

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN MHIDI D'OUUM EL BOUAGHI



Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie  
DEPARTEMENT SCIENCES DE LA MATIERE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat En Sciences

Option Physique Théorique

**Présenté par : Mr Omar Langueur**

Thème :

***Etude de la dynamique des particules relativistes  
en interaction avec une certaine classe des  
potentiels***

Soutenue le 25 /10/2020

Devant le Jury:

**Président:** Mme. C. Azizi      Professeur. Université Oum El Bouaghi

**Rapporteur:** Mr. M. Merad      Professeur. Université Oum El Bouaghi

**Examineur:** Mr. M.T.Meftah      Professeur. Université Ouargla

Mr. A. Bounames      Professeur. Université Jijel

Mr. M. Falek      MCA. Université Biskra

## Dédicaces

*Je dédie ce travail*

- *A mes parents, les plus chers à mon cœur*
- *A ma grande famille, mes frères et sœurs, et tous mes neveux*
- *A ma petite famille (mon épouse, mes chers enfants Younes, Ishak, Meriem et Israa)*

*Omar L.*

## *Remerciements*

*Tout au début, je remercie Allah de m'avoir accordé la patience et la capacité d'accomplir cette thèse.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude et mes vifs remerciements à mon directeur de thèse **Merad Mahmoud** Professeur en physique à l'université de Oum Elbouaghi, pour m'avoir guidé tout au long de ma thèse, leurs conseils avisés et leurs remarques pertinentes. Je suis très fier de m'avoir encadré et je suis particulièrement reconnaissant de la confiance qu'il m'a témoignée et de l'autonomie qu'il m'a laissée.*

*Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail. Merci à Madame **C. Azizi** de m'avoir fait l'honneur de présider le jury, ainsi que Monsieur **M.T. Meftah** Professeur à l'université d'Ouragla, et Monsieur **A. Bounames** Professeur à l'université de Jijel et à **M. Falek** Maître de conférences A à l'université de Biskra, qui ont bien voulu faire partie de ce jury.*

*Je tiens à remercier messieurs Dr. **B. Hamil** et Dr. **A. Rassoul** qui m'ont aidé à l'élaboration du travail.*

*Je tiens à remercier toute personne qui m'a aidé, de près ou de loin, à réaliser ce travail.*

## ملخص:

في هذه الأطروحة عالجتنا حركية دقائق DKP التي تتفاعل مع بعض الأشكال المختلفة من الكمونات، كأن تكون حاجز شبه منحرف أو حقل كهرومغناطيسي على شكل دالة ظل زائدية وفي حالة ارتباط الكمون بالطاقة، تم إيجاد الحلول الدقيقة والتحليلية في الحالات الثلاث، حيث أعطيت في حالة حاجز شبه منحرف على شكل دالة قطع مكافئ اسطوانية (parabolique cylindrique)، كما انه تمت مناقشة واستنتاج الشروط الحدية لنفس الحالة واستخلاص عبارة كل من معامل التمرير والانعكاس، وفي حالة وجود حقل كهرومغناطيسي ذي شكل دالة ظل زائدية تم التعبير عن الحلول بدالة من نوع (hypergéométriques)، كما تم التطرق إلى الحالات المقيدة والمنتشرة، أما في الحالة الأخيرة أين يرتبط الكمون بالطاقة فقد تم إعطاء الحلول الخاصة وطيف الطاقة الموافقة عند التفاعل مع حقل كهربائي منتظم وكمون سلمى، تمت أيضا إعادة النظر في شروط التنظيم والتعمد ومعادلة الاستمرارية عندما يرتبط الكمون بالطاقة، كما عرضت مناقشة مستفيضة لبعض الحالات الخاصة.

## **Résumé:**

Dans cette thèse, nous avons traité la dynamique de la particule DKP en présence de certaines interactions telles que: la barrière trapézoïdale, un champ électromagnétique sous la forme d'une fonction tangente hyperbolique et le cas d'un potentiel dépendant de l'énergie. Pour ces trois cas, les solutions exactes et analytiques sont déterminées. Pour le cas de la barrière trapézoïdale les fonctions d'onde sont calculées et exprimées en termes des fonctions de type parabolique cylindrique. Les cas limites sont déduits et discutés et les coefficients de transmission et de réflexion sont déterminés. Pour le cas du champ électromagnétique tangentiel hyperbolique, les solutions sont données en termes de fonctions hypergéométriques et les états liés et de diffusions sont étudiés. Pour le dernier cas du potentiel dépendant de l'énergie, le spectre et les fonctions d'onde correspondantes relatifs aux cas de la particule en interaction avec un champ électrique constant et un potentiel scalaire sont convenablement déduits et sont exprimés en termes de polynômes Biconfluent de Heun. En outre, l'effet de cette dépendance énergétique sur les conditions de normalisation et sur l'équation de continuité a été discuté. A la fin une discussion détaillée est proposée pour certains cas particuliers.

## **Abstract:**

In this thesis, we treated the dynamics of the DKP particle in the presence of certain interactions such as: the trapezoidal barrier, an electromagnetic field in the form of a hyperbolic tangent function and the case of an energy dependent potential. For these three cases, the exact and analytical solutions are determined. For the trapezoidal barrier the wave functions are calculated and expressed in terms of the cylindrical parabolic functions. The boundary cases are deduced and discussed and the transmission and reflection coefficients are determined. For the case of the hyperbolic tangential electromagnetic field, the solutions are given in term of the hypergeometric functions and the bound and diffusions states are studied. For the last case of the energy dependent potential, the spectrum and the corresponding wave functions relating to the cases of the particle interacting with a constant electric field and a scalar potential are suitably deduced and are expressed in terms of Heun biconfluent polynomials. In addition, the effect of this energy dependence on the normalization conditions and on the continuity equation was discussed. At the end a detailed discussion is proposed for certain specific cases.

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Résolution de l'équation DKP en présence d'un potentiel scalaire trapézoïdal</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Solution de l'équation de DKP de Spin 1	8
1.3 La barrière trapézoïdale	8
1.4 Conditions de raccordement	15
1.5 Solution de l'équation de DKP de spin 0	16
1.6 Résultats numériques et discussions	18
<b>2 Résolution de l'équation DKP en présence d'un champ électromagnétique</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction	21
2.2 Solution de l'équation DKP de spin 0	22
2.2.1 Cas des états liés	24
2.2.2 Cas de la diffusion	25
2.3 Détermination des coefficients de réflexion et de transmission	28
2.4 Résultats numériques	30
<b>3 Equation DKP pour un potentiel dépendant de l'énergie</b>	<b>38</b>
3.1 Introduction :	38
3.2 Condition d'orthogonalité et de normalisation	39
3.3 Equation de continuité	40
3.4 Equation DKP dans un champ électrique constant et un potentiel scalaire	43
3.5 La Méthode de NIKIFOROV-UVAROV étendue	48
3.6 Application	51
3.7 La fonctions biconfluent de Heun (BHE)	55
3.8 La fonctions parabolique cylindrique	57

## TABLE DES FIGURES

1.1 Potentiel . . . . .	9
1.2 Le graphique illustre le comportement du coefficient de transmission ( $T$ ) pour différentes valeurs de l'énergie $E$ avec $a = 1, E_0 = ev_0 = 2, m = 1, \eta = 0.5$	18
1.3 Le graphique illustre le comportement du coefficient de transmission ( $T$ ) pour différentes valeurs de l'énergie $E$ avec $a = 1, E_0 = ev_0 = 2, m = 1, \eta = 1$	19
1.4 Le graphique illustre le comportement du coefficient de transmission ( $T$ ) pour différentes valeurs de l'énergie $E$ avec $a = 1, E_0 = ev_0 = 2, m = 1, \eta = 0.01$ . . . . .	19
2.1 Présentation de l'évolution du potentiel magnétique $A(y)$ et du potentiel électrique $V_0(y)$ en fonction de $y$ pour $a$ quelconque. . . . .	22
2.2 Le graphique illustre le comportement des coefficients de transmission ( $T$ ) et de réflexion ( $R$ ) en fonction de l'énergie $E$ pour $E_0 = 1, H_0 = 4, m = 1, a = 5, k_x = k_y = 0.5$ . . . . .	30
2.3 Présentation de l'évolution du potentiel magnétique $A(y)$ et du potentiel électrique $V_0(y)$ en fonction de $y$ quand $a \rightarrow \infty$ . . . . .	31
2.4 Présentation de l'évolution du potentiel magnétique $A(y)$ et du potentiel électrique $V_0(y)$ en fonction de $y$ quand $a \rightarrow 0$ . . . . .	33
3.1 Le graphique illustre le spectre de l'énergie $(E_n)^+$ par rapport au nombre quantique $n$ avec $V_0 = 0.3, S_0 = 0.5, m = 1$ . . . . .	52
3.2 Le graphique illustre le spectre de l'énergie $(E_n)^+$ par rapport au nombre quantique $n$ avec $V_0 = 0.3, S_0 = 0.5, m = 1$ . . . . .	53
3.3 Le graphique illustre le spectre de l'énergie $(E_n)^+$ par rapport au facteur $\theta$ avec $V_0 = 0.3, S_0 = 0.5, m = 1$ . . . . .	54

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Comme il est bien connu que la mécanique quantique relativiste est une théorie qui rassemble les postulats de la mécanique quantique et la relativité restèrent afin de décrire la dynamique quantique d'une particule relativiste. Historiquement, les premières tentatives remontent à l'année 1927, où O. Klein, V. Fock et W. Gordon ont proposé une première candidate dans leurs travaux de recherche, connue aujourd'hui sous le nom de l'équation relativiste de Klein-Gordon (KG) afin de décrire la dynamique d'une particule relativiste sans spin. Malheureusement cette dernière a été rejetée à cause des solutions à normes négatives qui ne peuvent définir des densités de probabilité de la particule. Cette difficulté a été en fait surmontée par Pauli et Weisskopf qui ont pu l'utiliser comme équation de base de la théorie des champs des bosons à spin-0. L'équation de continuité est alors interprétée comme loi de conservation de densité quadridimensionnelle charge-courant. En 1928, la deuxième candidate de forme linéaire a été introduite par Dirac pour remédier aux problèmes posés par l'équation de Klein-Gordon. Comme, l'a fait remarquer Dirac avant, la source des problèmes de l'équation de KG était due à la présence de dérivées du second ordre par rapport au temps. L'idée de Dirac a été de reformuler l'équation de Klein-Gordon de telle sorte qu'elle fasse apparaître une dérivée du premier ordre à la fois pour le temps et les coordonnées d'espace. Il a obtenu alors une équation relativiste covariante du premier ordre qui décrit une particule de spin 1/2 et les solutions à énergies négatives ont été interprétées comme étant des antiparticules associées aux particules. En se basant sur le même concept de linéarisation, et suite aux travaux de Patiau [1], Duffin [2] et Kemmer [3] sur un système de deux particules de spin 1/2, ont pu établir une autre équation relativiste dite équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP), qui décrit la dynamique des particules bosoniques de spin-0 et de spin-1, elle est considérée comme le prolongement naturel de l'équation de Maxwell avec masse associée à l'électrodynamique des milieux diélectriques. Cette équation est similaire à celle de Dirac où les matrices  $\gamma$  de Dirac sont remplacées par les matrices  $\beta$  qui satisfont une autre algèbre

plus compliquée dite algèbre de DKP. Ces matrices sont de dimension  $5 \times 5$  pour les bosons scalaires et sont de dimension  $10 \times 10$  pour les bosons vectoriels massifs.

Par ailleurs, nous notons que les particules de spin-0 et de spin-1/2 relativistes ont fait l'objet de beaucoup de recherches de la part de physiciens et de mathématiciens contrairement aux bosons de spin-1, le manque d'intérêt pour l'équation de DKP provient de du fait de sont équivalence avec les équations de KG et de Proca [4, 5], d'ailleurs cette équivalence est sujette à de sérieux doutes pour le moment [6, 7]. De nombreux travaux (voir référence [5]) ont été réalisés en appliquant le formalisme de DKP aux désintégrations du méson K et d'autres mésons instables et aux interactions fortes. La conclusion présentée dans la référence [5] n'était pas optimiste « le formalisme de DKP donne parfois des résultats différents d'un formalisme de second ordre de sa forme quadratique » et aussi, dans le travail [8], il est admis que la théorie DKP donne des résultats qualitativement différents pour la désintégration du méson K par rapport au formalisme KG, en plus de la grande complexité algébrique de la formulation de DKP. Pour traiter de telles particules dans le formalisme des équations d'onde, nous devons résoudre l'équation de Proca ou de (DKP). Cette dernière est capable d'analyser les particules à spin 0 et à spin 1 dans une base unifiée, il est à noter que l'étude d'une particule à spin 1 peut être réalisée dans le cadre d'une théorie de jauge, à savoir le champ dit compensateur [9].

Les applications de l'équation de (DKP) à certains problèmes de la physique nucléaire et de la physique des particules ont récemment suscité un regain d'intérêt. Le succès de l'équation de DKP dans la description des interactions relativistes des hadrons avec les noyaux ne fait aucun doute [10], la théorie DKP a également connu un nouveau souffle dans le contexte d'applications en chromodynamique quantique [11], en dynamique hamiltonienne covariante [10], pour l'espace de phase relativiste [12], l'espace-temps incurvé [13]. Ainsi que dans l'approche causale [14], le tunnel superluminal [15], le modèle de Bohm [16, 17], l'invariance de Galilée à cinq dimensions [18], la mécanique pseudo classique [19], le condensat de Bose Einstein [20]. De même pour les champs magnétiques homogènes [21] les potentiels d'Aharonov-Bohm [22, 23], l'équation DKP a aussi été utilisée pour des systèmes à potentiel et masse dépendant de la position [24], à l'oscillateur bosonique en présence de longueur minimale [25], à l'oscillateur tenseur DKP (à couplage minimal et non-minimal) [26, 27], aux propriétés thermiques de l'oscillateur de Kemmer [28], à l'oscillateur quantique relativiste pour  $S = 1$  [29]. On trouve aussi son utilisation pour des modèles relativistes avec la substitution non minimale [30], à l'oscillateur de sixième degré (couplage tenseur avec un potentiel linéaire au cube) [31], à une marche de potentiel [32], [33], le potentiel de Woods-Saxon [34], vectoriel de Hulthén déformé [35], et Coulombienne [36], [37], [38] au problème potentiel du champ central [36].

Notre travail s'insère donc dans cette lignée d'application du formalisme DKP, en par-

ticulier nous traitons le cas où le potentiel dépendant de l'énergie, ce qui implique que la relation de normalisation et orthogonalité doit être reformulée, Ces problèmes ont été abordés dans de nombreuses recherches, soit en mécanique quantique relativiste ou non relativiste[39, 40, 41, 42, 43].L'étude de systèmes physiques avec un potentiel linéaire ou trapézoïdal ( superposition d'un potentiel linéaire et d'un potentiel rectangulaire)[44] est très utile. En premier lieu, la barrière linéaire trouve son importance dans la construction de dispositifs électroniques à l'échelle nanométrique où cette barrière émule le potentiel de Schottky qui émerge en raison de la présence d'un champ électrique externe. En second lieu, le potentiel trapézoïdal est associé à des problèmes intéressants rencontrés dans les études sur la nano-hétérostructure. Dans le domaine des semi-conducteurs, le problème de l'effet tunnels est assez important et une modélisation mathématique est nécessaire.

Dans cette thèse, nous considérons également la présence d'une barrière trapézoïdale comme une disposition pour les situations dans lesquelles les électrons doivent surmonter cette barrière avant d'atteindre la région où le champ électrique externe agit.

Cette thèse se présente comme suit :

- Dans le premier chapitre, on résout analytiquement l'équation de DKP pour les bosons de spin 0 et 1 en présence d'un potentiel trapézoïdal, l'équation DKP se réduit dans ce cas à une équation différentielle de type parabolique cylindrique. Les solutions exactes des fonctions d'ondes propres nous ont permis d'obtenir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion. Comme illustration de ces résultats des courbes des coefficients de transmission en fonction de l'énergie sont présentées.
- Dans le second chapitre, nous déterminons les solutions exactes de l'équation de DKP de spin 0 à la présence d'un champ électromagnétique sous la forme d'une fonction tangente hyperbolique. Les solutions de la fonction d'onde sont déterminées en termes de fonctions hypergéométriques. Les coefficients de transmission  $T$  et le coefficient de réflexion  $R$  sont calculés . La région du paradoxe de Klein est analysée et elle persiste toujours , le processus de création de paires  $y$  est également abordé.
- Dans le troisième chapitre, nous avons étudié les solutions de l'équation DKP à une dimension pour une combinaison de potentiels vectoriel et scalaire qui dépendent de l'énergie. Les conditions de normalisation et l'équation de continuité ont été déterminés et sont liés aux potentiels vectoriel et scalaire linéaire dépendants de l'énergie. Les fonctions d'onde solution de l'équation sont évaluées et s'expriment en termes de polynômes Biconfluent de Heun. La fonc-

tion de l'énergie a été extraite et les cas particuliers ont été déduits. Une étude numérique a été présentée et les courbes de l'énergie ont été représentés pour certaines valeurs du paramètre caractérisant cette dépendance énergétique.

- Nous clôturons par une conclusion, et annexes sur des rappels mathématiques et sur les fonctions spéciales utilisées dans cette thèse.

# CHAPITRE 1

## RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DKP EN PRÉSENCE D'UN POTONTIEL SCALAIRE TRAPÉZOÏDAL

### 1.1 Introduction

Le sujet abordé dans ce chapitre est d'une grande importance, pour plusieurs raisons, tout d'abord, d'un point de vue théorique, il contribue à enrichir la base des potentiels exactement solvables par l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (**DKP**), ensuite pour l'aspect expérimental, il est un outil intéressant pour l'analyse des phénomènes de transport dans les hétérostructures semi-conductrices, qui utilisent couramment des potentiels formes trapézoïdales, qui ont pour origine l'application aux composants électroniques d'un champ électrique uniforme externe. Enfin, il contribue également à la compréhension des phénomènes qui se produisent lors du passage du flux d'ondes à travers une jonction hétérogène linéaire et abrupte.

On sait que l'équation DKP est une extension du formalisme covariant de Dirac, pour des particules de spin 0 et 1, où on remplace les matrices  $\gamma^j$  par des matrices  $\beta^j$  qui vérifiant une algèbre connue sous le nom d'algèbre **DKP**.

L'équation **DKP** décrivant les particules de spin 0 et 1 interagissant avec un champ électromagnétique est :

$$[i\beta^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m] \psi(z, t) = 0. \quad (1.1)$$

Où les matrices  $\beta^j$  vérifient les relations de commutation suivantes :

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu. \quad (1.2)$$

A partir de cette équation (1.1) il est facile de montrer que l'on peut obtenir l'équation de continuité :

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.3)$$

tel que

$$J^\mu \equiv \bar{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (1.4)$$

et le spineur adjoint  $\bar{\psi}$  est définie par :

$$\bar{\psi} = \psi^+ \left[ 2(\beta^0)^2 - \mathbf{1} \right], \quad (1.5)$$

qui vérifie l'équation adjointe suivante :

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu) \bar{\psi} \beta^\mu + \beta \bar{\psi} = 0. \quad (1.6)$$

La densité  $J^0$  n'est pas définie positivement en suivant la réinterprétation basée sur la symétrie de charge par Pauli, Weisskopf et même par Feshbach et Villars.

En conséquence, on explique le paradoxe de Klein selon lequel  $J^0$  est obligé d'être multiplié par la charge élémentaire  $e$ .

L'algèbre **DKP** est générée par des matrices  $(\beta^j)$  qui ont principalement trois représentations irréductibles, la représentation de la dimension 0 dite triviale n'est pas la même pour n'importe quel type de ces particules, de l'autre côté celles ayant les dimensions  $5 \times 5$  et  $10 \times 10$  décrivent les particules de spin 0 et de spin 1 respectivement. On choisit une représentation pour les  $(\beta^j)$  dans laquelle  $\beta^{j+} = -\beta^j$  et  $\beta^{0+} = \beta^0$ . On peut écrire pour le cas de spin 0

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \rho^i \\ -\rho_T^i & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

où les éléments de bloc sont définis comme suit :

$$\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

avec

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

tel que  $\rho^T$  désigne la matrice transposée de  $\rho$  et  $\mathbf{0}$  étant la matrice nulle.

Dans le cas ou le spin est 1,  $\beta^j$  est donné par :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & 1 & 0 \\ \bar{0}^T & 1 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^j = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ -\bar{0}^T & 0 & 1 & -is_i \\ -e_i^T & 1 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

Les matrices  $(s_i)$  sont les matrices standard non-relativistes  $(3 \times 3)$  de spin 1,  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$  désignant respectivement la matrice zéro et la matrice unitaire.

Les matrices  $\bar{0}$  et  $e_i$  sont données par :

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

La résolution de l'équation **DKP** pour les particules de spin 0 et de spin 1 respectivement pour un potentiel trapézoïdal scalaire, donne avec les conditions aux limites habituelles, qui sont la continuité de la fonction d'onde et sa dérivée  $[\psi(0^+) = \psi(0^-)]$  et  $[\dot{\psi}(0^+) = \dot{\psi}(0^-)]$ , mène directement à la solution triviale  $\psi = 0$

En effet, comme nous le remarquons [32], les composantes  $\Psi$  vérifient l'équation de **KG** et admettant les conditions de continuité par conséquence également les composantes  $\Theta$ , mais les composantes  $\Phi$  satisferont au voisinage du point de marche  $z_0$  et  $z_a$  les conditions suivantes :

$$\Phi(z_0^+) = \frac{E - eV(z_0^+)}{m} \Psi(z_0^+), \Phi(z_0^-) = \frac{E - eV(z_0^-)}{m} \Psi(z_0^-), \quad (1.12)$$

$$\Phi(z_a^+) = \frac{E - eV(z_a^+)}{m} \Psi(z_a^+), \Phi(z_a^-) = \frac{E - eV(z_a^-)}{m} \Psi(z_a^-), \quad (1.13)$$

Et sachant que  $V(z_0^+) \neq V(z_0^-)$  et  $V(z_a^+) \neq V(z_a^-)$  et cela implique directement la seule solution triviale

Pour ce choix l'équation **DKP** à  $(1 + 1)$  dimension est réduite à

$$\left[ i\beta^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + ieV \right) + i\beta^3 \frac{\partial}{\partial z} - m \right] \psi(z, t) = 0. \quad (1.14)$$

Choisissons pour  $\psi(z, t)$  la forme suivante  $e^{-iEt} \phi(z)$ , puis obtenons l'équation de la valeur propre suivante :

$$\left[ \beta^0 (E - eV) + i\beta^3 \frac{\partial}{\partial z} - m \right] \phi(z) = 0. \quad (1.15)$$

## 1.2 Solution de l'équation de DKP de Spin 1

On décompose la fonction d'onde  $\phi(z)^T$  comme  $\begin{pmatrix} \varphi & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$  avec  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  des vecteurs de dimension  $(3 \times 1)$  :

$$\Psi^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_3 \end{pmatrix}, \Phi^T = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & A_3 \end{pmatrix}, \Theta^T = \begin{pmatrix} C_2 & -C_1 & \varphi \end{pmatrix} \text{ et } C_3, \quad (1.16)$$

tel que  $A_i, B_i$  et  $C_i, i = 1, 2, 3$ , sont, respectivement, les composantes des vecteurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ . Il est alors facile de montrer que ces composantes vérifient les équations :

$$\mathbf{O}_{KG}\Psi = 0, \begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(E - eV)}{i \frac{m}{d}} \\ \frac{m}{m \frac{d}{dz}} \end{pmatrix} \otimes \Psi, \quad (1.17)$$

où l'opérateur différentiel scalaire  $\mathbf{O}_{KG}$  est définie par :

$$\mathbf{O}_{KG} = \frac{d^2}{dz^2} + [(E - eV)^2 - m^2]. \quad (1.18)$$

Le composant  $C_3$  disparaît automatiquement ( $C_3 = 0$ ).

