RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi O.E.B
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
École Doctorale de Mathématiques

N° d'ordre : ....
N° série : ....

MÉMOIRE
Pour l'obtention du grade de
MAGISTER
SPÉCIALITÉ : **Mathématiques**

Présenté par : **SEKHANE CHAFIKA**

Intitulé :

Stabilisation d'un systéme parabolique

Date de soutenance 13/06/2012

devant le jury :

Président	: Marzoug Djebarni	Maître de conférence	Université O.E.B
Rapporteur	: Ayadi Abdelhamid	Professeur	Université O.E.B
Examinateurs	: Abdelkrim Aliouche	Maître de conférence	Université O.E.B
	Mohamed Dalah	Maître de conférence	Université de Constantine

Remerciements

Au début et avant tous,je rends gràce à Dieu tout puissant qui m'a aider à terminer ce travail.

Je veux profiter de cette occasion à présenter mes remerciements à Monsieur AYADI ABDELHAMID, pour le choix du sujet de ce mémoire, et pour les conseils efficaces et les encouragement et encor plus pour tout le temps qu'il m'aconsacrè pour me suivre pendant la rédation de ce travail.

En outre, je reste et resterai forte reconnaissante à Mr MARZOUG DJABRANI qui me fera honneur de présider ce jury, ainsi qu'à Mr ABDELKRIM ALIOUCH et Mr MOHAMED DALAH d'avoir bien voulu accepter d'être examinat eurs de ce jury.

MERCI

Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs voeux et sentiments à toute ma famille, en particulier mes parents et mon mari ABDELKADER et ma fille MARAM.

Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception. Sans oublier mes collègues de travail.

Table des matières

Notations **6**

Introduction **7**

1 Rappels et notions préliminaires **9**

1.1 La théorie des semi-groupes 9

1.2 C_0-semi-groupes avec propriétés spéciales 13

1.2.1 C_0-semi-groupes de contraction 13

1.2.2 C_0-semi-groupes analytiques 14

1.2.3 C_0-semi-groupes différentiables 15

1.2.4 C_0-Semi-groupes compacts 17

1.3 Problème d'évolution 18

2 Contrôlabilité des systèmes évolutifs **20**

2.1 Position du problème 20

2.2 Contrôlabilité 21

2.2.1 Contrôlabilité exacte 21

2.2.2 Contrôlabilité faible 23

2.2.3 Contrôlabilité régionale 24

2.3 Actionneurs 26

3 Stabilité **28**

3.1 Notions de stabilité et stabilisabilité 28

3.1.1 Exemple (l'équation de la chaleur) 31

3.2 Stabilisabilité et Actionneurs 32

3.3 Stabilité régionale 33

3.3.1 Exemple 35
3.4 Stabilisabilité régionale 36
3.4.1 Exemple 37

Bibliographie **39**

Notations

H, U, V, Ω	espace de Hilbert.
ω	un sous-domaine non vide de Ω.
H'	le dual topologique de H.
$L(H)$	l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H.
A	opérateur.
$D(A)$	l'ensemble de définhtion de A.
$\overline{D(A)}$	l'adhérence de l'ensemble $D(A)$.
ImA	l'image de A.
$\ker A$	le noyau de A.
A^{-1}	opérateur inverse de A.
$\|A\| = \sup \|x\|_H \leq \|Ax\|_H$	la norme de A.
$\rho(A)$	l'ensemble résolvante de A.
$R(.; A)$	la résolvante de A.
A^*	adjoint de A.
$\{G(t)\}_{t\geq 0}$	une famille d'opérateurs linéaires bornés sur H.
$L^1([0,T], H)$	l'espace de Lebesgue.
$C^1([0,T], H)$	l'espace des fonctions dérivées et continues.
$W^{1,1}([0,T], H)$	espace de Sobolev.

Introduction

La théorie du contrôle est censée modéliser des problèmes d'ingérnierie et d'économie.

Etant donné un système dynamique régi par une équation d'évolution. Toute étude concernant l'analyse d'un système dynamique est généralement suivie d'une étape de contrôle, qui consiste à détarminer une commande qui permet de conduire le système étudie à un certain objectif .A titre d'exemple, la possibilité d'amener un système d'un état initial à un état désiré, ou à chacun de ses voisinages à un instant fini t, ce qui définit respectivement la notion de contrôlabilité exacte et faible. Dans le cas $t = +\infty$, on obtient la notion de stabilisabilité.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la stabilisation de certains systèmes de type :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tel que A est un opérateur linéaire.

La stabilité est l'un des aspects les plus important de la théorie du système. La théorie fondamentale de stabilité établie par Lyapunov est intensivement développée pour les systèmes de dimension finie. Ici nous sommes intéressésn par la stabilité asymptotique d'une classe de dimension infinie des systèmes linéaires, en utilisant la resprésentation puissante de semi-groupe.

Dans ce travail, nous considérons le problème de la stabilisation qui consiste à étudier le comportement asymptotique d'un système distribué sur le domaine d'évolution Ω.

Classiquement, tout système considéré stable ou bien instable. Cependant il existe des systèmes qui sont instables sur leurs domaines géométriques Ω, mais ne se comportent pas de la même mainère sur Ω.

En effet, ils peuvent être stables sur certaines régions ω de Ω. De plus, on peut avoir besoin de stabiliser un système ou d'améliorer son degré de stabilité uniquement sur une partie de son domaine d'évolution, ce qui demandera un coût moindre.

Nous donnons maintenant un aperçu des contenus des chapitres.

Le premier chapitre concerne quelques rappels sur la théorie des semi-groupes. Nous rappelons des résultats sur le comportement asymptotiques des semi-groupes linéaires.

Le deuxième chapitre est consacré à sur les principes généraux de la contrôlabilité des systèmes distribués.

Enfin le troisième chapitre est consacré à l'étude de la notion de stabilisation des systèmes distribués. Ensuit nous introduisons la notion de la stabilisation régionale pour les systèmes linéaires. Nous présentons des exemples de motivation, ensuite nous donnons les caractérisations des contrôles résalisant la stabilisation régionale, et maintenant l'état du système borné dans le temps et celui qui minimise de performance.

Chapitre 1

Rappels et notions préliminaires

1.1 La théorie des semi-groupes

Définition 1.1

Soit H un espace de Hillbert. Une famille d'opérateurs lineaires bornés $S(t) : H \longrightarrow H$ dépendant du paramètre $t \geq 0$ forment un semi-groupe si :

$$\begin{cases} S(0) = I_H \\ \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1) . S(t_2) \qquad \forall t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit fortement continu à l'orgine, ou de classe C_0 si de plus $\forall x \in H$, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t) x = x$.

Si $S(t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe dans H, alors l'opérateure adjoint $S^*(t)$ et aussi un C_0-semi-groupe dans H.

Définition 1.2

On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$D(A) = \left\{ x \in H \ / \ \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{S(t) x - x}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{S(t) x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

Remarque 1.1

1/ Il est clair, que le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est un opérateur linéaire.

2/ Le générateur infinitésimal de $(S^*(t))_{t\geq 0}$ est $(A^*, D(A^*))$.

Proposition 1.1 [11]

Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupe dans H et A son générateur infinitésimal .

Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$, et on a l'égalité : $S(t)\ Ax = AS(t)x \quad \forall t \geq 0.$

Remarque 1.2

On voit que $S(t)D(A) \subseteq D(A) \qquad \forall t \geq 0.$

Théorème 1.1 [6]

Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupe sur H de générateur infinitésimal A, alors

1/ $\forall x \in D(A), S(.)x \in C^1([0,\infty[\,; D(A))$, et on a : $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$ $\forall t \geq 0.$

2/ $S(t)x - x =_0^t S(s)\ Ax\ ds \qquad \forall x \in D(A).$

3/ $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}{}_0^t S(s)x\ dx = x \qquad \forall x \in H.$

4/ $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{h}{}_t^{t+h} S(s)x\ ds = S(t)x \qquad \forall x \in H.$

5/ ${}_0^t S(s)x\ ds \in D(A)$, et on a l'égalité $A_0^t S(s)x\ ds = S(t)x - x \quad \forall t \geq 0.$

Théorème 1.2 [6]

Soit $S(t)$ C_0-semi-groupe sur H de générateur infinitésimal A, alors :

1/ $\overline{D(A)} = H.$

2/ A est un opérateur fermé.

Théorème 1.3(L'unicité de l'engendrement) [6]

Soient deux C_0-semi-groupes $T(t), S(t)$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A, alors :

$T(t) = S(t) \quad \forall t \geq 0.$

Lemme 1.1(De la croissance exponentielle du semi-groupe)

Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupe. Alors $\exists M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.1}$$

Nous noterons par $S\varsigma(M, \omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(H)$, pour lesqueles, il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Preuve

Considrons le compact $[0,1]$, et comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu alors l'application $t \longrightarrow S(t)x$ est continue. Donc l'image de $[0,1]$ par cette application est compact, alors :$\exists M_x$ tel que :

$$\|S(t)x\|_H \leq M_x, \qquad \forall t \in [0,1].$$

D'après le théorème de Banach-Steinhauss $\exists M$ tel que :

$$\|S(t)\| \leq M, \qquad \forall t \in [0,1].$$

On remarque que la constante $M \geq 1, (M \geq \|S(0)\| = 1)$.

maintenant si $t \notin [0,1]$, on écrit $t = n + \sigma$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in [0,1[$ donc :

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n+\sigma) \\ &= S(n)S(\sigma) \\ &= (S(1))^n S(\sigma). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &\leq \|S(1)\|^n \|S(\sigma)\| \\ &\leq M^n M \\ &= M \ \exp\ n\ \log M \\ &= M \ \exp\ n\omega \quad avec\ \omega = \log\ M \\ &\leq M\ exp\ t\omega. \end{aligned}$$

Remarque 1.3

Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu à l'orgine vérfiant la majoration $(1,1)$, alors il est fortement continu.

Etude de la croissance de la résolvante

Si λ une valeur telle que $(A-\lambda t)$ soit inversible, alors on dira que λ est une valeur régulière et l'ensemble des régulières sera noté $\rho(A)$.

Pour $\lambda \in \rho(A)$, on pose $R(\lambda; A)x = (\lambda I - A)^{-1}x$ et on montre que

$$R(\lambda; A)x =_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) x \; dt.$$

Si $\rho(A)$ est un ensemble ouvert, alors on a :

$$\frac{d^n}{dx^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda; A)x \qquad \text{pour } \lambda \in \rho(A).$$

Théorème 1.4(**HILLE YOSIDA**) [6]

Dans ce paragraphe, nous présentons un résultat très important encernant les semi-groupes de clase C_0, il s'agit du célèbre théorème de HILLE YOSIDA, qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0- semi-groupes.

Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M, \omega)$ si et seulement si

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = H$,

ii) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$,on a :

$$\|R^n(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}.$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 1.2 [11]

On pose $A_\lambda x = \lambda AR(\lambda; A)(x)$,On a :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \qquad \forall x \in D(A) \tag{1.2}$$

Lemme 1.3 [11]

Soiet A et B deux opérateurs linéaires fermés, $D(A) \subset D(B)$ et $\rho(A)\rho(B) = \emptyset$, Alors $A = B$.

1.2 C_0−semi-groupes avec propriétés spéciales

1.2.1 C_0−semi-groupes de contraction

Dans la suite, nous présentons quelques problèmes concernant la classe du C_0−semi-groupes $(S(t))_{t\geq 0}$ vérifiant la propriété $\|S(t)\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.3

On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0−semi-groupe de contraction sur H, si $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(1,0)$.

Lemme 1.4 [6]

Soit $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M,\omega)$, alors l'application $|||.||| : H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $|||x||| = \underset{t\geq 0}{Sup} \exp(-\omega t)\|S(t)x\|$ $\forall x \in H$ est une norme sur H équivalente avec la norme initiale $\|.\|$.

Théorème1.5 [11]

Soient $(T(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M;\omega)$, de générateur infinitésimal A, et $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ $\forall t \geq 0$ alors on a :

i) $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(1,0)$.

ii) Le C_0-Semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur $B = A - \omega I$.

Pour les C_0-semi-groupes de contraction, on peut formuler la version suivante du théorème de HILLE YOSIDA.

Théorème1.6 [6]

Un opérateur linéaire, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(0,1)$ si et seulement si ;

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = H$,

ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_0$,on a :

$$\|R^n(\lambda;A)\| \leq \frac{1}{(R_e\lambda)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemble

Soit $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, et soit Δ l'opérateur de Laplace de domaine

$$D(A) = \left\{V : V \in L^2(\mathbb{R}^n), \Delta V \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Alors, Δ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Une autre caractérisation très intéressante des C_0-semi-groupe de contraction est donnée par le fameu théorème du Lumer-Phillps,dans lequel interviennent les opérateurs m-dissipatifs.

Définition 1.4

Soit H un espace de Hilbert réel,soit A un opérateur linéaire dans H.On dit que :

1) A est dissipatif si : $\langle Ax, x\rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A)$.

2) A est maximal si :$Im(I-A) = H$.

Lorsque A est dissipatif, on dit aussi souvent que $-A$ est montone ou accrétif.

Théorème1.7(Lumer-phills) [6]

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, tel que $\overline{D(A)} = H$.

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)_{t\geq 0} \in S\varsigma(1, 0)$, si et seulement si, A est un opérateur m-dissipatif.

1.2.2 C_0-semi-groupes analytiques

Par la suite, nous étudions la possibilité d'étendre l'intervalle $]0, \infty[$, à une région du plan complexe, sans abandonner les propriétés des C_0-semi-groupes.Nous désignerons par Δ l'ensemble $\{z \in Z \ /Rez > 0 \text{ et } \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$.

Définition 1.5

On appelle C_0-semi-groupe analytique, une famille $(S(x))_{x\in\Delta} \subset L(H)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $S(0) = I$.

ii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1) S(z_2) \quad ,\forall z_1, z_2 \in \Delta$.

iii) $\underset{x\longrightarrow 0}{Lim} S(z) x = x \ ,\forall x \in H \ ,z \in \Delta$.

iν) L'application :$z \in \Delta \longrightarrow S(z) \in L(H)$ est analytique dans le secteur Δ.

