

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM- EL BOUAGHI
FACULTE DES SCINCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
Département Mathématique et Informatique

N° D'ordre :.....
Série :.....

Mémoire pour obtenir le diplôme de Magister en Mathématique

Option : *Éléments d'arithmétique*

THÈME

**Spectre de certains entiers
algébriques**

Présenté par : BOUBELLOUTA Khadidja

Soutenu le : 09/ 05 / 2013

Devant le jury composé de :

Président:: *Mr.NOUI Lemnouar* *Professeur* *Univ.Batna*

Rapporteur : *Mr.ZAIMI Toufik* *M.C.A* *Univ.Oum El Bouaghi*

Examineurs : *Mr.GUEDJIBA Said* *Professeur* *Univ.Batna*

Mr.ALIOUCHE Abdelkrim *M.C.A* *Univ.Oum El Bouaghi*

Invité : *Mme .ZAKRAOUI Hanifa* *M .C .B* *Univ.Oum El Bouaghi*

Table des matières

1	Des classes d'entiers algébriques	5
1.1	Éléments de la théorie des corps.	6
1.2	Des classes remarquables d'entiers algébriques.	9
1.2.1	Nombres de Pisot.	9
1.2.2	Nombres de Salem.	11
1.2.3	Nombres de Perron.	16
1.3	Ensembles de Delone réels.	17
2	Sur le spectre des nombres réels	21
2.1	Quelques propriétés du spectre.	22
2.2	Sur le spectre des nombres des Pisot.	27
3	Une propriété d'approximation des nombres de Pisot	38
3.1	Propriétés des fonctions d'itérations.	39
3.2	Une Caractérisation des nombres de Pisot.	44
3.3	Problèmes ouverts et remarques.	56

Notation

\mathbb{N} l'ensemble des entiers rationnels non-négatifs

\mathbb{Z} l'anneau des entiers rationnels

\mathbb{Q} le corps des nombres rationnels

\mathbb{R} le corps des nombres réels

\mathbb{C} le corps des nombres complexes

A^* l'ensemble des éléments non-nuls du sous-ensemble A de \mathbb{C}

A^n le produit cartésien de n copies de A , où $A \subset \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

\mathbb{S} l'ensemble des nombres de Pisot

\mathbb{T} l'ensemble des nombres de Salem

M_α le polynôme minimal sur \mathbb{Q} du nombre algébrique α

$disc(K)$ le discriminant du corps de nombres K

\mathbb{Z}_K l'anneau des entiers du corps de nombres K

$Norm(\alpha) = Norm_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ la norme du nombre algébrique $\alpha \in K$, pour l'extension K/\mathbb{Q}

$Tr(\alpha) = Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ la trace du nombre algébrique $\alpha \in K$, pour l'extension K/\mathbb{Q}

$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim(V)$ la dimension du (\mathbb{K} -)espace vectoriel V

$[K : L]$ le degré de l'extension de corps $K \supset L$

\bar{u} le conjugué complexe du nombre $u \in \mathbb{C}$

$Re(z)$ la partie réelle du complexe z

$Im(z)$ la partie imaginaire du complexe z

A' l'ensemble dérivé de la partie réelle A

Introduction

Dans leur étude de la représentation des nombres réels dans des bases non-entières, P. Erdős, I. Joó et V. Komornik étaient ramenés à considérer une classe de nombres de Pisot satisfaisant une certaine propriété d'approximation. Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel plus grand que 1, dont les autres conjugués sur le corps des rationnels sont de module inférieurs à 1. Utilisant un résultat, dû à C. Frougny, de la théorie de l'automate, Y. Bugeaud a montré en 1994 que tous les nombres de Pisot satisfont cette propriété.

En étroite connection avec cette propriété, P. Erdős, I. Joó et V. Komornik avaient déterminé la borne inférieure, disons $l_m(\theta)$, des quantités $|P(\theta)|$, où m est un entier positif, θ est un nombre de Pisot et P parcourt l'ensemble des polynômes à coefficients entiers de module au plus égal à m . Le résultat de Y. Bugeaud, mentionné ci-haut, peut être résumé comme suit : Si le réel $\theta > 1$, n'est pas un nombre de Pisot, alors il existe $m \geq 1$, tel que $l_m(\theta) = 0$. Comme la preuve de ce dernier théorème ne permet pas d'avoir une estimation de m , beaucoup d'auteurs se sont lancés dans la détermination des quantités $l_m(\theta)$: P. Borwein et K. Hare ont trouvé un algorithme permettant de calculer $l_m(\theta)$ pour tout nombre de Pisot θ , M. Pedicini et V. Komornik ont calculé les quantités $l_m((1 + \sqrt{5})/2)$ pour tout m , T. Zaimi a montré que ces quantités $l_m((1 + \sqrt{5})/2)$ sont optimales lorsque θ parcourt l'intervalle $]1, 2[$... Dans la direction inverse, plusieurs auteurs, comme P. Erdős, V. Komornik et S. Akiyama, ont exhibé des majorations du plus petit entier $m \geq 1$, tel que $l_m(\theta) = 0$ lorsque θ n'est pas un nombre de Pisot.

Tres récemment, et juste après qu'on a commencé le travail dans ce mémoire, D. Y. Feng a obtenu une réponse complète au problème de l'estimation de l'entier m en montrant que θ est un nombre de Pisot si et seulement si $l_{[\theta]}(\theta) \neq 0$, où $[.]$ désigne la fonction partie entière.

Le but principal de ce mémoire est de donner une preuve explicite et complète du théorème de D. Y. Feng. Cette preuve est exhibé dans le dernier chapitre avec les mêmes outils figurants dans le papier de D. Y. Fen, notamment les fonctions d'itérations multi-dimensionnelles.

Dans le premier chapitre, on rappelle des notions de bases de la théorie des corps des nombres algébriques. L'accent est ensuite mise sur des propriétés de certaines classes remarquables d'entiers algébriques : Les nombres de Pisot et les nombres de Salem. Ces nombres, riches en propriétés arithmétiques, ont été étudiés pendant presque un siècle et paraissent dans plusieurs domaines

des mathématiques. On rappelle, en particulier, la construction de Salem et qui dit que tout nombre de Pisot est limite d'une suite de nombres de Salem. On termine ce chapitre par citer quelques des propriétés topologiques de certains sous-ensembles réels, tels que les ensembles de Delone et les ensembles de Meyer, et qui nous seront utiles par la suite.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à montrer des propriétés analytiques du spectre, disons B , d'un nombre réel $\theta > 1$. A cette fin, on cite d'abord quelques propositions qui expliquent la distribution des éléments de B sur la droite réelle et on montre, en particulier, que l'ensemble B est partout dense dès qu'il admet zéro comme point d'accumulation. Ensuite, dans le deuxième paragraphe on s'intéresse à la distribution des éléments de l'ensemble B lorsque le réel θ parcourt l'ensemble des nombres de Pisot, et on donne une preuve très détaillée du théorème de V. Komornick et P. Erdős. De ce dernier résultat, on déduira le théorème de Y. Bugeaud, et cela sans utiliser les résultats de la théorie de l'automate.

Enfin dans le dernier chapitre on donne une preuve complète du théorème de D. Y. Feng. Après avoir rappelé, dans le premier paragraphe, quelques propriétés des fonctions d'itération qui sont à la base de la preuve du résultat de D. Y. Feng, on donne, dans le second, une démonstration très détaillée du résultat signalé ci-haut. Ensuite on clos ce chapitre par l'étude de quelques questions analogues à celle résolue précédemment et qui font intervenir les nombres de Salem.

Une liste de références, une conclusion et des mots clés sont donnés à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

Des classes d'entiers algébriques

-
- 1- Éléments de la théorie des corps.
 - 2- Des classes remarquables d'entiers algébriques.
 - 3- Ensembles de Delone réels.
-

Le but de ce chapitre est de citer quelques propriétés de certaines classes remarquables d'entiers algébriques : les nombres de Pisot et les nombres de Salem. A cette fin on rappelle d'abord dans le premier paragraphe des notions élémentaires de la théorie des corps. Ensuite on montre, dans le deuxième paragraphe, quelques propriétés sur les nombres de Pisot, et on prouve, en particulier, la construction de Salem. Cette construction est un outil qui permet de fournir des suites de nombres de Salem au voisinage de tout nombre de Pisot. Enfin, on rappelle dans le dernier paragraphe quelques notions topologiques des parties de la droite réelle \mathbb{R} munie de sa topologie usuelle.

1.1 Éléments de la théorie des corps.

Plusieurs ouvrages peuvent être consultés pour les résultats de ce paragraphe. On se réfère ici principalement ici aux livres [11], [12], [16] et [17].

Définition 1.1.1. *Soit K un sous corps du corps des nombres complexes \mathbb{C} . On dit que K est un corps de nombres si, considéré comme espace vectoriel sur le corps des rationnels \mathbb{Q} , il est de dimension finie. Cette dimension s'appelle degré de K et est notée $[K : \mathbb{Q}]$.*

Étant donnés deux corps de nombres K et L , on dit que L est une extension de K , si $K \subset L$.

Il est clair, par définition, que tout corps de nombres K est une extensions de \mathbb{Q} . L'extension par adjonction $\mathbb{Q}(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{C}$, est l'intersection de tous les sous-corps de \mathbb{C} contenant θ .

Définition 1.1.2. *On appelle plongement d'un corps de nombres K tout homomorphisme d'anneaux, de K dans \mathbb{C} .*

Définition 1.1.3. *Un nombre algébrique est une racine d'un polynôme non-nul, à coefficients rationnels.*

Exemple 1.1.1.

1) Le réel $\alpha = 1/2$ est un nombre algébrique car $2\alpha - 1 = 0$.

- 2) Le nombre $\beta = 1 + i$, où $i^2 = -1$, est algébrique car $(\beta - 1)^2 + 1 = 0$.
- 3) Il est bien connu que le nombre π n'est pas algébrique.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Comme l'anneau $\mathbb{Q}[x]$, des polynômes à coefficients dans \mathbb{Q} , est Euclidien, l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{Q}[x], P(\alpha) = 0\}$ est un idéal principal de $\mathbb{Q}[x]$. De la définition ci-dessus l'ensemble I est réduit à $\{0\}$ si α n'est pas algébrique. Lorsque α est algébrique, l'idéal I admet un générateur, noté M_α . On peut aussi supposer que M_α est unitaire, c'est-à-dire que le coefficient du monôme de plus haut degré de M_α est égal à 1. Dans ce cas le polynôme M_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ et est unique ; ce polynôme s'appelle polynôme minimal de α .

En d'autres termes M_α est le seul polynôme unitaire, à coefficients rationnels, de degré minimal, ayant α pour racine.

Définition 1.1.4. *On appelle entier algébrique toute racine d'un polynôme unitaire, à coefficients dans l'anneau des entiers rationnels \mathbb{Z} .*

Exemple 1.1.2.

- 1) Un entier algébrique est un nombre algébrique.
- 2) Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ et i sont des entiers algébriques, alors que $1/2$ ne l'est pas.

Il est important de signaler qu'un nombre algébrique α est un entier algébrique si et seulement si $M_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Définition 1.1.5. *Soit α un nombre algébrique. Alors les racines du polynôme minimal de α sont dits conjugués de α . Le degré de α est le degré de son polynôme minimal, et se note $\deg(\alpha)$.*

Si α un nombre algébrique de degré d , alors α admet exactement d conjugués, car son polynôme minimal n'admet pas de racines doubles (il est irréductible). Dans ce cas le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$, qui est l'intersection de tous les sous-corps de \mathbb{C} contenant α , est de degré d , c'est à dire que, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = d$. Il est facile de voir, par exemple, que l'ensemble $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}\}$ est une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Soit K un corps de nombres de degré d . Rappelons qu'il existe exactement d plongements de K dans \mathbb{C} . Il s'ensuit lorsque $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, où α un nombre algébrique de degré d , que les d

plongements $\sigma_1, \dots, \sigma_d$, de K dans \mathbb{C} transforment α en ses conjugués. De plus, si $\beta \in K$, alors les conjugués de β sont parmi les nombres $\sigma_1(\beta), \dots, \sigma_d(\beta)$, chacun d'eux étant répété $d/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ fois.

Définition 1.1.6. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$. On appelle *polynôme réciproque de P* , le polynôme

$$P^*(x) := x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n.$$

On dit que P est *réciproque* si $P^* = P$.

Notons que si α est une racine non-nulle de P , alors $1/\alpha$ est une racine de P^* . En particulier si P est réciproque, et $P(0) \neq 0$, les inverses des racines de P sont des racines de P^* .

Exemple 1.1.3.

1) Le polynôme $P(x) = 3x^2 + 4x + 3$ est réciproque, car $P^*(x) = x^2 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \left(3\frac{1}{x^2} + 4\frac{1}{x} + 3\right) = 3 + 4x + 3x^2 = P(x)$, mais le polynôme $P(x) = x + 2$ ne l'est pas.

2) Pour p premier, le polynôme cyclotomique d'ordre p , défini par $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, est réciproque.

Définition 1.1.7. Soit θ un nombre algébrique, alors la *trace* (resp., la *norme*) de θ est la somme (resp., le produit) des conjugués de θ .

Si on note la trace (resp., la norme) de θ par $Tr(\theta)$ (resp., par $N(\theta)$), et si $M_\theta(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, alors $Tr(\theta) = -a_{n-1}$ et $N(\theta) = (-1)^n a_0$. Les nombres rationnels $Tr(\theta)$ et $N(\theta)$ sont des entiers rationales lorsque θ est un entier algébrique.

1.2 Des classes remarquables d'entiers algébriques.

L'ouvrage de référence pour cette partie est le livre [2] et aux monographes [14] et [15]. On se réfère également pour certains passages au mémoire de magister [1].

1.2.1 Nombres de Pisot.

Définition 1.2.1.1. *Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel plus grand que 1, dont les autres conjugués sont de module inférieur à 1.*

Exemple 1.2.1.1.

1) Les entiers rationnels > 1 , sont des nombres de Pisot de degré 1.

2) Si $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $M_\theta(x) = x^2 - x - 1 = (x - (1 + \sqrt{5})/2)(x - (1 - \sqrt{5})/2)$ et donc θ est un nombre de Pisot de degré 2.

L'ensemble des nombres de Pisot est usuellement noté \mathbb{S} . Beaucoup de résultats est connu sur les nombres de Pisot. Citons quelques un :

- $\min \mathbb{S} = \theta_0 = 1.3247\dots$, où $\theta_0^3 - \theta_0 - 1 = 0$ [6].
- L'ensemble \mathbb{S} est fermé dans \mathbb{R} [14].
- Le plus petit point limite de \mathbb{S} est le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$ [6].
- Le plus petit élément de l'ensemble dérivé second de \mathbb{S} est 2 (voir [13-15] et [4])

Pour montrer, d'une manière simple, qu'il existe des nombres de Pisot de degré arbitrairement grand, rappelons les deux résultats connus qui suivent :

Proposition 1.2.1.1. *Soit P un polynôme unitaire, à coefficients entiers rationnels, possédant une seule racine réelle θ plus grande que 1, et les autres racines de module strictement inférieur à 1. Alors $P(x) = x^s M_\theta(x)$, où s est un élément de l'ensemble \mathbb{N} des entiers rationnels non-négatif et $\pm\theta \in \mathbb{S}$.*

Preuve. Comme $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $P(\theta) = 0$ et P est unitaire, alors θ est un entier algébrique et il existe $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $P = M_\theta P_1$. De l'hypothèse toutes les racines du polynôme P_1 sont

des entiers algébriques appartenant à l'intérieur du disque unité, puisque les polynômes P et M_θ sont unitaires et donc P_1 l'est aussi. Par suite $P_1(x) = x^s$ et les conjugués de θ sont de module inférieur à 1. Ainsi $\pm\theta \in \mathbb{S}$. \square

Proposition 1.2.1.2. *Si f et g sont deux polynômes tels que $|f(z)| > |g(z)|$ sur le cercle $|z| = \rho$, où $\rho > 0$, alors le polynôme $f \pm g$ admet le même nombre de racines que f dans le disque ouvert $|z| < \rho$.*

Preuve. Ce résultat est un corollaire immédiat du théorème de Rouché, vrai pour des fonctions analytiques au lieu des polynômes. \square

Corollaire 1.2.1.1. *Soit P un polynôme à coefficients entiers rationnels, tel que $P(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_0 \neq 0$, et*

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|.$$

Alors P possède une unique racine θ dans $|z| > 1$ et ses autres racines dans $|z| < 1$. Ainsi $\pm\theta$ est un nombre de Pisot.

