REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL-BOUAGHI

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : ……….

Série : ……………..

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

En Mathématiques

Intitulé

PROBLEME MIXTE AVEC CONDITION NON LOCALE POUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE AUX DERIVEES PARTIELLE D'ORDERE CINQ DE TYPE MIXTE

Option :

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PAR :

NECIB ABD EL HALIM

Devant le jury :

Mr AYADI Abdelhamid	**Professeur Université d'Oum El Bouaghi**	**Président**
Mr BOUZIT Mohamed	**Maître de conférences Université d'Oum El Bouaghi**	**Rapporteur**
Mr DJEBARNI Merzoug	**Maître de conférences Université d'Oum El Bouaghi**	**Examinateur**
Mr DJEZZAR Salah	**Maître de conférences Université de Constantine**	**Examinateur**
Mr AJROUD Nasser	**Maître de conférences C. Universitaire de Khanchla**	**Examinateur**

Soutenu le : …………………

Remerciements

Au nom de Dieu le clément et le miséricordieux

Tout d'abord, je tiens à remercier infiniment **M.Bouzit Mohamed** pour le choix passionnant et motivant du présent mémoire ainsi que pour son aide inestimable et les conseils précieux et utiles qu'il m'a apportés.En outre, resterai fort reconnaissant à **Mr AYADI Abdelhamid** qui M'a fait l'honneur de présider ce jury. Je remercie également **Mrs Djebarni Merzouk**, **DJEZAR Salah** et **Ajroud Nasser** D'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs. J'aimerai notamment remercier tous les collègues du **lycée de Ksar Sbihi**.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude aux deux êtres les plus chers dans ma vie. A savoir **mes parents** qui ont tout fait pour que je sois ce que je suis. Je remercie particulièrement **ma mère** dont le fait de penser à elle me redonne la confiance et me rassure. Je dédie également mes remerciements particuliers à ma chère femme **N.Bouderbala**, pour ses conseils et son soutien.

Je remercie également tous les membres de ma famille **mes soeurs** et tous ceux qui comptent pour moi.

Je me permets aussi de saluer tous **mes amis** et les remercier pour leur soutien constant qui m'a permis de réaliser ce rêve. De plus, je ne veux pas oublier tous ceux et celles qui, tout au long de mon travail, m'ont soutenu moralement et je m'excuse de ne pas les nommer explicitement car la liste est longue.

En fin, je dédie ce mémoire à tous **mes professeurs** et camarades de classe de l'ENS d'oum El Bouaghi dont les noms suivent:

Tarek, Imad, **Mokhtar, Yazid, Ammar, Allaoua** et **Mme Fréha.**

Table des matières

Introduction

la méthode des inégalités énergétiques, appelée aussi méthode de l'analyse fonctionnelle, a pour origine les travaux de I.G. Petrovski[14] .utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations de type hyperbolique, Elle a été appliquée et développée par la suite dans beaucoup De travaux à savoir A. A., Dezin [4] ,O. A., Ladysenskaja[9], K.Fredricks[5], N.I.Yurchuk[19, 20] .La méthode a connue par la suite des développements importants dus à J.Leray[8] et L.Garding[6].

Elle a été également utilisée pour la résolution de différents problèmes dans les domaines de la théorie de la conduction thermique, la physique des plasmas l'électrochimie, et autres.

Le présent travail est l'objet d'une extension de la méthode des inégalités énergétiques à de nouveaux problèmes mixtes avec conditions aux bords non locales de type intégrales [1, 2, 3, 10, 11, 12, 13].

Les problèmes mixtes avec conditions intégrales prennent un intérêt de plus en plus important dont la raison fondamentale est la signification physique de base de la condition intégrale à savoir une moyenne, un flux, une énergie totale,un moment, etc. Ce sont des modèles mathématiques rencontrés en théorie de la conduction thermique,en thermo -élasticité et dans les semi-conducteurs.

Description de la méthode

La méthode des inégalités énergétiques est basée sur la recherche d'un opérateur Mu dit multiplicateur qui dépend de la fonction u , ses dérivées et certaines fonctions poids. On est ramené par la suite à effectuer des intégrations sur le domaine considéré en vue de doter E et F de normes adéquates afin de pouvoir montrer l'existence et l'unicité de la solution, dite forte, du problème considéré après l'avoir mis sous la forme

$$Lu = \mathcal{F} \tag{1}$$

Où $L : E \to F$ est l'opérateur engendré par le problème considéré, E est un espace de Banach, Fest un espace de Hilbert, $u \in E$ et $\mathcal{F} \in F$.

la méthode se présente sous deux aspects.

1^{er} aspect

On démontre deux inégalités à priori

$$\|Lu\|_F \leq C \ \|u\|_E \ \forall u \in D(L) \tag{2}$$

$$\|u\|_E \leq c \ \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L) \tag{3}$$

Où **C** et **c** sont des constantes.

L'unicité de solution du problème considéré résulte de ces deux inégalités. De l'inégalité (2) résulte que l'opérateur L est continu et de l'inégalité (3) résulte qu'il admet un inverse continu et que l'image $R(L)$ de L est fermée. L est donc un homéomorphisme linéaire de E dans le fermé $R(L)$, ce qui prouve l'unicité de solution. Son existence est assurée par le fait que $R(L)$ est dense dans F chose faisable moyennant les opérateurs de régularisation que l'on choisira suivant la nature du problème considéré

$2^{ème}$ aspect

On démontre l'inégalité énergétique du type.

$$\|u\|_E \leq c \ \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L) \tag{4}$$

Où c est une constante

Par passage à la limite, on prolonge l'inégalité (4) à $D(\bar{L})$. Etant donné que l'image $R(\bar{L})$ de l'operateur $\bar{L}$, qui joue un rôle important, est fermée dans F et que $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$. Il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans F.

Dans ce travail, nous utilisons le 1^{er}aspect.

La méthode des inégalités énergétiques présente des avantages et des inconvénients.

Avantages

- Elle est efficace pour beaucoup de problèmes dont on a cité un certain nombre plus haut.,

- Son aspect théorique est solide et son développement est fait dans un cadre abstrait et élégant.,

- L'actualité des problèmes traités par cette méthode.,

Inconvénients

Beaucoup de difficultés sont rencontrées lors de la recherche.,

- Des espaces de solutions.,

- Au multiplicateur.,

- Opérateurs de régularisation.,

L'élaboration d'une technique remédiant à ces difficultés est encore prématurée, ceci est dû à la variété et l'actualité des problèmes traités par la méthode.

Actuellement, l'application de la méthode nécessite une étude spéciale pour chaque problème considéré.

Chapitre 1

Rappels

Le but de ce chapitre est de rappeler certains notions et certaines résultats de l'analyse fonctionnelle utilisés dans les chapitres ultérieurs. Pour cela on a commencé par donner les définitions de quelques espaces fonctionnels, puis un ensemble de notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats auxiliaires.,

1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1 Soit E un espace vectoriel sur K $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$,on appelle norme sur E une application noté $\|.\|$

$$\|.\| : \ E \to \mathbb{R}^+$$

$$x \to \|x\|$$

Vérifiant les axiomes suivants :

1) $\|x\| = \ 0 \ \Leftrightarrow x = 0$

2) $\forall \lambda \in K \ , \forall x \in E \ ; \ \|\lambda x\| = |\lambda| \ \ \|x\|$

3) $\forall x \ , \ y \in E \ ; \|x \ + y\| \leq \ \ \|x\| \ \ + \ \ \|y\|$

Définition 2 On appelle espace vectoriel normé le couple$(E \ , \ \ \|.\|)$ formé d'un espace vectoriel et d'une norme $\|.\|$définie sur E.