## 1.3 La barrière trapézoïdale

La barrière trapézoïdale est la superposition d'un potentiel rectangulaire et d'un potentiel linéaire.

Elle est décrite mathématiquement par :

$$V(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \nu_0 + \frac{\nu_1 - \nu_0}{a}z, & 0 \leq z \leq a, \text{ tel que } \nu_0 > \nu_1 \\ 0, & z > a \end{cases} \quad (1.19)$$

Nous pouvons le présenter graphiquement comme suit :

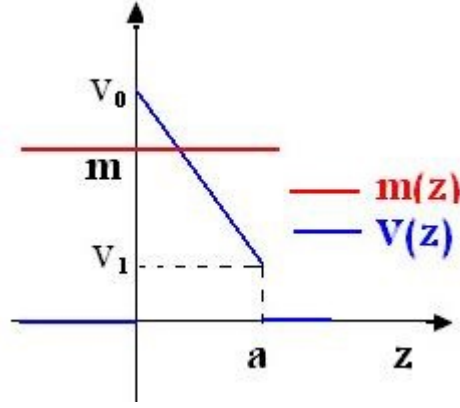


FIGURE 1.1 – Potentiel

où  $a$  la largeur de la barrière. Nous introduisons le paramètre sans dimension

$$\eta = \frac{v_0 - v_1}{v_0}, 0 \leq \eta \leq 1 \quad (1.20)$$

Il est clair que, le cas  $\eta = 1$  ( $v_1 = 0$ ) correspond à un potentiel linéaire pur, alors que lorsque  $\eta = 0$  ( $v_1 = v_0$ ), on obtient une barrière rectangulaire pure de hauteur  $v_0$  et de largeur  $a$  : Nous écrivons

$$V(z) = v_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right), 0 \leq z \leq a. \quad (1.21)$$

L'équation de Klein Gordon pour une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  associée à ce problème s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + \left[ \left(E - ev_0 + \frac{\eta ev_0}{a} z\right)^2 - m^2 \right] \Psi(z) = 0. \quad (1.22)$$

On fait le changement de variable suivant :

$$x = \sqrt{i} \left( z + \frac{a(E - ev_0)}{\eta ev_0} \right) \left( \frac{2\eta ev_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \frac{x}{\sqrt{i}} \left( \frac{a}{2\eta ev_0} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a(E - ev_0)}{\eta ev_0} \quad (1.23)$$

On obtient :

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} = i \left( \frac{2\eta ev_0}{a} \right) \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} \quad (1.24)$$

l'équation (1.22) devient

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \left[ -\frac{x^2}{4} + \frac{im^2 a}{2\eta ev_0} \right] \Psi(x) = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \left[ -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{2} + \frac{im^2 a}{2\eta ev_0} \right) \right] \Psi(x) = 0. \quad (1.26)$$

Ce qui nous amène à l'équation suivante :

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \left[ -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + p \right] \Psi(x) = 0, \quad (1.27)$$

tel que

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{im^2a}{2\eta ev_0}. \quad (1.28)$$

Cette équation différentielle admet quatre solutions dépendantes de type parabolique cylindrique .

$$D_p(x), D_p(-x), D_{-p-1}(ix), D_{-p-1}(-ix).$$

On a sélectionné deux solutions indépendantes linéairement :

$$D_p(x), \quad D_{-p-1}(ix).$$

Par conséquent, la solution générale pour une particule qui arrive par la gauche de la barrière trapézoïdale du potentiel est donnée par :

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi_1(z) = [H_0 e^{ikz} + H_1 e^{-ikz}] \mathbf{V}, & z < 0 \\ \Psi_2(z) = [H_2 D_p(x) + H_3 D_{-p-1}(ix)] \mathbf{V}, & 0 \leq z \leq a \\ \Psi_3(z) = [H_4 e^{ikz}] \mathbf{V}, & z > a \end{cases}, \quad (1.29)$$

tel que ( $k^2 = E^2 - m^2$ ) et  $\mathbf{V}$  est un vecteur constant de dimension ( $3 \times 1$ )

$$\mathbf{V} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \quad N_1, N_2, N_3 \text{ sont les constantes liées aux trois directions de spin } \mathbf{1}.$$

En prenant la propriété de la fonction parabolique cylindrique suivante [45],[46] :

$$\frac{d}{dz} D_p(f(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} \left[ \frac{1}{2} x D_p(f(x)) - D_{p+1}(f(x)) \right] \quad (1.30)$$

tel que

$$\frac{d\Psi(z)}{dz} = \alpha \frac{d\Psi(x)}{dx}, \text{ et } \alpha = \left( i \frac{2\eta ev_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.31)$$

Nous obtenons la solution de l'équation (1.15) sous la forme :

— Pour  $z < 0$  :

$$\phi_1(z) = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ -\frac{k}{m} \end{pmatrix} H_0 e^{ikz} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix} H_1 e^{-ikz} \right] \otimes \mathbf{V} \quad (1.32)$$

— Pour  $0 \leq z \leq a$ :

$$\phi_2(z) = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E - ev_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right)}{\frac{i m d}{m dz}} \end{pmatrix} [H_2 D_p(x) + H_3 D_{-p-1}(ix)] \otimes \mathbf{V} \quad (1.33)$$

$$\phi_2(z) = \left[ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E - ev_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right)}{\frac{i m \alpha x}{m 2}} \end{pmatrix} H_2 D_p(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E - ev_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right)}{\frac{i m \alpha x}{m 2}} \end{pmatrix} H_3 D_{-p-1}(ix) \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-i \alpha}{m} \end{pmatrix} H_2 D_{p+1}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{m} \end{pmatrix} H_3 D_{-p}(ix) \end{array} \right] \otimes \mathbf{V} \quad (1.34)$$

— Pour  $z > a$ :

$$\phi_3(z) = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m k} \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix} H_4 e^{ikz} \otimes \mathbf{V}. \quad (1.35)$$

Les coefficients  $H_0, H_1, H_2, H_3$ , et  $H_4$  peuvent être déterminées comme d'habitude en utilisant la continuité de la solution et sa dérivée dans les limites du potentiel. Pour cela, il convient d'introduire les fonctions  $F(x), \tilde{F}(x), G(x), \tilde{G}(x)$  définies par :

$$F(x) = \alpha \frac{dD_p(x)}{dx} + ikD_p(x) \quad (1.36)$$

$$\tilde{F}(x) = \alpha \frac{dD_p(x)}{dx} - ikD_p(x) \quad (1.37)$$

$$G(x) = \alpha \frac{dD_{-p-1}(ix)}{dx} + ikD_{-p-1}(ix) \quad (1.38)$$

$$\tilde{G}(x) = \alpha \frac{dD_{-p-1}(ix)}{dx} - ikD_{-p-1}(ix) \quad (1.39)$$

Les conditions de continuité de  $\phi(z)$ , et sa dérivée spatiale à  $z = 0$  et  $z = a$  équivalentes à celles de  $C_2$  et  $A_1, C_1$  et  $A_2, \varphi$  et  $B_3$  déterminent les coefficients de diffusion  $H_0, H_1, H_2, H_3$ , en fonction de  $H_4$ . Les conditions de connexité mènent au système :

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 &= H_2 D_p(x_0) + H_3 D_{-p-1}(ix_0) \\ ik(H_0 - H_1) &= [H_2 \acute{D}_p(x_0) + H_3 \acute{D}_{-p-1}(ix_0)] \alpha \\ H_4 e^{ika} &= H_2 D_p(x_a) + H_3 D_{-p-1}(ix_a) \\ ikH_4 e^{ika} &= [H_2 \acute{D}_p(x_a) + H_3 \acute{D}_{-p-1}(ix_a)] \alpha \end{aligned} \quad (1.40)$$

Nous avons dans ce système quatre équations avec cinq coefficients, alors on peut calculer l'expression de  $H_0$  en fonction de  $H_4$  dans le but de trouver le coefficient de transmission et l'expression de  $H_0$  en fonction de  $H_1$  afin de trouver le coefficient de réflexion :

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{F(x_0)\tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a)G(x_0)}{F(x_a)\tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a)G(x_a)} e^{ika} H_4 \\ H_1 &= -\frac{\tilde{F}(x_0)\tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a)\tilde{G}(x_0)}{F(x_a)\tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a)G(x_a)} e^{ika} H_4 \\ H_2 &= \frac{2ik\tilde{G}(x_a)}{F(x_a)\tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a)G(x_a)} e^{ika} H_4 \\ H_3 &= -\frac{2ik\tilde{F}(x_a)}{F(x_a)\tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a)G(x_a)} e^{ika} H_4 \end{aligned} \quad (1.41)$$

tel que

$$x_0 = x(0) = (E - v_0) \left( \frac{2a}{\eta e v_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad x_a = x(a) = x_0 + (2a\eta e v_0)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}. \quad (1.42)$$

En utilisant les relations [45],[46].

$$D_p(x) = U\left(-\frac{1}{2} - p, x\right)$$

Et

$$W(U(a, x), U(-a, \pm ix)) = \mp i e^{i\pi\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\right)}.$$

En utilisant le Wronskien, on trouve :

$$W(D_p(x), D_{-p-1}(ix)) = (-i)^{p+1}.$$

A partir de maintenant, nous ne intéresserons plus qu'à  $H_0, H_1$  et  $H_4$  en introduisant les quantités auxiliaires :

$$R_1 = D_p(x_0)D_{-p-1}(ix_a) - D_p(x_a)D_{-p-1}(ix_0) \quad (1.43)$$

$$R_2 = \dot{D}_p(x_a)\dot{D}_{-p-1}(ix_0) - \dot{D}_p(x_0)\dot{D}_{-p-1}(ix_a) \quad (1.44)$$

$$I_1 = D_p(x_a)\dot{D}_{-p-1}(ix_0) - \dot{D}_p(x_0)D_{-p-1}(ix_a) \quad (1.45)$$

$$I_2 = \dot{D}_p(x_a)D_{-p-1}(ix_0) - D_p(x_0)\dot{D}_{-p-1}(ix_a) \quad (1.46)$$

En se basant sur cette notation, nous pouvons écrire ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 & F(x_0) \tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a) G(x_0) = \\
 & \alpha^2 \left[ \overbrace{\dot{D}_p(x_0) \dot{D}_{-p-1}(ix_a) - \dot{D}_p(x_a) \dot{D}_{-p-1}(ix_0)}^{-R_2} \right] + \\
 & k^2 \left[ \overbrace{D_p(x_0) D_{-p-1}(ix_a) - D_p(x_a) D_{-p-1}(ix_0)}^{R_1} \right] + \\
 & \alpha ik \left[ \overbrace{D_p(x_a) \dot{D}_{-p-1}(ix_0) - \dot{D}_p(x_0) D_{-p-1}(ix_a)}^{I_1} \right] + \\
 & \alpha ik \left[ \overbrace{D_p(x_0) \dot{D}_{-p-1}(ix_a) - \dot{D}_p(x_a) D_{-p-1}(ix_0)}^{-I_2} \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$F(x_0) \tilde{G}(x_a) - \tilde{F}(x_a) G(x_0) = -\alpha^2 R_2 + k^2 R_1 + \alpha ik [I_1 - I_2]$$

Et

$$\begin{aligned}
 F(x_a) \tilde{G}(x_0) - \tilde{F}(x_0) G(x_a) &= 2\alpha ik [D_p(x_a) \dot{D}_{-p-1}(ix_a) - \dot{D}_p(x_a) D_{-p-1}(ix_a)] \\
 &= 2\alpha ik W(D_p(x_a), D_{-p-1}(ix_a)) = 2\alpha k (-i)^p
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 & \tilde{F}(x_a) \tilde{G}(x_0) - \tilde{F}(x_0) \tilde{G}(x_a) = \\
 & \alpha^2 \left[ \overbrace{\dot{D}_p(x_a) \dot{D}_{-p-1}(ix_0) - \dot{D}_p(x_0) \dot{D}_{-p-1}(ix_a)}^{R_2} \right] - \\
 & k^2 \left[ \overbrace{D_p(x_a) D_{-p-1}(ix_0) - D_p(x_0) D_{-p-1}(ix_a)}^{-R_1} \right] - \\
 & \alpha ik \left[ \overbrace{D_p(x_a) \dot{D}_{-p-1}(ix_0) - \dot{D}_p(x_0) D_{-p-1}(ix_a)}^{I_1} \right] - \\
 & \alpha ik \left[ \overbrace{D_p(x_0) \dot{D}_{-p-1}(ix_a) - \dot{D}_p(x_a) D_{-p-1}(ix_0)}^{-I_2} \right]
 \end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\tilde{F}(x_a) \tilde{G}(x_0) - \tilde{F}(x_0) \tilde{G}(x_a) = \alpha^2 R_2 + k^2 R_1 - \alpha ik [I_1 - I_2]. \quad (1.47)$$

On peut réécrire les coefficients de diffusion  $H_0, H_1$ , en fonction de  $H_4$

$$H_0 = \frac{-\alpha^2 R_2 + k^2 R_1 + \alpha i k (I_1 - I_2)}{2\alpha k (-i)^p} e^{ika} H_4 \quad (1.48)$$

$$H_1 = \frac{\alpha^2 R_2 + k^2 R_1 - \alpha i k (I_1 - I_2)}{2\alpha k (-i)^p} e^{ika} H_4 \quad (1.49)$$

Les coefficients  $H_0, H_1$  et  $H_4$  sont définies comme suit :

- $H_0$  est le coefficient de l'onde incidente de  $(-\infty \rightarrow 0)$ ,
- $H_1$  et  $H_4$  sont respectivement les coefficients de l'onde réfléchie et de l'onde transmise.

À ce niveau, il est facile de calculer les coefficients de réflexion et de transmission (respectivement,  $R$  et  $T$ ) le long de chaque direction

avec

$$J^3 \equiv \bar{\psi} \beta^3 \psi \quad (1.50)$$

Et

$$\bar{\psi} = \psi^+ \left[ 2(\beta^0)^2 - \mathbf{1} \right] \quad (1.51)$$

Avec

$$(\beta^0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 1 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$2(\beta^0)^2 - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 1 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tel que

$$\bar{\psi}^T = \left( -\varphi^* \quad \mathbf{A}^* \quad B^* \quad -C^* \right)$$

on obtient

$$J^3 = J_1 + J_2 + J_3,$$

où

$$\begin{cases} J_1 = -(\Psi_1^* \Theta_1 + \Psi_1 \Theta_1^*) = -(A_1^* C_2 + A_1 C_2^*) \\ J_2 = -(\Psi_2^* \Theta_2 + \Psi_2 \Theta_2^*) = (A_2^* C_1 + A_2 C_1^*) \\ J_3 = -(\Psi_3^* \Theta_3 + \Psi_3 \Theta_3^*) = -(B_3^* \varphi + B_3 \varphi^*) \end{cases} \quad (1.52)$$

$$J_{inc} = 2 \frac{k}{m} |H_0|^2 N_i^2, J_{ref} = -2 \frac{k}{m} |H_1|^2 N_i^2, J_{tran} = 2 \frac{k}{m} |H_4|^2 N_i^2.$$

En utilisant la relation de l'équation (1.48) et l'équation (1.49) les expressions de  $T$  et  $R$

peuvent être écrits

$$\mathbf{R} = \frac{|J_{ref}|}{|J_{inc}|} = \frac{|H_1|^2}{|H_0|^2} = \left| \frac{\alpha^2 R_2 + k^2 R_1 - \alpha i k (I_1 - I_2)}{-\alpha^2 R_2 + k^2 R_1 + \alpha i k (I_1 - I_2)} \right|^2 \quad (1.53)$$

$$\mathbf{T} = \frac{|J_{tran}|}{|J_{inc}|} = \frac{|H_4|^2}{|H_0|^2} = \left| \frac{2\alpha k (-i)^p}{-\alpha^2 R_2 + k^2 R_1 + \alpha i k (I_1 - I_2)} \right|^2 \quad (1.54)$$

## 1.4 Conditions de raccordement

Dans cette section, nous déterminons les bonnes conditions de raccordement pour le potentiel admettant un saut au point spécifié  $z_0$  et  $z_a$ , on donne :

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ v_0 & \text{si } z > 0 \end{cases}, v(z) = \begin{cases} v_1 & \text{si } z < a \\ 0 & \text{si } z > a \end{cases} \quad (1.55)$$

ET comme il a été mentionné précédemment, les conditions habituelles de continuité conduisant directement à la solution triviale.

Pour trouver la condition adéquate, nous procédons de la manière suivante.

Tout d'abord, nous partons de  $\Psi$  qui vérifie l'équation de **KG** équation (1.17). Ensuite, nous devons lui imposer, ainsi que ses dérivés, la condition de continuité, de même pour  $\Theta$  et  $\Phi$  qui devraient être continues en  $z_0$  et  $z_a$ .

Nous écrivons :

$$\begin{aligned} \Psi(z_0^-) &= \Psi(z_0^+) & \Psi(z_a^-) &= \Psi(z_a^+) \\ \frac{d\Psi(z_0^-)}{dz} &= \frac{d\Psi(z_0^+)}{dz} & \frac{d\Psi(z_a^-)}{dz} &= \frac{d\Psi(z_a^+)}{dz} \end{aligned} \quad (1.56)$$

En utilisant ces conditions, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Psi(z_0^+) \\ \Phi(z_0^+) \\ \Theta(z_0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E - ev_0}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(z_0^-) \\ \Phi(z_0^-) \\ \Theta(z_0^-) \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Et

$$\begin{pmatrix} \Psi(z_a^+) \\ \Phi(z_a^+) \\ \Theta(z_a^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{E - ev_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(z_a^-) \\ \Phi(z_a^-) \\ \Theta(z_a^-) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Ce qui conduit à ce résultat :

$$\begin{aligned} J^i(z_0^+) &= J^i(z_0^-) \\ J^i(z_a^+) &= J^i(z_a^-) \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} J^0(z_0^+) &= \frac{E - ev_0}{E} J^0(z_0^-) \\ J^0(z_a^+) &= \frac{E}{E - ev_1} J^0(z_a^-) \end{aligned} \quad (1.60)$$

C'est-à-dire que la densité de courant de charge reste toujours continue le long de l'axe  $-i$ , alors que la densité de charge a une discontinuité aux points du marche à  $z_0$  et  $z_a$  du potentiel, l'équation (1.59). Ce qui assure la conservation de la charge totale, alors que le facteur multiplicatif présent dans l'équation (1.60), nous permet selon son signe de déterminer s'il existe une création de paire (particule-antiparticule), *ounon*

Cette équation révèle ensuite la présence de la création de paire et permet d'élucider le paradoxe de Klein. Dans l'équation (1.60), il apparaît, une inversion du signe indiquant alors la création de l'antiparticule de l'autre côté du potentiel barrière. Comme l'équation de **DKP** concerne les bosons, donc il n'est pas nécessaire d'introduire la masse de Dirac pour expliquer le paradoxe de Klein, et nous recourrons par conséquent au champ **DKP** chargé pour expliquer cet effet.

## 1.5 Solution de l'équation de DKP de spin 0

L'étude du cas du spin 0 est similaire à celle du spin 1. Nous allons déduire les solutions relatives au spin 0 de l'étude précédente

En mettant :

$$\phi(z)^T = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

L'équation du système (1.15) est ramenée au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} O_{KG}\eta_1 = 0 \\ \eta_2 = \frac{(E - eV)}{m}\eta_1 \\ \eta_3 = 0 \\ \eta_4 = 0 \\ \eta_5 = \frac{i}{m} \frac{d\eta_1}{dz} \end{array} \right. \quad (1.62)$$

Ce qui indique les résultats suivantes :

$$\eta_1 \rightarrow \Psi, \eta_2 \rightarrow \Phi, (\eta_3, \eta_4) \rightarrow C_3, \eta_5 \rightarrow \Theta.$$

Ensuite, nous écrivons la solution de l'équation (1.62) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \eta_2 \\ \eta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(E - eV)}{m} \\ \frac{i}{m} \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \otimes \eta_1 \quad (1.63)$$

tel que

$$\eta_1 = \begin{cases} H_0 e^{ikz} + H_1 e^{-ikz}, & z < 0 \\ H_2 D_p(x) + H_3 D_{-p-1}(ix), & 0 \leq z \leq a \\ H_4 e^{ikz}, & z > a \end{cases} \quad (1.64)$$

— La solution pour  $z < 0$ :

$$\phi_1(z) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix} H_0 e^{ikz} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ -\frac{k}{m} \end{pmatrix} H_1 e^{-ikz} \quad (1.65)$$

— Pour  $0 \leq z \leq a$ :

$$\phi_2(z) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E - ev_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right)}{\frac{i m}{m} \frac{d}{dz}} \end{pmatrix} (H_2 D_p(x) + H_3 D_{-p-1}(ix)) \quad (1.66)$$

$$\left[ \begin{aligned} \phi_2(z) = & \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E - ev_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right)}{\frac{i m}{m} \frac{\alpha x}{2}} \end{pmatrix} H_2 D_p(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E - ev_0 \left(1 - \eta \frac{z}{a}\right)}{-\frac{i m}{m} \frac{\alpha x}{2}} \end{pmatrix} H_3 D_{-p-1}(ix) \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{i \alpha}{m} \end{pmatrix} H_2 D_{p+1}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{m} \end{pmatrix} H_3 D_{-p}(ix) \end{aligned} \right]$$

— Enfin, pour  $z > a$ :

$$\phi_3(z) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{m} \\ -\frac{k}{m} \end{pmatrix} H_4 e^{ikz} \quad (1.67)$$

Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission (respectivement,  $R$  et  $T$ ) sont données par les équations (1.53), (1.54).

Et les conditions aux limites appropriées sont également déduites dans ce cas comme suit :

$$\begin{pmatrix} \eta_1(z_0^+) \\ \eta_2(z_0^+) \\ \eta_5(z_0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E - ev_0}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(z_0^-) \\ \eta_2(z_0^-) \\ \eta_5(z_0^-) \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

Et

$$\begin{pmatrix} \eta_1(z_a^+) \\ \eta_2(z_a^+) \\ \eta_5(z_a^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{E - ev_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(z_a^-) \\ \eta_2(z_a^-) \\ \eta_5(z_a^-) \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

## 1.6 Résultats numériques et discussions

Nous proposons des solutions numériques de l'équation (1.54), alors nous obtenons les graphiques suivants : Figure 1.2, Figure 1.3, Figure 1.4, en variant uniquement l'énergie  $E$ .

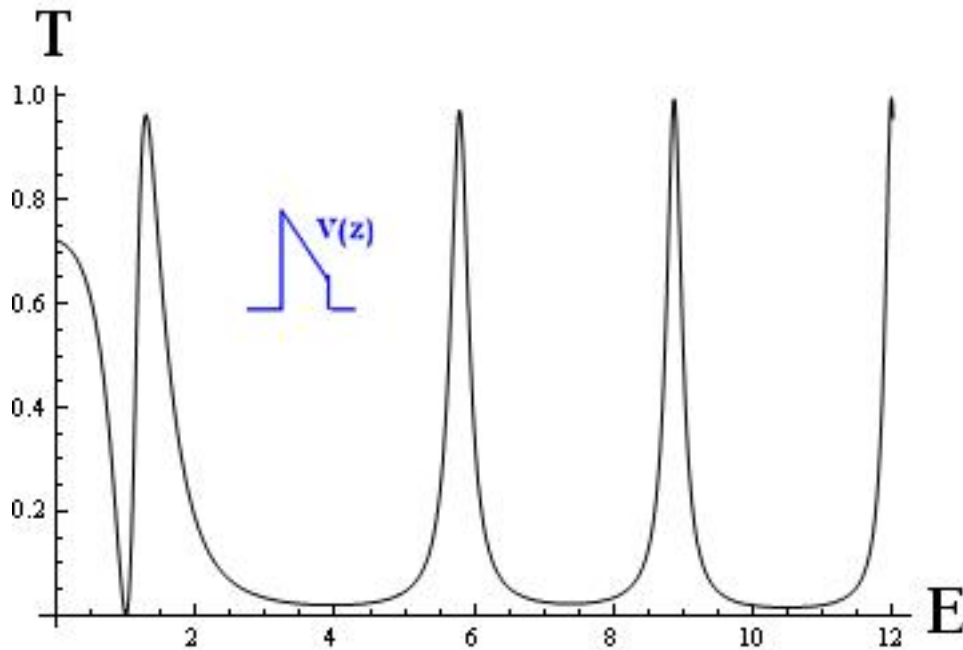


FIGURE 1.2 – Le graphique illustre le comportement du coefficient de transmission ( $T$ ) pour différentes valeurs de l'énergie  $E$  avec  $a = 1, E_0 = ev_0 = 2, m = 1, \eta = 0.5$

On observe un pic de transmission par effet tunnel à 80%, pour  $E > E_0$  le coefficient de transmission admet plusieurs pics à 100% et dont la largeur différent.