Preuve. On a les relations suivantes, pour $|z| = 1$,

$$|z^n + \dots + a_1z + a_0| \leq 1 + \dots + |a_0| < |a_{n-1}z^{n-1}| = |a_{n-1}|. \quad (1.1)$$

D'après la proposition 1.2.1.2, le polynôme P possède dans $|z| < 1$, le même nombre de zéros que $a_{n-1}z^{n-1}$, soit $n - 1$. Comme P n'a pas de racines sur $|z| = 1$, à cause de l'inégalité stricte dans (1.1), il admet donc une seule racine θ dans $|z| > 1$ et θ est réelle, car sinon par conjugaison complexe on obtient deux racines de module plus grand que 1. Comme $a_0 \neq 0$, de la proposition 1.2.2.1, on déduit que θ ou bien $-\theta$ est un nombre de Pisot. \square

Ce corollaire appliqué par exemple au polynôme $P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 1$, où $n \geq 2$, montre que P est le polynôme minimal d'un réel θ tel que $\pm\theta$ est un nombre de Pisot. De plus, comme

$P(1) = -1 < 0$ et $0 < P(3) = 1$, θ est un nombre de Pisot de degré n . On déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 1.2.1.2. *Pour tout $d \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un nombre de Pisot de degré d .*

Preuve. D'après l'exemple 1.2.2.1, tout $\theta \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ est un nombre de Pisot de degré $d = 1$. Pour $d \geq 2$, et d'après le calcul ci-dessus il existe toujours un nombre de Pisot de degré d . \square

Un autre moyen pour obtenir des nombres de Pisot se résume dans la propriété suivante :

Proposition 1.2.1.3. *Soit θ un nombre de Pisot de degré d , alors θ^n est aussi un nombre de Pisot de degré d .*

Preuve. Il est clair que $\mathbb{Q}(\theta^n) \subset \mathbb{Q}(\theta)$, et si $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ sont des conjugués de θ , alors il existe d plongements $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$, de $\mathbb{Q}(\theta)$ dans \mathbb{C} tels que $\sigma_i(\theta) = \theta_i$ $\forall i \in \{1, \dots, d\}$. Donc $\sigma_i(\theta^n) = \theta_i^n$ et les conjugués de θ^n sont parmi les nombres $\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_d^n$. Supposons que θ^n soit de degré d' . Alors d'après la relation

$$[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\theta^n)] [\mathbb{Q}(\theta^n) : \mathbb{Q}],$$

on a $d = md'$, où $m \in \mathbb{N}$, et donc chaque conjugué de θ^n est répété m fois dans l'ensemble $\{\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_d^n\}$. Comme $\theta^n > 1$, et $|\theta_i^n| < 1$ pour tout $i \geq 2$, on obtient $m = 1$ et $d = d'$. Ainsi θ^n est aussi un nombre de Pisot de degré d . \square

1.2.2 Nombres de Salem.

Définition 1.2.2.1. *Un nombre de Salem est un entier algébrique réel plus grand que 1, dont tous les autres conjugués sont de module inférieur ou égal à 1, avec au moins un conjugué de module 1.*

Soient M_τ le polynôme minimal d'un nombre de Salem τ , et soit $M_\tau^*(x) = x^n M_\tau(1/x)$ son polynôme réciproque. Si α une racine de module 1 de P , alors $\bar{\alpha} = 1/\alpha$ est également racine des deux polynômes M_τ et M_τ^* . Par suite, M_τ et M_τ^* ont une racine commune et comme M_τ est unitaire et irréductible, alors $M_\tau = \lambda M_\tau^*$, $M_\tau(0) = \lambda$ et $1 = \lambda M_\tau(0)$; d'où $\lambda^2 = 1$. Si $\lambda = -1$, alors ± 1 est racine de M_τ , d'où la contradiction puisque M_τ est irréductible et admet une racine de module plus grand que 1. Par conséquent, $\lambda = 1$ et $M_\tau = M_\tau^*$; dans ce cas on dit que le polynôme M_τ est réciproque. De plus le degré de M_τ est un entier pair au moins égal à 4. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 1.2.2.1. *Le polynôme minimal d'un nombre de Salem τ est réciproque et est de degré ≥ 4 . De plus, τ possède un seul conjugué de module inférieur à 1, qui est son inverse, et ses autres conjugués sont de module 1.*

Preuve. La première partie de la proposition résulte du calcul précédent. Si α est racine de M_τ alors $1/\alpha$ est aussi racine de M_τ , car il est réciproque. Ainsi $1/\tau$ est le seul conjugué de τ ayant un module < 1 , car τ n'admet pas d'autres conjugués, autre que lui même de module > 1 . \square

Rappelons que le polynôme minimal d'une racine de l'unité est dit polynôme cyclotomique. En rapport avec les polynômes réciproques, rappelons le théorème de Kronecker qui dit que si les racines d'un polynôme unitaire P à coefficients entiers rationnels vérifiant $P(0) \neq 0$, sont de module au plus égal à 1, alors ces racines sont toutes des racines de l'unité. En d'autres termes le polynôme P est un produit de polynômes cyclotomiques.

Proposition 1.2.2.2. *Si un polynôme P à coefficients entiers, de degré n , unitaire et réciproque, possède une seule racine τ , $\tau > 1$, et ses autres racines sont de module inférieur ou égale à 1, avec au moins une de module 1, alors $P = CM_\tau$, où $C = 1$ ou bien C est un produit de polynômes cyclotomiques, et τ est un nombre de Salem ou bien un entier quadratique algébrique.*

Preuve. Si le polynôme P est irréductible alors le résultat est immédiat avec $P = M_\tau$ et $C = 1$. Sinon, il s'écrit $P = CM_\tau$, où C est un polynôme unitaire à coefficients entiers rationnels,

n'ayant que des racines de module inférieur ou égal à 1. D'après le théorème de Kronecker, le polynôme C est cyclotomique et est donc réciproque ; d'où M_τ est aussi réciproque. Par suite, τ est ou bien un nombre de Salem (si M_τ est de degré plus grand que 1), ou bien un entier quadratique racine d'une équation de la forme $X^2 + aX + 1 = 0$, où a est un entier rationnel plus grand que 1. \square

Exemple 1.2.2.1. Le plus petit nombre de Salem est racine du polynôme : $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$, il vaut approximativement 1,1762... Les quatre plus petits nombres de Salem actuellement connus sont racines de degrés respectifs 10, 18, 14 et 14. Par analogie avec l'ensemble \mathbb{S} , l'ensemble des nombres de Salem est usuellement noté \mathbb{T} . La plupart des exemples de nombres de Salem est fournie par la célèbre construction de Salem.

Théorème 1.2.2.1. (Construction de Salem).

Soit θ un nombre de Pisot de degré supérieur à 2, de polynôme minimal P . Soit Q_n^ε le polynôme défini par

$$Q_n^\varepsilon(z) = z^n P(z) + \varepsilon P^*(z),$$

où $\varepsilon = \pm 1$, P^* est le polynôme réciproque de P . Alors, pour $n \geq n_0$, l'équation $Q_n^\varepsilon(z) = 0$ admet pour racine un nombre de Salem τ_n^ε . En outre, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n^\varepsilon = \theta$ et les τ_n^ε tendent vers θ à droite ou bien à gauche selon la valeur de ε .

Preuve. Le nombre de Pisot θ est une racine du polynôme irréductible P de degré s . Puisque θ n'est pas une unité quadratique, i.e. n'est pas racine d'un polynôme unitaire réciproque du second degré ayant θ et $1/\theta$ pour racines, les polynômes P et P^* sont premiers entre eux. En d'autres termes les polynômes P et P^* n'ont pas de racines communes.

Pour n entier positif, considérons le polynôme

$$Q_n^+(z) = z^n P(z) + P^*(z).$$

Le polynôme Q_n^+ est unitaire, à coefficients entiers. Ses zéros sont donc des entiers algébriques. Nous allons montrer que pour $n \geq n_0$, polynôme Q_n^+ a pour zéro un nombre de Salem. Écrivons :

$$\frac{P(z)}{P^*(z)} = \frac{z - \theta}{1 - \theta z} \prod_{i=1}^{s-1} \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z},$$

où les α_i sont les conjugués de θ , de module < 1 , et s est le degré de P .

Soit $\eta > 0$, suffisamment petit pour que P^* soit sans zéro dans $1 \leq |z| \leq 1 + \eta$. Alors on a pour $|z| = 1 + \eta$,

$$|z - \alpha_i|^2 = |z|^2 + |\alpha_i|^2 - \alpha_i \bar{z} - \bar{\alpha}_i z, \quad (1.2)$$

et

$$|1 - \bar{\alpha}_i z|^2 = 1 + |\alpha_i|^2 |z|^2 - \alpha_i \bar{z} - \bar{\alpha}_i z. \quad (1.3)$$

De (1.2) et (1.3) on obtient $|z - \alpha_i| > |1 - \bar{\alpha}_i z|$ et $\prod_{i=1}^{s-1} |z - \alpha_i| > \prod_{i=1}^{s-1} |1 - \bar{\alpha}_i z|$. Ainsi

$$\left| \prod_{i=1}^{s-1} \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z} \right| > 1.$$

Si on pose $z = (1 + \eta) \exp^{i\varphi}$, alors on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - \theta}{1 - \theta z} \right|^2 &= \left| \frac{(1 + \eta) \exp^{i\varphi} - \theta}{1 - \theta(1 + \eta) \exp^{i\varphi}} \right|^2 = \frac{[(1 + \eta) \exp^{i\varphi} - \theta][(1 + \eta) \exp^{-i\varphi} - \theta]}{[1 - \theta(1 + \eta) \exp^{i\varphi}][1 - \theta(1 + \eta) \exp^{-i\varphi}]} \\ &= \frac{(1 + \eta)^2 - \theta(1 + \eta) \exp^{i\varphi} - \theta(1 + \eta) \exp^{-i\varphi} + \theta^2}{1 - \theta(1 + \eta) \exp^{-i\varphi} - \theta(1 + \eta) \exp^{i\varphi} + \theta^2(1 + \eta)^2} = \frac{\theta^2 + (1 + \eta)^2 - \theta(1 + \eta)(\exp^{i\varphi} + \exp^{-i\varphi})}{1 - \theta(1 + \eta)(\exp^{i\varphi} + \exp^{-i\varphi}) + \theta^2(1 + \eta)^2} \\ &= \frac{\theta^2 + (1 + \eta)^2 - 2\theta(1 + \eta) \cos \varphi}{1 + \theta^2(1 + \eta)^2 - 2\theta(1 + \eta) \cos \varphi} = f(\varphi). \end{aligned}$$

Comme la dérivé

$$f'(\varphi) = \frac{2\theta(1 + \eta) \sin \varphi [1 + \theta^2(1 + \eta)^2 - (1 + \eta)^2 - \theta^2]}{D^2},$$

s'annule pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, et reste positive sur l'intervalle $]0, \pi[$, la fonction f admet un minimum en $\varphi = 0$. D'où la relation

$$\left| \frac{z - \theta}{1 - \theta z} \right| > \frac{\theta - (1 + \eta)}{\theta(1 + \eta) - 1} > 1 - \eta \frac{\theta + 1}{\theta - 1},$$

car $1 - \frac{\theta - (1 + \eta)}{\theta(1 + \eta) - 1} = \frac{\eta(\theta + 1)}{\theta(1 + \eta) - 1} < \frac{\eta(\theta + 1)}{\theta - 1}$. Choisissons maintenant η assez petit de façon à obtenir

l'inégalité $1 - \eta[(\theta + 1)/(\theta - 1)] > 0$. Dans ce cas on a pour $|z| = 1 + \eta$

$$\begin{aligned} \left| z^n \frac{p(z)}{p^*(z)} \right| &> (1 + \eta)^n \left(1 - \eta \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right) \\ &> (1 + n\eta) \left(1 - \eta \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right) = 1 + \eta \left(n - \frac{\theta + 1}{\theta - 1} - n\eta \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right) > 1, \end{aligned}$$

lorsque $n > 2\frac{\theta+1}{\theta-1}$ et $\eta < \frac{\theta-1}{2(\theta+1)}$. Par suite d'après le théorème de Rouché, le polynôme Q_n^+ possède dans $|z| < 1 + \eta$, autant de zéros que le monome $z^n p$, soit $n + s - 1$. Comme η est arbitrairement petit, cela prouve que Q_n^+ possède un seul zéro, disons τ_n^+ , de module supérieur à 1, et qui est donc nécessairement réel. De plus le polynôme Q_n^+ est réciproque, puisque

$$Q^*(z) = z^{n+s} Q\left(\frac{1}{z}\right) = z^s p\left(\frac{1}{z}\right) + z^n p(z) = z^n p(z) + p^*(z).$$

Il s'ensuit de la proposition 1.2.2.2, que $1/\tau_n^+$ est le seul zéro de Q_n^+ de module plus petit que 1, et les autres racines de Q_n^+ sont donc de module 1; on a ainsi $Q_n^* = K_n T_n$, avec K_n un produit de polynômes cyclotomiques et T_n est le polynome minimal de τ_n^+ .

Pour finir la preuve, montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n^+ = \theta$. Tout d'abord, on a $Q_n^+(\theta) = P^*(\theta) \neq 0$, car P et P^* sont premiers entre eux et $P'(\theta) > 0$. Donc il existe $\sigma > 0$ et $\mu > 0$ tels que $P'(x) \geq \mu$ pour $1 < \theta - \sigma \leq x \leq \theta + \sigma$. Soit δ vérifiant $|\delta| < \sigma$, alors $P(\theta + \delta) = \delta P'(\varepsilon)$ pour $\theta < \varepsilon < \theta + \delta$ ou bien pour $\theta + \delta < \varepsilon < \theta$. Or, $P(\theta + \delta)$ est du signe de δ . Par suite, pour n assez grand, $Q_n^+(\theta + \delta) = (\theta + \delta)^n P(\theta + \delta) + P^*(\theta + \delta)$ est du signe de δ . Choisissons alors δ tel que $\delta p^*(\theta) < 0$. Les quantités $Q_n^+(\theta)$ et $Q_n^+(\theta + \delta)$ sont alors de signes opposés; d'où $\tau_n^+ \in [\theta, \theta + \delta]$ si $P^*(\theta) > 0$. On voit ainsi que les τ_n^+ tendent vers θ à droite si $P(\theta) < 0$, et

à gauche si $P^*(\theta) > 0$. Cela prouve que, pour $n \geq n_0$, les τ_n^+ sont des nombres de Salem, car sinon, on aurait une infinité d'entiers quadratiques, tous différents, tendant vers θ et par suite leurs polynômes minimaux auraient leurs coefficients bornés, ce qui est impossible.

