REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUES

N° d'ordre : ....
N° de série : ....

MEMOIRE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN MATHEMATHIQUE
OPTION : MATHEMATHIQUES APPLIQUEES

Etudes des modèles "k-consécutifs-sur-n" et quelques généralisations

Présenté par : *Bennour Besma*

Soutenu le : *21-01-2013*

Devant le jury composé de :

Président :	Mr.Ayadi Abd Elhamid	Prof	Univ. Oum El Bouaghi
Rapporteur :	Mr.Ghoraf Namir	M.C.A	Univ. Oum El Bouaghi
Examinateurs :	Mr.Bouzit Mohamed	M.C.A	Univ. Oum El Bouaghi
	Mr.Djebarni Merzouk	M.C.A	Univ. Oum El Bouaghi

Remerciements

*Tout d'abord, je veux présenter mes remerciements à mon professeur et mon encadreur Monsieur **Ghoraf Namir** pour le choix du sujet de ce mémoire, ses suggestions, ses conseils et ses corrections des erreurs pour ameliorer mon mémoire, pendant la durée de ce travail.*

*De même, je veux exprimer mes remerciements à professeur Monsieur **Ayadi Abd El hamid** qui m'a honorée que soit le président de jury de mon mémoire.*

*En même temps, je tiens à exprimer ma gratitude aux membres de jury, à Mr **Bouzit Mohamed**, et Mr **Djebarni Merzouk**, qui ont bien voulu examiner ce travail et pour l'intérêt qu'ils ont manifestié pour ce travail.*

Finalement, je veux exprimer mes remerciements à toutes mes proches et mes amies pour leurs soutien et l'encouragement.

Merci !

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de ce mémoire, nous étudions les modèles "k-consécutifs-sur-n" et quelques généralisations.

Un système **"k-consécutifs-sur-n :F"** (**"k-consécutifs-sur-n :G"** respectivement) est un système constitué de n composants et qui tombe en panne (fonctionne resp.) si et seulement si au moins k ($k \leq n$) composants consécutifs tombent en panne (fonctionnent resp.). Si les n composants sont arrangés linéairement alors le système est dit linéaire et si les composants sont arrangé circulairement alors le système est dit circulaire. On rencontre ces systèmes souvent dans :

- Domaines de la télécommunication
- Tronsport du pétrole par pipe-lines
- Les réseaux informatiques
- Domaines des circuits intégrés

Plusieurs chercheurs ont étudié ces modèles et leurs généralisations dans deux cas, dans le premier cas les composants sont supposés indépendants (identiquement distribues ou non), par contre dans le deuxième cas les composants sont supposés dépendants. Les systèmes **"k-consécutifs-sur-n"** ont été présenté pour la première fois dans la litératures de la théorie de la fiabilité par *Kontoleon* en **1980**. Aprés cette année jusqu'à maintenant, ces modèles ont fait l'objet de plusieurs travaux scientifiques où on a donné des formules exactes, récursives de la fiabilité du système (*Chaing & Niu* **1981** ; *Derman* et *all* **1982** ; *Shanthikumar* **1982** ; *Lambiris* et *Papastavridis* **1985** ; *Hwang* **1986** ; ...etc), des bornes de la fiabilité, des théorèmes limites du temps de panne (*Papastavridis* **1987** ; *Papastavridis & Chryssaphinou* **1990**), l'importance en fiabitité et l'importance de structure des composants (*Malon* **1984** ; *Kuo, Zhang, et Zuo* **1990** ; *Lin, Kuo, et Hwang* **1999** ; *Chang, Chen, Hwang* **2002**).

En **1985**, *Tong* a introduit pour la première fois les systèmes **"k-parmi-m-consécutifs-sur-n"**. Ils sont définis comme suit : un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi m composants consécutifs sont en panne. Ce système s'applique dans les problèmes de détection des radars, la télécommunication et le côntrol de qualité. On remarque que pour $m = k$ ($m = n$) on trouve les systèmes "k-consécutifs-sur-n" ("k-sur-n" resp).

En **1986**, *W.S.Grifth* a présenté et étudié les systèmes **"r-consécutifs-k-sur-n"**, ce système est constitué de n composants où $rk \leq n$ disposées linéairement ou circuliarement et qui tombe en panne si et seulement si au moins r séries non chevauchées tombent en panne. Une série est formée de k composants consécutifs, et qui tombe en panne si tous ses composants sont panne. Il est clair que si $r = 1$ alors on obtient les systèmes "k-consécutifs-sur-n" c'est-à-dire elle existe une seule série de k composants consécutifs en panne ; et si $k = 1$ on tombe sur le système connu "k-parmi-n".