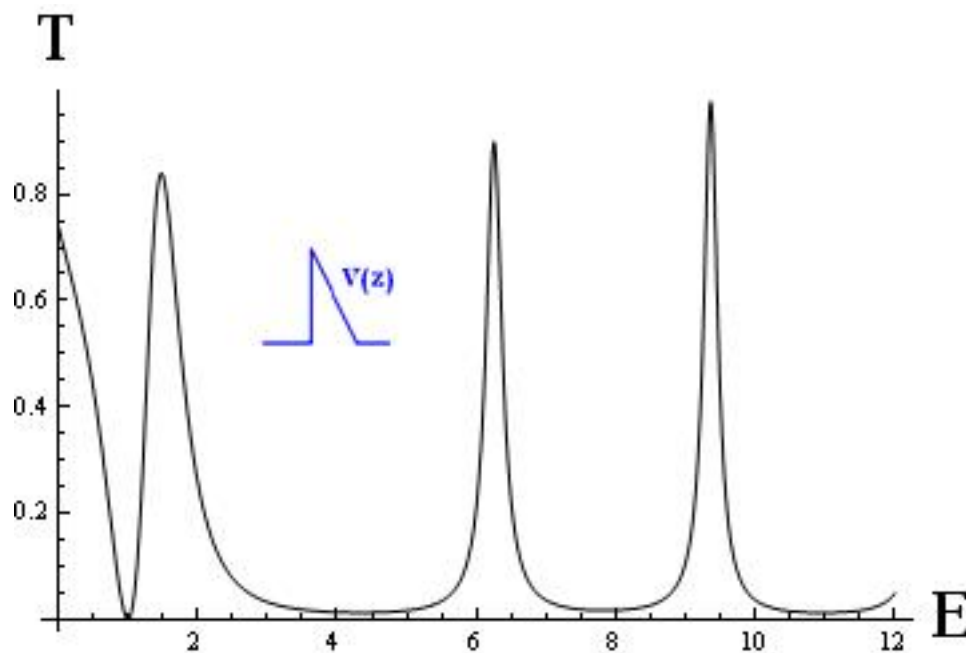


FIGURE 1.3 – Le graphique illustre le comportement du coefficient de transmission ( $T$ ) pour différentes valeurs de l'énergie  $E$  avec  $a = 1, E_0 = ev_0 = 2, m = 1, \eta = 1$

Pour une barrière dentaire on observe un pic de transmission par effet tunnel à 100% quand  $E \simeq E_0$ , pour  $E > E_0$  le coefficient de transmission admet plusieurs pics à 100% et dont la largeur reste quasiment identique.

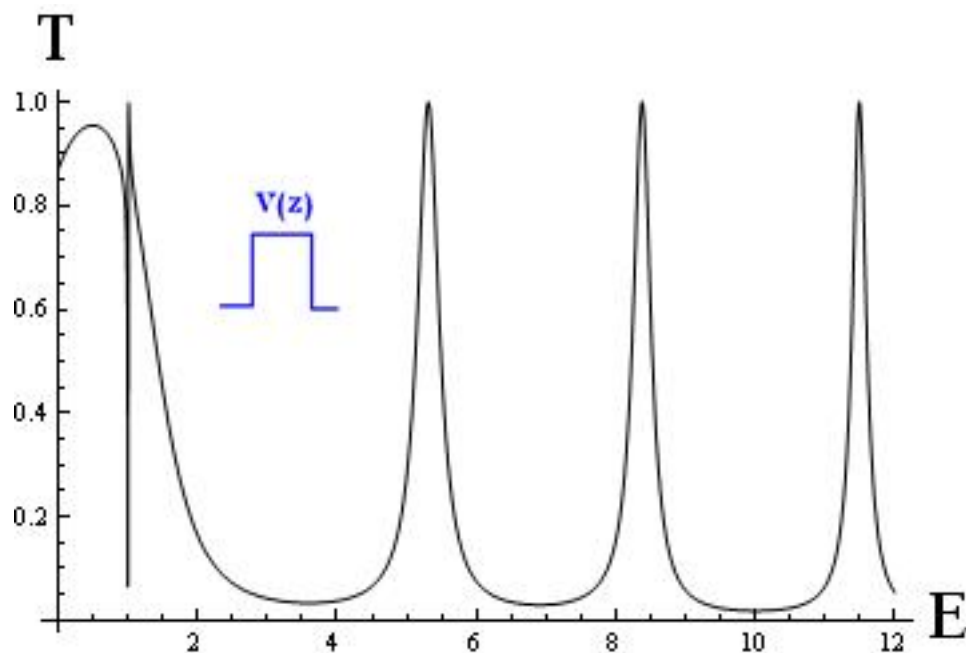


FIGURE 1.4 – Le graphique illustre le comportement du coefficient de transmission ( $T$ ) pour différentes valeurs de l'énergie  $E$  avec  $a = 1, E_0 = ev_0 = 2, m = 1, \eta = 0.01$

Pour une barrière rectangulaire on observe un pic de transmission par effet tunnel à 100% quand  $E \simeq E_0$ , pour  $E > E_0$  le coefficient de transmission admet plusieurs pics à

100% et dont la largeur reste quasiment identique mais ils sont plus étroits par rapport au cas précédent .

**Remarque générale :** On remarque que plus le facteur  $\eta$  décroît et plus le nombre d'oscillation et de résonances augmente.

## CHAPITRE 2

# RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DKP EN PRÉSENCE D'UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### Sommaire

---

<b>1.1 Introduction</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>1.2 Solution de l'équation de DKP de Spin 1</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.3 La barrière trapézoïdale</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.4 Conditions de raccordement</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1.5 Solution de l'équation de DKP de spin 0</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>1.6 Résultats numériques et discussions</b> . . . . .	<b>18</b>

---

## 2.1 Introduction

L'interaction d'une particule chargée avec un champ électromagnétique quantifié présente un grand intérêt. Par exemple, le comportement des électrons dans des champs magnétiques homogènes a été largement utilisé pour obtenir des informations expérimentales sur les propriétés des porteurs de charge [47]. L'effet de la création de particules par les champs électromagnétiques forts attire déjà l'attention depuis longtemps. L'effet a une nature purement quantique et a d'abord été considéré dans le contexte de la mécanique quantique relativiste, sachant que toutes les questions ne peuvent être résolues que dans le cadre de la théorie des champs quantiques (QFT) [48]. Dans ce chapitre, nous avons calculé les solutions de l'équation DKP avec un spin 0 en termes de fonctions hypergéométriques pour un potentiel scalaire et vectoriel de type tangente hyperbolique.

## 2.2 Solution de l'équation DKP de spin 0

Soit une particule sous l'effet de potentiels magnétiques  $A(y)$  et électrique  $V_0(y)$ . Nous avons l'équation DKP suivante :

$$(i\beta^u D_u - m)\Psi = 0, \text{ où } D_u = \partial_u + ieA_u. \quad (2.1)$$

Dans ce cas, le vecteur potentiel  $A(y)$  et le potentiel  $V_0(y)$ , sont présentés dans la figure 2.1.

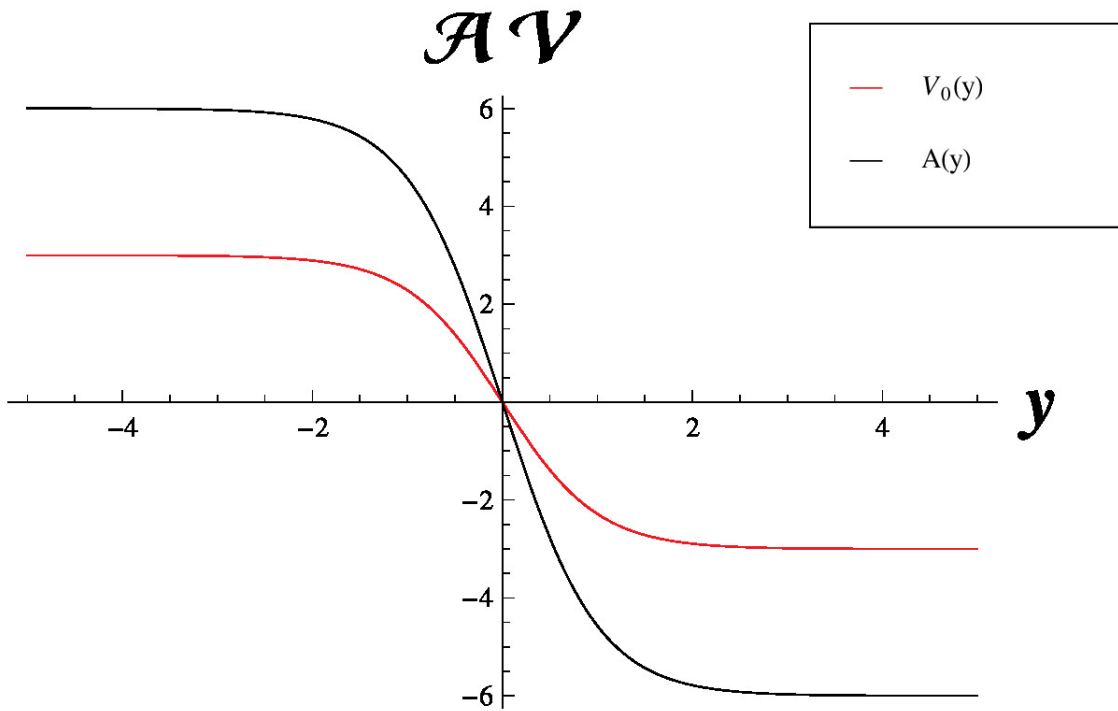


FIGURE 2.1 – Présentation de l'évolution du potentiel magnétique  $A(y)$  et du potentiel électrique  $V_0(y)$  en fonction de  $y$  pour  $a$  quelconque.

Avec  $A(y)$  et  $V_0(y)$  sont définis comme suit

$$A(y) = -\frac{H_0}{a} \tanh(ay), \quad V_0(y) = -\frac{E_0}{a} \tanh(ay) \quad (2.2)$$

Les matrices  $\beta^0$  et  $\beta^j$  pour un spin 0 sont présentées au chapitre (I).

En se basant sur l'équation (2.1) nous obtenons :

$$(i\beta^0 (\partial_0 + ieV_0(y)) - i\beta^1 (\partial_x + ieA(y)) - i\beta^2 \partial_y - i\beta^3 \partial_z - m)\Psi = 0 \quad (2.3)$$

tel que

$$\Psi(\vec{r}, t) = \phi(y) \exp(-i(Et + k_x x + k_z z)); \phi^T(y) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donc

$$\begin{aligned} (E - eV_0(y))\phi_2 + (k_x - eA_x(y))\phi_3 + i\partial_y\phi_4 + k_z\phi_5 - m\phi_1 &= 0 \\ (E - eV_0(y))\phi_1 - m\phi_2 &= 0 \\ -(k_x - eA_x(y))\phi_1 - m\phi_3 &= 0 \\ -i\partial_y\phi_1 - m\phi_4 &= 0 \\ -k_z\phi_1 - m\phi_5 &= 0 \end{aligned}$$

après le découplage des équations, on trouve :

$$\left[ \partial_y^2 + (E - eV_0(y))^2 - (k_x - eA(y))^2 - k_z^2 - m^2 \right] \phi_1(y) = 0 \quad (2.5)$$

l'expression de la fonction d'onde est définie comme suit :

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E - eV_0(y)}{m} \\ -\frac{m}{k_x - eA(y)} \\ \frac{m}{i\partial_y} \\ -\frac{m}{k_z} \\ \frac{m}{m} \end{bmatrix} \phi_1(y). \quad (2.6)$$

On introduit la notation suivante :

$$\delta = e\frac{H_0}{a} \quad \text{et} \quad \eta = e\frac{E_0}{a} \quad (2.7)$$

l'équation (2.5) devient :

$$\left[ \partial_y^2 + (E + \eta \tanh(ay))^2 - (k_x + \delta \tanh(ay))^2 - k_z^2 - m^2 \right] \phi_1(y) = 0 \quad (2.8)$$

$$\left[ \partial_y^2 + E^2 - k_x^2 - k_z^2 - m^2 + 2(E\eta - \delta k_x) \tanh(ay) + (\eta^2 - \delta^2) \tanh^2(ay) \right] \phi_1(y) = 0 \quad (2.9)$$

on sait que

$$\tanh^2(ay) = 1 - \text{sech}^2(ay)$$

on aura

$$\left[ \partial_y^2 + E^2 - k_x^2 - k_z^2 - m^2 + \eta^2 - \delta^2 - 2(\delta k_x - E\eta) \tanh(ay) + (\delta^2 - \eta^2) \text{sech}^2(ay) \right] \phi_1(y) = 0 \quad (2.10)$$

Effectué la transformation suivante :

$$\lambda = \frac{k_x^2 + k_z^2 + m^2 - E^2 - \eta^2 + \delta^2}{a^2}, \gamma = \frac{\delta^2 - \eta^2}{a^2}, \text{ et } \sigma = \frac{2(\delta k_x - \eta E)}{a^2} \quad (2.11)$$

on obtient

$$\left[ \partial_y^2 - \lambda a^2 - \sigma a^2 \tanh(ay) + \gamma a^2 \operatorname{sech}^2(ay) \right] \phi_1(y) = 0 \quad (2.12)$$

Rosen et Morse [49] convertissent cette équation (2.12) selon une équation différentielle hypergéométrique par la transformation et le changement de variables suivants :

$$\phi_1(y) = e^{\mu ay} \cosh^{-\nu}(ay) F(y), \quad z = \frac{1}{2}(1 + \tanh(ay)), \quad (2.13)$$

avec

$$0 < z < 1.$$

alors l'équation (2.12) peut être formulée comme suit :

$$z(1-z)F'' + [\mu + \nu + 1 - 2(\nu + 1)z]F' + [\gamma - \nu(\nu + 1)]F = 0. \quad (2.14)$$

Considérons les conditions aux limites ( $z \rightarrow 0$  et  $z \rightarrow 1$ ),  $F(z)$  doit être finie.

La solution générale de l'équation (2.14) régulière à l'origine ( $y \rightarrow -\infty$  ou  $z \rightarrow 0$ ) :

$$F(z) = C {}_2F_1 \left( \nu + \frac{1}{2} - \left( \gamma + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}, \nu + \frac{1}{2} + \left( \gamma + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}; \mu + \nu + 1; z \right) \quad (2.15)$$

où  $C$  est une constante réelle.

### 2.2.1 Cas des états liés

La fonction hypergéométrique diverge comme :  $\exp(2(\nu - \mu)y)$  [49] quand  $z$  s'approche de un ( $z \rightarrow 1$ ), les constantes  $\mu, \nu$  prennent les valeurs positives des racines :

$$\mu = -\frac{1}{2} \left[ (\lambda + \sigma)^{\frac{1}{2}} - (\lambda - \sigma)^{\frac{1}{2}} \right], \nu = \frac{1}{2} \left[ (\lambda + \sigma)^{\frac{1}{2}} + (\lambda - \sigma)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.16)$$

#### Spectre d'énergie :

Nous introduisons la notation

$$\vartheta = \left( \gamma + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Cette fonction hypergéométrique doit être finie si et seulement si :

$$\nu + \frac{1}{2} - \left( \gamma + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = -n \Rightarrow \nu = \vartheta - \frac{1}{2} - n. \quad (2.18)$$

Dans ce cas, la fonction est un polynôme de Jacobi.

L'autre constante  $\mu$  définie par :

$$\mu = \frac{-\sigma}{2\vartheta - 2n - 1}. \quad (2.19)$$

Le nombre  $n$  doit être un entier naturel.

Le spectre d'énergie peut être calculé à l'aide des équations (2.7), (2.11), (2.17), (2.18) et (2.19).

$$E_n = \pm \sqrt{k_x^2 + k_z^2 + m^2 - \eta^2 + \delta^2 - a^2 \left[ \left( \vartheta - \frac{1}{2} - n \right)^2 + \left( \frac{\sigma}{2\vartheta - 2n - 1} \right)^2 \right]} \quad (2.20)$$

L'énergie est réelle, donc il faut que

$$\gamma + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow e^2 \frac{H_0^2 - E_0^2}{a^4} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow E_0 \leq \sqrt{H_0^2 + \frac{a^4}{4e^2}}$$

Il suffit de choisir

$$H_0 \geq E_0.$$

La forme finale de l'expression de la fonction d'onde est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= C e^{\mu a y} \cosh^{-\nu}(a y) \\ &F \left( \nu + \frac{1}{2} - \left( \gamma + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}, \nu + \frac{1}{2} + \left( \gamma + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}; \mu + \nu + 1; \frac{1}{2} (1 + \tanh(a y)) \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E - eV_0(y)}{m} \\ -\frac{k_x - eA(y)}{m} \\ -\frac{i\partial_y}{m} \\ -\frac{k_z}{m} \end{bmatrix} \phi_1(y) \quad (2.22)$$

## 2.2.2 Cas de la diffusion

Le comportement asymptotique de la fonction d'onde :  
quand  $y \rightarrow \pm\infty$ , les solutions oscillent si  $\nu$  et  $\mu$  sont des imaginaires purs,  
donc il faut que :

$$\lambda + \sigma < 0, \lambda - \sigma < 0 \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\lambda + \sigma)^{\frac{1}{2}} = iq, \frac{1}{2}(\lambda - \sigma)^{\frac{1}{2}} = ip \quad (2.24)$$

Nous pouvons écrire

$$q = \frac{1}{2}(-\lambda - \sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(E + \eta)^2 - k_z^2 - m^2 - (k_x + \delta)^2}}{2a} \quad (2.25)$$

$$p = \frac{1}{2}(\sigma - \lambda)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(E - \eta)^2 - (k_x - \delta)^2 - k_z^2 - m^2}}{2a} \quad (2.26)$$

alors

$$\mu = -i(q - p), \nu = i(p + q), \quad (2.27)$$

$$\phi_1(y) = e^{-i(q-p)ay} \cosh^{-i(p+q)}(ay) F(y) \quad (2.28)$$

Les deux solutions de l'équation différentielle hypergéométrique (2.14) sont linéairement indépendante au voisinage des points singuliers (0, 1) ces solutions sont données par :

Quand ( $y \rightarrow -\infty$  ou  $z \rightarrow 0$ ) :

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= e^{-i(q-p)ay} \cosh^{-i(q+p)}(ay) \\ &\left\{ C_1 F\left(i(q+p) + \frac{1}{2} - \vartheta, i(q+p) + \frac{1}{2} + \vartheta; 2ip + 1; z\right) + \right. \\ &\left. \left\{ z^{-2ip} C_2 F\left(i(q-p) + \frac{1}{2} - \vartheta, i(q-p) + \frac{1}{2} + \vartheta; 1 - 2ip; z\right) \right\} \right\} \quad (2.29) \end{aligned}$$

tel que  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles.

Lorsque ( $y \rightarrow +\infty$  ou  $z \rightarrow 1$ )

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= e^{-i(q-p)ay} \cosh^{-i(q+p)}(ay) \\ &\left\{ C_1 \left[ \begin{array}{l} A_1 F\left(i(q+p) + \frac{1}{2} - \vartheta, i(q+p) + \frac{1}{2} + \vartheta; 2iq + 1; 1 - z\right) + \\ (1 - z)^{-2iq} A_2 F\left(i(p - q) + \frac{1}{2} + \vartheta, i(p - q) + \frac{1}{2} - \vartheta; 1 - 2iq; 1 - z\right) \end{array} \right] + \right. \\ &\left. C_2 \left[ \begin{array}{l} A'_1 z^{-2ip} F\left(i(q-p) + \frac{1}{2} + \vartheta, i(q-p) + \frac{1}{2} - \vartheta; 2iq + 1; 1 - z\right) + \\ z^{-2ip} (1 - z)^{-2iq} A'_2 F\left(\frac{1}{2} - i(q+p) - \vartheta, \frac{1}{2} - i(q+p) + \vartheta; 1 - 2iq; 1 - z\right) \end{array} \right] \right\} \quad (2.30) \end{aligned}$$

tel que

$$A_1 = \frac{\Gamma(2ip+1)\Gamma(-2iq)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i(p-q)+\vartheta)\Gamma(\frac{1}{2}+i(p-q)-\vartheta)} \quad (2.31)$$

$$A_2 = \frac{\Gamma(2ip+1)\Gamma(2iq)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i(p+q)+\vartheta)\Gamma(\frac{1}{2}+i(p+q)-\vartheta)} \quad (2.32)$$

$$A_1' = \frac{\Gamma(1-2ip)\Gamma(-2iq)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i(p+q)+\vartheta)\Gamma(\frac{1}{2}-i(p+q)-\vartheta)} \quad (2.33)$$

$$A_2' = \frac{\Gamma(1-2ip)\Gamma(2iq)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i(p-q)+\vartheta)\Gamma(\frac{1}{2}-i(p-q)-\vartheta)} \quad (2.34)$$

En utilisant les limites suivantes, avec  $\alpha$  une constante réelle :

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(b, c; d; z) = 1, \lim_{y \rightarrow -\infty} z = 0; \lim_{y \rightarrow \infty} z = 1, \lim_{z \rightarrow 0} (z)^\alpha = e^{2\alpha y}; \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^\alpha = e^{-2\alpha y} \quad (2.35)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \tanh(ay) = \pm 1, \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \cosh^\alpha(ay) = 2^{-\alpha} e^{\pm\alpha y} \quad (2.36)$$

Le comportement asymptotique de  $\phi_1(y)$  lorsque  $y$  tend vers l'infini négatif ( $y \rightarrow -\infty$  ou  $z \rightarrow 0$ ) est :

$$\phi_1(y) = 2^{i(p+q)} \left[ C_1 e^{2ipay} + C_2 e^{-2ipay} \right] \quad (2.37)$$

Et quand  $y$  tend vers  $+\infty$  : ( $y \rightarrow +\infty$  ou  $z \rightarrow 1$ ) est :

$$\phi_1(y) = 2^{i(p+q)} e^{-2iqay} \left\{ C_1 \left[ A_1 + e^{4iqay} A_2 \right] + C_2 \left[ A_1' + e^{4iqay} A_2' \right] \right\} \Rightarrow \quad (2.38)$$

$$\phi_1(y) = 2^{i(p+q)} \left\{ \left[ C_1 A_1 + C_2 A_1' \right] e^{-2iqay} + \left[ C_1 A_2 + C_2 A_2' \right] e^{2iqay} \right\} \quad (2.39)$$

Nous savons que quand ( $y \rightarrow +\infty$ ) aucune onde n'est réfléchie, alors :

$$C_1 A_1 + C_2 A_1' = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} + \frac{A_1'}{A_1} = 0. \quad (2.40)$$

On pose

$$k_1 = 2ap = \sqrt{(E+\eta)^2 - (k_x + \delta)^2 - k_z^2 - m^2} \quad (2.41)$$

$$k_2 = 2aq = \sqrt{(E-\eta)^2 - (k_x - \delta)^2 - k_z^2 - m^2} \quad (2.42)$$

La solution générale de la fonction d'onde est :

Quand  $y \rightarrow -\infty$

on trouve  $\left( \lim_{y \rightarrow -\infty} V_0(y) = \frac{E_0}{a}, \lim_{y \rightarrow -\infty} A(y) = \frac{H_0}{a} \right)$

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \frac{2^{i(p+q)}}{\sqrt{2k_1}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{aE - eE_0}{am} \\ -\frac{ak_x - eH_0}{am} \\ \frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_z}{m} \end{bmatrix} C_1 e^{ik_1 y} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{aE - eE_0}{am} \\ -\frac{ak_x - eH_0}{am} \\ -\frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_z}{m} \end{bmatrix} C_2 e^{-ik_1 y} \right\} \quad (2.43)$$

quand  $y \rightarrow +\infty$

on trouve  $\left( \lim_{y \rightarrow +\infty} V_0(y) = -\frac{E_0}{a}, \lim_{y \rightarrow +\infty} A(y) = -\frac{H_0}{a} \right)$

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \frac{2^{i(p+q)}}{\sqrt{2k_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{aE + eE_0}{am} \\ -\frac{ak_x + eH_0}{am} \\ \frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_z}{m} \end{bmatrix} [C_1 A_2 + C_2 A_2'] e^{ik_2 y}. \quad (2.44)$$

Les coefficients  $\frac{1}{\sqrt{2k_1}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2k_2}}$  sont déterminés par l'utilisation de la condition de normalisation, qui explique la conservation du courant de la particule de Klein Gordon.