En considérant la suite des polynômes $Q_n^- = z^n P - P^*$, on construirait de la même façon une suite de nombres de Salem tendant vers θ de l'autre côté. \square

On déduit alors du théorème précédent le résultat suivant.

Corollaire 1.2.2.1. *Il existe des nombres de Salem de degré arbitrairement grand.*

Une autre classe importante d'entiers algébriques, et qui contient les nombres de Pisot et de Salem, est celle des nombres Perron.

1.2.3 Nombres de Perron.

Définition 1.2.3.1. *Un nombre de Perron est un entier algébrique réel $\theta > 1$, dont les autres conjugués sont de module inférieur à θ .*

Contrairement aux ensembles des nombres de Pisot et de Salem, la distribution des nombres de Perron est claire.

Théorème 1.2.3.1. *L'ensemble des nombres de Perron est dense dans l'intervalle $[1, \infty[$.*

Preuve. Si $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ sont des conjugués d'un nombre de Perron θ , alors il existe d plongements $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$, de $\mathbb{Q}(\theta)$ dans \mathbb{C} tels que $\sigma_i(\theta) = \theta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$. Donc $\sigma_i(\theta^n) = \theta_i^n$ et les conjugués de θ^n sont parmi les nombres $\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_d^n$. Ainsi les puissances d'un nombre de Perron sont aussi des nombres de Perron. Rappelons aussi qu'il est bien connu que 1 est un point limite de l'ensemble des nombres de Perron. Pour cela il suffit de considérer la suite des polynômes de Selmer définis par la relation :

$$P_n(x) = x^n - x - 1,$$

où $n \geq 2$. Il est clair que P_n admet une racine réelle $\theta_n \in]1, 1 + 1/n[$ car $P_n(1) < 0 < P_n(1 + 1/n)$; donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$. D'après un résultat de Selmer θ_n est un nombre de Perron et le polynôme minimal de θ_n est P_n [2].

On peut maintenant déduire que les nombres de Perron sont denses dans l'intervalle $[1, \infty[$. En effet, supposons $1 \leq a < b < \infty$. Alors $1 < b/a$ et il existe donc un nombre de Perron θ satisfaisant

$$\theta < \frac{b}{a}, \quad (1.4)$$

puisque 1 est un point limite des nombres de Perron. De (1.4) on déduit

$$\frac{\log b - \log a}{\log \theta} > 1,$$

et il existe donc un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\log a}{\log \theta} < m < \frac{\log b}{\log \theta}. \quad (1.5)$$

Il s'ensuit de (1.5) que $\log a < \log \theta^m < \log b$ et donc le nombre de Perron $\theta^m \in]a, b[$. Ainsi tout sous-intervalle de $[1, \infty[$ contient un nombre de Perron, d'où le résultat. \square

1.3 Ensembles de Delone réels.

Dans ce paragraphe et comme partout dans ce mémoire, on suppose le groupe additif \mathbb{R} muni de la topologie usuelle, déduite de la valeur absolue. Il est bien connu, dans ce cas, que \mathbb{R} est un groupe topologique abélien localement compact.

Définition 1.3.1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est relativement dense dans \mathbb{R} s'il existe un compact K de \mathbb{R} tel que

$$A + K = \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3.1.

1) \mathbb{Z} est relativement dense dans \mathbb{R} . En effet, $\forall r \in \mathbb{R}$, $r = [r] + \{r\}$, où $[.]$ et $\{.\}$, sont

respectivement les fonctions parties entières et fractionnaires. Donc $\mathbb{R} = \mathbb{Z} + [0, 1]$, puisque $\mathbb{Z} + [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

2) $2\mathbb{Z}$ est relativement dense dans \mathbb{R} . En effet de l'exemple ci-dessus on déduit que $2\mathbb{R} = 2\mathbb{Z} + 2[0, 1] = 2\mathbb{Z} + [0, 2]$ et donc $\mathbb{R} = 2\mathbb{R} = 2\mathbb{Z} + [0, 2]$. De la même manière on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{Z} + [0, n] = \mathbb{R}$, et donc l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est relativement dense dans \mathbb{R} .

3) L'ensemble \mathbb{N} n'est pas relativement dense dans \mathbb{R} , puisque tout compact de \mathbb{R} est borné.

Définition 1.3.2. Une partie A de \mathbb{R} est dite uniformément discrète s'il existe un voisinage V de 0 tel que

$$(A - A) \cap V = \{0\}.$$

Exemple 1.3.2.

1) \mathbb{N} est uniformément discret dans \mathbb{R} car $(\mathbb{N} - \mathbb{N}) \cap]-1, 1[\subset \mathbb{Z} \cap]-1, 1[= \{0\}$. Pour la même raison, l'ensemble \mathbb{Z} est uniformément discret puisque $\mathbb{Z} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

2) L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels n'est pas uniformément discret, car $\forall \varepsilon > 0$, $(\mathbb{Q} - \mathbb{Q}) \cap]-\varepsilon, \varepsilon[= \mathbb{Q} \cap]-\varepsilon, \varepsilon[\neq \{0\}$.

Rappelons qu'un ensemble réel A est discret s'il est sans point limite finie, en d'autres termes tout intervalle fini de \mathbb{R} rencontre A au plus en un nombre fini de points. Il est clair qu'un ensemble uniformément discret est discret; la réciproque de la dernière proposition n'est pas toujours vraie. En effet si l'on considère l'ensemble $A = \{n + 1/n, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \mathbb{N}^*$, alors tout intervalle fini contient au plus un nombre fini d'éléments de A mais la distance $1/n$ entre les éléments n et $n + 1/n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Définition 1.3.3. Une partie A de \mathbb{R} est dite ensemble de Delone si elle est à la fois uniformément discrète et relativement dense dans \mathbb{R} .

Exemple 1.3.3.

1) Des exemples précédents on déduit que \mathbb{Z} est un ensemble de Delone.

2) Les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Q} ne sont pas de Delone puisque \mathbb{N} n'est pas relativement dense et \mathbb{Q} n'est pas uniformément discret.

Définition 1.3.4. Une partie réelle A est dite ensemble de Meyer si A est relativement dense dans \mathbb{R} et si l'ensemble $A - A = \{a - a' \mid (a, a') \in A^2\}$ est uniformément discret.

Des définitions précédentes on déduit le résultat suivant.

Proposition 1.3.1. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La partie A est de Meyer.
- (ii) Les ensembles A et $A - A$ sont de Delone.

Preuve. Il est clair que si A est un ensemble de Delone alors A relativement dense, et si $A - A$ est un ensemble de Delone alors $A - A$ est uniformément discret. Ainsi l'implication (ii) \Rightarrow (i) est vraie. Inversement, soit A un ensemble de Meyer. Alors A est relativement dense, c'est-à-dire qu'il existe un compact K tel que $A + K = \mathbb{R}$. Donc $(A - A) + K = \mathbb{R} - A = \mathbb{R}$, et l'ensemble $(A - A)$ est relativement dense. De plus comme $(A - A)$ est uniformément discret, il existe un voisinage V de 0 tel que $((A - A) - (A - A)) \cap V = \{0\}$, et par suite $(A - A) \cap V = \{0\}$, puisque $(A - A) \cap V \subset ((A - A) - (A - A)) \cap V = \{0\}$. Ainsi les ensembles A et $A - A$ sont de Delone. \square

Pour clore ce chapitre notons que dans certaines démonstration on va utiliser le résultat bien connu de *Bolzano-Weierstrass* :

Proposition 1.3.2. Si A est une partie infinie et bornée de \mathbb{R} , alors A admet un point d'accumulation.

Preuve. Soit A une partie infinie et bornée de \mathbb{R} . Elle est incluse dans un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Supposons au contraire qu'elle ne contienne aucun point d'accumulation. il en ressort alors que tout point x de $[a, b]$ admet un voisinage ouvert $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[$ ne rencontrant A qu'au plus en un point, x lui-même. La famille $(]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[)_{x \in [a, b]}$ constitue un recouvrement ouvert pour $[a, b]$. On déduit qu'il existe une sous-famille finie $(]x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}[)_{1 \leq i \leq \varepsilon}$ telle que :

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^p]x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}[.$$

D'où

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^p]x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}[\right) = \bigcup_{i=1}^p (A \cap]x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i[).$$

Or l'ensemble $A \cap]x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i[$ ne contient qu'un point au plus (x_i lui-même) donc le nombre d'éléments de A ne peut, au plus dépasser p . C'est la contradiction recherchée. \square

Chapitre 2

Sur le spectre des nombres réels

-
- 1- Quelques propriétés du spectre.
 - 2- Sur le spectre des nombres de Pisot.
-

Dans ce chapitre, on définit la propriété d'approximation comme dans les papier de P. Erdős, I. Joó et V. Komornik [7], et on montre le théorème de Bugeaud [5], comme corollaire du théorème de P. Erdős et V. Komornik [8]. Dans le premier paragraphe on montre quelques propriétés analytiques du spectre, disons $B(\theta)$, d'un nombre réel quelconque $\theta > 1$ (voir les papiers [3] et [18-22]) et on prouve en particulier que l'ensemble $B(\theta)$ est partout dense si et seulement si zéro est un point d'accumulation de cet ensemble [22]. Dans le deuxième paragraphe on s'intéresse au cas où $\theta \in \mathbb{S}$. On donne une preuve complète du théorème de P. Erdős et V. Komornick et de ce dernier résultat, on déduira le théorème de Y. Bugeaud, comme dans la thèse de K. Al-Shaalan, et cela sans utiliser les résultats de la théorie de l'automate.

Dans tout ce qui suit on suppose $m \in \mathbb{N}^*$ et θ est un nombre réel satisfaisant $\theta > 1$.

2.1 Quelques propriétés du spectre.

Définition 2.1.1. *Le spectre du réel θ est l'ensemble*

$$B_m = B_m(\theta) = \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \theta^i, \varepsilon_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il est clair que B_m est un ensemble non-fini et symétrique par rapport à 0, c.-à-d., $B_m = -B_m$.

Si l'on note

$$A_m = A_m(\theta) = \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \theta^i, \varepsilon_i \in \{0, 1, \dots, m\}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

alors $A_m(\theta) \subset [0, +\infty[$,

$$B_m = A_m - A_m$$

et pour tout couple (m, θ) on a :

Proposition 2.1.1. *L'ensemble $A_m(\theta)$ est discret.*

Preuve. Soit $a \in A_m \cap]0, \rho]$ où $\rho > 0$. Si $\sum_{i=0}^n \varepsilon_i \theta^i$ désigne une représentation de a dans A_m , où $\varepsilon_n \neq 0$, alors $\theta^n \leq a \leq \rho$ et $n \leq \log \rho / \log \theta$. Ainsi a prend au plus $(m+1)^{N+1}$ valeurs, où N est le plus grand entier $\leq \log \rho / \log \theta$. Donc a prend au plus un nombre fini de valeurs et A_m est discret. \square

Pour étudier la distribution des éléments des ensembles $A_m(\theta)$ et $B_m(\theta)$ sur la droite réelle, les quantités suivantes ont été définies dans l'article [7] :

$$l_m(\theta) = \inf \{b, b > 0, b \in B_m(\theta)\}.$$

Il est clair que $l_{m+1}(\theta) \leq l_m(\theta) \leq 1$, car le polynôme $1 \in B_m(\theta)$. Notons aussi que si $\theta \in \mathbb{Z}$ alors $l_m(\theta) = 1, \forall m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.1.2. *Avec la notation précédente on a les équivalences suivantes :*

- (i) $l_{2m}(\theta) > 0 \Leftrightarrow B_m(\theta)$ est uniformément discret.
- (ii) $l_m(\theta) > 0 \Leftrightarrow A_m(\theta)$ est uniformément discret.

Preuve.

(i) Supposons $l_{2m}(\theta) > 0$. Comme $B_{2m} = B_m - B_m$, on a $|b_1 - b_2| \geq l_{2m}(\theta), \forall b_1 \neq b_2 \in B_m(\theta)$, et donc $B_m(\theta)$ uniformément discret. Inversement, si $B_m(\theta)$ est uniformément discret, alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\forall b_1 \neq b_2 \in B_m(\theta) \Rightarrow |b_1 - b_2| \geq \varepsilon$. Ainsi $\inf \{b, b > 0, b \in B_{2m}(\theta)\} \geq \varepsilon$ et $l_{2m}(\theta) \geq \varepsilon > 0$.

(ii) Comme $B_m = A_m - A_m$, on obtient d'une façon similaire que dans le cas ci-dessus, le résultat voulu. \square

Proposition 2.1.3. *Si $\theta \geq m+1$, alors $l_m(\theta) = 1$.*

Preuve. Soit $P(x) = \varepsilon_n x^n + \dots + \varepsilon_1 x + \varepsilon_0$, où $\varepsilon_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n \neq 0$. Alors

$$|P(\theta)| \geq |\varepsilon_n \theta^n| - \dots - |\varepsilon_1 \theta| - |\varepsilon_0| \geq \theta^n - \dots - m\theta - m.$$

Posons $F_n(\theta) = \theta^n - m(\theta^{n-1} + \dots + \theta + 1)$. Pour montrer la proposition, il suffit de prouver que $F_n(\theta) \geq 1, \forall n \geq 1$. On procède par récurrence sur n . Le résultat est vrai pour $n = 1$, puisque $F_1(\theta) = \theta - m \geq 1$. Supposons que $F_n(\theta) \geq 1$, pour un certain $n \geq 1$. Comme

$$F_{n+1}(\theta) = \theta F_n(\theta) - m,$$

on obtient, immédiatement, de l'hypothèse de récurrence, $F_{n+1}(\theta) \geq \theta - m$ et donc $F_{n+1}(\theta) \geq 1$. Ainsi, $l_m(\theta) = 1$ puisque le polynôme constant 1 vérifie l'égalité. \square

Dès propositions 2.1.2 et 2.1.3 on déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.1.1. *Si $\theta \geq m + 1$, alors l'ensemble $A_m(\theta)$ est uniformément discret.*

Preuve. Soit $\theta \geq m + 1$. D'après la proposition 2.1.3, on a $l_m(\theta) = 1$, et donc $A_m(\theta)$ est uniformément discret d'après la proposition 2.1.2 (ii). \square

La proposition suivante complète, dans un certain sens, celle qui la précède.

