RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MI

MEMOIRE

Soumis pour l'obtention du diplôme de :

MASTER en Mathématiques

Option :

Mathématiques appliquées

Thème :

Sur l'équation de Boltzmann linéaire avec conditions aux limites de réflexion

Présenté par :

Ghoul rebia

Devant le Jury :

Président :	**L.Benkhelifa**	PROF	Université d'Oum El Bouaghi
Rapporteuse :	**N.LEKRINE**	MCB	Université d'Oum El Bouaghi
Examinatrice :	**S.Debbouche**	MCB	Université d'Oum El Bouaghi

Année universitaire : 2022-2023

Remerciement

Avant tout je remercie en premier "ALLAH" pour tout ce qu'il m'a donné de force, courage et surtout de connaissances.

je tiens à exprimer mes plus vifs et profonds remerciements avec un grand plaisir et un grand respect à mon encadreur Madame "Lekrine Nadia" pour ses efforts et leur suivis avec moi afin de réaliser ce travail dans les meilleures conditions et sous sa direction, sa responsabilité et ses encouragements, et sa méthode de correction, sa patience, son soutien permanent et qui a été toujours à l'écoute et prêt pour donner des conseils. je tiens à exprimer mon gratitude envers l'ensemble des membres de jury qui ont accepté de lire et juger mon travail : Dr L.Benkhelifa et Dr S.Debouche Ensuite, je tiens mes remerciements à tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième année Master MA, je leur souhaite une bonne continuation.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma très chère mère ♡ El Zohra ♡ et à mon très cher père ♡ El said ♡ qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.

A mes très cher frères : ♡Bilel♡,♡ Ibrahim♡ ♡ Kamel♡et♡ Abd Al Kader♡.

A mes très belles sœurs :♡ Meryem♡,♡ Fatiha♡ et♡ Kenza♡ .

A mes amies

Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite.
A tout ceur qui m'ont aidé-de près ou de loin -et ceur qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

Merci !

Rebia Ghoul

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à étudier l'équation de Boltzmann avec conditions aux limites de réflexion dont l'opérateur est contractif et non contractif, où on utilise la théorie de semi-groupes, dans le cadre théorique et la méthode de différences finies dans l'aspect numérique, pour prouver l'existence et l'unicité de la solution et sa dépendance continue aux données du problème.

D'abord on présente quelques notions d'analyse fonctionnelle.

Ensuite, en se basant sur la méthode des semi-groupe on montre l'existence et l'unicité de la solution généralisée pour les deux cas de conditions aux limites.

Finalemnt, on présente l'étude pratique de l'équation de transport par la méthode des différences finies.

Mots Clés

Équation de Boltzmann, semi-groupe, m-dissipatif, différences finies, schéma diamant.

Abstract

In this work, we are interested in studying the Boltzmann equation with boundary conditions of reflection whose operator is contractive and non-contractive. Where we use the theory of semi-groups, in the theoretical framework and the method of differences finite in the numerical aspect, to prove the existence and uniqueness of the solution and its continuous dependence on the data of the problem.

First we present some notions of functional analysis.

Then, based on the semi-group method, we show the existence and uniqueness of the generalized solution for the two cases of boundary conditions.

Finally, we present the practical study of the transport equation by the finite difference method.

Key words

Transport equation, semi-group, m-dissipatif, finite differences, diamond diagram.

ملخص

في هذا العمل، نهتم بدراسة **معادلة بولتزمان الخطية** ذات الشروط الحدية للانعكاس التي يكون مؤثرها مقلصا وغير مقلص، حيث نستخدم نظرية نصف–الزمر في الإطار النظري وطريقة الفروق المنتهية في الجانب العددي لإثبات وجود ووحدانية الحل واعتماده المستمر على معطيات المشكلة.

اولاً نقدم بعض مفاهيم التحليل الدالي.

ثم اعتمادا على طريقة نصف –الزمر نبين وجود الحل العام وتفرده لحالتين من الشروط الحدية.

أخيرًا، نقدم الدراسة العددية لمعادلة النقل بالاصطدام بطريقة الفروق المنتهية.

الكلمات المفتاحية :

معادلة بولتزمان , نصف –الزمر مشتت –كليا, الفروق المنتهية, مخطط الماس.

Notations

$B(x_0, r)$	boule ouverte, centrée en x_0 de rayon r
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	ouvert,
$\partial\Omega = \Gamma$	frontière de Ω,
$L(X, Y)$	espaces des opérateurs linéaire continus de X dans Y
$L(X)$	espaces des opérateurs linéaire continus de X dans X
$GL(X)$	ensemble des éléments inversibles dans $L(X)$ et aussi est un ouvert dans $L(X)$
$M^{\perp}$	orthogonale de M
$\mathcal{D}(A)$	domaine de l'opérateur A
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace de $\mathcal{C}^{\infty}$ (valeur réelle ou valeur complexe) fonctions avec support compact dans Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace de distribution sur Ω
$G(A)$	graphe de l'opérateur A
$R(A)$	image de l'opérateur A
$\rho(A)$	ensemble résolvant de l'opérateur A
$\sigma(A)$	spectre de l'opérateur A
$V_P(A)$	valeur propre de l'opérateur A
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	grad u
$\mathcal{D}^{\alpha}$	$= \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots\dots, \alpha_N)$, $\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplacien de u
$\frac{\partial u}{\partial n}$	dérivée normale extérieure
$L^p(\Omega)$	espace des fonctions mesurables sur Ω tel que $\lvert u\rvert^p$ intégrable $(1 \leq p < \infty)$
$\lVert u\rVert_{L^p}$	$= \left(\int_{\Omega} \lvert u\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$, pour $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$
$L^{\infty}(\Omega)$	espace des fonctions mesurables u sur Ω tel qu'il existe C tel que $\lvert u(x)\rvert \leq C$ pour presque chaque $x \in \Omega$
$\lVert u\rVert_{L^{\infty}}$	=min $\{C > 0, \lvert u(x)\rvert < C$ presque par tout$\}$, $u \in L^{\infty}(\Omega)$
$\mathscr{C}^k(\Omega)$	fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0)
$\mathscr{C}(\bar{\Omega})$	fonctions continues sur $\bar{\Omega}$
$\mathscr{C}^k(\bar{\Omega})$	fonctions u de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ telles que pour chaque multi-indice α, $\lvert\alpha\rvert \leq k$, l'application $x \in \Omega \mapsto \mathcal{D}^{\alpha} u(x)$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$
$\mathscr{C}_0(\Omega)$	espace des fonctions de $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$ qui sont nulles sur $\partial\Omega$
$\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$	$=\{f \in L^p(\Omega), \mathcal{D}^{\alpha} f \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, tel que $\lvert\alpha\rvert \leq m\}$
$\lVert u\rVert_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)}$	$=\sum_{\lvert\alpha\rvert \leq m} \lVert\mathcal{D}^{\alpha} u\rVert_{L^p}$, pour $u \in \mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$
$\mathcal{W}_0^{m,p}(\Omega)$	fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\lVert . \rVert_{\mathcal{W}^{m,p}}$
$H^m(\Omega)$	$=\mathcal{W}^{m,2}(\Omega)$
$\lVert u\rVert_{H^m(\Omega)}$	$=\left(\sum_{\lvert\alpha\rvert \leq m} (\lVert\mathcal{D}^{\alpha} u\rVert_{L^2})^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pour $u \in H^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	$=\mathcal{W}_0^{m,2}(\Omega)$
$\mathcal{C}_{b,u}(I, X)$	l'espace des fonctions uniformément continues et bornés de I dans X
$\mathcal{W}^{1,p}(I, X)$	$= \{u \in L^p(I, X), u' \in L^p(I, X)$dans le sense de $\mathcal{D}'(I, X)\}$
$\int_V \phi(v) d\mu(v)$	$:=\int_V \phi(v) E(v) dv$:=une mesure ayant une densité ϕ par rapport à la mesure de Lebesgue sur V où $E \in L^1(V)$ dont sa mesure de Lebesgue: $m \geq 0$ p.p sur V.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les phénomènes de transport de particules (neutrons, photons, particules supra-thermiques, etc...) interviennent dans le contrôle des réacteurs nucléaires ou dans des problèmes issus de l'hydrodynamique radiative. Ces phénomènes de transport sont modélisés par une équation linéaire **intégro-différentielle** qui décrit l'évolution d'une population de neutrons dans un domaine X de $\mathbb{R}^3$ occupé par un milieu en interaction avec les neutrons. Cette équation dont l'inconnue est une fonction scalaire, $n(x, \omega, E, t)$ (qui est (**la densité angulaire (de probabilité)**(en (x, ω, E) à l'instant t, posée dans l'espace des phases (**position** x**, vitesse** v **et énergie cinétique** E).

On considère un neutron avec une vitesse initiale donnée, se déplace en ligne droite suivant la direction portée par ω jusqu'à ce qu'il entre en interaction avec noyaux atomiques du milieu, qui vont interagir avec ce neutron ; Lorsque le neutron s'approche suffisamment près d'un noyau atomique, deux types d'interactions entrent en jeu : soit le neutron est entièrement absorbant, soit il est dévié de sa trajectoire avec perte d'énergie (collision non élastique). On peut ainsi caractériser les interactions des neutrons avec le milieu qui l'entoure, par les fonctions modélisant leur absorption, leur diffusion et leur fission. Soient

•$\Sigma_t(x, E)$: la section efficace totale macroscopique du matériau qui prend compte toutes les interactions des neutrons d'énergie E en x : disparitions par choc sur un noyau (le choc peut conduire à une absorption ou une diffiusion).

•$\Sigma_S(x, \omega \to \omega', E' \to E)$: la section efficace de diffusion (ou scattring) qui prend en compte les neutrons d'énergie E' et de direction ω : si le choc n'est pas une absorption, un neutron de vitesse v et de direction ω est transféré vers (v, ω') ;.
Le milieu est dit **isotrope** si Σ_S ne dépend des directions ω et ω' que par le produit scalaire $\omega.\omega'$. Si de plus Σ_S est indépendant de $\omega.\omega'$, la **collision** est dite isotrope.

•$\Sigma_f(x, E')$: la section efficace de fission qui prend en compte les neutrons d'énergie E' qui induisent la fission en x.

•$X(x, E')$: le nombre moyen de neutrons émis lors d'une fission en x induit par un neutron d'énergie cinétique E'.

•$K(E)$: le spectre des neutrons émis par une fission, normalisé par $K(E)dE = 1$.
Si l'interaction conduit à la fission du noyau, des neutrons sont émis dans le système.

D'ailleurs une source externe peut introduire des neutrons. Une densité d'émission notée $S(x, \omega, E, t)$ modélise les sources de neutrons.

Les taux de réaction définis, pour chaque section efficace par :

$$\tau_E(x,\omega,E) = \Sigma(x,\omega,E)|v|n(x,\omega,E,t),$$

on calcule en général la densité de flux angulaire du nombre des neutrons en (x,ω,E) à l'instant t donné par :

$$\phi(x,\omega,E) = |v|n(x,\omega,E,t).$$

On définit aussi la **densité totale** $\mathcal{N}(x,E,t)$ et le flux totale $\Phi(x,\omega,E,t)$ de neutrons d'énergie E en un point x à l'instant t, à partir de ϕ et de n par les formules :

$$\begin{cases} i)\mathcal{N}(x,E,t) = \int_{S^2} n(x,\omega,F,t)d\omega, \\ ii)\Phi(x,E,t) = \int_{S^2} \phi(x,\omega,E,t)d\omega \end{cases}$$

Cette densité ϕ angulaire vérifie l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|v|}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\omega,E,t) + \omega.\nabla\phi(x,\omega,E,t) - \Sigma_t\phi(x,\omega,E,t) - \int_\alpha^\beta dE' \int_{S^2} \Sigma_S\phi(x,\omega,E',t)d\nu(\omega') \\ &- \frac{K(E)}{4\pi}\int_\beta^\alpha X(x,E')\Sigma_f dE' \int_{S^2} \phi(x,\omega,E,t)d\nu(\omega') = S(x,\omega,E,t) \end{aligned} \tag{1}$$

Cette équation intégro-différentielle du transport des neutrons sur le flux angulaire est l'expression mathématique du bilan des pertes et des productions de neutrons dans le domaine X au cours du temps. Les différents termes qui composent cette équation s'interprètent de la façon suivante :

- $\frac{1}{|v|}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\omega,E,t)$: représente la variation temporelle de la densité neutronique.

- $\omega.\nabla\phi(x,\omega,E,t)$: est le terme de transport des neutrons, intégré sur X, il représente le bilan de pertes d'énergie avec le milieu (absorption collision).

- $\Sigma_t(x,E)\phi(x,\omega,E,t)$ représente les interactions des neutrons avec le milieu (absorption et collision).

- $\int_\beta^\alpha dE' \int_{S^2} \Sigma_S\phi(x,\omega,E,t)d\nu(\omega)$ désigne la source de diffusion de toutes les énergies vers E et de toutes les directions vers ω.

- $\frac{K(E)}{4\pi}\int_\beta^\alpha X(x,E')\Sigma_f dE' \int_{S^2} \phi(x,\omega,E,t)d\nu(\omega)$ est la source de fission.

Le problème d'évolution du transport ou problème de Cauchy consiste à déterminer $\phi(x,\omega,E,t)$ satisfaisant l'équation (1) plus haut avec la condition initiale : $\phi(x,\omega,E,0) = \phi_0(x,\omega,E)$ où $\phi_0(x,\omega,E)$ représente le flux au temps $t=0$, et avec des conditions aux limites sur la frontière Γ de X appropriées.

Pour simplifier les écritures et l'analyse théorique du problème du transport il convient de regrouper les variables de directions et d'énergie sous la notion de vecteur vitesse, défini par $v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}\omega$ où m_0 est la masse au repos d'un neutron.

On peut alors écrire et adimensionner l'équation de transport écrite sous la forme de l'équation en utilisant le jeu des variables (x,v,t) où $v \in V$ fermé de $\mathbb{R}^3$ est donc le vecteur vitesse du neutron et on pose :

$$\begin{cases} u(x,v,t) = \frac{m_0}{|v|}\phi(x,\omega,E,t), \\ \Sigma(x,v) = |v|\Sigma_t(x,E), \\ f(x,v) = \frac{m_0|v'|}{|v|}[\Sigma_s + K(E)X(x,E')\Sigma_f(x,E')], \\ q(x,v,t) = \frac{m_0}{|v|}S(x,\omega,E,t). \end{cases} \tag{2}$$

Soit X un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$, on note ∂X la frontière de l'ouvert X et par $\nu = \nu_x = \nu(x)$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à X au point x. On suppose que la frontière ∂X est **continument différentiable**.

$$\begin{cases} \Gamma & = \partial X \times V \\ \Gamma_+ & = \{(x,v) \in \partial X \times V ; v.\nu(x) > 0\} \\ \Gamma_- & = \{(x,v) \in \partial X \times V ; v.\nu(x) < 0\} \\ \Gamma_0 & = \{(x,v) \in \partial X \times V ; v.\nu(x) = 0, \} \end{cases} \tag{3}$$

de sort que Γ_+ et Γ_- (resp. Γ_0) sont des sous ensembles ouverts (resp. fermés) de $\Gamma = \partial X \times V$ et que :
$\partial X \times V = \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_-$.
Compte tenu de l'équation (1) et du fait que $dv = |v|d\mu(\omega)$ la fonction inconnue $u(x,u,t)$ doit vérifier l'équation d'évolution du transport :

$$\begin{cases} i)\frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u + \Sigma u = Ku + q \quad x \in X \subset R^n, \quad v \in V \subset R^n,\ t > 0 \\ ii) u(x,v,0) = u_0(x,v), \quad u_0 \text{ donné initial}, \\ iii) u|_{\Gamma_-} = Ru|_{\Gamma_+}, \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

où :
les opérateurs donnés K et R sont définis par

$$\begin{cases} (Ku)(x,v,t) = \int_V f(t,x,v',v)u(t,x,v')d\mu(v'), \\ q(t,x,v), \\ R \,\text{opérateur linéaire agissant sur } \Gamma_+ \ dans \Gamma_-, \end{cases} \tag{5}$$

où f est une fonction donnée, positive car elle modélise un transfert de densité de nombre de neutrons d'un vitesse à une autre, les deux densités étant positive.
Nous supposerons que μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^3$ avec $\mu(0) = 0$, et V le support de μ, ainsi V est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Condition aux limites de réflexion

On suppose que chaque particule arrivant sur le bord du domaine X en se dirigeant vers l'extérieur de X y est réfléchie vers l'intérieure de X et selon la loi de réflexion ; on distingue plusieurs types de conditions de réflexion. On représente deux formes qui sont les plus importantes.

Réflexion spéculaire Si la particule suive dans sa réflexion la loi de **Descartes** ; c'est à dire que le vecteur vitesse v_0 de la particule après collision au point $x \in \partial X$ est le symétrique orthogonal du vecteur vitesse v de cette même particule avant collision par rapport à l'espace tangent à ∂X au point x. Autrement dit

$$v_0 = v - 2(v \cdot \nu_x)\nu_x :$$

Dans toute cette section, ν_x désigne le vecteur unitaire normal à ∂X au point x, dirigé vers l'extérieur de X. Au niveau de la fonction de distribution (densité), cette condition de réflexion s'écrit

$$f(t,x,v) = f(t,x,v - 2(v \cdot \nu_x)\nu_x); v \in \mathbb{R}^3; x \in \partial X,$$

pour tout $t \geq 0$. Par exemple, cette loi de réflexion est vérifiée par l'intensité lumineuse éclairant une surface extrêmement lisse et parfaitement réfléchissante, typiquement un miroir (d'où l'adjectif spéculaire).

Réflexion diffuse Cette loi de réflexion est adaptée par exemple au cas de rayons lumineux éclairant une surface mate — par exemple un écran de cinéma. Dans ce cas, l'intensité réfléchie est la même dans toutes les directions. Traduisons cela au moyen de la fonction de distribution :

$$f(t,x,v) = F(t,x), v \cdot \nu_x < 0; x \in \partial X$$

Il reste à évaluer F. Faisons l'hypothèse que le flux de particules réfléchies par le bord ∂X du domaine est égal, en tout point $x \in \partial X$ et pour tout $t \geq 0$, au flux de particules incidentes :

$$\int_{v\cdot\nu_x<0} F(t,x)|v \cdot \nu_x| d\mu(v) = \int_{\omega\cdot\nu_x>0} f(t,x,\omega)\omega \cdot \nu_x d\mu(\omega); x \in \partial X; t \geq 0.$$

Cette identité permet d'évaluer $F(t;x)$, et d'en déduire la formulation suivante de la condition de réflexion diffuse :

$$f(t;x;v) = \frac{\int_{\omega\cdot\nu_x>0} f(t,x,v)\omega \cdot \nu_x d\mu(\omega)}{\int_{\omega\cdot\nu_x<0} \mid \omega \cdot \nu_x \mid d\mu(\omega)}; v \cdot \nu_x < 0; x \in \partial X.$$

Dans le contexte de la photonique, cette loi de réflexion porte parfois le nom de **" loi de Lambert"**.

Le but de ce mémoire est d'étudier des techniques analytiques et numériques de résolution de cette équation.

On organise donc, ce mémoire comme suit :
Tout d'abord on commence dans le premier chapitre par représentation d'un bref rappel sur quelques notions d'analyse fonctionnelle.
Le deuxième chapitre est destiné à établir l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant la méthode de semi-groupes.
Le dernier chapitre est consacré à étudier et mettre en œuvre la méthode de différences finies pour résoudre l'équation de Boltzmann linéaire.
Notons Ce travail se base essentiellement sur les références [1],[2],[3] et [10].

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. *Une application $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie les conditions suivants :*

$$\begin{cases} \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \ \forall u \in X. \\ \|\lambda.u\| = |\lambda|\|u\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ u \in X. \\ \forall u, v \in X : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{cases}$$

Le couple $(X, \|.\|)$ est alors appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. *(Suite de Cauchy) On dit qu'une suite (u_n) d'élément d'un espace normé X est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \ p \geq N et q \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.1.3. *L'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dit complet si tout suite de Cauchy dans X est convergente.*

Définition 1.1.4. *On appelle **espace de Banach** tout espace vectoriel normé et complet.*

Espaces $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de R^d, $d \geq 1$.
-Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω à valeurs réelles, dont la $p^{ième}$ puissance de la valeur absolue est intégrable pour la mesure de Lebesgue. Pour tout $f \in L^P(\Omega)$, on note :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $L^{\infty}(\Omega)$

est l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω.
Pour tout $f \in L^{P}(\Omega)$, on note :

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup|f| = inf\{M;\ |f(x)| \leq M\ p.p.x \in \Omega\}$$

Les éléments de ces espaces sont à considérer comme des classes de fonctions qui coïncide sauf sur un ensemble de mesure nulle.

1.1.2 Topologies sur l'espace dual

Définition 1.1.5. *On dispose ainsi sur le dual topologique E' d'au moins trois topologies.*

La topologie forte, *définie par la famille de semi-normes*

$$\|\varphi\|_B = \sup\{|\langle\varphi, x\rangle|, x \in B\},$$

où B désigne une partie bornée quelconque de E. C'est la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E. C'est de cette topologie que l'on munit E' pour définir le bidual (topologique) E'' de E comme le dual topologique de E'. Lorsque l'espace E est normé, E' l'est aussi de façon naturelle et sa topologie forte est simplement celle induite par sa norme.

La topologie faible $\sigma(E', E'')$**.** *La topologie initiale associée à la famille de toutes les formes linéaires continues sur E', c'est-à-dire la topologie la moins fine gardant continus les éléments de E'' . Elle est engendrée par les ouverts de la forme $\varphi^{-1}(U)$, où φ est un élément de E'' et U un ouvert du corps des scalaires.*

La topologie faible$-*$ *ou topologie préfaible, notée $\sigma(E', E)$, définie par la famille de semi-normes*

$$\|\varphi\|_x = |\langle\varphi, x\rangle|$$

où x désigne un élément quelconque de E. (C'est juste la topologie de la convergence simple, autrement dit : la restriction à E' de la topologie produit sur $\mathscr{C}^E$.) Comme E s'identifie à un sous-espace vectoriel de son bidual E'', cette topologie est a priori encore plus faible que la topologie faible.

Les trois topologies, forte, faible et faible-, sont en général distinctes. Dans le cas d'un espace de Banach réflexif (identifiable à son bidual), les topologies faible et faible-* sont égales.*

1.1.3 Théorèmes de point fixe

Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.1.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet et soit*

$$f:\ E \longrightarrow E,$$

une application telle que

$$\exists K \in [0,1]\ \ satisfaisant\ \ d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y) \quad \forall (x,y) \in E \times E,$$

alors il existe un point unique $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Théorème de point fixe de Schauder

Si f est une application de E dans lui-même, on appelle point fixe de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$. De nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires peuvent être reformulés en terme de problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application dans un certain espace. A cet effet, le théorème suivant du à **J. Schauder** s'avère très utile.

Théorème 1.1.2. *Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe compact de E. Si S est une application continue de C dans C, alors S admet un point fixe. Dans le cas d'un espace de Banach, on utilise souvent la version suivante du théorème de* ***Schauder****.*

Théorème 1.1.3. *Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé non vide de E. Si S est une application continue de C dans C telle que $S(C)$ soit relativement compact, alors S admet un point fixe. On note que ce théorème n'assure pas l'unicité du point fixe, chose qui n'a pas lieu en général.*

1.1.4 Fonctions de la physique

Fonction de Dirac

Définition 1.1.6. *La distribution de Dirac, aussi appelée fonction δ de Dirac, introduite par Paul Dirac, peut être informellement considérée comme une fonction qui prend une « valeur » infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.*

Fonction d'Heaviside

Définition 1.1.7. *(La fonction d'Heaviside) Heaviside est une fonction discontinue en 0 prenant la valeur 0 en les réels strictement négatifs et la valeur 1 par tout ailleurs :*

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

C'est une primitive de la fonction δ de Dirac.

1.2 Quelques inégalités et formules utiles

1.2.1 Formule de Green :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ régulier de classe $\mathscr{C}^0$. Alors pour toute fonction $w \in C^1(\overline{\Omega})^d$ à support compact borné dans $(\overline{\Omega})^d$ on a

$$\int_\Omega div(w)(x)dx \ = \ \int_{\partial\Omega} w(x)v(x)d\sigma(x)$$

Ou $d\sigma(x)$ désigne la mesure Surfacique sur $\partial\Omega$.