Espace de Banach

Définition 3 L'espace normé $(E, \|.\|)$ est appelé espace de Banach si toute suite de Cauchy dans E converge vers un élément de E (dans la norme $\|.\|$). En d'autres mots, un espace de Banach est un espace normé complet.

Espace de Hilbert

Définition 4 Soit H un espace vectoriel sur K. On appelle produit scalaire sur H, noté $(.,.)$ toute application de $H \times H \to K$, vérifiant les propriétés:

1) $(x, x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \ H$

2) $(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ dans H

3) $(x, y) \ = \overline{(y, x)} \ \forall x \ , \ y \in H$

4) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \ \ \forall x \ , \ y, z \in H$ et $\forall \alpha, \beta \in K$

Remarque 1 Tout produit scalaire introduit une norme sur l'espace H, notée $\|.\|_H$ et définie par

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)_H} \ \ , \ \forall \ \ x \in \ H.$$

H muni de cette norme et appelé espace préhilbertien.

Définition 5 Un espace préhilbertien complet est appelé espace de Hilbert.

L'espace $L^2(\Omega)$

Définition 6 Soit $\boldsymbol{\Omega}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$de frontière lipchitzienne Γ. On pose

$$L^2(\boldsymbol{\Omega}) = \left\{ f : \boldsymbol{\Omega} \ \to \mathbb{k} \ ; \ \int_{\boldsymbol{\Omega}} |f(x)|^2 \, dx \ < \infty \right\}$$

$L^2(\boldsymbol{\Omega})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

On munit $L^2(\boldsymbol{\Omega})$ de la norme

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\boldsymbol{\Omega}} |f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Espace de Sobolev

Définition 7 soit $\mathbf{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur $\mathbf{\Omega}$ **l'**espace:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\mathbf{\Omega}); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbf{\Omega}) \ \ , \ 1 \leq i \ \leq n \ \right\}$$

On munit $H^1(\Omega)$du produit scalaire:

$$(u,v)_{1,\mathbf{\Omega}} = \int_{\mathbf{\Omega}} \left(u\overline{v} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial xi} \overline{\frac{\partial v}{\partial xi}} \right) dx$$

et on note $\|u\|_{1,\mathbf{\Omega}} = (u,u)_{1,\mathbf{\Omega}}^{1/2}$ la norme correspondante.

Théorème 1 L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{1,\mathbf{\Omega}} = \int_{\mathbf{\Omega}} \left(u\overline{v} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial xi} \overline{\frac{\partial v}{\partial xi}} \right) dx$$

Théorème 2 L'espace $H^1(\Omega)$ est séparable, i .e, il existe une partie dénombrable dense dans $H^1(\Omega)$.

1.2 Quelques inégalités

Inégalité deYoung

Soit $1 < p, q < +\infty$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; alors on a

$$\forall \ a \ , \ b \ \in \mathbb{R}_+^* : \ \ ab \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

cette inégalité est appelée inégalité de young. Elle est largement utilisée dans ce travail.

Inégalité de Cauchy -Schwarz

Soient f et g deux éléments de $L^2(\mathbf{\Omega})$, alors $f \ , \ g \in L^1(\mathbf{\Omega})$ **et**

$$\int_{\mathbf{\Omega}} |f \ .g| \leq \|f\|_{L^2(\Omega).} \, \|g\|_{L^2(\Omega).}$$

L'ε–inégalité

L'inégalité

$$\forall\ a\ ,\ b \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 :\ \ |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$$

est appelée l'ε-inégalité est appliquée tout au long de ce travail.

1.3 Opérateurs linéaires dans les espaces normés.

Soient E et F deux espaces normés $(E, \|.\|_E)$,$(F, \|.\|_F)$ et soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $K(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 8 i) Une application A définie par:

$$A : E \to F$$

$$x \longmapsto A(x) = Ax$$

est dit opérateur.

ii) $D(A) = \{x \in E\ ; Ax \in F\ \} \subseteq E$ est dit domaine de définition de l'operateur A.

iii) L'opérateur A est linéaire ssi

$$\forall \alpha; \beta \in K\ , \forall x, x' \in D(A) : A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax'$$

Définition 9 i) L'opérateur A est dit continu au point $x_0 \in\ E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0, \|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_F < \varepsilon$$

ii) A est dit continu dans E s'il est continue en tout point de E.

Proposition 1 Un opérateur linéaire est continu dans E s'il est continu à l'origine (i.e. continu en 0).

Définition 10 On dit que l'opérateur A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Ax\|_F \leq c\,\|x\|_E \qquad \forall x \in D(A)$$

Théorème 3 L'opérateur A est continu ssi il est borné.

Définition 11 (Graph,Image, Noyau de A)

i)Graphe de $A = Gr(A) = \underset{x \in D(A)}{\cup} [x, Ax] = \{(x, Ax)/x \in D(A)\} \subset E \times F$

ii)Image de $A = R(A) = \underset{x \in D(A)}{\cup} \{Ax\} \subset F$

iii)Noyou de $A = \ker(A) = N(A) = \{x \in D(A); Ax = 0\} \subset E$

Définition 12 On dit que l'opérateur A est fermé ssi il est fermé dans $E \times F$. Ceci est équivaut à dire : si une suite (x_n)dans $D(A)$telle que $x_n \to x$ dans $D(A)$ et $Ax_n \to f$ dans F , alors

$$f = Ax \ , \ x \in D(A).$$

Remarque 2 Si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé dans E

Remarque 3 Si A est continu, alors $Gr(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Théorème 4 Soit A un opérateur linéaire surjectif qui applique un espace de Banach E sur un espace normé F et vérifiait la condition

$$\forall x \in E \quad \|Ax\| \geq m \|x\|$$

Où m est une constante positive, Alors A admet un operateur inverse bornée A^{-1}.

1.4 L'opérateur adjoint

Soit

$$A : D(A) \subset E \to F$$

Un opérateur non borné a domaine dense, on défini un opérateur non borné

$$A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$$

Comme suit. On pose

$$D(A^*) = \{y \in F'; \exists c \geq 0 \text{ tel que} |\langle y, Ax\rangle| \leq c \|x\| \, \forall x \in D(A)\}$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous espace vectoriel de F'.On définit également

A^*y pour $y \in D(A^*)$ comme suit :

On considère l'application :

$$g : D(A) \to \Bbbk \text{ définit par : } g(x) = \langle y, Ax\rangle \quad , \quad x \in D(A).$$

On a

$$|g(x)| \leq c \|x\| \quad \forall x \in D(A) \text{ },\forall y \in D(A^*)$$

Grâce au théorème (Hanh-Banach forme analytique) on sait que g peut être prolongée en une application linéaire: $f : E \to \mathbb{k}$ telle que

$$|f(x)| \leq c \|x\| \quad , \ \forall x \in E$$

Par suite $f \in E'$, on remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E est que $D(A)$ est dense dans E.