Proposition 2.1.4. *Supposons $\theta < 1 + m$. Alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe un polynôme P à coefficients dans $\{0, \pm 1, \dots, \pm m\}$ tel que $|P(\theta)| < \varepsilon$.*

Preuve. Considérons les $(m + 1)^{n+1}$ éléments de la forme $\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n$, où $\varepsilon_i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Comme $\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n \leq m(1 + \theta + \dots + \theta^n) = m\frac{\theta^{n+1}-1}{\theta-1}$, ces nombres $\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n \in \left[0, m\frac{\theta^{n+1}-1}{\theta-1}\right]$. Il s'ensuit du principe des tiroirs de Dirichlet, qu'il existe deux nombres s et s' tels que $s = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n$, $s' = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_1\theta + \dots + \varepsilon'_n\theta^n$ et

$$|s - s'| \leq \frac{m\frac{\theta^{n+1}-1}{\theta-1}}{(m+1)^{n+1} - 1} = \left(\frac{m}{\theta-1}\right) \frac{\theta^{n+1} - 1}{(m+1)^{n+1} - 1}.$$

Si l'on pose $P(\theta) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n) - (\varepsilon'_0 + \varepsilon'_1\theta + \dots + \varepsilon'_n\theta^n)$, alors P est à coefficients dans $\{0, \pm 1, \dots, \pm m\}$, est de degré $\leq n$ et vérifie

$$|P(\theta)| \leq \left(\frac{m}{\theta - 1} \right) \frac{\theta^{n+1} - 1}{(m+1)^{n+1} - 1}.$$

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\theta^{N+1} - 1}{(m+1)^{N+1} - 1} = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{m}{\theta - 1} \right) \frac{\theta^{N+1} - 1}{(m+1)^{N+1} - 1} < \varepsilon$, et donc de ce qui a précédé il existe un polynôme P satisfaisant l'énoncé de la proposition. \square

Par définition, on voit que la condition $l_m(\theta) = 0$ est équivalente à dire que 0 est un point d'accumulation de l'ensemble $B_m(\theta)$. Le théorème suivant montre que dans ce cas l'ensemble $B_m(\theta)$ est partout dense [22] :

Théorème 2.1.1. *L'ensemble $B_m(\theta)$ est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow l_m(\theta) = 0$ ($\Leftrightarrow 0$ est un point d'accumulation de l'ensemble $B_m(\theta)$).*

Pour prouver le théorème 2.1.1, on se restreindra au cas où $\theta < 2$ et $m \geq 1$. De manière identique on montre le cas général. Pour simplifier la preuve, montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Si $l_m(\theta) = 0$, alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $b \in B_m(\theta)$ tel que $\varepsilon < b \leq \theta\varepsilon$.
- (ii) $\forall b \in B_m(\theta)$, b est un point limite à gauche et à droite de $B_m(\theta)$.

Preuve.

(i) Comme $l_m(\theta) = 0$, il existe $b_0 \in B_m(\theta)$ tel que $0 < b_0 < \varepsilon$. Si N désigne le plus grand entier tel que $\theta^N b_0 \leq \varepsilon$, alors $\varepsilon < \theta^{N+1} b_0$, et donc

$$\varepsilon < \theta^{N+1} b_0 \leq \theta\varepsilon.$$

En posant $b = \theta^{N+1} b_0$, on obtient immédiatement $b \in B_m$ et $\varepsilon < b \leq \theta\varepsilon$.

(ii) De l'égalité $l_m(\theta) = 0$, on voit que $0 \in B'_m$, où B'_m désigne l'ensemble des points limites de $B_m(\theta)$, et par suite il existe une suite décroissante $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments distinct de $B_m(\theta)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Soit $b = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n \in B_m$, où $\varepsilon_i \in \{-m, \dots, 0, \dots, m\}$. Alors les suites

$(b_k\theta^{N+1} + b)$ et $(-b_k\theta^{N+1} + b)$, dont les termes sont des éléments de $B_m(\theta)$, tendent vers b , à gauche et à droite et donc b est un point limite à gauche et à droite de $B_m(\theta)$. \square

Preuve du théorème 2.1.1. La première implication est triviale car si $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} , alors il existe une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $B_m(\theta)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$, et donc $l_m(\theta) = 0$. Pour montrer l'implication inverse, supposons le contraire, c'est-à-dire que $l_m(\theta) = 0$, et $B_m(\theta)$ n'est pas dense dans \mathbb{R} . Alors il existe deux nombres positifs t_0, δ tels que

$$[t_0, t_0 + \delta] \cap B_m = \phi, \quad (2.1)$$

puisque $B_m = -B_m$ et $0 \in B'_m$, où B'_m désigne l'ensemble des points limites de B_m . Soit

$$P = \{t \in \mathbb{R}, t > 0, [t, t + \delta] \cap B_m = \phi\}.$$

Alors, $t_0 \in P$ puisque $t_0 > 0$ et $[t_0, t_0 + \delta] \cap B_m = \phi$, donc $P \neq \phi$. Soit $\alpha = \inf P$. Supposons que $\alpha \in P$ et

$$x \in \left] \max\left(\alpha - \frac{\delta}{2}, 0\right), \alpha \right[. \quad (2.2)$$

Alors $0 < x < \alpha$ et $]x, x + \delta[\cap B_m \neq \phi$. Posons $b = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n$, où $\varepsilon_i \in \{-m, \dots, 0, \dots, m\}$,

un élément de $]x, x + \delta[$. Alors $x \leq b \leq x + \delta$, et comme $x < \alpha$ et $\delta > 0$ on voit que

$$x \leq b \leq x + \delta < \alpha + \delta. \quad (2.3)$$

Il est aussi clair que $b \in B_m$. Comme $\alpha \in P$, alors $[\alpha, \alpha + \delta] \cap B_m = \phi$ et donc $b \notin [\alpha, \alpha + \delta]$. Il s'ensuit, d'après la relation (2.2) que

$$b \in [x, \alpha[. \quad (2.4)$$

Il s'ensuit du lemme 2-1-1 (i), avec $\varepsilon = \frac{\alpha - x}{\theta^{n+1}}$, qu'il existe $b' \in B_m$ tel que

$$\frac{\alpha - x}{\theta^{n+1}} < b' < \theta \frac{\alpha - x}{\theta^{n+1}} < 2 \frac{\alpha - x}{\theta^{n+1}}.$$

Donc, $\alpha - x < b'\theta^{n+1} < 2(\alpha - x)$ et de la relation (2.2) on voit que $\alpha - x < b'\theta^{n+1} < 2(\alpha - x) < \delta$.

Ces dernières relations jointes à (2.4) impliquent que $\alpha < b'\theta^{n+1} + b < \alpha + \delta$, et cela conduit à une contradiction car $b'\theta^{n+1} + b \in B_m$ et $B_m \cap [\alpha, \alpha + \delta] = \emptyset$.

Supposons maintenant que $\alpha \notin P$. Alors $[\alpha, \alpha + \delta] \cap B_m \neq \emptyset$ et il existe une suite décroissante $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de P telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \alpha$ et $t_k \leq \alpha + \delta$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Soit $b \in [\alpha, \alpha + \delta] \cap B_m$. Des relations $[t_k, t_k + \delta] \cap B_m = \emptyset$ et $\alpha < t_k \leq \alpha + \delta < t_k + \delta$, on obtient

$$\alpha \leq b < t_k, \quad \forall k \geq 1. \tag{2.5}$$

En faisant tendre k vers l'infini dans la relation (2.5), on obtient $\alpha = b$ et donc $[\alpha, \alpha + \delta] \cap B_m = \{\alpha\}$. Cette dernière relation conduit aussi à une contradiction, puisque d'après lemme 2.1.1 (ii), le nombre α est un point limite à droite de B_m . Ainsi, $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} . \square

Corollaire 2.1.2. *Si $\theta \geq m + 1$ alors $B_m(\theta)$ n'est pas dense dans \mathbb{R} .*

Preuve. Soit $\theta \geq m + 1$. Alors d'après la proposition 2.1.3, on a $l_m(\theta) = 1 > 0$ et donc $B_m(\theta)$ n'est pas dense dans \mathbb{R} d'après théorème 2.1.1. \square

2.2 Sur le spectre des nombres de Pisot.

Il est facile de voir que dans le cas où θ est un nombre de Pisot, les ensembles $B_m(\theta)$ et $A_m(\theta)$ sont tous uniformément discets. Pour prouver cette assertion, il suffit de montrer le résultat qui suit.

Proposition 2.2.1. *Si θ est un nombre de Pisot, alors $l_m(\theta) > 0$, pour tout m .*

Preuve. Soient $\theta_0 = \theta, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}$ les conjuguées du nombre de Pisot θ . Si $P(x) = \varepsilon_0 x^n + \varepsilon_{n-1} x^{n-1} + \dots + \varepsilon_{n-1} x + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}$, $n \in \mathbb{N}$ et $P(\theta) \neq 0$, alors, on a pour tout $1 \leq i \leq d-1$,

$$\begin{aligned} |P(\theta_i)| &= |\varepsilon_0 \theta_i^n + \varepsilon_1 \theta_i^{n-1} + \dots + \varepsilon_{n-1} \theta_i + \varepsilon_n| \\ &\leq |\varepsilon_0| |\theta_i|^n + |\varepsilon_1| |\theta_i|^{n-1} + \dots + |\varepsilon_{n-1}| |\theta_i| + |\varepsilon_n| \\ &\leq m |\theta_i|^n + m |\theta_i|^{n-1} + \dots + m |\theta_i| + m \\ &= m (|\theta_i|^n + |\theta_i|^{n-1} + \dots + |\theta_i| + 1) = m \sum_{k=0}^n |\theta_i|^k \leq m \sum_{k \geq 0} |\theta_i|^k, \text{ et donc} \end{aligned}$$

$$|P(\theta_i)| < \frac{m}{1 - |\theta_i|}.$$

Il est aussi clair que $P(\theta)$ est un entier algébrique du corps $\mathbb{Q}(\theta)$, et les conjuguées de $P(\theta)$ sont parmi les nombres $P(\theta), P(\theta_1), \dots, P(\theta_{d-1})$. Il s'ensuit que

$$|P(\theta)| \prod_{i=1}^{d-1} |P(\theta_i)| \geq |N(P(\theta))| \geq 1,$$

où $N(P(\theta))$ est la norme de $P(\theta)$, et dès les deux dernières inégalités on obtient

$$|P(\theta)| \geq \frac{1}{\prod_{i=1}^{d-1} |P(\theta_i)|} > \frac{\prod_{i=1}^{d-1} (1 - |\theta_i|)}{m^{d-1}} > 0.$$

Ainsi on obtient

$$l_m(\theta) \geq \frac{\prod_{i=1}^{d-1} (1 - |\theta_i|)}{m^{d-1}} > 0$$

et $l_m(\theta) > 0$. \square

Corollaire 2.2.1. *Si θ est un nombre de Pisot, alors tous les ensembles $B_m(\theta)$ et $A_m(\theta)$ sont uniformément discrets.*

Preuve. D'après les propositions 2.1.2 et 2.2.1, on obtient que $B_m(\theta)$ uniformément discret $\forall m \in \mathbb{N}$, puisque $l_{2m}(\theta) > 0$. De plus comme $A_m(\theta) \subset B_m(\theta)$, alors on voit que $A_m(\theta)$ est aussi uniformément discret $\forall m \in \mathbb{N}$. \square

Le résultat suivant, dû à Y. Bugeaud [5], dit que l'inverse de la proposition 2.2.1 est aussi vrai.

Théorème 2.2.1. *Si $l_m(\theta) > 0, \forall m \geq 1$, alors θ est un nombre de Pisot.*

Preuve. C'est un corollaire du théorème 2.2.2 qui suit. \square

De ce qui a précédé, ce dernier résultat peut être énoncé comme suit : $\theta \in \mathbb{S} \Leftrightarrow B_m(\theta)$ uniformément discret $\forall m \in \mathbb{N}$. On déduit également du théorème 2.2.1, le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.2. *Le nombre réel θ n'est pas un nombre de Pisot $\Leftrightarrow \exists m \geq 1$ tel que $B_m(\theta)$ soit dense dans \mathbb{R} .*

Preuve. Supposons qu'il existe m tel que $B_m(\theta)$ soit dense dans \mathbb{R} , alors il existe $m \geq 1$ tel que $l_m(\theta) = 0$, et d'après la proposition 2.2.1, θ n'est pas un nombre de Pisot. Inversement, si $\theta \notin \mathbb{S}$, alors d'après le théorème 2.2.1, $\exists m \geq 1$ tel que $l_m(\theta) = 0$ et du théorème 2.1.1, on déduit alors que l'ensemble $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} . \square

La preuve du théorème 2.2.1, basée sur des résultats de la théorie de l'automate, ne donne aucune estimation de l'entier m tel que $B_m(\theta)$ soit dense dans \mathbb{R} . Le théorème suivant dû à P. Erdős et V. Komornik [7] répond à cette exigence.

Théorème 2.2.2. *Si $\theta \notin \mathbb{S}$ et $m \geq 2(\theta - \frac{1}{\theta})$, alors $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} .*

Preuve. Soit θ un nombre réel et qui n'est pas un nombre de Pisot. On va montrer que pour tout entier $m \geq \theta - \frac{1}{\theta}$ l'ensemble $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation fini. En effet, dans ce cas on obtient que 0 est un point limite pour l'ensemble $B_{2m}(\theta) = B_m(\theta) - B_m(\theta)$, et du théorème 2.1.1 on déduit que $B_{2m}(\theta)$ est partout dense. Pour rendre la preuve claire on va la subdiviser en plusieurs parties, énoncées sous forme de lemmes.

Lemme 2.2.1. *Si $m \geq \theta - 1$ et $B_m(\theta)$ n'a pas de points d'accumulation, alors θ est un entier algébrique.*

Preuve. Comme $m \geq \theta - 1$, il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i \geq 1}$ telle que $0 \leq s_i \leq m$ pour tout $i \geq 1$, et

$$1 = \sum_{i \geq 1} \frac{s_i}{\theta^i}.$$

En posant $s_0 = -1$, la dernière égalité peut s'écrire $0 = \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{\theta^i}$, d'où la relation

$$\left| \sum_{i=0}^n s_i \theta^{n-i} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i \theta^{n-i} \right| \leq \frac{m}{\theta - 1}.$$

Comme les sommes $\sum_{i=0}^n s_i \theta^{n-i}$ sont des éléments de $B_m(\theta)$, et $B_m(\theta)$ n'a pas de points d'accumulation, on déduit que la suite bornée $(\sum_{i=0}^n s_i \theta^{n-i})_{n \geq 0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Choisissons $n < k$ tels que $\sum_{i=0}^n s_i \theta^{n-i} = \sum_{i=0}^k s_i \theta^{k-i}$. Alors $\sum_{i=0}^n (s_{n-i} - s_{k-i}) \theta^i + \sum_{i=n+1}^k (-s_{k-i}) \theta^i = 0$, et donc θ est un entier algébrique, puisque $s_0 = -1$. \square

Lemme 2.2.2. *Supposons que $B_m(\theta)$ n'a pas de points d'accumulation, où m est un entier ≥ 1 , et θ est un nombre algébrique. Soit $(s_i)_{i \geq 1}$ une suite d'entiers satisfaisant $|s_i| \leq m$ et $\sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{\theta^i} = 0$, et soit α un conjugué de θ . Si $|\alpha| > 1$, alors $\sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{\alpha^i} = 0$, et si $|\alpha| = 1$, alors les sommes $\sum_{i=0}^n \frac{s_i}{\alpha^i}$, où $n \geq 0$, prennent au plus un nombre fini de valeurs.*

Preuve. La première partie de la preuve précédente montre que les sommes $\sum_{i=0}^n s_i \theta^{n-i}$, où

$n \geq 0$, prennent au plus un nombre fini de valeurs. Si deux polynômes, de la forme $\sum_{i=0}^n s_i x^{n-i}$, où $n \geq 0$, prennent la même valeur en $x = \theta$, alors leur différence est divisible par le polynôme minimal de θ , et donc ils prennent la même valeur en $x = \alpha$ aussi. Ainsi, la suite $(\sum_{i=0}^n s_i \alpha^{n-i})_{n \geq 0}$ prend au plus un nombre fini de valeurs, disons z_1, \dots, z_N , et est donc borné par une certaine constante c . Si $|\alpha| > 1$, alors on conclut que $\left| \sum_{i=0}^n s_i \alpha^{-i} \right| \leq \frac{c}{|\alpha|^n}$, et en faisant tendre n à l'infini, on obtient de la dernière inégalité la première relation du Lemme 2.2.2. Si $|\alpha| = 1$, alors on conclut que $\left| \sum_{i=0}^n s_i \alpha^{-i} \right| = \left| \sum_{i=0}^n s_i \alpha^{n-i} \right|$ est l'un des nombres $|z_1|, \dots, |z_N|$ et cela complète la preuve. \square

Lemme 2.2.3. Soient $q > 1$, m un entier $\geq q - 1/q$ et p un nombre complexe différent de q . Alors les assertions suivantes sont vraies :

(i) Si $|p| > 1$, alors il existe une suite d'entiers $(s_n)_{n \geq 0}$ satisfaisant $|s_n| \leq m$,

$$\sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{q^i} = 0, \text{ et } \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{p^i} \neq 0.$$

(ii) Si $|p| = 1$, alors il existe une suite d'entiers $(s_n)_{n \geq 0}$ satisfaisant $|s_n| \leq m$,

$$\sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{q^i} = 0$$

et la suite $(\sum_{i=0}^n \frac{s_i}{p^i})_{n \geq 0}$ prend un nombre infini de valeurs différentes.