### 2.3 Détermination des coefficients de réflexion et de transmission

En utilisant la définition de la densité de courant, on obtient :

$$J^j \equiv \bar{\psi} \beta^j \psi \quad (2.45)$$

Ceci implique que

$$J^y = -(\phi_4^* \phi_1 + \phi_1^* \phi_4) \quad (2.46)$$

Et on obtient :

$$j_{ins} = \frac{1}{m} |C_1|^2 \quad (2.47)$$

$$j_{ref} = -\frac{1}{m} |C_2|^2 \quad (2.48)$$

$$j_{tran} = \frac{1}{m} |C_1 A_1 + C_2 A'_1|^2 \quad (2.49)$$

En utilisant la relation dans l'équation (2.40), nous trouvons que :

$$R = \frac{|j_{ref}|}{|j_{ins}|} = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} = \frac{|A_1|^2}{|A'_1|^2} \quad (2.50)$$

$$T = \frac{|j_{tran}|}{|j_{ins}|} = \frac{|C_1 A_1 + C_2 A'_1|^2}{|C_1|^2} = \frac{|A'_1 A_2 - A_1 A'_2|^2}{|A'_1|^2} \quad (2.51)$$

On obtient

$$R = \frac{|\Gamma(2ip+1)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - i(p+q) + \vartheta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - i(p+q) - \vartheta)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + i(p-q) + \vartheta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i(p-q) - \vartheta)|^2 |\Gamma(1-2ip)|^2}$$

$$T = \frac{|A'_1 A_2 - A_1 A'_2|^2}{|A'_1|^2} = \left( 1 - \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} - i(p+q) + \vartheta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - i(p+q) - \vartheta)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + i(p-q) + \vartheta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i(p-q) - \vartheta)|^2} \right)$$

En utilisant les propriétés de la fonction gamma ( $\Gamma$ ) [50] :

$$\frac{|\Gamma(1+a+iy)|^2 |\Gamma(1-a+iy)|^2}{|\Gamma(1+iz)|^2} = \frac{2\pi^2 (a^2 + y^2)}{\cosh 2\pi y - \cos 2\pi a} \quad (2.52)$$

$$\text{et } \Gamma(z) = \frac{\pi z}{\sinh \pi z} \quad \text{et } \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

On aura

$$R = \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} - i(p+q) + \vartheta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - i(p+q) - \vartheta)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + i(p-q) + \vartheta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i(p-q) - \vartheta)|^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{|\Gamma(1 + (\vartheta - \frac{1}{2}) - i(\alpha + \beta))|^2 \frac{|\Gamma(1 - (\vartheta - \frac{1}{2}) - i(\alpha + \beta))|^2}{|(\frac{1}{2} - \vartheta - i(\alpha + \beta))|^2}}{|\Gamma(1 + (\vartheta - \frac{1}{2}) + i(\alpha - \beta) + \vartheta)|^2 \frac{|\Gamma(1 - (\vartheta - \frac{1}{2}) + i(\alpha - \beta) - \vartheta)|^2}{|(\frac{1}{2} - \vartheta + i(\alpha - \beta))|^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\cosh 2\pi(p-q) - \cos 2\pi(\vartheta - \frac{1}{2})}{\cosh 2\pi(p+q) - \cos 2\pi(\vartheta - \frac{1}{2})}$$

$$T = 1 - R$$

Les expressions de  $R$  et  $T$  peuvent être écrites comme suit :

$$R = \frac{\cosh 2\pi (p - q) + \cos 2\pi (\vartheta)}{\cosh 2\pi (p + q) + \cos 2\pi (\vartheta)} \quad (2.53)$$

$$T = \frac{\cosh 2\pi (p + q) - \cosh 2\pi (p - q)}{\cosh 2\pi (p + q) + \cos 2\pi \vartheta} \quad (2.54)$$

La conservation de la probabilité exige que  $R + T = 1$  soit satisfaite.

## 2.4 Résultats numériques

Nous obtenons les graphiques suivants (Figure 2.2), représentant les coefficients de réflexion et de transmission lors de la variation de l'énergie  $E$ .

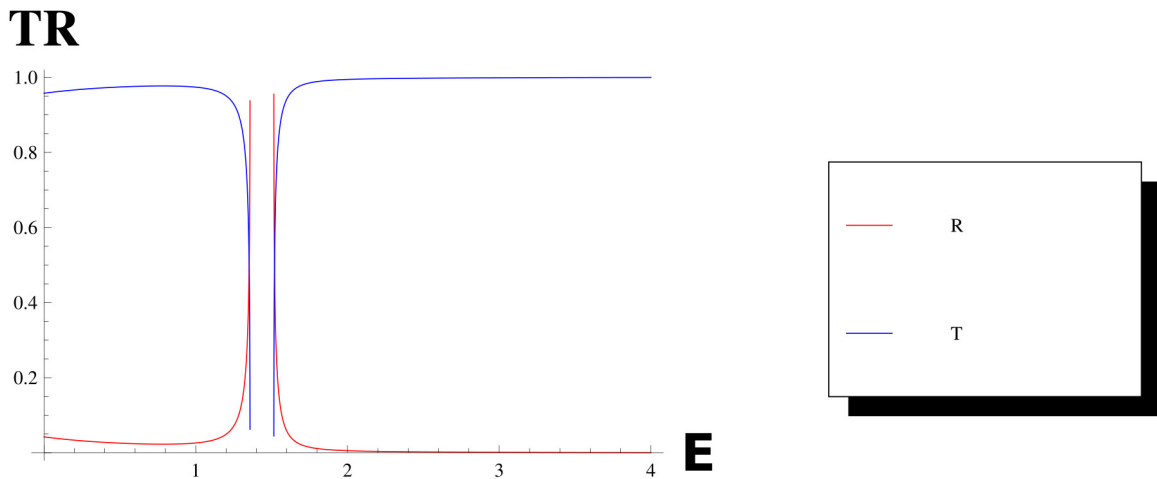


FIGURE 2.2 – Le graphique illustre le comportement des coefficients de transmission ( $T$ ) et de réflexion ( $R$ ) en fonction de l'énergie  $E$  pour  $E_0 = 1$ ,  $H_0 = 4$ ,  $m = 1$ ,  $a = 5$ ,  $k_x = k_y = 0.5$

Dans la figure (2.2), nous avons présenté le comportement des coefficients de transmission  $T$  et de réflexion  $R$  avec différentes valeurs de  $E$ . Sur cette figure, la résonance de transmission est clairement visible pour différentes valeurs de l'énergie. Notons que lorsque  $E < E_0$ , le coefficient de transmission est égal à un, quand  $E$  s'approche  $E_0$ , le coefficient de réflexion atteint son maximum 1, et lorsque  $E$  devient supérieur à  $E_0$ , la réflexion devient nulle.

**Marche du potentiel** ( $a \rightarrow \infty$ ) le potentiel est comme une marche quand ( $a \rightarrow \infty$ )

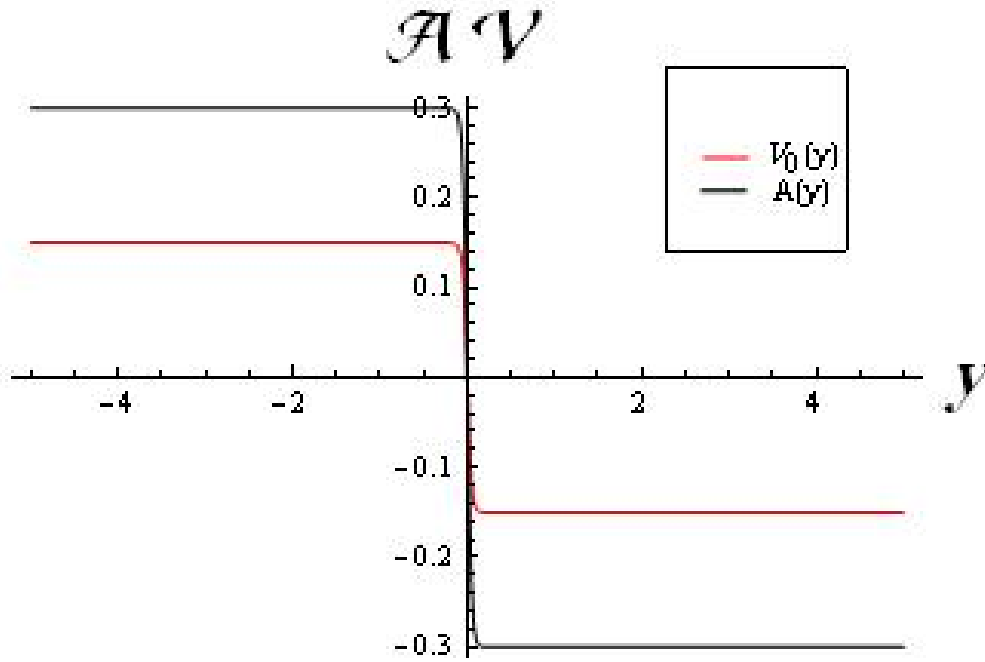


FIGURE 2.3 – Présentation de l'évolution du potentiel magnétique  $A(y)$  et du potentiel électrique  $V_0(y)$  en fonction de  $y$  quand  $a \rightarrow \infty$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma = 0 \implies \vartheta = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} q = \lim_{a \rightarrow \infty} p \simeq 0. \quad (2.55)$$

Le développement de la fonction  $\cosh x$  au voisinage de  $x = 0$  est :

$$\cosh x = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + o(x). \quad (2.56)$$

Nous obtenons

$$R = \frac{1 + \left(\pi \frac{k_1 - k_2}{a}\right)^2 - 1}{1 + \left(\pi \frac{k_1 + k_2}{a}\right)^2 - 1} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \quad (2.57)$$

$$T = \frac{\left(\pi \frac{k_1 + k_2}{a}\right)^2 - \left(\pi \frac{k_1 - k_2}{a}\right)^2}{1 + \left(\pi \frac{k_1 + k_2}{a}\right)^2 - 1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (2.58)$$

qui est le même résultat mentionné dans les références [24, 32].

**Discussion :**

avec  $k_1$  est un réel positif.

On a :

$$(E + \eta)^2 - (k_x + \delta)^2 - k_z^2 - m^2 > 0 \Rightarrow E > -\eta + \sqrt{(k_x + \delta)^2 + k_z^2 + m^2}. \quad (2.59)$$

Nous avons aussi que :

$$k_2 = \sqrt{(E - \eta)^2 - (k_x - \delta)^2 - k_z^2 - m^2}. \quad (2.60)$$

Donc il y a deux possibilités :

— Si

$$(E - \eta)^2 > (k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2 \Rightarrow |E - \eta| > \sqrt{(k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2} \quad (2.61)$$

$$\Rightarrow E > \eta + \sqrt{(k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2} \quad (2.62)$$

Dans ce cas  $k_2$  est un réel positif, l'onde est transmise :

$$R + T = 1 \quad (2.63)$$

Ou bien

$$E < \eta - \sqrt{(k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2} \quad (2.64)$$

Dans ce cas  $\tilde{k}_2$  est un réel négatif avec  $\tilde{k}_2 = -k_2$  c'est la zone du paradoxe Klein .

$$T = \frac{4k_1 \tilde{k}_2}{(k_1 - \tilde{k}_2)^2}; R = \left( \frac{k_1 + \tilde{k}_2}{k_1 - \tilde{k}_2} \right)^2; R - T = 1 \quad (2.65)$$

— Dans le cas où :

$$(E - \eta)^2 < (k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2 \Rightarrow |E - \eta| < \sqrt{(k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2}$$

alors

$$\eta - \sqrt{(k_x - \delta)^2 - k_z^2 - m^2} < E < \eta + \sqrt{(k_x - \delta)^2 + k_z^2 + m^2} \quad (2.66)$$

$k_2$  est un imaginaire pur, pas de transmission , l'onde est évanescence.

$$T = 0, R = 1. \quad (2.67)$$

**Potentiels linéaires** ( $a \rightarrow 0$ )

Notre potentiels devient comme suit

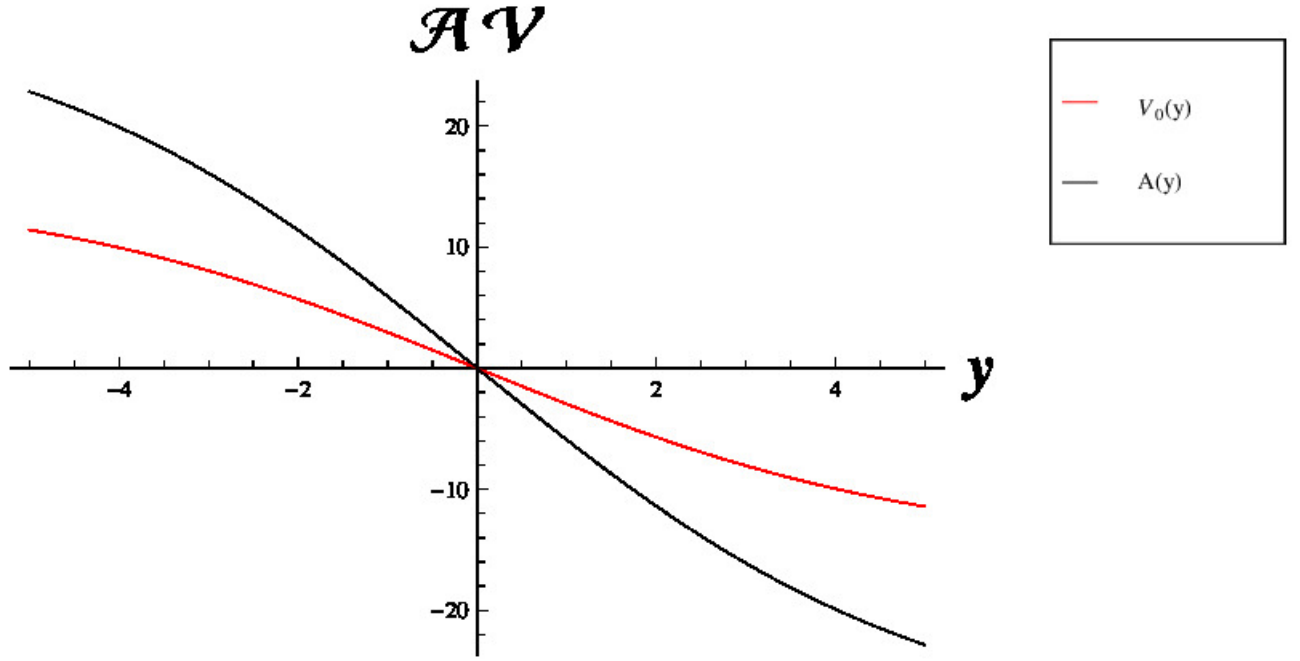


FIGURE 2.4 – Présentation de l'évolution du potentiel magnétique  $A(y)$  et du potentiel électrique  $V_0(y)$  en fonction de  $y$  quand  $a \rightarrow 0$

Posons

$$\acute{E}_0^2 = E_0^2 - H_0^2$$

alors

$$\gamma = -\frac{e^2 \acute{E}_0^2}{a^4}$$

On sait que

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{e^2 \acute{E}_0^2}{a^4}} = i \frac{e \acute{E}_0}{a^2} \sqrt{1 - \frac{a^4}{4e^2 \acute{E}_0^2}} \simeq i \left( \frac{e \acute{E}_0}{a^2} - \frac{a^2}{8e \acute{E}_0} \right) \quad (2.68)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \cos 2\pi \vartheta \sim \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{2\pi \left( \frac{e \acute{E}_0}{a^2} - \frac{a^2}{8e \acute{E}_0} \right)} + e^{-2\pi \left( \frac{e \acute{E}_0}{a^2} - \frac{a^2}{8e \acute{E}_0} \right)}}{2} \sim e^{2\pi \left( \frac{e \acute{E}_0}{a^2} \right)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} p \sim \frac{1}{2a} \sqrt{\left( E - e \frac{E_0}{a} \right)^2 - \left( k_x - e \frac{H_0}{a} \right)^2 - m^2 - k_z^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\left( e \frac{E_0}{a} \right)^2 - \left( e \frac{H_0}{a} \right)^2 - m^2 - k_z^2} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2a} \sqrt{\left( e \frac{\acute{E}_0}{a} \right)^2 - m^2 - k_z^2} = \frac{e \acute{E}_0}{2a^2} \sqrt{1 - \frac{m^2 + k_z^2}{(e \acute{E}_0)^2}} = \\ &= \frac{e \acute{E}_0}{2a^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 + k_z^2}{(e \acute{E}_0)^2} \right) = \frac{e \acute{E}_0}{2a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{4e \acute{E}_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} q \sim \frac{1}{2a} \sqrt{\left(E + e \frac{E_0}{a}\right)^2 - \left(k_x + e \frac{H_0}{a}\right)^2 - m^2 - k_z^2} = \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\left(e \frac{E_0}{a}\right)^2 - \left(e \frac{H_0}{a}\right)^2 - m^2 - k_z^2} = \lim_{a \rightarrow 0} p$$

$$\cosh 2\pi(p+q) \sim e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)} \quad (2.71)$$

$$\cosh 2\pi(p-q) = \cosh(0) = 1 \quad (2.72)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} T = \frac{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)} - 1}{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)} + e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} \right)}} \sim \frac{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)}}{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)} + e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} \right)}} \quad (2.73)$$

$$\left( a \rightarrow 0 \Rightarrow e^{2\pi \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \pi \frac{k_z^2 + m^2}{e\dot{E}_0}} \gg 1 \right) \Rightarrow T \sim \frac{e^{-\pi \frac{k_z^2 + m^2}{e\dot{E}_0}}}{e^{-\pi \frac{k_z^2 + m^2}{e\dot{E}_0}} + 1} \quad (2.74)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} R = \frac{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} \right)} + 1}{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)} + e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} \right)}}; \left( a \rightarrow 0 \Rightarrow e^{2\pi \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \pi \frac{k_z^2 + m^2}{e\dot{E}_0}} \gg 1 \right) \quad (2.75)$$

$$\Rightarrow R \sim \frac{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} \right)} + 1}{e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} - \frac{k_z^2 + m^2}{2e\dot{E}_0} \right)} + e^{2\pi \left( \frac{e\dot{E}_0}{a^2} \right)}} \sim \frac{1}{e^{-\pi \frac{k_z^2 + m^2}{e\dot{E}_0}} + 1} \quad (2.76)$$

En remarque toujours que

$$R + T = 1$$

### Marche de Sauter

En cas d'absence de champs magnétiques ( $H_0 = 0$ ) il correspond à un potentiel linéaire dû à un champ électrique constant  $\vec{E}$  [51] :

$$\dot{E}_0 = E_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T \sim \frac{e^{-\pi \frac{k_z^2 + m^2}{eE_0}}}{e^{-\pi \frac{k_z^2 + m^2}{eE_0}} + 1} \\ R \sim \frac{1}{e^{-\pi \frac{k_z^2 + m^2}{eE_0}} + 1} \end{array} \right.$$

**Création de paires :**

Si on met l'équation (2.8) sous la forme

$$\left[ \partial_y^2 + f(y) \right] \phi_1(y) = 0$$

le comportement asymptotique quand  $y \rightarrow \pm\infty$  :

$$\phi_{1\pm}(y) = \frac{1}{\sqrt{2f_-(y)}} \exp\left(\pm i \int_0^y f_-(z) dz\right) \text{ tel que } f_-(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = k_1$$

$$\phi_1^\pm(y) = \frac{1}{\sqrt{2f_+(y)}} \exp\left(\pm i \int_0^y f_+(z) dz\right) \text{ tel que } f_+(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = k_2$$

donc

$$\begin{aligned} \phi_{1\pm}(y) &= \frac{e^{\pm k_1 y}}{\sqrt{2k_1}} \\ \phi_1^\pm(y) &= \frac{e^{\pm k_2 y}}{\sqrt{2k_2}} \end{aligned}$$

On peut lier les quatre solutions comme suit :

$$\phi_{1+} = A\phi_1^+ + B\phi_1^- \quad , \quad \phi_{1-} = B^*\phi_1^+ + A^*\phi_1^- \quad (2.77)$$

$$\phi_1^+ = A^*\phi_{1+} - B\phi_{1-} \quad , \quad \phi_1^- = -B^*\phi_{1+} + A\phi_{1-} \quad (2.78)$$

tel que  $\alpha, \beta$  deux coefficients complexes vérifiant la condition :

$$|A|^2 - |B|^2 = 1$$

Pour obtenir les probabilités de création de paires et les densités de nombre de particules créées, il est nécessaire de déterminer les états de Nikishov «in» et «out» [52, 53]

$$\phi_{1in}^+ = \phi_1^-, \quad \phi_{1in}^- = \frac{B}{B^*}\phi_{1-}, \quad \phi_{1out}^+ = \phi_1^+, \quad \phi_{1out}^- = \phi_{1+}$$

D'après l'équation (2.78), on peut lier les états "in" et "out" comme suit :

$$\phi_{1in}^+ = \tau \phi_{1out}^+ + \omega \phi_{1out}^- \quad (2.79)$$

$$\phi_{1in}^- = \omega^* \phi_{1out}^+ + \tau^* \phi_{1out}^- \quad (2.80)$$

avec

$$\tau = -\frac{A}{B}, \omega = \frac{1}{B} \text{ et } |\tau|^2 - |\omega|^2 = 1$$

L'équation (2.43) implique que :

$$\phi_1 = 2^{i(p+q)} [C_1 \phi_{1+} + C_2 \phi_{1-}] \quad (2.81)$$

Par la comparaison entre l'équation (2.43) et l'équation (2.78), on obtient :

$$\phi_1 = \phi_1^+, A^* = 2^{i(p+q)} C_1, -B = 2^{i(p+q)} C_2. \quad (2.82)$$

On sait que

$$\left| 2^{i(p+q)} C_1 \right|^2 - \left| 2^{i(p+q)} C_2 \right|^2 = 1 \text{ et } \frac{C_1}{C_2} = -\frac{A'_1}{A_1} \quad (2.83)$$

$$\Rightarrow |C_1|^2 \left( 1 - \left| \frac{A'_1}{A_1} \right|^2 \right) = 1 \quad (2.84)$$

$$|C_1|^2 = \frac{|A_1|^2}{|A_1|^2 - |A'_1|^2} \text{ et } |C_2|^2 = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2 - |A'_1|^2} \quad (2.85)$$

D'après les équations (2.82) et (2.85), nous pouvons extraire les relations :

$$|A|^2 = \frac{|A_1|^2}{|A_1|^2 - |A'_1|^2} \quad (2.86)$$

et

$$|B|^2 = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2 - |A'_1|^2} \quad (2.87)$$

En utilisant les solutions de fréquence positives et négatives, nous pouvons introduire les opérateurs de création et d'annihilation de l'état "in" et "out" du champ scalaire comme suit [52, 53] :

$$\begin{cases} a_{out} = \tau a_{in} - \omega^* b_{in}^+ \\ b_{out} = \frac{1}{\tau^*} a_{in} + \frac{\omega^*}{\tau^*} b_{in}^+ \end{cases} \quad (2.88)$$

Calculons la probabilité de création de paires de particules du vide. La probabilité est

définie par le produit de l'état initial qui est le vide et de l'état final [52, 53].

$$\begin{aligned}
 P_{cre} &= |\langle 0_{out} | a_{out} b_{out} | 0_{in} \rangle| = \left| \frac{\omega}{\tau^*} \right|^2 = \left| \frac{1}{A} \right|^2 \\
 \Rightarrow P_{cre} &= \frac{|A_1|^2 - |A'_1|^2}{|A_1|^2} = 1 - \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} = 1 - \frac{1}{R} = -\frac{T}{R} \\
 \Rightarrow P_{cre} &= -\frac{\cosh 2\pi(p+q) - \cosh 2\pi(p-q)}{\cosh 2\pi(p-q) + \cos 2\pi\vartheta}
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

L'expression des densités de nombre de particules créées  $N$  est écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
 N &= |\langle 0_{in} | a_{out}^+ a_{out} | 0_{in} \rangle| = |\omega|^2 = \left| \frac{1}{B} \right|^2 \\
 N &= \frac{|A_1|^2 - |A'_1|^2}{|A'_1|^2} = R - 1 = -T \\
 \Rightarrow N &= -\frac{\cosh 2\pi(p+q) - \cosh 2\pi(p-q)}{\cosh 2\pi(p+q) + \cos 2\pi\vartheta}.
 \end{aligned}$$

# CHAPITRE 3

## LEQUATION DKP POUR UN POTENTIEL DÉPENDANT DE L'ÉNERGIE

### Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.2 Solution de l'équation DKP de spin 0</b> . . . . .	<b>22</b>
2.2.1 Cas des états liés . . . . .	24
2.2.2 Cas de la diffusion . . . . .	25
<b>2.3 Détermination des coefficients de réflexion et de transmission</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>2.4 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>30</b>

---

### 3.1 Introduction :

Pendant longtemps, les travaux sur les systèmes à potentiels dépendant de l'énergie [54] ont suscité un intérêt considérable en raison de leurs applications variées dans plusieurs domaines et leurs analyses ne cessent de se développer. Nous citons quelques exemples, l'effet de dynamo dans les modèles magnéto hydrodynamiques [55], dans les puits quantiques et les semi-conducteurs [56], y compris la théorie de la diffusion élastique et inélastique en physique atomique, nucléaire et des particules [57, 58] et la description du système de quarks lourds [40, 59]...etc. Il convient de noter que les systèmes avec des potentiels dépendant de l'énergie, apportent quelques modifications à la structure mathématique en tant que produit scalaire et à la relation de complétude, qui sont nécessaires pour assurer la conservation de la norme et satisfaire les exigences de la mécanique quantique, analysées clairement dans [40, 60].