On pose

$$A^* y = f$$

Il est clair que l'opérateur A^* est linéaire. L'opérateur A^* :$D(A^*) \subset F' \to E'$ est appelé l'adjoint de A. On a par conséquent la relation fondamentale suivante qui lie A et A^*

$$\langle y, Ax \rangle_{F' \times F} = \langle A^* y, x \rangle_{E' \times E} \quad \forall x \in D(A) \text{ },\forall y \in D(A^*)$$

Proposition 2 Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné a domaine dense alors A^* est fermé (i.e. $G(A^*)$ est fermé dans $F' \times E'$)

Théorème 5 Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné fermé avec $\overline{D(A)} = E$, alors les propriétés

suivantes sont équivalentes

i) $D(A) = E$

ii) A est borné

iii) $D(A^*) = F'$

iv) A^* est borné

Définition 13 Soit $A : D(A) \subset E \to E$.

A est dit **auto adjoint** ssi $D(A) = D(A^*)$ et $A = A^*$

A est **symétrique** ssi $(y, Ax) = (Ay, x), \forall x, y \in D(A)$

1.5 Les opérateurs abstraits de régularisation

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur défini de

$D(A) \subset H$ dans H avec $\overline{D(A)} = H$.

Définition 14 On dit que A est un opérateur dissipatif si

$$Re \langle A(u), u \rangle_H \leq 0 , \forall u \in D(A)$$

Définition 15 On dit que A est un opérateur accrétif ssi $(-A)$ est un opérateur dissipatif, i.e.

$$\text{Re} \langle A(u), u \rangle_H \geq 0 , \forall u \in D(A).$$

Définition 16 Un opérateur dissipatif A est dit maximal si son extension est lui même.

Proposition 3 Soit A est un opérateur défini de $D(A) \subset H$ dans H avec $\overline{D(A)} = H$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est un opérateur dissipatif

ii) $\|(A - \lambda I)u\| \geq \text{Re}\,\lambda \|u\|$. $\forall u \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}\,\lambda > 0$

iii) $\|(A - \lambda I)u\| \geq \lambda \|u\|$. $\forall u \in D(A)$ et pour tout λ tel que $\lambda > 0$

Démonstration. Supposons que (i) soit vérifiée.

Soit $u \in D(A)$ et $\text{Re}\,\lambda > 0$, alors

$$\text{Re} \langle Au - \lambda u , u \rangle = \text{Re} \langle Au , u \rangle - \text{Re}\,\lambda \|u\|^2 \leq - \text{Re}\,\lambda \|u\|^2 ,$$

donc

$$\|Au - \lambda u \| \|u\| \geq - \text{Re} \langle Au - \lambda u , u \rangle \geq \text{Re}\,\lambda \|u\|^2 .$$

Ce qu'implique (ii).

Il est clair que (ii) implique (i).

Supposons que (iii) soit vraie. Pour tout $u \in D(A)$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\|Au\|^2 - 2\lambda \ \text{Re} \langle Au , u \rangle = \|Au - \lambda u \|^2 - \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0$$

Donc

$$2\lambda \ \text{Re} \langle Au , u \rangle \leq \|Au\|^2$$

Comme $\lambda > 0$ est arbitraire, il résulte que $\text{Re} \langle Au , u \rangle \leq 0$.

Théorème 6 Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, le prolongement est aussi un opérateur dissipatif.

Corollaire 1 Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.

Théorème 7 Tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif.

Proposition 4 Soit $A : D(A) \subset H \to H$ avec $\overline{D(A)} = H$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est un opérateur maximal dissipatif.

ii) $Im(A - \lambda) = H$ pour certains $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > 0$

iii) $Im(A - \lambda) = H$ pour certains $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > 0$

Théorème 8 Soit

$$A : D(A) \subset H \to H \quad \text{avec } \overline{D(A)} = H$$

un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

Théorème 9 i) A est un opérateur dissipatif maximal.

ii) A est fermé $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et de plus on a:

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$$

Théorème 10 Soit $A : D(A) \subset H \to H$ avec $\overline{D(A)} = H$ un opérateur dissipatif maximal ,alors

i) $A_\varepsilon^{-1} \in L(H)$

ii) $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq 1$

iii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} u = u$ pour tout $u \in H$,où $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$;$\varepsilon > 0$.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\{\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \rho(A)$$

donc $(I - \lambda A)$ est continument inversible, d'ou $(I - \lambda A)^{-1}$existe et borné. Il est défini sur H tout entier puisque

$$\frac{1}{\varepsilon} \in \{\varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

On déduit que

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} \in \ L(H),$$

mais

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I) = -\frac{1}{\varepsilon}(I - \varepsilon A).$$

D'où

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} = -\varepsilon(I - \varepsilon A)^{-1}.$$

On pose

$$A_{\varepsilon}^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}.$$

On déduit

$$A_{\varepsilon}^{-1} \in \ L(H)$$

En utilisant le théorème 2, on déduit que :

$$\left\|(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1}\right\| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\ 1} = \varepsilon,$$

donc

$$\left\|A_{\varepsilon}^{-1}\right\| \leq 1.$$

Supposons tout d'abord que $u \in D(A)$, d'où :

$$\left\|A_{\varepsilon}^{-1}u - u\right\| = \left\|(I - \varepsilon A)^{-1}u - u\right\| = \left\|\varepsilon(I - \varepsilon A)^{-\ 1}Au\right\| \leq \varepsilon \left\|Au\right\|$$

Ainsi par passage à la limite, lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_{\varepsilon}^{-1}u = u \text{ pour tout } u \in D(A).$$

Comme on a

$$\overline{D(A)} = H,$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_{\varepsilon}^{-1}u = u \ \text{ pour tout } \ u \in H$$

Exemple 1 Soit A $= \frac{\partial}{\partial t}$ où

$$D(A) = \{u \in L_2(Q) \ / \ \ u(0,t) = 0\}$$

et

$$Q = (0,1) \times (0,T)$$

Alors A est un opérateur accrétif

Démonstration Nous avons

$$\langle Au, u\rangle = \int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}dxdt = \int_0^1 u\ \overline{u}\big|_0^T dx - \int_Q u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt$$

donc

$$\langle Au, u\rangle + \overline{\langle Au, u\rangle} = \int_0^1 |u(x,T)|^2 dx - \int_0^1 |u(x,0)|^2 dx$$

alors

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle = \int_0^1 |u(x,T)|^2 dx,$$

Car

$$u(x,0) = 0.$$

D'où

$$\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle \geq 0$$

Exemple 2 On prend A$=\frac{\partial^3}{\partial t^3}$, de domaine de définition

$$D(A) = \left\{ u \in L_2(0,a)/\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L_2(0,a)\ ;\ u(0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a) = 0 \right\},$$

alors A est un opérateur dissipatif.