1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall u, v \in L^2(\Omega);\ |\int_\Omega u\ v\ dx| \leq (\int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \times (\int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.3 Inégalité de Hölder :

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy-Schwartz .

$$|\int_\Omega u\ v\ dx| \leq (\int_\Omega |u|^p dx)^{\frac{1}{p}} \times (\int_\Omega |u|^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

où $u \in L^P(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$, pour tout $p > 1$ et $(L^P)^* = (L^{P'})$

Lemme 1.2.1. ***Lemme de Grönwall***
En mathématique, le ***lemme de Grönwall*** *aussi appelé* ***inégalité de Grönwall*** *permet l'estimation d'une fonction qui vérifie une certaine inégalité différentielle.*
Le lemme existe sous deux formes, intégrale et différentielle.
Soient $\varphi, \phi ety$ trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeur positive et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b],\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \phi(s)\ y(s)\ ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b],\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\ \phi(s) \exp\left(\int_a^t \phi(u)\ d(u)\right)\ d(s).$$

1.3 Opérateur linéaire

1.3.1 Opérateur borné dans espace normé

Définition 1.3.1. *Soient X, et Y deux espaces normés et A un opérateur linéaire de X dans Y. A est le couple $(A, \mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est un sous-espace linéaire de X et A est une application linéaire de $\mathcal{D}$ dans Y, On dit que A est borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que,*

$$\|Ax\| \leq C\, pour\ tout\ x \in \mathcal{D}, \|x\| \leq 1,$$

où

$$\|Ax\| \leq C\|x\|\, pour\ tout\ x \in \mathcal{D}, \|x\| \neq 0.$$

On dit sinon A est non-borné.

Définition 1.3.2. *Soit $(A, \mathcal{D})$ un opérateur linéaire dans X. Le graphe $G(A)$ de A et l'image $R(A)$ de A sont définis par*

$$G(A) = \{(u, f) \in X \times X\ \ ,\ \ u \in \mathcal{D}\ \ et\ \ f = Au\}.$$

$$Im(A) = R(A) = A(\mathcal{D}).$$

$G(A)$ est un sous-espace linéaire de $X \times X$ et $R(A)$ est un sous-espace linéaire de X.

Théorème 1.3.1. *Tout opérateur linéaire sur un espace normé de dimension algébrique finie est continu.*

L'espace $L(X, Y, \|.\|)$

Soit $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.
$L(X, Y)$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus (bornés) de X dans Y.

Théorème 1.3.2. *L'application :* $\|.\| : L(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}^*$*, donnée par :*

$$\|T\| = sup\{\|Tx\|_2 : x \in X \quad et \quad \|x\|_1 \leq 1\},$$

est une norme pour $L(X,Y)$*. Elle est equivalente aux normes*

$$\sup_{\|x\|_1=1}\{\|Tx\|_2\}, \quad \sup_{\|x\|\neq 0}\{\|Tx\|_2 : \|x\|_1\} \; et \; \inf\{M : \|Tx\|_2 \leq M\|x\|, \forall x \in X\}.$$

Proposition 1.3.1. *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in L(E)$*, l'ensemble résolvant* $\rho(T)$ *est un ouvert de* $\mathbb{K}$ *et le spectre* $\sigma(T)$ *est compact ; en outre lorsque ce spectre est non vide, le rayon spectral* $r(T)$ *de* T *satisfait :*

$$r(T) := \sup|\lambda|_{\lambda\in\sigma(T)}, et \; on \; a|\lambda| \leq \|T\|. \tag{1.1}$$

1.3.2 Opérateur non-borné dans un Banach

Remarque 1.3.1. *Si* A *est borné, alors* A *est la restriction dans* $\mathcal{D}$ *d'un opérateur* $\tilde{A} \in L(Y,X)$ *où* Y *est un sous-espace linéaire fermé de* X *tel que* $\mathcal{D} \subset Y$*. Si* A *est non-borné alors il n'existe aucun* $\tilde{A} \in L(Y,X)$ *avec* Y *fermé de* X *et* $\mathcal{D} \subset Y$ *tel que* $\tilde{A}_{|\mathcal{D}} = A$*.*

Théorème 1.3.3. ***(Théorème du graphe fermé)***
Soient X *et* Y *deux espaces de Banach et soit* $A : X \to Y$ *une application linéaire. Alors* $A \in L(X,Y)$ *si et seulement si le graphe de* A *est un sous-espace fermé de* $X \times Y$*.*

Remarque 1.3.2. *Si* $\mathcal{D}(A) = X$ *il résulte du théorème* (1.3.3) *que* $A \in L(X)$ *si et seulement si* $G(A)$ *est fermé dans* X*, plus généralement pour les opérateurs non-bornés, il est très utile de savoir si leur graphe est fermé ou non.*

Définition 1.3.3. *Soit* E *un espace de Banach sur* $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ *ou* $(\mathbb{C})$ *et soit* T *(une application linéaire (n'est pas nécessairement continue) de* E *dans lui même. On se propose d'étudier l'opérateur*

$$T_\lambda = \lambda I_E - T; \;\; \lambda \in \mathbb{K}.$$

1. *On dit que* λ *est une* **valeur régulière** *si* T_λ *est un isomorphisme de* E *sur* E*.*

2. *L'ensemble* $\rho(T)$ *des valeurs régulières est appelé* **l'ensemble résolvant de** T*.*

3. *L'opérateur* $R(\lambda;T) = (\lambda I_E - T)^{-1}$ *s'appelle* **la résovante** *de* T *si* λ *est une valeur régulière.*

4. *Le complémentaire* $\sigma(T)$ *de* $\rho(T)$ *s'appele le* **spectre de** T *(i.e.* T *n'est pas une bijection).*

5. *Si* T_λ *n'est injectif, on dit que* λ *est une* **valeur propre***. Et* $KerT_\lambda = \{x \in E; \lambda x - Tx = 0\} \neq 0$ *: le sous-espace propre associe à la valeur propre* λ*.*

Remarque 1.3.3. *Lorsque* E *est de dimension finie, toute valeur spectrale est une valeur propre.(*$T \in L(E)$ *est injectif ssi* T *est surjectif). Il n'en nest rien en dimension infinie ; un opérateur injectif n'est pas nécessairement surjectif.*

Opérateurs non-bornés dans un Hilbert

Proposition 1.3.2. *Soit X un espace de Hilbert et on note par $< .,. >$ son produit scalaire. Si A est un opérateur linéaire dans X à domaine dense, alors,*

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in X \times X, \ < \varphi, u >=< v, f > \quad pour \quad tous \quad (u, f) \in G(A)\},$$

tel que A^* est un opérateur linéaire qui s'appelle l'adjoint de A, le domaine de A^* est

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in X, \exists\, C < \infty\,, | < Au, v > | \leq C\ \|u\|\ , \forall\ u \in \mathcal{D}(A)\},$$

et A^* satisfait

$$< A^*v, .u > \ = \ < v, Au > \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

1.4 Définitions et propriétés des opérateurs m-dissipatifs

Nous étudions, dans cette section les propriétés essentielles d'un opérateur m-dissipatif A dans le cas où A est non-borné dans un Hilbert et dans un Banach.

1.4.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un Hilbert

Soit X un espace de Hilbert complexe de produit scalaire $(.,.)_X$.

Définition 1.4.1. *Soit A un opérateur non borné dans X de domaine $\mathcal{D}(A)$;*

$$\begin{cases} on\ dit\ que\ A\ est\ accrétif, \\ si\, Re\,(Ax, x)_X \geq 0\ pour\ tout\, x \in \mathcal{D}(A)\,. \end{cases}, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} on\ \ dit\ que\, A\, est\ conservatif, \\ si\, Re\,(Ax, x)_X = 0\ pour\ toutx \in \mathcal{D}(A)\,. \end{cases}, \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} on\ dit\ que A\, est\ dissipatif, \\ si\, Re(Ax, x_H) \leq 0\ pour\ toutx \in \mathcal{D}(A)\,. \end{cases}, \tag{1.4}$$

Proposition 1.4.1. *On a*

$$(\overline{R(A)})^{\perp} = \{\ \ v \in \mathcal{D}(A^*) \ \ ; \ \ A^*v = 0\ \ \}.$$

Proposition 1.4.2. *A est un opérateur dissipatif dans X si et seulement si*

$$< Au, u > \geq \ 0 \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.4.1. *Soit A un opérateur linéaire dissipatif dans X à domaine dense. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A^* est dissipatif et $G(A)$ est fermé.*

Définition 1.4.2. *Soit A un opérateur linéaire dans X à domaine dense, on dit que A est auto-adjoint (resp anti-adjoint) si $A^* = A$ (resp $A^* = -A$).*

Remarque 1.4.1. *L'égalité $A^* = \pm A$ doit être prise dans le sens de l'opérateur, c.à.d que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $A^*u = \pm Au$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$.*

Corollaire 1.4.1. *Si A est auto-adjoint dans X , et si $A \geq 0$ (i.e $< Au, u > \geq 0$, $\forall\ u \in \mathcal{D}(A)$), alors A est m-dissipatif.*

Corollaire 1.4.2. *Si A est anti-adjoint alors A et $-A$ sont m-dissipatifs.*

Corollaire 1.4.3. *Soit A un opérateur linéaire dans X avec domaine dense, alors A et $-A$ sont m-dissipatifs si et seulement si A est anti-adjoint.*

1.4.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un Banach

Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ de norme $\|.\|$, et X' son dual. En notant par $\langle .,. \rangle$ la dualité X et X'.

Définition 1.4.3. *Un opérateur A dans X est dissipatif si*

$$\|u - \lambda Au\| \geq \|u\|.$$

Pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$ et tout $\lambda > 0$

Cette définition est un peut difficile à établir dans certains espaces. On la remplace par une autre applicable.
Pour tout $x \in X$, soit $J(x)$ l'ensemble des éléments ω de X' tels que :

$$\|\omega\|_{X'} = \|x\|, \ \langle \omega, x \rangle = \|\omega\|_{X'}\|x\| \tag{1.5}$$

Définition 1.4.4. *Un opérateur A dans X est dissipatif si*

$$\langle \omega, Ax \rangle \leq 0$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $\omega \in J(x)$.

Application sur L^p(1)
Donnons d'abord quelques précisions suplémentaires dans le cas des espaces $X = L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty.\Omega$ *ouvert* $\subset \mathbb{R}^n$.
i) Cas où $X = L^p(\Omega), 1 < p < \infty$. Alors $X' = L^q$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $J(u)$ défini par (1.5) est constitué d'un seul élément (noté $J(u)$) :

$$J(u) = \frac{|u|^{p-2}u}{\|u\|_{L^p}^{p-2}} \tag{1.6}$$

Un opérateur A dans $L^p(\omega)$ ssi il vérifie l'inégalité :

$$\int_\Omega |u|^{p-2}Au \geq 0, \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{1.7}$$

ii) Cas où $X = L^1(\Omega)$ Alors $X' = L^\infty$: et $J(u)$ est donné par

$$\begin{cases} J(u) = \{\omega \in L^\infty; \omega = \|u\|_{L^1}u^*\} \text{ avec :} \\ u^* = +1 \ siu(x) > 0, \\ u^* = -1 \ siu(x) < 0, \\ \|u^*\| \leq 1 \ siu(x) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

donc pour prouver que A est dissipatif dans L^1 on démontre en général que

$$\int_\Omega sign_0(u)Audx \geq \int_{[u=0]} |Au|dx, \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{1.9}$$

$$sign_0(u)(x) = \begin{cases} +1 \ si \ u(x) > 0, \\ -1 \ si \ u(x) < 0, \\ 0 \ si \ u(x) = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

Définition 1.4.5. *Un opérateur A dans X est m-dissipatif si*

1. voir démonstration par ex. dans Yosida

(i)- *A est dissipatif.*

(ii)- *Pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in X$, il existe $u \in \mathcal{D}(A)$ tel que $u - \lambda Au = f$.*

Remarque 1.4.2. *Si A est m-dissipatif dans X, il est claire d'après les définitions (??) et (1.4.5) que pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, il existe une solution unique u de l'équation $u - \lambda Au = f$.*
De plus, on a

$$\|u\| \leq \|f\|.$$

Proposition 1.4.3. *Soit A un opérateur dissipatif dans X les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i)- *A est m-dissipatif dans X .*

(ii)- *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, il existe une solution $u \in \mathcal{D}(A)$ de $u - \lambda_0 Au = f$.*

Proposition 1.4.4. *Si A est m-dissipatif alors $G(A)$ est fermé dans X .*

1.5 Définition et propriétés du semi-Groupe :

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \mapsto \|x\|_X$ on désigne par $L(X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui même. $L(X)$ est un espace de Banach pour la norme $T \mapsto \|T\|$ définie par :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}$$

Définition 1.5.1. *Une famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments $G(t) \in L(X)$ pour $t \geq 0$ forme **un semi-groupe** de classe $\mathscr{C}^0$ dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} i)\ G(s+t) &= G(t).G(s)\ ,\ pour\ tout\ t, s \geq 0 \\ ii)\ G(0) &= I\ (\text{identité de } L(x)) \\ iii)\ \lim\limits_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X \mapsto 0\ ,\ pour\ tout\ ; x \in X. \end{cases}$$

Définition 1.5.2. *Le semi-groupe est dit **uniformement continu** si :*
$\forall t_n \mapsto t\ ;\ G(t_n) \mapsto G(t)$

Remarque 1.5.1. $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est dit **uniformement continu en 0** si :*
$\lim\limits_{t\to 0^+} \|G(t) - I\| = 0$

Définition 1.5.3. *Le semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est dit **fortement continu** si :*
$\forall x \in E, \forall t_n \mapsto t\ :\ G(t_n)x \mapsto G(t)x$

Remarque 1.5.2. $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est dit **fortement continu en 0** si :*
$\lim\limits_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\| = 0$

Exemple 1.5.1. *Dans $L^P(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$*
Pour $u \in L^P(\mathbb{R})$, on définit $G(t)u$ par :
$G(t)u = u(t+s)$ p.p en $x \in \mathbb{R}$.
L'invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par le groupe de translation $x \mapsto x+t$ montre que :

$$\|G(t)u\|_{L^P(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^P(\mathbb{R})} \tag{1.11}$$

On va vérifier les conditions d'un semi-groupe
i)On a

$$G(t)u(x) = u(x+t),$$

alors

$$G(s+t)u(x) = G(s)G(t)u(x),$$

donc

$$G(s+t)u(x) = u(x+t+s),$$

d'où

$$G(s)G(t)u(x) = G(s)[G(t)u(x)],$$

alors

$$G(s)G(t)u(x) = G(s)u(x+t) = u(x+t+s).$$

Donc

$$G(s+t)u = G(s)G(t)u \tag{1.12}$$

ii)On a

$$G(t)u(x) = u(x+t),$$

alors

$$G(0)u(x) = u(x),$$

donc

$$G(0) = I_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{1.13}$$

iii)Pour montrer la $3^{\text{ième}}$ *condition, on utilise la densité des fonctions continues à support compact dans* $L^p(\mathbb{R})$ *pour* $1 \leq p \leq \infty$.
Tout d'abord, si Q *une fonction continue à support compact on a :*

$$\|G(t)Q - Q\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq Sup|Q(x+t) - Q(x)| \tag{1.14}$$

Ensuite, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *donnés, on détermine (par troncature et régularisation)* $Q\_\ \varepsilon$ *continue à support compact, telle que :*

$$\|f - Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors :

$$\|G(t)f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|G(t)f - G(t)Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|G(t)Q_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|f - Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

D'après (1.11) *on a :*

$$\|G(t)f - G(t)Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|G(t)(f - Q_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f - Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\|G(t)f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \|G(t)Q_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Et d'après (1.14), *il existe* $n > 0$ *telle que* $|t| < n$ *implique*

$$\|G(t)Q_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.15}$$

d'après $(1.11), (1.14) et (1.15)$ $(G(t))$ *est* ***un semi-groupe***.

Proposition 1.5.1. *soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* ***semi-groupe de classe*** $\mathscr{C}^0$ *sur* X *alors :*
a) $t \mapsto \|G(t)\|$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0;\alpha]$.
b) Pour tout $x \in X$, *la fonction* $t \mapsto G(t)x$ *est continue (à valeur dans* X*) sur* $\mathbb{R}^+$.
c) Il existe des constantes réelles w *et* M *telles que :*

$$\|G(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Définition 1.5.4. *Un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *de classe* $\mathscr{C}^0$ *est appelé* ***semi- groupe de contraction de classe*** $\mathscr{C}^0$ *si :*

$$\|G(t)\| \leq 1, \forall t > 0.$$

1.5.1 Générateur infinitésimal

Définition 1.5.5. *On appelle* ***générateur infinitésimal*** *d'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *l'opérateur* A, *défini sur l'ensemble* $D(A)$ *tel que :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe,} \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A)$$

Exemple 1.5.2. $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $G(t)u(x) = u(x+t)$, $u \in L^p(\mathbb{R})$
Considérons $\frac{G(h)u-u}{h}$, *nous allons montrer que :*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(h)u - u}{t} = \frac{du}{dx}$$

au sens de distribution. En effet, $\langle , \rangle$ *désignant la dualité entre* $D'(\mathbb{R})$ *et* $D(\mathbb{R})$, *pour* $\varphi \in D(\mathbb{R})$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\langle \frac{G(h)u - u}{h}, u \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{G(h)u(x) - u(x)}{h} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} dx.
\end{aligned}$$

Or lorsque $h \to 0$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} dx \to -\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x) dx \\
= -\langle \frac{du}{dx}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

On déduit de là que

$$si\ \frac{G(h)u - u}{h} \to u_1 dans\ L^p(\mathbb{R}),$$

alors, (la convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ *entrainant la convergence dans* $D'(\mathbb{R})$*).*

$$u_1 = \frac{du}{dx}, \;\; et \;\; \frac{du}{dx} \in L^p(\mathbb{R}).$$

Réciproquement, si

$$\frac{du}{dx} \in L^p(\mathbb{R}),$$

on vérifie que

$$\frac{G(h)u - u}{h} \to \frac{du}{dx} \; dans L^p(\mathbb{R}).$$

1.5.2 Théorème de Hille-Yosida

Soit A un opérateur (non borné) de domaine $D(A)$ dense dans X, générateur infinitésimal du semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$ $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$. On rappelle qu'il existe deux constantes réelles M et w (indépendantes de t) telles que

$$\|G(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad pour\ tout\ t \ \geqslant 0. \tag{1.16}$$

Soit

$$p = \lambda + i\mu, \quad \lambda, \mu\, réels$$

et

$$f \in X \quad donné.$$

Posons le problème :

$$\begin{cases} trouver\ u \in D(A), vérifiant : \\ \qquad -Au + pu = f \quad avec\ f \in X\ donné. \end{cases} \tag{1.17}$$

Théorème 1.5.1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X, soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$ unique est qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{cases} i) le \quad problème \quad (1.17) \quad admet \quad une \quad solution \quad unique \quad pour\, \lambda = Re(p) > 1, \\ ii) si\ u = R(p)f\ est \quad cette \quad solution, \end{cases}$$

alors on a :

$$\|R^k(p)\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^k}, k = 1, 2, \ldots . \tag{1.18}$$

En outre le semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ vérifie alors (1.16)

1.5.3 Théorème de Hille-Phillips

Théorème 1.5.2. *Soit A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans l'espace de Hillbert X.*
Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathscr{C}^0$ si et seulement si

$$\begin{cases} i) A\ est\ dissipatif, \\ et \\ ii) l'image\ de\ D(A)\ par\ I - A\ est\ égale\ à\ X. \end{cases}$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant

$$\begin{cases} i)\frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u + \Sigma u = Ku + q \quad x \in X \subset R^n, \quad v \in V \subset R^n,\ t > 0 \\ ii)u(x,v,0) = u_0(x,v), \quad u_0 \text{ donné initial}, \\ iii)u|_{\Gamma_-} = Ru|_{\Gamma_+}, \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où :
les opérateurs donnés K et R sont définis par

$$\begin{cases} (Ku)(x,v,t) = \int_V f(t,x,v',v)u(t,x,v')d\mu(v'), \\ q(t,x,v), \\ R \text{ opérateur linéaire agissant sur } \Gamma_+ \ dans \Gamma_-, \end{cases} \tag{2.2}$$

Comme son opérateur, agissant sur des fonctions de 3×3 dans l'espace de phase $X \times V$, n'est ni auto-adjoint ni elliptique ni normal dans l'espace $L^2(X \times V)$; les méthodes variationnelles générales ne sont donc pas valables pour cet opérateur. Alors on utilise la méthode des semi-groupes agissant sur $L^p(X \times V)$; $1 \leq p \leq \infty$ en particulier pour traiter le cas naturel $p = 1$, et obtenir une solution généralisée.
Dans le but de simplifier et clarifier la tache on approche progressivement de notre cible, pour traiter deux types des problèmes stationnaire et cinétique avec deux genres de conditions opérationnelles contractives et non-contractives où la pierre angulaire dans ce travail est le théorème de Hille Yosida.

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et X un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, on note ∂X la frontière de l'ouvert X et par ν_x le vecteur unitaire de la normale extérieure à X au point x. On suppose que la frontière ∂X est **continument différentaible** et on pose :

$$\begin{cases} \Gamma & = \partial X \times V \\ \Gamma_+ & = \{(x,v) \in \partial X \times V; v.\nu_x > 0\} \\ \Gamma_- & = \{(x,v) \in \partial X \times V; v.\nu_x < 0\} \\ \Gamma_0 & = \{(x,v) \in \partial X \times V; v.\nu_x = 0,\} \end{cases}$$

de sort que Γ_+ et Γ_- (resp. Γ_0) sont des sous ensembles ouverts (resp. fermés) de $\Gamma = \partial X \times V$ et que :

$\partial X \times V = \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_-$.
Pour résoudre le problème (2.1) nous allons utiliser la théorie des semi-groupes. Pour cela, il faut tout d'abord choisir un cadre fonctionnel : nous cherchons la solution u que nous écrirons aussi $u(t) = u(t, x, v)$ comme une fonction du temps t à valeur dans **l'espace** $L^p(X\times V)(p \in [1, +\infty[)$ défini comme l'espace des fonctions f mesurables (pour la mesure produit $dxd\mu$) **et telles que**

$$\|f\|_{L^p(X\times V)} = \left(\int_{X\times V} |f(x,v)|^p dxd\mu\right) < +\infty.$$

Le choix $p = 1$ est naturel du point de vue physique, puisque u est une fonction positive et que

$$\int_{X\times V} u(x, v, t)\ dx\ d\mu(v)$$

représente le nombre total de particules à l'instant t, qui est fini.

Le cas $p = \infty$ doit être étudié à part. Par exemple, il y a déjà une difficulté avec l'opérateur $\frac{d}{dx}$ comme générateur infinitésimale qui engendre le groupe des translation $\varphi \to G(t)\varphi = \varphi(. - t)G(t), t > 0$, est une famille d'opérateurs dans $L^p(\mathbb{R})$, mais pas fortement continu (de classe $\mathscr{C}^0$) : en effet, si $t \to 0, \|G(t)\varphi - \varphi\|$ peut ne pas tendre vers 0.

• **Définition des espaces** $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n\times V)$ **et** $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times V)$ **(ou encore** $\mathscr{D}(X\times V)$ **et** $\mathscr{D}'(X\times V), X$ **ouvert** $\subset \mathbb{R}^n$ **).**

Puisque l'ensemble V est un fermé de $\mathbb{R}^n$, il est nécessaire de préciser la notation de distribution sur $\mathbb{R}^n\times V$, et la dualité $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n\times V)$, $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times V)$ utilisée avec l'espace pivot $L^2(\mathbb{R}^n\times V, dxd\mu)$ où μ n'est pas nécessairement la mesure de Lebesgue.
Tout d'abord, on peut identifier les espaces $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, dx\ d\mu)$ et $L^2(\mathbb{R}^n \times V, dx\ d\mu)$ puisque V est le support de μ.
Soit J l'application continue qui à tout fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ fait correspondre sa classe d'équivalence $\tilde{\varphi}$ (*pour la mesure* $dx\ d\mu$) dans $L^2\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, dx\ d\mu\right)$; J n'est pas injective, son noyau est :

$$kerJ = \left\{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi|_{\mathbb{R}^n\times V} = 0\right\}.$$

On désigne par :

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times V) = \{\varphi|_{\mathbb{R}^n\times V}, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\}$$

L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times V)$ s'identifie à l'espace quotient $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)/\text{ker J}$; par ailleurs $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times V)$ **est dense dans** $L^2(\mathbb{R}^n \times V, dx\ d\mu)$.

