$

A l'aide du changement de variable (1.8), la relation (2.46)

devient :

$$f(r) \frac{4\pi r}{\mu p^2} = \frac{4\pi r}{\mu p^2} f_{ch}(r) - \frac{4\pi d^2}{\mu p^2 dx^2} (r f_{ch}(r)) \quad (2.47)$$

sachant que $\frac{d}{dx} = sp \frac{d}{dr}$, il vient :

$$f(r) = \Omega II f_{ch}(r) \\ \text{avec } \Omega II = 1 - sp^2 \nabla^2 \quad (2.48)$$

$$sp = \frac{1}{\mu p} \quad \text{et} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$$

La solution (2.48) du modèle II peut encore être simplifiée dans le cas de la distribution de charge de l'oscillateur harmonique modifié donnée par :

$$f_{ch}(r) = f_0 \left(1 + a \frac{r^2}{b^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)$$

Dans ce cas, la solution devient :

$$f(r) = f_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} \quad (2.49)$$

$$\text{avec } a_0 = 1 - 6(a-1)w^2 \quad a_1 = a + 2(7a-2)w^2 \\ a_2 = -4aw^2 \quad w = \frac{sp}{b} \quad (2.50)$$

$$f_0 = \frac{2}{\pi \sqrt{\pi} (2+3a) b^3}$$

où f_0 a été déterminée à l'aide de la condition de normalisation:

$$\int \rho(r) dr = f_0 \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) 4\pi r^2 dr = 1$$

En conclusion, la fonction inconnue $\rho(r)$ satisfaisant l'équation de Fredholm de première espèce ($a_p=1$), est donnée dans le cas du modèle II ($b_p=0$) par les relations (2.48).

Si la densité de charge est décrite par la distribution de l'oscillateur harmonique modifié, la solution est donnée sous une forme plus simple par les relations (2.49) et (2.50).

C- Solution du modèle III

$$a_p = 1 \quad b_p = 0.5 \quad s_p = 0.249$$

Dans ce cas, l'équation (1.27.a) devient :

$$h(x) = fch(x) \tag{2.51}$$

En portant (2.51) dans (1.25), nous obtenons :

$$f(x) = fch'''(x) - 2fch''(x) - fch'(x) \tag{2.52}$$

A l'aide des relations (1.8) et en tenant compte de :

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\mu p} \frac{d}{dr} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{\mu p} \frac{d}{dx}$$

la solution s'écrit alors :

$$\rho(r) = \Omega_{III} fch(r)$$

avec
$$\Omega_{III} = 1 - 2s_p \nabla^2 + \frac{s_p d}{r dr} (r \nabla^2) \tag{2.53}$$

$$s_p = \frac{1}{\mu p}$$

∇^2 étant donné dans les relations (2.48).

Dans le cas où la densité de charge est décrite par la distribution de l'oscillateur harmonique modifié, la solution $f(r)$ s'écrit :

$$f(r) = f_0 \exp\left(-\frac{r^2}{h^2}\right) \sum_{n=0}^3 a_n \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} \quad (2.54)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - 60(2a-1)w^4 - 12(a-1)w^2 \\ a_1 &= a + 20(15a-4)w^4 + 4(7a-2)w^2 \\ a_2 &= -16(9a-1)w^4 - 8aw^2 \\ a_3 &= 16aw^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$w = sp/b$$

$$f_0 = \frac{2}{\pi \sqrt{\pi(2+3a)} b^3}$$

f_0 a été calculé par la condition de normalisation comme dans le cas du modèle II.

En conclusion, la fonction inconnue $f(r)$ satisfaisant l'équation de Fredholm de première espèce ($ap=1$), est donnée, dans le cas du modèle III ($bp=0.5$) par les relations (2.53). Dans le cas où la densité de charge est décrite par la distribution de l'oscillateur harmonique modifié, la solution est donnée sous une forme plus simplifiée par les relations (2.54) et (2.55).

d- Solution du modèle IV

$$ap = 1.2 \quad bp = 0 \quad sp = 0.321$$

Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$h(x) = \int_0^{\infty} U(x,y) fch(y) dy$$

$$\text{avec } U(x,y) = \frac{e^{-2y}}{\alpha\beta} \left[\frac{1}{\beta} G(\beta x, \beta y) - \frac{1}{\alpha} S(\alpha x, \alpha y) \right] \quad (2.56)$$

α et β sont donnés par les relations (2.5) et les fonctions $G(x,y)$ et $S(x,y)$ par (2.16.b).

La fonction $f(x)$ est donnée par la relation (1.27.b).

Sachant que :

$$\frac{1}{1-ap} = -\frac{e^{-2y}}{\alpha\beta}$$

$$\frac{ap-2bp}{1-ap} = -2 + \frac{ap+2bp-2}{1-ap} = \beta^{-2} \alpha^{-2} - 2 \quad (2.57)$$

$$\frac{ap}{1-ap} = -1 + \frac{1}{1-ap} = -(1+\alpha^2\beta^2)$$

A l'aide des relations (2.57), l'équation (1.27.b) devient donc :

$$f(x) = -\alpha^2\beta^2 fch(x) + (\beta^{-2}\alpha^{-2} - 2)h''(x) + (1+\alpha^2\beta^2)h(x) \quad (2.58)$$

En prenant en considération les propriétés des fonctions $G(x,y)$ et $S(x,y)$ données dans (2.16.b), $f(x)$ s'écrit encore :

$$f(x) = -\alpha^2\beta^2 fch(x) + \alpha^2\beta^2 \frac{(\beta^{-2}-1)}{\alpha^2+\beta^2} G(\beta x, \beta y) fch(y) dy$$

$$- \alpha\beta^2 \frac{(1+\alpha^2)}{\alpha^2+\beta^2} S(\alpha x, \alpha y) fch(y) dy \quad (2.59)$$

Sachant que dans le modèle IV $ap=1.2$ et $bp=0$, il vient :

$$\alpha = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \beta = 1$$

et l'expression (2.59) se réduit alors à :

$$f(x) = -\alpha^2 f_{ch}(x) - \alpha(1+\alpha^2) \int_0^\infty S(\alpha x, \alpha y) f_{ch}(y) dy \quad (2.60)$$

En utilisant les relations (1.5), la densité nucléaire $f(r)$ sera donc donnée par :

$$f(r) = -\alpha^2 f_{ch}(r) - \alpha^2 \mu p^2 (1+\alpha^2) \int_0^\infty s S(\alpha \mu r, \alpha \mu s) f_{ch}(s) ds$$

Connaissant la définition de la fonction $S(x, y)$ la solution (r) s'écrit finalement :

$$f(r) = -\alpha^2 f_{ch}(r) - \alpha^2 \mu p^2 (1+\alpha^2) \left[\frac{\cos \alpha \mu r}{\alpha \mu r} \tau_1(r) + \frac{\sin \alpha \mu r}{\alpha \mu r} \tau_2(r) \right]$$

avec

$$\tau_1(r) = \int_0^r s \sin \alpha \mu s f_{ch}(s) ds$$

$$\tau_2(r) = \int_0^\infty s \cos \alpha \mu s f_{ch}(s) ds$$

$$\alpha = \sqrt{5}$$
(2.61)

En conclusion, la fonction inconnue $f(r)$ satisfaisant l'équation de Fredholm de seconde espèce, est donnée dans le cas du modèle IV ($a_p = 1.2$ et $b_p = 0$) par les relations (2.61) ;

2.5- Densités de charge utilisées

Les densités de charge sont connues dans la littérature sous forme de tables de données empiriques ou d'expressions paramétrisées.

Pour $A \leq 16$, la forme analytique de $f_{ch}(r)$ est donnée par la distribution de l'oscillateur harmonique modifié (M.H.O) [EL.61]:

$$f_{ch}(r) = f_0 \left(1 + a \frac{r^2}{b^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \quad (2.62)$$

pour des noyaux plus lourds , $\rho_{ch}(r)$ par la fonction empirique de WOODS-SAXON [HO.57] :

$$\rho_{ch}(r) = \rho_0 / (1 + \exp(\frac{r-a}{b}))$$

Pour améliorer le modèle , un troisième paramètre a été ajouté pour la distribution de Fermi et de Gauss [BA.77] :

$$\rho(r) = \rho_0 (1 + c \frac{r^2}{a^2}) / (1 + \exp(\frac{r-a}{b})) \quad (2.64)$$

$$\rho(r) = \rho_0 (1 + c \frac{r^2}{a^2}) / (1 + \exp(\frac{r^2 - a^2}{b^2})) \quad (2.65)$$

2.6- Conclusion

Nous avons calculé, dans ce chapitre, la densité nucléaire à l'aide d'une méthode mathématique exacte . Pour ce faire , nous avons choisi un modèle de proton déterminé à partir des données expérimentales de la diffusion électron-noyau . Quatre cas particuliers , dont les paramètres a_p et b_p sont regroupés dans le tableau I , ont été considérés pour résoudre le problème et tracer ainsi les courbes représentatives de la densité nucléaire. Les solutions concernant notre problème sont données dans la partie (2.4) de ce chapitre . Nous remarquons que les solutions sont données sous formes assez simples . Nous pouvons alors tracer les courbes représentant les variations de la densité nucléaire ainsi calculées et faire de la sorte une comparaison avec la densité de charge .

- CHAPITRE III -

POTENTIELS DU MODELE EN COUCHES

3.1- Introduction

La description phénoménologique du noyau par le modèle à particules indépendantes consiste, comme nous le savons, à scinder le potentiel nucléaire en une partie centrale moyenne résultant des diverses interactions entre les nucléons et une partie spin-orbite qui tient compte du couplage entre le moment orbital \vec{l} et le spin \vec{s} du nucléon. Ces deux parties sont données phénoménologiquement de manière à reproduire les propriétés connues de la matière nucléaire telle que la courte portée de l'interaction; c'est le cas, par exemple, des potentiels de Yukawa [BO.39] et de Woods-Saxon [PA.73] pour le potentiel central et [GO.71] pour le potentiel spin-orbite.

Dans cette partie, nous nous proposons de déterminer ces potentiels en utilisant les résultats du chapitre I.

En effet, nous avons déterminé les potentiels central $v_c(r)$ et spin-orbite $v_{so}(r)$ en fonction du potentiel à particules indépendantes $v_{sp}(r)$ en utilisant les propriétés de saturation de la matière nucléaire. Il nous faut donc connaître au préalable le potentiel $v_{sp}(r)$. Ce dernier sera déterminé en résolvant l'équation différentielle régissant la matière

nucléaire . Nous utiliserons , en outre , les résultats de la diffusion dans la théorie d'Hartree-Fock et les solutions seront données en fonction de la densité nucléaire $\rho(r)$ déterminée dans le chapitre II.

3.2- Résolution de l'équation différentielle régissant la matière nucléaire

Dans l'espace des impulsions , le potentiel à particules indépendantes de la matière nucléaire infinie , est obtenu à partir de l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique

$$[VI.83] : \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial^2}{\partial k^2} + \frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial k} \right) V_{inf}(p,k) = 0 \quad (3.1)$$

Cette équation a été déduite des conditions de saturation nucléaire et du comportement à l'origine de $V_{inf}(p,k)$.

En effet , à partir de l'énergie totale :

$$W_{inf}(k) = \frac{3A}{k^2} \int_0^k \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V_{inf}(p,k) \right] p^2 dp$$

et des conditions de saturation nucléaire :

$$\begin{cases} \left. \frac{dW_{inf}(k)}{dk} \right|_{k=k_f} = 0 \\ W_{inf}(k_f) = b v A \end{cases}$$

nous aboutissons à :

$$k_f W_{inf}(k_f, k_f) - \int_0^{k_f} p \left. \frac{dV_{inf}(p,k)}{dk} \right|_{k=k_f} dp = 0$$

Après avoir posé :

$$Q(k) = k \text{Vinf}(k,k) - \int_0^k p \frac{d\text{Vinf}(p,k)}{dk} dp \quad (a)$$

l'équation (3.1) se déduit de la façon suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour la validité de la condition physique $\text{Vinf}(0,0)=0$ est donnée par :

$$Q(k) = 0 \quad (b)$$

La condition (b) est vérifiée si l'énergie potentielle d'un nucléon dans la mer de Fermi obéit à l'équation différentielle suivante (3.1) .

Rappelons que lors du raisonnement précédent , il a été tenu compte de l'antisymétrie de la fonction d'onde totale $(\text{MIS})_0$.

La variable k qui apparaît dans $\text{Vinf}(p,k)$ est le moment limite de la matière nucléaire que nous pouvons déterminer comme suit [SI.75] :

l'élément de volume dans l'espace des impulsions étant égal à

$$4\Omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{ où } \Omega \text{ est le volume nucléaire , on déduit , à partir de}$$

la condition de conservation du volume nucléaire :

$$4\Omega \int_0^k \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = A$$

ce qui entraîne
$$k = \left(\frac{3\pi^2}{2} A \right)^{1/3} \rho$$

où ρ est la densité de la matière nucléaire infinie $\rho = 3/4\pi R^3$.

En remplaçant ρ par cette dernière relation, nous obtenons :

$$k = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{V_2 A^{1/3}}{R} \quad (3.2)$$

L'énergie totale de la matière nucléaire infinie s'écrit :

$$W_{\text{inf}}(k) = \int_0^k \rho \left[\frac{p^{2m}}{2m} + \frac{1}{2} V_{\text{inf}}(p, k) \right] d\vec{p}$$

Ayant considéré la symétrie sphérique, l'élément $d\vec{p}$ s'écrit :

$$dp = 4\pi p^2 dp$$

$V_{\text{inf}}(p, k)$ est l'énergie potentielle d'un nucléon dans la mer de Fermi. Le facteur $\frac{1}{2}$ est dû au fait que toute l'énergie potentielle provient des interactions entre paires de nucléons.

Le nombre de nucléons étant donné par :

$$\int_0^k \rho d\vec{p} = A \quad (3.3)$$

et, sachant que la densité de la matière nucléaire infinie est constante, on déduit que : $\rho = 3/4\pi k^3$

L'énergie totale s'écrit donc :

$$W_{\text{inf}}(k) = \frac{3A}{k^3} \int_0^k p^2 \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V_{\text{inf}}(p, k) \right] dp$$

A présent, nous allons utiliser les propriétés de saturation des forces nucléaires qui se traduisent par :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dW_{\text{inf}}(k)}{dk} \Big|_{k=k_f} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.5.a)$$

$$\left. \begin{array}{l} W_{\text{inf}}(k_f, k_f) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.5.b)$$

où bv est l'énergie moyenne de volume et k_f le moment de Fermi obtenu en posant dans la relation (3.2) $R = r_0 A^{1/3}$ [SI.75],

$$k_f \text{ s'écrit alors : } k_f = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{1}{r_0} \quad (3.6)$$

Rappelons que R est le rayon carré moyen défini par :

$$R^2 = \int r^2 \rho(r) d\vec{r}$$

La relation (3.5.a) donne :

$$\begin{aligned} \frac{dW_{inf}(k)}{dk} &= \frac{3}{k_f} \left(-\frac{3}{k_f^2} \int_0^{k_f} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V_{inf}(p,k) \right] p^2 dp + \frac{k_f^2}{2m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2k_f^2} \int_0^{k_f} p^2 \frac{dV_{inf}(p,k)}{dk} \Big|_{k=k_f} dp + \frac{V_{inf}(k_f, k_f)}{2} \right) = 0 \\ &= -W_{inf}(k_f) + \frac{k_f^2}{2m} + \frac{1}{2k_f} \int_0^{k_f} p^2 \frac{dV_{inf}(p,k)}{dk} \Big|_{k=k_f} dp = 0 \end{aligned}$$

ou bien :

$$W_{inf}(k_f)/A = \frac{k_f^2}{2m} + \frac{V_{inf}(k_f, k_f)}{2} + \frac{1}{2k_f} \int_0^{k_f} p^2 \frac{dV_{inf}(k_f, k_f)}{dk} \Big|_{k=k_f} dp$$

En utilisant la relation (3.5.b), nous obtenons :

$$\frac{1}{k_f^2} \int_0^{k_f} p^2 \frac{dV_{inf}(p,k)}{dk} \Big|_{k=k_f} = 2(bv - \epsilon_f) - V_{inf}(k_f, k_f) \quad (3.7)$$

où ϵ_f est l'énergie de Fermi définie par $\epsilon_f = k_f^2/2m$.