Démonstration nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle &= \mathrm{Re}\int_0^a \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{u}\,dt \\
&= \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}\right|_0^a - \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dt \\
&= -\left.\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right|_0^a + \int_0^a \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}dt \\
&= -\left|\frac{\partial u}{\partial t}(a)\right|^2 + \left. u\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}\right|_0^a - \int_0^a u\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial t^3}dt
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle Au, u\rangle + \overline{\langle Au, u\rangle} = -\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(a)\right|^2$$

D'où

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0$$

On pose $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1} = (I - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3})^{-1}$, pour $\varepsilon > 0$

Les opérateurs A_ε^{-1} ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$g_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial^3 g_\varepsilon}{\partial t^3} = g \ , \ g_\varepsilon(0) = 0 \ , \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial t^2}(a) = 0.$$

Donc le problème adjoint est

$$g_\varepsilon^* - \varepsilon \frac{\partial^3 g_\varepsilon^*}{\partial t^3} = g \ , \ g_\varepsilon^*(0) = 0 \ , \frac{\partial g_\varepsilon^*}{\partial t}(0) = 0 \ , \frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial t^2}(a) = 0$$

Proposition 5 Soit $u \in L_2(0, a)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| A_\varepsilon^{-1} u - u \right\|_{L_{2(0,a)}} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* u - u \right\|_{L_{2(0,a)}} = 0$$

On note par $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$.

pour $u \in L_2(\Omega)$, on note par

$$u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} u \quad ; \quad v_\varepsilon^* = \left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* v$$

Propriétés

$$\frac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t^k} \in L_2(\Omega) \quad ; \quad k = \overline{0, 3}.$$

D'autre part

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, T), \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(x, T), \forall x \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial^k v_\varepsilon^*}{\partial t^k} \in L_2(\Omega), k = \overline{0, 3}.$$

De plus on a

$$v_\varepsilon^*(x, 0) = 0, \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}(x, T), \frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}(x, T), \forall x \in [0, 1]$$

$$\left\|A_{\varepsilon}^{-1}u\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}, \forall \varepsilon > 0$$

$$\left\|\left(A_{\varepsilon}^{-1}\right)^* v\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v\|_{L_2(\Omega)}, \forall \varepsilon > 0$$

$$\left\langle A_{\varepsilon}^{-1}u, v\right\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle u, \left(A_{\varepsilon}^{-1}\right)^* v\right\rangle_{L_2(\Omega)}$$

Si $u \in L_2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, alors

1. $\dfrac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, de plus $\dfrac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{\varepsilon}$ et $u_{\varepsilon}(x,T) = A_{\varepsilon}^{-1}(u(0,T))$

2. $\dfrac{\partial u_{\varepsilon}^*}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{\varepsilon}^*$ *et* $u_{\varepsilon}^*(x,T) = \left(A_{\varepsilon}^{-1}\right)^* (u(0,T))$

3. *Si* $u \in L_2(\Omega)$, *alors*

$$a - \lim_{\varepsilon \to 0} \left\|A_{\varepsilon}^{-1}u - u\right\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

$$b - \lim_{\varepsilon \to 0} \left\|\left(A_{\varepsilon}^{-1}\right)^* u - u\right\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Exemple 3 On prend A=$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, de domaine de définition

$$D(A) = \left\{u \in H = L_2(0,a)/\frac{\partial u}{\partial t} , \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L_2(0,a), u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(a) = 0\right\},$$

alors A est un opérateur dissipatif.

Démonstration

En effet, nous avons

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = \operatorname{Re}\int_0^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}\,dt = \operatorname{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}\right|_0^a - \int_0^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dt = -\int_0^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dt \leq 0.$$

L'opérateur

$$u_{\varepsilon} = \left(A_{\varepsilon}^{-1}\right) u = (u - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})$$

dont l'adjoint est

$$u_{\varepsilon}^* = \left(A_{\varepsilon}^{-1}\right)^* u = (u - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})$$

a les mêmes propriétés que l'opérateur $A = \frac{\partial^3}{\partial t^3}$

Chapitre 2

Position du problème et unicité de la solution

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème mixte pour équation aux dérivées partielles d'ordre cinq de type mixte avec condition non classique.

On montre l'unicité de la solution forte du problème dans un espace de Sobolev avec poids. La démonstration est basée sur deux estimations à priori de l'opérateur engendré par le problème considéré.

2.2 Position du problème

Soit le rectangle

$$\Omega = (0, T) \times (0, 1)$$

On considère l'équation :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) = f(t, x) \tag{2.1}$$

A l'équation (2.1) on associe les conditions initiales

$$lu = u(0, x) = \varphi(x) \qquad x \in (0, 1) \tag{2.2}$$

$$qu = \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x) \qquad x \in (0,1), \tag{2.3}$$

les condition aux bords

$$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = 0 \qquad t \in (0,T) \tag{2.4}$$

$$u(t,1) = 0 \qquad t \in (0,T) \tag{2.5}$$

$$u(t,0) = 0 \qquad t \in (0,T), \tag{2.6}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(t,\xi)\, d\xi = 0 \qquad t \in (0,T), \tag{2.7}$$

où ψ et φ sont deux fonctions données et vérifient les conditions de compatibilité données dans $(2.4), (2.5), (2.6)$ et (2.7).

Dans ce chapitre on montre l'unicité de la solution du problème $(2.1) - (2.7)$. On ramène le problème $(2.1) - (2.7)$ a la forme opérationnelle suivante

$$Lu = F$$

où $L = (\mathcal{L}, l, q)$ .L'operateur L est considéré de E dans F, E est un espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant $(2.4) - (2.5) - (2.6)$ et (2.7), et dont la norme est

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega x^2 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt + \int_\Omega \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(x \times \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right|^2 dxdt + \underset{0 \le t \le T}{Sup} \int_0^1 x^2 \left\{\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |u|^2\right\} dx,$$

et F est un espace de Hilbert, constitué des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ obtenu comme complétés de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^5(0,1) \times W_2^5(0,1)$ par rapport à la norme suivante

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|(f,\varphi,\psi)\|_F^2 = \int_\Omega x^2 |f(t,x)|^2 dxdt + \int_0^1 x^2 \left\{\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|^2 + |\psi|^2 + |\varphi|^2\right\} dx.$$

En utilisant la méthode des inégalités énergétique, on établie deux estimations à priori et on montre ensuite que l'opérateur L est un homéomorphisme linéaire entre l'espace E et l'espace F.