Notons à présent que tout élément $u \in L^2(\mathbb{R}^n \times V, dxd\mu)$ peut être identifié à la distribution $\tilde{u}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \to \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} u\ \varphi\ dx\ d\mu$.
On désigne par : $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times V)$ **la fermeture de** $L^2(\mathbb{R}^n \times V, dx\ d\mu)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.
L'espace $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ s'identifie alors au dual de l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times V)$,
la dualité étant l'extension du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, dx\ d\mu)$.
Pour résoudre le problème (2.1) **nous étudions plusieurs cas simples d'aide :**

2.2 Problème d'advection

2.2.1 Le problème de Cauchy homogène

Soit $v \in V \subset \mathbb{R}^n$ une vitesse donnée .
Considérant le problème homogène suivant :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,v,0) = \varphi(x,v) & (\text{où } \varphi \textit{ est donnée}) \end{cases}.$$
On cherche une ligne caractéristique $(x(s), t(s))$ le long de laquelle cette équation aux dérivées partielles du premier ordre se réduirait à une équation différentielle ordinaire. Calculons la dérivée de u le long d'une telle courbe :

$$\frac{du}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dt}{ds}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Posons que : $\frac{dx}{ds} = v$ et $\frac{dt}{ds} = 1$. On obtient :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

La solution de l'équation reste donc constante le long de la ligne caractéristique .

$$\begin{aligned} u(x,v,t) &= u_0(x - vt, v) \\ &= \varphi(x - vt, v) \end{aligned}$$

Soit $G(t)$ la famille d'opérateurs définie pour $\varphi \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^n \times V)$ par

$$(G(t)\varphi)(x,v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x - vt, v) \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n \times V \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.1. *La famille d'opérateurs $G(t), t \in \mathbb{R}$ définie par* (2.3) *se prolonge en un groupe d'opérateurs de classe $\mathscr{C}^0$ sur $L^p(\mathbb{R}^n \times V)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ avec*

$$\|G(t)\varphi\|_L^{p(\mathbb{R}^n \times V)} = \|\varphi\|_L^{p(\mathbb{R}^n \times V)}, \quad \forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n \times V) \tag{2.4}$$

Le générateur infinitésimal de ce groupe est l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} Au = -v.\nabla u \\ D(A) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n \times V); v.\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n \times V)\} \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce groupe opère dans le cône des fonctions positives de $L^p(\mathbb{R}^n \times V)$.

Démonstration. On remarque en premier lieu que si $\varphi \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^n \times V)$

$$\|G(t)\varphi - \varphi\|_{\ L^p(\mathbb{R}^n \times V)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n \times V} |\varphi(x - vt, v) - \varphi(x,t)|^p dx\, d\mu(v)\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

lorsque $t \to 0$.
Par densité de $\mathscr{C}_c^0$ dans $L^p(\mathbb{R}^n \times V)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$, on en déduit que $\{G(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ se prolonge en un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$ sur $L^p(\mathbb{R}^n \times V)$.
On établit de même (2.4).
Pour trouver le générateur infinitésimal de $G(t)$, on remarque que

$$\frac{d}{dt}(G(t)\varphi)\Big|_{t=0} = -v\nabla\varphi \quad \textit{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times V),\ \forall \varphi \in D(A).$$

Donc on en déduit (2.5). $\square$

2.2.2 Le problème avec conditions aux limites inhomogènes

Nous avons besoin au lemme suivant

Lemme 2.2.1. *Soit $f(t, x, v', v)$ une fonction réelle positive donnée ($f \geq 0$), $d\mu$ mesurable en v et v'. On suppose qu'il existe des constantes M_a et M_b positives telles que*

$$\begin{cases} i) \displaystyle\int_V f(x, v', v) d\mu(v) \leqslant M_a, & \forall (x, v') \in X \times V. \\ ii) \displaystyle\int_V f(x, v', v) d\mu(v') \leqslant M_b, & \forall (x, v) \in X \times V. \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors l'opérateur K défini par

$$(K\varphi)(x, v) = \int_V f(x, v', v)\varphi(x, v')d\mu(v'), \quad \forall \varphi \in L^p(X \times V), \tag{2.7}$$

est linéaire, continu de $L^p(X \times V)$ dans lui même (pour $p \in [1, \infty[$).

Pour la démonstration de ce lemme voir [3].

Cas des conditions aux limites homogènes

On considère le problème

$$\begin{cases} i) \frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u + \Sigma u = Ku + q \quad x \in X \subset R^n, \quad v \in V \subset R^n,\ t > 0 \\ ii) u(x, v, 0) = u_0(x, v), \quad u_0 \text{ donné}, \\ iii) u|_{\Gamma_-} = 0, \quad t \geqslant 0,\ \Gamma_- \ étant\ défini\ en \end{cases} \tag{2.8}$$

Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on introduit l'espace de Banach

$$W^p = W^p(X \times V) = \{u \in L^p(X \times v); v\nabla u \in L^p(X \times v)\} \tag{2.9}$$

Ici nous nous heurtons à une difficulté : si $u \in L^p(X \times V)$ et $v\nabla u \in L^p(X \times V)$, **il n'est pas vrai, en général, que la Trace ($u|_{\Gamma_-}$) de u sur Γ_- vérifie** ;

$$\int_{\Gamma_-} (v \cdot \mu)|u|^p d\Gamma\, d\mu \ < +\infty,$$

où $d\Gamma$ est la mesure de surface de ∂X.

Naturellement, on n'a pas mieux pour la trace $u|_{\Gamma_+}$ de u sur Γ_+. En revanche, si K est un compact inclue dans Γ_- où (Γ_+), on va voir que l'on peut pour définir la Trace $u|_K$ de u sur K dans $L^p(K)$, ce qui suffit pour donner un sens au domaine $D(A)$ de l'opérateur d'advection dans le cas des conditions aux limites absorbantes.

Théorème 2.2.1. ***Théorème de Trace***
Soit K un sous-ensemble compact de Γ_+ (resp.Γ_-), alors l'application Trace

$$u \to u|_K$$

définie sur $\mathscr{D}(\bar{X} \times V)$ se prolonge par continuité en une application continue de W^p dans $L^p(K)$

Corollaire 2.2.1. *Les fonctions de W^p ($p \in [1, +\infty[$) ont une Trace dans $L^p_{loc}(\Gamma_-)$ (resp. $L^p_{loc}(\Gamma_+)$)*

Définition 2.2.1. *Pour tout $u \in W^p(X \times V)$, on écrit $u|_{\Gamma_-} = 0$ si pour tout compact $K \subset \Gamma_-$, on a : $u|_K = 0$.*

Nous définissons maintenant ***le temps de parcours*** *$t(x, v) \in X \times V$ par :*

$$t(x, v) = sup\{t, x - vs \ \in X \ pour 0 \leqslant s < t\}, \tag{2.10}$$

autrement dit $t(x, v)$ est le temps que met une particule située en x à $t = 0$ et ayant la vitesse $(-v)$, pour atteindre la frontière ∂X .

Cette définition n'entraine pas que la particule sorte du fermé $\bar{X}$ au temps $t(x, v)$ car sa trajectoire peut être tangente à la frontière ∂X lorsque X n'est pas convexe.
Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(X \times V)$, on définit alors l'opérateur $G(t)$, $t > 0$ par :

$$(G(t)\varphi)(x, v) = \begin{cases} \varphi(x - vt, v) & \text{si} \quad t < t(x, v), \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t(x, v). \end{cases} \tag{2.11}$$

Théorème 2.2.2. *La famille d'opérateurs $(G(t))$, $t > 0$, définie par la relation (2.11) se prolonge en un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^p(X \times V), 1 \leqslant p < +\infty$. De plus $\{G(t)\}_{t>0}$ est un semi-groupe de contraction et opère dans le cône des fonctions positives de $L^p(X \times V)$.*
Le générateur de ce semi-groupe est l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} i) Au = -v\nabla u \\ ii) D(A) = \{u \in W^p; u|_{\Gamma_-} = 0\}; W^p \ défini \, par \ (2.9)\} \end{cases} \tag{2.12}$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(X \times V)$, on a :

$$\lim_{t \to 0} \|G(t)\varphi - \varphi\|_{L^p(X \times V) = 0.} \tag{2.13}$$

Par densité de $\mathscr{D}(X \times V)$ dans $L^p(X \times V)$, (et $\{G(t)\}$ étant uniformément borné), on déduira que $\{G(t)\}$ se prolonge en un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^p(X \times V)$.
Soit donc $\varphi \in \mathscr{D}(X \times V)$. Il existe $t_0 = t_0(\varphi)$ tel que pour tout (x, v) dans le support de φ, on ait $t(x, v) > t_0(\varphi)$. On a alors pour $t < t_0(\varphi)$:

$$\|G(t)\varphi - \varphi\|^p_{L^p(X \times V)} = \int_{(X \times V)} |\varphi(x - vt, v) - \varphi(x, v)|^p \, dx \, d\mu(v)$$

On vérifie aussi que (2.13) a lieu pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(X \times V)$, d'où (2.13) pour tout $\varphi \in L^p(X \times V)$ par densité.

Déterminons enfin le générateur de ce semi-groupe. Soit u une fonction appartenant au domaine de ce générateur et $\varphi \in \mathscr{D}(X \times V)$ donnée. Pour $(t < t_0)$ on a

$$\langle G(t)u - u, \varphi \rangle = \int_{X \times V} (u(x - vt, v) - u(x, v))\varphi(x, v) \, dx \, d\mu$$

et par conséquent

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(G(t)u - u) = -v\nabla u \qquad dans \ \mathscr{D}'(X \times V).$$

Pour que u soit dans le domaine du générateur, il faut donc que $v\nabla u \in L^p(X \times V)$.
Enfin si K est un compact de Γ_-, on vérifie que pour tout $t > 0, G(t)u$ est nul dans un voisinage de K. Ainsi $G(t)u|_K = 0$ et la continuité de l'application trace impose que $u|_K = 0$.

On utilise la caractérisation de $D(A)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(t)u-u}{t} \text{ existe dans } L^p(X\times V) \ \Leftrightarrow u\in D(A).$$

Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\bar{X}\times V)$ et $u\in W^p(X\times V)$, on a :

$$\int_{X\times V} G(t)u(x,v)\varphi(x,v)dxd\mu = \int_{X\times V} u(x-vt,v)\varphi(x,v)Y(t(x,v)-t)dxd\mu,$$

où Y désigne **la fonction d'Heaviside** ; donc :

$$\langle \frac{G(t)u-u}{t},\varphi\rangle = \int_{X\times V} u(x',v)\frac{1}{t}[\varphi(x'+vt,v)Y(t(x',-v)-t)-\varphi(x',v)]dx'd\mu,$$

ou encore, en posant

$$\chi(x',v,t)=Y(t(x',-v)-t),$$

et en notant que :

$$v.\nabla\chi|_{t=0} = -v.\nu\delta(\Gamma_+) :$$

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0}\langle \frac{G(t)u-u}{t},\varphi\rangle = \int_{X\times V} uv.\nabla(\varphi\chi)|_{t=0}dxd\mu \\ \quad = \int_{X\times V} u(v.\nabla\varphi)dxd\mu + \int_{X\times V} u\varphi(-v.\nu\delta(\Gamma_+))dxd\mu. \end{cases}.$$

L'utilisation de la formule de Green avec $u\in W^p(X\times V)$, $\varphi\in\mathscr{D}(\bar{X}\times V)$ donne

$$\int_{X\times V}[u(v.\nabla\varphi)+(v.\nabla u)\varphi]dx\,d\mu = \int_{\Gamma_+} u\varphi v.\nu\,d\gamma\,d\mu - \int_{\Gamma_-} u\varphi|v.\nu|\,d\gamma\,d\mu;$$

avec ν vecteur unitaire de la normale .
Donc, avec $d\Gamma = d\gamma\,d\mu$:

$$\lim_{t\to 0}\langle \frac{G(t)u-u}{t},\varphi\rangle = \int_{X\times V} -v.\nabla u\varphi\,dx\,d\mu - \int_{\Gamma_-} u\varphi|v.|d\Gamma.$$

Ainsi, on aura, pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\bar{X}\times V)$:

$$\lim_{t\to 0}\langle \frac{G(t)u-u}{t},\varphi\rangle = \int_{X\times V} -v.\nabla u\,\varphi\,dx\,d\mu,$$

si

$$\int_{\Gamma_-} u\varphi|v.\nu|\,d\Gamma = 0, \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\bar{X}\times V),$$

donc si $u|_{\Gamma_-}=0$.
On a donc prouvé que l'opérateur A défini ci-dessus prolonge le générateur.
Réciproquement si $u\in D(A)$, on a pour presque tout $(x,v)\in X\times V$:

$$(G(t)u-u)(x,v) = \int_0^t G(s)(-v.\nabla u)(x,v)\,ds.$$

On en déduit que A coïncide avec le générateur de $(G(t))_{t>0}$. □

On peut établir le :

Théorème 2.2.3. *Supposons que les données du problème* (2.8) *vérifient :*

$$\Sigma \in L^{\infty}(X \times V), \Sigma \geqslant (0),$$

K est l'opérateur défini par

$$(K\varphi)(x,v) = \int_V f(x,v',v)\varphi(x,v')d\mu(v'), \quad \forall \varphi \in L^p(X \times V),$$

où la donnée f est une fonction positive vérifiant

$$\begin{cases} i) \int_V f(x,v',v)d\mu(v) \leqslant M_a, & \forall (x,v') \in X \times V. \\ ii) \int_V f(x,v',v)d\mu(v') \leqslant M_b, & \forall (x,v) \in X \times V. \end{cases}$$

avec M_a et M_b des constantes .

$$q \in L^p([X \times V \times (0,\tau)), \quad p \in [1, \infty[,$$
$$u_0 \in L^p(X \times V).$$

Alors le problème (2.8) *admet une solution unique u dans l'espace $\mathscr{W}_p$. On a :*

$$u \in \mathscr{C}([0,\tau]; L^p(X \times V)).$$

Si de plus, u_0 est telle que

$$v.\nabla u_0 \in L^p(X \times V) \text{ et } u_0|\Gamma_- = 0, \text{ donc } u_0 \in D(A)$$

et q telle que

$$q \in \mathscr{C}^1([0,\tau]; L^p(X \times V)),$$

alors :

$$u(t) = \int_0^t G(t-s)f(s)ds + G(t)u_0$$

est une solution forte de (2.8) *; elle vérifie :*

$$u \in \mathscr{C}^1([0,\tau]; L^p(X \times V)) \; v.\nabla u \in \mathscr{C}[0,\tau]; Ł^p(X \times V) \; u(t)|_{\Gamma_-} = 0, \quad \forall t \in [0,\tau],$$

donc $u \in \mathscr{C}[0,\tau], D(A)$.
Si $q \geqslant 0$, alors $u_0 \geqslant 0$ entraîne $u \geqslant 0$.

Cas des conditions aux limites non homogènes.

Supposons à présent que la condition aux limites homogène $(2.8)iii)$ soit remplacée par la condition non homogène :

$$u|_{\Gamma_-} = g. \tag{2.14}$$

Donc le problème devient :

$$\begin{cases} i) \frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u + \Sigma u = Ku + q, & \text{dans } X \times V \times]0,\tau[, \\ ii) u(.,0) = u_0, & \text{sur } X \times V, \\ iii) u(.,t,v)|_{\Gamma_-} = g(t,v), & t \in (0,\tau). \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour résoudre le problème non homogène (2.15), on utilise un relèvement $\tilde{u} = Rg$ de g dans $W^p(X \times V)$ (en supposant pour simplifier que g est indépendant du temps). Cela est possible si

g appartient à l'espace des traces sur Γ_- des fonctions $u \in W^p(X \times V)$, c'est-à dire à l'espace : $L^p(\Gamma_-, d\varepsilon)$ avec $d\varepsilon = |v.\varepsilon| min(\tau(x,v), K)d\gamma d\mu$, où K est une constante, $K > 0$, et $\tau(x,v)$ le temps de sortie de la particule en $x \in \partial X$ ayant la vitesse v :

$$\tau(x,v) = inf\{t > 0, x + vt \notin X\}.$$

Cet espace contient en particulier l'espace $L^p(\Gamma_-, |v.\nu|d\gamma d\mu)$, ce qui permet aussi de traiter le cas où $g \in L^p(\Gamma_-, |v.\nu|d\gamma d\mu)$.
A l'aide du relèvement $\tilde{u} = Rg$ de g, le problème non homogène (2.15) se transforme, par le changement de fonction :

$$u - \tilde{u} = w$$

en :

$$\begin{cases} i) \ \frac{\partial w}{\partial t} + v.\nabla w + \Sigma w = Kw + \tilde{q} \\ ii) \ w|_{\Gamma_- \times]0,\tau[} = 0 \\ iii) \ w(0) = w_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

avec

$$\tilde{q} = q - v.\nabla\tilde{u} - \Sigma\tilde{u} + K\tilde{u} \ et \ w_0 = u_0 - \tilde{u},$$

tels que :

$$\tilde{q} \in L^p(X \times V) \quad et \quad w_0 \in L^p(X \times V) \ (mais\ a\ priori\ w_0 \notin D(A)),$$

et le Théorème 2.2.3 entraîne alors l'existence de la solution du problème non homogène considéré.

2.2.3 Le problème avec condition aux limites de réflexion

On se propose ici de définir l'opérateur d'advection dans $L^p(X \times V)$, $p \in [1, +\infty[$, pour des conditions aux limites dites de réflexion, c'est-à-dire telles que $u|_{\Gamma_-} = R(u|_{\Gamma_+})$ pour un certain opérateur R, agissant deΓ_+ dans Γ_-(à préciser), de façon à obtenir un opérateur non borné dans $L^p(X \times V)$, noté A_R avec $A_R u(x,v) = -v.\nabla_x u(x,v)$, qui soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^p(X \times V)$. La difficulté de cette définition réside notamment dans le fait que pour un couple de fonctions (g_+, g_-) définies sur Γ_+ et Γ_-, telles que $g_- = Rg_+$, il n'existe pas nécessairement de fonction $u \in W^p(X \times V)$ telles que, d'une part $u|_{\Gamma_+} = g_+$, et d'autre part que g_+ et g_- soient la trace sur Γ_+ et Γ_- d'une même fonction $u \in W^p(X \times V)$: il faut pour cela disposer de théorèmes de trace précis, donnant les condition de raccordement des fonctions g_+ et g_- pour l'existence d'une telle fonction $u \in W^p(X \times V)$.

Pour un opérateur de Γ_+ dans Γ_- donné, le problème sera de trouver (par restriction et fermeture) un opérateur de réflexion R satisfaisant aux critères que nous indiquerons par la suite.
Rappelons tout d'abord quelques notations.
$L^p(\Gamma_-, d\xi)$ avec $d\xi =| v.\nu | \min(\tau(x,v), K)d\gamma d\mu$, où K est une constante, $K > 0$, et $\tau(x,v)$ le temps de sortie de la particule en $x \in \partial X$ ayant la vitesse v :

$$\tau(x,v) = \inf\{t > 0, x + vt \notin X\}$$

$$W^p = W^p(X \times V) = \{u \in L^p(X \times V); v.\nabla u \in L^p(X \times V)\}$$

Pour tout $(x,v) \in \Gamma_-(\text{resp.}\Gamma_+)$, on note par $\tau(x,v)$ le temps de **«passage»** dans X de la particule située en $x \in \partial X$, avec la vitesse v, ou encore :

Si $(x,v) \in \Gamma_+ : \tau(x,v) = \inf\{t > 0, x - vt \notin X\} = \sup\{s > 0, x - v\tau \in X, \forall \tau \in]0,s[\}$,
si $(x,v) \in \Gamma_- : \tau(x,v) = \inf\{t > 0, x + vt \notin X\} = \sup\{s > 0, x + v\tau \in X, \forall \tau \in]0,s[\}$,
Ainsi pour $(x,v) \in \Gamma_-, \tau(x,v) = \tau(x,-v)$.

Soit K une constante positive ; posons $\tau_K(x,v) = \min(\tau(x,v); K)$.
Le rôle de K et d'éliminer les temps de «passage» (de «vie») trop longs dans X (si X est borné et si $0 \notin V$, $\tau(x,v)$ reste borné pour tout (x,v) et on prendra $\tau_K(x,v) = \tau(x,v)$). Pour $p \in [1,+\infty[$, on note par $d\xi (= d\xi_\pm)$ et $d\tilde{\xi}^p_\pm$ les mesures définies sur $\Gamma_\pm$ par :

$$\begin{cases} d\xi = \mid v.\nu \mid \tau_K(x,v) d\gamma d\mu \\ d\tilde{\xi}^p_\pm = \tau_K(x,v)^{1-p} \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu = \tau_K(x,v)^{-p} d\xi \end{cases} \tag{2.17}$$

(ou encore $d\tilde{\xi}^p_\pm = \mid v.\nu \mid \max(\tau(x,v)^{1-p}, K') d\gamma d\mu$ avec $K' = K^{1-p}$; noter que $d\xi^1_\pm = \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu$).
On a ainsi les inégalités et les inclusions :

$$\begin{cases} K^p d\tilde{\xi}^p_\pm \geq K \mid v.\nu \mid d\gamma d\xi \geq d\xi \\ L^p(\Gamma_\pm, d\tilde{\xi}^p_\pm) \hookrightarrow L^p(\Gamma_\pm, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu) \hookrightarrow L^p(\Gamma_\pm, d\xi). \end{cases} \tag{2.18}$$

Soit $W^p_\pm(X \times V) = \{u \in W^p(X \times V), u \mid_{\Gamma_\mp} = 0\}$ Nous avons besoin au théorème suivant

Théorème 2.2.4. *Les applications traces $\gamma_\pm : u \longrightarrow u \mid_{\Gamma_\pm}$ sont continues, surjectives, avec relèvement continu, de $W^p(X \times V)$ dans $L^p(\Gamma_\pm, d\xi)$ et de $W^p_\pm(X \times V)$ dans $L^p(\Gamma_\pm, d\tilde{\xi}^p_\pm), 1 \leqslant p < \infty$*

Ce théorème permet de résoudre le problème suivant :
Trouver $u \in W^p(X \times V)$ vérifiant :

$$\begin{cases} v.\nabla u + \lambda u = q \\ u \mid_{\Gamma_-} = u_- \end{cases} \tag{2.19}$$

Pour tout $q \in L^p(X \times V)$ et $u_- \in L^p(\Gamma_-, d\xi)$ donnés (et où λ désigne une constants, $\lambda > 0$).
On démontre aisément l'existence et l'unicité de la solution de (2.19), par exemple à l' aide d'un relèvement $U \in W^p(X \times V)$ de u_- ; en posant $u = U + w$, on se ramène alors au problème en w :

$$\begin{cases} v.\nabla w + \lambda w = \tilde{q} \text{ avec } \tilde{q} = q - (v.\nabla U + \lambda U) \in L^p(X \times V), \\ w \mid_{\Gamma_-} = 0 \end{cases}$$

dont on connaît la résolution.
Il en résulte que l'application

$$u \longrightarrow \Big(v.\nabla u + \lambda u, u \mid_{\Gamma_-}\Big)$$

est un isomorphisme de $W^p(X \times V)$ sur $L^p(X \times V) \times L^p(\Gamma_-, d\xi)$.
la solution explicite de 2.19 est donnée par

$$u(x,v) = e^{-\lambda t(x,v)} u_-(x - t(x,v)v, v) + \mathcal{Q}(x,v), (x,v) \in X \times V, \tag{2.20}$$

avec

$$\mathcal{Q}(x,v)) = \int_0^{t(x,v)} e^{-\lambda t} q(x - tv, v) dt. \tag{2.21}$$

Posons à présent, pour $(x,v) \in \Gamma_+$:

$$R_0 u_-(x,v) \overset{\text{def}}{=} R_0^\lambda u_-(x,v) = e^{-\lambda \tau(x,v)} u_-(x - \tau(x,v)v, v). \tag{2.22}$$

Ainsi $R_0(= R_0^\lambda)$ est l'application qui, à toute fonction $u_- \in L^p(\Gamma_-, d\xi)$, fait correspondre la trace $u_+ = \tilde{u} \mid_{\Gamma_+}$ sur Γ_+ de la solution $\tilde{u} \in W^p(X \times v)$de :

$$\begin{cases} v.\nabla\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = 0 dans \times V \\ \tilde{u} \mid_{\Gamma_-} = u_- sur \Gamma_-, \end{cases} \tag{2.23}$$

et R_0 est donc une application continue de $L^P(\Gamma_-, d\xi)$ (resp. $L^P(\Gamma_-, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu), L^P(\Gamma_-, d\tilde{\xi}_-^p)$dans $L^P(\Gamma_+, d\xi)$ (resp. $L^P(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu), L^P(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$. Cela résulte encore du Theorème 2.2.4 et de l'identité : (voir [8])

$$\begin{aligned} \tilde{W}^P(X \times V) &= \{u \in W^P(X \times V), u \mid_{\Gamma_+} \in L^P(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)\} \\ &= \{u \in W^p(X \times V), u \mid_{\Gamma_-} \in L^p(\Gamma_-, \mid v.\nu \mid d\gamma\mu)\} \end{aligned} \tag{2.24}$$

De même, nous poserons, pour $(x, v) \in \Gamma_+$

$$\mathscr{R}_0 q(x, v) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_+(x, v) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\tau(x,v)} e^{-\lambda t} q(x - tv, v) dt; \tag{2.25}$$

$\mathscr{R}_0$ est ainsi l'application qui à toute fonction $q \in L^P(X \times V)$ fait correspondre la trace $\mathcal{Q}_+ = U \mid_{\Gamma_+}$ sur Γ_+ de la solution $U \in W_+^p(X \times V)$ de :

$$\begin{cases} v.\nabla U + \lambda U = q \text{ dans } X \times V \\ U \mid_{\Gamma_-} = 0 \text{ sur } \Gamma_-; \end{cases}$$

$\mathfrak{R}_0$ est donc une application continue de $L^p(X \times V)$ dans $L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$, qui est même surjective (par suite du Théorème 2.2.4).
On peut alors donner le Théorème de trace suivant :

Théorème 2.2.5. *soit* $(g_+, g_-) \in L^p(\Gamma_+, d\xi) \times L^p(\Gamma_-, d\xi)$. *Il existe* $u \in W^p(X \times V)$ *tel que* $u \mid_{\Gamma_+} = g_+, u \mid_{\Gamma_-} = g_-$ *si et seulement* (g_+, g_-) *vérifie :*

$$g_+ - R_0 g_- \in L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p). \tag{2.26}$$

Démonstration. i) 1a condition (2.26) est nécessaire : supposons qu'il existe $u \in W^p(X \times V)$ tel que $u \mid_{\Gamma_\pm} = g_\pm$. Soit $\tilde{u}$ la solution de (2.23) pour $u_- = g_-$; alors :

$$u - \tilde{u} \in W^p(X \times V) \text{ et } (u - \tilde{u}) \mid_{\Gamma_-} = 0 \text{ donc } u - \tilde{u} \in W_+^p(X \times V)$$

et par restriction à Γ_+, la relation (2.26).
ii) Réciproquement, si U désigne un relèvement de $g_+ - R_0 g_-$ dans $W_+^p(X \times V), u = \tilde{u} + U \in W^p(X \times V)$ et $u \mid_{\Gamma_\pm} = g_\pm$, d'où le Théorème 2.2.5 . □

Désignons par χ^p l'espace de Banach défini par :

$$\chi^p = \{(g_+, g_-) \in L^p(\Gamma_+, d\xi) \times L^p(\Gamma_-, d\xi). \text{ vérifiant}(2.26)\}, \tag{2.27}$$

avec la norme $\| \cdot \|_{\chi^p}$ donnée par :

$$\|(g_+, g_-)\|_{\chi^p}^p = \|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\xi)}^p + \|g_-\|_{L^p(\Gamma_-, d\xi)}^p + \|R_0 g_- - g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)}^p \tag{2.28}$$

On a alors le :

Corollaire 2.2.2. *l'application trace* $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-) : u \mapsto u \mid_\Gamma = (u \mid_{\Gamma_+}, u \mid_{\Gamma_-})$ *est continue, surjective, avec relèvement continu de* $W^p(X \times V)$ *dans* χ^p.