La relation (3.7) peut encore être simplifiée en utilisant le théorème de Hugenholtz et Van Hove [HU.58]. Celui-ci stipule qu'au minimum de l'énergie nucléaire totale, l'énergie moyenne de volume est égale à l'énergie du nucléon le plus énergétique.

Ceci nous conduit à :

$$b_v = V_{inf}(k_f, k_f) + \epsilon f \quad (3.8)$$

En remplaçant la relation (3.8) dans (3.7) , nous obtenons :

$$k_f^2 V_{inf}(k_f, k_f) = \int_0^{k_f} p \frac{d V_{inf}(p, k)}{dk} \Big|_{k=k_f} dp \quad (3.9)$$

L'équation (3.1) qui régit la matière nucléaire infinie a été étendue aux noyaux finis en remplaçant le moment k par $k(r)$.

Dans l'expression de $k(r)$, la densité nucléaire constante est remplacée par une densité non uniforme $\rho(r)$, c'est le modèle de Thomas-Fermi [PA.85]_a.

Le moment limite s'écrit alors :

$$k(r) = (3\pi^2 A \rho(r)/2)^{1/3} \quad (3.10)$$

et l'équation (3.1) devient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial^2}{\partial k^2} + \frac{d}{k} \frac{d}{dk} \right) V(p, k) = 0 \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) que nous allons résoudre par la méthode de séparation des variables , régit donc la matière nucléaire finie.

$$\text{En posant } V(p, k) = V_1(p) V_2(k) \quad (3.12)$$

et en remplaçant la relation (3.12) dans (3.11) , nous déduisons :

$$\frac{\nabla_p V_1(p)}{V_1(p)} = \frac{\Delta_k V_2(k)}{V_2(k)} \quad (3.13)$$

$$\text{où } \nabla_p = \frac{d}{dp} + \frac{2}{p} \frac{d}{dp} \quad \text{et} \quad \Delta_k = \frac{d}{dk} - \frac{2}{k} \frac{d}{dk} \quad (3.14)$$

Pour que l'égalité (3.13) soit vérifiée, les deux termes gauche et droite doivent être égaux à une constante réelle que nous écrivons comme :

$$C_0 = \begin{cases} \beta^2 & \text{si } C_0 > 0 \\ -\alpha^2 & \text{si } C_0 < 0 \end{cases}$$

Nous aurons alors :

$$(\nabla_p + \alpha^2) V_1(p) = 0 \quad (3.15.a)$$

$$(\Delta_k + \alpha^2) V_2(k) = 0 \quad (3.15.b)$$

ou bien :

$$(\nabla_p - \beta^2) V_1(p) = 0 \quad (3.16.a)$$

$$(\Delta_k - \beta^2) V_2(k) = 0 \quad (3.16.b)$$

Pour résoudre les équations différentielles (3.15) et (3.16), nous utiliserons les conditions aux limites suivantes [B1.72] :

$$V_1(0) \text{ finie et } V_1(\infty) = 0 \quad (3.17.a)$$

$V_2(0)$ finie

En plus des conditions de frontières de ces deux fonctions.

Considérons l'équation (3.15.a) et posons : $V_1(p) = G_1(p)/p$

ce qui conduit à : $G_1''(p) + \alpha^2 G_1(p) = 0$

dont la solution générale est : $G_1(p) = C_1 \sin \alpha p + C_1' \cos \alpha p$

$V_1(p)$ s'écrit alors : $V_1(p) = C_1 \sin \alpha p / p + C_1' \cos \alpha p / p$

* si $p \leq k$, la condition (3.17.a) entraîne $C_1' = 0$

* si $p \geq k$, la solution ne sera pas retenue car elle est asymptotiquement oscillatoire.

La solution de (3.15.a) se réduit donc à :

$$v_1(p) = C_1 \sin \alpha p / p \quad (3.18)$$

considérons maintenant l'équation (3.15.b) et posons :

$$v_1(p) = F_1(p) / p$$

$$\text{ce qui conduit à : } F_1''(p) - \beta^2 F_1(p) = 0$$

$$\text{dont la solution est : } F_1(p) = C_2 \exp(-\beta p) + C_2' \exp(\beta p)$$

$$\text{ce qui entraîne : } v_1(p) = C_2 \exp(-\beta p) / p + C_2' \exp(\beta p) / p$$

* si $p \leq k$, la solution ne sera pas retenue car la première condition de (3.17.a) n'est pas vérifiée.

* si $p \geq k$, la deuxième condition (3.17.b) donne $C_2' = 0$

et la solution $v_1(p)$ s'écrit :

$$v_1(p) = C_2 \exp(-\beta p) / p \quad (3.19)$$

En résumé, $v_1(p)$ s'écrit donc :

$$v_1(p) = \begin{cases} C_1 \sin \alpha p / p & \text{si } p \leq k \\ C_2 \exp(-\beta p) / p & \text{si } p \geq k \end{cases} \quad (3.20)$$

Les conditions de continuité de $v_1(p)$ et $v_1'(p)$ conduisent à :

$$C_1 \sin \alpha k f / k f = C_2 \exp(-\beta k f) / k f \quad (3.21.a)$$

$$C_1 (\alpha \cos \alpha k f - \sin \alpha k f / k f) = -C_2 (1 + \beta k f) \exp(-\beta k f) / k f \quad (3.21.b)$$

L'équation (3.21.a) est vérifiée pour :

$$C_1 = 1 \quad \text{et} \quad C_2 = \sin \alpha k f \exp(\beta k f)$$

ce qui conduit, tenant compte de l'équation (3.21.b), à :

$$(1 + \beta k f) J_0(\alpha k f) = \alpha k f J_1(\alpha k f) \quad (3.22)$$

où $J_0(x)$ et $J_1(x)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1.

La solution (3.12) devient alors :

$$V(p,k) = \begin{cases} V_2(k) \sin ap / p & \text{si } p \leq k \\ V_2(k) C_2 \exp(-\beta p) / p & \text{si } p \geq k \end{cases} \quad (3.23)$$

A partir de la condition (3.17.b) nous déduisons l'équation :

$$(\Delta k + \alpha^2) V_2(k) = \left(\frac{d^2}{dk^2} - \frac{2}{k} \frac{d}{dk} + \alpha \right) V_2(k) = 0$$

qui devient , en utilisant le changement de variable :

$$V_2(k) = k Z(k)$$

$$Z''(k) + \left(\alpha^2 - \frac{2}{k^2} \right) Z(k) = 0$$

dont la solution est : $Z(k) = C_3 \left(\frac{\sin \alpha k}{k} - \alpha \cos \alpha k \right)$

ce qui entraîne pour $V_2(k)$:

$$V_2(k) = C_3 (\alpha k)^2 J_1(\alpha k)$$

où $J_1(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 1 .

La solution générale de (3.11) est donc :

$$V(p,k) = \begin{cases} \alpha C_3 (\alpha k) J_0(\alpha p) J_1(\alpha k) & \text{si } p \leq k \\ C_3 C_2 J_1(\alpha k) \exp(-\beta p) / p & \text{si } p \geq k \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour déterminer complètement tous les paramètres apparaissant dans l'équation , nous allons utiliser de nouveau le théorème de Hugenholtz illustré par la relation : $bv = V(kf, kf) + ef$

avec $W(kf) = bv.A$ et $ef = kf^2/2m$

cela entraîne $W(kf) / A = kf^2 / 2m + V(kf, kf)$

ou encore :

$$\frac{3}{kf^2} \int_0^{kf} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V(p, kf) \right] p^2 dp = \frac{kf^2}{2m} + V(kf, kf) \quad (3.25)$$

A partir de la solution (3.24), nous déduisons que pour $p \leq kf$ la solution $V(p, k)$ s'écrit :

$$V(p, k) = c \cdot \alpha \cdot (\alpha k) \cdot J_0(\alpha k) \cdot J_1(\alpha k) \quad (3.26)$$

Le premier terme de la relation (3.25) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} W(kf)/A &= \frac{3}{kf^3} \int_0^{kf} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} C \cdot \alpha \cdot (\alpha k) \cdot J_0(\alpha p) \cdot J_1(\alpha k) \right] p^2 dp \\ &= \frac{3kf^2}{10 \cdot m} + \frac{3C \cdot \alpha \cdot (\alpha k)^2}{2 \cdot \alpha \cdot kf} J_1(\alpha kf) \int_0^{kf} p \sin \alpha p dp \\ &= \frac{3kf^2}{10 \cdot m} + \frac{3}{2} C \alpha^2 \cdot kf J_1(\alpha kf) \end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation (3.25), cette dernière se met sous la forme :

$$C \cdot \alpha \cdot kf \cdot J_1(\alpha kf) \cdot (3 \cdot J_1(\alpha kf) - 2 \cdot \alpha \cdot kf \cdot J_0(\alpha kf)) = 4 \cdot ef/5 \quad (3.27)$$

La relation (3.27) représente une première contrainte pour la détermination des paramètres C et α . La constante α qui possède la dimension d'une longueur caractérise avec r_0 le système nucléaire.

Pour déterminer les deux constantes, il nous faut donc une deuxième équation qui constituera avec (3.27) la solution de C et α .

Pour ce faire, considérons la forme fonctionnelle de l'énergie totale :

$$W[\rho] = T[\rho] + V[\rho]$$

$$\text{avec } W[\rho] = \int \rho(r) W(k) d\vec{r}$$

$$W(k) = \frac{3A}{k^3} \int_0^k \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V(p, k) \right] p^2 dp$$

La quantité $T[\rho]$ s'écrit :

$$T[\rho] = \int \rho(r) T(k) dr$$

$$\text{avec } T(k) = \frac{3A}{k^3} \int_0^k \frac{p^2}{2m} p^2 dp = \frac{3A}{10m} k^2 \quad (3.29)$$

En utilisant la relation (3.29) et en remplaçant $\rho(r)$ par l'expression (3.10), $T[\rho]$ devient :

$$T[\rho] = \frac{4}{5\pi m} \int_0^{\infty} r^2 k^5(r) dr \quad (3.30)$$

où $k(r)$ est définie par la relation (3.10).

La quantité $V[\rho]$ qui s'écrit :

$$V[\rho] = \int \rho(r) V(k) d\vec{r} \quad (3.31)$$

se transforme, en procédant de la même façon :

$$V[\rho] = \frac{4ca^2}{\pi} \int_0^{\infty} r^2 k^4(r) J_1(\alpha.k(r)) dr \quad (3.32)$$

D'après la relation (3.10), $k(r)$ s'écrit :

$$k(r) = \left(\frac{3\pi^2 A \rho(r)}{2} \right)^{1/3} \quad (3.33)$$

ou encore :

$$k(r) = \left(\frac{3\pi^2 R^3}{2 r_0^3} \rho(r) \right)^{1/3} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho(r)}{3/4\pi R^3} \right)^{1/3}$$

$$k(r) = kR f(r)$$

A l'aide de ce dernier résultat, les énergies cinétique et potentielle s'écrivent respectivement :

$$T = \frac{9A}{5} \epsilon f \int_0^{\infty} x^2 f^5(xR) dx \quad (3.34)$$

$$V = \frac{4c\alpha}{\pi} k f A \int_0^{\infty} x^2 f^4(xR) J_1^2(\alpha.kf.f(xR)) dx \quad (3.35)$$

avec $\epsilon f = \frac{kf^2}{2m}$ $x = \frac{r}{R}$ $kf = \left(\frac{9\pi}{8} \frac{M_3}{r_0} \right) \omega$

$$f(x) = \left(\frac{f(x)}{3/4\pi R} \right)^{M_3}$$

L'énergie totale s'écrit en fonction de l'énergie moyenne de liaison : $W[\rho] = b\left(\frac{A}{X}\right).A$

En utilisant cette définition et les relations (3.34) et (3.35) nous obtenons enfin :

$$b(X) = \frac{9.\epsilon f}{2} \int_0^{\infty} x^2 f^5(xR) dx + \frac{9.v.\alpha}{2} k f \int_0^{\infty} x^2 f^4(xR) J_1^2(\alpha.kf.f(xR)) dx \quad (3.37)$$

où $v = c.\alpha$

Ainsi, nous avons déterminé une deuxième équation qui nous permettra de déterminer les paramètres c et α . Ces derniers sont donc obtenus en résolvant le système d'équations (3.27) et (3.37); ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{aligned} v.\alpha.kf.J_1(\alpha.kf) (3J_1(\alpha.kf) - 2\alpha.kf.J_0(\alpha.kf)) &= 4\epsilon f/5 \\ \frac{9\alpha.v}{2} \int_0^{\infty} x^2 f^4(xR) J_1^2(\alpha.kf.f(xR)) dx &= b - \frac{9\epsilon f}{5} \int_0^{\infty} x^2 f^4(xR) dx \end{aligned} \right. \quad (3.38)$$

$b = b(\frac{A}{2}X)$ est l'énergie moyenne de liaison .

La consistence des valeurs c et α peut être vérifiée en comparant la valeur théorique de l'énergie de volume moyenne donnée par :

$$b_{vth} = cf + V(kf, kf) \quad (3.39.a)$$

et la valeur expérimentale :

$$b_{vexp} = -(14 \pm 2) \text{ Mev} \quad (3.39.b)$$

3.3- Calcul des potentiels du modèle en couches

Il s'agit maintenant de déterminer les potentiels du modèle en couches $v_c(r)$ et $v_{sc}(r)$ en utilisant $\rho(r)$ calculée dans le chapitre II . Ceux-ci ont été donnés en fonction du potentiel à particules indépendantes $v_{sp}(r)$ dans le chapitre I .

3.3.1- Potentiel à particules indépendantes

L'énergie potentielle peut s'écrire :

$$V[\rho] = \frac{A}{2} \int \rho(r) v_{sp}(r) d\vec{r} \quad (3.40)$$

où v_{sp} est le potentiel à particules indépendantes et $\rho(r)$ la densité nucléaire non uniforme calculée dans le chapitre II .

Par ailleurs , et d'après la relation (3.32) , l'énergie potentielle s'écrit encore :

$$V[\rho] = \frac{4\pi \cdot \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} r^2 k^4(r) J_1^2(\alpha \cdot k(r)) dr \quad (3.41)$$

En comparant les relations (3.40) et (3.41) , $v_{sp}(r)$ est alors :

$$v_{sp}(r) = 3v \cdot \alpha \cdot k(r) \cdot J_1^2(\alpha \cdot k(r)) \quad (3.42)$$

où $k(r)$ est donné par la relation (3.10) et $v = c \cdot \alpha$.

A partir de la relation (3.10) et sachant que $J_1^2(\alpha.k(r))$ est régulière à l'infini, on remarque que $v_{sp}(r)$ se comporte asymptotiquement comme $f(r)$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_{sp}(r) = r \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) \quad (3.43)$$

3.3.2- Détermination des potentiels $v_c(r)$ et $v_{so}(r)$

Nous pouvons à présent, à partir de la relation (3.42) caractérisant le potentiel $v_{sp}(r)$, déterminer les potentiels central $v_c(r)$ et spin-orbite $v_{so}(r)$ en utilisant les relations (1.36) et (1.37) :

$$v_c(r) = v_{sp}(r) - G(r, \sigma) \int_0^r G(r', -\sigma) \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' \quad (3.44)$$

$$v_{so}(r) = \frac{1}{\sigma} (v_{sp}(r) - v_c(r)) \quad (3.45)$$

où $G(r, \sigma) = \exp(-r^2/2\sigma)$ et $\sigma = \eta \chi \lambda^2$

σ est un paramètre qui est apparu dans la condition de stabilité nucléaire (1.30) et dont la détermination n'est pas évidente. De plus, on ne peut le fixer arbitrairement car cela impliquerait une double paramétrisation du potentiel du modèle en couches.