Dans ce travail, nous étendons cette idée à une autre équation relativiste, à savoir l'équation (DKP).

A notre connaissance, cette équation n'a jamais été traitée avec un potentiel dépendant de l'énergie, de manière analytique, et son absence est pratiquement perceptible dans le contexte de problèmes liés aux potentiels dépendant de l'énergie. Nous tenterons d'étudier l'équation **DKP** pour des potentiels dépendants de l'énergie combinés à des vecteurs et scalaires dans les dimensions (1 + 1) de l'espace-temps d'une part, et de l'autre pour voir l'effet de cette dépendance énergétique sur les conditions de normalisation et sur l'équation de continuité pour ce système en question.

### 3.2 Condition d'orthogonalité et de normalisation

L'équation **DKP** à (1 + 1) dimension pour les bosons scalaire, et vectoriel se déplaçant dans un champ électrique constant et un potentiel scalaire est la suivante :

$$(i\beta^\mu D_\mu - m)\Psi(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

Ou bien

$$[\beta^0 (i\partial_0 - eV(x, i\partial_0)) + i\beta^1 \partial_x - (m + S(x, i\partial_0))] \psi = 0 \quad (3.2)$$

Où les matrices  $\beta^0$  et  $\beta^1$  vérifient l'algèbre DKP

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha + \beta^\alpha \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\alpha + g^{\alpha\nu} \beta^\mu, \quad (3.3)$$

et les potentiels  $V(x, i\partial_0)$  et  $S(x, i\partial_0)$  sont des fonctions qui dépendent de  $x$  et de l'énergie  $i\partial_0$ . L'équation **DKP** conjuguée s'écrit sous la forme :

$$-i(\partial_0 - ie_0 V(x, i\partial_0)^*) \Psi^+ \beta^{0+} - i\partial_x \Psi^+ \beta^{1+} - (m + S(x, i\partial_0))^* \Psi^+ = 0 \quad (3.4)$$

tel que :

$$\beta^{j+} = -\beta^j \text{ et } \beta^{0+} = \beta^0.$$

Si nous développons  $\psi$  sur la base  $\{\Phi_{E_n}\}$

$$\psi = \sum_n a_{E_n} \Phi_{E_n} e^{-iE_n t}, \quad (3.5)$$

On défini le spineur adjoint par :

$$\bar{\Psi}(x, t) = \Psi^+(x, t) \eta^0. \quad (3.6)$$

On obtient

$$[\beta^0 (E_n - eV(x, E_n)) + i\beta^1 \partial_x - (m + S(x, E_n))] \Phi_{E_n} = 0 \quad (3.7)$$

$$\{[(E_m - eV(x, E_m)) \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0] - i(\partial_x \bar{\Phi}_{E_m}) \beta^1 - (m + S(x, E_m)) \bar{\Phi}_{E_m}\} = 0 \quad (3.8)$$

En multipliant l'équation (3.7) par  $\bar{\Phi}_{E_m}$  et l'équation (3.8) par  $\Phi_{E_n}$ , on obtient :

$$E_n \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} - e_0 V(x, E_n) \bar{\Phi}_{E_m} \Phi_{E_n} + i \bar{\Phi}_{E_m} \beta^1 \partial_x \Phi_{E_n} - m \bar{\Phi}_{E_m} \Phi_{E_n} = 0 \quad (3.9)$$

$$E_m \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} - e_0 V(x, E_m) \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} - i \partial_x \bar{\Phi}_{E_m} \beta^1 \Phi_{E_n} - m \bar{\Phi}_{E_m} \Phi_{E_n} = 0 \quad (3.10)$$

Après la soustraction et l'intégration sur  $x$ , on obtient la relation d'orthogonalité entre deux états  $n$  et  $m$  :

$$\int dx \bar{\Phi}_{E_m} \left\{ \beta^0 - \beta^0 e \frac{V(x, E_n) - V(x, E_m)}{E_n - E_m} - \frac{S(x, E_n) - S(x, E_m)}{E_n - E_m} \right\} \Phi_{E_n} = \delta_{nm} \quad (3.11)$$

Dans la limite  $n \rightarrow m$ , l'équation ci-dessus devient :

$$\int dx \bar{\Phi}_E \{ \beta^0 - \phi_{nn} \}_{E=E_n} \Phi_E = 1 \quad (3.12)$$

tel que

$$\phi_{nn} = \beta^0 e \frac{\partial V(x, E)}{\partial E} - \frac{\partial S(x, E)}{\partial E} \quad (3.13)$$

Par conséquent, la présence du facteur supplémentaire  $\{ \beta^0 - \phi_{nn} \}$  modifié le produit scalaire (la norme). Dans le cas où le potentiel ne dépend pas de l'énergie  $\phi_{nn} = 0$ , on retrouve la condition de normalisation habituelle

$$\int dx \bar{\Phi}_E \beta^0 \Phi_E = 1$$

### 3.3 Equation de continuité

En multipliant la première équation (3.2) par  $\Psi^+ \eta^0$  et la deuxième équation (3.4) par  $\eta^0 \Psi$

$$\Psi^+ \eta^0 [i\beta^0 \partial_0 \Psi - e\beta^0 (V(x, i\partial_0) \Psi) + i\beta^1 \partial_x \Psi - m\Psi - S(x, i\partial_0) \Psi] = \quad (3.14)$$

$$[-i(\partial_0 - ieV(x, i\partial_0)^*) \Psi^+ \beta^{0+} - i\partial_x \Psi^+ \beta^{j1+} - (m + S(x, i\partial_0))^* \Psi^+] \eta^0 \Psi = \quad (3.15)$$

On obtient

$$i\bar{\Psi}\beta^0\frac{\partial\Psi}{\partial t} - e\bar{\Psi}\beta^0V(x, i\partial_0)\Psi + i\bar{\Psi}\beta^1\partial_x\Psi - m\Psi^+\eta^0\Psi - \bar{\psi}S(x, i\partial_0)\Psi = 0 \quad (3.16)$$

$$-i(\partial_0\Psi^+\eta^0)\beta^0\Psi - e(V(x, i\partial_0)^*\Psi^+\eta^0)\beta^0\Psi - i(\partial_x\Psi^+\eta^0)\beta^1\Psi - m\Psi^+\eta^0\Psi - [S(x, i\partial_0)^*\Psi^+\eta^0]\Psi = 0 \quad (3.17)$$

tel que

$$\eta^0\beta^j + \beta^j\eta^0 = 0 \text{ et } \eta^0\beta^0 = \beta^0\eta^0$$

qui devient

$$i\bar{\Psi}\beta^0\partial_0\Psi - e\bar{\Psi}\beta^0V(x, i\partial_0)\Psi + i\bar{\Psi}\beta^1\partial_x\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \bar{\psi}S(x, i\partial_0)\Psi = 0 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow -i(\partial_0\bar{\Psi})\beta^0\Psi - e(V(x, i\partial_0)^*\bar{\Psi})\beta^0\Psi - i(\partial_x\bar{\Psi})\beta^1\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - [S(x, i\partial_0)^*\bar{\Psi}]\Psi = 0 \quad (3.19)$$

En faisant la différence entre les deux équations (3.18) et (3.19), on obtient

$$\frac{\partial\bar{\Psi}\beta^0\Psi}{\partial t} - \frac{1}{i}e[\bar{\Psi}\beta^0V(x, i\partial_0)\Psi - (V(x, i\partial_0)^*\bar{\Psi})\beta^0\Psi] + \partial_x\bar{\Psi}\beta^1\Psi - \frac{1}{i}[\bar{\Psi}S(x, i\partial_0)\Psi - [S(x, i\partial_0)^*\bar{\Psi}]\Psi] = 0 \quad (3.20)$$

Nous avons la dérivée de l'équation de continuité :

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi = 0 \quad (3.21)$$

Donc, on aura

$$\partial_x J^1 = \partial_x\bar{\psi}\beta^1\psi \quad (3.22)$$

$$\partial_0\rho = \partial_0\bar{\psi}\beta^0\psi - \frac{e}{i}\{\bar{\psi}\beta^0V(x, i\partial_0)\psi - [V(x, i\partial_0)^*\bar{\psi}]\beta^0\psi\} - \frac{1}{i}\{\bar{\psi}S(x, i\partial_0)\psi - [S(x, i\partial_0)^*\bar{\psi}]\psi\} \quad (3.23)$$

Notons la présence d'un deuxième terme qui n'est pas nul, en utilisant la relation .

$$f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(x, s) ds \quad (3.24)$$

$$\rho = \bar{\Psi}(x, t)\beta^0\Psi(x, t) - \frac{1}{i}e \int_0^t [\bar{\Psi}\beta^0V(x, i\partial_s)\Psi - (V(x, i\partial_s)^*\bar{\Psi})\beta^0\Psi] ds - \frac{1}{i} \int_0^t [\bar{\Psi}S(x, i\partial_s)\Psi - [S(x, i\partial_s)^*\bar{\Psi}]\Psi] ds \quad (3.25)$$

et comme

$$\beta^0\eta^0 = \eta^0\beta^0 = \beta^0 \quad (3.26)$$

on obtient

$$\rho = \Psi^+(x, t) \beta^0 \Psi(x, t) - \frac{1}{i} e \int^t [\Psi^+ \beta^0 V(x, i\partial_s) \Psi - (V(x, i\partial_s)^* \Psi^+) \beta^0 \Psi] ds - \frac{1}{i} \left[ \int^t \Psi^+ S(x, i\partial_s) \Psi - [S(x, i\partial_s)^* \Psi^+] \Psi \right] ds \quad (3.27)$$

soit la base  $\{\Phi_{E_n}(x)\}$  tel que

$$\Psi = \sum_n a_{E_n} \Phi_{E_n} e^{-iE_n t} \quad (3.28)$$

donc

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_n \sum_m a_{E_n} a_{E_m}^* \Phi_{E_m}^+ \beta^0 \Phi_{E_n} e^{i(E_m - E_n)t} \\ &- \frac{1}{i} e \int^t \left( \sum_n \sum_m a_{E_n} a_{E_m}^* \Phi_{E_m}^+ \beta^0 \Phi_{E_n} e^{i(E_m - E_n)s} (V(x, E_n) - V(x, E_m)) \right) ds \\ &- \frac{1}{i} \int^t \left( \sum_n \sum_m a_{E_n} a_{E_m}^* \Phi_{E_m}^+ \Phi_{E_n} e^{i(E_m - E_n)s} (S(x, E_n) - S(x, E_m)) \right) ds \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \rho = \sum_n \sum_m a(E_n) a^*(E_m) \Phi_{E_m}^*(x) \\ &\times \left[ \beta^0 e^{i(E_m - E_n)t} - \frac{1}{i} \{ \beta^0 e [V(x, E_n) - V(x, E_m)] + [S(x, E_n) - S(x, E_m)] \} \int^t (e^{i(E_m - E_n)s}) ds \right] \Phi_{E_n}(x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{i} \int_0^t (e^{i(E_m - E_n)s}) ds = \frac{e^{i(E_m - E_n)t}}{E_n - E_m} + cte \quad (3.31)$$

donc

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_n \sum_m a(E_n) a^*(E_m) \Phi_{E_m}^*(x) \Phi_{E_n}(x) e^{i(E_m - E_n)t} \\ &\times \left[ \beta^0 - \left( \beta^0 e \frac{(V(x, E_n) - V(x, E_m))}{E_n - E_m} + \frac{S(x, E_n) - S(x, E_m)}{E_n - E_m} \right) + cte \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

la constante  $cte$  indépendante du temps peut être omise puisqu'elle ne contribue pas à l'équation de continuité, donc :

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_n \sum_m a(E_n) a^*(E_m) \Phi_{E_m}^*(x) e^{i(E_m - E_n)t} \times \\ &\left[ \beta^0 - \left( e \beta^0 \frac{(V(x, E_n) - V(x, E_m))}{E_n - E_m} + \frac{S(x, E_n) - S(x, E_m)}{E_n - E_m} \right) \right] \Phi_{E_n}(x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pour simplifier la forme de  $\rho$ , nous mettons cette forme séparée, où le potentiel est séparable et dépend linéairement de  $\hat{E}$ , c'est-à-dire

$$V(x, i\partial_0) = U(x) + V(x) i\partial_0, \quad (3.34)$$

$$S(x, i\partial_0) = S_0(x) + S_1(x) i\partial_0, \quad (3.35)$$

Après un calcul direct, et en prenant la limite  $n \rightarrow m$ , l'équation (3.33), l'expression de la densité  $\rho$  peut être réécrite de la manière suivante :

$$\rho = \bar{\psi} \beta^0 \psi [1 - eV(x)] - S_1(x) \bar{\psi} \psi. \quad (3.36)$$

### 3.4 Equation DKP dans un champ électrique constant et un potentiel scalaire

Dans cette section, nous illustrons l'effet des potentiels dépendant de l'énergie sur les valeurs propres de l'énergie et les fonctions propres d'une particule **DKP** dans un champ électrique constant et un potentiel scalaire. Le champ électrique et le potentiel scalaire sont choisis linéaires .

$$V(x) = V_0 A_E x; \quad S(X) = S_0 A_E x, \quad (3.37)$$

où  $V_0$  et  $S_0$  sont deux constantes, on suppose que  $|S_0| > |V_0|$  pour éviter les valeurs propres complexes, et  $A_E = (1 + \theta E)^q$ . Dans l'espace temps de dimension  $(1 + 1)$ , nous choisissons la représentation des matrices  $\beta^j$  de DKP comme suit :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Par conséquent, l'équation **DKP** en présence d'un potentiel vecteur plus un potentiel scalaire dépendant de l'énergie s'écrit :

$$\left[ \beta^0 \left( \frac{i\partial}{\partial t} - V \left( x, \frac{i\partial}{\partial t} \right) \right) + i\beta^1 \frac{\partial}{\partial x} - \left( m + S \left( x, \frac{i\partial}{\partial t} \right) \right) \right] \psi = 0. \quad (3.39)$$

La solution stationnaire de l'équation (3.39) à la forme  $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-iEt}$  et  $\phi(x)$  est un vecteur de dimension  $(3 \times 1)$  qui s'écrit

$$\phi^T = \left( \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \right). \quad (3.40)$$

En insérant la fonction d'onde  $\phi$  et les matrices  $\beta^0$  et  $\beta^1$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} i(E - V(x, E))\phi_3 - \frac{d}{dx}\phi_2 - (m + S(x, E))\phi_1 = 0 \\ \frac{d}{dx}\phi_1 + (m + S(x, E))\phi_2 = 0 \\ i(E - V(x, E))\phi_1 + (m + S(x, E))\phi_3 = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

En découplant le système, on aura :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{m + S(x, E)} \frac{\partial}{\partial x} \\ -i \frac{(E - e_0 V(x, E))}{m + S(x, E)} \end{pmatrix} \phi_1 \quad (3.42)$$

tel que

$$\phi_1''(x) - \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} \phi_1'(x) + [(E - V_0 A_E x)^2 - (S_0 A_E x + m)^2] \phi_1(x) = 0 \quad (3.43)$$

on peut réécrire :

$$\phi_1''(x) - \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} \phi_1'(x) + \left[ \frac{\overbrace{\mu}^{\mu}}{\underbrace{2(S_0 A_E m + V_0 A_E E)}_{\eta}} x + \frac{\overbrace{-\vartheta^2}^{-\vartheta^2}}{\underbrace{E^2 - m^2}} \right] \phi_1(x) = 0 \quad (3.44)$$

alors

$$\phi_1''(x) - \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} \phi_1'(x) - \left[ \mu \left( x + \frac{\eta}{\mu} \right)^2 - \left( \frac{\eta}{\sqrt{\mu}} \right)^2 + \vartheta^2 \right] \phi_1(x) = 0 \quad (3.45)$$

En introduisant l'ansatz suivant :

$$\phi_1(x) = e^{\int^x f(u) du} \Phi(x) \quad (3.46)$$

où  $f(x)$  est une fonction arbitraire. alors, l'équation de  $\Phi(x)$  devient :

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \left( 2f - \frac{1}{\left( \frac{m}{S_0 A_E} + x \right)} \right) \frac{d}{dx} - \frac{f}{\left( \frac{m}{S_0 A_E} + x \right)} + \right. \\ \left. f' + f^2 - \mu \left( x + \frac{\eta}{\mu} \right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2 \right] \Phi = 0. \quad (3.47)$$

Nous choisissons  $f(x)$  pour annuler le terme  $\left(x + \frac{\eta}{\mu}\right)$ , et cela implique

$$f(x) = -\mu^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right). \quad (3.48)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \Phi''(x) - \left[ \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} - 2 \left( -\sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right) \right] \Phi'(x) \\ & + \left[ \begin{array}{l} -\sqrt[2]{\mu} + \left( -\sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right)^2 - \mu \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \left( \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} \right)^2 \\ -\vartheta^2 - \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} \left( -\sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right) \end{array} \right] \Phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

alors

$$\begin{aligned} & \Phi''(x) - \left[ \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} + 2 \sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right] \Phi'(x) + \\ & \left[ \begin{array}{l} -\sqrt[2]{\mu} + \left( \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} \right)^2 - \vartheta^2 + \frac{S_0 A_E \sqrt[2]{\mu} \left( \frac{\eta}{\mu} + x \right)}{S_0 A_E x + m} \end{array} \right] \Phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \Phi''(x) - \left[ \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} + 2 \sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right] \Phi'(x) + \\ & \left[ \begin{array}{l} -\sqrt[2]{\mu} + \left( \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} \right)^2 - \vartheta^2 + \frac{S_0 A_E \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} + \sqrt[2]{\mu} (S_0 A_E x + m - m)}{S_0 A_E x + m} \end{array} \right] \Phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \Phi''(x) - \left[ \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} + 2 \sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right] \Phi'(x) + \\ & \left[ \begin{array}{l} -\sqrt[2]{\mu} + \left( \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} \right)^2 - \vartheta^2 + \frac{S_0 A_E \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} + \sqrt[2]{\mu} (S_0 A_E x + m) - \sqrt[2]{\mu} m}{S_0 A_E x + m} \end{array} \right] \Phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \Phi''(x) - \left[ \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} + 2 \sqrt[2]{\mu} \left(x + \frac{\eta}{\mu}\right) \right] \Phi'(x) + \\ & \left[ \begin{array}{l} -\sqrt[2]{\mu} + \left( \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} \right)^2 - \vartheta^2 + \sqrt[2]{\mu} + \frac{S_0 A_E \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} - \sqrt[2]{\mu} m}{S_0 A_E x + m} \end{array} \right] \Phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

on change la variable  $x$  par  $y$ , en définissant :

$$y = \frac{\sqrt[4]{\mu}}{S_0 A_E} (S_0 A_E x + m) \text{ tel que } \Phi''(x) = \sqrt[2]{\mu} \Phi''(y) \text{ et } \Phi'(x) = \sqrt[4]{\mu} \Phi'(y) \quad (3.54)$$

alors l'équation. (3.53) s'exprimera par :

$$\sqrt[2]{\mu}\Phi''(y) - \left[ \frac{S_0 A_E}{S_0 A_E x + m} + 2 \frac{\sqrt[2]{\mu}}{S_0 A_E} \left( S_0 A_E x + \frac{S_0 A_E \eta}{\mu} \right) \right] \sqrt[2]{\mu}\Phi'(y) + \left[ \left( \frac{\eta}{\sqrt[2]{\mu}} \right)^2 - \vartheta^2 + \frac{S_0 A_E \sqrt[2]{\mu} \left( \frac{\eta}{\mu^{\frac{3}{4}}} - \frac{\sqrt[2]{\mu} m}{S_0 A_E} \right)}{(S_0 A_E x + m)} \right] \Phi(y) = 0 \quad (3.55)$$

on obtient

$$\sqrt{\mu}\Phi''(y) - \left[ \frac{S_0 A_E}{\sqrt[4]{\mu}(S_0 A_E x + m)} + 2 \frac{\sqrt[4]{\mu}}{S_0 A_E} \left( S_0 A_E x + m - m + \frac{S_0 A_E \eta}{\mu} \right) \right] \sqrt{\mu}\Phi'(y) + \left[ \frac{\eta^2}{\mu^{\frac{3}{2}}} - \frac{\vartheta^2}{\sqrt[2]{\mu}} + \frac{S_0 A_E \left( \frac{\eta}{\mu^{\frac{3}{4}}} - \frac{\sqrt[4]{\mu} m}{S_0 A_E} \right)}{\sqrt[4]{\mu}(S_0 A_E x + m)} \right] \sqrt[2]{\mu}\Phi(y) = 0 \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow \Phi''(y) + \left[ \frac{-1}{y} - 2y - 2 \left( \frac{\eta}{\mu^{\frac{3}{4}}} - \frac{\sqrt[4]{\mu}}{S_0 A_E} m \right) \right] \Phi'(y) + \left[ \frac{\eta^2}{\mu^{\frac{3}{2}}} - \frac{\vartheta^2}{\sqrt[2]{\mu}} + \frac{2 \left( \frac{\eta}{\mu^{\frac{3}{4}}} - \frac{\sqrt[4]{\mu} m}{S_0 A_E} \right)}{2y} \right] \Phi(y) = 0 \quad (3.57)$$

C'est une équation différentielle de forme Biconfluent de Heun [61, 62]

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \left[ \frac{\alpha + 1}{y} - 2y - \beta \right] \frac{d}{dy} + \left[ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{\delta + \beta(\alpha + 1)}{2y} \right] \right) \Phi = 0 \quad (3.58)$$

qui est exactement l'équation différentielle Biconfluent de Heun  $HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta, y)$  [61, 62], dont les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha = -2; & \beta = 2\mu^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\eta}{\mu} - \frac{m}{S_0 A_E} \right) \\ \gamma = \mu^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2 \right); & \delta = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

L'équation différentielle ci-dessus (3.58) a une singularité régulière à  $y = 0$  et une singularité irrégulière à l'infini de quatrième type, sa solution peut être exprimée comme suit (voir l'annexe)

$$\Phi = C_1 HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta, y) + C_2 y^{-\alpha} HeunB(-\alpha, \beta, \gamma, \delta, y), \quad (3.60)$$

tel que  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes.