Soient à présent :
i)R un opérateur non (nécessairement) borné de $L^p(\Gamma_+, d\xi)$ dans $L^p(\Gamma_-, d\xi)$; on note de façon usuelle par $D(R)$ et $G(R)$ son domaine et son graphe,
ii) A_R l'opérateur d'advection défini dans $L^P(X \times V)$ par :

$$\begin{cases} A_R u = -v \cdot \nabla u \\ D(A_R) = \{u \in W^p(X \times V), (\gamma_+ u, \gamma_- u) \in G(R)\}. \end{cases}$$

On notera que $\mathscr{D}(X \times V) \subset D(A_R)$ et donc $D(A_R)$ est dense dans $L^P(X \times V)$.
On peut alors énoncer le :

Théorème 2.2.6. *Supposons que R vérifie les conditions suivantes :*
i) le graphe $G(R)$ de R est un sous-espace fermé de χ^p ;
ii) $Im(I - R_0 R)$ est contenu dans $L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$ avec densité ;
iii) il existe une constante $C > 0$ telle que$\forall g_+ \in D(R)$:

$$\|(I - R_0 R) g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)} \geq C[\|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\xi)} + \|Rg_+\|_{L^p(\Gamma_-, d\xi)}]; \tag{2.29}$$

iv) $D(R) \cap L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$ est dense dans $D(R)$ muni de la norme :

$$\|g_+\|_{D(R)} = (\|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\xi)} + \|Rg_+\|_{L^p(\Gamma_-, d\xi)} + \|(I - R_0 R) g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)})^{\frac{1}{p}}; \tag{2.30}$$

v) R est une contraction pour la mesure $| v.\nu | d\gamma d\mu : \forall g_+ \in D(R) \cap L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$

$$\|Rg_+\|_{L^p(\Gamma_-, |v.\nu| d\gamma d\mu)} \leq \|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)} \tag{2.31}$$

Alors l'opérateur A_R est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^p(X \times V)$.
Réciproquement si A_R est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^p(X \times V)$ tel que $D(A_R) \cap \tilde{W}^p(X \times V)$ soit dense dans $D(A_R)$, alors R vérifie les propriétés i) à v).

Corollaire 2.2.3. *Si les hypothèses de Théorème 2.2.6 sont réalisées, les applications traces γ_+ et $\gamma : \gamma_+ u \mapsto u\, |_{\Gamma_+}, \gamma : u \mapsto (u\, |_{\Gamma_+}, u\, |_{\Gamma_-})$ sont continues surjectives avec relèrement continu $D(A_R$ dans $D(R)$ et $G(R)$ respectivement.*

On notera que l'inégalité (2.29) peut encore s'écrire sous la forme (avec (2.17)) :

(2.17) $\int_{\Gamma_+} |\frac{1}{\tau_K(x,v)}(I - R_0 R) g_+(x,v)|^p d\xi \geq C_1[\int_{\Gamma_+} | g_+(x,v) |^p \, d\xi + \int_{\Gamma_-} | Rg_+(x,v) |^p \, d\xi], \forall g_+ \in D(R)$,

avec C_1 constante, $C_1 > 0$, et avec $d\xi = \tau_K(x,v)|v,v|d\gamma d\mu$ (voir 2.17).

Démonstration. (du Théorème 2.2.6) Nous utiliserons de façon essentielle le théorème de **Lumer-Phillips** (chap. XVIIA [2]).

i) L'opérateur A_R est dissipatif sur $D(A_R) \cap \tilde{W}^p(X \times V)$ ssi v) est verifie. l'opérateur A_R est dissipatif pour $p > 1$ ssi on a :

$$\langle J(u), A_R u \rangle = \int_{X \times V} | u |^{p-2} u(-v.\nabla u) dx d\mu \leq 0, \forall u \in D(A_R). \tag{2.32}$$

Or

$$-v.\nabla(|u|^p) = p|u|^{p-1} v.\nabla(|u|) = -p|u|^{p-1}(sign_0 u) v.\nabla u = p|u|^{p-2} uv.\nabla u.$$

On en déduit par la formule de Green :

$$\int_{X\times V} \mid u \mid^{p-2} -u(v.\nabla u)dxd\mu = \frac{1}{p}\int_{X\times V} -v.\nabla(\mid u \mid^{p})dxd\mu = -\frac{1}{p}\int_{\partial X\times V} \mid u \mid^{p} v.\nu d\gamma d\mu; \quad (2.33)$$

d'où encore, si $u \in D(A_R) \cap \tilde{W}^p(X \times V)$

$$\langle J(u), A_R u\rangle = -\frac{1}{p}[\int_{\Gamma_+} \mid u_+ \mid^p v.\nu d\gamma d\mu + \int_{\Gamma_-} \mid u_- \mid^p v.\nu d\gamma d\mu], \quad (2.34)$$

et par suite, l'équivalence

$$\langle J(u), A_R u\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \|u_-\| = \|Ru_+\|_{L^p(\Gamma_-,|v.\nu|d\gamma d\mu)} \leq \|u_+\|_{L^p(\Gamma_+,v.\nu d\gamma d\mu)} \quad (2.35)$$

Dans le cas $p = 1$, on opère de même avec $J(u) = sign_0 u$ (voir chap. XVII [2]) $\int_{X\times V} v.\nabla \mid u \mid dxd\mu(v) = \int_{\Gamma_+}(\nu.v) \mid u \mid d\Gamma_+ \geq 0$

$$\begin{cases} i)\, \Sigma(x,v') \geq \Sigma_0 > 0 \text{et} \\ ii)\, \Sigma \text{ et } f \text{ vérifient } (p.p(x,v) \in x \times V) \\ \qquad \int_V f(x,v',v)d\mu(v') \leq \beta\Sigma(x,v), 0 \leq \beta < 1 \\ iii) q \;\text{ ne dépend pas de} \, t \text{ et vérifie} \, q \in L^\infty(X \times V) \end{cases} \quad (2.36)$$

ce qui donne encore (2.35) pour $p = 1$.

ii) $D(A_R) \cap \tilde{W}^p(X \times V)$ est dense dans $D(A_R) \Leftrightarrow D(R) \cap L^P(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$ est dense dans $D(R)$.

L'application trace $\gamma_+ : u \mapsto u \mid_{\Gamma_+}$ étant continue de $D(A_R)$ sur $D(R)$ (par le Corollaire 2.2.2), on a ainsi l'implication $\Longrightarrow$.

La réciproque se démontre en construisant un relèvement de $D(R)$ dans $D(A_R)$, ce qui prouvera aussi le Corollaire 2.2.3 ; on pose $\mathcal{Q}_+ = (I - R_0 R)g_+ \in L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}^p_+)$ pour tout $g_+ \in D(R)$; $\mathcal{Q}_+$ admet un relèvement $U \in W^P_+(X \times V)$. Posons alors :

$$u(x,v) = e^{-\lambda t(x,v)} Rg_+(x - t(x,v)v, v) + U(x,v), (x,v) \in X \times V.$$

On a $u \in W^p(X \times V)$ et $u \mid_{\Gamma_+} = R_0 Rg_+ + U \mid_{\Gamma_+} = R_0 Rg_+ + \mathcal{Q}_+ = g_+, u \mid_{\Gamma_-} = Rg_+$, donc $u \in D(A_R)$ et u est un relèvement de g_+

$$\begin{array}{ll} D(A_R) \cap \tilde{W}^p(X \times V) & \longrightarrow D(A_R) \\ \uparrow\downarrow \gamma_+ & \uparrow\downarrow \gamma_+ \\ D(A_R) \cap L^p(\Gamma_+, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu) & \longrightarrow D(A_R) \end{array}$$

Ainsi les propriétés i) et ii) que nous venons de démontrer entrainent que A_R est dissipatif sur $D(A_R)$.

iii)$Im(I - A_R) = L^P(X \times V)$ ssi les hypothèses i), ii) et iii) sont vérifiées. (Cela entraînera que l'opérateur A_R est m- dissipatif sous les hypothèses i) à v)). Nous allons montrer l'équivalence entre :

•$(\lambda I - A_R)$ est un isomorphisme de $D(A_R)$ sur $L^P(X \times V)$ (pour $\lambda > 0$) .

$\bullet(I - R_0R)$ est un isomorphisme de $D(R)$ sur $L^P(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$.
Le problème : trouver $u \in D(A_R)$ tel que :

$$(\lambda I - A_R)u = q, \text{ avec } q \text{donné dans } L^P(X \times V), \tag{2.37}$$

c'est-à-dire tel que :

$$\begin{aligned} &i) v.\nabla u + \lambda u = q, \qquad q \in L^P(X \times V) \\ &ii) R(u\,|_{\Gamma_+}) = u\,|_{\Gamma_-} \end{aligned} \tag{2.38}$$

admet, en considérant $u\,|_{\Gamma_-} = u_-$ comme donné pour l'instant, la solution (2.20) ; il reste alors à écrice que la relation (2.38) ii) est verifiée, ce qui donne, avec (2.22) en prenant la trace de u sur Γ_+ et en possant $u\,|_{\Gamma_+} = u_+$, $\mathcal{Q}\,|_{\Gamma_+} = \mathcal{Q}_+ = \mathscr{R}_0 q$ (voir (2.25))

$$u_+ - R_0Ru_+ = \mathcal{Q}_+ \tag{2.39}$$

Puisque l'ensemble des $\mathcal{Q}_+$ pour $q \in L^p(X \times V)$ est l'espace $L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$, on obtient que (2.38) admet une solution et une seule $u \in D(A_R)$ ssi (2.39) admet une solution et une seule $u_+ \in D(R)$ (la détermination de u_+ entrainant celle de $u_- = Ru_+$et donc de u par(2.20). D'où l'équivalence annoncée.
Mais $(I - R_0R)$ est un isomorphisme de $D(R)$ sur $L^P(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$ ssi l'application

$$\tau_0 : (u_+, Ru_+) \in G(R) \to (I - R_0R)u_+ \in L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$$

est un isomorphisme, ou encore ssi les conditions i), ii) et iii) du Théorème 2.2.6 sont vérifiées.

En effet i) entraîne que $D(R)$ muni de la norme donnée par (2.30) est un espace de Banach, et l'application $I - R_0R$ est continue de $D(R)$ dans $L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$, d'inverse continue par suite de (2.29), donc les hypothèses i) à iii) entraînent que $(I - R_0R)$ est un isomorphisme de $D(R)$ sur $L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$, et en particulier $Im(I - R_0R) = L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$.
la réciproque s'effectue sans difficulté particulière . □

De façon assez générale, on peut montrer dan sle corolaire suivant qu'un opérateur de réflexion R étant défini comme un opérateur non borné de $L^p(\Gamma_+, d\xi)$ dans $L^p(\Gamma_-, d\xi)$ avec un domaine D, peut être prolongé avec R avec les propriétés i) à v).

Corollaire 2.2.4. *Soit R un opérateur non borné de $L^p(\Gamma_+, d\xi)$ dans $L^p(\Gamma_-, d\xi)$ vérifiant les propriétés ii) à v) du Théorème* 2.2.6. *Alors l'opérateur R admet "par fermeture " une extension $\bar{R}$ vérifiant les propriétés i) à v) du Théorème* 2.2.6, *et donc telle que $A_{\bar{R}}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^p(X \times V)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que R est fermable, c'est-à-dire que la fermeture $\bar{G}$ du graphe $G(R)$ de R dans χ^p est un graphe, ou encore : si $f_n \in L^p(\Gamma_+, d\xi), n \in \mathbb{N}$, est une suite telle que pour

$$n \to \infty,\ f_n \to 0 \text{ dans } L^p(\Gamma_+, d\xi), \qquad Rf_n \to g_- \text{ dans } L^p(\Gamma_-, d\xi) \ \Rightarrow\ g_- = 0,$$

$f_n \to 0 \Rightarrow \qquad (I - R_0R)f_n \to -R_0g_-$. Or par suite des hypothèses ii) et iii), $I - R_0R$ admet un inverse, noté $(I - R_0R)^{-1}$ continu sur $L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$; donc

$$(I - R_0R)^{-1}(I - R_0R)f_n = f_n \longrightarrow -(I - R_0R)^{-1}R_0g_-, \text{d'où } (I - R_0R)^{-1}R_0g_- = 0$$

donc $R_0g_- = 0$, et $g_- = 0$. □

Généralisation de l'opérateur de réflexion

Nous allons donner à présent un cadre assez général d'exemple d'opérateur de réflexion R vérifiant l'inégalité (2.29) qui peut être replacée par la suivante (un peu plus forte).

$$iii)' R_0 R \text{ est un opérateur de contraction stricte dans} L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu) \text{ (pour } \lambda = 1). \quad (2.40)$$

Tout d'abord on utilise (Voir Bardos [9] pour $p = 2$, Cessenat [8] pour le cas général pour la démonstration) que

$$\begin{aligned} \tilde{W}^p(X \times V) &= \{u \in W^p(X \times V), u \mid_{\Gamma_+} \in L^p(\Gamma_+, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu)\} \\ &= \{u \in W^p(X \times V), u \mid_{\Gamma_-} \in L^p(\Gamma_-, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu)\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

On remarque tout d'abord (et cela peut se déduire aisément de la partie i) de la preuve du Théorème 2.2.6) que l'opérateur R_0 est un opérateur de contraction de $L^p(\Gamma_-, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu)$dans $L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$.
Ainsi, si R est un opérateur (de réflexion) non borné de $L^p(\Gamma_+, d\xi)$dans $L^p(\Gamma_-, d\xi)$ de contraction de $L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$ dans $L^p(\Gamma_-, \mid v.\nu \mid d\gamma d\mu)$, i.e. vérifiant (2.31),alors $R_0 R$ est un opérateur de contraction dans $L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$.
Démontrons que si R vérifie iii)', iv), v) et ii), alors R vérifie aussi iii), iv), v) et ii), et donc R est un opérateur de réflexion sur $D(R) = (I - R_0 R)^{-1} L^P(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$, tel que A_R soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe $\mathscr{C}^0$dans $L^p(X \times V)$.

Démonstration. L'opérateur $I - R_0 R$ admet alors un inverse continu dans $L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$; par suit il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\forall g_+ \in D(R) \cap L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$:

$$\|(I - R_0 R) g+\|_{L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)} \geq C_0 \|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)}.$$

En utilisant les inégalités (2.18) et le fait que R est un opérateur de contraction (par (2.31)), on obtient pour tout $g_+ \in D(R) \cap L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$:

$$\begin{aligned} K^{\frac{(p-1)}{p}} \left(\int_{\Gamma_+} \mid (I - R_0 R) g_+ \mid^p d\tilde{\xi}_+^p\right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_{\Gamma_+} \mid (I - R_0 R) g_+ \mid^p v.\nu d\gamma d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq C_0 \|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)} \\ &\geq \frac{C_0}{2} [\|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)} + \|R g_+\|_{L^p(\Gamma_-, |v.\nu| d\gamma d\mu)}] \\ &\geq \frac{C_0}{2} K^{\frac{-1}{p}} [\|g_+\|_{L^p(\Gamma_+, d\xi)} + \|R g_+\|_{L^p(\Gamma_-, d\xi)},] \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'inégalité (2.29) avec $C = C_0/2K$; l'hypothèse de densité iv) entraîne alors le résultat annoncé.
On notera que dans ce cas $D(R) \subset L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$, et par suite, que $D(A_R) \subset \tilde{W}^P(X \times V)$ (avec la définition (2.24).

Donnons quelques exemples d'opérateur de réflexion R locaux en x mais pas en v (voir notamment Sentis [11]) :
(i) l'opérateur, dit de réflexion spéculaire, défini par :

$$R g_+(x, v) = \alpha(x) g_+(x, v) - 2(v_x.v)\nu_x), \qquad (x, v) \in \Gamma_- \quad (2.42)$$

avec α fonction positive borné sur ∂X, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, qui est défini "naturellement" sur l'espace des fonctions bornées sur Γ_+. On peut vérifier alors que R est bien un opérateur de contraction pour la mesure $(v,\nu)d\gamma dv$ (i.e. vérifie (2.31) avec $d\mu = dv$). l'opérateur $R_0 R$ est donné par :

$$R_0 R_g(x,v) = e^{-\tau(x+v)} R_{g_+}(x - \tau(x,v)v, v) = \varphi(x,v) g_+(\theta(x,v) \in \Gamma_+ \tag{2.43}$$

avec $\varphi(x,v) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\tau(x,v}\alpha(x), (x,v) \in \Gamma_+$ (φ est une fonction positive avec $0 \leq \varphi \leq 1$), et avec θ application de Γ_+ dans Γ_+ :

$$\theta(x,v) = (x', w), \qquad x' = x - \tau(x,v)v, \qquad w = 0 - 2(\nu_{x'}.v)\nu_{x'}; \tag{2.44}$$

θ est ainsi l'application dite du billard (pour $n = 2$).
(voir par exemple Arnold-Avez [12], pp. 201-202.)
Naturellement, si la fonction α vérifie $0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_0 \leq 1$, alors $R_0 R$ est un opérateur de contraction stricte dans $L^p(\Gamma+, v.\nu d\gamma dv)$ l'inégalité (2.29) est donc vérifiée,et R (avec $D(R) \stackrel{\text{def}}{=} (I - R_0 R)^{-1} L^p(\Gamma+, v.\nu d\gamma dv)$) définit un opérateur A_R générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction dans $L^p(X \times V)$. (Bien sûr, la condition que α soit bornée par $\alpha_0 < 1$ n'est pas nécessaire pour avoir le résultat précédent ; il faut essentiellement vérifier (2.29) ou (2.40) ;
ii) l'opérateur intégral de réflexion défini par :

$$Rg_+(x,v) = \int_{\Gamma_{x^+}} g_+(x,w) \prod_{(x,v)}(dw), \qquad (x,v) \in \Gamma-, \tag{2.45}$$

où $\Gamma_{x^+} = \{v \in V, v.\nu_x > 0\}, \prod_{(x,v)}$ est une mesure positive bornée sur Γ_{x+}, de masse total ≤ 1, dépendant de $(x,v) \in \Gamma_-$.
L'opérateur de réflexion spéculaire est un cas particulier de cet opérateur, avec :

$$\prod_{(x,v)}(dw) = \alpha(x)\delta_{v-2(\nu_x,v)\nu_x}(w);$$

un autre cas particulier est donné par l'opérateur dit de réflexion isotrope, où

$$\prod_{(x,v)}(dw) = \alpha(x)\nu_x.wd\mu(w) / \int_{\Gamma_{x^+}} \nu_x.wd\mu(w)$$

(avec $0 \leq \alpha(x) \leq 1$).
Nous renvoyons pour cela à Sentis [11]. □

Remarque 2.2.1. *On pourrait généraliser encore le Théorème 2.2.6 , dans le cas où R n'est pas un contraction, pour obtenir par le théorème de Hille-Yosida, une condition nécessaire suffisante sur R pour que A_R soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$ dans $L^P(X \times V)$. Voir Théorème* **??**.

Positivité. On notera que l'opérateur R_0 défini par (2.22) est positif, i.e.

$$g_- \geq 0 \Longrightarrow R_0 g_- \geq 0$$

(pour tout $\lambda > 0$) ; par suite si R est aussi un opérateur de réflexion positif, $R_0 R$ est encore un opérateur positif.

Dans le cas où de plus $R_0 R$ est une contraction stricte dans $L^p(\Gamma_+, v.\nu d\gamma d\mu)$ (pour $\lambda = 1$ par exemple), alors l'équation (2.39) admet pour tout $\mathcal{Q}_+ \geq 0$ donné, avec $\mathcal{Q}_+ \in L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$ une solution et une seule u_+, avec $u_+ \geq 0$. Cela entraîne aussitôt que pour tout q donné :$q \geq 0$ avec $q \in L^p(X \times V)$, la solution u du problème (2.38) (pour $\lambda = 1$ ici)est aussi positive.

On en déduit que le semi-groupe de contraction $(G_R(t))_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal A_R est positif, c'est-a-dire que :

$$u_0 \geq 0 \Rightarrow G_R(t)u_0 \geq 0, \qquad \forall t > 0;$$

cela résulte de la formule (voir chap. XVI et XVII [2])

$$G_R(t)u_0 = e^{tA_R}u_0 = \lim_{n\longrightarrow\infty}(I - \frac{t}{n}A_R)^{-n}u_0, \qquad t > 0.$$

2.3 Problème stationnaire avec condition aux limites de réflexion

2.3.1 Avec condition aux limites inhomogène

Considérons maintenant le problème en $u = u(x, v)$.

$$\begin{cases} i) v.\nabla u + \Sigma u = Ku + q \quad x \in X \subset R^3, \quad v \in V \subset R^3, \\ ii) u|_{\Gamma_-} = g, \end{cases} \tag{2.46}$$

Supposons que les données du problème (2.46) vérifient :

$$\Sigma \in L^\infty(X \times V), \Sigma \geqslant (\sigma_0) > 0, \tag{2.47}$$

K est l'opérateur défini par (2.7) et

$$q \in L^p([X \times V \times (0, \tau)), \quad p \in [1, \infty[, \tag{2.48}$$

Nous supposons dans tout cette partie que Σ , K *et* q (ainsi que les conditions aux limites) ne dépend pas du temps t. Par ailleurs X *et* V peuvent être bornés au non.