Sachant que $\lim_{r \rightarrow \infty} v_c(r) = 0$, on voit que lorsque $\sigma > 0$, la fonction $v_c(r)$ paraît finie sur toute la distance $r \geq 0$. Cependant, pour $\sigma < 0$, $v_c(r)$ diverge asymptotiquement sauf dans le cas où il existerait une valeur σ_0 pour laquelle l'intégrale apparaissant dans (3.44) s'annule lorsque $r \rightarrow \infty$; ce cas se présente pour :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r G(r', -\sigma) \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' = 0 \quad (3.46)$$

lorsque $\sigma = 0$, l'équation (1.34) perd sa nature différentielle et conduit à une fausse déduction $v_c(r) = v_{sp}(r)$, le domaine de σ se révèle donc discontinu et est défini par $\sigma < 0$ et $\sigma > 0$. Pour chaque noyau, le choix de σ est suggéré par les conditions de régularité du problème.

Rappelons que les conditions de régularité que nous avons utilisées sont :

$$\begin{aligned} v_c(0) &= v_{sp}(0) \\ v_c(r \xrightarrow{\lim} \infty) &= v_{sp}(r \xrightarrow{\lim} \infty) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Si $v_{sp}(r)$ est une fonction monotone de r , la condition (3.46) ne peut être vérifiée ; cela a lieu pour les deux noyaux ^{232}Th et ^{238}U , impliquant que σ doit être positif.

Par ailleurs, l'étude de l'équation (1.34) montre que quand $v_{sp}(r)$ possède un minimum, la condition de régularité est vérifiée si σ est négatif. C'est le cas de tous les autres noyaux.

3.4- Phénomène de bifurcation

Quant à la détermination du paramètre σ_0 , nous avons conclu qu'il fallait résoudre l'équation (3.46). Malheureusement, cette dernière, qui est une équation intégrale homogène, n'est pas maniable car le paramètre σ_0 apparaît dans l'exponentielle. Pour

éviter un calcul laborieux, il est possible de poser le problème d'une autre manière. Sachant que pour $\sigma = \sigma_0$, $v_c(r)$ diverge asymptotiquement, considérons l'équation (1.34) dont la solution ne converge que pour $\sigma \neq \sigma_0$.

En résolvant l'équation différentielle (1.34) numériquement, nous remarquons que les solutions $v_c(r)$ divergent soit à $+\infty$ soit à $-\infty$ pour chaque valeur de σ considérée. La valeur de σ_0 est alors celle qui correspond à une solution régulière à l'infini.

3.5- Conclusion

Nous avons déterminé, dans ce chapitre, les potentiels central $v_c(r)$ et spin-orbitr $v_{so}(r)$ en fonction de la densité nucléaire $f(r)$. Pour cela, nous avons utilisé les résultats du chapitre I donnant $v_c(r)$ et $v_{so}(r)$ en fonction du potentiel à particules indépendantes $v_{sp}(r)$. Pour déduire celui-ci, nous avons résolu l'équation différentielle régissant la matière nucléaire par la méthode de la séparation des variables. Les potentiels $v_c(r)$ et $v_{sp}(r)$ ont été calculés en utilisant la densité nucléaire déterminée dans le chapitre II.

- CHAPITRE IV -

RESULTATS NUMERIQUES

ET DISCUSSIONS

I-Paramètres utilisés et méthodes numériques

a-Paramètres utilisés

La densité nucléaire $\rho(r)$ a été déterminée à l'aide d'un modèle de proton $\rho_p(r)$. Quatre cas particuliers de ce modèle ont été considérés en utilisant les résultats des expériences de la diffusion électron-noyau. Les différents cas que nous avons considérés sont caractérisés par les paramètres a_p , b_p et s_p donnés par :

modèle I : $a_p = b_p = s_p = 0$

modèle II : $a_p = 1$, $b_p = 0$, $s_p = 0.352$

modèle III : $a_p = 1$, $b_p = 0.5$, $s_p = 0.249$

modèle IV : $a_p = 1.2$, $b_p = 0$, $s_p = 0.321$

La valeur expérimentale considérée du rayon de proton R_p est :

$$R_p = (0.862 \pm 0.012) \text{ fm} \quad [S1.78]$$

Pour l'étude des variations de la densité nucléaire $\rho(r)$, nous avons sélectionné, à partir de la littérature, une série de noyau (tableau II) de densités de charges et d'énergies moyennes de liaison connues.

b- Méthodes numériques

Dans une première étape, nous avons étudié la densité nucléaire $\rho(r)$ à l'aide de quatre variantes d'un modèle de proton $\rho_p(r)$. Les solutions relatives aux trois premiers cas sont données par :

- modèle I :

$$\rho_I(r) = \rho_{ch}(r) \quad (4.1)$$

- modèle II :

$$\rho_{II}(r) = \Omega_{II} \rho_{ch}(r) \quad (4.2)$$

$$\text{avec } \Omega_{II} = 1 - sp^2 \nabla^2$$

$$sp = \frac{1}{\mu p}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$$

- modèle III :

$$\rho_{III}(r) = \Omega_{III} \rho_{ch}(r) \quad (4.3)$$

$$\text{avec } \Omega_{III} = 1 - sp \nabla^2 + \frac{sp}{r} \frac{d}{dr} \left(r \nabla^2 \right)$$

$$sp = \frac{1}{\mu p}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$$

Les expressions de $\rho(r)$ obtenues pour ces trois premiers cas étant assez simples, leurs courbes représentatives peuvent donc être aisément tracées.

pour le quatrième cas , nous avons obtenu la forme suivante :

$$f_{IV}(r) = -\alpha^2 f_{ch}(r) - \mu p^2 \alpha^2 (1+\alpha^2) \left(\frac{\cos \alpha \cdot \mu p \cdot r}{\alpha \cdot \mu p \cdot r} I_1(r) + \frac{\sin \alpha \cdot \mu p \cdot r}{\alpha \cdot \mu p \cdot r} I_2(r) \right) \quad (4.4)$$

avec

$$I_1(r) = \int_0^r r' f_{ch}(r') \sin \alpha \cdot \mu p \cdot r' dr'$$

$$I_2(r) = \int_0^r r' f_{ch}(r') \cos \alpha \cdot \mu p \cdot r' dr'$$

$$\alpha = \sqrt{5} \quad \mu p = 1/sp \quad sp = 0.321$$

Pour des commodités de calcul numérique , nous avons procédé de la façon suivante :

En décomposant l'intégrale $I_1(r)$, nous obtenons :

$$I_1 = \sum_{n=0}^{N_{max}} \int_{nh}^{(n+1)h} r' f_{ch}(r') \sin \alpha \cdot \mu p \cdot r' dr' = \sum_{n=0}^{N_{max}} I_1' \quad (4.5)$$

avec $N_{max} = r/h$ où h est un paramètre que nous devons fixer et qui doit correspondre à des solutions stables .

Nous avons choisi $h = 0.01$

Après un changement de variable , l'intégrale I_1' devient :

$$I_1' = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 F_1 \left(\frac{h}{2} (r'+2n+1) \right) dr'$$

où $F_1(x) = x f_{ch}(x) \sin \alpha \cdot \mu p \cdot x$

ce qui entraîne pour I_1 :

$$I_1 = \frac{h}{2} \sum_{n=0}^{N_{max}} \int_{-1}^1 F_1 \left(\frac{h}{2} (r'+2n+1) \right) dr' = \frac{h}{2} \sum_{n=0}^{N_{max}} I_1''$$

Pour l'intégrale I_2 , nous avons d'abord procédé par un changement de variable pour la ramener à la forme :

$$I2 = \int_0^{\infty} (r'+r) f_{ch}(r'+r) \cos(\alpha \cdot \mu p \cdot (r'+r)) dr'$$

$$= \int_0^{\infty} F2(r'+r) dr'$$

puis à la forme discrétisée :

$$I2 = \sum_{n=0}^{N_{max}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} F2(r'+r) dr'$$

puis, par un nouveau changement de variable, elle prend la forme :

$$I2 = \sum_{n=0}^{N_{max}} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 F2\left(\frac{\pi}{2}(r'+2n+1) + r\right) dr' = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N_{max}} I2''$$

Les intégrales I1'' et I2'' ont été calculées à l'aide de la formule d'Hermite qui est très efficace pour les fonctions fortement oscillantes. Cette dernière s'écrit [BA.76] :

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^n f(x_j) \quad (4.7)$$

où les x_j sont les zéros du polynomes de Tchebecheff et sont donnés par : $x_j = \cos((2j-1)\pi/n)$

Avant d'utiliser la formule d'Hermite, nous avons transformé I1'' et I2'' respectivement en :

$$I1'' = \int_{-1}^1 F1\left(\frac{h}{2}(x+2n+1)\right) dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} P1(h(x+2n+1)/2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{P1'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$I2'' = \int_{-1}^1 \frac{F2(\pi(x+2n+1)/2 + r)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{F2'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

pour évaluer I_1 et I_2 , nous avons déterminé les intégrales I_1'' et I_2'' en choisissant $n = 500$. Quant aux sommes discrètes apparaissant dans I_1 et I_2 , nous avons choisi N_{max} tel que :

a) pour I_1 : $N_{max} = r/h$ où $h = 0.01$

b) pour I_2 : $N_{max} = 50$

La densité de charge ρ_0 a été déterminée en utilisant la condition de normalisation de la densité de charge qui se traduit

par :

$$\int \rho_{ch}(r) d\vec{r} = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 \rho_{ch}(r) dr = 1 \quad (4.8)$$

Le calcul de la dernière intégrale a été effectué à l'aide méthode de Gauss-Laguerre à quinze (15) points [AB.70].

Les paramètres v et α , apparaissant dans la solution de l'équation différentielle (3.11), ont été calculés en résolvant le système d'équation non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \alpha \cdot v \cdot k_f \cdot J_1(\alpha \cdot k_f) (3J_1(\alpha \cdot k_f) - 2\alpha \cdot k_f \cdot J_0(\alpha \cdot k_f)) = 4 \cdot \epsilon f / 5 \\ \frac{9\alpha \cdot v}{2} \epsilon f \int_0^{\infty} x^2 f^4(x) J_1^2(\alpha \cdot k_f \cdot f(x)) dx = b - \frac{9\epsilon f}{5} \int_0^{\infty} x^2 f^5(x) dx \end{cases} \quad (4.9)$$

à l'aide la méthode de Newton [DE.73].

Quant au potentiel central $v_c(r)$, nous avons résolu une équation différentielle non homogène du premier degré par la méthode de Runge-Kutta [BA.76].

Rappelons que l'équation différentielle à résoudre s'écrit :

$$\frac{dv_c(r)}{dr} + \frac{r}{\sigma} v_c(r) = -\frac{r}{\sigma} v_{sp}(r) \quad (4.10)$$

Etant de la forme : $y'(r) + \frac{r}{\sigma} y(r) = \frac{r}{\sigma} vsp(r)$

elle s'écrit également : $y'(r) = \frac{r}{\sigma} (vsp(r) - y(r)) = f(r, y(r))$

La solution est alors :

$$y(r+h) = y(r) + \Delta y(r) \quad (4.11)$$

$$\text{où } \Delta y(r) = \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.12)$$

$$\text{avec } k_1 = h \cdot f(r, y(r))$$

$$k_2 = h \cdot f(r+h/2, y(r)+k_1/2)$$

$$k_3 = h \cdot f(r+h/2, y(r)+k_2/2)$$

$$k_4 = h \cdot f(r+h/2, y(r)+k_3)$$

La condition initiale concernant notre problème s'écrit :

$$y(0) = v_0(0) = vsp(0) .$$

II- Résultats numériques

1- Densité nucléaire

Pour examiner le comportement de la densité nucléaire $\rho(r)$ et le comparer avec celui de la densité de charge $\rho_{ch}(r)$, nous avons considéré l'ensemble de noyaux dont les paramètres sont regroupés dans le tableau II .

Il faut noter que les modèles II et III ne peuvent être utilisés pour les noyaux dont la distribution de charge est décrite par une fonction de Fermi car dans ce cas, la densité nucléaire ne satisfait pas certaines conditions aux limites (voir annexe D) .

pour les autres noyaux , les quatre modèle sont applicables . Dans le cas de la distribution du modèle en couches (3.62) et Gaussienne (3.65) , nous avons obtenu des solutions $\rho(r)$ analytiques pour les modèles II et III . Ces solutions sont données dans le chapitre II par les relations (2.48) et (2.53) . Les figures (de 1 à 6) montrent l'allure de $\rho(r)$ obtenue en utilisant les modèles II , III et IV . Nous avons tracé simultanément $\rho(r)$ et $\rho_{ch}(r)$ pour mieux voir les différences qualitatives et quantitatives qui pourraient exister entre ces deux quantités .

Nous remarquons que $\rho(r)$ possède un maximum plus prononcé que celui de $\rho_{ch}(r)$. En plus , nous observons à l'origine un certain écart entre les deux distributions . Cependant , cet écart n'existe pas pour les noyaux décrits par une distribution de charge du type de Fermi (figures de 4 à 6) .

Pour le noyau ${}^4\text{He}$, en plus du premier maximum , comme c'est le cas de tous les autres noyaux , il existe un deuxième maximum pour les grandes distances r . En outre , l'écart à l'origine entre $\rho(r)$ et $\rho_{ch}(r)$ est très grand comparé à ceux observés pour les autres noyaux (fig. 4.b). Nous constatons enfin que pour tous les noyaux , et à partir d'une certaine valeur de r , la densité nucléaire décroît plus rapidement vers zéro que la densité de charge . La densité nucléaire confine alors les nucléons dans un volume plus petit que la densité de charge .

Il faut noter que les différences que nous avons observées sont encore plus évidentes pour les noyaux légers que pour les noyaux lourds . En effet , pour ceux-ci , la densité nucléaire est presque constante puis chute rapidement vers zéro ; c'est normal, puisque pour les noyaux lourds , on peut approcher la densité nucléaire à celle de la matière nucléaire infinie qui est constante à l'intérieur du noyau puis s'annule au delà du rayon nucléaire .

Nous concluons donc que la densité nucléaire possède un comportement différent de celui de la densité de charge . Contrairement aux fondements du champ moyen de Woods-Saxon , l'approche de la densité nucléaire par la densité de charge pour l'explication et la prédiction des phénomènes nucléaires n'est donc pas toujours valable ; ceci explique sans aucun doute l'incompatibilité de certaines prévisions théoriques et leurs homologues expérimentales..

2-Potentiel nucléaire

b- Calcul des paramètres α et v

Afin de vérifier le bien fondé de la méthode utilisée pour calculer les potentiels du modèle en couches , nous avons calculé les paramètres v et α apparaissant dans la solution de l'équation différentielle (3.11) donnant le potentiel de la matière

nucléaire dans l'espace des moments . A l'aide de ces paramètres, calculés en résolvant le système d'équations (3.38), nous avons déterminé l'énergie moyenne de volume à l'aide la relation (3.8). Pour vérifier la consistance de la méthode , il faut alors comparer la valeur trouvée de l'énergie moyenne de volume bv_{th} avec celle connue expérimentalement :

$$bv_{exp} = -(14 \pm 2) \text{ Mev}$$

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux III , IV et V .

Nous remarquons que le modèle IV est le plus consistant car les valeurs théoriques de l'énergie moyenne de volume correspondent bien à la valeur expérimentale donnée plus haut . Nous allons alors utiliser ce modèle pour la détermination des potentiels du modèle en couches .

b- Calcul du paramètre σ

La solution du potentiel central $v_c(r)$ est donnée par la relation :

$$v_c(r) = v_{sp}(r) - G(r, \sigma) \int_0^r G(r', -\sigma) \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' \quad (4.13)$$

avec $G(r, \sigma) = \exp(-r^2/2\sigma)$

$v_{sp}(r)$ étant le potentiel à particules indépendantes donné par la relation (3.42) .