Théorème1.8 [11]

Soient $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M, 0)$, et A son génèrateur infinitésimal tel que $0 \in \rho(A)$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $\delta > 0$ tel que $(S(t))_{t\geq 0}$ peut être étendu à un semi-groupe analytique dans le secteur :

$$\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{Z}/Rez > 0 \text{ et } |\arg z| < \delta\},$$

et $(S(t))_{t\in\Delta_\delta}$ est uniformément borné dans tout sous secteur $\Delta_{\delta'} \subset \Delta_\delta$ où $\delta' \in]0, \delta[$.

ii) Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $r > 0$ et tout $\eta \neq 0$ on ait

$$\|R(r + i\eta; A)\| \leq \frac{c}{|\eta|}.$$

iii) Il existe $\sigma \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $k > 1$ tel que :

$$\rho(A) \supset \Sigma_\sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \sigma\right\} \cup \{0\},$$

et

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{k}{|\lambda|} \quad \forall\lambda \in \Sigma_\sigma - \{0\}.$$

iν) L'application : $t \in]0, \infty[\longrightarrow S(t) \in L(H)$ est differentiable, et il existe une constante $L > 0$ tel que :

$$\|AS(t)\| \leq \frac{L}{t} \quad \forall t > 0.$$

1.2.3 C_0−semi-groupes différentiables

Par la suite, nous étudirons les propriétés des C_0−semi-groupes pour lesquells l'application $t \in]0, \infty[\longrightarrow S(t)x \in H$ est différentiable, $\forall x \in H$.

Définition 1.6

On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0−semi-groupe différentiable, et notons $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M, \omega)$, si l'application : $t \in]0, \infty[\longrightarrow S(t)x \in H$ est différentiable $\forall x \in H$.

Théorème 1.9 [6]

Soient $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M, \omega)$,

ii) $ImS(t) \subset D(A), \forall t > 0$.

Proposition 1.2 [6]

Soit $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M, \omega)$ .Alors l'application $t \in]0, \infty[\longrightarrow S(t) \in L(H)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 1.10 [11]

Soit $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M,\omega)$, et A son générateur infinitésimal alors on a :

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in H$,on a $S(t)x \in D(A^n)$ et $A^n S(t)x = \left[AS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x$ $\forall t > 0$.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application : $t \in]0,\infty[\longrightarrow S(t) : H \longrightarrow D(A^n)$ est n fois différentiable pour la topologie de convergence uniforme, et

$S^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} S(t) = A^n S(t) \in L(H) \quad \forall t > 0$

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $t \in]0,\infty[\longrightarrow S^{(n)}(t) \in L(H)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Remarque 1.4

Si $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M,\omega)$, alors l'application $t \in]0,\infty[\longrightarrow S(t) \in L(H)$ est de classe $C^\infty(]0,\infty[)$.

Remarque 1.5

Si $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M,\omega)$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$S^{(t)} = A^n S(t) = \left[AS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \qquad \forall t > 0$$

Nous finissons cette section avec la théorème spectral pour les C_0-semi-groupes différentiables.

Soit $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma(M,\omega)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,et tout $t > 0$ nous défininissans l'opérateur linéaire borné par :

$$\begin{aligned} B_\lambda(t) \quad &: \quad H \longrightarrow H \\ B_\lambda(t)x \quad &= \quad {}_0^t \exp[\lambda(t-s)]\, S(s)\, x ds \ . \end{aligned}$$

Si le C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est differentiable, on peut montrer le résultat suivant :

Lemme 1.5[11]

Soit $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M;\omega)$ et A son générateur infinitésimal alors on a :

i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $t > 0$, l'opérateur $B_\lambda(t) \subset L(H)$ est indéfiniment dérivable, et

$$B_\lambda^{(n)} = \lambda^{(n)} \left(B_\lambda(t) +_{i=0}^{n} \frac{S^{(i)}(t)}{\lambda^{i+1}}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \ .$$

Théorème 1.11 [6]

Soit $(S(t))_{t\geq 0} \in S\varsigma D(M,\omega)$ et A son génèrateur infinitésimal, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$[\exp(t\sigma(A))]^n = \{\lambda^n \exp(\lambda t) / \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma\left(S^{(n)}(t)\right) \quad \forall t > 0.$

1.2.4 C_0-Semi-groupes compacts

Définition 1.7

On appelle C_0-semi-groupe compact pour tout $t < t_0$, une famille $(S(t))_{t>0}$ tel que pour tout $t > t_0$, $S(t)$ est un opérateur compact.

On dit que $(S(t))_{t>0}$ est compact s'il est compact pour tout $t > 0$.

Remarque 1.6

On remarque que, si $S(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors l'identité est compact et H est du dimension finite

Théorème 1.12 [6]

Soit $S(t)_{t>0}$ un C_0-semi-groupe, si $S(t)$ est compact pour $t > t_0$, alors $S(t)$ est continu parapport à la topologie d'opérateurs uniformes pour $t > t_0$.

Théorème 1.13 [6]

Soit $S(t)$ un semi-groupe et A son générateur infinitésimal .

$S(t)$ est compact si et seulement si $S(t)$ est continu dans la topologie d'opérateur uniforme pour $t > 0$ et $R(\lambda; A)$ est compact pour $\lambda \in \rho(A)$.

Conséquence 1.1[6]

Soit $S(t)$ un semi-group, et A son générateur infinitésimal.

Si $R(\lambda; A)$ est compact pour $\lambda \in \rho(A)$, et $S(t)$ est continu dans la topologie d'opérateur uniforme pour $t > t_0$, alors $S(t)$ est compact pour $t > t_0$.

Conséquence 1.2 [6]

Soit $S(t)$ un semi-groupe uniformément continu.

$S(t)$ est compact si et seulement si $R(\lambda; A)$ est compact pour chaque $\lambda \in \rho(A)$.

1.3 Problème d'évolution

Données :

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $|.|$ (resp $\|.\|$) la norme dans H (resp$V$), et par $(.,.)$ (resp$((.,.))$) les produits scalaires correspondants.

$W(0,T) = \{f$

Si l'on suppose que (1.2) est verifiée, alors le problème (1.3) admet une solution unique dans $W(0,T)$,en plus l'application

$$(f, y_0) \longrightarrow y$$

est continue de $L^2(0,T;V) \times H$ dans $W(0,T)$.

Lemme 1.6 [12]

Toute fonction $y \in W(0,T)$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T]$ dans H, de plus on a

$W(0,T) \subset C^0([0,T];H)$ où $C^0([0,T];H)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H.

Remarques 1.7

1/ Comme $W(0,T) \subset C^0([0,T];H)$, alors la condition y_0 a un sens.

Pour y_0 donnée dans H, le problème (1.4) admet une solution faible unique donnée par :

$$y(t) = S(t)\, y_0 +_0^t S(t-s)\, f(s)\, ds \tag{1.3}$$

où$(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe engendré par l'opérateur A défini sur H.

2/ Soit A^* l'adjoint de A, alors le problème :

Trouvez $p \in W(0,T)$ telle que :

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dt} + A^{*}p = f \text{ dans } [0,T], \\ P(T) \in H, f \in L^{2}(0,T;V^{*}). \end{cases}$$

a une solution unique.

Régularité de la solution du problème d'évolution parabolique

Théorème 1.15 [12]

On suppose que (1.2) est verifiée, et que $f \in L^{2}(0,T;H)$, $y_0 \in D(A)$, alors la solution du problème (1.3) donnée par (1.4) vérifie en plus :

$$\begin{cases} y \in C^{0}([0,T];D(A)), \\ y' \in L^{2}(0,T;V)\, C^{0}(0,T;H). \end{cases}$$

Théorème 1.16[12]

Sous les hypothèses du théorème (1.13) et on suppose en plus que :

1/ La forme bilinéare a(.,.) est symétrique.