Pour montrer ce lemme on a également besoin de trois autres lemmes.

Lemme 2.2.4. Soit $\sum_{i \geq 0} p_i$ une série convergente à termes positifs et soit $0 \leq x \leq \sum_{i \geq 0} p_i$.

Alors il existe une suite unique (t_i) à termes dans $\{0, 1\}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) $x \leq \sum_{i=0}^{\infty} t_i p_i$;

(b) si (t'_i) est une autre suite à termes dans $\{0, 1\}$, telle qu'il existe un indice j pour lequel on a $t'_i = t_i$ pour tout $i < j$ et $t'_j = 0 < t_j = 1$, alors $x > \sum_{i=0}^{\infty} t'_i p_i$.

Si $t_j = 1$ pour une infinité d'indices j , alors on a $x = \sum_{i=0}^{\infty} t_i p_i$.

Preuve. On définit une suite (t_i) comme suit : Si $j \geq 0$ et t_i est déjà connu pour $0 \leq i < j$, alors on pose $t_j = 0$ si $x \leq \sum_{i < j} t_i p_i + \sum_{i > j} p_i$, et sinon on pose $t_j = 1$. En utilisant l'inégalité $x \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i$, une simple récurrence montre que

$$x \leq \sum_{i < j} t_i p_i + \sum_{i > j} p_i,$$

pour tout $j \geq 0$. En faisant tendre j vers l'infini on obtient le (a). La propriété (b) est une conséquence de la définition de $t_j = 1$:

$$x > \sum_{i < j} t_i p_i + \sum_{i > j} p_i = \sum_{i \leq j} t'_i p_i + \sum_{i > j} p_i \geq \sum_{i=0}^{\infty} t'_i p_i.$$

L'unicité de la suite (t_i) est un corollaire du (a) et du (b).

Si $t_j = 1$ pour un certain indice j , alors par définition on a $x > \sum_{i < j} t_i p_i + \sum_{i > j} p_i$. S'il y a une infinité de tels indices, en faisant tendre j vers l'infini, on conclut que $x \geq \sum_{i=0}^{\infty} t_i p_i$, et on obtient l'égalité voulue en utilisant le (a). \square

Lemme 2.2.5. Soit $\sum_{i \geq 0} a_i$ une série convergente à termes positifs. Supposons

$$a_j \leq \sum_{i > j} a_i \tag{2.6}$$

pour tout $j \geq 0$. Soit $P \cup N$ une partition de \mathbb{N} telle que

$$a_{n_0} \leq \sum_{i > n_0, i \in P} a_i \tag{2.7}$$

pour un certain $n_0 \in N$. Alors il existe une suite (s_i) satisfaisant les conditions suivantes :

$$s_i \in \{0, 1\} \text{ si } i \in P, \tag{2.8}$$

$$s_i \in \{0, -1\} \quad \text{si } i \in N, \quad (2.9)$$

$$\sum_{i \geq 0} s_i a_i = 0 \quad (2.10)$$

et

$$s_i \neq 0 \text{ pour une infinité d'indices } i. \quad (2.11)$$

Preuve. Posons $S_n = \sum_{i=0}^n s_i a_i$, $s_i = 0$ pour $0 \leq i \leq n_0$, et $s_{n_0} = -1$. Alors $S_{n_0} = -a_{n_0}$ et de (2.7) on déduit

$$n_0 \in N \quad \text{et} \quad 0 \leq -S_{n_0} \leq \sum_{i > n_0, i \in P} a_i. \quad (2.12)$$

Appliquons maintenant le lemme 2.2.4 avec $x = -S_{n_0}$ et $(p_i) = (a_i)_{i > n_0, i \in P}$. Si la suite correspondante (t_i) admet une infinité de termes $t_i = 1$, alors en posant $s_i = t_i$, lorsque $i > n_0$ et $i \in P$, et $s_i = 0$, lorsque $i > n_0$ et $i \in N$, on obtient $\sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i = 0$ et la preuve est complète. Si la suite (t_i) admet un dernier élément non-nul $t_{n_1} = 1$, alors on pose $s_i = t_i$, lorsque $n_0 < i \leq n_1$ et $i \in P$, et $s_i = 0$, lorsque $n_0 < i \leq n_1$ et $i \in N$. On a $-S_{n_0} \leq \sum_{n_0 < i \leq n_1, i \in P} t_i a_i = \sum_{n_0 < i \leq n_1} s_i a_i$; d'où $S_{n_1} \geq 0$. De plus, il s'ensuit de la définition de $t_{n_1} = 1$ que

$$-S_{n_0} > \sum_{n_0 < i < n_1, i \in P} t_i a_i + \sum_{n_1 < i, i \in P} a_i = \sum_{n_0 < i < n_1} s_i a_i + \sum_{n_1 < i, i \in P} a_i.$$

En appliquant (2.6) avec $j = n_1$ on a $\sum_{n_1 < i, i \in P} a_i \geq a_{n_1} - \sum_{n_1 < i, i \in N} a_i$ et donc $-S_{n_0} > \sum_{n_0 < i \leq n_1} s_i a_i - \sum_{n_1 < i, i \in N} a_i$. Ainsi, on a montré que

$$n_1 \in P \quad \text{et} \quad 0 \leq S_{n_1} \leq \sum_{n_1 < i, i \in N} a_i. \quad (2.13)$$

Appliquons aussi le lemme 2.2.4 avec $x = S_{n_1}$ et $(p_i) = (a_i)_{i > n_1, i \in N}$. Si la suite correspondante (t_i) possède une infinité de termes $t_i = 1$, alors en posant $s_i = t_i$, lorsque $i > n_1$ et $i \in N$, et

$s_i = 0$, lorsque $i > n_1$ et $i \in P$, on obtient $\sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i = 0$ et la preuve est complète. Si la suite (t_i) admet un dernier élément non-nul $t_{n_2} = 1$, alors on pose $s_i = -t_i$, lorsque $n_1 < i \leq n_2$ et $i \in N$, et $s_i = 0$, lorsque $n_1 < i \leq n_2$ et $i \in P$. On a $S_{n_1} \leq \sum_{n_1 < i \leq n_2, i \in N} t_i a_i = - \sum_{n_1 < i \leq n_2} s_i a_i$; d'où $S_{n_2} \leq 0$. De plus, il s'ensuit de la définition de $t_{n_2} = 1$ que

$$S_{n_1} > \sum_{n_1 < i < n_2, i \in N} t_i a_i + \sum_{n_2 < i, i \in N} a_i = - \sum_{n_1 < i < n_2} s_i a_i + \sum_{n_2 < i, i \in N} a_i.$$

En appliquant aussi (2.6) avec $j = n_2$ on a $\sum_{n_2 < i, i \in N} a_i \geq a_{n_2} - \sum_{n_2 < i, i \in P} a_i$, $S_{n_1} > - \sum_{n_1 < i \leq n_2} s_i a_i - \sum_{n_2 < i, i \in P} a_i$ et donc

$$n_2 \in N \quad \text{et} \quad 0 \leq -S_{n_2} \leq \sum_{n_2 < i, i \in P} a_i. \quad (2.14)$$

En continuant cette construction, soit on s'arrête après un nombre fini d'étapes et on obtient une suite (s_i) satisfaisants les relations (2.8) et (2.11), soit on obtient une suite (s_i) satisfaisants les relations (2.8), (2.9) et (2.11), et telle que $\sum_{i \geq 0} s_i a_i$ admet une infinité de somme partielles S_{n_j} non-négatives et une infinité non-positives. Comme la série $\sum_{i \geq 0} s_i a_i$ est absolument convergente, on conclut que la condition (2.10) est aussi satisfaite. \square

Lemme 2.2.6. *Fixons un nombre réel $q > 1$ et un entier rationnel $m > q - 1$. Soit $P' \cup N'$ une partition de \mathbb{N} telle que*

$$q^{-j} \leq m \sum_{i > j, i \in P'} q^{-i} \quad (2.15)$$

pour un certain $j \in N'$, ou bien

$$q^{-j} \leq m \sum_{i > j, i \in N'} q^{-i} \quad (2.16)$$

pour un certain $j \in P'$. Alors il existe une suite (s_i) satisfaisant les conditions suivantes :

$$s_i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad \text{si} \quad i \in P', \quad (2.17)$$

$$s_i \in \{0, -1, \dots, -m\} \text{ si } i \in N', \quad (2.18)$$

$$\sum_{i \geq 0} s_i q^{-i} = 0 \quad (2.19)$$

et

$$s_i \neq 0 \text{ pour une infinité d'indices } i. \quad (2.20)$$

Preuve. On applique le lemme 2.2.5, avec $a_i = q^{-[i/m]}$, où $i \geq 0$, et la partition $P \cup N$ est défini comme suit : $i \in P \Leftrightarrow [i/m] \in P'$ et $i \in N \Leftrightarrow [i/m] \in N'$. Alors la condition (2.6) est satisfaite, puisque $m > q - 1$ et

$$\sum_{i > j} a_i \geq m \sum_{k \geq 1} q^{-[j/m]-k} = \frac{mq^{-[j/m]}}{q-1} > a_j.$$

La relation(2.14) implique la condition (2.7) avec $n_0 = jm + m - 1$. Le cas de la condition(2.15) , s'ensuit en changeant les roles de P' et N' . \square

Preuve du lemme 2.2.3. Comme $m > q - 1$, on va appliquer le lemme précédent avec une partition $P' \cup N'$ dépendant de p .

Cas où p est un réel non-négatif. On choisit alors $N' = \{0\}$ et $P' = \mathbb{N}^*$. Dans ce cas la condition (2.14) est satisfaite avec $j = 0 : 1 \leq m \sum_{k \geq 1} q^{-k}$, car $m > q - 1$. Des relations(2.16) et (2.17) on a $s_0 \leq 0$ et $s_i \geq 0$ pour tout $i \geq 1$. Il s'ensuit de (2.19) que $\sum_{i \geq 0} s_i q^{-i} = 0 < \sum_{i \geq 0} s_i p^{-i}$, si $p < q$, et $\sum_{i \geq 0} s_i q^{-i} = 0 > \sum_{i \geq 0} s_i p^{-i}$, si $p > q$. Donc lemme est bien vérifié dans le cas où $p > 1$, est vrai. De plus, pour $p = 1$ on a $\sum_{i \geq 0} s_i p^{-i} = \sum_{i \geq 0} s_i = \infty$ et donc les sommes partielles de la série $\sum_{i \geq 0} s_i p^{-i}$ prennent une infinité de valeurs différentes.

Cas où p est un réel négatif. On choisit alors $N' = 2\mathbb{N}$ et $P' = 2\mathbb{N} + 1$. Puisque $q^2 \leq mq + 1$, la condition (2.14) est satisfaite avec avec $j = 0 : 1 \leq m \sum_{k \geq 1} q^{-(2k-1)}$. Comme tous les termes de la série $\sum_{i \geq 0} s_i p^{-i}$ sont ≤ 0 , et qu'il y en a une infinité qui sont négatifs, alors $\sum_{i \geq 0} s_i p^{-i} < 0$ et le

lemme est vrai si $p < -1$. Si $p = -1$, alors on a $\sum_{i \geq 0} s_i p^{-i} = -\sum_{i \geq 0} |s_i| = -\infty$ et donc les sommes partielles de la série $\sum_{i \geq 0} s_i p^{-i}$ prennent une infinité de valeurs différentes.

Cas où p n'est pas réel. Soit z un nombre complexe de module 1 tel que aucun nombre de la forme $z p^{-i}$ n'est imaginaire pure, c.-à-d., admet une partie réelle. A partir de ce point la preuve est similaire aux cas précédents avec le choix : $P' = \{i \geq 0 \mid \operatorname{Re}(z p^{-i}) > 0\}$ et $N' = \{i \geq 0 \mid \operatorname{Re}(z p^{-i}) < 0\}$. \square

Preuve du théorème 2.2.2. Comme la condition $m \geq \theta - 1/\theta$, où $\theta := q$, est plus forte que la condition $m \geq \theta - 1$, le théorème 2.2.2 est une conséquence immédiate des trois lemmes précédents. En effet, s'il existe $m \geq \theta - \frac{1}{\theta}$ tel que l'ensemble $B_m(\theta)$ n'admet pas de points d'accumulation fini, alors le lemme 2.2.1, dit que θ est un entier algébrique. Ensuite on conclut, grace aux lemmes 2.2.2. et 2.2.3, et qui donnent que θ n'a pas de conjugués de module ≥ 1 , d'où $\theta \in \mathbb{S}$. \square

Le cas le plus fréquent dans l'étude de cette question d'approximation est celui où $\theta \in]1, 2[$. Du théorème 2.2.2, on peut déduire, dans ce cas, le résultat suivant.

Corollaire 2.2.3.

(i) Si $\theta \in \left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, alors on a les équivalences suivantes : $\theta \notin S \Leftrightarrow B_2(\theta)$ dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow B_m(\theta)$ dense dans $\mathbb{R}, \forall m \geq 2$.

(ii) Si $\theta \in \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right[$, alors on a les équivalences suivantes : $\theta \notin S \Leftrightarrow B_m(\theta)$ dense dans $\mathbb{R}, \forall m \geq 4$.

Preuve.

(i) Comme $1 < \theta < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \theta^2 - \theta - 1 < 0$ et donc $0 < \theta - \frac{1}{\theta} \leq 1$, on a $2(\theta - \frac{1}{\theta}) \leq 2$ et la première équivalence est une conséquence immédiate du théorème 2.2.2 et du corollaire 2.2.1. La deuxième équivalence est triviale car $B_2(\theta) \subset B_m(\theta)$ pour tout $m \geq 2$.

(ii) De la même manière comme dans le (i), on obtient le résultat lorsque $\theta \in \left] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2 \right[$, puisque dans ce cas on a $0 < \theta^2 - \theta - 1 < 1$ et $\theta - \frac{1}{\theta} < 1 + \frac{1}{\theta} < 2$. \square

Les questions naturelles qui découlent immédiatement du dernier corollaire sont si les implications suivantes vraies ?

- 1) $\theta \in \left] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$ et $\theta \notin \mathbb{S} \Rightarrow B_1(\theta)$ dense dans \mathbb{R} .
- 2) $\theta \in \left] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2 \right[$ et $\theta \notin \mathbb{S} \Rightarrow B_j(\theta)$ dense dans \mathbb{R} , pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$.

Ces questions ont été déjà posées dans [21-22], et le but initial de ce mémoire est d'apporter des réponses partielles à ces questions. Toutefois un résultat très récent de S. Akiyama et V. Komornick [0], qui a apporté une grande contribution à la réponse au problème plus général posé dans plusieurs papiers : *Est ce que $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} , pour tout $\theta \in]1, m + 1[$ et $\theta \notin \mathbb{S}$?* nous a contraint de changer de direction. Ce résultat peut être énoncé comme suit :

Théorème 2.2.3. *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]1, m + 1[$. Si θ n'est pas un nombre de Pisot alors $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation.*

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème 2.2.2 et utilise les mêmes outils. \square

Dans le prochain chapitre on va également donner une preuve complète d'un autre théorème, plus récent que celui cité en haut, et grace au quel on obtient une réponse complète au problème posé ci-dessus.