A partir de la relation (4.13) , nous déduisons :

a) si $\sigma > 0$, $v_c(r)$ est une fonction bornée sur toute la distance $r \geq 0$.

b) si $\sigma < 0$, $vc(r)$ diverge asymptotiquement à moins qu'il existe une valeur $\sigma = \sigma_0$ pour laquelle l'intégrale apparaissant dans l'expression de $vc(r)$ s'annule, c'est à dire :

$$\int_0^{\infty} G(r', -\sigma) \frac{dv_{sp}(r')}{dr'} dr' = 0 \quad (4.14)$$

La constante σ ne peut être nulle, car dans ce cas, l'équation donnant $vc(r)$ perd sa nature différentielle. Ce paramètre est donc soit positif, soit négatif.

Le choix entre $\sigma > 0$ et $\sigma < 0$ est suggéré par les conditions de régularité du potentiel central du modèle en couches. Les conditions que nous avons utilisées sont :

$$\begin{aligned} vc(0) &= v_{sp}(0) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} vc(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} v_{sp}(r) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si le potentiel $v_{sp}(r)$ est une fonction monotone, la condition (4.14) ne peut être vérifiée ; cela a lieu pour les noyaux ^{138}U et ^{232}Th , impliquant que pour ces deux noyaux σ doit être positif.

Pour les autres noyaux, $v_{sp}(r)$ possède un minimum, il existe donc une valeur $\sigma = \sigma_0$ pour laquelle la relation (4.14) est vérifiée. Malheureusement, cette dernière n'est pas assez simple ce qui rend la détermination de σ_0 très compliquée. Nous avons alors résolu le problème de la manière suivante :

Ayant considéré l'équation différentielle (1.34) donnant le potentiel central $vc(r)$, et à l'aide des conditions aux limites

(4.15) , nous avons tracé l'allure de $vc(r) = vc(r, \sigma)$, divergeant pour $\sigma = \sigma_0$, en fonction de σ . L'intégration numérique de l'équation différentielle (1.34) a révélé que les variations de σ donnaient lieu pour chaque noyau , à une bifurcation des solutions $vc(r, \sigma)$ en deux branches , l'une divergeant à $+\infty$, et l'autre à $-\infty$. La valeur $\sigma = \sigma_0$ est alors celle qui correspond à une solution régulière à l'infini , et nous remarquons de plus , qu'elle est unique . Nous pouvons voir sur la figure (15) le phénomène de bifurcation observé dans le cas du noyau ^{46}O . Pour les noyaux ^{238}U et ^{232}Th , la valeur de σ correspondante est positive mais elle n'est pas unique . La figure (14) montre les variations du potentiel $vc(r)$ du noyau ^{238}U pour plusieurs valeurs de σ .

Les noyaux se répartissent alors en deux classes : la classe A contenant les noyaux correspondant à $\sigma_0 < 0$ (tableau IV) ; la classe B ne comprenant que deux noyaux : ^{238}U et ^{232}Th où σ est positif et non unique .

c- Potentiels du modèle en couches

Après avoir déterminé le paramètre σ_0 , nous avons pu tracer les courbes représentatives de $vc(r)$, $v_{so}(r)$ et $v_{sp}(r)$ (fig. 7a 12) . Nous remarquons que $v_{so}(r)$ possède un maximum au voisinage du rayon carré carré moyen (r.m.s) R_0 . Il décroît ensuite rapidement vers zéro . Pour quelques noyaux , nous observons

d'autres maxima quantitativement négligeables ; cela a lieu pour les noyaux dont la distribution de charge est décrite par la fonction de Fermi (fig. A0 et A2).

Les potentiels $v_c(r)$ et $v_{sp}(r)$, et à cause des conditions aux limites considérées, possèdent deux comportements analogues. Il existe cependant, un écart à l'intérieur du noyau au voisinage du rayon carré moyen.

Quant au noyau ${}^4\text{He}$ dont le paramètre α est négatif et qui appartient donc à la classe A, nous remarquons qu'il possède un comportement anormal relativement à ceux des autres noyaux. En effet, la valeur $v_{sp}(0)$, et par conséquent $v_c(0)$, est trop petite comparée à celle des autres noyaux. Nous pensons que l'erreur est due, comme nous l'avons prévu pour les noyaux ${}^{132}\text{U}$ et ${}^{237}\text{Th}$ à l'utilisation d'une distribution de charge non consistente. Il se peut aussi que la méthode utilisée pour déterminer la densité nucléaire $\rho(r)$ à partir de la densité de charge $\rho_{ch}(r)$ ne soit pas valable pour les noyaux légers. Les résultats que nous avons obtenus peuvent être comparés à d'autres références [EL.67.MI.861].

d- Conclusion

Nous avons constaté que les densités nucléaires possédaient un comportement distinct de celui des densités de charge. Pour décrire les phénomènes nucléaires, il faut donc donner la densité

nucléaire d'une façon rigoureuse car , une quelconque identification de celle-ci à la densité de charge , conduirait à une incompatibilité avec les données expérimentales .

En outre , lors du calcul des potentiels du modèle en couches , la série de noyaux étudiés s'est trouvée répartie en deux classes :

- la classe A contenant les noyaux dont le potentiel $v_{sp}(r)$ possède un minimum , et dans ce cas , le paramètre σ_0 est négatif et unique .

- la classe B ne contenant que les noyaux ^{238}U et ^{232}Th dont le potentiel $v_{sp}(r)$ a un comportement monotone, et dans ce cas , le paramètre σ_0 est positif et non unique .

Nous estimons que le cas de ces noyaux est dû à l'utilisation d'une densité de charge non consistante. Pour le noyau ^4He , le comportement anormal peut être dû , soit à l'utilisation d'une densité de charge non consistante , soit à la non validité de la méthode utilisée pour déduire $\rho(r)$ pour les noyaux légers .

CONCLUSION

Nous avons déterminé dans ce travail, la densité nucléaire $\rho(r)$ en utilisant une équation intégrale la reliant à la densité de charge et la distribution protonique $\rho_p(r)$. Nous avons, pour cela, considéré le modèle de protons de T. A. MINELLI et al., déduit des expériences de la diffusion des électrons à haute énergie. L'équation intégrale a été transformée en une équation différentielle soluble à l'aide de la technique des fonctions de Green pour différentes formes de la densité de charge.

Pour la résolution du problème, quatre variantes du modèle de protons ont été considérées et les solutions explicitées. Pour le modèle I, la densité nucléaire se réduit simplement à la densité de charge, comme cela est généralement supposé. Pour les modèles II, III et IV, par contre, des différences nettes entre ces deux fonctions ont été observées pour la totalité des noyaux étudiés.

Ces différences sont encore plus évidentes pour les noyaux légers. En effet, pour ces derniers, un décalage considérable est observé au voisinage de l'origine entre $\rho_p(r)$ et $\rho(r)$ ainsi qu'un maximum plus prononcé pour cette dernière.

Pour les noyaux les plus lourds, ces différences ne sont pas aussi nettes et la densité nucléaire décroît lentement à l'intérieur du noyau puis chute rapidement au-delà d'un certain domaine, comme cela est supposé dans la théorie de la matière nucléaire infinie.

On note quand même une anomalie pour l'hélium ${}^4_2\text{He}$ où le décalage à l'origine entre $f(r)$ et $f(\hbar r)$ est très grand, en plus d'un deuxième maximum pour $f(r)$, ce qui n'était pas le cas pour les autres noyaux.

A partir de la densité nucléaire ainsi calculée, nous avons ensuite déduit les potentiels du modèle en couches en utilisant les propriétés de saturation et de stabilité nucléaires ainsi que les résultats de la diffusion dans la théorie d'Hartree-Fock.

En calculant les valeurs théoriques de l'énergie moyenne de volume pour les modèles II, III et IV, il s'est avéré que celle qui correspond à la valeur expérimentale est celle relative au modèle IV, d'où l'utilisation de celui-ci pour la détermination des potentiels central et spin-orbite.

Après avoir trouvé le lien existant entre ces derniers, le potentiel central a été déterminé en résolvant une équation différentielle où apparaît un paramètre σ . Celui-ci a été défini par un procédé itératif grâce aux conditions aux limites satisfaites par $v(r)$. Les valeurs trouvées de ce paramètre sont presque toutes uniques permettant ainsi la détermination de $v(r)$ et $v_{so}(r)$. Cependant, pour les noyaux ^{238}U et ^{232}Th les valeurs de σ ne sont pas uniques, empêchant ainsi la détermination de $v(r)$ et $v_{so}(r)$. Il se peut que cela soit dû à l'utilisation d'une densité de charge non consistante.

En conclusion, la densité nucléaire $\rho(r)$ est parmi les quantités nucléaires les plus fondamentales, permettant la description de chaque phénomène nucléaire et la détermination d'autres quantités tel que le potentiel nucléaire. Il faut donc connaître le maximum de ses détails, ce qui sera d'un bon apport pour les modèles théoriques.

- ANNEXE A -

- Fonctions de Green -

Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$Lu(x) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} - q(x) u(x) \right] = \Xi(x) \quad (1)$$

$p(x)$ et $q(x)$ étant des fonctions continues.

On veut résoudre l'équation dans un intervalle $[a, b]$ connaissant certaines conditions.

Pour résoudre l'équation (1) pour toute fonction $\Xi(x)$, on introduit la fonction $K(x, y)$ appelée fonction de Green qui est solution pour une source ponctuelle en y [wy.76]

$$LG(x, y) = \delta(x-y) \quad (2)$$

On cherche la solution générale sous la forme :

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) \Xi(y) dy \quad (3)$$

$G(x, y)$ et $\Xi(x)$ étant continues sur $[a, b]$.

$G(x, y)$ satisfait donc à :

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dG(x, y)}{dx} - q(x) G(x, y) \right] = \delta(x-y) \quad (4)$$

Intégrons l'équation (4) entre $x = y-\epsilon$ et $x = y+\epsilon$, $\epsilon \xrightarrow{\text{lim}} 0$

$$\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dG(x, y)}{dx} - q(x) G(x, y) \right] dx = \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \delta(x-y) dx$$

ce qui donne :

$$\left(p(x) \frac{dG(x, y)}{dx} - q(x) G(x, y) \right) \Big|_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} = 1$$

$p(x)$ et $q(x)$ étant des fonctions continues, il reste :

$$p(x) (G'(y+\epsilon, y) - G'(y-\epsilon, y)) = 1$$

$$\text{ou bien : } \frac{d}{dx} G(x, y) \Big|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} = \frac{1}{p(y)} \quad (5)$$

La dérivée $G'(x, y)$ par rapport à x possède donc une discontinuité au point $x = y$.

Lorsque les coefficients sont constants, c'est à dire :

$$a_2 u''(x) + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = B(x) \quad (6)$$

nous avons simplement :

$$\frac{dG(x, y)}{dx} \Big|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} = \frac{1}{a_2}$$

En conclusion, la résolution de l'équation (1) revient à résoudre

$$\text{l'équation (2) : } LG(x, y) = \delta(x-y)$$

qui est équivalente au système :

$$LG(x, y) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dG(x, y)}{dx} \Big|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} = \frac{1}{p(y)}$$

La solution finale sera donc trouvée, connaissant les conditions aux limites et les conditions de continuité de $G(x, y)$ et $G'(x, y)$. Ce raisonnement peut être généralisé pour le cas d'une équation différentielle d'ordre n , c'est à dire :

$$a_n \frac{d^n u(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 u(x) = B(x)$$

En posant $u(x) = \int_a^b G(x,y) \Xi(y) dy$

on obtient une équation différentielle en $G(x,y)$ telle que :

$$a_n \frac{d G(x,y)}{dx} + a_{n-1} \frac{d^2 G(x,y)}{dx^2} + \dots + a_0 G(x,y) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^{n-1} G(x,y)}{dx^{n-1}} \Big|_{x=y+\epsilon} - \frac{d^{n-1} G(x,y)}{dx^{n-1}} \Big|_{x=y-\epsilon} = \frac{1}{a_n}$$

En conclusion, soit l'équation (E) non homogène :

$$(E) \quad a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 f(x) = \Xi(x) \quad (9)$$

Si on pose : $f(x) = \int_a^b G(x,y) \Xi(y) dy \quad (10)$

il existe alors une seule solution $f(x)$ définie par (10) sous certaines conditions aux limites a et b .

$G(x,y)$ satisfait l'équation homogène :

$$a_n \frac{d^n G(x,y)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} G(x,y)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 G(x,y) = 0 \quad (11)$$

et possède les propriétés suivantes :

a- $G(x,y)$ est continue et possède des dérivées partielles par rapport à x jusqu'à l'ordre $n-2$ continues sur le carré $a \leq x \leq b$ et $a \leq y \leq b$.

b- $\frac{d}{dx} G(x,y) \Big|_{x=y+\epsilon} - \frac{d}{dx} G(x,y) \Big|_{x=y-\epsilon} = \frac{1}{a_n}$

c- Quelque soit $y \in]a,b[$, $x \longrightarrow G(x,y)$ est solution de l'équation homogène (11) dans chacun des intervalles $[a, y[$ et $]y, b]$.

d- $G(x,y) = G(y,x)$

- ANNEXE B -

Théorème :

Si $f(x) \in C^0$ et $h(x) = \int_0^\infty H(x,y) f(y) dy$ (1)

alors $h(x) \in C^4$ et satisfait à :

$H''''(x) - 2h''(x) + h(x) = f(x)$ (2)

Inversement, si $h(x) \in C^4$ et $f(x)$ est déterminée par (2), alors $f(x) \in C^0$ et satisfait la relation (1).

En effet, considérons la fonction $g(x)$:

$g(x) = \int_0^\infty G(x,y) f(y) dy = \int_0^x G(x,y) f(y) dy + \int_x^\infty G(x,y) f(y) dy$ (3.a)

En utilisant la relation (1.13) et connaissant la discontinuité de $G'(x,y)$ au point $y = x$, on déduit :

$g'(x) = \int_0^\infty G'(x,y) f(y) dy + (G(x,x-0) - G(x,x+0))f(x)$ (3.b)

$g''(x) = \int_0^\infty G''(x,y) f(y) dy + \{G'(x,x-0) - G'(x,x+0)\} f(x)$ (3.c)

$= g(x) - f(x)$ (3.d)

En tenant compte de $H''(x,y) = H(x,y) - G(x,y)$ et des relations (3), il s'en suit :

$h'(x) = \int_0^\infty H'(x,y) f(y) dy + 0$ (4.a)

$h''(x) = \int_0^\infty H''(x,y) f(y) dy = h(x) - g(x)$ (4.b)

$h'''(x) = h'(x) - \int_0^\infty G'(x,y) f(y) dy$ (4.c)

$h''''(x) = h''(x) - \int_0^\infty G''(x,y) f(y) dy - (G'(x,x-0) - G'(x,x+0))f(x)$
 $= h''(x) - g(x) + f(x)$ (4.d)

Sachant que $h''(x) = h(x) - g(x)$

$g(x) = h'(x) - h'''(x)$

on déduit, en remplaçant dans (4.d) :

$$h^{(n)}(x) - 2h(x) + h'(x) = f(x)$$

D'après les relations (1.7), on a :

$$h(0) = h'(0) = 0 \quad (5)$$

Prouvons maintenant que $h(x)$ est de classe C^4 , c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n h(x) = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Si $f(x) \in C^0$, les propriétés suivantes s'en suivent :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \quad (7)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \exp(-x) \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(y) f(y) dy + \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sh} x \int_0^{\infty} \exp(-y) f(y) dy \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} \operatorname{sh} y f(y) dy}{1/x \exp(-x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} \exp(-y) f(y) dy}{1/x \operatorname{sh} x} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de L'Hôpital, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[- \frac{x \exp(-x)}{x \exp(-x)} f(x) + \frac{x \exp(x)}{x \exp(x)} f(x) \right] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0 \quad \text{puisque } f(x) \in C^0 \end{aligned}$$

De la même façon, en développant et en appliquant le théorème de

L'Hôpital, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x g'(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^{\infty} G'(x, y) f(y) dy \quad (8) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-x \exp(-x) \int_0^{\infty} \operatorname{sh} y f(y) dy + \right. \\ &\quad \left. x \operatorname{ch} x \int_0^{\infty} \exp(-y) f(y) dy \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{- \int_0^{\infty} \operatorname{sh} y f(y) dy}{1/x \exp(-x)} + \frac{\int_0^{\infty} \exp(-y) f(y) dy}{1/x \operatorname{ch} x} \right] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0 \end{aligned}$$

Sachant maintenant que $h(x) = \int G(x,y) g(y) dy$ (9)

on déduit :

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int G(x,y) g(y) dy$$

En appliquant le théorème de L'hôpital, et en tenant compte de (7), il vient :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x h(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x g(x) = 0 \quad (10)$$

De la même façon, nous avons :

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} x h'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int G'(x,y) g(y) dy$$

A l'aide de la relation (7) et du théorème de L'hôpital, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x h'(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x g(x) = 0 \quad (11)$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} x h''(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x h'(x) - x g(x))$$

A l'aide de (7) et (10), il s'en suit :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x h''(x) = 0 \quad (12)$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} x h'''(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x h'(x) - x g''(x))$$

En tenant compte des propriétés de $g(x)$ et en utilisant les résultats (7) et (11), on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x h'''(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x h'(x) - x g''(x)) = 0 \quad (13)$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} x h''''(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x (h''(x) - g''(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x (h(x) - 2g(x) + f(x))$$

En utilisant les résultats (7) et (10), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x h''''(x) = 0 \quad (14)$$

Les résultats (10) jusqu'à (14) montrent que $h(x) \in C^4$.