2.3 Estimations à priori

Théorème 11 Pour toute fonction $u \in D(L)$ on a l'estimation à priori

$$\|Lu\|_F \leq c\,\|u\|_E \tag{2.8}$$

Où c est une constante $\left(c = \sqrt{2}\right)$

Démonstration on a

$$x^2\,|f(t,x)| = x^2\,|\mathcal{L}u|^2 \leq 2\left\{x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\right|^2\right\}$$

d'où

$$\int_\Omega x^2\,|f(t,x)|\,dxdt \leq 2\int_\Omega\left\{x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\right|^2\right\}dxdt \tag{2.9}$$

et on a

$$\int_0^1 x^2\left\{|u(0,x)|^2 + \left|\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^2\partial t}\right|\right\}dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x^2\left\{|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right|^2\right\}dx$$

d'où

$$\int_0^1 x^2\left\{|\varphi|^2 + |\psi|^2 + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2\right\}dx \leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x^2\left\{|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right|^2\right\}dx \tag{2.10}$$

D'après $(2.9) - (2.10)$ on obtient

$$\|Lu\|_F^2 \leq 2\,\|u\|_E^2$$

D'où

$$\|Lu\|_F \leq c\,\|u\|_E \qquad \left(c = \sqrt{2}\right)$$

Théorème 12 Pour toute fonction $u \in D(L)$ on a l'estimation à priori

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F \tag{2.11}$$

où la constante $C = \sqrt{14} \times e^{\frac{cT}{2}}$

Démonstration soit

$$J_g = \int_x^1 g(t,\xi)\,d\xi$$

et

$$Mu = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2xJ\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

On considère la forme quadratique

$$Re \int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}uM\bar{u}dxdt.$$

En multipliant (2.1) par $\overline{Mu}$ on obtient

$$\mathcal{L}u\overline{Mu} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right]\left[x^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2xJ\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right] \tag{2.12}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dx = \int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx + \int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx + \int_0^1 x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx$$
$$+ \int_0^1 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx. \tag{2.13}$$

On a

$$\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx = \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx$$

En intégrant par partie chaque terme du second nombre de (2.13) et en prenant en considération les conditions aux limites, on obtient:

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx &= -2\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)xJ\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx \\
&= 2\int_0^1 J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(xJ\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)dx \\
&= 2\int_0^1 J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx + 2\int_0^1 J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)dx \\
&= 2\int_0^1 \left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx - 2\int_0^1 J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}x\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx + \int_0^1 2x\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = 2\int_0^1 \left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx,$$

d'où

$$Re\int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}J\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}dx = \int_0^1 \left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right)dx \\ &= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x\partial t^2 x}dx \\ &= \left[-x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right]_0^1 + \int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}dx + \left[-x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}\right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}x\right)dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx = 2\int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}dx + \int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^2\partial t^2}dx \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx &= \left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right)dx \\ &= 2\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx \\ &= \left[2x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx = -2\int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}dx. \tag{2.16}$$

De $(2.14)\,,(2.15)\,et\,(2.16)$ on obtient :

$$\begin{aligned}Re\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dx &= \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx + \int_0^1 \left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx + Re\left\{2\int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}dx\right\} \\ &+Re\left\{\int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^2\partial t^2}dx\right\} + Re\left\{-2\int_0^1 x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x\partial t^2}dx\right\},\end{aligned}$$

d'où

$$Re\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dx = \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx + \int_0^1 \left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx + Re\left\{\int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^2\partial t^2}dx\right\} \tag{2.17}$$

En intégrant par partie le troisième terme de (2.17) par rapport à t, on obtient

$$\int_0^\tau \int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^2\partial t}\right)dxdt = \left[\int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^2\partial t}dx\right]_0^\tau$$

$$-\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^2\partial t}dxdt.$$

$$\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^2\partial t^2}dxdt=\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx-\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx$$
$$-\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^2\partial t}dxdt$$

d'où

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^2\partial t^2}dxdt=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx$$

En substituant dans (2.17). on obtient

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt=\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx$$

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt=\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dx \tag{2.18}$$

En utilisant les propriétés des modules et les inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}Re\int_0^\tau\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt &\leq \int_0^\tau\int_0^1|\mathcal{L}u|\left|\overline{Mu}\right|dxdt\\ &\leq \int_0^\tau\int_0^1|\mathcal{L}u|\left|x^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}+2xJ\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|dxdt\\ &\leq \int_0^\tau\int_0^1 x^2|\mathcal{L}u|\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|dxdt+2\int_0^\tau\int_0^1 x|\mathcal{L}u|\left|J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|dxdt\\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left(|\mathcal{L}u|^2+\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2\right)dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left(x^2|\mathcal{L}u|^2+\left|J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2\right)dxdt,\end{aligned}$$

d'où

$$Re\int_0^\tau\int_0^1 \mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt\leq\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2|\mathcal{L}u|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2dxdt$$
$$+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2dxdt. \tag{2.19}$$

En substituant (2.18) dans (2.19), on obtient

$$\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2 dx$$

$$\leq\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

D'où

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2 dx\leq\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt.$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2 dx. \tag{2.20}$$

On considère les formules

$$\int_0^1 x^2 e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dx, \tag{2.21}$$

et

$$\int_0^1 x^2 e^{-ct}u\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dx. \tag{2.22}$$

En intégrant (2.21) par partie par rapport à t on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)dxdt &= \left[\int_0^1 x^2 e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right]_0^\tau-\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdt\\ &= \int_0^1 x^2 e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx-\int_0^1 x^2\left|\psi\right|^2 dx\\ &\quad -\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dxdt+c\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}2Re\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dxdt &= \int_0^1 x^2 e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx-\int_0^1 x^2\left|\psi\right|^2 dx\\ &\quad +c\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt,\end{aligned}$$

et on a

$$2Re\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dxdt\leq 2\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|dxdt$$

d'où

$$\int_0^1 x^2 e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx-\int_0^1 x^2\left|\psi\right|^2 dx+c\int_0^\tau\int_0^1 x^2 e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$\leq 2\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|dxdt \tag{2.23}$$

On a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2\geq 2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|$$

d'où

$$-\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt-\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2dxdt\leq -2\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|dxdt \tag{2.24}$$

En additionnant (2.23) et (2.24), on obtient

$$\int_0^1 x^2e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2dx-\int_0^1 x^2|\psi|^2dx+(c-1)\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt$$
$$-\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2dxdt\leq 0. \tag{2.25}$$

En intégrant (2.22) par partie par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}u\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dx &= \left[\int_0^1 x^2u\bar{u}e^{-ct}\right]_0^\tau-\int_0^\tau\int_0^1 x^2\bar{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}e^{-ct}-ce^{-ct}u\right)dxdt\\ &= \int_0^1 x^2|u|^2e^{-c\tau}dx-\int_0^1 x^2|\varphi|^2dx-\int_0^\tau\int_0^1 x^2\overline{u}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-ct}dxdt\\ &\quad +c\int_0^\tau\int_0^1 x^2|u|^2e^{-ct}dxdt.\end{aligned}$$

d'où

$$2\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}u\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dxdt=\int_0^1 x^2|u|^2e^{-c\tau}dx-\int_0^1 x^2|\varphi|^2dx+c\int_0^\tau\int_0^1 x^2|u|^2e^{-ct}dxdt.$$

Donc

$$\int_0^1 x^2|u(\tau,x)|^2e^{-c\tau}dx-\int_0^1 x^2|\varphi|^2dx+c\int_0^\tau\int_0^1 x^2|u|^2e^{-ct}dxdt\leq 2\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}2|u|\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right|dxdt. \tag{2.26}$$

On a

$$|u|^2+\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right|^2\geq 2|u|\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right|$$

d'où

$$-\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\;|u|^2dxdt-\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right|^2dxdt\leq -2\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}|u|\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right|dxdt. \tag{2.27}$$

En additionnant (2.26) et (2.27), on obtient

$$\int_0^1 x^2 \left|u(\tau,x)\right|^2 e^{-c\tau}dx - \int_0^1 x^2 \left|\varphi\right|^2 dx - \int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt + (c-1)\int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \ \left|u\right|^2 dxd \leq 0.$$