Il existe, pour résoudre les EDP d'ordre un, une méthode systématique, la méthode des caractéristiques, que nous allons présenter

Soit $x \in \mathbb{R}^{\nVdash}$; posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = x - tv$; alors γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -v,$$

Définition 2.3.1. *L'ensemble* $\{(t; \gamma(t)), t \in \mathbb{R}\}$ *est une droite de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, appelée* **"courbe caractéristique"** *issue de* x *à* $t = 0$ *pour l'opérateur de transport*

$$v.\nabla u + \Sigma u = Ku + q \tag{2.49}$$

Remarque 2.3.1. *Soit* $U(t) = u(x - tv)$*, alors l'équation* (2.49) *est équivalente à*

$$U'(t) - \Sigma U(t) = -(KU + q)(\gamma(t)), \tag{2.50}$$

Soit $v.\nabla_x u \in L^p(X \times V)$ *; u la solution de l'équation de transport. Donc l'application* $t \mapsto U(t)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* $\mathbb{R}^+$ *(comme composée des applications* u *et* $t \mapsto \gamma(t)$*, toutes deux de classe* $\mathscr{C}^1$.

Proposition 2.3.1. *On suppose que* Σ, f *et* K *énoncées au-dessus vérifiant, respectivement,* (2.47), (2.6) *et* (2.7), *aux quelles on ajout de plus :*

$$\int_V f(x,v',v)d\mu(v') \leq \beta\Sigma(x,v), \qquad 0 \leq \beta < 1, \tag{2.51}$$

et g *est une fonction positive vérifiant*

$$g \in L^\infty(\Gamma_-). \tag{2.52}$$

Alors le problème (2.46) *admet une solution unique dans* $L^\infty(X \times V)$ *; et elle vérifie :*

$$\|u\|_\infty \ \leq sup\ (\|g\|_\infty, \alpha\|q\|_\infty\ ) \quad \text{avec } \alpha \text{ constante, } \alpha > 0 \tag{2.53}$$

Démonstration. On montre l'existence de u, sans perdre de généralité on suppose $q = 0$, à l'aide d'un théorème de **point fixe** (théoreme de Banach).
Soit u^0 la solution dans $L^\infty(X \times V)$ de :

$$\begin{cases} v.\nabla u^0 \ + \ \Sigma u^0 \ = \ 0, \\ u^0|_{\Gamma_-} \ = \ g. \end{cases}$$

On obtient comme limite dans $L^\infty(X \times V)$ de la suite u^n définie par

$$\begin{cases} v.\nabla u^n \ + \ \Sigma u^n \ = \ Ku^{n-1} \\ u^n|_{\Gamma_-} \ = \ g, \end{cases} \tag{2.54}$$

en posant $U^n(t) = u^n(x - tv, v)$ l'équation (2.54) est équivalente à l'équation

$$\begin{cases} U'^n(t) - \Sigma U^n(t) \ = -KU^{n-1}(t) \\ U^n(t_0(x,v)) \ = \ g(x - t_0(x,v), v), \end{cases} \tag{2.55}$$

Supposons : $\|u^{n-1}\|_\infty \ \leq \ \|g\|_\infty$
On va montre que : $\|u^n\|_\infty \ \leq \ \|g\|_\infty$
Posons :

$$q^{n-1} \ = \ Ku^{n-1} \tag{2.56}$$

Alors par intégration (2.55) par rapport à t on obtient

$$\begin{aligned} u^n(x,v) &= exp(-\int_0^{t_0(x,v)} \Sigma(x - vs, v)ds)g(x - t(x,v)v), v) \\ &+ \int_0^{t_0(x,v)} exp(-\int_0^t \Sigma(x - sv, v)ds)q^{n-1}(x - vt, v)dt; \end{aligned} \tag{2.57}$$

Or, la deuxième terme est borné par :

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_0(x,v)} exp(-\int_0^t \Sigma(x - sv, v)ds)\Sigma(x - tv, v)dt \ \|\frac{1}{\Sigma}\ q^{n-1}\|_\infty \\ &\leq (1 - exp(-\int_0^{t_0(x,v)} \Sigma(x - vs, v)ds)) \ \|\frac{1}{\Sigma}\ q^{n-1}\|_\infty \end{aligned}$$

Or, d'après (2.56) de q^{n-1} et l'hypothèse de sous-critcité (2.51) , on a

$$q^{n-1}(x,v) \leq \beta\Sigma(x,v)\|u^{n-1}\|_\infty;$$

D'où :

$$\frac{1}{\Sigma(x,v)}\ q^{n-1}(x,v) \leq \|g\|_\infty.$$

Finalement on a :

$$|u^n(x,v)| \leq exp(-\int_0^t \Sigma(x-vs,v)ds)\|g\|_\infty \tag{2.58}$$

$$+((1-exp(-\int_0^{t(x,v)} \Sigma(x-vs,v)ds))\ \|g\|_\infty\ \leq \|g\|_\infty$$

D'où le résultat par récurrence. □

Avec condition aux limites de réflexion

Le problème du transport Boltzmann avec conditions aux limites de réflexion peut également être résolu par le :

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.2, le Théorème 2.3.2 est encore vrai en remplaçant dans le problème* (2.46) $D(A)$ *par* $D(A_R)$.

Pour cela on va démontrer la proposition suivante qui amène le problème avec conditions aux limites de relexion à un problème stationnaire avec conditions aux limites nonhomogènes.

Proposition 2.3.2. *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v\cdot\nabla u + \Sigma u = Ku + q & dans\ \ X\times V\times]0,\tau[\\ u(.,t)|_{\Gamma_-} = R(u(.,t)\ |_{\Gamma_+} \quad\quad sur & \Gamma_-\times]0,\tau[[\\ u(0) = u_0\ \ dans\ \ X\times V. \end{cases} \tag{2.59}$$

(avec, pour simplifier, $q=0$ *) que nous écrivons :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Tu \quad dans\ X\times V\times]0,+\infty[,\ \ (i.e.\ pour\ \tau=+\infty). \\ u(\cdot,t)|_{\Gamma_-} = R(u(.,t)|_{\Gamma_+}) \\ u(0) = v_0 \quad dans \quad\quad X\times V, \end{cases} \tag{2.60}$$

peut être ramené à un problème de Cauchy avec conditions aux limites inhomogènes, en posant $h_- = u|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[}$; *u est ainsi de façon triviale, solution du problème ;*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Tu \\ u|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[} = h_- \quad sur\Gamma_- \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Notons : $\tilde{R}_{u_0}h_- \stackrel{def}{=} u\ |_{\Gamma_+\times[0,+\infty[} = h_+$ *;l'application* $h_- \longrightarrow \tilde{R}_{u_0}h_-$ *est affine : si l'on note par* u^0 *la solution du problème de Cauchy homogène :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial t} = Tu^0 \\ u^0|_{\Gamma_-\times]0,+\infty} = 0 \\ u^0(0) = u_0, \end{cases}$$

peut être ramené à un problème de Cauchy avec conditions aux limites inhomogènes, en posant $h_- = u|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[}$; *u est ainsi de façon triviale, solution du problème ;*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Tu \\ u|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[} = h_- \quad sur\Gamma_- \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.62}$$

Notons : $\tilde{R}_{u_0}h_- \overset{def}{=} u\,|_{\Gamma_+\times[0,+\infty[} = h_+$ *;l'application* $h_- \longrightarrow \tilde{R}_{u_0}h_-$ *est affine : si l'on note par* u^0 *la solution du problème de Cauchy homogène :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial t} = Tu^0 \\ u^0|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[} = 0 \\ u^0(0) = u_0, \end{cases}$$

alors $\tilde{R}_{u_0}h_- = \tilde{R}_0h_- + u^0|_{\Gamma_+\times]0,+\infty[}$, *avec naturellement* $\tilde{R}_0h_-$ *correspondant à condition initiale nulle, si bien que l'application* $h_- \longrightarrow \tilde{R}_0h_-$ *est linéaire.*
Ainsi h_+ *doit être solution de l'équation :*

$$h_+ = \tilde{R}_{u_0}Rh_+ = \tilde{R}_0Rh_+ + u^0|_{\gamma_+\times]0,+\infty[}.$$

Par transformation de Laplace en t, *on obtient une équation analogue à* (2.46) *de type stationnaire. Vérifions-le dans le cas le plus simple, où* $\Sigma = K = 0$. *Le problème :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v\cdot\nabla u = 0 \ \ dans\ X\times V\times]0,+\infty[\\ u|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[} = h_- \\ u(0) = u_0 \ \ dans\ X\times V, \end{cases} \tag{2.63}$$

admet pour solution :

$$u(x,v,t) = Y(t-t(x,v))h_-(x-t(x,v)v, v, t-t(x,v)) + Y(-t+t(x,v))u_0(x-tv,v), \tag{2.64}$$

où Y *est la fonction d'Heaviside, ce qui donne pour* $(x,v)\in\Gamma_+$, *en posant* $h_+ = u\,|_{\Gamma_+\times]0,+\infty[}$ *:*

$$\begin{aligned} & h_+(x,v,t) = \tilde{R}_{u_0}h_-(x,v,t) \\ = \ & Y(t-\tau(x,v))h_-(x-\tau(x,v)v, v, t-\tau(x,v)) + Y(-t+t(x,v))u_0(x-tv,v). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Par transformation de Laplace en t, *on obtient, avec la notation :*

$$\begin{cases} \tilde{h}_\pm(x,v,\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}h_\pm(x,v,t)dt, \\ \mathcal{Q}(v,v,\lambda) = \int_0^{\tau(x,v)} u_0(x-vt,v)e^{-\lambda t}dt,\ \lambda>0, \end{cases} \tag{2.66}$$

$$\tilde{h}_+(x,v,\lambda) = e^{\lambda\tau(x,v)}\tilde{h}_-(x-\tau(x,v)v,v,\lambda) + \mathcal{Q}_+(x,v,\lambda), \tag{2.67}$$

ce qui est l'équation (2.39) ([1]) *en* $\tilde{h}_+$ *pour* $\tilde{h}_-$ *remplacé par* $R\tilde{h}_+$ *; cette équation admet pour chaque* $\lambda>0$, *une solution unique* $\tilde{h}_+(.,\lambda)$ *dans* $D(R)$ *par suite du Théorème 2.2.6, ce qui donne par transformation de Laplace inverse* $h_+(x,v,t)$, *et par* (2.64) *avec* $h_- = Rh_+$, *la solution* $u(x,v,t)$ *du problème de Cauchy avec réflexion :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v\cdot\nabla u = 0 \ \ dans\ X\times V\times]0,+\infty[\\ u|_{\Gamma_-\times]0,+\infty[} = R(u\,|_{\Gamma_+\times]0,+\infty[}) \\ u(0) = u_0 \ \ dans\ X\times V. \end{cases} \tag{2.68}$$

En combinant la relation (2.57) avec la Proposition 2.3.2, on peut donner une formule intégrale de l'équation stationnaire

$$\begin{aligned} u(x,v) = exp(-\int_0^{\tau(x,v)} \Sigma(x-vs,v)ds)g(x-\tau(x,v)v),v) \\ + \int_0^{\tau(x,v)} exp(-\int_0^t \Sigma(x-sv,v)ds)q^{n-1}(x-vt,v)dt. \end{aligned} \tag{2.69}$$

1. Pour $u_0\in L^p(X\times V)$, $\mathcal{Q}_+(\cdot,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)u_0|_{\Gamma_+}\in L^p(\Gamma_+, d\tilde{\xi}_+^p)$

Unicité de la solution

Pour démontrer l'unicité nous nous plaçons dans le cas où $p = 2$
Supposons que $u_0 = 0, q = 0$, et soit $u \in \mathscr{W}_2$ vérifiant (2.59). Appliquons alors à u cette formule

$$\int_0^\tau \left[(u(t), v.\nabla w(t) + \frac{\partial w}{\partial t}(t))_{L^2(X\times V)} + (v.\nabla u(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(t), w)_{L^2(X\times V)}\right] dt =$$
$$= (u(\tau),\, w(\tau))_{L^2(X\times V)} - (u(0),\, w(0))_{L^2(X\times V)} +$$
$$+ \int_0^\tau (\langle u(t)|_{\Gamma_+}, w(t)|_{\Gamma_+}\rangle_{\Gamma_+} - \langle u(t)|_{\Gamma_-}, w(t)|_{\Gamma_-}\rangle_{\Gamma_-})dt,$$

avec $w = u$; on a $\forall t_1 \leqslant \tau$:

$$2\int_0^{t_1} (u(t), Ku(t) - \Sigma u(t))dt = \|u(t_1)\|^2 + \int_0^{t_1} (\|u(t)|_{\Gamma_+}\|^2_{L^2(\Sigma_+)} - \|u(t)|_{\Gamma_-}\|_{L^2(\Gamma_-)})dt$$
$$\geqslant \|u(t_1)\|^2.$$

D'où
$$\|u(t_1)\|^2_{L^2(X\times V)} \leqslant 2\|K\| \int_0^{t_1} \|u(t)\|^2_{L^2(X\times V)} dt.$$
Donc $u = 0$, d'après le lemme de Gronwall (voir chap 1).

2.3.2 Perturbation de l'opérateur d'advection

On peut à présent traiter le problème (2.59) du transport avec conditions aux limites de réflexion avec les données $u_0 \in D(A_R), q \in \mathscr{C}^1(]0,\tau]; L^P(X \times V))$ sous les conditions (2.7), et (2.47).
L'opérateur du transport T_R avec conditions aux limites de réflexion défini par A défini par :

$$\begin{cases} D(T_R) = D(A_R); A_R u = -v.\nabla_x u \\ T_R u = A_R u - \Sigma u, u \in D(A_R), \end{cases} \tag{2.70}$$

étant obtenu par perturbation bornée de l'opérateur d'advection, est encore le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$, qu'on note $(G_{1R}(t))_{t\geq 0}$ (voir chap, XVII, sous-paragraphe 3 [2]).

De plus, si le groupe $(G_R(t))_{t\geq 0}$ est **positif**, alors par la formule de Trotter, le semi-groupe $(G_{1R}(t))_{t\geq 0}$ et aussi positif.
Donc, on peut établir le théorème suivant :

Théorème 2.3.2. *Supposons que les données du problème* (2.59) *vérifient* (2.47), (2.6), (2.7), *et* (2.48), *où*
$$u_0 \in L^p(X \times V).$$

Alors le problème (2.59) *admet une solution unique u dans l'espace* $\mathscr{W}_p$. *On a :*

$$u \in \mathscr{C}\Big(]0,\tau];\, L^p(X \times V)\Big).$$

Si de plus, u_0 *est telle que*

$$v.\nabla u_0 \in L^p(X \times V) \text{ et } u_0|_{\Gamma_-} = Ru_0|_{\Gamma_+}, \text{ donc } u_0 \in D(A_R)$$

et q telle que
$$q \in \mathscr{C}^1\Big([0,\tau]; L^p(X \times V)\Big),$$

alors :

$$u(t) = \int_0^t G_{1R}(t-s)q(s)ds + G_{1R}(t)u_0$$

est une solution forte généralisée de (2.59) *; elle vérifie :*

$$u \in \mathscr{C}^1\Big([0,\tau]; L^p(X \times V)\Big)\ v.\nabla u \in \mathscr{C}\Big([0,\tau]; L^p(X \times V)\Big)\ u(t)|_{\Gamma_-} = Ru(t)|_{\Gamma_+}, \quad \forall t \in [0,\tau],$$

donc $u \in \mathscr{C}\Big([0,\tau]; D(A_R)\Big)$.
Si $q \geqslant 0$*, alors* $u_0 \geqslant 0$ *entraîne* $u \geqslant 0$*.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.2.6 avec A_R défini par :

$$A_R u = -v.\nabla u\, D(A_R) = \{u \in W^p(X \times V); u(t,.)|_{\Gamma_-} = Ru(t,.)|_{\Gamma_+}, \}$$

et de poser

$$u(t) = e^{t(A_R-\Sigma)}u_0 + \int_0^t e^{t(A_R-\Sigma)}(Ku + q(t-s))ds;$$

u est une solution faible de (2.59) et on montre alors que c'est une solution au sens des distribution. □

Finalement on peut donner une **Formulation intégrale de l'équation**.

Proposition 2.3.3. *Avec les hypothèses du Théorème* 2.3.2 *sur les données* Σ, f, u_0, K, q *et* X *la solution* u *du problème* (2.59) *vérifie la relation suivante appelée (***"formulation intégrale de l'equation de transport"** *:*

$$\begin{aligned} u(x,v,t) &= u_0(x-vt,v)exp\left(-\int_0^t \Sigma(x-vs,v)ds\right) Y(\tau(x,v)-t) \\ &+ \int_0^t exp\left(-\int_0^s \Sigma(x-vt,v)d\tau\right) H(x-vs,v,t-s)Y(\tau(x,v)-s)ds \\ &+ Y(t-\tau(x,v))exp\left[-\int_0^{\tau t(x,v)} \Sigma(x-vs,v)ds\right] Rg_+(x-\tau(x,v)v, v, t-\tau(x,v)), \end{aligned} \tag{2.71}$$

où

$$H(x,v,t) \overset{def}{=} \int_V f(x,v',v)u(x,v',t)d\mu(v') + q(x,v,t) \overset{def}{=} (Ku+q)(x,v,t) \tag{2.72}$$

et** Y **est la fonction de Heaviside ($Y(s) = 0$ ***si*** $s < 0$**,**$Y(s) = 1$ ***si*** $s > 0$***).***

Démonstration. L'équation de transport (2.1) peut s'écrire sous forme abstraite

$$\frac{du}{dt} = (A-\Sigma)u + H \tag{2.73}$$

$$u(x,v,t)|_{\Gamma_-} = 0. \tag{2.74}$$

En utilisant le semi-groupe G_Σ engendré par l'opérateur $(A-\Sigma)$, on a donc

$$u(t) = G_\Sigma(t)u_0 + \int_0^t G_\Sigma(t-s)H(s)ds,$$

d'où le résultat en remarquant que

$$G_\Sigma(t)u_0 = u_0(x - vt, v)exp\Big(-\int_0^t \Sigma(x - vs, v)ds\Big)Y(t(x, v) - t)$$

et que

$$\int_0^t G_\Sigma(t - s)g(s)ds = \int_0^t G_\Sigma(s)g(t - s)ds.$$

□

On pourrait démontrer aussi l'existence et l'unicité du problème dans le cas où la condition au limite dans (2.73) est remplacée par une condition inhomogène (de rélexion) :

$$u|_{\Gamma_-} = h = Ru|_{\Gamma_+}, \quad t \geqslant 0,$$

il convient de rajouter au $2^{ième}$ membre de l'expression (2.71) le terme

$$Y(t - \tau(x, v))exp\left[-\int_0^{\tau(x,v)} \Sigma(x - vs, v)ds\right] h(x - v\tau(x, v), v, t - \tau(x, v)).$$

Cette méthode peut s'appliquer aussi bien pour un ouvert borné X que dans tout l'espace. Dans les applications, on utilise très fréquemment l'équation intégrale du transport. En particulier dans la théorie spectrale et pour les méthodes numériques.

2.4 Le problème avec opérateur de bord non contractif

le but de ce sous-paragrphe est de généraliser le problème (2.59) du transport avec conditions aux limites de réflexion où R est non contractif, la condition (2.47) n'est pas satisfaite où Σ peut être négative. Les données $u_0 \in D(A_R), q \in \mathscr{C}^1\Big(\,]0, \tau]\,; L^P(X \times V)\Big)$ sous la condition (2.7). Grâce au théorème de Hille Yosida et formulation abstraite de Kharroubi, on va montrer que L'opérateur du transport T_R avec conditions aux limites de réflexion défini par

$$\begin{cases} D(T_R) = D(A_R); A_R u = -v.\nabla_x u \\ T_R u = A_R u - \Sigma u, u \in D(A_R), \\ u\mid_{\Gamma_-} = Ru\mid_{\Gamma_+},\ R\ \ est\ born\acute{e} \end{cases} \tag{2.75}$$

étant obtenu par perturbation bornée de l'opérateur d'advection et généralisation de R, est encore le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe $\mathscr{C}^0$, qu'on note $(G_{R_g}(t))_{t\geq 0}$.

- Rappelons que

$$t^{\pm}(x, v) = sup\{t > 0; x \pm sv \in X, 0 < s < t\},$$

alors pour $(x, v) \in \Gamma_\pm$, on a $t^\pm(x, v) = 0$, et dans tous les cas $(x \pm t^\pm(x, v), v) \in \Gamma_\pm$.

Soit $1 < p < \infty$, on introduit les espaces fonctionnels

$$W_p = \{u \in X_p : v \cdot \nabla_x u \in X_p,\ \text{où}\ X_p = L^p(X \times V; d\gamma_x d\mu(v))\}.$$

Les espaces de traces sont définis par

$$L^{p,\pm} := L^p\Big(\Gamma_\pm; |v \cdot \nu_x| d\gamma_x d\mu(v)\Big),$$

$$\hat{W}_p = \{u \in W_p : u_\pm \in L^{p,\pm}\} \subset W_p.$$

Soit R un opérateur au bord dans $L(L^{p,+}; L^{p,-})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \lambda u + v.\nabla_x u + \Sigma u = \varphi \\ u \mid_{\Gamma_-} = Ru \mid_{\Gamma_+}, \ R \ \textit{est borné}. \end{cases} \tag{2.76}$$

Soit $\lambda_* = \mu - ess \inf_{X \times V} \sigma(x,v)$. Pour $Re\lambda + \lambda_* > 0$, l'équation (2.76) peut être formellement résolue comme suit

$$\begin{aligned} u(x,v) &= exp(-(\lambda t^-(x,v) + \int_0^{t^-(x,v))} \Sigma(x - vs, v)ds)u(x - t^-(x,v)v), v) \\ &+ \int_0^{t^-(x,v)} exp(-(\lambda + \int_0^{t^-(x,v)} \Sigma(x - sv, v)ds)\varphi(x - vs, v)ds. \end{aligned} \tag{2.77}$$

de plus pour $(x,v) \in \Gamma_+$, (2.77) devient

$$\begin{aligned} u \mid_{\Gamma_+} &= exp(-(\lambda t^-(x,v) + \int_0^{\tau(x,v))} \Sigma(x - vs, v)ds)u \mid_{\Gamma_-} \\ &+ \int_0^{\tau(x,v)} exp(-(\lambda\tau(x,v) + \int_0^{\tau(x,v)} \Sigma(x - sv, v)ds)\varphi(x - vs, v)ds. \end{aligned} \tag{2.78}$$

où $\tau(x,v) = t^-(x,v) + t^+(x,v)$ notons que, puisque $(x,v) \in \Gamma_+, t^+(x,v) = 0)$. Pour donner les formulations abstraites de (2.77) et (2.78), on définit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} M_\lambda &: L^{p,-} \to L^{p,+}, u \mapsto M_\lambda u = ue^{-\lambda\tau(x,v) - \int_0^{\tau(x,v)} \Sigma(x - vs, v)ds} \\ B_\lambda &: L^{p,+} \to X_p, u \mapsto B_\lambda u = ue^{-^-(x,v) - \int_0^{t^-(x,v)} \Sigma(x - vs, v)ds} \\ G_\lambda &: X_p \to L^{p,+}, u \mapsto G_\lambda u = \int_0^{\tau(x,v)} e^{-\lambda s - \int_0^s \Sigma(x - v\tau, v)d\tau} u(x - sv, v)ds, \end{aligned}$$

et

$$C_\lambda : X_p \to X_p, u \mapsto C_\lambda u = \int_0^{t^-(x,v)} e^{-\lambda s - \int_0^s \Sigma(x - vt, v)dt)} u(x - sv, v)ds.$$

Utilisons l'inégalité de Holder pour montrer que ces opérateurs sont bornés ;

$$\begin{aligned} &\|M_\lambda\| \le 1, \text{ pour } \lambda >> 0, \\ &\|B_\lambda\| \le \frac{1}{[p(Re\lambda + \lambda_*)]^{1/p}}, \\ &\|G_\lambda\| \le \frac{1}{[q(Re\lambda + \lambda_*)]^{1/q}}, \\ &\text{et} \\ &\|C_\lambda\| \le \frac{1}{(Re\lambda + \lambda_*)}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

En utilisant ces opérateurs et le fait que u doit satifaire les conditions aux limites, l'équation (2.78) devient :

$$u_+ = M_\lambda R u_+ + G_\lambda \varphi,$$

en posant $R_\lambda = I - M_\lambda R$. Alors si R_λ^{-1} existe, on obtient :

$$u_+ = R_\lambda^{-1} G_\lambda \varphi. \tag{2.79}$$

D'autre part (2.77)

$$u = B_\lambda R u_+ + C_\lambda \varphi. \tag{2.80}$$

Par substitution de (2.79) dans (2.80), il vient

$$u = B_\lambda R R_\lambda^{-1} G_\lambda \varphi + C_\lambda \varphi,$$

et par suite

$$(\lambda - T_R)^{-1} = B_\lambda R R_\lambda^{-1} G_\lambda + C_\lambda, \tag{2.81}$$

par suite

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T_R)^{-1}\| &\leq \|B_\lambda\| \|R\| R_\lambda^{-1}\| \|G_\lambda\| + \|C_\lambda\|, \\ &\leq \|R\| \frac{2}{Re\lambda + \lambda_*} \end{aligned} \tag{2.82}$$

Donc $(G_{R_g}(t))$ est de type $(2\|H\|, -\lambda_*)$. Donnons des conditions suffisantes qui assure l'inversibilté de R_λ.