- ANNEXE C -

- Une fonction $f(x)$ est de classe $C0$ si :

a- elle est définie dans $[0, \infty[$

b- l'intégrale $\int_0^{\infty} x f(x) dx$ existe

Il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$

- Une fonction de classe $C0$ appartient à la classe $C2$ si :

a- $f(x)$ et $f'(x)$ continues

b- elle possède une dérivée seconde telle que $f''(x) \in C0$

c- Il s'en suit que : $f(0) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x) = 0$

- Une fonction $f(x)$ de classe $C0$ appartient à la classe $C4$ si :

a- $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continues

b- elle possède une dérivée quatrième telle que $f''''(x) \in C0$

c- Il s'en suit que :

$$f(0) = f''(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x f''(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x f''''(x) = 0$$

Nous noterons par :

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx = 1 \quad \text{la condition A}$$

et par :

$$f(0) = 0, f'(0) \text{ finie} \quad \text{la condition B}$$

- ANNEXE D -

Dans le cas de l'équation de Fredholm de première espèce ($ap=1$), l'équation (1.27.a) s'écrit :

$$h''(x) = (fch(x) - h(x)) / (2bp-1) \quad (1)$$

En dérivons deux fois, nous obtenons :

$$h''(x) = (fch''(x) - h''(x)) / (2bp-1) \quad (2)$$

Or, nous avons démontré dans l'annexe B que $h(x)$ est de classe C^4

$$\text{c'est à dire : } x \xrightarrow{\lim} \infty x h^{(n)}(x) = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

$$h(0) = h''(0) = 0$$

D'après la relation (2), nous déduisons que $fch(x)$ est de classe

$$C^2 : x \xrightarrow{\lim} \infty x fch^{(n)}(x) = 0 \quad n = 0, 1, 2 \quad (4)$$

$$fch(0) = 0$$

En remplaçant la relation (1) dans (2) nous avons :

$$h''''(x) = ((2bp-1)fch''(x) - fch(x) + h(x)) / (2bp-1) \quad (5)$$

Compte tenu de la relation (1.25), l'équation (5) devient :

$$f(x) = ((2bp-1)fch''(x) - (4bp-1)fch(x) + 4bp h(x)) \quad (6)$$

D'après cette dernière relation, on déduit que pour que $f(0) = 0$,

$fch''(x)$ doit être définie en $x = 0$ et :

$$(2bp-1)fch''(0) = (4bp-1)fch(0)$$

A l'aide de la relation (1.25) définie par :

$$h''''(x) - 2h''(x) + h(x) = f(x)$$

et sachant que $h(x)$ est de classe C^4 , il s'en suit :

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x h(x) dx \quad (7.a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0 \quad (7.b)$$

Cas du modèle II

La solution est, dans ce cas, donnée par :

$$f(x) = f''ch(x) - fch(x)$$

La condition (7.b) entraîne /

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x fch(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x fch'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x fch''(x) = 0$$

Compte tenu des relations : $x = \mu p \cdot r$

$$fch(x) = 4\pi r \int_0^r fch(r) / \mu p \quad (8)$$

on déduit les conditions suivantes :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^r fch(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^r fch'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^r fch''(r) = 0 \quad (9)$$

Cas du modèle III

Dans ce cas, $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = fch''''(x) - 2fch''(x) + fch(x)$$

A partir des conditions (7.b) et en utilisant les relations (8),

il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{(n)} fch(x) &= 0 & n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} r^2 \int_0^r fch(r) &= 0 & n = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (10)$$

Remarque:

Si nous voulons, en plus des relations (9) et (10), que $fch(0) = 0$ et $fch(x)$ de classe C_4 , il faut donc :

1- pour le modèle III: $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \rho^{(n)}_{ch}(r) = 0$ $n = 0, 1, 2$
 (11)
 $\rho_{ch}'(0) = 0$

2- pour le modèle III : $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \rho^{(n)}_{ch}(r) = 0$ $n = 0, 1, 2, 3, 4$
 (12)
 $\rho_{ch}'(0) = \rho_{ch}''(0) = 0$

En conclusion, nous voyons que les densités de charge $ch(r)$ données par les fonctions de Fermi ne satisfont pas les conditions (11) et (12). Il ne sera donc tenu compte des distributions de Fermi que dans les modèles I et IV.

paramètres	Modèle I	Modèle II	Modèle III	Modèle IV
ap	0	1	1	1.2
bp	0	0	0.5	0
sp	0	0.352	0.249	0.321

Tableau I : Modèles de protons utilisés pour le calcul de la densité nucléaire.

noyau	modèle	a (fm)	b (fm)	c	b($\frac{A}{Z}$) (MeV)	références
^4He	Fermi	1.008	0.327	0.445	-7.074	[FR.67]
^{12}C	O.H	1.38	1.73	0	-7.5204	[KL.74]
^{16}O	O.H	1.544	1.833	0	-7.976	[SH.73]
^{28}Si	Gauss	1.95	2.076	0.286	-8.45	[LI.74]
^{40}Ca	Gauss	3.6685	0.5839	-0.1017	-8.55	[BE.67]
^{56}Fe	Gauss	3.475	2.330	0.401	-8.79	[WO.74]
^{60}Ni	Fermi	4.4891	0.5369	-0.2668	-8.78	[PI.70]
^{64}Zn	Gauss	3.739	2.454	0.290	-8.74	[WO.74]
^{88}Sr	Gauss	4.254	2.548	0.47	-8.73	[JA.74]
^{90}Zr	Gauss	4.522	2.5216	0.245	-8.71	[DR.63]
^{92}Mo	Gauss	4.538	2.5445	0.304	-8.66	[DR.63]
^{116}Sn	Gauss	5.062	2.625	0.272	-8.523	[PI.72]
^{138}Ba	Gauss	5.3376	2.6776	0.3749	-8.395	[HE.70]
^{148}Nd	Gauss	5.312	2.7311	0.4378	-8.346	[HE.70]
^{208}Pb	Gauss	6.3032	2.8882	0.3379	-7.867	[HE.69]
^{232}Th	Fermi	6.7915	0.571	0.	-7.615	[HE.74]
^{238}U	Fermi	6.8054	0.605	0.	-7.57	[HE.74]

Tableau II : Energies de liaisons et densités de charges utilisées.

Noyau	α	v (MeV)	(bv) théorique (MeV)
^{14}C	1.204021	-76.472286	-9.9066
^{16}O	1.250634	-73.30073	-19.4250
^{28}Si	1.295918	-89.907892	-21.57044
^{56}Fe	1.225452	-91.573425	-19.061262
^{66}Zn	1.215149	-88.361235	-16.754410
^{88}Sr	1.207640	-93.45346	-19.160441
^{90}Zr	1.174952	-91.616657	-16.347892
^{92}Mo	1.186697	-91.347318	-16.857867
^{116}Sn	1.176354	-92.407178	-16.855049
^{138}Ba	1.169161	-94.882755	-17.789018
^{142}Nd	1.173222	-94.970944	-18.072459
^{208}Pb	1.150331	-94.036200	-16.22366

Tableau III : Valeurs des paramètres α et v et de l'énergie moyenne de liaison théorique calculés dans le cas du modèle II.

Noyau	α	v (MeV)	(bv) théorique (MeV)
^{112}C	1.200420	-76.29926	-9.9
^{16}O	1.247745	-73.142278	-10.21586
^{28}Si	1.296700	-90.043681	-21.684001
^{36}Fe	1.225987	-91.651298	-19.122320
^{64}Zn	1.215664	-88.42032	-16.812259
^{88}Sr	1.208066	-93.515998	-19.218207
^{90}Zr	1.175302	-91.656947	-16.369384
^{98}Mo	1.187044	-91.349272	-16.899863
^{116}Sn	1.176625	-92.4400	-16.668231
^{136}Ba	1.169405	-94.914843	-17.820866
^{148}Nd	1.173468	-95.003917	-18.104608
^{208}Pb	1.150480	-94.053135	-16.241641

Tableau IV : Valeurs des paramètres α et v et de l'énergie moyenne de liaison théorique calculés dans le cas du modèle III.

Noyau	R_0 (fm)	α	v (MeV)	(bv) théorique (MeV)
^{14}C	2.401941	1.236653	-78.66765	-12.53949
^{16}O	2.578075	1.283855	-75.73187	-13.09592
^{28}Si	2.985260	1.230372	-81.72471	-13.86568
^{56}Fe	3.636561	1.184812	-86.40206	-14.32847
^{64}Zn	3.822785	1.192216	-86.11074	-14.27158
^{88}Sr	4.175968	1.165609	-88.6967	-14.14356
^{90}Zr	4.177527	1.155546	-89.80409	-14.20598
^{92}Mo	4.229897	1.165675	-88.42120	-14.10034
^{116}Sn	4.537489	1.149494	-89.81042	-13.85988
^{138}Ba	4.759594	1.133108	-91.21938	-13.63104
^{142}Nd	4.811410	1.134376	-90.96415	-13.57369
^{208}Pb	5.433223	1.119020	-91.28679	-12.81038

Tableau V : Valeur du rayon carré moyen R_0 , des paramètres α et v et de l'énergie moyenne de liaison théorique bv , calculés dans le cas du modèle IV.

Noyau	σ_0 (fm^{-2})	Noyau	σ_0 (fm^{-2})
^4He	-0.26694	^{64}Zn	-1.37424
^{14}C	-1.44170	^{88}Sr	-3.49338
^{16}O	-1.91944	^{90}Zr	-2.19040
^{20}Ne	-0.43204	^{92}Mo	-2.65693
^{24}Mg	-0.18754	^{112}Cd	-1.91461
^{28}Si	-0.80396	^{116}Sn	-3.46121
^{32}S	-0.21731	^{138}Ba	-5.06733
^{40}Ca	-0.37526	^{142}Nd	-5.37638
^{56}Fe	-1.95612	^{148}Sm	-2.17500
^{60}Ni	-0.09114	^{208}Pb	-6.93119

Tableau VI : valeurs du paramètre σ_0 calculées par itération.

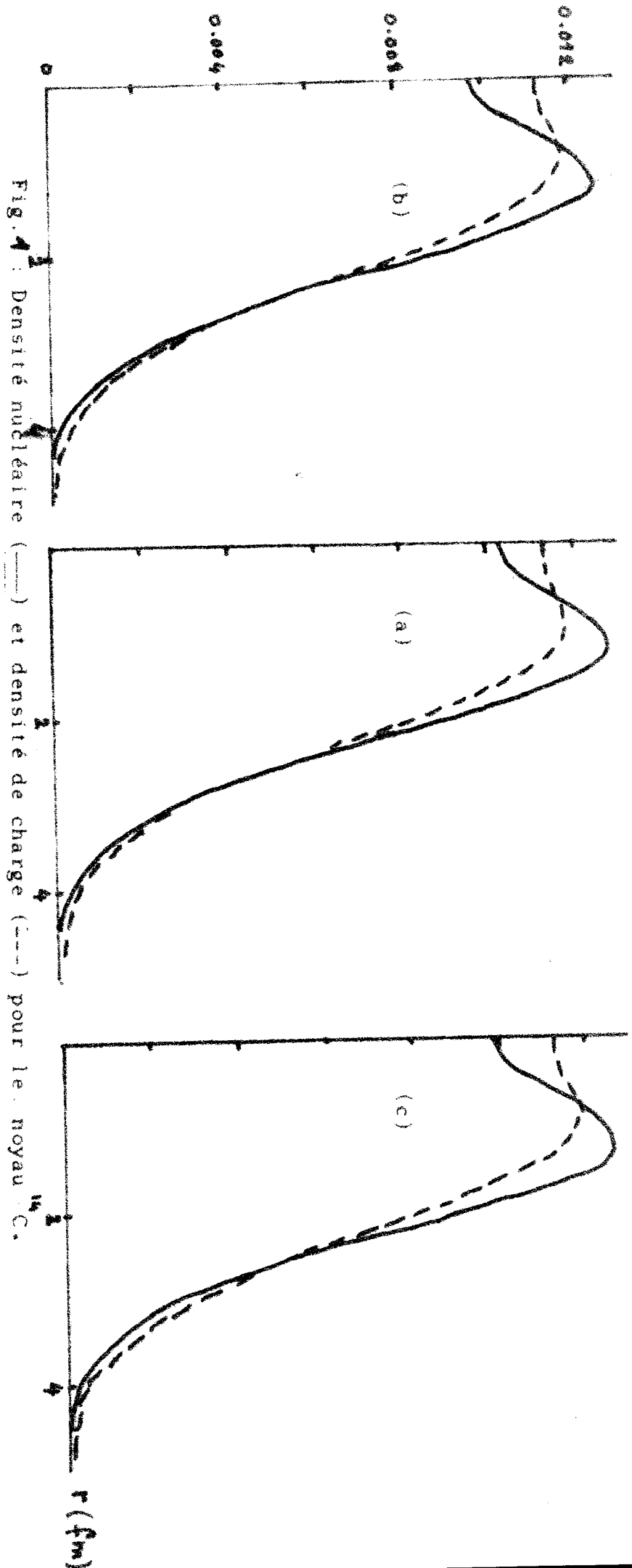


Fig. 4 : Densité nucléaire (—) et densité de charge (---) pour le noyau ^{14}C .
 (a) : modèle II (b) : modèle III (c) : modèle IV

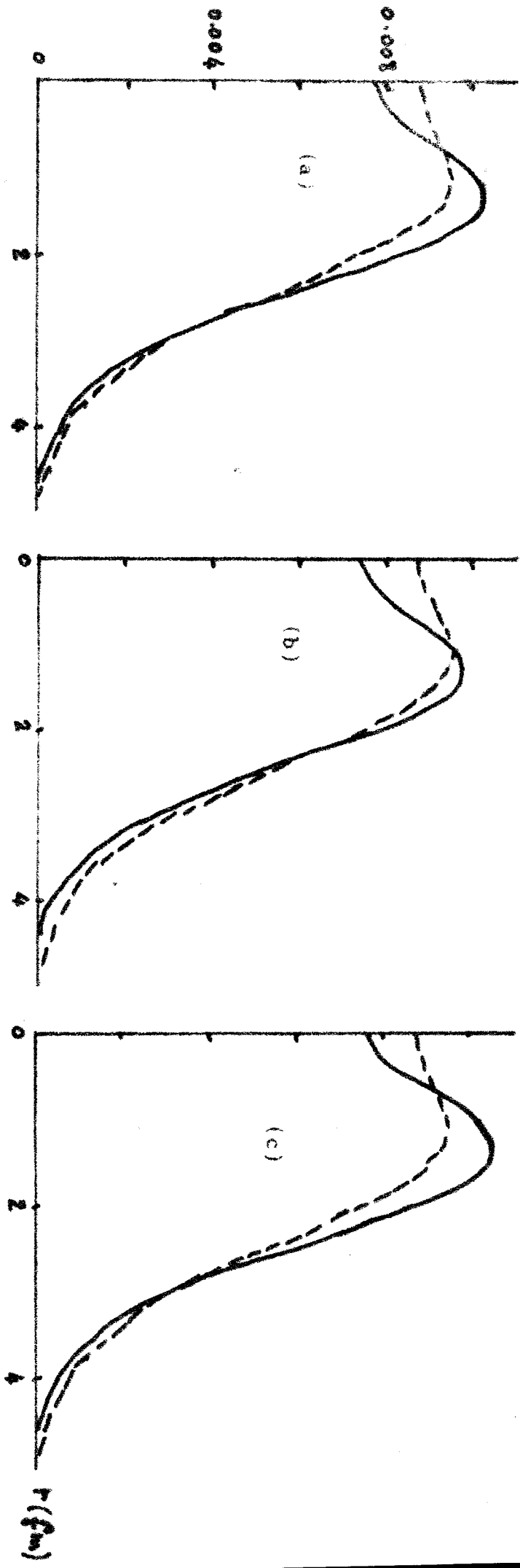


Fig. 2 : Densité nucléaire (—) et densité de charge (---) pour le noyau ^{46}O .