Chapitre 3

Une propriété d'approximation des nombres de Pisot

-
- 1- Propriétés des fonctions d'itérations.
 - 2- Une caractérisation des nombres de Pisot.
 - 3- Problèmes ouverts et remarques.
-

L'objet de ce chapitre est de répondre à la question posée à la fin du chapitre 2, c.-à-d., montrer que l'ensemble $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} , lorsque $\theta \in]1, m + 1[$ et $\theta \notin \mathbb{S}$. Comme il a été signalé auparavant, une grande contribution à la réponse a été apporté très récemment par S. Akiyama et V. Komornik : *Si $m \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in]1, m + 1[$, et θ n'est pas un nombre de Pisot, alors $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation* (voir le théorème 2.2.3 du chapitre 2). Il suffit donc de prouver l'implication : *Si $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation $\Rightarrow B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} .* En fait, cette implication est le théorème de D. Y. Feng, dont la preuve est l'objet principal de ce chapitre. Après avoir rappelé, dans le premier paragraphe, quelques propriétés des fonctions d'itération qui sont à la base de la preuve du résultat de D. Y. Feng, on donne, dans le second, une démonstration très détaillée de l'implication signalée ci-haut. On clos ce chapitre par l'étude de quelques questions analogues à celle résolue.

3.1 Propriétés des fonctions d'itérations.

La preuve du résultat de D. Y. Feng [0] est totalement différentes de celles des théorèmes du chapitre précédent, et elle est basée sur les fonctions d'itération.

Définition 3.1.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ une famille d'applications réelles définies comme suit :*

$$\phi_i(x) = \rho x + b_i, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

où $\rho \in]0, 1[$ et

$$0 = b_0 < b_1 < \dots < b_m = 1 - \rho.$$

Alors on dit Φ est un système d'itération.

Pour simplifier la notation, la composée $\phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \circ \phi_{i_n}$ des applications définies ci-dessus, où $I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, est aussi notée $\phi_I = \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \circ \phi_{i_n}$.

Proposition 3.1.1. *Soit $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ un système d'itération. Alors*

$$\phi_I(x) = \rho^n x + \rho^{n-1} b_{i_n} + \rho^{n-2} b_{i_{n-1}} + \dots + b_{i_1},$$

où $I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1, \dots, m\}^n$ et $x \in \mathbb{R}$. En particulier on a

$$\phi_I(0) = \rho^{n-1} b_{i_n} + \rho^{n-2} b_{i_{n-1}} + \dots + b_{i_1} \quad \text{et} \quad \phi_I(1) = \phi_I(0) + \rho^n.$$

Preuve. On va montrer cette proposition par récurrence. Pour $n = 1$, on a $\phi_{i_1}(x) = \rho x + b_{i_1}$, et donc le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons la proposition vraie pour $n - 1$, où $n \geq 2$, et soit $I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1, \dots, m\}^n$. Par définition on a

$$\phi_I(x) = \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \circ \phi_{i_n} = \phi_{i_1} \circ \phi_J,$$

où $J = (i_2, \dots, i_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\phi_I(x) = \phi_{i_1}(\rho^{n-1} x + \rho^{n-2} b_{i_n} + \dots + b_{i_2})$$

et donc

$$\phi_I(x) = \rho^n x + \rho^{n-1} b_{i_n} + \rho^{n-2} b_{i_{n-1}} + \dots + b_{i_1}.$$

Il s'ensuit immédiatement que $\phi_I(0) = \rho^{n-1} b_{i_n} + \rho^{n-2} b_{i_{n-1}} + \dots + b_{i_1}$ et $\phi_I(1) = \rho^n + \rho^{n-1} b_{i_n} + \dots + b_{i_1} = \phi_I(0) + \rho^n$. \square

Dans certaines preuves ci-dessous on a besoin des constatations suivantes :

Proposition 3.1.2. *Avec la notation de la proposition 3.1.1, les applications réelles ϕ_I sont croissantes et continues et donc bijectives.*

Preuve. Il est clair que ϕ_I est une fonction polynomiale, donc continue et dont la dérivée est une constante positive. Donc ϕ_I est continue et strictement croissante; d'où ϕ_I est une bijection de \mathbb{R} . \square

Proposition 3.1.3. Soit $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ un système d'itération. Si $I = (m, \dots, m) \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, alors $\phi_I(x) = \rho^n x - \rho^n + 1$, et $\phi_I([0, 1]) = [1 - \rho^n, 1]$.

Preuve. Cette proposition peut être déduite de celles qui la précèdent. On préfère la vérifier rapidement par récurrence sur n . Pour $n = 1$ on a pour $\phi_m(k) = \rho k + b_m = \rho k - \rho + 1$. Si $I = (m, \dots, m) \in \{0, 1, \dots, m\}^n$ et $n \geq 1$, alors $\phi_J(x) = \rho^{n-1}x - \rho^{n-1} + 1$, où $J = (m, \dots, m) \in \{0, 1, \dots, m\}^{n-1}$, et

$$\phi_I(x) = \phi_m(\rho^{n-1}x - \rho^{n-1} + 1) = \rho^n x - \rho^n + \rho + 1 - \rho = \rho^n x - \rho^n + 1.$$

Il s'ensuit en particulier que $\phi_I([0, 1]) = [\phi_I(0), \phi_I(1)] = [1 - \rho^n, 1]$, puisque d'après la proposition 3.1.2, l'application ϕ_I est croissante. \square

Soit Φ le système d'itération défini ci-dessus, et si ϕ^{-1} désigne l'application inverse d'un élément quelconque $\phi \in \Phi$, alors

$$\phi^{-1}(x) = \rho^{-n}x - \rho^{-n}b_{i_1} - \dots - \rho^{-1}b_{i_n}.$$

En effet, pour $n = 1$ on a $\phi_{i_1}^{-1}(x) = \rho^{-1}x - \rho^{-1}b_{i_1}$, et de la relation $(\phi_{i_1} \circ \dots \circ \phi_{i_n})^{-1} = \phi_{i_n}^{-1} \circ \dots \circ \phi_{i_1}^{-1}$, on déduit le résultat.

Proposition 3.1.4. Pour un système d'itération $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$, posons

$$K = K_\Phi = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^n, i_n \in \{0, 1, \dots, m\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alors

$$K = \bigcup_{i=0}^m \phi_i(K) \text{ et } K \subset [0, 1].$$

Preuve. Soit $k \in K$. Alors $k = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^n$, où $b_{i_n} \in \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$. Comme

$$k = b_{i_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{i_n} \rho^n = b_{i_0} + \rho \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_{n+1}} \rho^n = \phi_{i_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{i_{n+1}} \rho^n \right) \in \phi_{i_0}(K),$$

on voit que

$$K \subset \bigcup_{i=0}^m \phi_i(K),$$

puisque $i_0 \in \{0, 1, \dots, m\}$. Inversement, si $k = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^n$, alors pour $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ on a

$$\phi_i(k) = b_i + \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^{n+1} = b_i + b_{i_0} \rho + b_{i_1} \rho^2 + \dots \in K,$$

et

$$\phi_i(K) \subset K \Rightarrow \bigcup_{i=0}^m \phi_i(K) \subset K.$$

Remarquons aussi que si $k = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^n \in K$ alors

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \rho^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^n \leq (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho} = 1,$$

et donc $K \subset [0, 1]$. \square

Proposition 3.1.5. Soit $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ un système d'itération satisfaisant la condition : $b_{i+1} - b_i \leq \rho$. Alors $[0, 1] = \bigcup_{i=0}^m \phi_i([0, 1])$.

Preuve. Pour $m = 1$, on

$$\phi_0([0, 1]) \cup \phi_1([0, 1]) = [0, \rho] \cup [1 - \rho, 1] = [0, 1],$$

puisque $b_1 - b_0 = b_1 = 1 - \rho \leq \rho$. Ensuite une simple récurrence permet de la vérifier pour tout m . \square

Définition 3.1.2. On dit que le système d'itération $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$, satisfait la condition de séparation s'il existe $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, on ait l'implication suivante :

$$\rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \neq 0 \Rightarrow \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \geq c.$$

Définition 3.1.3. On dit que le système d'itération $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$, satisfait la condition de finitude s'il existe une partie finie Γ de $[0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, on ait la relation suivante :

$$\rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| < 1 \Rightarrow \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \in \Gamma$$

Proposition 3.1.6. Si un système d'itération satisfait la condition de finitude alors il satisfait la condition de séparation.

Preuve. Avec la notation ci-dessus des deux dernières définitions, la proposition est immédiate en choisissant $c = \min(\Gamma^* \cup \{1\})$. \square

3.2 Une Caractérisation des nombres de Pisot.

Puisque la condition $l_m(\theta) = 0$ est équivalente à dire que 0 est un point d'accumulation de $B_m(\theta)$, pour montrer l'implication : *Si $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation $\Rightarrow B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R}* , il suffit d'après le théorème 2.1.1 du chapitre 2, de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 [0]. *Si $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation $\Rightarrow 0$ est un point d'accumulation de $B_m(\theta)$.*

La preuve du théorème 3.2.1 est basée sur la propriété de séparation du système d'itération. Plus exactement, le théorème 3.2.1 est un corollaire immédiat du résultat qui suit :

Théorème 3.2.2. *Soit $= \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ un système d'itération satisfaisant la conditions de séparation. Si*

$$b_{i+1} - b_i \leq \rho, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\},$$

alors Φ satisfait la condition de finitude.

Avant de donner la preuve du théorème 3.2.2, montrons d'abord le théorème 3.2.1.

Preuve du théorème 3.2.1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]1, 1 + m[$. Considérons le système d'itération $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$, où $\phi_i = \rho x + b_i$,

$$0 < \rho = \frac{1}{\theta} < 1, \quad \text{et} \quad b_i = \frac{i}{m}(1 - \rho) \quad \text{pour} \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Alors on a

$$0 = b_0 < b_1 = \frac{1}{m}(1 - \rho) < b_2 = \frac{2}{m}(1 - \rho) < \dots < b_m = (1 - \rho),$$

$$b_{i+1} - b_i = \left(\frac{i+1}{m} - \frac{i}{m} \right) (1 - \rho) = \frac{1 - \rho}{m} = \frac{\theta - 1}{\theta m} < \frac{1}{\theta} = \rho,$$

et le système Φ satisfait les conditions de théorème 3.2.2. Ainsi Φ satisfait la condition de finitude. Comme Φ satisfait la condition de séparation si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de l'ensemble $B_m(\theta)$, et Φ satisfait la condition de finitude si et seulement si $B_m(\theta)$ n'a pas de point d'accumulation (voir aussi le lemme 3.2.1), on déduit immédiatement le résultat. \square

Pour montrer le théorème 3.2.2 on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.2.1. *Soit $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ un système d'itération et soit*

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \rho^{-i}, \quad \varepsilon_i \in \{b_s - b_t, 0 \leq s, t \leq m\}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Alors on a les équivalences suivantes :

i) Φ satisfait la condition separation si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de Y .

ii) Φ satisfait la condition finitude si et seulement si Y n'a pas de points d'accumulation.

Preuve. Notons d'abord que $\forall n \geq 1$, $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, on a

$$\begin{aligned} \rho^{-n} (\phi_I(0) - \phi_J(0)) &= \rho^{-n} ((b_{i_1} + b_{i_2}\rho + \dots + b_{i_n}\rho^{n-1}) - (b_{j_1} + b_{j_2}\rho + \dots + b_{j_n}\rho^{n-1})) \\ &= \rho^{-n} \left(\sum_{s=1}^n b_{i_s} \rho^{s-1} - \sum_{s=1}^n b_{j_s} \rho^{s-1} \right) = \sum_{s=1}^n (b_{i_s} - b_{j_s}) \rho^{-(n-s)-1} \\ &= \sum_{s=1}^n (b_{i_{n+1-s}} - b_{j_{n+1-s}}) \rho^{-s} \end{aligned}$$

et donc

$$\rho^{-n} (\phi_I(0) - \phi_J(0)) = \sum_{s=1}^n (b_{i_{n+1-s}} - b_{j_{n+1-s}}) \rho^{-s} \quad (3.1)$$

i) Si Φ satisfait la condition de séparation, alors $\exists c > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, on ait

$$\rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \neq 0 \Rightarrow \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \geq c.$$

D'après la proposition 3.1.1, on a

$$\rho^{-n} |(b_{i_1} - b_{j_1}) + (b_{i_2} - b_{j_2}) \rho + \dots + (b_{i_n} - b_{j_n}) \rho^{n-1}| \geq c.$$

Donc

$$|(b_{i_1} - b_{j_1}) \rho^{-n} + (b_{i_2} - b_{j_2}) \rho^{-(n-1)} + \dots + (b_{i_n} - b_{j_n}) \rho^{-1}| \geq c,$$

$$\left| \sum_{s=1}^n \varepsilon_s \rho^{-s} \right| \geq c \quad \text{où } \varepsilon_s \in \{b_{i_s} - b_{j_s}, 0 \leq i_s, j_s \leq m\}$$

et on déduit qu'il existe un voisinage v de 0 tel que $v \cap Y \setminus \{0\} = \emptyset$, donc 0 n'est pas un point d'accumulation de Y . Il est évident que si 0 n'est pas un point d'accumulation de Y alors Φ satisfait la condition de séparation.

ii) Signalons d'abord que Φ satisfait la condition de finitude si et seulement si $Y \cap [-1, 1] < \infty$. En effet, si Φ satisfait la condition finitude alors il existe une partie finie Γ de $[0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| < 1 \Rightarrow \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \in \Gamma,$$

et d'après la relation(3.1) on a $\left| \sum_{s=1}^n (b_{i_{n+1-s}} - b_{j_{n+1-s}}) \rho^{-s} \right| \in \Gamma \subset [0, 1[$. D'où $Y \subset (\Gamma \cup (-\Gamma)) \subset [-1, 1]$ et $Y \cap]-1, 1[$ est fini, puisque la partie $\Gamma \cup (-\Gamma)$ est finie.

D'autre part si $\rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \geq 1$, alors $\left| \sum_{s=1}^n (b_{i_{n+1-s}} - b_{j_{n+1-s}}) \rho^{-s} \right| \geq 1$, alors $Y \cap [-1, 1] \subset]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cap [-1, 1] = \{-1, 1\}$, et donc $Y \cap [-1, 1]$ est fini. L'inverse se montre

de la même manière. Pour prouver le lemme 3.2.1, il suffit donc de montrer que si $Y \cap [-1, 1]$ est fini alors Y n'a pas de points d'accumulation, puisque si Y n'a pas de points d'accumulation alors $Y \cap [-1, 1]$ est fini.