Pour $c \geq 1$, on obtient

$$\int_0^1 x^2 \left|u(\tau,x)\right|^2 e^{-c\tau}dx - \int_0^1 x^2 \left|\varphi\right|^2 dx - \int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq 0. \tag{2.28}$$

En additionnant (2.25)et (2.28),on obtient

$$\int_0^1 x^2 e^{-c\tau} \left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx + \int_0^1 x^2 \left|u(\tau,x)\right|^2 e^{-c\tau}dx - \int_0^1 x^2 \left|\psi\right|^2 dx - \int_0^1 x^2 \left|\varphi\right|^2 dx$$

$$+(c-2)\int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt - \int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt \leq 0.$$

Pour $c \geq 2$ on obtient

$$\int_0^1 x^2 e^{-c\tau} \left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx + \int_0^1 x^2 \left|u(\tau,x)\right|^2 e^{-c\tau}dx \leq \int_0^1 x^2 \left|\psi\right|^2 dx + \int_0^1 x^2 \left|\varphi\right|^2 dx$$

$$+\int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt,$$

d'où

$$\frac{1}{8}\int_0^1 x^2 e^{-c\tau} \left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{8}\int_0^1 x^2 \left|u(\tau,x)\right|^2 e^{-c\tau}dx \leq \frac{1}{8}\int_0^1 x^2 \left|\psi\right|^2 dx + \frac{1}{8}\int_0^1 x^2 \left|\varphi\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^\tau \int_0^1 x^2 e^{-ct} \left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt \tag{2.29}$$

De l'équation (2.1), on a

$$\mathcal{L}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right|^2 &= \left|\mathcal{L}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 \leq \left(\left|\mathcal{L}u\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|\right)^2 \\
\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right|^2 &\leq x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 + 2x^2\left|\mathcal{L}u\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| + x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right|^2 \leq 2x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 + 2x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2,$$

d'où

$$\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\right|^2 dxdt\le\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt. \tag{2.30}$$

En additionnant nombre à nombre (2.20) , (2.29) et (2.30), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\right|^2 dxdt+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|u(\tau,x)\right|^2e^{-c\tau}dx\le\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\psi\right|^2+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdtdx$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt.$$

On a

$$\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1 x^2e^{-ct}\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt\le\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right|^2 dxdt,$$

et

$$\frac{1}{8}\int_0^1 x^2e^{-cT}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx\le\frac{1}{8}\int_0^1 x^2e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx,$$

d'où

$$\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^3 u(\tau,x)}{\partial x^2\partial t}\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2e^{-cT}\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\right|^2 dxdt+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|u(\tau,x)\right|^2e^{-cT}dx\le\frac{7}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\psi\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx.$$

En prenant le "Sup", on obtient

$$\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)\right|^2 dxdt+\sup_{0\le t\le T}\int_0^1 x^2\{|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t^2}+|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+|u|^2\}dx$$

$$\le\kappa\left[\int_0^T\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left\{\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2+\left|\psi\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right\}dx\right],$$

où

$$\kappa=\frac{Max\left\{\frac{7}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right\}}{Min\left\{\frac{e^{-CT}}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right\}}=14e^{CT},$$

donc

$$\|u\|_E^2 \leq \kappa \|Lu\|_F^2,$$

d'où

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F ,$$

où

$$C = \sqrt{\kappa} = \sqrt{14} e^{c\frac{T}{2}}$$

2.4 Unicité de la solution

Théorème 13 la solution du problème $(2.1) - (2.7)$ est unique.

Démonstration De l'inégalité (2.8) on déduit que l'opérateur L est continu et de l'inégalité (2.11) on déduit qu'il admet un inverse L^{-1}continu et que l'ensemble des valeurs $R(L)$ est fermé, i.e. L est un homéomorphisme linéaire de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)$, qui prouve l'unicité de la solution.

Chapitre 3

Résolvabilité du problème

Les estimations (2.8) et (2.11) montrent que l'opérateur $L : E \longrightarrow F$ est continu et son image est fermée dans F. Pour prouver l'existence de la solution du problème (2.1)-(2.7), il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans F. La preuve est basée sur le lemme suivant.

Lemme 1 Soit

$$D_0(L) = \{u \in D(L) \;/\; lu = 0 \;\; et \;\; qu = 0\}$$

Et soit

$$u \in D_0(L) \;\; et \;\; \omega \in L_2(\Omega).$$

Si pour tout $u \in D_0(L) \;\; et \;\; \omega \in L_2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega x^2 \mathcal{L} u \bar{\omega} dxdt = 0,$$

Alors

$$\omega = 0$$

Démonstration

On a

$$\int_\Omega x^2 \mathcal{L} u \bar{\omega} dxdt = 0,$$

d'où

$$-\int_\Omega x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bar{\omega} dxdt = \int_\Omega x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(x \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) \bar{\omega} dxdt$$

pour $\omega(x,t)$ donnée, on introduit la fonction

$$v(x,t) = x\int_1^x \frac{\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial\xi}}{\xi}d\xi + x\int_1^x \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2}d\xi.$$

On a

$$\int_0^1 v(x,t)\,dx = 0. \tag{3.1}$$

En effet

$$\int_0^1 v(x,t)\,dx = \int_0^1 x\int_1^x \left(\frac{\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial\xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2}\right)d\xi dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\int_1^x \left(\frac{\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial\xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2}\right)d\xi\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(\frac{\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}}{x} + \frac{\omega(x,t)}{x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x} + \omega(x,t)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\omega(x,t)\right]_0^1 = 0.$$

On a aussi

$$x^2\omega \ = x^2v + 2xJv = Nv \tag{3.2}$$

En effet

$$x^2v + 2xJv = x^2v + 2x\int_x^1 v(\psi,t)\,d\psi$$

$$= x^2v + 2x\int_x^1 \psi\int_1^\psi \left(\frac{\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial\xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2}\right)d\xi d\psi$$

$$= x^2v + 2x\left[\frac{1}{2}\psi^2\int_1^\psi \left(\frac{\frac{\partial\omega(\xi,t)}{\partial\xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2}\right)d\xi\right]_x^1 - 2x\int_x^1 \frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{\frac{\partial\omega(\psi,t)}{\partial\psi}}{\psi} + \frac{\omega(\psi,t)}{\psi^2}\right)d\psi$$

$$= x^2v - x^2v - x\int_x^1 \left(\psi\frac{\partial\omega(\psi,t)}{\partial\psi} + \omega(\psi,t)\right)dx$$

$$= -x\left[\psi\omega(\psi,t)\right]_x^1$$

$$= x^2\omega.$$

De l'égalité (3.2), on a

$$-\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}N\bar{v}dxdt = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)x\bar{v}dxdt + 2\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)J\bar{v}dxdt. \tag{3.3}$$

En intégrant par partie le deuxième terme du côté gauche de (3.3), on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} N\bar{v}dxdt = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) x\bar{v}dxdt + 2\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) J\bar{v}\right]$$

$$+2\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\bar{v}dxdt$$

$$= \int_\Omega \left[\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) x + \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right]\bar{v}dxdt$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) + x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right\}\right]\bar{v}dxdt$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(x.x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right\}\bar{v}dxdt$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)\right]\bar{v}dxdt,$$

d'où

$$-\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} N\bar{v}dxdt = \int_\Omega A\frac{\partial u}{\partial t}\bar{v}dxdt, \tag{3.4}$$

où

$$Au = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de régularisation $j_\epsilon^{-1} = \left(I + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} et \, (j_\epsilon^{-1})^*$ qui sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} \epsilon\frac{dg_\epsilon(t)}{dt} + g_\epsilon(t) = g(t) \\ g_\epsilon(t)\,|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\epsilon\frac{dg_\epsilon^*(t)}{dt} + g_\epsilon^*(t) = g(t) \\ g_\epsilon^*(t)\,|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

Les solutions vérifient les propriétés suivantes.