(a) : modèle II (b) : modèle III (c) : modèle IV

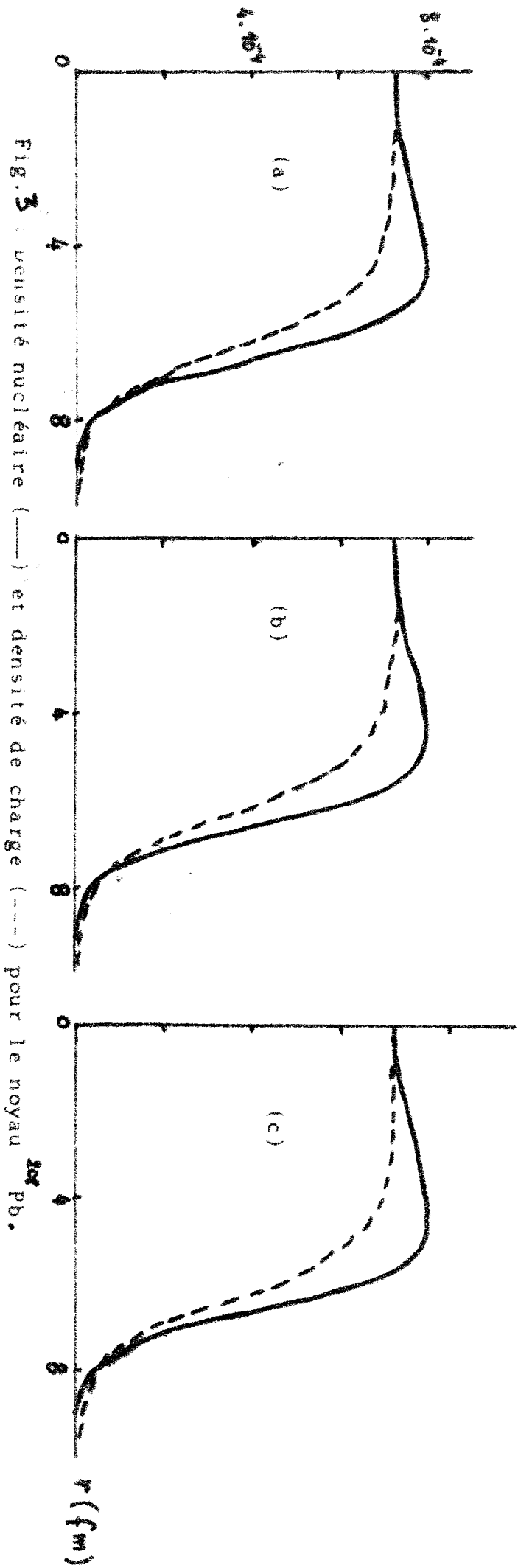


Fig. 3 : densité nucléaire (—) et densité de charge (---) pour le noyau ^{208}Pb .

(a) : modèle II (b) : modèle III (c) : modèle IV

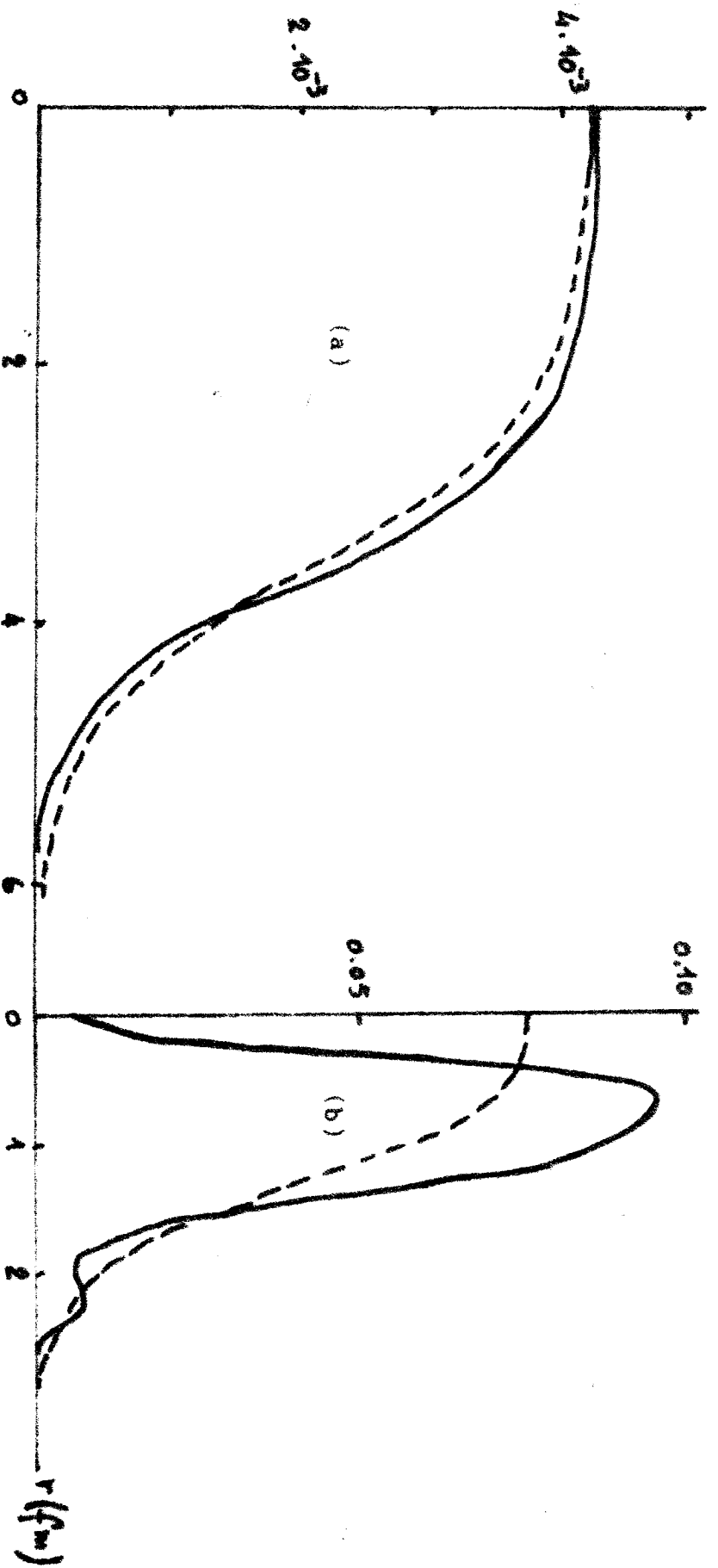


Fig. 4 : Densité nucléaire (—) et densité de charge (---) du modèle IV.

(a) : noyau ^{40}Ca (b) : noyau ^4He

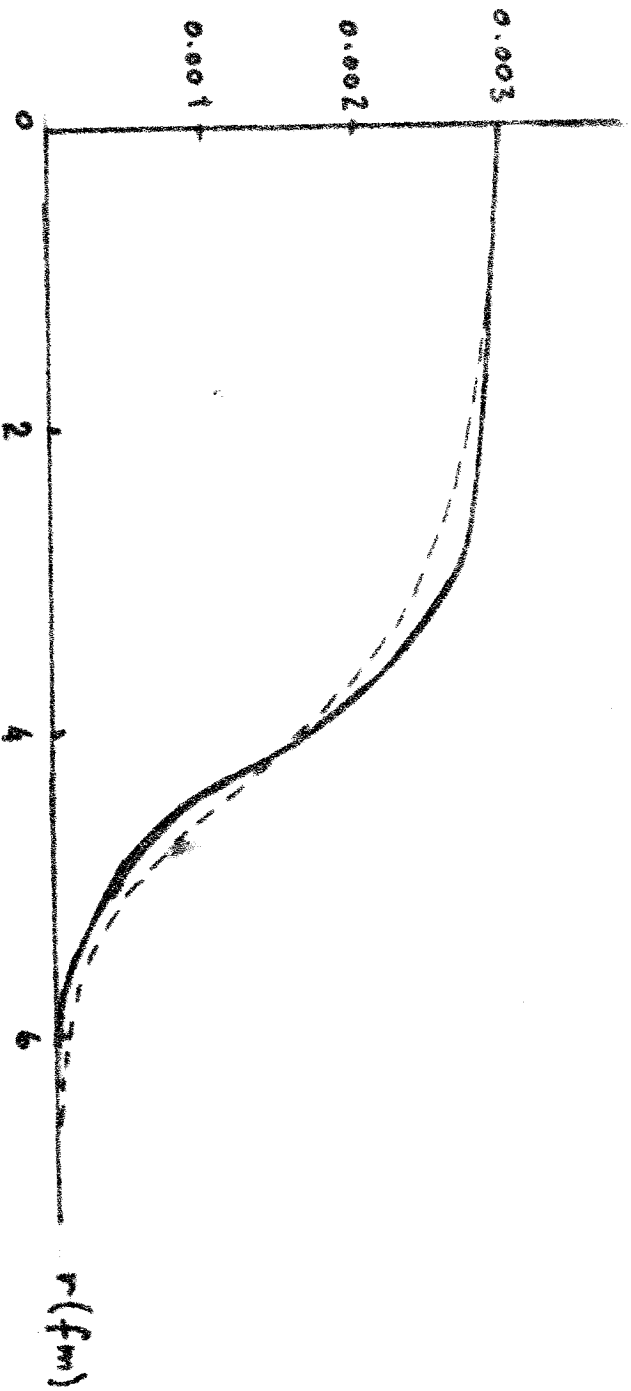


Fig. 5 : Densité nucléaire (—) et densité de charge (---) du modèle IV pour le noyau ^{60}Ni .

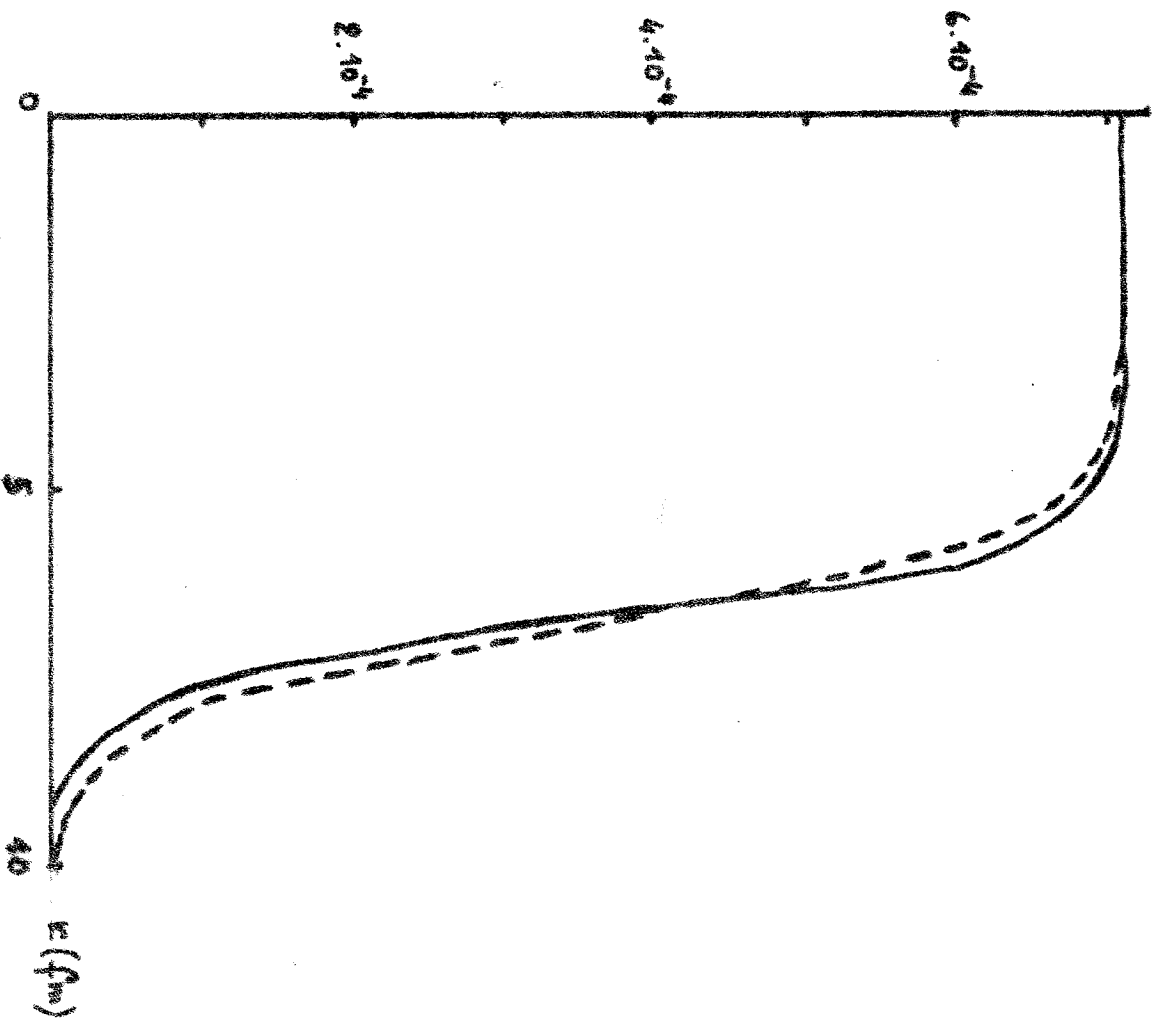


Fig. 6 : Densité nucléaire (—) et densité de charge (---) du modèle IV pour le noyau ^{238}U .