En **1987**, *Shanthikumar* a proposé un nouveau système s'appelle un système **consécutifs connecté**. Un système constitué d'une source (0), une cible $(n + 1)$ et n composants $\{1, 2, ..., n\}$ disposées linéairement ou circulairement est appellé un système **consécutifs connecté** si la source est connecté aux composants $\{1, 2, ..., k_0\}$ et le composant j $(1 \leq j \leq n)$ est connecté aux composants $\{j + 1, j + 2, ..., j + k_j\}$ par arcs avec k_j trasmissions possibles du composant j. Le système fonctionne si et seulement s'il existe une connéction entre la source et la cible où ses composants fonctionnent.

En **1990**, *Salvia* et *Lasher* ont étudié la version bi-dimensionnelle du système "k-consécutifs-sur-n" noté par **"$\mathbf{k^2}$-connectés-sur-$\mathbf{n^2}$"** ou **"(k,k)-connectés-sur-(n,n)"**, ce système est représente par une grille carrée de n^2 composants et qui tombe en panne si au moins un carré de coté k $(k \leq n)$ a tous ses composants en panne ; et dont l'application est le diagnostic des maladies par les rayons, et les systèmes de surveillences. En **1992**, *Boehme* et *all* présentent un système plus générale du système "k^2-connctés-sur-n^2" qui est **"(r,s)-connctés-sur-(m,n)" "(r,s)-ou-(s,r)-connctés-sur-(m,n)"**
On remarque que si $(r, s) = (1, k)$ et $(m, n) = (1, n)$ on obtient un système "k-consécutifs-sur-n :F".

En **1996**, *Yamamoto* et *Miyakawa* ont étudié la version tri-dimensionnelle du système "k-consécutifs-sur-n" noté par **"$\mathbf{k^3}$-connectés-sur-$\mathbf{n^3}$"** ou **"(k,k,k)-connectés-sur-(n,n,n)"**, ce système est représenté par une grille cubique de n^3 composants et qui tombe en panne si au moins un cube de coté k $(k \leq n)$ a tous ses composants en panne.

Notre travail est réparti sur trois chapitres :
Le premier chapitre est consacré à présenter des résultats concernant la formule et l'encadrement de la fiabilité des systèmes "k-consécutifs-sur-n" et à la présentation

de quelques résultats sur le comportement asymptotique du temps de panne. L'importance en fiabilité et en structure des composants dans le système sont étudiées aussi à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons les systèmes "k-parmi-m-consécutifs-sur-n". Des formules de calcul de la fiabilité de ces systèmes sont données ainsi des bornes de la fiabilité et l'étude du comportement stochastique du temps de panne sont données.

Ensuite, dans le chapitre trois nous avons examiné la version bidimensionnelle des systèmes "k-consécutifs-sur-n". Ici, nous avons présenté quelques généralisations du système en question et nous avons donné pour chaque généralisation la formule de la fiabilité et les bornes pour le cas général de ce système.

Finalement, nous avons terminé notre travail par des programmes en MATLAB qui calculent la valeur ou les bornes de la fiabilité des systèmes étudiés dans le mémoire.

Préliminaires

Notatios

Dans tout le document on utilise les notations suivantes :

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: Espace de probabilité.

$\mathbb{E}$: L'espérance mathématique.

$\mathbf{1}_A$: Fonction indicatrice de l'ensemble A.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$: Le vecteur binaire à valeur dans $\{0,1\}^n$.

$(\cdot_i, x) = (x_1, x_2, ..., \cdot_i, ..., x_n)$: désigne que la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur x est remplacé par $\cdot$: c'est-à-dire :

$$(0_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$$

$$(1_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$$

.

$\min_{0 \leq i \leq n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1.x_2. \ldots .x_n$

$\max_{0 \leq i \leq n} x_i = \coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$

$x \leq y$: Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on a : $x_i \leq y_i$.

$x < y$: Pour tout i on a : $x_i \leq y_i$ avec $x_j < y_j$ pour un certain j.