Proposition 2.4.1. *Soit X un éspace de Banach, si $A \in L(X)$ tel que A compact, ou nilpotent alors $I - A$ est inversible.*

Propriétés de compacité

L'opérateur de transport A_R peut-être écrit sous la forme $A_R := T_R + K$, où K est l'opérateur borné défini sur X_p par

$$\begin{cases} K & : X_p \to X_p \\ & \varphi \mapsto \int_V k(x, v, v') u(x, v') d\mu(v'). \end{cases}$$

où le noyau de collision $k : X \times V \times V \to \mathbb{R}$ est supposé être mesurable. On note que l'opérateur K est local en x donc il peut être vu comme une application :

$$K(\cdot) : x \in X \mapsto K(x) \in L(L^p(V; d\mu(v))),$$

Supposons que $K(\cdot)$ est strictement mesurable, c'est-à-dire :

$$x \mapsto K(x) f \in L^p(V; d\mu(v)) \text{ est mesurable pour tout } f \in L^p(V; d\mu),$$

et borné, dans le sens

$$ess - \sup_{x \in X} \|K(x)\|_{L(L^p(V; d\mu(v)))} < +\infty.$$

Donc K définit un opérateur borné sur X_p suivant la règle

$$\varphi \in X_p \mapsto K(x)\varphi(x) \in X_p.$$

Alors

$$\|K(x)\|_{L(X_p)} \leq ess - \sup_{x \in X} \|K(x)\|_{L\left(L^p(V; d\mu(v))\right)}.$$

Dans le reste de cette section, on va utiliser le concept des opérateurs de collisions réguliers introduits par M. Mokhtar-Kharroubi [[16],[17]].

Définition 2.4.1. *Soit $\mathcal{K}\Big(L^p(V;d\mu(v))\Big)$ le sous-espace des opérateurs compacts. Un opérateur de collision*

$$K : x \in X \mapsto K(x) \in L\Big(L^p(V;d\mu(v),$$

est régulier si $K(x) \in \mathcal{K}\Big(L^p(V;d\mu(v)))$ pour presque tout $x, x \mapsto K(x) \in \mathcal{K}\Big(L^p(V;d\mu(v))\Big)$ est mesurable et $\{K(x); x \in X\}$ est relativement compact dans $L\Big(L^p(V;d\mu(v))\Big)$.

Désignons par $\mathcal{R}(X_p)$ l'ensemble des opérateurs de collisions réguliers dans X_p. Cette classe d'opérateurs possèede la propriété d'approximation suivante :

Lemme 2.4.1. *Un opérateur de collision K peut etre approché en topologie uniforme, par une suite (K_n) d'opérateurs de collision ayant des noyaux de la forme*

$$\sum_{i\in I} \sigma_i(x) f_i(v) g_i(v'); \text{ où} \sigma_i \in L^1(X;dx), f_i \in L^p(V;d\mu(v)) et g_i \in L^q(V;d\mu(v')),$$

avec ,$q = \frac{p}{p-1}$ et $|I| < \infty$.

Voir pour plus de détails ([17], [16] chapitre 4).

Désignons par $\mathbb{S}_{n-1}$ la sphère unitée de $\mathbb{R}^n$ et supposons maintenant que la mesure μ satisfait l'hypothèse suivante :

$$H_1 : \forall c \in \mathbb{S}_{n-1}; \mu\{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot c = 0\} = 0 \text{ (la mesure } \mu \text{ des hyperplans est nulle).}$$

En tenant compte de cette hypothèse, on peut établir le théorème qui nous permet d'assurer l'existence de la solution.

Théorème 2.4.1. *Soit $1 < p < +\infty$ et soit X un ensemble borné convexe de $\mathbb{R}^{\ltimes}$ et suppososns que l'hypothèse H_1 est satisfaite. Si R_λ^{-1} existe et $K \in \mathcal{R}(X_p)$, alors, pour tout nombre complexe λ qui satisfait $Re\lambda > \lambda_*$, les opérateurs $K(\lambda - T_R)^{-1}$ et $(\lambda - T_R)^{-1}K$ sont compact sur X_p.*

Voir pour plus de détails ([16], Chapitre 4).

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION PAR DIFFÉRENCES FINIES

3.1 Introduction générale

Hormis des cas particuliers, il est impossible de calculer explicitement les solutions de plus part des équations aux dérivées partielles. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions. Le principe de toutes les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles est d'obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est-à-dire en nombre fini) qui "**approchent** " (en un sens convenable à préciser) la solution exacte.
Donnons un bref rappel sur le principe des méthode numériques générales et les critères de leur convergence. Considérons le problème suivant : trouver x tel que

$$F(x, d) = 0, \tag{3.1}$$

où d est l'ensemble des données dont dépend la solution et F est une relation fonctionnelle entre x et d.
L'objet d'une méthode numérique est d'approcher la solution (exacte) de (3.1) en consistant, en général, en une suite de problèmes approchés

$$F_n(x_n, d_n) = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.2}$$

dépendant d'un certain paramètre n (à définir au cas par cas). l'attente naturelle est que $x_n \to x$ quand $n \to \infty$, i.e. que la solution numérique converge vers la solution exacte. Pour cela, il est nécessaire que $d_n \to d$ et que $F_n \imath approche \jmath F$, quand $n \to \infty$.
Le problème (3.1) est **bien posé** si la solution x existe, est unique. Il est **stable** s'il est bien posé et la solution dépend continûment des données.
Nous utiliserons indifféremment les termes bien posé et stable et nous ne considérerons dans la suite que des problèmes bien posés. Un problème qui ne possède pas la propriété ci-dessus est dit **mal posé** ou **instable**. Il faut alors le régulariser, c'est-à-dire le transformer convenablement en un problème bien posé stable.
La dépendance continue par rapport aux données signifie que de petites perturbations sur les données d induisent de "petites" modifications de la solution x. Plus précisément, soient δd une perturbation admissible des données et δx la modification induite sur la solution telles que

$$F(x + \delta x, d + \delta d) = 0. \tag{3.3}$$

On veut alors que

$$\exists \eta_0 = \eta_0(d) > 0, \exists K_0 = K_0(d) \quad \text{tels que} \quad si\|\delta d\| \leq \|\eta_0\| \quad \text{alors} \quad \|\delta x\| \leq K_0\|\delta d\|. \tag{3.4}$$

Les normes utilisées pour les données et pour la solution peuvent ne pas être les mêmes (en particulier quand d et x représentent des variables de nature différente).

Remarque 3.1.1. *c'est-à-dire, la propriété selon laquelle de petites perturbations sur les données entrainent des perturbations du même ordre sur la solution.*

3.1.1 Stabilité et convergence des méthodes numériques

Nous supposerons désormais que le problème (3.1) est bien posé. Une méthode numérique pour approcher la solution de (3.1) consistera, en général, en une suite de problèmes approchés de la forme (3.2) dépendant d'un certain paramètre n (à définir au cas par cas). Naturellement on attend que $x_n \to x$ quand $\to \infty$, i.e. **que la solution numérique converge vers la solution exacte**. Pour cela, il est nécessaire que $d_n \to d$ et que F_n "approche" F, quand $n \to \infty$. Plus précisément, si la donnée d du problème (3.1) est admissible pour F_n, nous dirons que la méthode numérique (3.2) est **consistante** si

$$F_n(x, d) = F_n(x, d) - F(x, d) \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty \tag{3.5}$$

où x est la solution du problème (3.1) correspondant à la donnée d.
Une méthode est dite **fortement consistante** si $F_n(x, d) = 0$ pour toute valeur de n (et pas seulement pour $n \to \infty$).

Dans certains cas, (p. ex. dans les méthodes itératives), la méthode numérique s'écrit sous la forme suivante (plutôt que sous la forme (3.2)) :

$$F_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-q}, d_n) = 0 \quad , n \geq q, \tag{3.6}$$

où les $x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}$ sont donnés. Dans ce cas, la propriété de consistance forte devient $F_n(x, x, \ldots, x, d) = 0$ pour tout $n \geq q$.

Au regard de ce que nous avons déjà énoncé au sujet du problème (3.1), nous dirons qu'une méthode numérique est bien **stable** s'il existe, pour tout n, une unique solution x_n correspondant à la donnée d_n et si x_n dépend continûment des données.
Plus précisément, soit d_n un élément quelconque de D_n, où D_n est l'ensemble des données admissibles pour (3.2). Soit δd_n une perturbation admissible, dans le sens que $d_n + \delta d_n \in D_n$, et soit δx_n la perturbation correspondante de la solution, c'est-à-dire

$$F_n(x_n + \delta x_n, d_n + \delta d_n) = 0.$$

On veut alors que

$$\exists \eta_0 = \eta_0(dn) > 0, \exists K_0 = K_0(dn) \quad \text{tels que si} \quad \|\delta d_n\| \leq \eta_0 \quad \text{alors} \quad \|\delta x_n\| \leq K_0 \|\delta d_n\|. \tag{3.7}$$

Le but essentiel de l'approximation numérique est de construire, au moyen de problèmes du type (3.2), des solutions x_n qui **"se rapproche"** de la solution du problème (3.1) quand n devient grand.

Définition 3.1.1. *La méthode numérique* (3.2) *est dite* **convergente** *ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon), \exists \delta = \delta(n_0, \epsilon) > 0 / \forall n > n_0, \forall \delta d_n : \|\delta d_n\| \leq \delta \Rightarrow \|x(d) - x_n(d + \delta d_n)\| \leq \epsilon, \tag{3.8}$$

où d est une donnée admissible du problème (3.1), *$x(d)$ est la solution correspondante et $x_n(d + \delta d_n)$ est la solution du problème numérique* (3.2) *avec la donnée $d + \delta d_n$.*

Pour vérifier (3.8), il suffit d'établir que, sous les mêmes hypothèses,

$$\|x(d+\delta d_n) - x_n(d+\delta d_n)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.9}$$

En effet, grâce à (3.4), on a alors

$$\|x(d) - x_n(d+\delta d_n)\| \leq \|x(d) - x(d+\delta d_n)\| + \|x(d+\delta d_n) - x_n(d+\delta d_n)\| \leq K_0\|\delta d_n\| + \frac{\epsilon}{2}.$$

En choisissant $\delta = \min\{\eta_0, \epsilon/(2K_0)\}$, on obtient (3.8).
Des **mesures** de la convergence de x_n vers x sont données par l'erreur absolue et l'erreur relative, définies respectivement par

$$E_a(x_n) = |x - x_n|, \quad E_r(x_n) = \frac{|x - x_n|}{|x|} \quad \text{si } x \neq 0. \tag{3.10}$$

Relations entre stabilité et convergence

Les concepts de stabilité et de convergence sont fortement liés.
Si le problème (3.1) est bien posé, la stabilité est une condition nécessaire pour que le problème numérique (3.2) soit convergeant. Supposons que la méthode soit convergente, c'est-à-dire, que (3.8) soit vérifiée pour $\epsilon > 0$ arbitraire. On a

$$\begin{aligned}
\|\delta x_n\| &= \|x_n(d+\delta d_n) - x_n(d)\| \\
&\leq \|x_n(d) - x(d)\| + \|x(d) - x(d+\delta d_n)\| + \|x(d+\delta d_n) - x_n(d+\delta d_n)\| \\
&\leq K(\delta(n_0,\epsilon), d)\|\delta d_n\| + \epsilon,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où on a utilisé (3.4) et (3.9) deux fois. Choisissant maintenant δd_n tel que $\delta d_n \leq \eta_0$, on en déduit que $\|\delta x_n\|/\|\delta d_n\|$ peut être majoré par $K_0 = K(\delta(n_0,\epsilon), d) + 1$, à condition que $\epsilon \leq \|\delta d_n\|$. La méthode est donc stable.

Remarque 3.1.2. *La stabilité d'une méthode numérique devient une condition suffisante pour que le problème numérique* (3.2) *converge si ce dernier est également consistant avec le problème* (3.1).

En effet, sous ces hypothèses, on a

$$\|x(d+\delta d_n) - x_n(d+\delta d_n)\| \leq x(d+\delta d_n) - x(d) + \|x(d) - x_n(d)\| + \|x_n(d) - x_n(d+\delta d_n)\|.$$

Grâce à (3.4), le premier terme du second membre peut être borné par $\|\delta d_n\|$ (à une constante multiplicative près, indépendante de δd_n). On peut trouver une majoration analogue pour le troisième terme, grâce à la propriété de stabilité (3.7). Enfin, en ce qui concerne le terme restant, si F_n est différentiable par rapport à x, un développement de Taylor permet d'obtenir

$$F_n(x(d), d) - F_n(x_n(d), d) = \frac{\partial F_n}{\partial x}|_{(\overline{x},d)} \cdot (x(d) - x_n(d)),$$

pour un certain $\overline{x}$ compris entre $x(d)$ et $x_n(d)$. En supposant aussi que $\frac{\partial F_n}{\partial x}$ est inversible, on obtient

$$x(d) - x_n(d) = (\frac{\partial F_n}{\partial x})^{-1}|_{(\overline{x},d)}[F_n(x(d), d) - F_n(x_n(d), d)]. \tag{3.12}$$

D'autre part, en remplaçant $F_n(x_n(d), d)$ par $F(x(d), d)$ (tous les deux étant nuls) et en prenant les normes des deux membres, on trouve

$$\|x(d) - x_n(d)\| \leq \|(\frac{\partial F_n}{\partial x})^{-1}|_{(\overline{x},d)}\| \|F_n(x(d), d) - F_n(x_n(d), d)\|.$$

On peut donc conclure, grâce à (3.5), que $x(d) - x_n(d) \to 0$ quand $n \to \infty$. Ce résultat, est un résultat fondamental de l'analyse numérique, connu sous le nom de théorème d'équivalence (théorème de Lax-Richtmyer) : " **pour une méthode numérique consistante, la stabilité est équivalente à la convergence**".

Nous présentons ici une telle méthode, dite **des différences finies**, elle consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continue par des différence divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de fonction en un nombre finie de point discrets appelles **noeuds**.

3.2 Principe de la méthode de différence finies

Nous rappelons les notations et résultats essentiels de la méthode des différences finies ; on a :

Maillage

La recherche d'une solution discrète de la solution u amène à constituer une maillage de l'intervalle de définition. On considère une maillage composante de $N + 1$ points x_i pour $i = 0 \ldots N$ régulière par rapport à la variable d'espace de position x avec un pas Δx. Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés **les oeuds** de maillage. Dans le cas instationnaire on notera u_i^j la valeur discrète de $u(x, t)$ au noeud x_i et au temps $j\Delta t$,

Développements de Taylor

Soit $f(x)$ une fonction dont les dérivées jusqu'à l'ordre $(n + 1)$ existent au voisinage du point x_0, on a l'égalité suivante :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Où $P_n(x)$ est le polynôme de Taylor de degré n de la fonction $f(x)$ autour de x_0 définie par :
$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.
Avec $R_n(x)$ est un terme résiduel, désignant la différence entre le polynôme de Taylor de degré n et la fonction d'origine .

Notations indicilles

On note :

$$u(x, t)|_{x=x_i, t=t_j} = u(x_i, t_j) = u_i^j \tag{3.13}$$

$$f(x, t)|_{x=x_i, t=t_j} = f(x_i, t_j) = f_i^j. \tag{3.14}$$

1. Le développement de Taylor de la fonction $u(x, t)$ au voisinage du point $x_0 = x - \Delta x$ est donné par

$$u(x_0, t) = u(x - h, t) = u(x, t) - \frac{\Delta x}{1!}u'(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u''(x, t) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}u^{(3)}(x, t) + \ldots.$$

À la place de chaque x on met x_i et à la place du temps t on met t_j, on obtient :

$$u(x_i - \Delta x, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\Delta x}{1!}u'(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^{(2)}}{2!}u''(x_i, t_j) - \frac{(\Delta x)^{(3)}}{3!}u^{(3)}(x_i, t_j) + \ldots \tag{3.15}$$

Dans la relation (3.15) on met $-\Delta x$ à la place de Δx, on a alors :

$$u(x_i + \Delta x, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\Delta x}{1!} u'(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^{(2)}}{2!} u''(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^{(3)}}{3!} (x_i, t_j) + \dots \quad (3.16)$$

Et on a :

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

Alors :

$$x_i - \Delta x = x_0 + i\Delta x - \Delta x = x_0 + (i-1)\Delta x,$$

et donc :

$$x_{i-1} = x_i - \Delta x. \quad (3.17)$$

De plus on a :

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

Et donc :

$$x_i + \Delta x = x_0 + i\Delta x + \Delta x = x_0 + (i+1)\Delta x$$

et par la suite on obtient

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x. \quad (3.18)$$

On remplace (3.17) dans (3.15) et (3.18) dans (3.16) on obtient :

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\Delta x}{1!} u'(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^{(2)}}{2!} u''(x_i, t_j) - \frac{(\Delta x)^{(3)}}{3!} u^{(3)}(x_i, t_j) + \dots \quad (3.19)$$

et

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\Delta x}{1!} u'(x_i, t_j) - \frac{(\Delta x)^{(2)}}{2!} u''(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^{(3)}}{3!} u^{(3)}(x_i, t_j) + \dots \quad (3.20)$$

En remplace (3.17) dans (3.19) et (3.20) on obtient :

$$u^j_{i-1} = u^j_i - \frac{\Delta x}{1!} (u)'^j_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} (u)''^j_i + \dots \quad (3.21)$$

Pour approximer $(u')^j_i$ en utilisant (3.21).

- on obtient :

$$(u')^j_i = \frac{u^j_i - u^j_{i-1}}{\Delta x}, \quad (3.22)$$

et

$$u^j_{i+1} = u^j_i + \frac{\Delta x}{1!} u'^j_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''^j_i + \dots \quad (3.23)$$

Pour approximer $(u')^j_i$ en utilisant (3.23) on obtient :

$$(u')^j_i = \frac{u^j_{i+1} - u^j_i}{\Delta x}. \quad (3.24)$$

- D'après (3.23) - (3.21) on obtient :

$$u^j_{i+1} - u^j_{i-1} = 2\Delta x u'^j_i$$

$$u'^j_i = \frac{u^j_{i+1} - u^j_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.25)$$

2. Le développement de Taylor de la fonction $u(x,t)$ au voisinage du point $t_0 = t \pm \Delta t$.

$$u(x, t \pm \Delta t) = u(x,t) \pm \frac{\Delta t}{1!} u'(x,t)_i^j + \frac{(\Delta t)^2}{2!} u''(x,t)_i^j + \dots . \tag{3.26}$$

Alors on peut écrire :

$$u(x_i, t_j \pm \Delta t) = u(x_i, t_j) \pm \frac{\Delta t}{1!} u(x_i, t_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} u''(x_i, t_j) + \dots . \tag{3.27}$$

D'après (3.27) on a :

$$u_i^{j-1} = u_i^j - \frac{\Delta t}{1!} (u')_i^j + \frac{(\Delta t)^2}{2!} (u'')_i^j + \dots \tag{3.28}$$

Pour approximer $(u)'^j_i$ en utilisant (3.28)
on obtient :

$$(u')_i^j = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} \tag{3.29}$$

Et

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta t}{1!} (u')_i^j + \frac{(\Delta t)^2}{2!} (u'')_i^j + \dots \tag{3.30}$$

Pour approximer $(u)'^j_i$ en utilisant (3.30), on obtient :

$$(u')_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \tag{3.31}$$

3.2.1 Consistance, stabilité et convergence

Dans le but de formaliser l'approximation d'une équation aux dérivées partielles par des différences finies, on introduit la notion de consistance, précision, stabilité, convergence d'un schéma. Nous allons donner une définition de chaque concept valable pour n'importe quelle équation aux dérivées partielles que nous notons $E(u) = 0$. Remarquons que $E(u)$ est une notation pour une fonction de u et de ses dérivées partielles en tout point (t, x). De manière générale un schéma aux différences finies est caractérisé, pour tous les indices possibles n, j, par la formule

$$E_{\Delta t, \Delta x}(\{u_{j+k}^{n+m}\}_{m^- \le m \le m^+, k^- \le k \le k^+}) = 0 \tag{3.32}$$

où les entiers m^-, m^+, k^-, k^+ définissent la largeur du stencil du schéma.

•Consistance

Définition 3.2.1. *Le schéma aux différence finies* (3.32) *est dit consistant avec l'équation aux dérivées partielles* $E(u) = 0$*, si l'erreur de troncature du schéma [***erreur de consistance***], définie pour toute fonction régulière* $u(t,x)$ *par*

$$E_{\Delta t, \Delta x}(\{u(t + m\Delta t, x + k\Delta x)\}_{m^- \le m \le m^+, k^- \le k \le k^+})$$

tend vers zéro lorsque Δt *et* Δx *tendent vers zéro indépendemment, si et seulement si* $u(t,x)$ *est une solution de cette équation. De plus, on dit que le schéma est précis à l'ordre* p *en espace et à l'ordre* q *en temps si l'erreur de troncature (définie ci-dessus) tend vers zéro comme* $\mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$ *lorsque* Δt *et* Δx *tendent vers zéro.*

• **Stabilité**
Nous introduisons deux normes classiques pour la solution numérique $u^n = (u_j^n)_{1\leq j\leq N}$:

$$\|u^n\|_2 = (\sum_{j=1}^{N} \Delta x \mid u_j^n \mid^2)^{1/2} \ et \ \|u^n\|_\infty = max_{1\leq j\leq N} \mid u_j^n \mid .$$

Définition 3.2.2. *Un schéma aux différences finies est dit* ***stable*** *pour la norme $\|\|_p, p = 2, \infty$, s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δt et Δx (lorsque ces pas tendent vers zéro) telle que*

$$\|u^n\| \leq K\|u^0\|_p \ \ pour\ tout\ n \geq 0, \tag{3.33}$$

quelle que soit *la donnée initiale u^0. Si cette inégalité n'a lieu que pour des pas Δt et Δx astreints à certaines conditions, on dit que le schéma est* ***conditionnellement stable****. La stabilité en norme L^∞ est très liée avec le principe du maximum discret.*

Définition 3.2.3. *On dit qu'un schéma aux différences finies vérifie le* ***principe du maximum discret*** *si pour tout $n \geq 0$ et tout $1 \leq j \leq N$ on a*

$$\min\Big(0, \min_{0\leq j\leq N+1} u_j^0\Big) \leq u_j^n \leq \max(0, \max_{0\leq j\leq N+1} u_j^0\Big) \tag{3.34}$$

quelle que soit la donnée initiale u^0.

Dans la Définition 3.2.3 les inégalités tiennent compte non seulement du minimum et du maximum de u^0 mais aussi de zéro qui est la valeur imposée au bord par les conditions aux limites de Dirichlet. Cela est nécessaire si la donnée initiale u^0 ne vérifie pas les conditions aux limites de Dirichlet (ce qui n'est pas exigé), et inutile dans le cas contraire.

Remarque 3.2.1. *On peut vérifier que le principe du maximum discret conduit bien à la stabilité en norme L^∞.*

Il existe des nombreux schémas ne vérifient pas le principe du maximum discret mais sont de "bons" schémas. Pour ceux-là, il faut vérifier la stabilité dans une autre norme que la norme L^∞. La norme L^2 s'apparaît très bien à l'étude de la stabilité pour deux raisons différentes. D'une part, lorsque les conditions aux limites sont de type périodiques, on peut utiliser l'outil très puissant des **séries de Fourier** (voir [2] pour plus de détails). D'autre part, quel que soit le type des conditions aux limites, on peut utiliser la notion **d'inégalité d'énergie** (ou estimation a priori) que nous décrirons un peu plus loin. Cette dernière méthode sera utilisée de manière systématique par la suite.