Supposons donc que $Y \cap [-1, 1]$ est fini et posons $A = Y \cap [-1, 1]$ et $B = \{b_i - b_j, 0 \leq i, j \leq m\}$. Comme A et B sont finis, on peut choisir $u > 1$ tel que $]1, u[\cap \rho^{-1}(A + B) = \emptyset$, où

$$\rho^{-1}(A + B) = \{\rho^{-n}(x + \varepsilon), x \in A, \varepsilon \in B\}.$$

Comme $0 \in A$, on a $]1, u[\cap \rho^{-1}(B) = \emptyset$. Pour tout $y \in Y$, on note $\deg(y)$ le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \rho^{-i}$ avec $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in B$. Pour montrer que $Y \cap]-u, u[= \emptyset$, on va d'abord montrer que $Y \cap]1, u[= \emptyset$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $Y \cap]1, u[\neq \emptyset$. Soit

$$N = \min \{\deg(y), y \in Y \cap]1, u[\}.$$

Alors $N \in \mathbb{N}^*$. Choisissons $z \in Y \cap]1, u[$ tel que $\deg(z) = N$. Comme $]1, u[\cap \rho^{-1}(B) = \emptyset$, on a $z \notin \rho^{-1}B$, $N = \deg(z) \geq 2$, et il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in B$ tels que

$$z = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \rho^{-i}.$$

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_{i+1} \rho^{-i}$. Alors $\omega \in Y$ et $z = \rho^{-1}\omega + \rho^{-1}\varepsilon_1$, car $\rho^{-1}\omega + \rho^{-1}\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_{i+1} \rho^{-(i+1)} +$

$\rho^{-1}\varepsilon_1 = \sum_{i=2}^{N-1} \varepsilon_i \rho^{-i} + \rho^{-1}\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \rho^{-i}$. De plus, $\omega \notin A$, car sinon $z \in \rho^{-1}(A + B)$, et cela contredit les relations : $]1, u[\cap \rho^{-1}(A + B) = \emptyset$ et $z \in]1, u[$. D'autre part on a $|\omega| < z$, car sinon

$$|\rho^{-1}\varepsilon| = |\rho^{-1}\omega - z| \geq \rho^{-1}|\omega| - z \geq (\rho^{-1} - 1)z > \rho^{-1} - 1 = \rho^{-1} \max B.$$

Il s'ensuit que $1 < |\omega| < z \leq u \Rightarrow |\omega| \in Y \cap]1, u[$, et $\exists |\omega| \in Y \cap]1, u[$ tel que $\deg(|\omega|) \leq N - 1 < \deg(z)$ et cela contredit la condition de minimalité de $\deg(z)$. Donc $Y \cap]1, u[= \emptyset$. On déduit alors que $Y \cap]-u, -1[= \emptyset$, puisque si $x \in Y \cap]-u, -1[\Rightarrow -x \in (-Y) \cap]1, u[= Y \cap]1, u[$. Ainsi

$Y \cap]-u, u[$ est fini. Montrons, finalement, que Y n'a pas de points d'accumulations. Supposons, au contraire, que v est un point d'accumulation de Y . Comme $Y \cap]-u, u[$ est fini, alors $|v| \geq u$.

Notons que pour tout entier positif n , on a

$$Y = \rho^{-n}Y + D_n, \quad (3.2)$$

où $D_n = \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \rho^{-i}, \varepsilon_i \in B, \forall i \right\}$. Choisissons alors n suffisamment grand pour que $\rho^n |v| + 1 < u$. D'après la relation (3.2), il existe un point d'accumulation ω de Y tel que $v = \rho^{-n}\omega + z$, où $z \in D_n$. Alors

$$|\omega| = |\rho^n(v - z)| \leq \rho^n |v| + \rho^n \sum_{i=1}^n (1 - \rho) \rho^{-i} < \rho^n |v| + 1 < u;$$

ce qui signifie que Y admet un point d'accumulation dans $]-u, u[$, et cela conduit à une contradiction. \square

Lemme 3.2.2. *Soit $\Phi = \{\phi_i, i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ un système d'itération satisfaisant*

$$b_{i+1} - b_i \leq \rho, \quad \forall i = 0, \dots, m - 1.$$

Alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on $[0, 1] = \bigcup_{I \in \{0, 1, \dots, m\}^n} \phi_I([0, 1])$. ii) $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, si

$[c, d] \subset \phi_J([0, 1])$, tel que $d - c \geq \rho^{n+k}$, alors il existe $J' \in \{0, 1, \dots, m\}^k$, tel que $\phi_{JJ'}(0) \in [c, d]$.

Preuve. (i) On utilise une récurrence sur n . Si $n = 1$, alors on

$$\bigcup_{I \in \{0, 1, \dots, m\}} \phi_I([0, 1]) = \phi_0([0, 1]) \cup \dots \cup \phi_m([0, 1]),$$

et de la proposition 3.1.1 on voit que

$$\begin{aligned} \bigcup_{I \in \{0,1,\dots,m\}} \phi_I([0,1]) &= [0, \rho] \cup [b_1, \rho + b_1] \cup \dots \cup [b_m, \rho + b_m] \\ &= [0, \rho] \cup [b_1, \rho + b_1] \cup \dots \cup [1 - \rho, 1] = [0, 1], \end{aligned}$$

car $b_{i+1} - b_i \leq \rho$, $\forall i = 0, \dots, m-1$. Supposons le lemme 3.2.2 (i) vrai jusqu'à $n-1$, où $n \geq 2$,

c'est-à-dire $[0, 1] = \bigcup_{I \in \{0,1,\dots,m\}^{n-1}} \phi_I([0, 1])$ et montrons le pour n .

De l'égalité

$$\begin{aligned} \bigcup_{I \in \{0,1,\dots,m\}^n} \phi_I([0, 1]) &= (\phi_{(0,0,\dots,0)}([0, 1]) \cup \dots \cup \phi_{(0,0,\dots,m)}([0, 1])) \\ &\quad \cup (\phi_{(0,0,\dots,1,0)}([0, 1]) \cup \dots \cup \phi_{(0,0,\dots,1,m)}([0, 1])) \cup \dots \\ &\quad \cup \phi_{(m,m,\dots,m,0)}([0, 1]) \cup \dots \cup \phi_{(m,m,\dots,m)}([0, 1]), \end{aligned}$$

on voit que

$$\bigcup_{I \in \{0,1,\dots,m\}^n} \phi_I([0, 1]) = \phi_0\left(\bigcup_{I \in \{0,1,\dots,m\}^{n-1}} \phi_I([0, 1])\right) \cup \dots \cup \phi_m\left(\bigcup_{I \in \{0,1,\dots,m\}^{n-1}} \phi_I([0, 1])\right),$$

et le résultat s'en déduit directement.

ii) Soit $[c, d]$ un sous-intervalle de $\phi_J[0, 1]$ de longueur $\geq \rho^{n+k}$. Alors, $\phi^{-1}([c, d])$ est un sous-intervalle de $[0, 1]$ et $|\phi_J^{-1}([c, d])| \geq \rho^k$. En effet d'après la proposition 1.3.2, on a $\phi_J^{-1}([c, d]) = [\phi_J^{-1}(c), \phi_J^{-1}(d)]$ et donc

$$\phi_J^{-1}([c, d]) = [\rho^{-n}c + \rho^{-n}b_{j_1} + \dots + \rho^{-1}b_{j_n}, \rho^{-n}d + \rho^{-n}b_{j_1} + \dots + \rho^{-1}b_{j_n}].$$

Ainsi la longueur de $\phi_J^{-1}([c, d])$ est égale à $\rho^{-n}|d - c|$ et $\rho^{-n}|d - c| \geq \rho^{-n}\rho^{k+n} = \rho^k$. Il s'ensuit du lemme 3.2.2 (i) qu'il existe $J' \in \{0, 1, \dots, m\}^k$ tel que $\phi_{J'}(0) \in \phi_J^{-1}([c, d])$; donc $\phi_{JJ'}(0) \in [c, d]$. \square

Preuve du théorème 3.2.2. On va montrer ce théorème en trois étapes.

Étape 1. On va montrer qu'il existe une ensemble finie $\Gamma_\delta \in [0, 1 - \delta]$, où $0 < \delta < 1$, tel que

$\forall n \in \mathbb{N}$, et $\forall I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, on ait

$$\text{soit } \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| > 1 - \delta \text{ soit } \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \in \Gamma_\delta. \quad (3.3)$$

Supposons que Φ satisfait la condition de séparation, alors du principe des tiroirs, on a

$$l = \sup_{(n,k): x \in [0,1], k \in \mathbb{N}} \# \left\{ \phi_I(0) : \phi_I(0) \in [x, x + \rho^k], I \in \{0, 1, \dots, m\}^k \right\} \leq \frac{1}{c} \quad (3.4)$$

où $\#X$ désigne le cardinal de X et c la constante de la définition 3.1.2.

Choisissons maintenant $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que en (x, k) le sup dans (3.4) est atteint. Soit k' un entier suffisamment grand tel que $\rho^{k'} + \rho^{k'+k} < 1$, $k_0 := k' + k$ et

$$x_0 = \phi_{0^{k'}}(0),$$

où $0^{k'}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{k'}$. Alors $[x_0, x_0 + \rho^{k_0}] \subset [0, 1]$, et le supremum défini par (3.4) est aussi atteint en (x_0, k_0) . Choisissons $W_1, \dots, W_l \in \{0, 1, \dots, m\}^{k_0}$ tel que $\phi_{W_1}(0), \dots, \phi_{W_l}(0)$ sont des points différents dans $[x_0, x_0 + \rho^{k_0}]$. Fixons aussi $0 < \delta < 1$ et $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho\delta \leq \rho^{k_1} < \delta. \quad (3.5)$$

Soient $I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$ tels que

$$|\phi_I(0) - \phi_J(0)| \leq (1 - \delta)\rho^n.$$

On peut supposer que $\phi_I(0) \leq \phi_J(0)$. Soit $\Delta = [\phi_J(0), \phi_I(0) + \rho^n]$. Alors $\Delta \subset \phi_I([0, 1]) \cap \phi_J([0, 1])$ et $|\Delta| \geq \delta\rho^n$ où $|\Delta|$ désigne la longueur de Δ . D'après la Proposition 3.1.3, on a $\Phi_I(0) + \rho^n = \Phi_I(1)$, et donc $\Phi_I^{-1}(\Delta) = [u, 1]$ pour un certain $u \in]0, 1[$ avec $1 - u \geq \delta > \rho^{k_1}$. Posons $I' = \underbrace{m \dots m}_{k_1}$. D'après la proposition 3.1.1, on a $\phi_m(1) = 1$, $\phi_{I'}(1) = 1$ et

$$\phi_{I'}([0, 1]) = [\phi_{I'}(0), \phi_{I'}(1)] = [1 - \rho^{k_1}, 1] \subset [u, 1];$$

donc

$$\phi_{II'}([0, 1]) \subset \phi_I([0, 1]) = \Delta$$

et en particulier

$$\phi_{II'}([x_0, x_0 + \rho^{k_0}]) \subset \Delta \subset \phi_J([0, 1]).$$

Notons que $\phi_{II'}([x_0, x_0 + \rho^{k_0}])$ est un sous-intervalle de $\phi_J([0, 1])$ de longueur $\rho^{n+k_0+k_1}$. D'après lemme 3.2.2 (ii) il existe $J' \in \{0, \dots, m\}^{k_0+k_1}$ tel que $\phi_{JJ'}(0) \in \phi_{II'}([x_0, x_0 + \rho^{k_0}])$. Soit $x_1 = \phi_{II'}(x_0)$ alors

$$\phi_{II'}([x_0, x_0 + \rho^{k_0}]) = [\phi_{II'}(x_0), \phi_{II'}(x_0 + \rho^{k_0})] = [x_1, x_1 + \rho^{n+k_0+k_1}]$$

Comme $\phi_{W_1}(0), \dots, \phi_{W_l}(0)$ sont des points différents de $[x_0, x_0 + \rho^{k_0}]$, alors $\phi_{II'W_1}(0), \dots, \phi_{II'W_l}(0)$ sont aussi des points distincts de $[x_1, x_1 + \rho^{n+k_0+k_1}]$, d'après la proposition 3.1.2. De plus $\phi_{JJ'W_1}(0) \in [x_1, x_1 + \rho^{n+k_0+k_1}]$ et comme l est le sup dans (3.4), on déduit que

$$\phi_{JJ'}(0) \in \left\{ \phi_{II'W_j}(0), 1 \leq j \leq l \right\}.$$

Ainsi

$$\phi_J(0) + \rho^n \phi_{J'}(0) \in \left\{ \phi_I(0) + \rho^n \phi_{I'w_j}(0), 1 \leq j \leq l \right\},$$

$$\begin{aligned} \rho^{-n}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) &\in \left\{ \phi_{I'w_j}(0) - \phi_{J'}(0), 1 \leq j \leq l \right\} \\ &\subset \left\{ \phi_{\hat{I}}(0) - \phi_{\hat{J}}(0), \hat{I}, \hat{J} \in \{0, 1, \dots, m\}^{k_0+k_1} \right\} \end{aligned}$$

et on peut choisir

$$\Gamma_\delta = \left\{ \phi_{\hat{I}}(0) - \phi_{\hat{J}}(0), \hat{I}, \hat{J} \in \{0, 1, \dots, m\}^{k_0+k_1} \right\} \cap [0, 1 - \delta]. \quad (3.6)$$

Étape 2. Soit $\gamma = \min \{b_1, b_m - b_{m-1}\}$ et $B = \{b_i - b_j : 0 \leq i, j \leq m\}$. Comme $0 < \rho < 1$, $0 = b_0 < \dots < b_m = 1 - \rho$ et $b_{i+1} - b_i \leq \rho, \forall i \in [0, m-1]$, on a $0 < \gamma \leq \rho < 1$. Soient Γ_γ l'ensemble défini dans l'étape 1 (avec $\gamma = \delta$) et

$$\eta = \max (\rho^{-1} (\pm \Gamma_\gamma + B) \cap [0, 1])$$

Alors $0 \leq \eta < 1$. On va montrer maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, on a

$$\text{soit } \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \geq 1, \text{ soit } \rho^{-n} |\Phi_I(0) - \Phi_J(0)| \leq \eta. \quad (3.7)$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ (on choisit le plus petit) et $I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$ tels que

$$\eta < \rho^{-n} (\Phi_J(0) - \Phi_I(0)) < 1. \quad (3.8)$$

Alors $n \geq 2$, car sinon par (3.8) on $0 <^{-1} (\Phi_J(0) - \Phi_I(0)) < 1$, et donc $\rho^{-1} (\Phi_J(0) - \Phi_I(0)) \in \rho^{-1} B \cap]0, 1[$; mais comme $0 \in \Gamma_\gamma$ alors $\rho^{-1} (\Phi_I(0) - \Phi_J(0)) < \eta$ et cela contredit (3.8). Posons maintenant

$$I = I'i, \quad J = J'j$$

où $I', J' \in \{0, 1, \dots, m\}^{n-1}$ et $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$. Alors

$$\phi_I(0) = \phi_{I'i}(0) = \phi_{I'}(b_i), \quad \phi_J(0) = \phi_{J'j}(0) = \phi_{J'}(b_j).$$

Dès propositions 3.1.1 et 3.1.3 on déduit que

$$\phi_I(0) = \phi_{I'}(0) + \rho^{n-1}b_i, \quad \phi_J(0) = \phi_{J'}(0) + \rho^{n-1}b_j,$$

$$\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) = \phi_J(0) - \phi_I(0) + \rho^{n-1}(b_i - b_j) \quad (3.9)$$

et par suite

$$|\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)| \leq |\phi_J(0) - \phi_I(0)| + \rho^{n-1}|(b_i - b_j)| < \rho^n + \rho^{n-1}(1 - \rho) = \rho^{n-1} \quad (3.10)$$

Pour compléter la démonstration on a besoin de montrer l'inégalité suivante :

$$|\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)| \leq (1 - \gamma)\rho^{n-1}. \quad (3.11)$$

D'après la relation (3.9) et du fait que $\phi_J(0) > \phi_I(0)$, on a

$$\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) > \rho^{n-1}(b_i - b_j) \geq -\rho^{n-1}(1 - \rho) \geq -\rho^{n-1}(1 - \gamma) \quad (3.12)$$