Définitions et propriétés

Nous considérons un système de n composants distincts numérotés $1, 2, ..., n$; chacun de ces composants peut être en marche ou en panne. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ les variables aléatoires binaires qui représentent les états des composants c'est-à-dire :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si le } i^{\text{ème}} \textit{ composant fonctionne} \\ 0 & \textit{si non} \end{cases}$$

Le problème clé en fiabilité est de caractériser l'état du système en fonction des états de ses composants. Pour cela, nous donnons les notions suivantes :

Définition 1 *On appelle fonction de structure toute fonction* ϕ *de* $\{0,1\}^n$ *et à valeurs dans* $\{0,1\}$ *définie par :*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si le système fonctionne} \\ 0 & \textit{si le système est en panne} \end{cases}$$

Où : $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$.
La fonction de structure ϕ *est dite cohérente si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$.

(ii) $\phi(x)$ *est croissante au sens large pour toute composante* x_i, $i = 1, 2, ..., n$ *c'est-à-dire :*

$$\textit{Pour tout } i, \;\; x_i < y_i \;\; \textit{alors} \;\; \phi(x) \leq \phi(y)$$

(iii) *pour tout* i *; il exist un vecteur* $(\cdot_i, x)$ *tel que :* $\phi(1_i, x) = 1$ et $\phi(0_i, x) = 0$

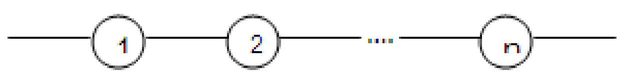
Définition 2 *(Décomposition pivotale). Soit* ϕ *la fonction de structure d'ordre* n. *Pour tout* i *fixé* $i = 1, ..., n$ *et pour tout* x, *on a la décomposition suivante :*

$$\phi(x) = x_i \phi(1_i, x) + (1 - x_i)\phi(0_i, x)$$

Alors, nous avons une décomposition pivotale de ϕ *selon le composant* i.
Exemple 1 *(Système en série). Le système en série est un système composé de* n *éléments et il tombe en panne si et seulement si au moins un élément tombe en panne c'est-à-dire :*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si pour tout } i, \;\; x_i = 1 \\ 0 & \textit{si non} \end{cases}$$

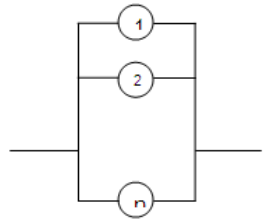
Alors : $\phi(x) = \min_{1 \leq i \leq n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i$



Le système en série

Exemple 2 *(Système en parallèle). Le système en parallèle est un système composé de* n *éléments et il fonctionne si et seulement si au moins un élément fonctionne c'est-à-dire :*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si pour tout } i, \;\; x_i = 0 \\ 1 & \textit{si non} \end{cases}$$



Le système en parallèle

Alors : $\phi(x) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i = \coprod_{i=1}^{n} x_i$

Exemple 3 *(Système "k-parmi-n")*

*Le système "k-parmi-n :F" est en panne si et seulement si au moins k composants parmi les n composants sont en panne, c'est-à-dire :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-k \\ 1 & si \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1 \end{cases}$$

Pour $k = 1$ ($k = n$ resp.) on tombe sur le système en série (en parallèle resp.).

*Le système "k-parmi-n :G" fonctionne si et seulement si au moins k composants de n fonctionnent, c'est-à-dire :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

Si $k = 1$ ($k = n$ resp.) alors on obtient le système en parallèle (en série resp.).

Proposition 1 *Si ϕ est une fonction de structure cohérente d'ordre n, alors on a :*

$$\min_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \phi(x) \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

Définition 3 *(Coupes et liens).*

- *Si $\phi(x) = 0$ alors l'ensemble $C_x = \{i,\ x_i = 0\}$ est appellé* ***la coupe*** *liée au vecteur x. Nous notons par C l'ensemble de toutes les coupes possibles.*
  La coupe C_x est dite ***minimale*** *si* : pour tout $y > x$ *alors* $\phi(y) = 1$.
- *Si $\phi(x) = 1$ alors l'ensemble $L_x = \{i,\ x_i = 1\}$ est appellé* ***le lien*** *lié au vecteur x. Nous notons par L l'ensemble de tous les liens possibles.*
  Le lien L_x est dit ***minimal*** *si* : pour tout $y < x$ *alors* $\phi(y) = 0$.

Remarques

- La première indique qu'il suffit d'un lien minimal pour avoir le bon état du système. Elle peut s'interpréter en disant que le système est identique à l'ensemble des liens minimaux disposés en parallèle.