Pour $g \in L_2(0,T)$, on a

$$g_\epsilon = \left(j_\epsilon^{-1}\right) g \in W_2^1(0,T) \quad \text{et} \quad g_\epsilon^* = \left(j_\epsilon^{-1}\right)^* g \in W_2^1(0,T).$$

On a aussi

$$g_\epsilon(t)\,|_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad g_\epsilon^*(t)\,|_{t=T} = 0,$$

et

$$\int_0^T |g_\epsilon - g|^2 \, dt \to 0 \quad \text{et} \quad \int_0^T |g_\epsilon^* - g|^2 \, dt \to 0 \quad pour \quad \epsilon \to 0.$$

On remplaçant dans (3.4), u par la fonction régulatrice $(j_\epsilon^{-1})\, u$ et en utilisant la relation $Aj_\epsilon^{-1} = j_\epsilon^{-1}A$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N \left(\frac{\partial \bar{v_\epsilon^*}}{\partial t} \right) dxdt = \int_\Omega A \frac{\partial u}{\partial t} \bar{v_\epsilon^*} dxdt. \tag{3.5}$$

On passant à la limite, (3.5) est vérifiée pour toute fonction vérifiant les conditions $(2.2 - 2.7)$, telle que:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}; \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right); \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right); \frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L_2(\Omega).$$

Le membre gauche de (3.5) est une fonction linéaire et continue et la fonction v_ϵ^* est dérivable

$$v_\epsilon^*; \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x}; \frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}; \frac{\partial^3 v_\epsilon^*}{\partial x^3}; \frac{\partial^4 v_\epsilon^*}{\partial x^4} \in L_2(\Omega),$$

et vérifie les conditions:

$$v_\epsilon^*|_0 = \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x}|_0 = \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x}|_1 = v_\epsilon^*|_1 = 0. \tag{3.6}$$

De plus v_ϵ^* vérifie la condition intégrale (2.7).

On pose: $u = \int_0^t \int_0^\tau v_\epsilon^* (x, \eta) \, d\eta d\tau$ dans (3.4) et en utilisant (3.6), en obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} N \bar{v} dxdt &= \int_\Omega A \frac{\partial u}{\partial t} \bar{v} dxdt - \int_\Omega v_\epsilon^* N \bar{v} dxdt \\ &= \int_\Omega A \frac{\partial u}{\partial t} \left(\bar{v_\epsilon^*} - \epsilon \frac{\partial \bar{v_\epsilon^*}}{\partial t} \right) dxdt, \end{aligned}$$

d'où

$$-\int_\Omega v_\epsilon^* N \bar{v} dxdt = \int_\Omega A \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dxdt - \epsilon \int_\Omega A \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{v_\epsilon^*}}{\partial t} dxdt. \tag{3.7}$$

On a

$$-\epsilon\int_{\Omega}A\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\bar{v_\epsilon^*}}{\partial t}dxdt \; = -\epsilon\textstyle\int_0^1 \left[A\frac{\partial u}{\partial t}\bar{v_\epsilon^*}\right]_0^T dx+\epsilon\int_{\Omega}A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bar{v_\epsilon^*}dxdt$$

$$= \quad \epsilon\int_{\Omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\right)\bar{v_\epsilon^*}dxdt$$

$$= \quad \epsilon\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\right)\bar{v_\epsilon^*}\right]_0^1 dt-\epsilon\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\bar{v_\epsilon^*}}{\partial t}dxdt$$

$$= \quad -\epsilon\int_0^T\left[x^2\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{v_\epsilon^*}}{\partial x}\right]_0^1 dt+\epsilon\int_{\Omega}x^2\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{v_\epsilon^*}}{\partial x^2}dxdt$$

$$= \quad \epsilon\int_{\Omega}x^2\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\right|^2 dxdt,$$

d'où

$$Re\left\{-\epsilon\int_{\Omega}A\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\bar{v_\epsilon^*}}{\partial t}dxdt\right\}=\epsilon\int_{\Omega}x^2\left|\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\geq 0, \tag{3.8}$$

et on a aussi

$$\int_{\Omega}A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}dxdt=\int_0^1\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right]_0^T dx-\int_{\Omega}A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dxdt$$

$$=\int_0^1 A\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\frac{\partial\bar{u}\,(x,T)}{\partial t}dx-\int_{\Omega}A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dxdt$$

$$\int_0^1 A\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\frac{\partial\bar{u}\,(x,T)}{\partial t}dx=\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\right)\frac{\partial\bar{u}\,(x,T)}{\partial t}dx$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\right)\frac{\partial\bar{u}\,(x,T)}{\partial t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\right)\frac{\partial^2\bar{u}\,(x,T)}{\partial x\partial t}dx$$

$$=-\left[x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\bar{u}\,(x,T)}{\partial x\partial t}\right]_0^1+\int_0^1 x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{x^2}\frac{\partial\bar{u}\,(x,T)}{\partial t}\right)$$

d'où

$$\int_0^1 A\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\frac{\partial\bar{u}\,(x,T)}{\partial t}dx=\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u\,(x,T)}{\partial t}\right)\right|dx. \tag{3.10}$$

On a

$$\int_{\Omega}A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dxdt=\int_{\Omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dxdt$$

$$=\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right]_0^1 dt-\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x\partial t}dxdt$$

$$= -\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^1 dt + \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dxdt$$

$$= \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \right]_0^1 dt - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \right) dxdt$$

$$= -\int_0^T \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \right) \right]_0^1 dt + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \right) dxdt,$$

Alors

$$\int_\Omega A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dxdt = \int_\Omega A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt. \tag{3.11}$$

En substituant (3.10) et (3.11) dans (3.9), on obtient

$$\int_\Omega A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dxdt = \int_0^1 x^2 \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} \right) \right| dx - \int_\Omega A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdt,$$

d'où

$$Re \left\{ \int_\Omega A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dxdt \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} \right) \right| dx \geq 0.$$

En utilisant (3.8) et (3.12) dans (3.7), on obtient

$$Re \left\{ -\int_\Omega v_\epsilon^* N \bar{v} dxdt \right\} \geq 0,$$

d'où

$$Re \left\{ \int_\Omega v_\epsilon^* N \bar{v} dxdt \right\} \leq 0,$$

pour $\epsilon \to 0$ on a

$$Re \left\{ \int_\Omega v N \bar{v} dxdt \right\} \leq 0. \tag{3.13}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega v N \bar{v} dxdt = \int_\Omega v \left(x^2 \bar{v} + 2xJ\bar{v} \right) dxdt,$$

d'où

$$\int_\Omega v N \bar{v} dxdt = \int_\Omega x^2 |v|^2 dxdt + \int_\Omega 2xvJ\bar{v} dxdt. \tag{3.14}$$