Pour déterminer la borne supérieure des quantités $\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)$, considérons les deux cas :

- i) $(i, j) = (m, 0)$;
- ii) $(i, j) \neq (m, 0)$

D'abord supposons que $(i, j) = (m, 0)$. Alors d'après la relation(3.9) on a

$$\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) = \phi_J(0) - \phi_I(0) + \rho^{n-1}(1 - \rho).$$

Il s'ensuit par (3.8) que

$$\frac{\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)}{\rho^{n-1}} = \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^{n-1}} + (1 - \rho),$$

$$\frac{\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)}{\rho^{n-1}} = \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^{n-1}} + (1 - \rho) \left(1 - \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^n} \right)$$

et

$$\frac{\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)}{\rho^{n-1}} > \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^{n-1}} > \eta,$$

puisque $\rho < 1$ et $|\phi_J(0) - \phi_I(0)| < \rho^n$. Par suite et en utilisant la relation (3.10) on obtient

$$\eta < \frac{\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)}{\rho^{n-1}} < 1$$

et cela contredit l'hypothèse de minimalité de n . Supposons maintenant $(i, j) \neq (m, 0)$. Alors

$$b_j - b_i \geq \min \{b_1 - b_m, b_0 - b_{m-1}\} = \min \{b_1 - (1 - \rho), -b_{m-1}\},$$

et de (3.9) on a

$$\begin{aligned}
 \phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) &\leq \rho^n - \rho^{n-1} \min \{b_1 - (1 - \rho), -b_{m-1}\} & (3.13) \\
 &= \rho^{n-1} (\rho - \min \{b_1 - (1 - \rho), -b_{m-1}\}) \\
 &= \rho^{n-1} (\rho + \max \{1 - \rho - b_1, b_{m-1}\}) \\
 &= \rho^{n-1} \max \{1 - b_1, \rho + b_{m-1}\} \\
 &= \rho^{n-1} \max \{1 - b_1, 1 - (b_m - b_{m-1})\} \\
 &= \rho^{n-1} (1 - \min \{b_1, b_m - b_{m-1}\}) \\
 &= \rho^{n-1} (1 - \gamma).
 \end{aligned}$$

Ainsi les relations(3.12) et (3.13) impliquent (3.11). D'après cette dernière relation et l'étape 1, on a

$$\rho^{-n} (\phi_J(0) - \phi_I(0)) = \rho^{-n} (\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)) + \rho^{-1} (b_j - b_i) \in \rho^{-1} (\pm\Gamma_\gamma + B).$$

Il s'ensuit de la relation (3.8) que $\rho^{-n} (\phi_J(0) - \phi_I(0)) \in \rho^{-1} (\pm\Gamma_\gamma + B) \cap]0, 1[$, et de la définition de η on a $\rho^{-n} (\phi_J(0) - \phi_I(0)) \leq \eta$; mais cela condradit la relation(3.8). Ainsi(3.7) est vraie.

Étape 3. Soit $\eta \in]0, 1[$ le nombre défini dans l'étape 2. En combinant la relation (3.7) et l'hypothèse de l'étape 1, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall I, J \in \{0, 1, \dots, m\}^n$, soit $\rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| \geq 1$ soit $\rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| \in \Gamma_{1-\eta}$, où $\Gamma_1 = \{0\}$. Donc Φ satisfait la condition de finitude.□

De ce qui a précédé on déduit les conséquences suivantes :

Corollaire 3.2.1. *Soit θ un nombre réel > 1 . Alors $\theta \notin \mathbb{S} \Leftrightarrow B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} pour tout $m \geq [\theta]$, où $[\theta]$ est la partie entière de θ .*

Preuve. Supposons $\theta \in \mathbb{S}$. Alors, le corollaire 2.2.1 du chapitre 2, dit que tous les ensembles $B_m(\theta)$ sont uniformément discrets. Ainsi chaque ensemble $B_m(\theta)$ n'est pas dense et en particulier

lorsque $m \geq [\theta]$. Inversement si $\theta \notin \mathbb{S}$ alors du théorème 2.2.3 du chapitre 2, on déduit que $B_m(\theta)$ admet un point d'accumulation, puisque $m \geq [\theta] \Rightarrow m + 1 > \theta$. Il s'ensuit du théorème 3.2.1, ci-haut, que 0 est un point d'accumulation de $B_m(\theta)$ et du théorème 2.1.1 du chapitre 2 on déduit le résultat. \square

Corollaire 3.2.2. *Soit θ un nombre réel > 1 . Alors les assertions suivantes sont vraies :*

- (i) θ un nombre de Pisot.
- (ii) $A_m(\theta)$ est uniformément discret, $\forall m$.
- (iii) $B_m(\theta)$ est uniformément discret $\forall m$.
- (iv) $\exists m \geq [\theta]$ tel que $A_m(\theta)$ est uniformément discret $m \geq [\theta]$.

Preuve. On va montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence du corollaire 2.2.1 du chapitre 2. De l'égalité $B_m = A_m - A_m$ on déduit que $l_m(\theta) > 0$ lorsque le (ii) est vrai. Ainsi $l_m(\theta) > 0$ pour tout m et du théorème 2.2.1 du chapitre 2, on déduit que θ est un nombre de Pisot et par suite $B_m(\theta)$ est uniformément discret $\forall m$ (du corollaire 2.2.1 du chapitre 2), d'où le (iii). L'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est triviale puisque $A_m \subset B_m$. Finalement la condition (iv) étant équivalente à dire que $l_m(\theta) > 0$, implique $\theta \in \mathbb{S}$, car sinon du corollaire 3.2.1, $B_m(\theta)$ est dense dans \mathbb{R} pour tout $m \geq [\theta] \Rightarrow 0$ est un point d'accumulation de $B_m(\theta)$ et donc $l_m(\theta) = 0$. \square

3.3 Problèmes ouverts et remarques.

Toujours avec la notation du chapitre 2, on suppose $\theta > 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a déjà vu que si θ un nombre de Pisot, alors les ensembles $B_m(\theta)$ et $A_m(\theta)$ sont uniformément discrets $\forall m$, et si θ n'est pas un nombre de Pisot, alors $B_m(\theta)$ est dense $\forall m \geq [\theta]$. On va d'abord compléter le cas où $\theta \notin \mathbb{S}$.

Proposition 3.3.1. *Si $\theta \notin \mathbb{S}$ et $\theta \geq m + 1$ alors l'ensemble $B_m(\theta)$ est discret.*

Preuve. Comme $m + 1 \in \mathbb{S}$. La condition $\theta \geq m + 1$ est équivalente ici à dire $\theta > m + 1$. Fixons pour un élément $b \in B_m(\theta)$ une représentation :

$$b = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_n\theta^n,$$

où $\varepsilon_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}$ et $\varepsilon_n \neq 0$. Alors

$$|b| \geq |\varepsilon_n\theta^n| - |\varepsilon_{n-1}\theta^{n-1}| - \dots - |\varepsilon_0| \geq \theta^n - m\theta^{n-1} - \dots - m = \theta^n - m \left(\frac{\theta^n - 1}{\theta - 1} \right)$$

et

$$|b| \geq \frac{\theta^n(\theta - (m + 1)) + m}{\theta - 1}.$$

Comme $\theta > m + 1$, on voit que $|b|$ devient arbitrairement grand lorsque n tend vers l'infini. On déduit alors que tout intervalle fini rencontre $B_m(\theta)$ au plus en un nombre fini de points, ce qui signifie que $B_m(\theta)$ est discret. \square

On déduit alors le résultat suivant déjà montré dans le second chapitre [8] :

Corollaire 3.3.1. *Si $\theta \notin \mathbb{S}$ et $\theta \geq m + 1$ alors $l_m(\theta) > 0$.*

Preuve. Si $l_m(\theta) = 0$, alors 0 est un point d'accumulation de $B_m(\theta)$ et cela contredit le fait que cette ensemble est discret. \square

Exemple 3.3.1. Soit $\theta \in]5, 6[$ alors $[\theta] = 5$ et on a les assertions suivantes :

- Si θ est un nombre de Pisot alors $B_m(\theta)$ est uniformément discret $\forall m \geq 1$.
- Si θ n'est pas un nombre de Pisot et $m \geq 5$, d'après corollaire 3.2.1, $B_m(\theta)$ est dense $\Rightarrow l_m(\theta) = 0$.
- Si θ n'est pas un nombre de Pisot et $m \leq 4$, d'après proposition 3.3.1, $B_m(\theta)$ est discret $\Rightarrow l_m(\theta) > 0$.

De plus comme

- $l_2(\theta) > 0 \Rightarrow B_1(\theta)$ uniformément discret.
- $l_4(\theta) > 0 \Rightarrow B_2(\theta)$ uniformément discret.

On déduit dans ce cas que

- $B_1(\theta)$ et $B_2(\theta)$ sont uniformément discrets.
- $B_3(\theta)$ et $B_4(\theta)$ ne sont pas uniformément discrets.

En étroite liaison avec le spectre des nombres réels, plusieurs auteurs (voir les références dans [0] et [19]) ont étudié l'ensemble

$$C(\theta) = \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \theta^i : \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

où le réel θ est restreint à l'intervalle $]1, 2[$.

Il est clair que $C(\theta) \subset B_1(\theta)$ et est donc uniformément discret lorsque $\theta \in \mathbb{S}$ (d'après les résultats cités ci-haut). Notons que aussi dans ce cas que $B_1(\theta)$ est dense si $\theta \notin \mathbb{S}$. En fait on facilement le résultat suivant :

Proposition 3.3.2. *Soit $\theta \in]1, 2[$. Alors, $\theta \in \mathbb{S} \Leftrightarrow C(\theta)$ est uniformément discret.*

Preuve. Comme on l'a déjà signalé, l'implication directe est vraie. Inversement, les égalités $2 = 1 - (-1)$, $-2 = -1 - (1)$ et $0 = 1 - 1$ entraînent que $2B_1(\theta) \subset C(\theta) - C(\theta)$, et donc $l_1(\theta) > 0$ lorsque $C(\theta)$ est uniformément discret. Il s'ensuit dans ce cas que $B_1(\theta)$ n'est pas dense (d'après les résultats précédents) et donc $\theta \in \mathbb{S}$. \square

Le problème de la distribution des éléments de $C(\theta)$ lorsque $\theta \notin \mathbb{S}$ reste ouvert. Citons quelques résultats connus à ce propos. Le plus significatif (et le plus récent) est aussi dû à S. Akiyama et V. Komornik [0] :

Si $\theta \in]1, \sqrt{2}]$ et n'est pas un nombre de Pisot alors $C(\theta)$ est partout dense.

Il est aussi important de signaler (et contrairement à ce qu'on s'attendait) qu'il y a des nombres de Perron (non-Pisot et non-Salem) et des nombres de Salem θ , dont le spectre $C(\theta)$ est discret (donc ni dense ni uniformément discret). Le premier exemple de nombres de Salem est paru dans l'article de P. Borwein et K. Hare [3] : θ est racine du polynôme : $x^n - x^{n-1} - \dots - x + 1$,

Chapitre 3. Une propriété d'approximation des nombres de Pisot

où $n \geq 4$, alors que des familles de nombres de Perron (non-Pisot et non-Salem) sont exhibées dans [20].

L'un des buts initiaux de ce mémoire est de considérer d'autres familles, mais les articles nouveaux de S. Akiyama et V. Komornik [0] et de D. Y. Feng [9] nous ont contraint à changer de direction [9].

On clos ce mémoire par une question d'approximation posée dans papier [9]. Il est facile de voir (on utilise seulement la définition) que si $\theta \in \mathbb{T}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, il existe deux constantes $c > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$B_m^{(n)}(\theta) \cap]-\frac{c}{n^k}, \frac{c}{n^k}[= \{0\}, \quad (*)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où

$$B_m^{(n)} = \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \theta^i, \quad \varepsilon_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm m\} \right\}.$$

Est ce les seuls nombres réels $\theta \in]1, m+1[$ pour les quels (*) est vraie sont dans $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$?

Références

- [0] S. Akiyama and V. Komornik, *Discrete spectra and Pisot numbers*, J. Number Theory **133** (2013), 375-390.
- [1] K. Al-Shalan, *A study of a property of Pisot numbers*, Master of mathematics, KSU, Riyadh, 2004.
- [2] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugo, M. Pathiaux-Delefosse and J. P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag Basel, 1992.
- [3] P. Borwein, K. G. Hare, *Some computations on the spectra of Pisot and Salem numbers*, Math. Comp. **71** (2002), 767-780.
- [4] D. W. Boyd, *Pisot numbers in a real intervalle*, Math. Comp. **65** (1996), 841-860.
- [5] Y. Bugeaud, *On a property of Pisot numbers and related questions*, Acta Math. Hungar. **73** (1996), 33-39.
- [6] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **72** (1955), 69-92.
- [7] P. Erdős, I. Joó, V. Komornik, *Characterization of the unique expansion $1 = \sum_{i \geq 1} q^{-n_i}$ and related problems*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 377-390.
- [8] P. Erdős, V. Komornik, *Developments in non integer bases*, Acta. Math. Hungar. **79** (1998), 57-83.
- [9] D. Y. Feng, *On the topology of polynomials with bounded integer coefficients*, <http://arxiv.org/abs/1109>.
- [10] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. Math. **34** (1933), 461-479.
- [11] D. A. Marcus, *Number fields*, 3rd ed., Springer, Berlin, 1977.
- [12] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2004.

-
- [13] C. Pisot, *La répartition modulo un et les nombres algébriques*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **7** (1938), 205-248.
- [14] C. Pisot, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Montréal, Quebec, les presses de l'université de Montréal, 1966.
- [15] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, Boston, 1963.
- [16] R. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Paris, Hermann 1967.
- [17] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses universitaires de France, 1970.
- [18] T. Zaïmi, *On an approximation property of Pisot numbers*, Acta Math. Hung. **96** (2002), 309-325.
- [19] T. Zaïmi, *On an approximation property of Pisot numbers II*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 239-249.
- [20] T. Zaïmi, *Approximation by polynomials with bounded coefficients*, J. Number Theory **127** (2007), 103-117.
- [21] T. Zaïmi, *Une remarque sur le spectre des nombres de Pisot*, C. R. Acad. Sci. Paris **347** (2009), 5-8.
- [22] T. Zaïmi, *A property of the spectra of non-Pisot numbers*, C. R. Acad. Sci. Paris **348** (2010), 121-124.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté des résultats sur le spectre, disons B , d'un nombre réel θ plus grand que 1. Du travail de Y. Bugeaud, P. Erdős, V. Komornik et autres, découlent un lien étroit entre la nature algébrique du nombre θ et la distribution des éléments de l'ensemble B sur la droite réelle. Par exemple, dans le cas où θ est nombre de Pisot, il est facile de voir que l'ensemble B est uniformément discret. Plusieurs auteurs ont apporté des contributions dans l'étude de la réciproque de cette dernière proposition. Certains de leurs résultats sont exhibés dans ce mémoire, notamment ceux de P. Erdős, V. Komornik et S. Akiyama. Utilisant des propriétés des fonctions itératives multidimensionnelles, D. J. Feng a complété, très récemment, la solution de ce problème. Les détails de cette preuve sont explicités dans le présent mémoire.

Mots clés

Spectre, Nombre de Pisot, Nombre de Salem, Ensemble de Meyer, Approximation des réels par des entiers algébriques.

Classification (MSC 2010)

Primaire : 11R06, 11R04, 11J17, 11K16.

Secondaire : 12D10, 28A78.