2/ L'injection canonique de V dans H est compacte.

3/$f \in L^{2}(0,T;H)$, $y_0 \in V$.

Alors la solution du problème (1.4) donnée par (1.5) vérifiée aussi :

$$\begin{cases} y \in L^{2}(0,T;D(A))\, C^{0}(0,T;V), \\ y' \in L^{2}(0,T;H) \quad . \end{cases}$$

Remarques 1.8

1/ L'adjoint A^{*} de A, engendre le semi-groupe $(S^{*}(t))_{t\geq 0}$ et l'adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual H^{*}de H

Si $D(A)$ est dene dans H, alors $D(A^{*})$ est dense dans H^{*} .

2/ Sous les hypothèses (1), (3) du théorème 1.16, alors il existe un système orthonormé de vecteurs propres (φ_n) de A associés aux valeurs propres λ_n, et le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ engendré par A s'exprime, pour tout y_0 de H, par :

$$S(t)\, y_0 =_n e^{-\lambda_n t} \langle y_0, \varphi_n \rangle \varphi_n \ .$$

Si y est une solution du problème (1.3), elle est donnée par :

$$y(t) =_{i\geq 0} \left\{ (y_0, \varphi_i) \exp(-\lambda_i t) +_0^t (f(s), \varphi_i) \exp(-\lambda_i (t-s))\, ds \right\} \varphi_i \ .$$

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes évolutifs

Dans ce chapitre, nous donnons les principes généraux qui concernent l'analyse des systèmes distribués, plus précisément nous introduisons les notion de contrôlabilité exacte, faible et régionale et celle d'actionneurs.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, qui représente le domaine géométrique du système (2.1), ($n = 1, 2, 3$ pour les application) et soit T ¿0

On suppose que la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est assez régulière.

On considére les systèmes décrits par l'équation différentielle opérationnelle.

Trouver $y(t)$ tel que :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) & \text{sur } Q = \Omega \times]0, T[\,, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \quad . \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$u \in L^2(0, T; U)$ la fonction u dite contrôle, y l'état du système, l'état initial

$B \in L(U, H)$ et $A \in L(V, H)$.

Hypothèses :

Dans l'étude du système (2.1), on fait appel aux hypothèses suivantes :

H$_1$) H, U sont des espaces de Hilbert séparables désignant respectivement l'espace d'état de contrôle.

H$_2$) $u \in L^2\ (0, T; U)$, $B \in L(U, V)$.

H_3) A est auto-adjoint à résolvante compacte et engendre un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur H.

Théorème 2.1[2]

Sous les hypothèses ci dessus, (2.1) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0,T]$ donnée par :

$$y(t) = S(t)\, y_0 +_0^t S(t-s)\, Bu(s)\, ds\ . \tag{2.2}$$

2.2 Contrôlabilité

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis (2.1) de dimension infinie, l'état du système ne peut pas être atteint en générale.C'est le cas par exemple où l'opérateur A n'est pas borné et que $D(A)$ peut être différent de$H$, mais les éléments qui ne sont pas atteints, peuvent être approchés, ceci nous amène à introduire divers degrés de contrôlabilité.

On considére l'opérateur $H_t : L^2(0,T;U) \longrightarrow H$ défini par :

$$H_t u =_0^t S(t-s)\, Bu(s)\, ds \tag{2.3}$$

2.2.1 Contrôlabilité exacte

Le système considéré est (2.1) et H désigne l'espace d'état, $T > 0$.

Définition 2.1

Le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans H sur $[0,T]$ si :

$$\forall y_d \in H, \exists u \in L^2(0,T;U) \quad \text{tel que :} y_u(T) = yd\ .$$

Remarque 2.1

L'opérateur H_T étant défini en (2.3), la définition précédente équivaut à :

$$Im(H_T) = H.$$

Définition 2.2

Soit H_1 un sous espece vectoriel de H ,le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans H_1 si :

$$\forall y_d \in H_1, \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } y_u(T) = y_d.$$

Remarque 2.2

La définition précédente équivaut à : $H_1 \subset ImH_T$

Caractérisation

De la définition 2.1 résulte les propriétés de caractérisation suivantes :

Proposition 2.1[2]

Le système (2.1) est exactement contrôlable sur $[0,T]$ si et seulment si $\exists\gamma > 0$ tel que

$$\|y^*\|_{H^*} \leq \gamma \|B^* S^*(.)\, y^*\|_{L^2(0,T;U)},$$

pour tout y $(S^*(t))^*$ dans H^*,

où$_{t\geq 0}$ est le semi-groupe adjoint de semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, et elle découle du résultat plus générale suivant :

Lemme 2.1

Soient E, F et G des espaces de Banach réflexifs et $f \in L(E,G)$, $g \in L(F,G)$, alors les propriétés suivantes sont équivalantes :

1) $Imf \subset Img$,

2) $\exists c > 0$ tel que $\|f^* y^*\|_{E^*} \leq c \|g^* y^*\|_{F^*}, \forall y^* \in G^*$.

La propriété de caractérisation donnée ci-dessus est intéressante dans la mesure où oramène l'exacte contrôlabilité à une inégalité assez facile à expliciter pour un système (2.1) donné.

Il ya des cas où certaines hypothèses sur les paramètres du système permettent directement de savoir si le système est exactement contrôlable ou non, ainsi nous avons :

Proposition 2.2[2]

L'opérateur H_t étant défini en (2.3) .Si pour tout $t \geq 0, H_t$ est compact alors le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable.

Corollaire 2.1 :

Si $(S(t))_{t>0}$ est compact pour tout $t > 0$, alors le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable.

Corollaire 2.2

Si B est compact, alors le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable.

Danc le système (2.1) n'est pas être exactement contrôlable, au sens de la définition 2.1, si B ou $(S(t))_{t>0}$ sont compacts.

2.2.2 Contrôlabilité faible

Définition 2.3

Le système (2.1) est dit faiblement contrôlable dans H sur $[0, T]$ si pour tout y_d dans H , $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u \in L^2(0, T; U)$ tel que :

$$\|y_u(T) - y_d\|_H \leq \varepsilon \ .$$

Remarque 2.3

Nous restreigons à un sous espace vectoriel H_1 de H pour obtenir l'exacte contrôlabilité sur H_1

Caractérisation

Pour les systèmes distribués, la notion de faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée. Nous pouvons la caractériser par la :

Proposition 2.3[13]

Il y a une équivalence entre :

a) Le système (2.1) est faiblement contrôlable sur $[0, T]$,

b) $\overline{Im\left(H_T\right)} = H$,

c) $Ker\left(H_T^*\right) = Ker\left(H^* H_T\right) = \{0\}$,

d) $\{\langle y, S\left(s\right) Bv\rangle_H = 0, \forall s \in [0,T]$ et $\forall v \in U\} \Rightarrow y = 0$,

e) Si le semi-groupe $\left(S\left(t\right)\right)_{t>0}$ est analytique, alors on a :

$\overline{\underset{n\in N}{\cup} Im\left(A^n S\left(s\right) B\right)} = H \quad ,\forall s \in]0,T]$.

2.2.3 Contrôlabilité régionale

Dans les applications rare les systèmes dynamiques qui sont contrôlable sur tout le domaine, d'où la necessité d'étudier ce concept uniquement sur une partie du domaine.

Pour cela, on définit la notion de la contrôlabilité régionale.