Nous allons donner la forme d'une "condition" connue sous le nom de condition nécessaire de stabilité de **Von Neumann**. L'idée de Von Neumann est de tester si des solutions discrètes particulières d'un schéma sont stables ou non. Ces solutions particulières sont choisies sous la forme d'un mode de Fourier (periodique), pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$u_j^n = A(k)^n exp(2i\pi k x_j) \text{avec} x_j = j\Delta x. \tag{3.35}$$

On injecte la formule (3.35) dans le schéma considéré et on en déduit la valeur du facteur d'amplification $A(k) \in \mathbb{C}$. Différentes valeurs du nombre d'onde k correspondent à différentes données initiales u^0. Une fois calculée $A(k)$, la solution particulière (3.35) est stable si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\mid A(k) \mid \leq 1 \text{pour tout mode} k \in \mathbb{Z} \tag{3.36}$$

Il existe une autre définition de la stabilité, moins restrictive mais plus complexe. Dans cette définition le schéma est dit stable pour la norme $\|\|_p$ si pour tout temps $T > 0$ il existe une constante $K(T) > 0$ indépendante de Δt et Δx telle que

$$\|u^n\|_p \leq K(T)\|u^0\|_p \text{pour tout } 0 \leq n \leq T/\delta t$$

quelle que soit la donnée initiale u^0. Cette nouvelle définition permet à la solution de croître avec le temps puisque la constante $K(T)$ dépend du temps final T. Avec une telle définition de la stabilité, la condition nécessaire de Von Neumann devient l'inégalité

$$\mid A(k) \mid \leq 1 + C\Delta t \text{ pour tout mode} k \in \mathbb{Z}.$$

Par souci de simplicité nous préférons nous en tenir à la Définition 3.2.3 de la stabilité.

•Convergence

Maintenant, nous pouvons démontrer la convergence des schémas de différences finies.

Le Théorème de Lax, ci-dessous, affirme que, tout schéma linéaire, consistant et stable elle converge. Rappelons que l'on dit qu'un schéma aux différences finies est linéaire si la formule $F_{\Delta t,\Delta x}(\{u_{j+k}^{n+m}\}) = 0$ qui le définit est linéaire par rapport à ses arguments u_{j+k}^{n+m}, et qu'il est à deux niveaux.

Théorème 3.2.1. ***(Lax)*** *Soit $u(t,x)$ la solution régulière de l'équation. Soit u_j^n la solution numérique discrète obtenue par un schéma de différences finies avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$. On suppose que le schéma est linéaire, à deux niveaux, consistant et stable pour une norme $\|\|$. Alors le schéma est convergent au sens où*

$$\forall T > 0, \lim_{\Delta t, \Delta x \longrightarrow 0} (\sup_{t_n \leq T} \|e^n\|) = 0, \tag{3.37}$$

avec e^n le vecteur "erreur" défini par ses composantes $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$. De plus, si le schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps, alors pour tout temps $T > 0$ il existe une constante $C_T > 0$ telle que

$$\sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \leq C_T((\Delta x)^p + (\Delta t)^q). \tag{3.38}$$

Démonstration. il suffit de démontrer l'inégalité (3.38). Un schéma linéaire à deux niveaux peut s'écrire sous la forme

$$u^{n+1} = Au^n; \tag{3.39}$$

où A est la matrice d'itération (carrée de taille N). On note $\tilde{u}^n = (\tilde{u}_j^n)_{1\leq j\leq N}$ avec $\tilde{u}_j^n = u(t_n; x_j)$ où u est la solution de l'équation considérée. Comme le schéma est consistant, il existe un vecteur ε_n tel que

$\tilde{u}^{n+1} = A\tilde{u}^n + \Delta t\varepsilon_n$ avec

$$lim_{(\Delta t;\Delta)\to 0} \sup_{0\leq t_n\leq T} \|\varepsilon_n\| = 0 \tag{3.40}$$

Si le schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps, alors $\|\varepsilon_n\| \leq C\Big((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\Big)$. En posant $e_j^n = u_j^n - u(t_n; x_j)$ on obtient par soustraction de (3.40) à (3.39)

$$e^{n+1} = Ae^n - \Delta t\varepsilon_n,$$

d'où par récurrence

$$e^n = A^n e^0 - \Delta t \sum_{k=1}^{n} A^{n-k}\varepsilon_{k-1} \tag{3.41}$$

Or, la stabilité du schéma veut dire que $\|u^n\| = \|A^n u^0\| \leq K\|u^0\|$ pour toute donnée initiale, c'est-à-dire que $\|A^n\| \leq K$ où la constante K ne dépend pas de n. D'autre part, $e^0 = 0$, donc (3.41) donne

$$\|e^n\| \leq \Delta t \sum_{k=1}^{n} \|A^{n-k}\|\|\varepsilon_{k-1}\| \leq \Delta tnKC\Big((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\Big);$$

ce qui prouve l'inégalité (3.38) avec la constante $C_T = TKC$. □

Remarque 3.2.2. *Remarquer que la vitesse de convergence dans* (3.38) *est exactement la précision du schéma.*

Dans notre approximation nous choisissons le **schéma diamant** (ou en croix), dû à Carlson [diff], qui est un schéma centré ayant l'avantage d'être précis à l'ordre 2 et inconditionnellement stable, et qui se prête bien pour l'équation de Boltzmann linéaire. Pour cette dernière équation le schéma diamant est "le" schéma de référence, **extrêmement populaire dans les applications industrielles**. Ce schéma est un peu plus compliqué que les autres schémas de différences finies car il utilise les inconnues intermédiaires $u_{j+1/2}^{n+1/2}$.

La maillage en espace est toujours défini par les points $x_{j+1/2}$ définis par

$$x_{j+1/2} = -\ell + j\Delta x \; pour j \in \{0, 1, \dots, N\} \; et \; \Delta x = \frac{2\ell}{N}.$$

Celle en (espace-temps) est donnée par

$$(t_n; x_j) = (n\Delta t; -\ell + j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0; j \in \{0, 1, \dots, N\}, \Delta t > 0,$$

et u_j^n et on choisit une des discrétisation symétriques en vitesse, (μ_k) où l'indice k varie dans $\{-K, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, K\}$ mais ne prend pas la valeur 0 afin qu'aucun vitesse μ_k ne soit nulle. Pour traiter les conditions aux limites et le terme de collision on utilise la méthode d'intégration numérique dite S_N, dans notre cas dimensionnel, elle est identique avec celle de Gauss-Legendre.

Nous décrivons la **méthode S_N ou des ordonnées discrètes**. La maillage en espace est toujours défini par les points $x_{j+1/2}$ définis par

$$x_{j+1/2} = -\ell + j\Delta x \; pour j \in \{0, 1, \dots, N\} \; et \; \Delta x = \frac{2\ell}{N}$$

et on choisit une des discrétisation symétriques en vitesse, (μ_k) qui sont les racines réelles distinctes de polynôme de Légendre P_{2K} où l'indice k varie dans
$\{-K, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, K\}$ mais ne prend pas la valeur 0 afin qu'aucun vitesse μ_k ne soit nulle. On prend les poids

$$w_k = \int_{-1}^{+1} \Big(l_k(\mu)\Big)^2 d\mu; \; l_k(\mu) = \prod_{i=-K, i\neq 0, i\neq k}^{K} \frac{\mu - \mu_i}{\mu_k - \mu_i} \tag{3.42}$$

où $l_k(\mu)$ est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange. Il vaut 1 pour $\mu = \mu_k$ et 0 pour toutes autres valeurs $\mu = \mu_j$; $j \neq k$.

Les w_k sont aussi symétriques et positives et la formule de quadratique est

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu \approx \sum_{k=-K, k\neq 0}^{K} w_k f(\mu_k).$$

Lemme 3.2.1. *La formule de quadrature de Gauss, basée sur les vitesses discrètes (μ_k) égales aux racines du polynôme de Legendre P_{2K} et sur les poids (w_k) définis par* (3.42)*, est exacte pour tous les polynômes d'ordre inférieur où égal à $4K - 1$. On dit qu'elle est d'ordre $4K - 1$.*

Pour la démonstration voir [10].

Le schéma le plus répandu est le schéma diamant qui utilise les points milieux définis par

$$x_j = -\ell + (j - 1/2)\Delta x \text{ pour } j \in \{1, \cdots N\},$$

Pour tout indice de vitesse k on notera u_j^k une approximation de $u(x_j;\mu_k)$; $j\in\mathbb{N}^*$, et $u_{j+1/2}^k$ une approximation de $u(x_j+1/2;\mu_k)$, pour $j\in\{0,1,\cdots\}$ et tous les indices k, le schéma diamant est donné par
Dans le cas stationnaire

$$\begin{cases}\mu\frac{u_{j+1/2}^k-u_{j-1/2}^k}{\Delta x}+\sigma_j u_j^k=Q_j^k\\ 2u_j^k=u_{j+1/2}^k+u_{j-1/2}^k, j\geq 1\end{cases}$$

Dans le cas instationnaire

$$\begin{cases}\frac{u_j^{n+1,k}-u_j^{n,k}}{\Delta t}+\mu\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2,k}-u_{j-1/2}^{n+1/2,k}}{\Delta x}+\sigma_j u_j^{n+\frac{1}{2}}=Q_j^{n+\frac{1}{2}},\\ u_j^{n+1,k}+u_j^{n,k}=u_{j+1/2}^{n+1/2,k}+u_{j-1/2}^{n+1/2,k}\\ 2u_j^{n+\frac{1}{2},k}=u_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2},k}+u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k}, j\geq 1\end{cases}$$

Notons que ce schéma nous conduit à résoudre deux type de systèmes linéaires :
Direct : Soit F un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $A\in\mathcal{M}_n$ on cherche $U\in\mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$AU=F,$$

ce type demande l'inversibilité de A.
Itératif : Soit F un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $A\in\mathcal{M}_n$ on cherche $U\in\mathbb{R}^n$: qui vérifie

$$U^{(k+1)}=AU^{(k)}+F, \forall k\geq 0,$$

ce type nécessite que la matrice ait un rayon spectral $\rho(A)$ strictement inférieur à un.

3.3 Équation de Boltzmann sans collision

Nous considérons désormais l'équation de transport (de Boltzmann sans collision) en une dimension un d'espace dans le domaine borné $(-\ell,+\ell)$ avec une vitesse constante $\mu\in(-1,+1)$ et une condition aux limites “d'entrée” de type de réflexion

3.3.1 Le cas stationnaire

Soit l'équation stationnaire suivante

$$\begin{cases}\mu\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu)+\sigma(x)u(x,\mu)=q(x,\mu);\ (x,\mu)\in(-\ell,+\ell)\times(-1,+1)\\ u(\Gamma_-,\mu)=Ru\mid_{\Gamma_+}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+}u\mid_{\Gamma_+}\end{cases}\tag{3.43}$$

On suppose que

$$0<\sigma_0\leq\sigma(x)\ pour\ x\in(-\ell,+\ell).\tag{3.44}$$

Dans ce cadre **le schéma diamant** est donnée, pour $1\leq j\leq N$, par

$$\begin{cases}\mu_k\frac{u_{j+1/2}^k-u_{j-1/2}^k}{\Delta x}+\sigma_j u_j^k=q_j^k\\ u_j^k=\frac{u_{j+1/2}^k+u_{j-1/2}^k}{2}\\ u(\Gamma_-,\mu)=Ru\mid_{\Gamma_+}=\frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^k w_k u\mid_{\Gamma_+}(\mu_k)\end{cases}\tag{3.45}$$

où la deuxième ligne est la relation diamant

$$u_j^k = \frac{u_{j+1/2}^k + u_{j-1/2}^k}{2} \tag{3.46}$$

ce qui implique d'après les condition aux limites :
Pour $\mu := \mu_k > 0$,

$$\begin{cases} q^k(-\ell) = Rq^k(+\ell), \\ \frac{u_{1/2}^k + u_{-1/2}^k}{2} = u_0^k = Ru_N^k, \\ u_{1/2}^k - u_{-1/2}^k = \frac{\Delta x}{\mu}[-\sigma(-\ell)Ru_N + q^k(-\ell)], \\ \frac{u_{N+1/2}^k + u_{N-1/2}^k}{2} = u_N, \\ u_{N+1/2}^k - u_{N-1/2}^k = \frac{\Delta x}{\mu}[-\sigma(+\ell)u_N + q^k(+\ell)], \end{cases} \tag{3.47}$$

et pour $\mu := \mu_k < 0$

$$\begin{cases} q^k(+\ell) = Rq^k(-\ell), \\ \frac{u_{1/2}^k + u_{-1/2}^k}{2} = u_0, \\ u_{1/2}^k - u_{-1/2}^k = \frac{\Delta x}{\mu}[-\sigma(-\ell)Ru_0 + q^k(-\ell)], \\ \frac{u_{N+1/2}^k + u_{N-1/2}^k}{2} = u_N = Ru_0, \\ u_{N+1/2}^k - u_{N-1/2}^k = \frac{\Delta x}{\mu}[-\sigma(+\ell)u_N + q^k(+\ell)], \end{cases} \tag{3.48}$$

La solution est donnée par la relation

$$[1 + \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x}]u_{j+1/2} + [1 - \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x}]u_{j-1/2} = \frac{2q_j}{\sigma_j}. \tag{3.49}$$

En déduisant les relations de récurrence :
Pour $\mu > 0$, on pose

$$u_{j+1/2} = \frac{-[1 - \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x}]}{[1 + \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x}]} u_{j-1/2} + \frac{2q_j}{\sigma_j(1 + \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x})}; \; j \geq 1, \tag{3.50}$$

et pour $\mu < 0$, on pose

$$u_{j-1/2} = \frac{-[1 + \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x}]}{[1 - \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x}]} u_{j+1/2} + \frac{2q_j}{\sigma_j(1 - \frac{2\mu}{\sigma_j \Delta x})}; j \leq N. \tag{3.51}$$

Il est possible de résoudre simultanément toutes les équations du schéma (3.45)-(3.46) en résolvant un grand système linéaire pour le vecteur inconnu ayant $2KN$ composantes $(u_{j\pm\frac{1}{2}}^k)$. Mais cela requiert beaucoup de place mémoire et de temps de calcul on résout (3.45). Autrement dit, la résolution du système linéaire (3.49) associé à (3.45) est immédiate car la matrice correspondante $A_{k,j}$ est triangulaire inférieure (et inversible puisque $1 + c_{k,j} > 0$)

$$\mathbf{A_{k,j}} = \begin{pmatrix} 1 + c_{k,j} & 0 & & & 0 \\ 1 - c_{k,j} & 1 + c_{k,j} & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - c_{k,j} & 1 + c_{k,j} & 0 \\ 0 & & & 1 - c_{k,j} & 1 + c_{k,j} \end{pmatrix}$$

avec $c_{k,j} = \frac{2|\mu_k|}{\sigma_j \Delta x}$.

La précision de $(3.45) - (3.63)$ est d'ordre 2 en espace. Nous étudions sa stabilité en nous inspirant d'une inégalité d'énergie dans le cas continu.

Lemme 3.3.1. *La solution $u(x,\mu)$ de l'équation de transport Boltzmann* (3.43) *vérifie*

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sigma_0}\|q\|_{L^2} + .$$

Démonstration. Prenons $u(x,\mu)$ comme fonction test dans l'équation (3.43), en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et prenant compte des conditions aux limites on obtient

$$\int_{-\ell}^{+\ell}\int_{-l}^{+l} |u(x,\mu)|^2 d\mu dx \leq \frac{1}{\sigma_0^2}\int_{-\ell}^{+\ell}\int_{-1}^{+1} |q(x,\mu)|^2 d\mu dx.$$

□

Lemme 3.3.2. *Le schéma diamant* (3.45) − (3.46) *est inconditionnellement stable dans L^2 au sens où sa solution discrète u_j^k vérifie*

$$\|(u_j^k)\|^2 = \sum_{j=1}^{N}\Delta x \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} |u_j^k|^2.$$

Démonstration. Prenons u_j^k comme fonction test dans l'équation (3.45), en utilisant la relation diamant ($2^{ième}$ ligne dans (3.45) on obtient

$$\begin{aligned}
I =& \frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K}\sum_{j=1}^{j=N}\mu_k[(u_{j+1/2}^k)^2 - (u_{j-1/2}^2)] + \sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K}\Delta x\sigma_j(u_j^k)^2 = \sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K}\Delta x q_j^k u_j^k \\
=& \frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K}\mu_k[(u_{N+1/2}^k)^2 - (u_{1/2}^k)^2] + \|\sqrt{\sigma_j}(u_j^k)^2\|_{L^2} \\
\leq& \|q_j^k\|\|u_j^k\|,
\end{aligned}$$

en prenant compte les conditions aux limites (3.47)- (3.48) et la relation (3.44), on aboutit à

$$\|(u_j^k)\|^2 \leq \frac{1}{\sigma_0}\|(q_j^k)\|^2;$$

ce qui prouve la stabilité inconditionnelle. □

Lemme 3.3.3. *Le schéma diamant* (3.45) − (3.46) *est consistant avec l'équation de* (3.43), *précis à l'ordre* 2 *en espace, i.e.*

$$|E(u) - E_{k,j}(u)| \leq C(\Delta x)^2; -K \leq k \leq K, k \neq 0,\ 1 \leq j \leq N$$

où $E(u)$ est l'équation considérée et $E_{k,j}(u)$ est l'équation discritisée.

Démonstration. Prenons u_j^k la solution de l'équation (3.45), et $\tilde{u}_j^k := u(x_j,\mu_k)$ la solution (exacte) de (3.43) suffisament régulières, en posant

$$E(u(x_j,\mu_k)) = \mu\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,\mu_k) + \sigma(x_j)u(x_j,\mu_k) = q(x_j,\mu_k)$$

$$E_{k,j}(u_j^k) = \mu_k\frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^k = q_j^k$$

Par devellopement de Taylor du terme d'advection autour du point (x_j,μ_k) , en faisant la soustraction $E_{k,j}(u_j^k) - E(u(x_j,\mu_k))$, on obtient

$$E_{k,j}(u_j^k) - E(u(x_j,\mu_k)) \approx O(\Delta x)^2;$$

ce qui prouve que le schéma est consistant et d'ordre 2. □

3.3.2 Le cas instationnaire (cinétique)

Soit l'équation instationnaire suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu) + \sigma(x)u(x,\mu) = q(x,\mu), \text{ pour } (t,x,\mu) \in \mathbb{R}^* \times (-\ell,+\ell) \times (-1,+1) \\ u(t=0,x,\mu) = u_0(x) \text{ pour } x \in (-\ell,+\ell) \times (-1,+1), \\ u(t,-\ell,\mu) = Ru(t,+\ell,\mu) \text{ pour } \mu > 0, u(t,+\ell,\mu) = Ru(t,-\ell,\mu) \text{ pour } \mu < 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

u_0 est la donnée initiale. Bien évidemment, si l'on choisit une vitesse de signe opposée $\mu < 0$, alors la condition aux limites d'entrée doit être imposée en $x = +\ell$, et non plus en $x = -\ell$.
la valeur d'une solution discrète approchée au point (t_n, x_j). Comme d'habitude on choisit la donnée initiale discrète sous la forme

$$u_j^0 = u_0(x_j).$$

Le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1,k} - u_j^{n,k}}{\Delta t} + \mu \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2,k} - u_{j-1/2}^{n+1/2,k}}{\Delta x} + \sigma_j u_j^{n+1/2,k} = q_j^{n+1/2,k}, \\ u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k} = u_{j+1/2}^{n+1/2,k} + u_{j-1/2}^{n+1/2,k} \\ 2u_j^{n+\frac{1}{2},k} = u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} \\ u(t,\Gamma_-,\mu) = Ru(t,\mu) \mid_{\Gamma_+} = \frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{k} w_k u \mid_{\Gamma_+} (t,\mu_k) \end{cases} \tag{3.53}$$

La première ligne de (3.53) discrétise de manière centrée l'équation de Boltzmann (3.52) tandis que la deuxième ligne est purement algébrique. Cette deuxième relation de (3.53) est dite "diamant" à cause de la figure obtenue en reliant les points ($u_j^{n+1} := u_j^{n+1,k}, u_j^n := u_j^{n,k}, u_{j+1/2}^{n+1/2} := u_{j+1/2}^{n+1/2}, k, u_{j-1/2}^{n+1/2} := u_{j-1/2}^{n+1/2,k}$) sur un maillage espace-temps-vitesse. Les relations (3.53) sont valables pour les indices $1 \leq j \leq N$ Pour calculer la solution de (3.53), on élimine l'inconnue $u_j^{n+1} = -u_j^{n,k} + u_{j+1/2}^{n+1/2,k} + u_{j-1/2}^{n+1/2,k}$ pour se ramener au schéma, a priori implicite,

$$u_{j+1/2}^{n+1/2}\left(1 + \frac{2}{\sigma_j} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x \sigma_j}\right) + u_{j-1/2}^{n+1/2}\left(1 + \frac{2}{\sigma_j} - \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x \sigma_j}\right) = \Delta t\left[4\frac{u_j^n}{\sigma_j} + \frac{2q_j^{n+\frac{1}{2}}}{\sigma_j}\right], \tag{3.54}$$

qui permet de calculer les valeurs $(u_{j+1/2}^{n+1/2})_j$ en fonction des valeurs précédentes $(u_j^n)_j$. On calcule ensuite facilement les valeurs $(u_j^{n+1})_j$ avec la relation diamant deuxième ligne de (3.53). La relation (3.54) est valable pour les indices $0 \leq j \leq N$ et on la complète par la condition aux limites, en injectant (3.53) dans la relation diamant qui conduit à

Pour $\mu := \mu_k > 0$,

$$\begin{cases} q^k(-\ell) = Rq^k(+\ell), \\ \frac{u_{1/2}^{n+1/2,k} + u_{-1/2}^{n+1/2,k}}{2} = u_0^{n+1/2,k} = Ru_N^{n+1/2,k}, \\ u_{1/2}^{n+1/2,k}(\sigma^* + c) + u_{-1/2}^{n+1/2,k}(\sigma^* - c) = 2\frac{\Delta t}{\sigma_{-\ell}}[2Ru_N^n + q^{n+1/2,k}(-\ell)], \\ \frac{u_{N+1/2}^{n+1/2,k} + u_{N-1/2}^{n+1/2,k}}{2} = u_N^{n+1/2,k}, \\ u_{N+1/2}^{n+1/2,k}(\sigma^* + c) + u_{-1/2}^{n+1/2,k}(\sigma^* - c) = 2\frac{\Delta t}{\sigma_{+\ell}}[2u_N^n + q^{n+1/2,k}(+\ell)], \end{cases} \tag{3.55}$$

où $\sigma^* = 1 + \frac{2}{\sigma_j}$, et $c = \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x \sigma_j}$.

Pour $\mu := \mu_k < 0$

$$\begin{cases} q^k(+\ell) = Rq^k(-\ell), \\ \frac{u^k_{1/2}+u^k_{-1/2}}{2} = u_N = Ru_0, \\ u^k_{1/2} - u^k_{-1/2} = 2\frac{\Delta t}{\sigma(-\ell)}[2u_0 + q^k(-\ell)], \\ \frac{u^k_{N+1/2}+u^k_{N-1/2}}{2} = u_N = Ru_0, \\ u^k_{N+1/2} - u^k_{N-1/2} = 2\frac{\Delta t}{\sigma(+\ell)}[2Ru_0 + Rq^k(-\ell)], \end{cases} \tag{3.56}$$

en déduisant les relations de récurrence :
Pour $\mu = \mu_k > 0$, on pose

$$u^{n+1/2}_{j+1/2} = \frac{-(1+\frac{1}{2}\sigma_j - \frac{\mu\Delta t}{\Delta x})}{1+\frac{1}{2}\sigma_j + \frac{\mu\Delta t}{\Delta x}} u^{n+1/2}_{j-1/2} + \Delta t \frac{2u^n_j + q^{n+\frac{1}{2}}_j}{1+\frac{1}{2}\sigma_j + \frac{\mu\Delta t}{\Delta x}}; j \text{ croissant de } 1 \text{ à } N. \tag{3.57}$$

Et pour $\mu < 0$, on pose

$$u^{n+1/2}_{j-1/2} = \frac{-(1+\frac{1}{2}\sigma_j + \frac{\mu\Delta t}{\Delta x})}{(1+\frac{1}{2}\sigma_j - \frac{\mu\Delta t}{\Delta x})} u^{n+1/2}_{j+1/2} + \Delta t \frac{2u^n_j + q^{n+\frac{1}{2}}_j}{1+\frac{1}{2}\sigma_j - \frac{\mu\Delta t}{\Delta x}}; j \text{ décroissant de } N \text{ à } 1. \tag{3.58}$$

Bien que le schéma (3.54) semble être implicite, il n'en est rien car il est possible de calculer de proche en proche les valeurs $u^{n+1/2}_{j+1/2}$ en allant dans le sens des j croissants (si la vitesse est positive $\mu > 0$). Autrement dit, la résolution du système linéaire associé à (3.54) est immédiate car la matrice correspondante $A_{k,j} = A$ est triangulaire inférieure (et inversible puisque $1 + (c_{k,j} = c) > 0$)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & & & 0 \\ 1-c & 1+c & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-c & 1+c & 0 \\ 0 & & & 1-c & 1+c \end{pmatrix},$$

avec $c = \frac{1}{2}\sigma_j + \frac{\mu\Delta t}{\Delta x}$.