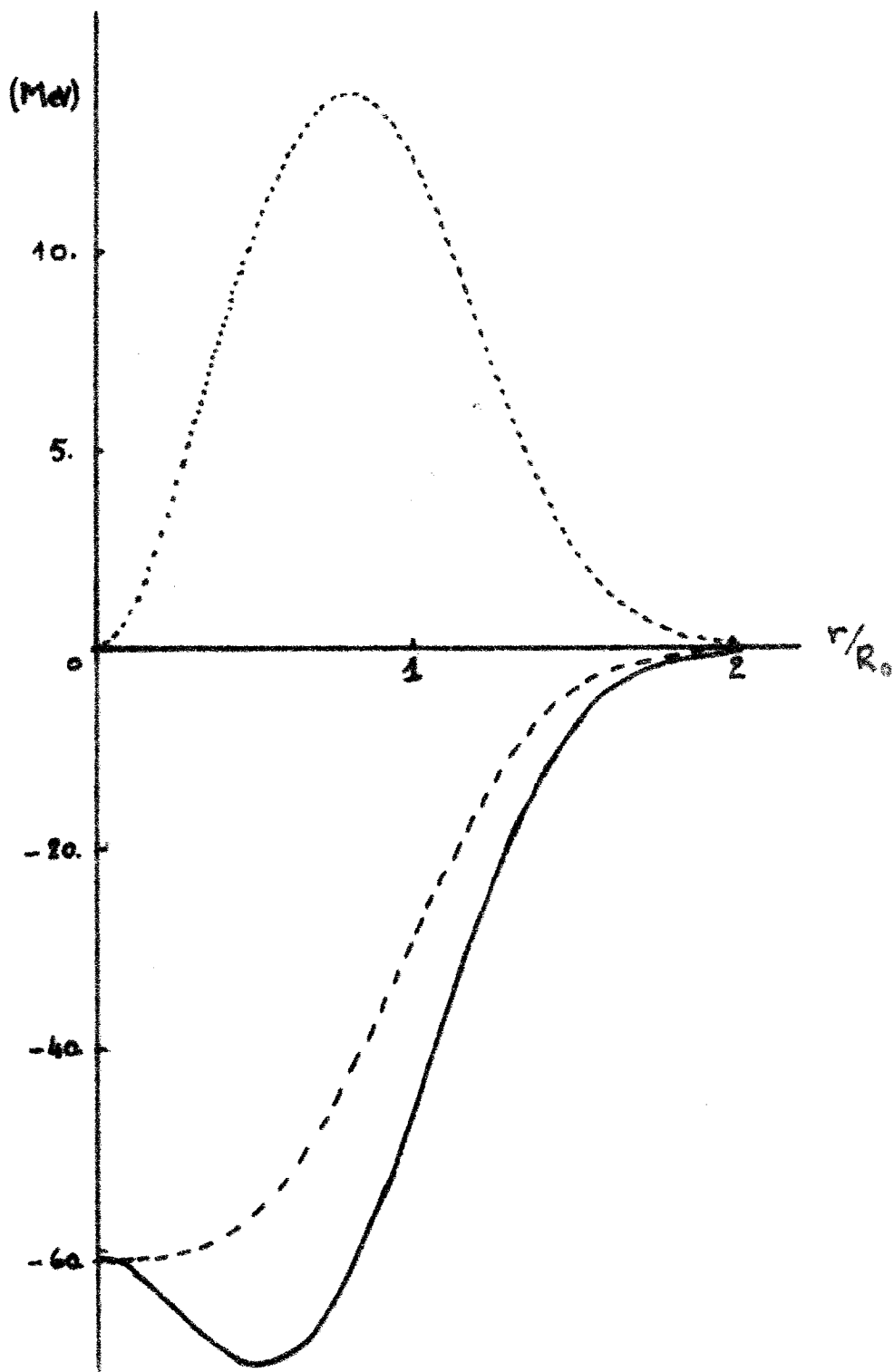


Fig. 7 : Potentiels $v_c(r)$ (---), $v_{sp}(r)$ (—) et $v_{so}(r)$

(...) pour le noyau ^{12}C .

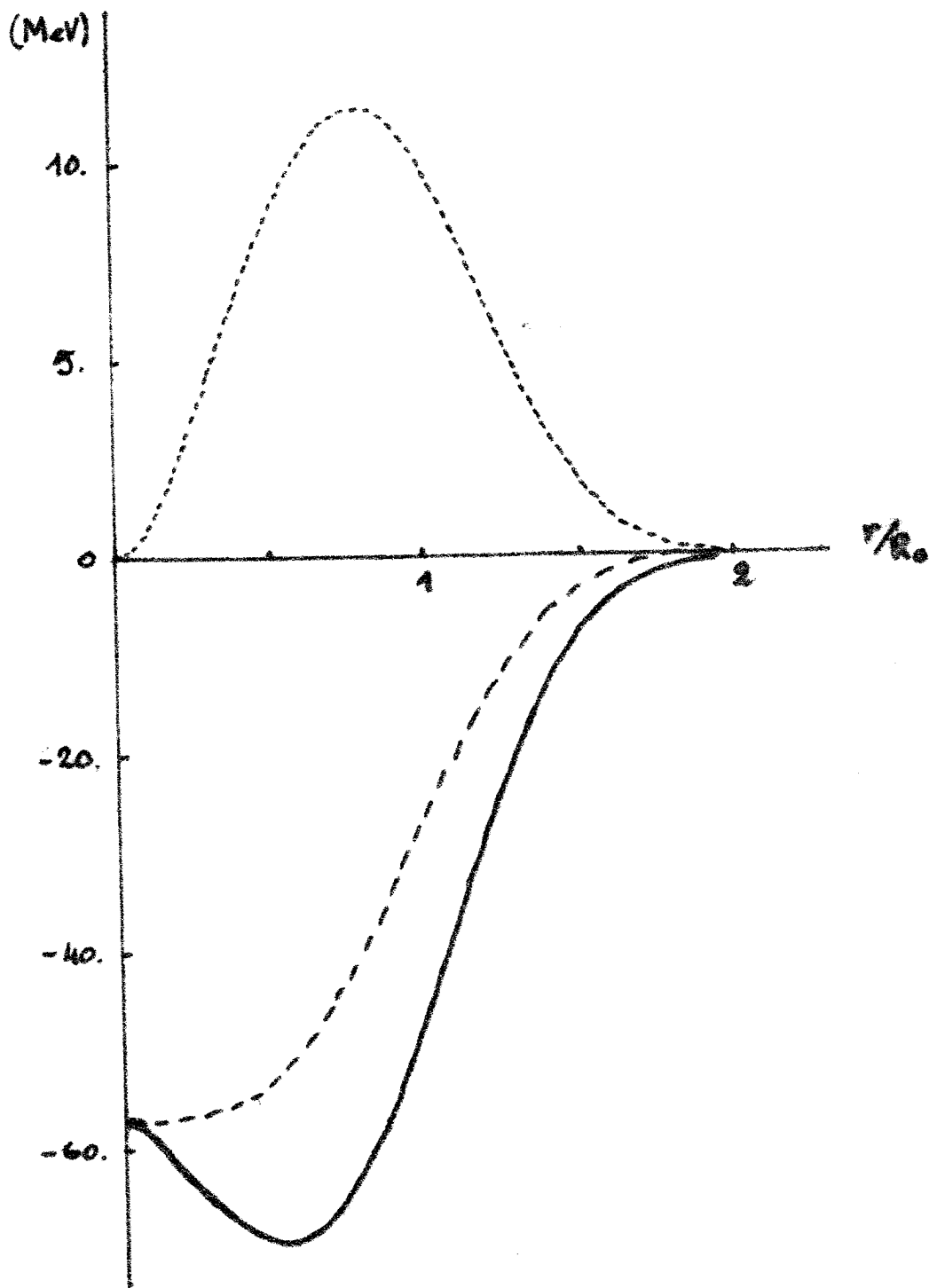


Fig. 8 : Potentiels $v_c(r)$ (---) , $v_{sp}(r)$ (-.-) et $v_{so}(r)$ (...)

pour le noyau ^{16}O .

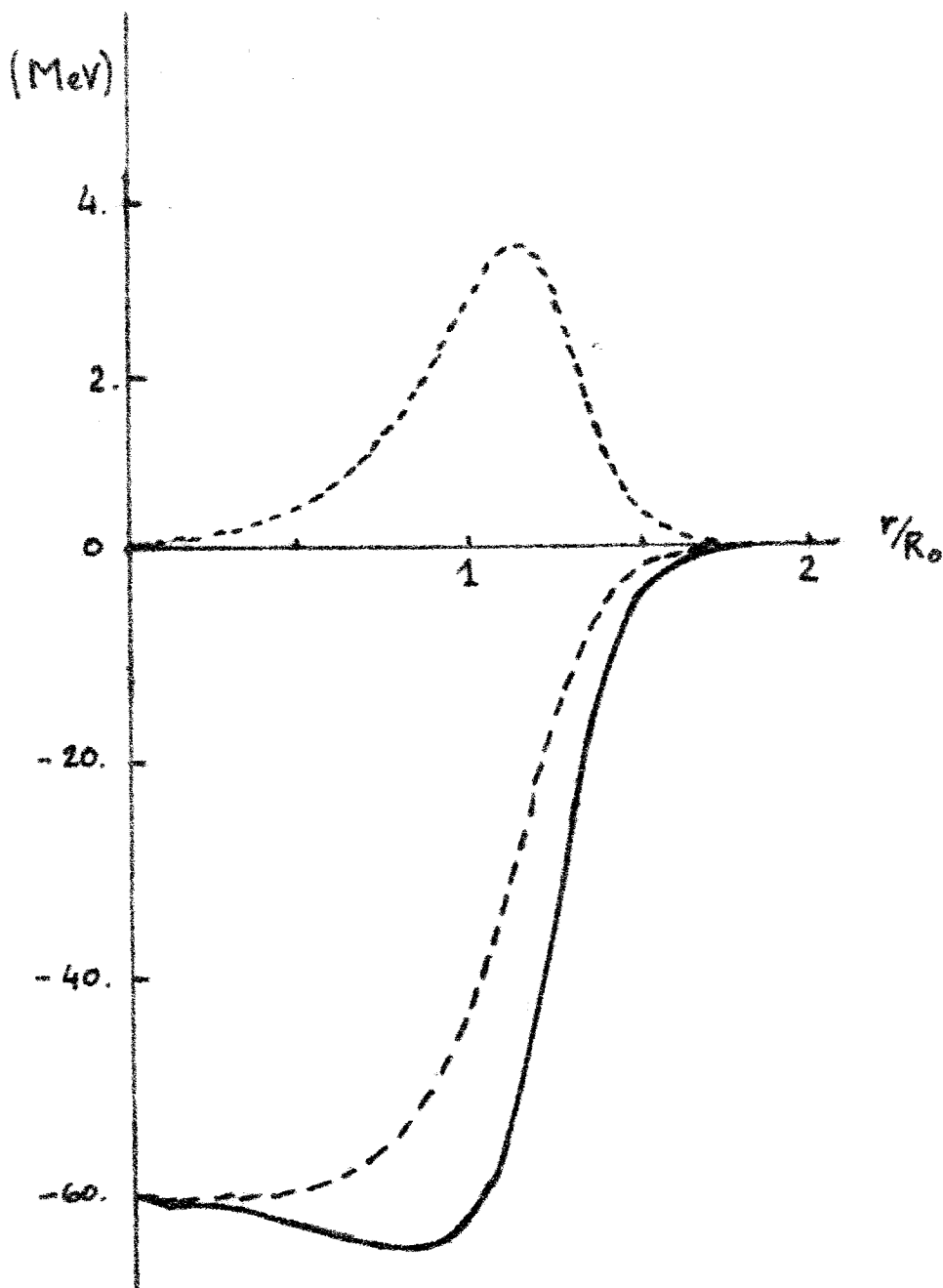


Fig. 9 : Potentiels $v_c(r)$ (---) , $v_{sp}(r)$ (-.-) et $v_{so}(r)$ (—)

pour le noyau ^{208}Pb .

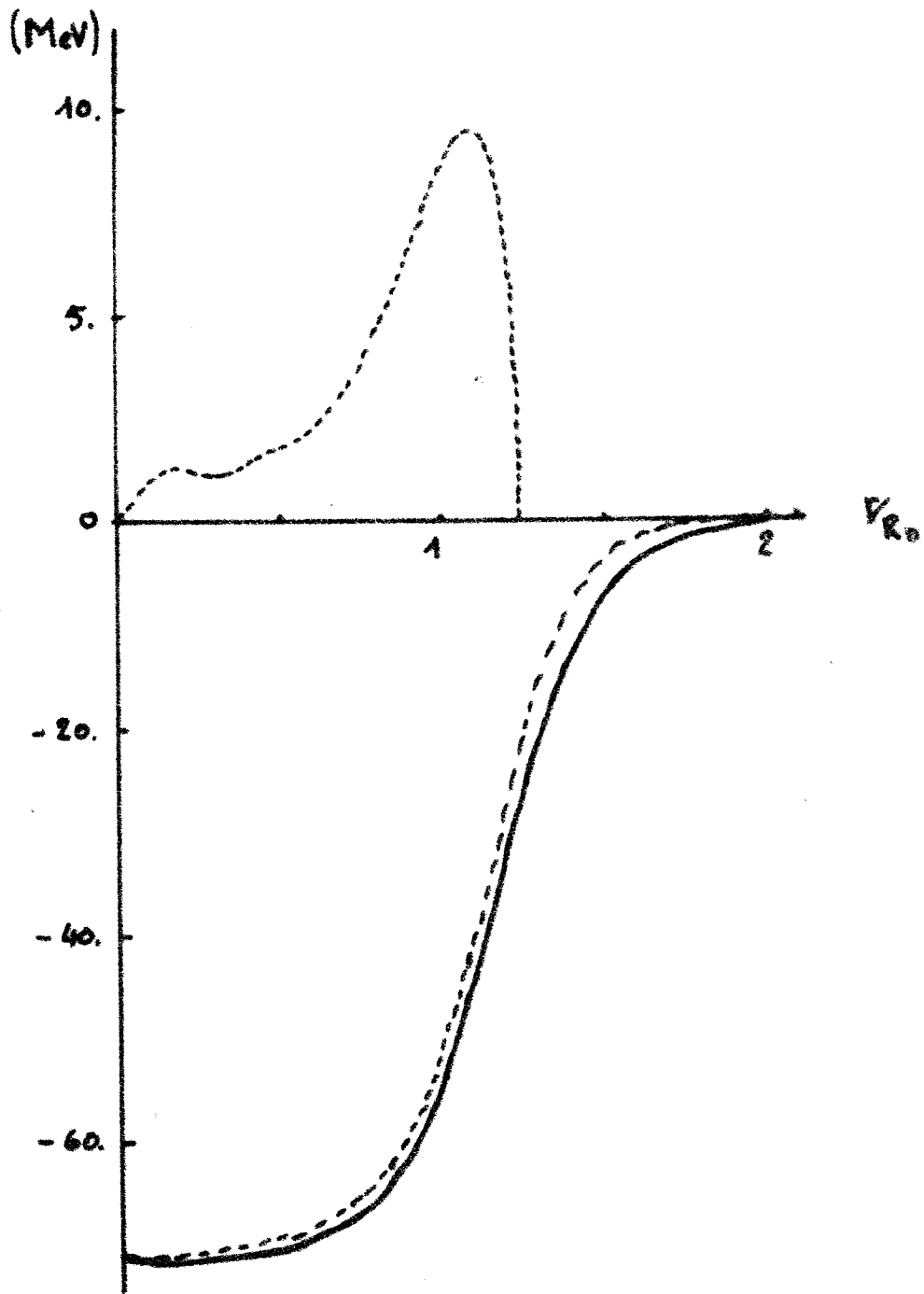


Fig. 40: Potentiels $v_c(r)$ (---) , $v_{sp}(r)$ (-.-) et $v_{so}(r)$

(!!!) pour le noyau ^{40}Ca .