Pour la contrôlabilité régionale on veut avoir que l'état du système à l'instant T vérifie une propriété désirée sur une partie du domaine.

Soit $y_d \in L^2\left(\omega\right)$ un état désiré donné où ω est une partie de Ω, on définit l'opérateur :

$$\chi_\omega : L^2\left(\Omega\right) \longrightarrow L^2\left(\omega\right) \ ,$$

où $\chi_\omega y = y\diagdown_\omega$, et l'adjoint donné par :

$$\left(\chi_\omega^* y\right)\left(x\right) = \begin{cases} y\left(x\right) & x \in \omega \ , \\ 0 \quad x \in \Omega\diagdown_\omega \ . \end{cases}$$

La contrôlabilité régionale est définie comme suit :

Définition 2.4

Le système (2.1) est dit exactement régionalement contrôlable sur ω si :

$$\forall y_d \in L^2\left(\omega\right), \exists u \in U \ \text{ tel que :} \chi_\omega y_u\left(T\right) = y_d. \tag{2.4}$$

Définition 2.5

Le système (2.1) est dit faiblement régionalement contrôlable sur ω si :

$$\forall y_d \in L^2\left(\omega\right), \forall \varepsilon > 0, \exists u \in U \ \text{ tel que : } \left\|\chi_\omega y_u\left(T\right) - y_d\right\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \ . \tag{2.5}$$

Le système sera dit aussi $\omega-$exactement (resp.faiblement) contrôlable.

Caractérisations[14]

On considère $H_t : L^2(0,T,U) \longrightarrow L^2(\omega)$, l'opérateur défini par :

$$H_t(u) =_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds\ .$$

Les définitions 2.4 et 2.5 sont équivalentes à :

i) $Im\chi_\omega H_T = L^2(\omega)$ dans le cas de contrôlabilité régionale exacte.

ii)$\overline{Im\chi_\omega H_T} = L^2(\omega)$ dans le cas de la contrôlabilité régional faible.

La contrôlabilité régionale exacte peut être caractérisée par :

Proposition 2.4 [14]

Le système (2.1) est $\omega-$exactement régionalement contrôlable si et seulement si pour tout $y^* \in L^2(\omega)\,,\ \exists\gamma > 0$ tel que :

$$\|B^*S^*\chi_\omega^* y^*\|_U \geq \gamma\,\|y^*\|_{L^2(\omega)}\,.$$

Cette proposition résulte du résultat plus général suivant :

Lemme 2.1 [14]

Soients E, F, G trois espaces de Banach réflexifs et f$\in L(E,G)$,g$\in L(F,G)$;alors il y a une équivalance entre :

i) $Imf\ \subset Img$,

ii) $\exists\gamma > 0$ tel que :$\|f^*z^*\|_{E^*} \leq \gamma\,\|g^*z^*\|_{F^*}, \forall z^* \in G^*$.

Ainsi on a l'équivalence entre :

1) Le système (2.1) est faiblement régionalement contrôlable.

2) $Ker\ \chi_\omega + \overline{ImH_T} = L^2(\Omega)\,.$

3) $Ker\ H_T^* Im\chi_\omega^* = \{0\}$.

En plus, si le semi-groupe est analytique donc (1) **est équivaut à :**

$$\overline{\underset{n\geq 0}{\cup}\chi_\omega A^n S(t)\,BU} = L^2(\omega)\,\boldsymbol{.}$$

Remarque 2.4 [14]

1) Un système qui est exactement (resp.faiblement) contrôlable est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable.

2) Un système qui est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable sur ω_1 est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable sur ω_2 pour tout $\omega_2 \subset \omega_1$.

La plupart des problèmes réels, la source n'est pas défini sur le domaine tout entier, mais seulement sur une partie d'où l'intérêt d'étudier les actionneurs.

2.3 Actionneurs

L'analyse de certaines classes des systèmes distribués déterministes à travers la structure des paramètres d'entrée, c'est à dire, à travers la structure des actionneurs.

La nature répartie des variables d'état fait apparaitre un certain nombre des problèmes, nous citons :

1) La possibilité de pouvoire choisir les points où l'on peut placer les actionneurs

2) La possibilité d'étudier la meilleure forme du domaine géométrique.

3) La possibilité de pouvoire agir de différentes façons : commandes réparties dans le domaine, aux frontière, par zône, ponctuelles,...

Notion de l'actionneur

Les actionneurs peuvent être de nature, de forme, de conceptions divers, il peuvent être de type : ponctuel, zône et peuvent être localisés à l'intérieure du domaine Ω ou bien sur sa frontière $\partial\Omega$.

Définition 2.6

Soit Ω_0 une partie non vide, fermée de Ω, et soit $g \in L^2(\Omega_0)$, on appelle actionneur zône le couple (Ω_0, g) où :

i) Ω_0 représente le support de l'actionneur.

ii) g représente la répartition spatiale de l'actionneur.

Dans le cas d'actionneur ponctuel ou frontière la définition reste la même.Nous parlerons :

1) D'actionneur zône frontière (Γ_0, g) où $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ et $g \in L^2(\Gamma_0)$.

2) D'actionneur ponctuel (b, δ_b), $b \in \Omega$ où $b \in \partial\Omega$.

Définition 2.7

On dira que l'actionneur (Ω_0, g) ou (b, δ_b) est stratégique si le système qu'il existe est faiblement contrôlable.

Remarque 2.5

1)Dans le cas de plusieurs actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ ou $(b_i, \delta_{b_i})_{1\leq i\leq p}$, on dira que la suite d'actionneurs est stratégique si le système qu'il exictent est faiblement contrôlable.

2) La caractérisation des actionneurs fait apparaitre une condition sur le nombre minimum d'actionneurs pouvant amener le système vers des états dèsirés.

Proposition 2.5 [2]

la suite d'actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ est stratégique si et seulement si :

i) $p \geqslant \sup(r_n)$,

ii) $rg(G_n) = r_n$,pour tout n; où G_n est la matrice d'ordre (p, r_n) et d'éléments :

$(G_n)_{ij} = \langle g_i, \varphi_{nj} \rangle_{L^2(\Omega_i)}$, pour tout $i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., r_n$.

Chapitre 3

Stabilité

3.1 Notions de stabilité et stabilisabilité

Une des considérations les plus importantes dans l'analyse et le contrôle des systèmes est celle de la stabilité.

Considérons à nouveau le système (3.1)

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \qquad 0 < t < T , \\ y(0) = y_0 . \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est auto-adjoint à resolvante compacte et engendre un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur H .

Semi-groupe exponentiellement stable

Définition 3.1

Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit exponentiellement stable, s'il existe deux constantes positives M et ω telle que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t} \quad ,t \geq 0.$$

Notons que si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe exponentiellement stable alors, pour tout y_0 dans H,la solution du système autonome :

$$\begin{cases} y' = Ay , \\ y(0) = y_0 . \end{cases} \tag{3.2}$$

vérifie :

$$\|y(t)\| = \|S(t)\, y_0\| \leq M e^{-\omega t} \|y_0\| .$$

Exemple 3.1

(φ_n) étant la famille orthonormée de fonctions propres de$A$, associée aux valeurs propres (λ_n), avec λ_n de multiplicité r_n.