En intégrant par partie le deuxième terme de (3.14), on obtient

$$\int_\Omega 2xvJ\bar{v} dxdt = \int_0^T \left[-Jv2xJ\bar{v} \right]_0^1 dt + \int_\Omega Jv \left(2J\bar{v} - 2x\bar{v} \right) dxdt$$

$$= 2\int_{\Omega} JvJ\bar{v}dxdt - \int_{\Omega} Jv2x\bar{v}dxdt$$
$$= 2\int_{\Omega} |Jv|^2\, dxdt - \int_{\Omega} \bar{v}2xJvdxdt,$$

d'où

$$Re\int_{\Omega} 2xvJ\bar{v}dxdt = \int_{\Omega} |Jv|^2\, dxdt. \tag{3.15}$$

En utilisant (3.15) dans (3.14), on obtient

$$Re\int_{\Omega} vN\bar{v}dxdt = \int_{\Omega} x^2\, |v|^2\, dxdt + \int_{\Omega} |Jv|^2\, dxdt, \tag{3.16}$$

De (3.13) et (3.16) on obtient

$$\int_{\Omega} x^2\, |v|^2\, dxdt + \int_{\Omega} |Jv|^2\, dxdt = 0,$$

d'où

$$v = 0.$$

En substituant dans (3.2), on obtient

$$x^2\omega = 0,$$

d'où

$$\omega = 0$$

Théorème 14 L'image $R(L)$ de l'opérateur L coïncide avec F.

Démonstration Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si l'implication suivante est vraie

$$\int_{\Omega} x^2\mathcal{L}u\ \ \overline{f}\ dxdt + \int_0^1 x^2\left(\frac{\partial^2 qu}{\partial^2 x}\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial^2 x} + qu\overline{\psi} + l\ u\overline{\varphi}\right)dx = 0, \tag{3.17}$$

pour $u \in E$ arbitraire et $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in F$ implique que f, ψ et φ sont nulles.

En effet, en prenant $u \in D_{\ 0}(L)$ dans (3.17), on obtient

$$\int_{\Omega} x^2\mathcal{L}u\overline{f}dxdt = 0,$$

en utilisant le lemme 1, on a $f = 0$ et pour conséquent, on a :

$$\int x^2\left(\frac{\partial^2 l\ u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2} + qu\ \overline{\psi} + l\ u\ \overline{\varphi}\right)dx = 0 \tag{3.18}$$

L'image de l'opérateur de trace (l, q)est partout dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme:

$$\left[\int_0^1 \left\{ \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|^2 + |\psi|^2 + |\varphi|^2 \right\} dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, et la présente démonstration est achevée.

Résumé

Dans ce travail, on étudie un problème mixte avec condition intégrale pour équation aux dérivées partielles du type mixte. On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace de Sobolev avec poids. La démonstration est basée sur deux estimations à priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Mots Clés. Equation parabolique de type mixte, conditions aux bords, condition intégrale, inégalités énergétique, espace de Sobolev avec poids.

Abstract

In this work, we study a mixed problem with an integral condition for a differential equation of mixed type. The existence and uniqueness of the solution in Sobolev space are proved. The proof is based on two sided a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the considered problem.

Key words: Parabolic equation of mixed type, boundary conditions, integral condition, energy inequalities, weighted Sobolev space.

Bibliographie

[1] Benouar N.E.;Yurchuk,N.I.:*Mixed Problem with an integral condition for parabolic equation with the Bessel operator,Differ.Equation,27,N°*12*,pp.1482-1487(1991)*

[2] Bouziani A.and Benouar N.E.*:Mixed Problem with an integral condition for a third order parabolic,Kobe J.Math.15,pp.47-58(1998).*

[3] Bouziani A.and Benouar N.E.:*Problèm mixte avec condition intégrales pour une classe d'èquation parabolique,C.R.Acad.Sci.Paris,Série1 321(1995),1182.*

[4] Dezin A.A.,*Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels.Usp.Math.Naouk,T.14(1987) 73.*

[5] Friderichs K.,*Symetric hyperbolic linear differential equation,Comm.pure appl.math.7,N°2(1954).*

[6] Garding L.,*Cauchy's problem for hyprbolic equations,University of chicago,lecture notes,1957.*

[7] Haïm Brezis ,*Analyse fonctionnelle théorie et application.*

[8] Leray J., *Lecture on hypebolic differential equations with variable coeffitiens. Princeton,Justfor adv. Study, 1952.*

[9] Ladyzhenskaya O.A.,*Mixed problem for hyperbolic equations,Edition Mir nauka,1974. différetielles opérationnells dans lerectangle,doklady akad. bssr (en russe),T.30 N^0 1 pp. 1061-1063.*

[10] M. Bouzit and N. Teyar *Int. A Class of Third Order Parabolic Equations with Integral Conditions. Journal of Math. Analysis, Vol. 3, 2009, no. 18, 871 - 877*

[11] M. Bouzit and N. Teyar *Int.High Order Mixed Type Differetial Equations With Integral Boundary Condition. Journal of Math. Analysis, Vol. 3, 2009, no. 14, 681 - 687*

[12] M.Denche and A.L..Marhoune :*high-order mixed type differential equations with weighted integral boundary conditions.Electronic journal of differential equation, vol.2000(200),n° 60,pp.1-10*

[13] M.Denche and A.L..Marhoune , *Mixed Problem with non local boundary condition for a third-order partial differential equation of mixed type .IJMMS 26:7(2001)417-426*

[14] Petrovsky I. G., *Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentilgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen, bull. Univ d'etat, moscow, 1938,*N^0 *7, 1-74.*

[15] P. Shi,*weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint,Siam J.Anal., 24(1993), 46-58.*

[16] P. Shi and M. Shillor, *Design of Contact Patterns in One Dimentional Theermoelasticity,inTheoretical Aspects of Industtrial Design,Society for Industrial Applied Mathematics,Pheladelphia,PA, 1992.*

[17] P.A.Raviart,J.M.Thomas,*Introduction à l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles.*

[18] V.Trénoguine,*Analyse fonctionnelle*

[19] Yurchuk N. I., *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form*$(\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}})+A$*, Differetial Equations, 10,* N^0 *5 (1974), pp.735-737.*

[20] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an itegral condition for certain parabolic equations, Differetial Equations, 22, pp. 1457-1463.*

ملخص

ندرس في هذا العمل مسألة مختلطة بشرط تكاملي لمعادلة تفاضلية جزئية من النوع المختلط.
نبرهن على وجود و وحدانية الحل في فضاء صوبوليف بعيار. يعتمد البرهان على متراجحتين مسبقتين و كثافة صورة المؤثر المولد بالمسألة المعتبرة.

الكلمات ألمفتاحيه: معادلة مكافئة من النوع المختلط، شروط حدية، شرط تكاملي، متراجحة طاقوية، فضاء صوبوليف بعيار.