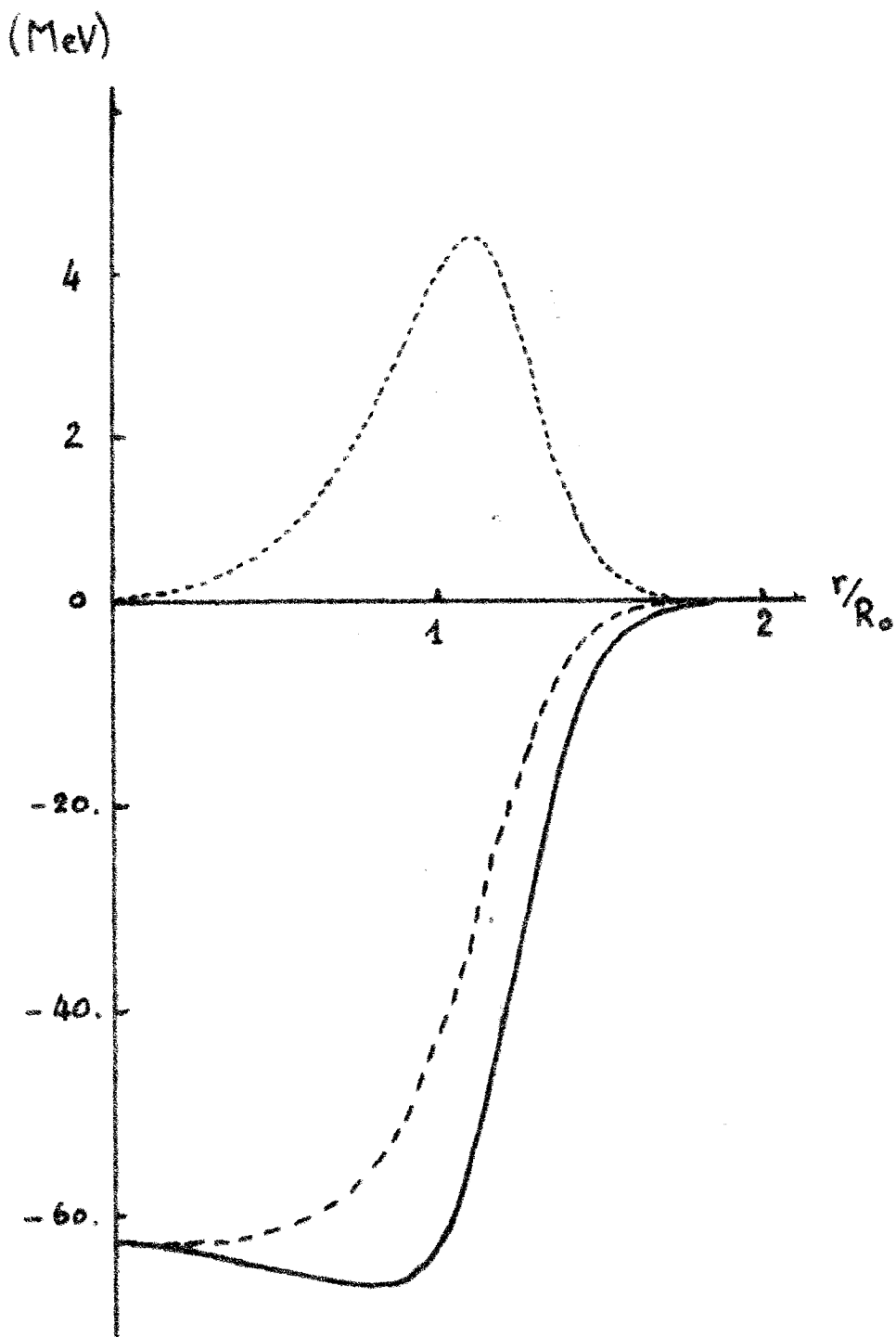


Fig. 11 : Potentiels $v_c(r)$ (---), $v_{sp}(r)$ (—) et $v_{so}(r)$

(...) pour le noyau ^{138}Ba .

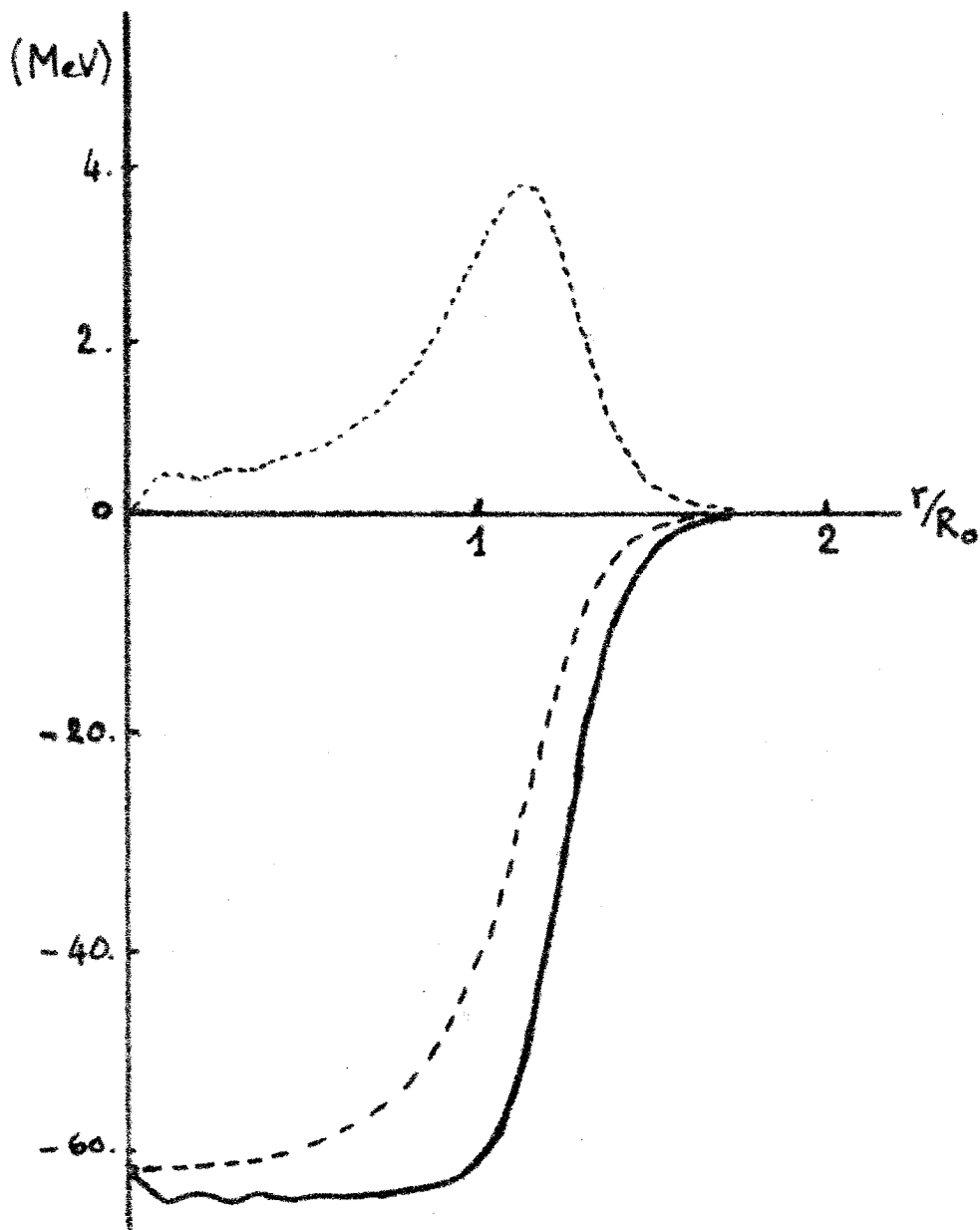


Fig. 12 : Potentiels $v_c(r)$ (---), $v_{sp}(r)$ (—) et $v_{so}(r)$ (...) pour le noyau ^{184}W .

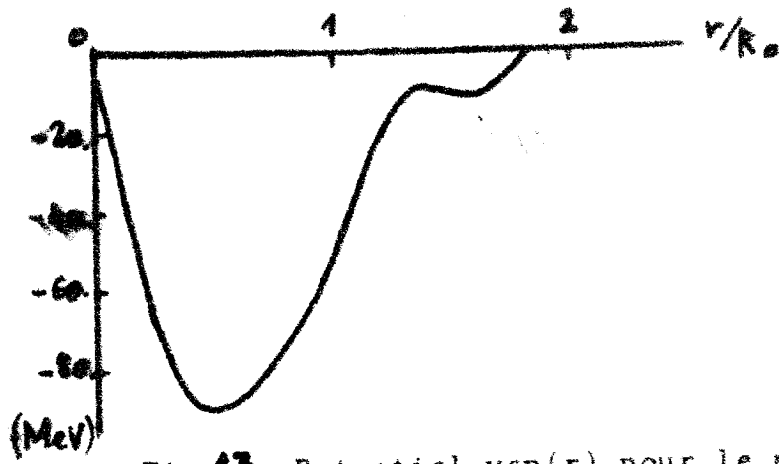


Fig. 43: Potentiel $v_{sp}(r)$ pour le noyau ${}^4\text{He}$.

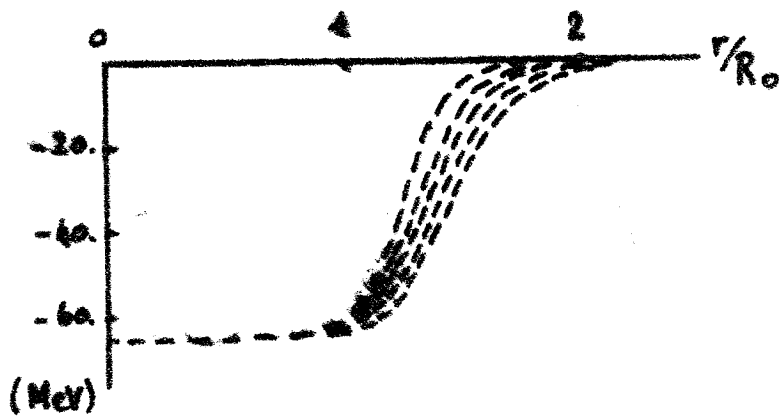


Fig. 44: Potentiel $v_c(r)$ pour le noyau ${}^{238}\text{U}$ tracé pour plusieurs valeurs positives de σ .

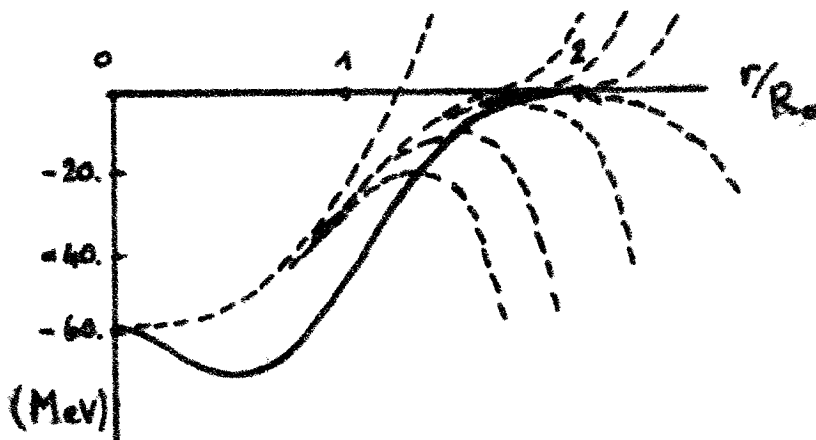


Fig. 45: Phénomène de bifurcation observé pour le noyau ${}^{16}\text{O}$.

BIBLIOGRAPHIE

- (YU.35) H. YUKAWA ; Proc. Phys. Soc. Japan 17 (1935) 48
- (WE.35) C. F. VAN WEIZSAKER ; Z. Physik 96 (1935) 431
- (BO.39) N. BOHR, J. A. WHULER ; Phys. Rev. 56 (1939) 426
- (BL.52) J. M. BLATT, V. F. WESSKOPF ; Theoretical nuclear physics , New York, 1952
- (BO.53) A. R. BODMER ; Proc. Phys. Soc. ; A66 (1953) 1041
- (WO.54) R. WOODS, D. S. SAXON ; Phys. Rev. 95 (1954) 577
- (BR.55) G. E. BROWN, L. R. B. ELTON ; Phil. Mag. 46 (1955) 164
- (CL.56) E. CLEMENTELL, C. VILLI ; Nuovo Cimento 4 (1956) 1207
- (HO.56) R. HOFSTADER ; Rev. Mod. Phys. ; 28 (1956) 214
- (RO.56) A. A. ROSS et al. ; Phys. Rev. 102 (1956) 1613
- (BU.57) F. BUMILLER, R. HOFSTADER ; Bull. Am. Phys. Soc. Ser II 2 (1957) 390
- (HU.58) N. H. HUGENHOLTZ, L. VAN HOVE ; Physica (The Hague) 24 (1958) 363
- (EL.61) L. R. B. ELTON ; Nuclear Sizes, Oxford University Press, 1961
- (DR.63) B. DREMER, M. LEMB ; International conference on elementary particle physics, Siena, 1963
- (BE.67) J. BELLICARD, P. BOVNIN ; Phys. Rev. Lett. ; 19 (1967) 527
- (EL.67) L. R. B. ELTON, A. SWIFT ; Nucl. Phys. A209 (1967) 381
- (FR.67) R. F. FROSH et al. ; Phys. Rev. 160 (1967) 874
- (DA.69) J. DAMGAARD et al. ; Nucl. Phys. A135 (1969) 432
- (HE.69) J. HEISENBERG et al. ; Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 1402
- (BO.69) A. BOHR, B. MOTTELSON, Nuclear Structure, Benjamin, New York, 1969
- (MY.69) W. D. MYERS, W. S. SWIATECKI ; Ann. Phys. 55 (1969) 396
- (AB.70) M. ABRAMOVITZ, I. STEGUN ; Handbook Of Mathematical Fonctions, Dover Publications, New York, 1970

- (AB.70) M. ABRAMOVITZ, I. STEGUN ; Handbook Of Mathematical
Fonctions, Dover Publications, New York, 1970
- (HE.70) J. HEISENBERG et al. Topics In Modern Physics, Adam
Higler, London, 1970
- (GO.71) U. GOTZ et al. Nucl. Phys. A175 (1971) 481
- (TO.71) W. T. TONER et al.; Phys. Letters B 36 (1971) 251
- (FI.72) J. R. FICENEL et al. ; Phys. Letters B 42 (1972) 213
- (DE.73) B. DEMIDOVITCH, I. MARON ; Eléments De Calcul Numérique,
Mir, Moscou, 1973
- (KL.73) F. J. KLINE et al. ; Nucl. Phys. A209 (1973) 381
- (SH.73) W. SHUTZ ; Ph. D Thesis T. H. Damstadt 1973
- (HE.74) J. HEISENBERG ; At. Data Nucl. Data Tables 14 (1974) 479
- (JA.74) C. W. DE JAGER et al. ; At. Data Nucl. Data Tables
14 (1974) 479
- (LI.74) G. C. LI et al. ; Phys. Rev.C 9 (1974) 1861
- (WO.74) H. B. WOHLFART et al. ; At Data Nucl. Data Tables
14 (1974) 479
- (DO.75) T. W. DONNELLY et al. ; Nucl. Phys. A150 (1975)
- (SI.75) A. G. SITENKO, V. K. TARTAKOVSKI ; Lectures On The
Theory Of The Nucleus, Pergaman Press, 1975
- (VA.75) L. VALENTIN ; Physique Subatomique, Harmann, Paris, 1975
- (BA.76) M. BAKHVAROV ; Méthodes Numériques, Mir, Moscou, 1976
- (WY.76) H. W. WYLD ; Mathematical Methods For Physics, Benjamin,
Massachusetts, 1976
- (BA.77) R. C. BARETT, D. F. JACKSON ; Nuclear Sizes And
Structure, Clarendon Press, oxford, 1977
- (SI.78) C. G. SIMON et al. ; Nuclear Structure And Nucleon-nucleon
Interaction In Few Body Systemes And Electromagnetic
Interactions, Springer Verlag, Berlin, 1978

- (VI.83) C. VILLI ; Nuovo Cimento A74 (1983) 37
- (MI.85)a T. A. MINELLI et al. ; Nuovo Cimento A86 (1985) 42
- (MI.85)b T. A. MINELLI et al. ; Nuovo Cimento A90 (1985) 185
- (MI.85)c T. A. MINELLI et al. ; Nuovo Cimento A67 (1985) 261
- (PA.85)a A. PASCOLINI et al. ; Nuovo Cimento A85 (1985) 89
- (PA.85)b M. P. PARODI ; Fonctions A Variables Réelles,
Gauthiers Villars, Paris, 1985
- (MI.86) T. A. MINELLI et al. ; Nuovo Cimento A91 (1986) 106