On a :

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_{nj} \qquad j = 1, ..., n \ \text{ et } \ n = 1, ..., \infty.$$

et

$$y(t) ={}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} a_{nj}(t)\, \varphi_{nj},$$

alors

$$y'(t) ={}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} a'_{nj}(t)\, \varphi_{nj},$$

et

$$Ay(t) ={}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} a_{nj}(t)\, A\varphi_{nj},$$

alors

$$Ay(t) ={}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} a_{nj}(t)\, \lambda_n \varphi_{nj},$$

On a donc

$$y'(t) = Ay(t) .$$

par la suite on obtient :

$${}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} a'_{nj}(t)\, \varphi_{nj} ={}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} a_{nj}(t)\, \lambda_n \varphi_{nj}.$$

ce qui donne :

$${}_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} \left(a'_{nj}(t) - a_{nj}(t)\, \lambda_n\right) \varphi_{nj} = 0,$$

et donc

$$a'_{nj}(t) - a_{nj}(t)\, \lambda_n = 0,$$

et alors

$$a_{nj}(t) = e^{\lambda_n t},$$

et donc

$$S(t)\, y ={}_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} {}_{j=1}^{r_n} \langle y, \varphi_{nj} \rangle\, \varphi_{nj}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\|S(t)\,y\|^2 &= \langle S(t)\,y, S(t)\,y\rangle \\ &= {}_{n=1}^{\infty}{}_{m=1}^{\infty}{}_{i=1}^{r_n}{}_{j=1}^{r_m} e^{\lambda_n t} e^{\lambda_m t} \langle y, \varphi_{nj}\rangle \langle y, \varphi_{mj}\rangle \langle \varphi_{nj}, \varphi_{mj}\rangle \,,\end{aligned}$$

et donc

$$\|S(t)\,y\|^2 = {}_{n=1}^{\infty}\, e^{2Re(\lambda_n)t}{}_{j=1}^{r_n} \langle y, \varphi_{nj}\rangle^2 \,. \tag{3.3}$$

i) supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$Re\,(\lambda_n) < -\varepsilon, \text{ pour tout } n \geq 1$$

alors

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &\leq 2e^{-2\varepsilon t}{}_{n=1}^{\infty}{}_{j=1}^{r_n} \langle y, \varphi_{nj}\rangle^2 \,, \\ &\leq e^{-2\varepsilon t}\,\|y\|^2 \,,\end{aligned}$$

et donc

$$\|S(t)\| \leq e^{-\varepsilon t}.$$

et le semi-groupe est exponentiellement stable.

ii) supposons que, pour un certain i,

$$Re\,(\lambda_i) > 0$$

alors le semi-groupe n'est pas exponentiellement stable.

En effet, il suffit de considérer la solution du système autonome correspondant à l'état initial $y_0 = \varphi_{i1}$

$$y(t) = S(t)\,y_0 = e^{\lambda_i t}\varphi_{i1.}$$

Remarque 3.1

L'exemple ci-dessus montre que la stabilité du système (3.1) est liée au spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A plus précisement, on peut montré que :

$$\sup\{Re\,(\lambda)\,/\lambda \in \sigma(A)\} \leq \inf\left\{\omega/\ \|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}\right\} \tag{3.4}$$

Donc,si le semi-groupe est exponentiellement stable ,alors nécessairement le sepectre de A est dans le demi-plan :

$$Re\,(\lambda) < 0$$

Généralement dans (3.4), nous n'avons pas d'égalité.Mais pour la plupart des systèmes réels, et essentiellement ceux étudiés ici, il y a égalité.Et par conséquent, la stabilité exponentielle du semi-groupe en analysant le spectre de A.

3.1.1 Exemple (l'équation de la chaleur)

On consèdaire : l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} y' = Ay \ , \\ y(0) = y_0 \ , \\ y(0,t) = y(1,t) = 0. \end{cases}$$

avec $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

On calcule les valeures propres :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \lambda y$$

Alors on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \lambda y \ = 0.$$

On pose : $\theta^2 = -\lambda$ et donc :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \theta^2 y = 0. \tag{3.5}$$

La solution de l'équation (3.5) est :

$$y\left(x\right) = B\cos\theta x + C\sin\theta x.$$

On a : $y\left(0,t\right) = y(1,t) = 0$ et donc on obtient :

$$\begin{cases} y\left(0\right) = B\cos\left(\theta \times 0\right) + C\sin\left(\theta \times 0\right) = 0, \\ y\left(1\right) = B\cos\left(\theta \times 1\right) + C\sin\left(\theta \times 1\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 0, \\ C\sin\theta = 0, \end{cases}$$

et alors :

$$\theta = 2k\pi \qquad , k \in \mathbb{Z}.$$

Donc :

$$-\lambda = \theta^2 = \left(2k\pi\right)^2$$

et alors :

$$\lambda = -\left(2k\pi\right)^2.$$

On a : $\lambda < 0$ alors l'équation de la chaleur est stable.

Stabilisabilité

Dans le cas où A engendre un semi-groupe non exponentiellement stable, nous allons voir comment y remédier en choisissant des contrôles adéquats.

Définition 3.2

Le système (3.1) est dit stabilisable (ou la paire (A, B) est stabilisable) s'il existe un contrôle en contre réaction :

$$u = -Fy \ , \tag{3.6}$$

avec $(A - BF)$ engendre un semi-groupe $(S_F\,(t))_{t\geq 0}$ exponentiellement stable.

Remarque 3.2

Le contrôle défini dans (3.5) est le contrôle en retour d'état, et sa mise en oeuvre nécessite la connaissance de l'état du système pour $t > 0$. Ceci est peu vraisembleble d'autant plus que l'estimation de l'état par utilisation des informations fournies par les capteurs nécessite, pour de tels systèmes, beaucoup de temps pendant lequel le système peut subir des perturbation. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.

Dans la théorie des systèmes linéares de dimension finie nous savons qu'il y a une certaine équivalence entre la contrôlabilité et la stabilisabilité. En dimension infinie, pour les systèmes de nature distribuée, la situation est beaucoup plus complexe.

3.2 Stabilisabilité et Actionneurs

Les notations sont celles utilisées précédemment : (φ_{nj}) désigne la base de fonctions propres de A et (λ_n) les valeurs propres associées, λ_n étant de multiplication r_n .

Nous avons une caratérisation de la stabilisabilité par le choix des actionneurs , comparable au résultat de la proposition 2.5 concernant la contrôlabilité.La différence réside dans le fait que l'on ne s'intéresse qu'à la partie du système correspondant au sepectre de A à partie réelle positive.

Proposition 3.1

Supposons que le systéme (3.1) est excité par p actionneurs zônes $(\Omega_i, g_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et que le sepectre de A compte j valeurs propres non négatives.Alors le système (3.1) est stabilisable si et seulement si :

i) $p \geqslant \sup\limits_{1\leqslant n\leqslant j} (r_n)$,

ii) $rg\,(G_n) = r_n$, pour tout $n = 1, 2, ..., j$,

où $(G_n) = \langle g_i, \varphi_{nj}\rangle_{L^2(\Omega_i)}$ avec $i = 1, ...p$ et $j = 1, ..., r_n$.

3.3 Stabilité régionale

Dans les travaux précédents sur la stabilité. Un système à paramètres distribués est considéré stable ou instable sur son domaine géométrique Ω. Cependant,,il existe des systèmes qui sont instables sur tout le domaine Ω, mais ils peuvent être stables sur une région ω de Ω.