La détermination des autres composantes sont faciles et les dernières expressions de la fonction d'onde sont les suivantes :

$$\phi_1(x) = e^{-\frac{\sqrt{\mu}}{2}\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)^2} \left\{ C_1 HeunB\left(-2, \beta, \gamma, 0, \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)\right) + C_2 \sqrt{\mu}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)^2 HeunB\left(2, \beta, \gamma, 0, \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)\right) \right\}, \quad (3.61)$$

$$\phi_2(x) = -\frac{1}{m+S(x,E)} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{\mu}}{2}\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)^2} \left[ C_1 HeunB\left(-2, \beta, \gamma, 0, \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)\right) + C_2 \sqrt{\mu}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)^2 HeunB\left(2, \beta, \gamma, 0, \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)\right) \right] \right\}, \quad (3.62)$$

$$\phi_3(x) = -i \frac{(E-e_0 V(x,E))}{m+S(x,E)} e^{-\frac{\sqrt{\mu}}{2}\left(x+\frac{\eta}{\mu}\right)^2} \left\{ C_1 HeunB\left(-2, \beta, \gamma, 0, \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)\right) + C_2 \sqrt{\mu}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)^2 HeunB\left(2, \beta, \gamma, 0, \mu^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{m}{S_0 A_E}\right)\right) \right\}, \quad (3.63)$$

Nous pouvons écrire l'équation de récurrence sous la forme (voir l'annexe) :

$$a_{n+2} = \left\{ (n+1)\beta + \frac{1}{2}[\delta + (1+\alpha)\beta] \right\} a_{n+1} - (n+1)(n+1+\alpha)(\gamma-\alpha-2-2n) a_n, \quad n \geq 0 \quad (3.64)$$

La fonction Biconfluent de Heun devient un polynôme de degré  $n$  si et seulement si :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 \\ \gamma - \alpha - 2 - 2n = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

alors

$$\gamma = 2n \text{ tel que } \gamma = \frac{\eta^2}{\mu^{\frac{3}{2}}} - \frac{\vartheta^2}{\sqrt{\mu}} = \frac{(S_0 A_E m + V_0 A_E E)^2}{((S_0 A_E)^2 - (V_0 A_E)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{E^2 - m^2}{\sqrt{((S_0 A_E)^2 - (V_0 A_E)^2)}} \quad (3.66)$$

ou bien

$$\frac{(S_0 m + V_0 E)^2}{A_E (S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{E^2 - m^2}{A_E \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}} = 2n \quad (3.67)$$

$$\Rightarrow \frac{(S_0 m + V_0 E)^2}{S_0^2 - V_0^2} + E^2 - m^2 = 2n A_E \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)} \quad (3.68)$$

tel que

$$A_E = (1 + \theta E)^q.$$

### 3.5 La Méthode de NIKIFOROV-UVAROV étendue

La méthode NIKIFOROV-UVAROV étendue [63], qui peut systématiquement atteindre les fonctions et les valeurs propres d'un problème de mécanique quantique comportant au plus quatre points singuliers, l'équation suivante est appelée l'équation de base de la méthode NU étendue

$$\Phi''(y) + \frac{\tilde{\tau}_e(y)}{\sigma_e(y)} \Phi'(y) + \frac{\tilde{\sigma}_e(y)}{\sigma_e^2(y)} \Phi(y) = 0 \quad (3.69)$$

tel que  $\tilde{\tau}_e(y)$ ,  $\sigma_e(y)$  et  $\tilde{\sigma}_e(y)$  sont des polynômes de deuxième, de troisième et de quatrième degrés au plus, respectivement, en utilisant la transformation suivante :

$$\Phi(y) = g(y) \Theta_e(y) \quad (3.70)$$

L'équation (3.69) peut s'écrire sous la forme :

$$g''(y) + \left( 2 \frac{\Theta_e'(y)}{\Theta_e(y)} + \frac{\tilde{\tau}_e(y)}{\sigma_e(y)} \right) g'(y) + \left( \frac{\Theta_e''(y)}{\Theta_e(y)} + \frac{\Theta_e'(y) \tilde{\tau}_e(y)}{\Theta_e(y) \sigma_e(y)} + \frac{\tilde{\sigma}_e(y)}{\sigma_e^2(y)} \right) g(y) = 0 \quad (3.71)$$

Nous définissons les polynômes suivants :

$$\Theta_e(y) = \exp \int \frac{\pi_e(y)}{\sigma_e(y)} dy; \quad (3.72)$$

$$\tau_e(y) = \tilde{\tau}_e(y) + 2\pi_e(y) \quad (3.73)$$

$$\bar{\sigma}_e(y) = \tilde{\sigma}_e(y) + \pi_e^2(y) + \pi_e(y) [\tilde{\tau}_e(y) - \sigma_e'(y) + \pi_e'(y) \sigma_e(y)] \quad (3.74)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_e(y)}{\sigma_e(y)} = h(y) \quad (3.75)$$

$$\chi(y) = h(y) - \pi_e'(y) \quad (3.76)$$

D'après l'équation (3.74), on peut déduire :

$$\pi_e(y) = \frac{\sigma_e'(y) - \tilde{\tau}_e(y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{\sigma_e'(y) - \tilde{\tau}_e(y)}{2} \right]^2 - \tilde{\sigma}_e(y) + \chi(y) \sigma_e(y)} \quad (3.77)$$

A partir de l'équation (3.71), nous obtenons l'équation suivante :

$$\sigma_e(y) g''(y) + \tau_e(y) g'(y) + h(y) g(y) = 0 \quad (3.78)$$

Pour déterminer le polynôme  $\pi_e(y)$  dans l'équation (3.77), il faut identifier le polynôme  $\chi(y)$  situé sous la racine carrée explicitement. Étant donné que  $\pi_e(y)$  doit être un polynôme de degré deux au plus, l'expression sous la racine carrée doit être un carré d'un polynôme de second degré au plus.

après avoir choisi les polynômes appropriés  $\chi(y)$  qui vérifient cette condition, le polynôme  $\pi_e(y)$  peut être obtenu à partir de l'équation (3.77).

Alors  $\tau_e(y)$  et  $h(y)$  peuvent être obtenus à partir de l'équation (3.73) et l'équation (3.76), respectivement.

Pour obtenir les solutions générales de l'équation (3.78), on va dériver une fois, on obtient.

$$\sigma_e(y) g'''(y) + [\sigma_e'(y) + \tau_e(y)] g''(y) + [\tau_e'(y) + h(y)] g'(y) + h'(y) g(y) = 0 \quad (3.79)$$

L'équation (3.79) est une équation différentielle homogène du troisième ordre avec des coefficients polynomiaux de degrés ne dépassant pas l'ordre de différenciation correspondant, nous dérivons l'équation (3.79)  $n$  fois, et nous obtenons la même forme, alors nous utilisons la nouvelle représentation  $g^{(n)}(y) = v_n(y)$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \sigma_e(y) v_n^{(3)}(y) + [\tau_e(y) + (n+1)\sigma_e'(y)] v_n''(y) + \\ & \left[ (n+1)\sigma_e'(y) + \frac{n(n+1)}{2}\sigma_e''(y) + h(y) \right] v_n'(y) + \\ & \left[ \frac{n(n+1)}{2}\tau_e''(y) + \frac{n(n+1)(n-1)}{6}\sigma_e^{(3)}(y) + (n+1)h'(y) \right] v_n(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Quand le coefficient de  $v_n(y)$  est égal à zéro, le polynôme  $h(y)$  est défini comme suit :

$$h_n(y) = -\frac{n}{2}\tau_e'(y) - \frac{n(n-1)}{6}\sigma_e''(y) + C_n \quad (3.81)$$

tel que  $C_n$  est une constante d'intégration.

L'expression de l'équation (3.80) devient :

$$\begin{aligned} & \sigma_e(y) v_n^{(3)}(y) + [\tau_e(y) + (n+1)\sigma_e'(y)] v_n''(y) + \\ & \left[ (n+1)\sigma_e'(y) + \frac{n(n+1)}{2}\sigma_e''(y) + h(y) \right] v_n'(y) = 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est un polynôme de la forme  $[p_n(y) = g(y) = g_n(y)]$ . Si l'on compare les polynômes  $h(y)$  et  $h_n(y)$  dans l'équation (3.76) et l'équation (3.81), une solution à valeurs propres peut être obtenue par la méthode NU étendue.

L'équation Biconfluent de Heun (BHE) (3.58) peut être résolue par la méthode de NIKIFOROV-UVAROV étendue [63].

Nous définissons les polynômes suivants :

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_e(y) &= 1 + \alpha - \beta y - 2y^2; \\ \sigma_e(y) &= y; \\ \tilde{\sigma}_e(y) &= (\gamma - \alpha - 2)y^2 - \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta]y;\end{aligned}$$

$$\pi_e(y) = \frac{2y^2 + \beta y - \alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4[(\gamma - \alpha - 2)y^2 - \frac{1}{2}[\delta + \beta(1 + \alpha)]y + \chi(y)y]} \quad (3.82)$$

A partir de l'équation (3.71), nous obtenons l'équation suivante

$$y g''(y) + [1 + \alpha - \beta y - 2y^2 + 2\pi_e(y)] g'(y) + h(y) g(y) = 0 \quad (3.83)$$

Nous dérivons cette l'équation  $n$  fois et en utilisant la nouvelle représentation  $g^{(n)}(y) = v_n(y)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}y v_n^{(3)}(y) + [1 + \alpha - \beta y - 2y^2 + 2\pi_e(y) + n + 1] v_n''(y) + \\ [(n + 1)(-\beta - 4y + 2\pi_e'(y)) + h(y)] v_n'(y) + \\ \left[ \frac{n(n + 1)}{2}(-4 + 2\pi_e''(y)) + (n + 1)h'(y) \right] v_n(y) = 0\end{aligned} \quad (3.84)$$

Si le coefficient de  $v_n(y)$  est égal à zéro, le polynôme  $h_n(y)$  est défini comme suit :

$$h_n(y) = (\beta + 4y - 2\pi_e'(y)) \frac{n}{2} + C_n \quad (3.85)$$

Nous pouvons écrire l'équation (3.84) comme suit :

$$\begin{aligned}y v_n^{(3)}(y) + [1 + \alpha - \beta y - 2y^2 + 2\pi_e(y) + n + 1] v_n''(y) + \\ \left[ \left(\frac{n}{2} + 1\right)(-\beta - 4y + 2\pi_e'(y)) + C_n \right] v_n'(y) = 0\end{aligned} \quad (3.86)$$

La solution de cette équation est un polynôme de la forme  $[p_n(y) = g(y) = g_n(y)]$ , la valeur propre peut être obtenue en comparant les polynômes  $h(y)$  et  $h_n(y)$  dans l'équation (3.76) et l'équation (3.85),  $\pi_e(y)$  est un polynôme de second ordre. Par conséquent, les polynômes  $\chi(y)$  doivent être sélectionnés de manière appropriée.

Nous choisirons  $\chi(y)$  où le spectre d'énergie à des valeurs réelles .

$$\begin{aligned}\chi_1(y) &= (\gamma - \alpha - 2)y - \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] \\ \chi_2(y) &= (\gamma - \alpha - 2)y - \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] - (2y^2 - \alpha)\beta\end{aligned} \quad (3.87)$$

Les solutions aux fonctions propres de **BHE**  $\Theta_e(y)$  et la partie polynomiale de la solution peuvent être déterminées à partir de l'équation (3.72) et l'équation (3.84), respec-

tivement. La fonction  $\Phi$  donnée par :

$$\Phi(y) = A_1 p_1(y) + A_2 e^\beta p_2(y) \quad (3.88)$$

tel que  $A_1$  et  $A_2$  sont des constantes .

Les équations aux valeurs propres sont obtenues comme suit :

$$\gamma - \alpha - 2 - 2n = 0; \quad n = 0; 1 \quad (3.89)$$

Ou bien

$$E^2 - m^2 + \frac{(mS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - 2n\sqrt{S_0^2 - V_0^2} (1 + \theta E)^q = 0. \quad (3.90)$$

Notons que nous avons le même résultat par la méthode précédente.

### 3.6 Application

Maintenant, dans notre analyse, il est intéressant d'étudier deux cas particuliers pour les valeurs de  $q$ , on se limite au cas  $q = 1$  et  $q = 2$ , pour les autres cas, le calcul devient un peu plus compliqué pour déterminer exactement et analytiquement les valeurs du spectre.

1. **Premier cas** :  $q = 1$  :  $A_E = (1 + \theta E)$  : Les potentiels dans l'équation (3.37) contiennent une dépendance linéaire en énergie, l'expression de la fonction énergétique peut être écrite sous la forme suivante :

$$E^2 - m^2 + \frac{(mS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - 2n\sqrt{S_0^2 - V_0^2} (1 + \theta E) = 0. \quad (3.91)$$

qui donne :

$$E_n^\pm = \frac{1}{S_0^2} \left[ n\theta (S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}} - mS_0 V_0 \pm \sqrt{2nS_0 (S_0 - m\theta V_0) (S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}} + n^2\theta^2 (S_0^2 - V_0^2)^3} \right] \quad (3.92)$$

et en passant au premier ordre en  $\theta$  on obtient .

$$E_n^\pm = -\frac{m_0 V_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{2n} (S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{4}}}{S_0} + \theta \left[ \frac{n (S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}{S_0^2} \mp \frac{\sqrt{2n} m V_0 \sqrt{2n} (S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{4}}}{2S_0^2} \right]. \quad (3.93)$$

Le premier terme de l'équation (3.93) est le spectre d'énergie de l'équation habituelle DKP pour un vecteur combiné à un scalaire et le second terme représente

les effets des fluctuations quantiques de potentiel- dépendante de l'énergie sur le système. Il est remarquable que l'expression du spectre d'énergie dans notre système (3.93) contienne un terme de correction déformé supplémentaire dépendant du paramètre de déformation  $\theta$  et des puissances en  $n$  dues à la dépendance des potentiels en énergie.

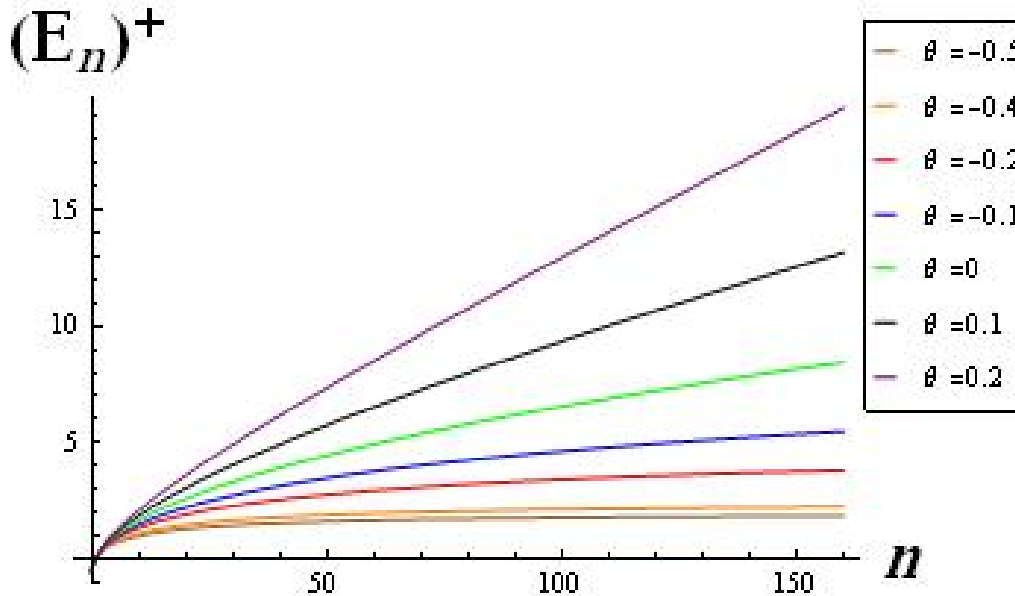


FIGURE 3.1 – Le graphique illustre le spectre de l'énergie  $(E_n)^+$  par rapport au nombre quantique  $n$  avec  $V_0 = 0.3, S_0 = 0.5, m = 1$ .

Dans la figure 3.1, nous remarquons que :

- ★ L'énergie  $(E_n)^+$  est présentée en fonction de  $n$  pour plusieurs valeurs de  $\theta$  et  $n \leq 160$ . Ces énergies prennent les valeurs positives  $((E_n)^+ \geq 0)$  pour  $n \geq 1$ .
- ★ Pour  $\theta$  négatif, le spectre est comprimé et pour  $\theta$  positif, le spectre est élargi, et produit une augmentation du niveau d'espacement en fonction de  $n$ , comme les états collectifs des noyaux atomique paires-paires dans le modèle de Bohr-Mottelson, en phénoménologie de la physique des particules et, " physics beyond " et au de là le modèle standard ... etc.
- ★ La fonction  $(E_n)^+ = f(n)$  est une fonction monotone croissante pour  $\theta$  arbitraire et le début de la saturation commence à partir d'un nombre quantique spécifique  $N$ , dépendant de  $\theta$ .

2. **Deuxième cas :**  $q = 2 : A_E = (1 + \theta E)^2$  : Les potentiels dans l'équation (3.37) contient une dépendance énergétique quadratique, dans ce cas, la formule de l'énergie se simplifie comme suit :

$$E^2 - m^2 + \frac{(mS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - 2n\sqrt{S_0^2 - V_0^2} (1 + \theta E)^2 = 0, \quad (3.94)$$

On a

$$E_n^\pm = \frac{2n\theta(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}} - mS_0V_0 \pm (S_0 - m\theta V_0)\sqrt{2n(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}}{S_0^2 - 2n\theta^2(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.95)$$

et en développant au second ordre en  $\theta$ , on obtient :

$$E_n^\pm = \frac{-mV_0}{S_0} \pm \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{4}}\sqrt{2n}}{S_0} + \theta \left[ \frac{2n(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}{S_0^2} \mp \frac{\sqrt{2nm}V_0(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{4}}}{S_0^2} \right] - \theta^2 \left[ \frac{2nmV_0(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}{S_0^3} \mp \frac{(2n)^{\frac{3}{2}}(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{9}{4}}}{S_0^3} \right] \quad (3.96)$$

Selon le facteur  $S_0^2 - 2n\theta^2(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}$  (un dénominateur) présent dans la formule énergétique (3.95), on observe clairement l'apparition d'un point critique et :  $\theta_c = \frac{S_0}{\sqrt{2n(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}}$

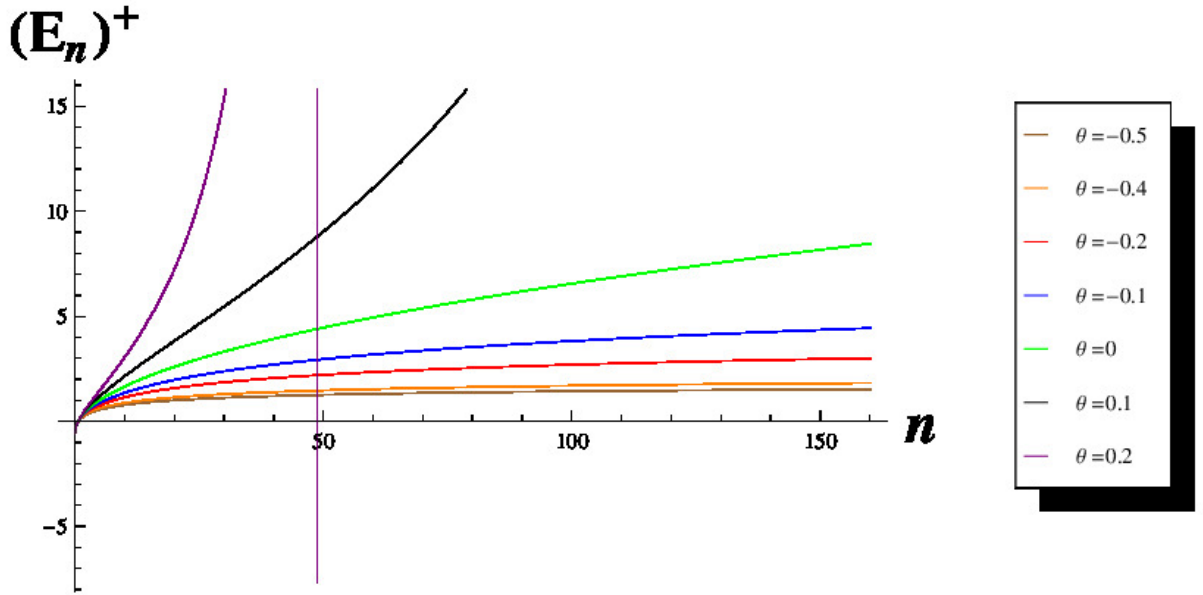


FIGURE 3.2 – Le graphique illustre le spectre de l'énergie  $(E_n)^+$  par rapport au nombre quantique  $n$  avec  $V_0 = 0.3$ ,  $S_0 = 0.5$ ,  $m = 1$ .

La figure 3.2 dans ce cas, pour  $\theta > 0$ , il y a une observation importante, les niveaux d'énergie sont élargis et l'énergie augmente vers  $\theta_c$ , par exemple  $30 < n < 50$ , cela correspond à  $\theta_c = 0.2$  et  $n > 90$  pour  $\theta_c = 0.1$ .

Pour  $\theta < 0$ , le spectre est comprimé et il existe un état de saturation à partir d'un nombre quantique spécifique  $N$ , dépendant de  $\theta$ . Par exemple, quand  $\theta_c = -0.4$  ou

$\theta_c = -0.5$ , la saturation commence à partir de  $n = 100$ . Cependant, pour une valeur fixe de  $\theta$ , l'énergie  $(E_n)^+ = f(n)$  est une fonction monotone croissante.

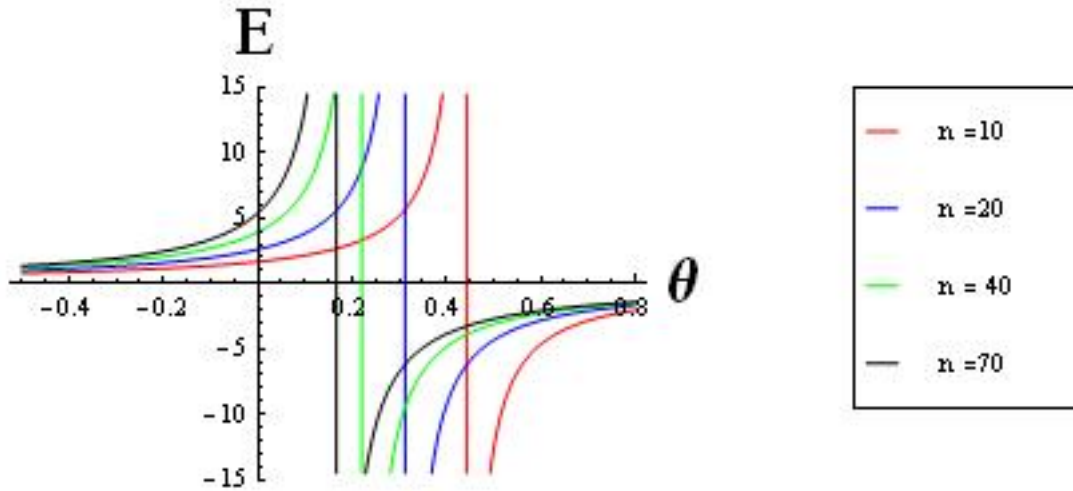


FIGURE 3.3 – Le graphique illustre le spectre de l'énergie  $(E_n)^+$  par rapport au facteur  $\theta$  avec  $V_0 = 0.3, S_0 = 0.5, m = 1$ .