Autrement dit, le schéma diamant (3.53) est quasiment explicite alors qu'il va hériter des propriétés usuelles des schémas implicites (stabilité inconditionnelle). Pour montrer la stabilité de ce schéma nous allons utiliser la méthode d'inégalité d'énergie et pour commencer nous établissons cette inégalité pour l'équation de transport Boltzmann (3.52).

Lemme 3.3.4. *Toute solution régulière de* (3.52) *vérifie*

$$\|u(T)\|^2_{L^2(I_x\times I_\mu)} + \|u\|^2 \le \frac{1}{C}\Big(\|u(0)\|^2_{L^2(I_x\times I_\mu)} + \frac{1}{\sigma_0}\|q\|^2\Big) \tag{3.59}$$

où $C = \min(\sigma_0, 1)$.

Démonstration. Prenons $u(x,\mu)$ comme fonction test dans l'équation (3.52), en posant $I_\mu = (-1,+1)$, $I_x = (-\ell,+\ell)$ et $I_t = (0,T)$ et prenant compte des conditions aux limites on obtient

$$\begin{aligned} I = &\int_{-\ell}^{\ell}\int_{-1}^{1} \mid u(T,x,\mu) \mid^2 + 2\int_0^T\int_{-\ell}^{\ell}\int_{-1}^{1} \sigma(x,\mu) \mid u(t,x,\mu) \mid^2 d\mu dx dt \\ \le &\int_{-\ell}^{\ell}\int_{-1}^{1} u_0(t,x,\mu) \mid^2 + 2\int_0^T\int_{-\ell}^{\ell}\int_{-1}^{1} (qu)(t,x,\mu) dt \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\|u(T)\|^2_{L^2(I_x\times I_\mu)} + \sigma_0\|u\|^2 \leq +\|u(0)\|^2_{L^2(I_x\times I_\mu)}\frac{1}{\sigma_0}\|q\|^2,$$

soit $C = \min(\sigma_0, 1)$, on obtient la relation (3.59) □

Lemme 3.3.5. *Le schéma diamant* (3.53) *est inconditionnellement stable en norme* L^2.

Démonstration. Prenons $u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k}$ comme fonction test dans l'équation (3.53), en utilisant la relation diamant ($2^{ième}$ ligne dans (3.52) on obtient

$$\begin{aligned} I = &\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \Delta x(u_j^{n+1,k})^2 - (u_j^{n,k})^2 + \sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \mu_k\Delta t\Big(u_{j+1/2}^{n+1/2,k})^2 - (u_{j-1/2}^{n+1/2,k})^2\Big) \\ &+\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} 2\Delta t\Delta x\sigma_j(u_j^{n+1/2,k})^2 = \sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \Delta t\Delta x 2q_j^{n+1/2,k}u_j^{n+1/2,k} \end{aligned}$$

On somme en n pour déduire

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \Delta x(u_j^{n+1,k})^2 + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \Delta t\Delta x\sigma_0(u_j^{i+1/2,k})^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \Delta x(u_j^{0,k})^2 + \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \mu_k\Delta t(u_{1/2}^{i+1/2})^2 \\ &+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} \Delta t\Delta x(q_j^{i+1/2,k})^2 \end{aligned}$$

prenant compte les conditions aux limites, on aboutit à

$$\|(u_j^{n+1,k})\|^2_{L^2(I_x\times I_\mu} + \sigma_0\|(u_j^{n+1/2,k})\|^2_{L^2(I_x\times I_\mu\times I_t} \leq \|(u_j^{0,k})\|^2 + \frac{1}{\sigma_0}\|(q_j^{n+1/2,k})\|^2,$$

ce qui prouve la stabilité inconditionnelle. □

Lemme 3.3.6. *Le schéma diamant* (3.53) *est consistant avec l'équation de transport Boltzmann* (3.52)*, précis à l'ordre* 2 *en espace et en temps.*

Démonstration. Prenons $u_j^{n,k}$ la solution de l'équation (3.53), et $tildeu_j^{n,k} := u(t_n, x_j, \mu_k)$ la solution (exacte) de (3.52) suffisament régulières, en posant

$$\begin{aligned} E(u(t_n, x_j, \mu_k) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j, \mu_k) + \mu_k\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j, \mu_k) + \sigma(x_j)u(t_n, x_j, \mu_k) = q(t_n, x_j, \mu_k) \\ E_{n,k,j}(u_j^{n,k}) &= \frac{u_j^{n+1,k} - u_j^{n,k}}{\Delta t} + \mu\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2,k} - u_{j-1/2}^{n+1/2,k}}{\Delta x} + \mu_k\frac{u_{j+1/2}^k - u_{j-1/2}^k}{\Delta x} + \sigma_j u_j^{n+1/2,k} = q_j^{n+1/2,k}, \end{aligned}$$

Par devellopement de Taylor du terme d'advection dans $E_{n,k,j}$ autour du point (t_n, x_j, μ_k), en faisant la soustraction $E_{n,k,j}(u_j^{n,k}) - E(u(t_n, x_j, \mu_k)$, on obtient

$$E_{k,j}(u_j^k) - E(u(x_j, \mu_k)) \approx O\Big((\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\Big);$$

ce qui prouve que le schéma est consistant et d'ordre 2 en espace et en temps. □

Puisque le schéma diamant (3.53) est stable et consistant, il est automatiquement convergent par application du Théorème de Lax 3.2.1. On peut donc, établir le résultat suivant.

Lemme 3.3.7. *Le schéma diamant* (3.53) *est convergent en norme* L^2.

Remarque 3.3.1. *Le seul inconvénient du schéma diamant* (3.53) *est qu'il n'est pas positif en général, autrement dit qu'il peut produire des valeurs négatives de la solution même si la donnée initiale (ou la condition aux limites) est positive. C'est bien sûr contraire au principe du maximum pour l'équation de transport boltzmann* (3.52) .

3.4 Équation de Boltzmann avec collision

3.4.1 Le cas stationnaire

On considère maintenant l'équation de Boltzmann linéaire stationnaire dans les mêmes conditions que la section précédente (pour mieux comprendre voir [10]) mais en tentant compte désormais des collision

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu) + \sigma(x)u(x,\mu) = \frac{\sigma^*(x)}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1} u(x,\mu')d\mu' + f(x,\mu) \text{ pour } (x,\mu) \in (-\ell,+\ell)\times(-1,+1) \\ u(-\ell,\mu) = Ru(+\ell,\mu) \text{ pour } \mu > 0, u(+\ell,\mu) = Ru(-\ell,\mu) \text{ pour } \mu < 0. \end{cases} \tag{3.60}$$

Pour que le problème aux limites (3.60) soit bien posé nous faisons l'hypothèse que le milieu est sous-critique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\sigma_0 > 0$ telle que

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) - \sigma^*(x) \; pour \; x \in (-\ell,+\ell). \tag{3.61}$$

On utilise la méthode S_N (la méthode d'intégration numérique de la forme quadratique de Gauss (exactement de Gauss-legendre)), dans ce cadre **le schéma diamant** est donnée, pour $1 \leq j \leq N$, par

$$\begin{cases} \mu_k\frac{u^k_{j+1/2}-u^k_{j-1/2}}{\Delta x} + \sigma_j u^k_j = \sigma^*_j\bar{u}_j + f^k_j \\ u^k_j = \frac{u^k_{j+1/2}+u^k_{j-1/2}}{2} \\ u(\Gamma_-,\mu) = Ru\mid_{\Gamma_+} = \frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{k} w_k u\mid_{\Gamma_+}(\mu_k) \end{cases} \tag{3.62}$$

où la deuxième ligne est la relation diamant

$$u^k_j = \frac{u^k_{j+1/2}+u^k_{j-1/2}}{2} \tag{3.63}$$

et $\bar{u}_j$ est la moyenne angulaire défini par

$$\bar{u}_j = \frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k f(\mu_k). \tag{3.64}$$

La précision de (3.62)-(3.63) est d'ordre 2 en espace. Auparavant nous étudions sa stabilité en nous inspirant d'une inégalité d'énergie dans le cas continu.

Lemme 3.4.1. *La solution* $u(x,\mu)$ *de l'équation de transport* (3.60) *vérifie*

$$\int_{-l}^{+l}\int_{-l}^{+l} |u(x,\mu)|^2 dx d\mu \leq \frac{1}{\sigma_0^2}\int_{-l}^{+l}\int_{-\ell}^{+\ell} |f(x,\mu)|^2 dx d\mu.$$

Pour la démonstration voir [10]

Lemme 3.4.2. *Le schéma diamant* (3.62) − (3.63) *est inconditionnellement stable* L^2 *au sens où sa solution discrète* u_j^k *vérifie*

$$||(u_j^k)||^2 = \sum_{j=1}^{N} \Delta x \sum_{k=-K, k\neq 0}^{K} w_k |u_j^k|^2.$$

Pour la démonstration voir [10]

Il est possible de résoudre simultanément toutes les équations du schéma (3.62)-(3.63) en résolvant un grand système linéaire pour le vecteur inconnu ayant $2KN$ composantes $(u_{j+\frac{1}{2}}^k)$. Mais demande beaucoup de place mémoire et de temps de calcul. En général on préfère utiliser une méthode itérative , qui est dite **d'itération sur les sources**. Son principe est de supposer connu le membre de droite de (3.62) (y compris la moyenne angulaire), de résoudre l'équation de transport sans collision par un schéma, de mettre à jour le membre de droite de (3.62), puis d'itérer ce procédé jusqu'à convergence. Cet algorithme itératif est l'exact analogue, en discret, de l'argument de point fixe utilisé pour démontrer l'existence d'une solution de l'équation de Boltzmann.
Plus précisément, on note $n \geq 0$ le numéro d'itération. On initialise l'algorithme (dit d'itération sur les source) en posant, pour $n = 0$,

$$\bar{u}_j^0 = 0,$$

puis à l'itération $n \geq 1$ on résout

$$\mu_k \frac{u_{j+1/2}^{k,n} - u_{j-1/2}^{k,n}}{\Delta x} + \sigma_j \frac{u_{j+1/2}^{k,n} + u_{j-1/2}^{k,n}}{2} = \sigma_j^* \bar{u}_j^{n-1} + f_j^k \tag{3.65}$$

qui est équivalent à

$$(1 + \frac{2\mu_k}{\Delta x}) u_{j+1/2}^{k,n} + (1 - \frac{2\mu_k}{\Delta x}) u_{j-1/2}^{k,n} + = \frac{2\sigma_j^*}{\sigma_j} \bar{u}_j^{n-1} + \frac{1}{\sigma_j} f_j^k \tag{3.66}$$

et on met à jour la moyenne angulaire

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k\neq 0}^{K} w_k \frac{u_{j+1/2}^{k,n} + u_{j-1/2}^{k,n}}{2}. \tag{3.67}$$

avec les conditions aux limites (3.47)-(3.48), en remplaçant le membre droit de ces dernières relations par celui de (3.66).

L'intérêt de cet algorithme est qu'il ne nécessite aucun **stockage de matrice ni résolution de système linéaire** .

Lemme 3.4.3. *L'algorithme d'itération sur les sources* (3.65) − (3.67) *converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la solution discrète du schéma* (3.62) − (3.63)

Démonstration. Afin d'étudier sa convergence lorsque n tend vers + nous réécrivons (3.65)-(3.67) sous une forme matricielle plus compacte. On note U^n le vecteur de composantes $(u_{j+1/2}^{n,k})$, F le vecteur de composantes (f_j^k), T la matrice de l'opérateur de transport discrétisé dans le membre de gauche de (3.65) et enfin K la matrice de l'opérateur de collision discrétisé défini par (3.67) que multiplie le coefficient σ^*. Avec ces notations U^n est la solution de

$$TU^n = KU^{n-1} + F \tag{3.68}$$

La suite U^n converge, c'est-à-dire que la méthode itérative converge (pour tout second membre F), si et seulement si le rayon spectral de $T^{-1}K$ est strictement plus petit que 1 ($\rho(T^{-1}K) < 1$) :

Comme $\rho(T^{-1}K) \leq \|T^{-1}K\| \leq \|T^{-1}\|\|K\|$, il suffit de montrer que

$$\|T^{-1}\|\|K\| < 1.$$

Pour un second membre G on appelle U la solution de

$$TU = G \tag{3.69}$$

On multiplie (3.69)par U et on somme sur toutes les composantes, ce qui est équivalent à multiplier le terme de transport de (3.65) par $\Delta x w_k(u^k_{j+1/2} + u^k_{j-1/2})$ et à sommer sur j et k, En notant $\|U\|$ la norme

$$\|U\| = \Big(\sum_{j=1}^{N} \Delta x \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k |u_j^k|^2\Big)^{1/2},$$

où on a utilisé la relation diamant $2u_j^k = u^k_{j+1/2} + u^k_{j-1/2}$, on obtient que

$$\sigma\|U\|^2 \leq TU \cdot U = G \cdot U \leq \|G\|\|U\|;$$

i.e.

$$\|T^{-1}G\| = \|U\| \leq \frac{1}{\sigma}\|G\|.$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\|KU\|_2 = (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^{N} \Delta x \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k |\overline{u}_j|^2 = 2(\sigma^*)^2 \sum_{j=10}^{N} \Delta x |\overline{u}_j|^2$$

et, par Cauchy-Schwarz pour $\overline{u}_j = \frac{1}{2}\sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k |u_j^k|$,

$$\|KU\|^2 \leq (\sigma^*)^2 \sum_{j=1}^{N} \Delta x \sum_{k=-K,\, k\neq 0}^{K} w_k |u_j^k|^2 = (\sigma^*)^2\|U\|^2;$$

d'où l'on déduit que $\|T^{-1}\|\|K\| \leq \sigma^*/\sigma < 1$ à cause de l'hypothèse de sous-criticité (3.61) $\square$

3.4.2 Le cas instationnaire (cinétique)

On considère maintenant l'équation complète de Boltzmann linéaire dépendant du temps (ou modèle cinétique) pour l'inconnue $u(t, x, \mu)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x) = \frac{\sigma^*(x)}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1} u(x,\mu')d\mu' + f(x,\mu); (t,x,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times (-\ell,+\ell) \times (-1,+1) \\ u(t=0,x,\mu) = u^0(x,\mu) \qquad \text{pour } (x,\mu) \in (-\ell,+\ell) \times (-1,+1) \\ u(-\ell,\mu) = Ru(+\ell,\mu) \text{ pour } \mu > 0, u(+\ell,\mu) = Ru(-\ell,\mu) \text{ pour } \mu < 0. \end{cases} \tag{3.70}$$

Pour que le problème aux limites (3.70) admette une solution qui ne croît pas exponentiellement en temps, nous supposons encore que le milieu est sous-critique. mais avec une hypothèse un peu plus faible que (3.44), à savoir

$$0 \leq \sigma(x) - \sigma^*(x) \text{ pour} x \in (-\ell, +\ell) \tag{3.71}$$

Reprenons la **méthode** S_N **ou des ordonnées discrètes** dans ce contexte. On note $u_j^{n,k}$ une approximation de la solution $u(t_n, x_j, \mu_k)$. Le **schéma diamant**, s'écrit , pour $1 \leq j \leq N$,

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1,k} - u_j^{n,k}}{\Delta t} + \mu_k \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} - u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k}}{\Delta x} + \sigma_j u_j^{n+\frac{1}{2},k} = \sigma_j^* \bar{u}_j^{n+\frac{1}{2}} + f_j^{n+\frac{1}{2},k}, \\ u(\Gamma_-, \mu) = Ru \mid_{\Gamma_+} = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k\neq 0}^{k} w_k u \mid_{\Gamma_+} (\mu_k) \end{cases} \tag{3.72}$$

avec les relations diamant

$$\begin{aligned} u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k} &= u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} \\ 2u_j^{n+\frac{1}{2},k} &= u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} \end{aligned} \tag{3.73}$$

et la moyenne angulaire

$$\bar{u}_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=-K, k\neq 0}^{K} w_j u_j^{n+\frac{1}{2},k} \tag{3.74}$$

Comme d'habitude σ_j, σ_j^* et $f_j^{n+\frac{1}{2},k}$ sont des approximations de $\sigma(x_j), \sigma(x_j)^*$ et $f(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j, \mu_k)$ respectivement. La première relation diamant (3.73) permet d'éliminer l'inconnue $u_j^{n+1,k}$ tandis que la seconde relation diamant permet d'éliminer $u_j^{n+\frac{1}{2},k}$ et d'obtenir un schéma implicite pour les valeurs $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k}$ en fonction des valeurs $u_j^{n,k}$

$$\mu_k \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k}}{\Delta x} + (\sigma_j + \frac{2}{\Delta t}) \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} + u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k}}{2} = \frac{\sigma_j^*}{2} (\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + f_j^{n-\frac{1}{2},k} + \frac{2}{\Delta t} u_j^{n,k} \tag{3.75}$$

qui équivalente à

$$(1 + \frac{2}{\sigma_j \Delta t} + \frac{2\mu_k}{\sigma_j \Delta x}) u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} + (1 + \frac{2}{\sigma_j \Delta t} - \frac{2\mu_k}{\sigma_j \Delta x}) u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},k} \tag{3.76}$$

$$= \frac{\sigma_j^*}{2\sigma_j} (\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{\sigma_j} f_j^{n-\frac{1}{2},k} + \frac{2}{\Delta t \sigma_j} u_j^{n,k} \tag{3.77}$$

Avec les condtions aux limtes (3.55)-(3.56), en remplaçant le membre droit de ces deux dernières par celui de (3.75).

On retrouve ensuite les valeurs $u_j^{n+1,k}$ grâce à la première relation diamant dans (3.73). Le schéma (3.75) est complètement similaire au schéma stationnaire (3.65)-(3.67) avec simplement un terme source modifié et une absorption σ_j augmentée de $\frac{2}{\Delta t}$. En particulier, on utilise les mêmes conditions aux limites de flux reéflexif en entrée, et on peut encore résoudre (3.75) par une méthode d'itération sur les sources (cf.lemme 3.4.3).

Lemme 3.4.4. *Le schéma diamant* (3.72)-(3.73)-(3.74) *est inconditionnellement stable*L^2 *au sens où, pour tout temps final* $T > 0$*, il existe une constante* $C(T) > 0$ *telle que la solution discrète* $u_j^{n,k}$ *vérifie pour tout* $n \leq \frac{T}{\Delta}$

$$\|(u_j^{n,k})\| \leq C(T)(\|(u_j^{0,k})\|^2 + \sum_{m=0}^{n} \Delta t \|(f_j^{m+\frac{1}{2},k})\|^2) \tag{3.78}$$

avec la norme discrète définie par

$$\|(u_j^{n,k})\| = \sum_{j=1}^{N} \Delta x \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_j \mid u_j^{n,k} \mid^2 . \tag{3.79}$$

Démonstration. On multiplie le schéma 3.72 par $\Delta t w_k(u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k})$ et on utilise les deux relations diamant (3.73) à fin d' obtenir, après sommation,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k(\mid u_j^{n+1,k} \mid^2 - \mid u_j^{n,k} \mid^2) + 2\Delta t \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k\sigma_j \mid u_j^{n+\frac{1}{2},k} \mid^2 \\ \leq \;\; & 4\Delta t \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^* \mid \bar{u}_j^{n+\frac{1}{2}} \mid^2 + \Delta t \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k f_j^{n+\frac{1}{2}} (u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k}) \end{aligned}$$

or, par Cauchy-Schwarz,

$$\mid \bar{u}_j^{n+\frac{1}{2}} \mid^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k \mid u_j^{n+\frac{1}{2},k} \mid^2$$

et, comme $\sigma_j \geq \sigma_j^*$, les termes d'absorption peuvent s'éliminer dans l'inégalité.
D'autre part,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=-K,k\neq 0}^{K} w_k f_j^{n+\frac{1}{2},k} (u_j^{n+1,k} + u_j^{n,k}) \leq \|f_j^{n+\frac{1}{2},k}\| (\|u_j^{n+1,k}\| + \|u_j^{n,k}\|) \\ \leq \;\; & \|f_j^{n+\frac{1}{2},k}\|^2 + \frac{1}{2}(\|u_j^{n+1,k}\|^2 + \|u_j^{n,k}\|^2) \end{aligned}$$

car, pour trois nombre positifs a, b, c, on a$a(b+c) \leq a^2 + \frac{(b^2+c^2)}{2}$. En combinant ces inégalités on déduit

$$(1 - \Delta t/2)\|u_j^{n+1,k}\|^2 \leq (1 + \frac{\Delta t}{2})\|u_j^{n,k}\|^2 + \Delta t \|f_j^{n+\frac{1}{2},k}\|^2.$$

par récurrence

$$\|u_j^{n,k}\|^2 \leq \left(\frac{1 + \Delta t/2}{1 - \Delta t/2}\right)^n \|u_j^{0,k}\|^2 + \sum_{m=0}^{n} \Delta t \|f_j^{m+\frac{1}{2},k}\|^2.$$

Comme il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $T > 0$ et $\Delta t > 0$ petit, on a

$$\left(\tfrac{1+\Delta t/2}{1-\Delta t/2}\right)^{\frac{T}{\Delta t}} \leq e^{CT},$$

on en déduit l'inégalité (3.78).

□

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objet de ce mémoire est d'étudier théoriquement et numériquement l'équation de Boltzmann linéaire avec des conditions aux limites générales contractives et non-contractives dans un cadre naturel.

Comme son opérateur, agissant sur des fonctions de 3×3 dans l'espace de phase $X \times V$, n'est ni auto-adjoint ni elliptique ni normal dans l'espace $L^2(X \times V)$; donc les méthodes variationnelles générales ne sont donc pas valables pour cet opérateur. Alors la méthode des semi-groupes se prête bien pour l'étude théorique dans un espace générale $L^p; p \in [1, \infty[$. De même on choisit la méthode de différence finies avec le schéma diamant pour la même raison.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Dautray- J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, T1, Modèles physiques Masson, Paris Milan Barcelone Mexico, 1987.

[2] R. Dautray- J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, T8, Evolution : Semi-groope, vatiationel» Masson, Paris Milan Barcelone Mexico, 1988.

[3] R. Dautray- J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, T9, Méthodes numériques et Transport, Masson, Paris Milan Barcelone Mexico, 1987.

[4] N. Martin, Développement de la Méthode Sn à Schéma Diamants D'ordre Elevés en Géométrie 3D Cat, Mém Pré. Maitrise ès-scien Appl.Départ de Géné.Phy.Ecol.Poly .Montreal, Fev 2008.

[5] B. Carlson, The numerical theory of neutron transport, dans Methods in computational Physics, vol. 1, Alder B. ed., pp.1-42, Academic Press, New York (1963).

[6] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications. Masson, Paris(1983).

[7] M. Cessenat, Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique. C.R.Acad.Sci. Paris,300,Sér.I (1985) 89-92

[8] M. Cessenat, Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. C.R.Acad.Sci. Paris, 299, Sér.I (1984) 831-834.

[9] C. Bardos, Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficient réels : théorème d'approximation ; application à l'équation de transport. Thèse, Paris 1969. Ann.sci. Ecole Norm. Sup., 3(1970), 185-233.

[10] G. Allaire, X. Blac, B. Despes, F. Golse, Transport et Diffusion, 2015

[11] R. Sentis, Analyse asymptotique d'équation de transport. Thèse de Doctorat d'état, Université Paris IX, Dauphine, (1981).

[12] A. Arnold, Problèmes ergodique de la mécanique classique. Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[13] ALLAIRE G., Analyse numérique et optimisation, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2012).

[14] CARLSON B., The numerical theory of neutron transport, dans Methods in computational Physics, vol. 1, Alder B. ed., pp.1-42, Academic Press, New York (1963).

[15] G. Allaire, G. Bal, Homogenization of the critical spectral equation in neutron transport, M2 AN 33, pp.721-746 (1999).

[16] M. Mokhtar-Kharroubi, On the convex compactness property for the strong operator and related topics, Math. Meth. Appl. Sci. 27(2004), 687-701.

[17] M. Mokhtar-Kharroubi, Mathematical topics in neutron transport theory new as- pects, World Sci. Series on advances in Mathematics for applied Sciences. Vol. 46, 1997.