Définitions

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et on not $Q = \Omega\times]0, \infty[$. On considère le système :

$$\begin{cases} y^{'}(t) \; = Ay(t) \quad Q, \\ \quad y_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.7}$$

où $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Considérons maintenant une partie mesurable de mesure positive interne (ouvert de Ω) et soit l'opérateur de restriction $\chi_\omega : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ telque $\chi_\omega y = y\backslash_\omega$ d'adjoint χ_ω^* avec

$$\chi_\omega^* = \begin{cases} y(x) & x\epsilon\omega, \\ 0 & x\epsilon\Omega/\omega. \\ & . \end{cases}$$

Définition 3-3 (La stabilité régionale faible)

On dit que le système (3.7) est faiblement $\omega-$stable si

$\forall y_0 \epsilon L^2(\Omega) \qquad \langle \chi_\omega y(t) . y_d\rangle \rightarrow 0$ quant $t \longrightarrow \infty$, $\forall y^d \epsilon L^2(\Omega)$.

Définition 3-4 (La stabilitè règionale exponentielle)

On dit que le système (3.7) est exponentiellement $\omega-$stable si
$\exists M, \alpha > 0 \qquad \|\chi_\omega y(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|y_0\|, t \geqslant 0, y_0 \epsilon L^2(\Omega).$

Définition 3-5 (La stabilité régionale asymptotique)

On dit que le système (3.7) est asymptotiquement $\omega-$stable si
$\forall y_0 \epsilon L^2(\Omega) \quad \|\chi_\omega y(t)\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$

Caratérisation

Dant cette partie nous donnons les résultats caratérisant la stabilité régionale c'est le cas par exemple si on prend $H = L^2(\Omega)$ pour une région interne.

On considère les ensembles :
$\sigma_\omega^{1'}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) / Re(\lambda) \geqslant 0,\ Ker(A - \lambda I) \subsetneq \ker(i_\omega)\}$,
$\sigma_\omega^2(A) = \{\lambda \in \sigma(A) / Re(\lambda) < 0,\ Ker(A - \lambda I) \subsetneq \ker(i_\omega)\}$ tel que $i_\omega = \chi_\omega^* \chi_\omega$.

Proposition 3-2 [4]

1-Si le système $(3-7)$ est asymptotiquement stable sur ω, alors $\sigma_\omega^1(A) = \emptyset$,

2-On suppose que l'opérateur A admet une base $\{\varphi_n\}_n \in \mathbb{N}$ de fonction propres dans $L^2(\Omega)$ et si $\sigma_\omega^1(A) = \emptyset$ et s'il existe $\alpha > 0$ tel que $Re(\lambda) \leqslant -\alpha$, $\forall \lambda \in \sigma_\omega^2(A)$ alors le système $(3,7)$ est exponentiellement stable sur ω.

Proposition 3-3 [4] S'il existe un opérateur $P \in \pounds(L^2(\Omega))$ positif et auto-adjoint tel que $\langle Ay, Py\rangle + \langle Py, Ay\rangle + \langle Ry, y\rangle = 0$, $y \in D(A)$ où $R \in \pounds(L^2(\Omega))$ est un opérateur auto-adjoint positif satisfaisant :

$\langle Ry, y\rangle \geqslant c\|\chi_\omega y\|^2$ pour un certain $c > 0$.

Si de plus A auto-adjoint est satisfait $\langle \chi_\omega Ay, y\rangle \leqslant 0, \quad y \in D(A)$, alors le système $(3-7)$ est asymptotiquement stable sur ω.

Lemme [4]

Soit $\sigma_0 = \inf_{t \geqslant 0} \frac{\log\|\chi_\omega S(t)\|}{t}$, si le semi- groupe satisfait

$$\|\chi_\omega S(t+s)y\| \leqslant \|\chi_\omega S(t)y\| \|\chi_\omega S(s)y\| \qquad t, s \geq 0, \tag{3.8}$$

alors $\sigma_0 = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\log\|\chi_\omega S(t)\|}{t}$.

Proposition 3-4 [4]

On suppose que A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ et vérifie $(3-9)$ alors le système $(3-7)$ est exponentiellement stable sur ω si et seulement si

${}_0^{\infty} \|\chi_\omega S(t)\, y\|^2 \, dt < \infty, \;\; y \in L^2(\Omega)$.

Proposition 3-5 [4]

Si le semi-groupe staisfait $(3-9)$,alors le système $(3,7)$ est exponentiellement stable sur ω si et seulement s'il existe un opérateur positif $P \in \pounds(L^2(\Omega))$ tel que

$\langle Ay, Py\rangle + \langle Py, Ay\rangle + \langle \chi_\omega y, y\rangle = 0, y \in D(A)$.

3.3.1 Exemple

Dans $\Omega =]0, 2[$ on considère le système décrit par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = (x-1)\, y(x,t) &]0,2[\times]0, \infty[\;, \\ y(x,0) = y_0(x) &]0,2[\;. \end{cases} \tag{3.9}$$

La solution de $(3,9)$ est $y(x,t) = e^{(x-1)t} y_0$.

Pour $y_0(x) \in L^2(0,2)$ on a :

$$\begin{aligned} \|y(x,t)\|^2_{L^2(0,2)} &= {}_0^2 e^{2(x-1)t} |y_0(x)|^2 \, dx \\ &= {}_0^1 e^{2(x-1)t} |y_0(x)|^2 \, dx + {}_1^2 \, e^{2(x-1)t} |y_0(x)|^2 \, dx \\ &\geqslant {}_1^2 e^{2(x-1)t} |y_0(x)|^2 \, dx \\ &\geqslant {}_1^2 \, |y_0(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} y(x,t) \neq 0$.

Donc le système $(3,9)$ n'est pas stable sur $\Omega =]0,2[$. Mais si on considère la région $\omega =]0, a[\subset]0, 1[$ et on utilisant l'opérateur restriction p_ω on a :

$$\begin{aligned} \|p_\omega y(x,t)\|^2_{L^2(0,2)} &= {}_0^2 e^{2(x-1)t} |p_\omega y_0(x)|^2 \, dx \\ &\leqslant \left({}_0^2 e^{2(x-1)t} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left({}_0^2 \, |p_\omega y_0(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant e^{(a-1)t} \|y_0(x)\|_{L^2(0,2)} \;. \end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} p_{\omega}y(x,t)=0.$

Donc le système $(3,9)$ est stable sur $\omega=]0,a[$.

3.4 Stabilisabilité régionale

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment stabiliser régionallement un système distribuè .

On considere le système :

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+Bu(t)\,,y(0)=0\ , \tag{3.10}$$

avec mêmes hypothèses de paragraphe précédente et $B\in L(u,H)$, u étant l'espace des contrôle supposé de Hilbert.

Définition 3-6

On dit que le système (3-10) est faiblement (resp- asymptotiquement, exponentiellement) stabilisable sur $\omega\subset\Omega$, s'il existe un opérateur $K\in L(H,U)$ tel que le système :

$$\begin{cases} y'(t)=(A+BK)\,y, \\ \quad y(0)=y_0. \end{cases} \tag{3.11}$$

est faiblement(resp-asymptotiquement, exponentiellement) stabilisable sur $\omega\subset\Omega$

à partir de définition précédente, on note les points suivants :

Le contrôle en boucle fermé qui stablise le système est :

$$u=Ky,\quad K\in L(H,U)\,.$$

On considère la fonction coût suivante :

$$q(u)=_0^{\infty}\|u(t)\|^2\,dt,$$

tel que $u\in U_{ad}(\omega)$ avec $U_{ad}(\omega)=\left\{\begin{array}{c} u\in L^2(0,+\infty;U)\,,\ u \text{ stabilise fortement } (3-11) \text{ sur } \omega \\ \text{et } q(u)<\infty \end{array}\right\}$

donc $\min\limits_{U_{ad}(\omega)} q(u)\le\min\limits_{U_{ad}(\Omega)} q(u)$.