La Figure 3.3 présente la variation de l'énergie par rapport au facteur  $\theta$  pour différentes valeurs du nombre quantique  $n$ , on observe clairement que pour  $\theta > 0$  il y a des pics pour une certaine valeur de  $\theta$ .

Par contre pour  $\theta < 0$  les pics disparaissent et les niveaux d'énergie sont plus proches. **A la fin**, pour les deux expressions d'énergie, dans le cas où  $\lim \theta \rightarrow 0$  en revenant au cas ordinaire  $A_E = 1$ , on obtient l'expression habituelle du spectre d'énergie de l'équation DKP ordinaire en présence du champ électromagnétique

$$E_n^\pm = -\frac{m_0 V_0}{S_0} \pm \sqrt{2n \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}}{S_0^2}}, \quad (3.97)$$

et pour  $S_0 = V_0$  nous remarquons la disparition totale de cette dépendance énergétique en l'équation 3.92 et l'équation 3.95.

### 3.7 La fonctions biconfluent de Heun (BHE)

L'équation de Biconfluent de Heun (BHE) est une équation différentielle homogène linéaire du second ordre et dérive de l'équation générale de Heun par la coalescence de deux points singuliers réguliers, finis, à l'infini [62]. La forme canonique de BHE est généralement exprimée comme suit :

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \left[ \frac{\alpha + 1}{y} - 2y - \beta \right] \frac{d}{dy} + \left[ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{\delta + \beta(\alpha + 1)}{2y} \right] \right\} \Phi = 0, \quad (3.98)$$

tel que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont des paramètres arbitraires.

BHE a une singularité régulière à l'origine ( $y = 0$ ) et une singularité irrégulière à l'infini ( $y \rightarrow \infty$ ) dont la classe  $s$  est  $R(\infty) = 3$ .

La solution de l'équation (3.98) au voisinage du point singulier régulier situé à  $y = 0$  peut être écrit comme la série.

$$\Phi(y) = \sum_{n \geq 0} c_n y^{n+\nu}, \quad (3.99)$$

avec  $c_0 \neq 0$ . Le calcul des dérivés de la série (3.99) terme par terme donne  $\Phi(y)'$ ,  $\Phi(y)''$  et en les substituant dans l'équation (3.98), on obtient les conditions,

$$\nu(\nu + \alpha) c_0 = 0, \quad (3.100)$$

$$(\nu + 1)(\nu + 1 + \alpha) c_1 - \left[ \beta\nu + \frac{1}{2}(\delta + \beta(1 + \alpha)) \right] c_0 = 0, \quad (3.101)$$

et la relation de récurrence à trois termes,

$$(v+2+n)(v+2+\alpha+n)c_{n+2} - \left[ \beta(v+1+n) + \frac{1}{2}(\delta + \beta(1+\alpha)) \right] c_{n+1} + [\gamma - 2 - \alpha - 2(v+n)] c_n = 0. \quad (3.102)$$

Le paramètre  $\alpha$  n'étant pas un entier négatif, pour  $v = 0$  et  $c_0 = 1$ , on peut écrire la solution comme  $HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y)$  la fonction de Biconfluent de Heun, définie par la série :

$$HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(\alpha+1)_n} \frac{y^n}{n!}, \quad (3.103)$$

tel que

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \frac{1}{2}(\delta + \beta(\alpha+1)); \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad n \geq 0, \quad (3.104)$$

Et

$$a_{n+2} = \left[ (n+1)\beta + \frac{1}{2}(\delta + \beta(\alpha+1)) \right] a_{n+1} - (n+1)(n+1+\alpha)(\gamma - \alpha - 2 - 2n) a_n, \quad n \geq 0, \quad (3.105)$$

Quand  $\alpha$  est un entier négatif ( $\alpha = -m, m \geq 1$ ), il est possible de définir,

$$HeunB(-m, \beta, \gamma, \delta; y) = y^m HeunB(m, \beta, \gamma, \delta; y). \quad (3.106)$$

Si le paramètre  $\alpha$  n'est pas un entier relatif, l'équation (3.98) admet deux solutions linéairement indépendantes au voisinage de l'origine, c'est-à-dire

$$\Phi_1(x) = HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y), \quad (3.107)$$

$$\Phi_2(x) = y^{-\alpha} HeunB(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; y). \quad (3.108)$$

Et l'expression de la solution générale est donnée par

$$\Phi(x) = C_1 HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y) + C_2 y^{-\alpha} HeunB(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; y) \quad (3.109)$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration et le Wronskian de deux solutions est

$$W = -\alpha y^{-(1+\alpha)} \exp(\beta y + y^2).$$

A partir de la relation de récurrence ci-dessus, la fonction  $HeunB(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y)$  devient un polynôme de degré  $n$  si et seulement si les conditions,

$$\gamma - \alpha - 2 - 2n = 0; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.110)$$

$$a_{n+1} = 0, \quad (3.111)$$

Sont vérifiées voir les références [62, 63]. La solution autour du point singulier irrégulier ( $y \rightarrow \infty$ ) est donnée par la solution récessive de Thome [62, 64]. Cependant, cette solution n'est pas aussi utile que la solution écrite près de la singularité habituelle dans les applications. nous notons que le BHE est largement impliqué dans différents domaines des sciences pures et appliquées contemporaines telles que la mécanique quantique, la relativité générale, la physique de l'état solide, la physique atomique et moléculaire, la physique optique et la chimie [64, 65].

### 3.8 La fonctions parabolique cylindrique

Le cas particulier le plus important de l'équation différentielle de Whittaker est :

$$y''(z) + \left[ \nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] y(z) = 0 \quad (3.112)$$

Où  $\nu$  est un constante arbitraire, réelle ou complexe. C'est l'équation différentielle de Weber et ses solutions sont des fonctions parabolique cylindrique. [45, 46, 50] qui admet quatre solutions linéairement dépendentes, ces solutions sont symbolisées par la notation  $D_\nu(z)$ ,  $D_\nu(-z)$ ,  $D_{-\nu-1}(iz)$ , et  $D_{-\nu-1}(-iz)$ . Ces solutions sont données par les représentations :

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \cdot {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) + \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right\}. \quad (3.113)$$

Où  ${}_1F_1(a, b; c)$  est la fonction confluyente hypergéométrique qui est définie par [45, 46, 50] :

$${}_1F_1(a, b; c) = \sum \frac{(a)_n \cdot z^n}{(b)_n \cdot n!} \quad (3.114)$$

avec

$$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.115)$$

telle que  $D_\nu(0)$  et premiers dérivés  $\dot{D}_\nu(0)$  dont les valeurs suivantes au point  $z = 0$  :

$$D_\nu(0) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \dot{D}_\nu(0) = -\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} \quad (3.116)$$

Les formules de récurrence sont :

$$\begin{aligned} D_{\nu+1}(z) - zD_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) &= 0 \\ \frac{d}{dz} D_\nu(z) + \frac{1}{2} z D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) &= 0 \\ \frac{d}{dz} D_\nu(z) - \frac{1}{2} z D_\nu(z) + D_{\nu+1}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

Le Wronskian de cette paire  $D_\nu(z)$  et  $D_{-\nu-1}(iz)$  [45] :

$$W\{D_\nu(z), D_{-\nu-1}(iz)\} = (-i)^{\nu+1} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} \quad (3.118)$$

Dans cette thèse, nous avons étudié l'équation relativiste de DKP décrivant la dynamique du boson scalaire et vectoriel de spins 0 et 1 respectivement, en interaction avec quelques potentiels extérieurs suivant :

- Potentiel trapézoïdal
- Champ électromagnétique de forme tangente hyperbolique
- Potentiels vectoriel et scalaire dépendants de l'énergie

Pour le cas de la barrière trapézoïdale, les fonctions d'onde sont extraites et exprimées en termes des fonctions paraboliques cylindriques. Les cas limites tels : la barrière rectangulaire et le potentiel linéaire sont déduits et étudiés .

Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission respectivement,  $R$  et  $T$  sont calculées . Le paradoxe de Klein est toujours présent.

Pour le deuxième cas du champ électromagnétique tangentiel hyperbolique, les solutions sont obtenues exactement et analytiquement et sont données en termes des fonctions hypergéométriques. En outre, le phénomène de la création de paires et les états de diffusion ont été abordés.

Pour le dernier cas, les solutions de l'équation DKP à une dimension en présence des potentiels vectoriel et scalaire dépendants de l'énergie sont exposées, les fonctions d'onde ont été déterminées et exprimées en fonction de polynômes biconfluent de Heun. La fonction énergétique a été déduite et étudiée pour des cas particuliers. Les conditions de normalisation adéquates et l'équation de continuité ont été déterminées et sont liées aux potentiels scalaire et vectoriel dépendants de l'énergie . Enfin , une étude numérique des résultats physiques a été présentée, le comportement du coefficient de transmission pour le premier problème et la variation du spectre énergétique en fonction de certains paramètres caractérisants cette dépendance énergétique pour le dernier problème .

- [1] G. Petiau, Contribution a la theorie des equations d'ondes corpusculaires, Acad. Roy. Belg. Mem. Collect 16 (1936).
- [2] R. Y. Duffin, On the characteristic matrices of covariant systems, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).
- [3] N. Kemmer, The particle aspect of meson theory, Proc. R. Soc. A 173, 91 (1939).
- [4] Fischbach E, Nieto MM and Scott CK - Prog. Theor. Phys. 48, 574 (1972).
- [5] Krajcik RA and Nieto MM - Phys. Rev. D 10, 4049 (1974).
- [6] Krajcik R A and Nieto M M Am. J. Phys. 45 818 (1977).
- [7] Pimentel B M and Fainberg V Ya Teoret. Mat. Fiz.124 445 (2000).
- [8] Fischbach, E., Iachello, F., Lande, A., Nieto, M. M., & Scott, C. K. (1971).
- [9] Ruegg H and Ruiz-Altaba M arXiv : 0304245v1 (2003).
- [10] Kanatchikov I Rep. Math. Phys. 46 107 (2000).
- [11] V. Gribov, Eur. Phys J. C 10, 71 (1999).
- [12] M.C.B. Fernandes J.D.M. Viannna, Found. Phys. 29, 201 (1999); A.O. Bolivar, Physica A 315, 601 (2002).
- [13] V.M. Red kov, quant-ph/9812007; J.T. Lunardi, B.M. Pimentel R.G. Teixeira, Gen. Rel. Grav. 34, 491 (2002); R. Casana et al. Int. J. Mod. Phys. A 17, 4197 (2002).
- [14] J.T. Lunardi et al., Int. J. Mod. Phys. A 17, 205 (2002).
- [15] P. Ghose e M.K. Samal, Phys. Rev. E, 64, 036620 (2001).
- [16] P. Ghose, M.K. Samal e A. Datta, Phys. Lett. A, 315, 23 (2003).
- [17] W. Struyve et al., Phys. Lett. A 322, 84 (2004).
- [18] M. de Montigny et al., J. Phys. A 33, L273 (2000).
- [19] R. Casana et al., hep-th/0506193.

- [20] R. Casana et al., Phys. Lett. A 316, 33 (2003).
- [21] J. Daicic e N.E. Frankel, J. Phys. A 26, 1397 (1993); K. Sogut, A. Havare e I. Acikgoz, J. Math. Phys. 43, 3952 (2002).
- [22] A. Boumali, Can. J. Phys. 82, 67 (2004).
- [23] A. Boumali, Can. J. Phys. 85, 1417 (2007).
- [24] M. Merad, Int. J. Theor. Phys. 46, 2105 (2007).
- [25] M. Merad, H. Bada A. Lecheheb, Czech. J. Phys. 56, 765 (2006).
- [26] N. Debergh, J. Ndimubandi D. Strivay, Z. Phys. C 56, 421 (1992); Y. Nedjadi R.C.Barret, J. Phys. A 27, 4301 (1994).
- [27] L.M. Abreu, E.S. Santos J.D.M. Vianna, J. Phys. A : Math. Theor. 43, 495402 (2010).
- [28] A. Boumali, Phys. Scr. 76, 669 (2007).
- [29] Y. Nedjadi, S. Ait-Tahar R.C. Barret, J. Phys. A 31, 3867 (1998).
- [30] D.A. Kulikov, R.S. Tutik A.P. Yaroshenko, Mod. Phys. Lett. A 20, 43 (2005).
- [31] F. Yasuk M. Karakoc I. Boztosun, Phys. Scr. 78, 045010 (2008).
- [32] Chetouani, L., Merad, M., Boudjedaa, T., & Lecheheb, A. Solution of Duffin–Kemmer–Petiau equation for the step potential. International Journal of Theoretical Physics, 43(4), 1147-1159 (2004).
- [33] L. B. Castro, T. R. Cardoso & A. S. de Castro, Nuclear Phys. B, Proceedings Supplement, 199, 207 (2010).
- [34] B. Boutabia-Chératitia & T. Boudjedaa, Phys. Lett. A 338, 97, (2005).
- [35] F. Yasuk et al., Phys. Scr. 71, 340, (2005).
- [36] Y. Nedjadi & R.C. Barret, J. Math. Phys. 35, 4517 (1994).
- [37] S. Gonen, A. Havare e N. Unal, hep-th/0207087
- [38] Y.KasrieL.Chetouani,Int.J.Theor.Phys.47,2249 (2008).
- [39] J.Formanek,J.Maresand & R.Lombard,Czech.J.Phys.54,289 (2004).
- [40] R. J. Lombard, J. Mareš and C. Volpe, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 34 1879 (2007)
- [41] A. Benchikha and L. Chetouani, Mod. Phys. Lett. A 28 1350079 (2013).
- [42] A. Benchikha and L. Chetouani, Cent. Eur. J. Phys. 12, 392 (2014).
- [43] A. Benchikha and M. Merad, Int. J. Mod. Phys. A 32 1750194 (2017).
- [44] Iwamoto, H., Aquino, V. M., and Aguilera-Navarro, V. C. Scattering coefficients for a trapezoidal potential. International Journal of Theoretical Physics, 42(8), 1795-1807 (2003).
- [45] Olver, F. W. (Ed.). NIST handbook of mathematical functions , Cambridge University Press (2010).

- [46] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1964). Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55) ,Dover.
- [47] Shoenberg, D. "Magnetic Oscillations in Metals", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984).
- [48] Gavrillov, S. P., and D. M. Gitman. "Quantization of charged fields in the presence of critical potential steps." Physical Review D 93.4 : 045002 (2016).
- [49] Rosen, N., and Morse, P. M. "On the vibrations of polyatomic molecules." Physical Review, 42(2), 210 (1932).
- [50] Jeffrey, A., and Zwillinger, D. (Eds.). Table of integrals, series, and products. Academic press (2007).
- [51] Hansen, A., and Ravndal, F. Klein's paradox and its resolution. Physica Scripta, 23(6), 1036 (1981).
- [52] A.I. Nikishov, hep-th/0111137 .
- [53] A.I. Nikishov, hep-th/0202024 .
- [54] H. Snyder, J. Weinberg, Phys. Rev. 57 307 (1940) ; L.I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg, Phys. Rev. 57 (1940) 315 ; A.M. Green, Nucl. Phys. 33 218 (1962) ; W. Pauli, Z. Phys. 43 601 (1927).
- [55] U. Günther, B.F. Samsonov and F. Stefani, J. Phys. A 40 F169 (2007).
- [56] V.I. Belyavskii, M.V. Goldfarb and Y.V. Kopaev , Fiz. Teh. Poluprovodn. 31 1095 (2007) ; V. Milanovic and Z. Ikonc, IEEE J. Quantum Electron. 32 1316 (1996).
- [57] K Niyogi , R N Panigrahi, D Roy and B Talukdar, Pramana, 17, 229 (1981).
- [58] McKellar, B.H.J. ; McKay, C.M., Aust. J. Phy, 36, 607 (1983).
- [59] M. De Sanctis and P. Quintero, Eur. Phys. J. A 39, 1434 (2009).
- [60] A.Schulze-Halberg and P.Roy,J.Math. Phys.58,113507 (2017).
- [61] Clarc, B. C. ; Hama, S. ; Kalbermann, G. R. ; Mercer, R. L. ; Ray, L. Phys. Rev. Lett. 55, 592 (1985) ; Guo, G. ; Long, C. ; Yang, Z. ; Qin, S. Can. J. Phys. 87,989 (2009) ; Gribov, V. Eur. Phys. J. C 10,71 (1999).
- [62] Heun's Differential Equations, Edited by A. Ronveaux, Oxford University Press (1995).
- [63] KARAYER, H., DEMIRHAN, D., et BUYUKKILIC, F. "Some special solutions of bi-confluent and triconfluent Heun equations in elementary functions by extended Nikiforov–Uvarov method". Reports on Mathematical Physics, 2015, vol. 76, no 3, p. 271-281 (2015).
- [64] S. Yu. Slavyanov, W. Lay, Special Functions : A Unified Theory Based on Singularities, Oxford University Press (2000).

- [65] M. Hortacsu, "Heun Functions and Some of Their Applications in Physics", Adv. High Energy Phys. (2018) 8621573 (2018).

ISSN 0253-6102

# Communications in Theoretical Physics

A series Journal of the Chinese Physical Society (A) Distributed by IOP Publishing

[iopscience.org/ctp](http://iopscience.org/ctp) | [ctp.itp.ac.cn](http://ctp.itp.ac.cn)

Volume 68, Number 2, August 1, 2017



INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS OF THE CHINESE ACADEMY  
OF SCIENCES AND THE CHINESE PHYSICAL SOCIETY

IOP Publishing

PAPER

## DKP Equation with Energy Dependent Potentials

To cite this article: O. Languer *et al* 2019 *Commun. Theor. Phys.* **71** 1069

View the [article online](#) for updates and enhancements.

## DKP Equation with Energy Dependent Potentials

O. Langueur,<sup>1</sup> M. Merad,<sup>1,\*</sup> and B. Hamil<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département des sciences de la matière, Faculté des Sciences Exactes, Université de Oum El Bouaghi, 04000 Oum El Bouaghi, Algeria

<sup>2</sup>Département de TC de SNV, Université Hassiba Benbouali, Chlef, Algeria

(Received March 17, 2019; revised manuscript received April 22, 2019)

**Abstract** *In this work, we study the DKP equation subjected to the action of combined vector plus scalar energy depend on potentials in (1+1) dimensions space-time. The conditions of normalisation and continuity equation are calculated. The eigenfunctions and the corresponding eigenvalues are then determined. A numerical study is presented and the energy graphs for some values of the energy parameter are plotted.*

**DOI:** 10.1088/0253-6102/71/9/1069

**Key words:** DKP equation, energy dependent potentials, biconfluent Heun function

### 1 Introduction

For a long time, works on the so called systems with energy dependent potentials<sup>[1]</sup> have raised a considerable interest because of its varied applications in several areas and their analyses does not cease developing. We quote some examples, the dynamo effect in magneto hydrodynamic models,<sup>[2]</sup> in quantum wells and semiconductors,<sup>[3]</sup> including the theory of elastic and inelastic scattering in atomic, nuclear and particle physics,<sup>[4–5]</sup> and the description of the heavy quark system<sup>[6–7]</sup> etc. Further, we point out that systems with energy-dependent potentials provide some modifications on the mathematical structure as the scalar product and the completeness relation, necessary to ensure conservation of the norm and satisfy the requirements of quantum mechanics, which has been analyzed clearly in Refs. [6] and [8].

For this purpose, the treatment of the potential-dependent energy, continues to increase, consequently numerous works were looked and several methods of analytical and approximate resolution were presented. Let us mention one of these potentials: the harmonic oscillator with an energy-dependent frequency in 1D and in 3D which has recently been solved,<sup>[6,9]</sup> the Coulomb and the Morse potentials,<sup>[10–11]</sup> the harmonic oscillator and the Pöschl–Teller potential by means of the supersymmetry formalism.<sup>[12]</sup> The D-dimensional Schrödinger and Klein-Gordon equations were studied via the Nikiforov–Uvarov method,<sup>[13–14]</sup> a class of potentials was perfectly resolvable by the conversion method,<sup>[11]</sup> the approximate solution of the Dirac equation using the supersymmetry quantum mechanics.<sup>[15]</sup> Dirac particles in the presence of scalar, vector, and tensor potentials have been investigated by using the asymptotic iteration method,<sup>[16]</sup> extension to the case of systems having mass dependent position were examined in Ref. [17]. The harmonic oscillator and the hydrogen atom and the Klein-Gordon particle sub-

jected to vector plus scalar energy dependent potentials were examined by using the Feynman approach.<sup>[18–19]</sup> The Dirac propagator was determined by using the formalism for supersymmetric path integrals<sup>[20]</sup> and the harmonic oscillator propagator has been constructed via the path integral approach in noncommutative space.<sup>[21–22]</sup>

In the present paper we extend this idea to the another relativistic equation namely Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation, other than that of Dirac and Klein-Gordon, describing the dynamics of the scalar and vectorial Bosons. The DKP equation is of great importance of these various applications in quantum chromodynamics, cosmology, gravity, and its richness of these experimentation in areas of physics.<sup>[23]</sup> To our knowledge, this equation has never been treated with energy-dependent potential, in an analytical manner and its absence is practically noticeable in the context of problems with energy dependent potentials.

In this paper, we will try to study the DKP equation subjected to the action of combined with vector and scalar energy-dependent potentials in (1+1) dimensions space-time on the one hand, and on the other hand to see the effect of this energy dependence on the normalisation conditions and the continuity equation for this system in question.

The outline of this paper is as follows: In Sec. 2, we determine the normalisation condition and continuity equation for (DKP) equation. In Sec. 3, we expose an explicit calculation relative to the one-dimensional (DKP) subjected to the action of combined with vector and scalar energy-dependent potentials. By a straightforward calculation, the exact solution is obtained and the energy spectrum and wave functions are deduced. These latter are expressed by the biconfluent Heun polynomials. In Sec. 4, a numerical study of the energy function is presented.

\*E-mail: meradm@gmail.com

## 2 Normalization Condition and Continuity Equation

The (1+1)-dimensional DKP equation for the scalar and vector bosons moving in a constant electric field and a scalar potential is:

$$[\beta^0(i\partial_0 - eV(x, i\partial_0)) + i\beta^1\partial_x - (m + S(x, i\partial_0))]\psi = 0, \quad (1)$$

where the matrices  $\beta^0$  and  $\beta^1$  verify the DKP algebra

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\alpha + \beta^\alpha\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\alpha + g^{\alpha\nu}\beta^\mu, \quad (2)$$

and the potentials  $V(x, i\partial_0)$  and  $S(x, i\partial_0)$  denote a function of  $x$  and energy  $i\partial_0$ .