Caractérisation

Dans cette section on propose une approche pour la caractérisation de Stabilisabilité régionale qui explore les résultats précédents et on note $(S_K(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe engendre par $A + BK$ et soit $R \in \pounds(L^2(\Omega))$ un opérateur positif, auto-adjoint et un constant $c > 0$ tels que $\langle Ry, y\rangle \geq c\|\chi_n y\|^{2^2}$.

On considère, pour $y \in D(A)$, l'equation de Riccati :

$$\langle Ay, Py\rangle + \langle Py, Ay\rangle + \langle Ry, y\rangle - \langle B^*Py, B^*Py\rangle = 0 \ .$$

Proposition 3-6 [4]

On suppose qu'il existe un opérateur positif et auto-adjoint $P \in \pounds(H)$ satisfait l'équation de Riccati et soit l'opérateur $K = -B^*P$.

1-Si

$$Re\,\langle\chi_\omega(A + BK)\,y, y\rangle_{L^2(\omega)} \leq 0, \qquad y \in D(A)\ , \tag{3.12}$$

alors le système $(3-7)$ est asymptotiquement stable sur ω .

2-S'il existe $d > 0$ tel que

$$\langle Ry, y\rangle \geq dRe\left\langle\chi_{\Omega/\omega}(A + BK)\,y, y\right\rangle \qquad\qquad y \in D(A)\ , \tag{3.13}$$

alors l'état du système $(3-7)$ reste borné dans $\Omega\backslash\omega$.

En considérent les opérateurs $R = (\chi_\omega B)(\chi_\omega B)^*$ et $p = I$,on a le résultat suivant :

Proposition 3-7 [4]

Soit $U = H$ et on suppose que $\langle i_\omega Ay, y\rangle + \langle y, i_\omega Ay\rangle = 0$, $y \in D(A)$ et $\|B^*i_\omega y\| \geq c\|\chi_\omega y\|$, $y \in H$.

Si $(3-13)$ est vérifiée, alors le contrôl $u(t) = -B^*i_\omega y(t)$ stabilise le système $(3-7)$ régionalement asymptotiquement sur ω

3.4.1 Exemple

On cherche un contrôle pour stabilisé un système sur une région $\omega \subset \Omega$ avec un état borné sur Ω.

On considère le système distribué décrit par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x;y,t) = (\cos x + 1)\, u(x,t) + v(x,t) & \Omega \times]0,\infty[\,, \\ u(x,0) = u_0 \qquad \Omega\ , & \end{cases} \tag{3.14}$$

tel que $\Omega =]0,\pi[$ et $v(x,t) = 0$.

On a $Au\,(\cos x + 1)\, u$ et $u(x,t) = e^{(\cos x+1)t} u_0$ et encore on a :

$\|u(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} =_0^{\pi} e^{2(\cos x+1)t} |u_0|^2\, dx \geq \pi e^{2t} \|u_0\|^2 \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$.Alors

Le système n'est pas stable sur Ω.

Aussi pour $\omega = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ on a :

$\|u(x,t)\|^2_{L^2(\omega)} =_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2(\cos x+1)t} |u_0|^2\, dx \geq \frac{\pi}{2} e^{2t} \|u_0\|^2 \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$ et

donc le sustème n'est pas stable sur la région $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ mais pour le contrôl $v = -u$, on a le système $(3-14)$ s'ecrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \cos x u(x,t) & \Omega \times]0,\infty[\,, \\ u(x,0) = u_0. & \end{cases}$$

La solution de système donne par $u(x,t) = e^{\cos xt} u_0$,et donc on a :

$\|u(x,t)\|^2_{L^2(\omega)} =_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |e^{2\cos xt}|\, |u_0(x)|^2\, dx \leq =_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2t} |u_0|^2\, dx \leq |e^{-2t}|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |u_0|^2\, dx \leq Me^{-2t} \longrightarrow$ 0 pour $t \longrightarrow \infty$.

Donc le système stable sur la région ω.

Bibliographie

[1] A. Ayadi, M.Djabrani ; ; *Pollution termes estimation in parabolic system with incomplete data Far East,* J.Math sci (F J M S) .Pushapa publisling house, (2005).

[2] A EL Jai A j.pritchard ; *Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèms distribués,* Masson RMA3 paris 1986.

[3] J. L Lions ; *Contrôlabilité exact, Stabilisations et perturbation des systèmes distribués,* Masson Vol. L. 1988.

[4] E. H. Zerrik ; *Analyse régionale des systèmes distribués,* thèse Univ Mohammed V. Maroc 1993.

[5] Assia. Benabdallah ; *Une introduction à la théoriè de contrôle,* CMI-LATP, technopôle. château-univercitè de provence 2005

[6] A. Pazy ; *Semi groups of linear operators and applications to partial differential équations,* Springer, Applie Mathematical Sciences 1983.

[7] Mohammed Ouzahra ; *Stabilisation régionale des systèmes distribués,* thèse de doctorat MACS groupe-Afacs UFR Moulay Ismail University Sciences Faculty Meknes Morocco, 2004.

[8] Jerzy Klamka ; *Contrôlabilty of aynamical,* systeme Kuwer Academic publishers 1990.

[9] Benchimol C. A ; *Note on weak stabilizability of contruction semi-groups,* stam J.control and optization 1978. vol. 16. pp 373-379.

[10] Curtain R. F and Zwart H. J ;*An introduction to infinite dimensional linear system,* thery-New york, Springer-Verlag 1995.

[11] E. B. Davies ; *One-parameter semi-groups St-john's college ford England.*

[12] J.Lions-E Magenes ; *Problemes aux limites non homogènes et applications,* Vol 1. Dunad Paris 1968.

[13] Ines Kaarer ; *Sentinelle ponctuelle,* Mémoire de Magister Univ constantine Alg 2003.

[14] Ali Boutoulout ; *Contrôlabilité régionale, Cible frontière et contrôlabilité du gradient dans les systè mes distribués,* Thèse de doctorat, L′université Moulay Ismail 2000.

Résumé :

Dans ce travail on a étudié la stabilisation d'un système parabolique par le biais de la théorie de la contrôlabilité et la théorie des semi-groupes, le résultat obtenu permet de regarder la stabilisation locale à travées la contrôlabilité régionale, ce problème sera la continuitté de ce travail.

Mots clés : semi-groupes, stabilité, stabilisabilité, contrôlabilité.

Abstract :

In this work we studied the stabilization of a parabolic through the theory of controlability and the theory of semi-groups, the result can schow stabilizing local defied regional controlability, this problem will be continuation of this work.

key wordes : semi-groupes, stability, stabilisability, controlability

ملخص

في هذّا العمل درسنا استقرار نظام مكافى من خلال نظرية التحكم و نظرية نصف زمرة ·
النتجة يمكن مشاهدة الاستقرار المحلي من خلال المراقبة الجهوية، هذه المشكلة ستكون في استمرارية هذا العمل ·

الكلمات المفتاحية

نصف زمرة، الاستقرار، الاستقرارية، المراقبة ·