The metric tensor  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ , and the adjoint spinor  $\bar{\psi} = \psi^\dagger (2\beta_0^2 - 1)$  verifies the following adjoint equation

$$\{ [(-i\partial_0 - eV(x, i\partial_0)^*)\bar{\psi}\beta^0] - i(\partial_x\bar{\psi})\beta^1 - [m + S(x, i\partial_0)^*]\bar{\psi} \} = 0. \quad (3)$$

If we expand  $\psi$  on the basis  $\{\Phi_{E_n}\}$

$$\psi = \sum_n a_{E_n} \Phi_{E_n} e^{-iE_n t}, \quad (4)$$

we have

$$[\beta^0(E_n - eV(x, E_n)) + i\beta^1\partial_x - (m + S(x, E_n))]\Phi_{E_n} = 0, \quad (5)$$

$$\{ [(E_m - eV(x, E_m))\bar{\Phi}_{E_m}\beta^0] - i(\partial_x\bar{\Phi}_{E_m})\beta^1 - (m + S(x, E_m))\bar{\Phi}_{E_m} \} = 0. \quad (6)$$

By multiplying Eq. (5) by  $\bar{\Phi}_{E_m}$  and the adjoint equation (6) by  $\Phi_{E_n}$ , and after subtraction and integration over  $dx$ , we obtain the orthogonality relation between two states  $n$  and  $m$

$$\int dx \bar{\Phi}_{E_m} \left\{ \beta^0 - \beta^0 e^{\frac{V(x, E_n) - V(x, E_m)}{E_n - E_m}} - \frac{S(x, E_n) - S(x, E_m)}{E_n - E_m} \right\} \Phi_{E_n} = \delta_{nm}, \quad (7)$$

and, in the limit  $n \rightarrow m$ , the above equation becomes

$$\int dx \bar{\Phi}_E \{ \beta^0 - \phi_{nn} \}_{E=E_n} \Phi_E = 1, \quad (8)$$

where

$$\phi_{nn} = \beta^0 e^{\frac{\partial V(x, E)}{\partial E}} - \frac{\partial S(x, E)}{\partial E}. \quad (9)$$

Therefore, the presence of the additional factor  $\{\beta^0 - \phi_{nn}\}$  changes the scalar product (the norm). In the case where the potential does not depend on energy  $\phi_{nn} = 0$ , we find the usual normalization condition  $\int dx \bar{\Phi}_E \beta^0 \Phi_E = 1$ .

Now, to derive the continuity equation  $\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi = 0$ , multiplying Eq. (1) by  $(\bar{\psi})$  and Eq. (3) by  $(\psi)$  and differentiating between the two equations, we

obtain the following expression

$$\partial_x J^1 = \partial_x \bar{\psi} \beta^1 \psi, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \rho = \partial_0 \bar{\psi} \beta^0 \psi - \frac{e}{i} \{ \bar{\psi} \beta^0 V(x, i\partial_0) \psi - [V(x, i\partial_0)^* \bar{\psi}] \beta^0 \psi \} \\ - \frac{1}{i} \{ \bar{\psi} S(x, i\partial_0) \psi - [S(x, i\partial_0)^* \bar{\psi}] \psi \}. \end{aligned} \quad (11)$$

To simplify the form of  $\rho$ , we put this separate formed,

$$V(x, i\partial_0) = U(x) + V(x) i\partial_0, \quad (12)$$

$$S(x, i\partial_0) = S_0(x) + S_1(x) i\partial_0, \quad (13)$$

$$\psi = \sum_n a_{E_n} e^{-iE_n t} \Phi_{E_n}. \quad (14)$$

After a direct calculation, the expression of the density  $\rho$  can be rewritten as

$$\begin{aligned} \rho = \sum_{n,m} a_{E_n} a_{E_m}^* \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} e^{i(E_m - E_n)t} - eV(x) \sum_{n,m} a_{E_n} a_{E_m}^* \frac{\{ E_m \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} - \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} E_n \}}{(E_m - E_n)} e^{i(E_m - E_n)t} \\ - \frac{eV(x)}{i} C^{st} \sum_{n,m} a_{E_n} a_{E_m}^* \{ E_m \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} - \bar{\Phi}_{E_m} \beta^0 \Phi_{E_n} E_n \} \\ - S_1(x) \sum_{n,m} a_{E_n} a_{E_m}^* e^{i(E_m - E_n)t} \bar{\Phi}_{E_m} \Phi_{E_n} - \frac{1}{i} S_1(x) C^{st} \sum_{n,m} a_{E_n} a_{E_m}^* \{ E_n - E_m \} \bar{\Phi}_{E_m} \Phi_{E_n}, \end{aligned} \quad (15)$$

and by taking the lim  $n \rightarrow m$ , Eq. (15) will be reduced to this form

$$\rho = \bar{\psi} \beta^0 \psi (1 - eV(x)) - S_1(x) \bar{\psi} \psi. \quad (16)$$

## 3 DKP Equation in a Constant Electric Field and a Scalar Potential

In this section we illustrate the energy dependent potentials on the energy eigenvalues and eigenfunctions of a DKP particle in a constant electric field and a scalar potential. The electric field and the scalar potential are chosen linear

$$V(x) = V_0 A_E x, \quad S(x) = S_0 A_E x, \quad (17)$$

where  $V_0$  and  $S_0$  two constants, we suppose  $|S_0| \succ |V_0|$  to avoid complex eigenvalues, and  $A_E = (1 + \theta E)^q$ .

In (1+1)-dimensional space time, we choose this representation of the following DKP matrix  $\beta$ ,

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Hence, the DKP equation in the presence of a vector plus

scalar with energy dependent potentials is written as

$$\left[ \beta^0 \left( \frac{i\partial}{\partial t} - V \left( x, \frac{i\partial}{\partial t} \right) \right) + i\beta^1 \frac{\partial}{\partial x} - \left( m + S \left( x, \frac{i\partial}{\partial t} \right) \right) \right] \times \psi = 0. \quad (19)$$

The stationary solution of Eq. (19) has the form  $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-iEt}$  and  $\phi(x)$  is a vectors of dimension  $(3 \times 1)$  which can be written as

$$\phi^T = (\phi_1 \phi_2 \phi_3). \quad (20)$$

We insert the wave function  $\phi$  and the matrix  $\beta$ , we obtain the following equations systems

$$\begin{aligned} i(E - V(x, E))\phi_3 - \frac{d}{dx}\phi_2 - (m + S(x, E))\phi_1 &= 0, \\ \frac{d}{dx}\phi_1 + (m + S(x, E))\phi_2 &= 0, \\ i(E - V(x, E))\phi_1 + (m + S(x, E))\phi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Now, to solve the eigenvalue equation (19), we decouple the system (21) and it is not difficult to verify that  $\phi_1$  satisfies the following Klein Gordon type equation

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{(m/S_0A_E + x)} \frac{d}{dx} - \mu \left( x + \frac{\eta}{\mu} \right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2 \right] \times \phi_1 = 0, \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} \mu &= (S_0^2 - V_0^2) A_E^2, \quad \eta = A_E (mS_0 + EV_0), \\ \text{and } \vartheta^2 &= m^2 - E^2, \end{aligned} \quad (23)$$

and we introduce the following ansatz

$$\phi_1(x) = e^{\int^x f(u) du} \Phi(x), \quad (24)$$

where  $f(x)$  is arbitrary function. Then, the equation for  $\Phi(x)$  is

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \left( 2f - \frac{1}{(m/S_0A_E + x)} \right) \frac{d}{dx} - \frac{f}{(m/S_0A_E + x)} \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= e^{-(\sqrt{\mu}/2)(x+(\eta/\mu))^2} \left\{ C_1 \text{HeunB} \left( -2, \beta, \gamma, 0, \mu^{1/4} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + C_2 \sqrt{\mu} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right)^2 \text{HeunB} \left( 2, \beta, \gamma, 0, \mu^{1/4} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= -\frac{1}{m + S(x, E)} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-(\sqrt{\mu}/2)(x+(\eta/\mu))^2} \left[ C_1 \text{HeunB} \left( -2, \beta, \gamma, 0, \mu^{1/4} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_2 \sqrt{\mu} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right)^2 \text{HeunB} \left( 2, \beta, \gamma, 0, \mu^{1/4} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= -i \frac{(E - e_0V(x, E))}{m + S(x, E)} e^{-(\sqrt{\mu}/2)(x+(\eta/\mu))^2} \left\{ C_1 \text{HeunB} \left( -2, \beta, \gamma, 0, \mu^{1/4} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + C_2 \sqrt{\mu} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right)^2 \text{HeunB} \left( 2, \beta, \gamma, 0, \mu^{1/4} \left( x + \frac{m}{S_0A_E} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Now, to determine energy spectrum, using the condition (53) (see appendix) and replacing the parameters  $\alpha$  and  $\delta$  by their expressions (28), we finally get the following result

$$E^2 - m^2 + \frac{(mS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - 2n\sqrt{S_0^2 - V_0^2} (1 + \theta E)^q = 0. \quad (33)$$

## 4 Application

Now in our analysis, it is interesting to study two particular cases for values of  $q$ , we limit ourselves only to the case  $q = 1$  and  $q = 2$ , for the other cases, the calculation becomes a little more complicated to determine exactly and analytically the values of the spectrum.

$$+ f' + f^2 - \mu \left( x + \frac{\eta}{\mu} \right)^2 + \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2 \Phi = 0. \quad (25)$$

We choose  $f(x)$  to cancel the term  $(x + (\eta/\mu))$ , this implies

$$f(x) = -\mu^{1/2} \left( x + \frac{\eta}{\mu} \right). \quad (26)$$

By substituting  $f(x)$  with their expression (26) and changing the variable from  $x$  to  $y$ , by setting  $y = \mu^{1/4}(x + (m/S_0A_E))$ , then Eq. (25) can be expressed as

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \left[ \frac{\alpha + 1}{y} - 2y - \beta \right] \frac{d}{dy} \right. \\ \left. + \left[ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{\delta + \beta(\alpha + 1)}{2y} \right] \right\} \Phi = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

which is exactly the biconfluent Heun differential equation  $\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, y)$ ,<sup>[23-24]</sup> whose parameters  $\alpha, \beta, \gamma$ , and  $\delta$  are given by

$$\begin{aligned} \alpha &= -2, \quad \beta = 2\mu^{1/4} \left( \frac{\eta}{\mu} - \frac{m_0}{S_0A_E} \right), \\ \gamma &= \mu^{-1/2} \left( \frac{\eta^2}{\mu} - \vartheta^2 \right), \quad \delta = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

The above differential equation (27) has one regular singularity at the origin ( $y = 0$ ), and one irregular singularity at infinity ( $y \rightarrow \infty$ ) whose s-rank is  $R(\infty) = 3$ , its solution can be expressed as Eq. (52) (see Appendix):

$$\begin{aligned} \Phi &= C_1 \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, y) + C_2 y^{-\alpha} \text{HeunB} \\ &\quad \times (-\alpha, \beta, \gamma, \delta, y), \end{aligned} \quad (29)$$

where  $C_1, C_2$  are constant.

The determination of the other components is easy and the final expressions of wave function are as follows:

(i) First case:  $q = 1$ :  $A_E = (1 + \theta E)$ , the potentials in Eq. (17) contain a linear energy-dependence, the expression of energy function can be written in the form

$$E^2 - m^2 + \frac{(mS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - 2n\sqrt{S_0^2 - V_0^2}(1 + \theta E) = 0, \quad (34)$$

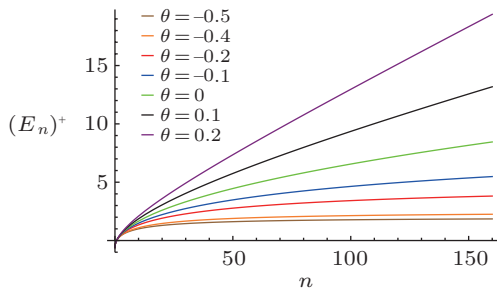
which gives

$$E_n^\pm = \frac{1}{S_0^2} [n\theta (S_0^2 - V_0^2)^{3/2} - mS_0V_0 \pm \sqrt{2nS_0(S_0 - m\theta V_0)(S_0^2 - V_0^2)^{3/2} + n^2\theta^2(S_0^2 - V_0^2)^3}], \quad (35)$$

and expanding to the first order in  $\theta$ , we obtain

$$E_n^\pm = -\frac{m_0V_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{2n}(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}{S_0} + \theta \left[ \frac{n(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}{S_0^2} \mp \frac{\sqrt{2nm}V_0\sqrt{2n}(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}{2S_0^2} \right]. \quad (36)$$

The first term in Eq. (36) is the energy spectrum of the usual DKP equation subjected to the action of combined vector plus scalar and the second term represents the effects of quantum fluctuations of the potential-dependent energy on the system. It is remarkable here that, the expression of the energy spectrum in our system (36) contains an additional deformed correction term depending on the deformation parameter  $\theta$  and with powers in  $n$  due to the dependence of energy potentials.



**Fig. 1** (Color online) The plot illustrates the Spectrum of energy  $(E_n)^+$  versus quantum number  $n$  with  $V_0 = 0.3, S_0 = 0.5, m = 1$ .

In Fig. 1, we notice that:

- The energy  $E_n^+$  is presented as a function of  $n$  for several values of  $\theta$  and  $n \leq 160$ . These energies take the positive values ( $E_n^+ \geq 0$ ) for  $n \geq 1$ .

- For  $\theta$  negative, the spectrum is compressed and for  $\theta$  positive, the spectrum is expanded, which produce an increase of the level spacing as a function of  $n$ , as the collective states of even-even atomic nuclei in the Bohr-Mottelson model, in particle physics phenomenology and in the physics beyond the standard model, etc.

- The function  $E_n^+ = f(n)$  is an increasing monotonous function for  $\theta$  arbitrary and the beginning of the saturation depend of  $\theta$  starts from a specific quantum number.

- It should be noted that, according to the powers in  $n$  dependence of the energy levels, it explains confinement at the high energy area.

(ii) Second case:  $q = 2$ :  $A_E = (1 + \theta E)^2$ , the potentials in Eq. (17) contain a quadratic energy-dependence, the formula of energy simplifies to

$$E^2 - m^2 + \frac{(mS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - 2n\sqrt{S_0^2 - V_0^2}(1 + \theta E)^2 = 0, \quad (37)$$

we get

$$E_n^\pm = \frac{2n\theta(S_0^2 - V_0^2)^{3/2} - mS_0V_0 \pm (S_0 - m\theta V_0)\sqrt{2n(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}}{S_0^2 - 2n\theta^2(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}, \quad (38)$$

and expanding to the second order in  $\theta$ , we obtain

$$E_n^\pm = \frac{-mV_0}{S_0} \pm \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}\sqrt{2n}}{S_0} + \theta \left[ \frac{2n(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}{S_0^2} \mp \frac{\sqrt{2nm}V_0(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}{S_0^2} \right] - \theta^2 \left[ \frac{2nmV_0(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}{S_0^3} \mp \frac{(2n)^{3/2}(S_0^2 - V_0^2)^{9/4}}{S_0^3} \right], \quad (39)$$

according to the factor  $S_0^2 - 2n\theta^2(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}$  (a denominator), which is presented in the energy formula (38), we clearly see the appearance of a critical point  $\theta_c = S_0/\sqrt{2n(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}$ .

In Fig. 2, in this case, for  $\theta > 0$  there is an important observation, the energy as expanded and grows towards  $\theta_c$ , for example  $30 < n < 50$ , it corresponds  $\theta_c = 0.2$  and for  $n > 90$ , it corresponds  $\theta_c = 0.1$ , etc.

For  $\theta < 0$  the spectrum is compressed and there is saturation starts from a specific quantum number, depend of

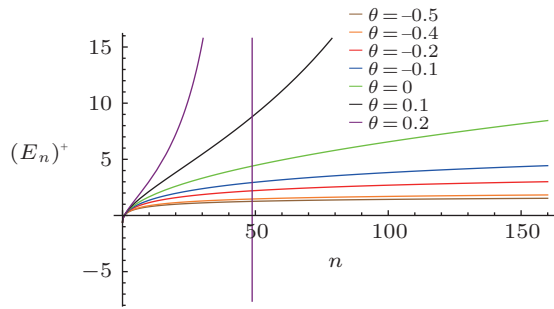
$\theta$ . However, for a fixed value of  $\theta$ , the energy  $E_n^+ = f(n)$  is an increasing monotonous function.

In the end, for the two expressions of energy, in the  $\lim \theta \rightarrow 0$  returning to the ordinary case  $A_E = 1$ , we get the usual expression of the energy spectrum of the ordinary DKP equation in the presence of electromagnetic field

$$E_n^\pm = -\frac{m_0V_0}{S_0} \pm \sqrt{2n\frac{(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}{S_0^2}}, \quad (40)$$

and for  $S_0 = V_0$  we see the total disappearance of this

energy dependence in Eqs. (35) and (38).



**Fig. 2** (Color online) The plot illustrates the Spectrum of energy  $(E_n)^+$  versus quantum number  $n$  with  $V_0 = 0.3$ ,  $S_0 = 0.5$ ,  $m = 1$ .

## 5 Conclusion

In this contribution, we studied the solutions of the DKP equation subjected to the action of combined vector plus scalar energy depend on potentials in (1+1) dimensions space-time. The conditions of normalisation and a continuity equation were determined and were related to the vector and scalar energy depend on potentials. The wave functions were obtained and were expressed according to the biconfluent Heun polynomials. The function of the energy was extracted and the particular cases were deduced. A numerical study was presented and the energy graphs were represented for some values of the energy parameter.

## Appendix

The ‘‘biconfluent Heun equation’’ (BHE) is a second order linear homogeneous differential equation and it is derived from the general Heun equation by the coalescence of two finite regular singular points with infinity.<sup>[24]</sup> The canonical form of BHE is generally expressed as

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \left[ \frac{\alpha+1}{y} - 2y - \beta \right] \frac{d}{dy} + \left[ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{\delta + \beta(\alpha+1)}{2y} \right] \right\} \Phi = 0, \quad (41)$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , and  $\delta$  are arbitrary parameters.

BHE has one regular singularity at the origin ( $y = 0$ ), and one irregular singularity at infinity ( $y \rightarrow \infty$ ) whose s-rank is  $R(\infty) = 3$ .

The Frobenius solution of Eq. (41) in the neighborhood of the regular singular point located at  $y = 0$  can be written as the series

$$\Phi(y) = \sum_{n \geq 0} c_n y^{n+\nu}, \quad (42)$$

with  $c_0 \neq 0$ .

Calculating the derivatives from the series (42) term by term yields  $\Phi(y)'$ ,  $\Phi(y)''$  and substituting these into Eq. (41), we obtain the conditions

$$\nu(\nu + \alpha)c_0 = 0, \quad (43)$$

$$(\nu + 1)(\nu + 1 + \alpha)c_1 - \left[ \beta\nu + \frac{1}{2}(\delta + \beta(1 + \alpha)) \right] c_0 = 0, \quad (44)$$

and the three-term recurrence relation

$$(\nu + 2 + n)(\nu + 2 + \alpha + n)c_{n+2} - \left[ \beta(\nu + 1 + n) + \frac{1}{2}(\delta + \beta(1 + \alpha)) \right] c_{n+1} + [\gamma - 2 - \alpha - 2(\nu + n)]c_n = 0. \quad (45)$$

The parameter  $\alpha$  not being a negative integer, for  $\nu = 0$  and  $c_0 = 1$ , we can denote the solution by  $\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y)$ , the biconfluent Heun function, defined by the series

$$\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(\alpha + 1)_n} \frac{y^n}{n!}, \quad (46)$$

where

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}(\delta + \beta(\alpha + 1)), \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad n \geq 0, \quad (47)$$

$$a_{n+2} = \left[ (n + 1)\beta + \frac{1}{2}(\delta + \beta(\alpha + 1)) \right] a_{n+1} - (n + 1) \times (n + 1 + \alpha)(\gamma - \alpha - 2 - 2n)a_n, \quad n \geq 0. \quad (48)$$

When  $\alpha$  is a negative integer ( $\alpha = -m$ ,  $m \geq 1$ ), it is possible to define

$$\text{HeunB}(-m, \beta, \gamma, \delta; y) = y^m \text{HeunB}(m, \beta, \gamma, \delta; y). \quad (49)$$

If the parameter  $\alpha$  is not a relative integer, Eq. (41) admits two solutions that are linearly independent in the neighborhood of the origin, namely

$$\Phi_1(x) = \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y), \quad (50)$$

$$\Phi_2(x) = y^{-\alpha} \text{HeunB}(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; y). \quad (51)$$

Then the expression of the general solution is given by

$$\Phi(x) = C_1 \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y) + C_2 y^{-\alpha} \text{HeunB}(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; y), \quad (52)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are integration constants and the Wronskian of any two solutions is  $W = -\alpha y^{-(1+\alpha)} \exp(\beta y + y^2)$ .

From the recurrence relation above, the function  $\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; y)$  becomes a polynomial of degree  $n$  if and only if the conditions,

$$\gamma - \alpha - 2 - 2n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (53)$$

$$a_{n+1} = 0, \quad (54)$$

are fulfilled.<sup>[24–25]</sup>

The solution around the irregular singular point ( $y \rightarrow \infty$ ) is given by the recessive Thome solution.<sup>[24,26]</sup> However, this solution is not as useful as the solution written near the regular singularity in applications.

We note that BHE is widely involved in different domains of contemporary pure and applied sciences such as quantum mechanics, general relativity, solid state physics, atomic and molecular physics, optical physics and chemistry.<sup>[26–27]</sup>

## Acknowledgements

We wish to thank the referees for their useful comments which greatly improved the manuscript.

## References

- [1] H. Snyder and J. Weinberg, Phys. Rev. **57** (1940) 307; L. I. Schiff, H. Snyder, and J. Weinberg, Phys. Rev. **57** (1940) 315; A. M. Green, Nucl. Phys. **33** (1962) 218; W. Pauli, Z. Phys. **43** (1927) 601.
- [2] U. Günther, B. F. Samsonov, and F. Stefani, J. Phys. A **40** (2007) F169.
- [3] V. I. Belyavskii, M. V. Goldfarb, and Y. V. Kopaev, Fiz. Teh. Poluprovodn. **31** (2007) 1095; V. Milanovic and Z. Ikonc, IEEE J. Quantum Electron. **32** (1996) 1316.
- [4] K. Niyogi, R. N. Panigrahi, D. Roy, and B. Talukdar, Pramana **17** (1981) 229.
- [5] B. H. J. McKellar and C. M. McKay, Aust. J. Phys. **36** (1983) 607.
- [6] R. J. Lombard, J. Mareš, and C. Volpe, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34** (2007) 1879.
- [7] M. De Sanctis and P. Quintero, Eur. Phys. J. A **39** (2009) 1434.
- [8] A. Schulze-Halberg and P. Roy, J. Math. Phys. **58** (2017) 113507.
- [9] J. Formanek, J. Mares, and R. Lombard, Czech. J. Phys. **54** (2004) 289.
- [10] R. Lombard, An-Najah Univ. J. Res. **25** (2011) 49.
- [11] J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena, and A. Schulze-Halberg, Phys. Lett. A **373** (2009) 3619.
- [12] R. Yekkena, M. Lassaut, and R. J. Lombard, Ann. Phys. **338** (2013) 195.
- [13] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, and A. A. Rajabi, Commun. Theor. Phys. **55** (2011) 541.
- [14] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi, and A. A. Rajabi, Arab. J. Sci. Eng. **37** (2012) 209.
- [15] A. N. Ikot, H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, and S. Zarrinkamar, Commun. Theor. Phys. **61** (2014) 436.
- [16] Mustafa Salti and Oktay Aydo Gdu, Turk. J. Phys. **41** (2017) 1.
- [17] Axel Schulze-Halberg and Ozlem Yesiltas, J. Math. Phys. **59** (2018) 113503.
- [18] A. Benchikha and L. Chetouani, Mod. Phys. Lett. A **28** (2013) 1350079.
- [19] A. Benchikha and L. Chetouani, Cent. Eur. J. Phys. **12** (2018) 392.
- [20] H. Benzair, M. Merad, and T. Boudjedaa, Int. J. Mod. Phys. A **33** (2018) 1850186.
- [21] A. Benchikha and M. Merad, Int. J. Mod. Phys. A **32** (2017) 1750194.
- [22] A. Benchikha, M. Merad, and T. Birkandan, Mod. Phys. Lett. A **32** (2017) 1750106.
- [23] B. C. Clarc, S. Hama, G. R. Kalbermann, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 592; G. Guo, C. Long, Z. Yang, and S. Qin, Can. J. Phys. **87** (2009) 989; V. Gribov, Eur. Phys. J. C **10** (1999) 71.
- [24] *Heun's Differential Equations*, Edited by A. Ronveaux, Oxford University Press, Oxford/New York (1995).
- [25] H. Karayer, D. Demirhan, and F. Buyukkilic, Rep. Math. Phys. **76** (2015) 271.
- [26] S. Yu. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*, Oxford University Press, Oxford/New York (2000).
- [27] M. Hortacsu, Adv. High Energy Phys. **2018** (2018) 8621573.