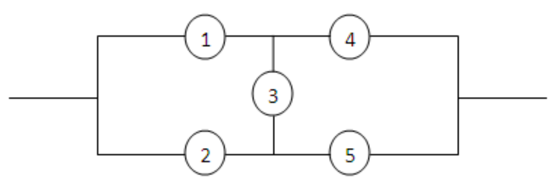
- La deuxième indique, il suffit d'une coupe minimale pour avoir la panne du système. Alors, le système est identique à l'ensemble des coupes minimales disposés en série.

Pour cela, on peut écrire une relation entre la fonction du structure et les liens minimaux ou les coupes minimales dans la proposition suivante :

Proposition 2 *La fonction de structure ϕ est donnée par les formules suivantes :*

1. *En fonction des liens minimaux :*
$$\phi(x) = \max_{1\leq j\leq s} \min_{i\in L_j} x_j$$
où L_j sont les liens minimaux pour $j = 1, ..., s$.
2. *En fonction des coupes minimales :*
$$\phi(x) = \min_{1\leq j\leq r} \max_{i\in C_j} x_i$$
où C_j sont les coupes minimales pour $j = 1, ..., r$.

Exemple 4 *(Structure du pont).*



Structure du pont

Les liens minimaux sont les suivants : $L_m = \Big\{\{1,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,5\}\Big\}$

Et les coupes minimales sont : $C_m = \Big\{\{1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{4,5\}\Big\}$

*D'après la proposition précédente, on peut écrire la fonction de structure ϕ comme suivants :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1-\prod_{i=1}^{4}(1-\prod_{j\in L_i} x_j) \qquad Tel\ \ que\ \ L_i \in L_m \\ &= 1-(1-x_1x_4)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4)(1-x_2x_5)\end{aligned}$$

Ou :

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{4}(1-\prod_{j\in C_i}(1-x_j)) \qquad Tel\ \ que\ \ C_i \in C_m$$

Importance des composants

Considérons un système cohérent composé de n éléments. On a pour tout i, il existe un vecteur $(\cdot_i, x)$ tel que : $\phi(1_i, x) = 1$, $\phi(0_i, x) = 0$ alors :

$$\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x) = 1$$

C'est-à-dire le $\text{i}^{\text{ème}}$ composant est plus important puisqu'il détermine quand le système fonctionne ou non. Le vecteur $(1_i, x)$ est appelé *"vecteur-lien critique"* pour le $\text{i}^{\text{ème}}$ composant et l'ensemble correspondant $L(1_i, x)$ s'appelle *"lien critique"* pour le $\text{i}^{\text{ème}}$ composant. Le vecteur $(0_i, x)$ est appelé *"vecteur-coupe critique"* pour le $\text{i}^{\text{ème}}$ composant et l'ensemble correspondant $C(0_i, x)$ s'appelle *"coupe critique"* pour le $\text{i}^{\text{ème}}$ composant

Définition 4 *Soit ϕ la fonction de structure cohérente d'ordre n. L'importance du $i^{\text{ème}}$ composant est définie par :*

$$I_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_x \Big[\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x)\Big]$$

Où $\sum_x \Big[\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x)\Big]$ est le nombre de liens critiques (vecteurs-liens critiques) pour le composant i. Et il existe 2^{n-1} possibilités d'écrire le vecteur $(1_i, x)$.

Exemple 5 *(Système "k-parmi-n :F"). La fonction de structure ϕ est égal à 1 SSi au moins $n-k+1$ composants du vecteur x valent 1, alors :*

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_x \Big[\phi(1_i, x) - \phi(0_i, x)\Big] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_x \mathbf{1}_{\{x_1+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n=n-k\}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{n-k} \end{aligned}$$

Tel que : $\binom{n-1}{n-k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$

*Pour $k = 1$ ou $k = n$ on obtient le système en série ou en parallèle respectivement, alors :

$$I_i = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{n-k} = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

respectivement

$$I_i = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{n-k} = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{n-n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

C'est-à-dire tous les composants ont la même importance dans le système en série ou en parallèle.
*Il est tout possible de travailler avec les vecteurs-coupes critiques.

Iindices de la fiabilité

La fiabilité du système à l'instant donné t est la probabilité du bon fonctionnement sur l'intervalle $[0,t]$ sous des conditions données.
L'état du composant i est donné par une variable aléatoire X_i qui vaut 0 ou 1 avec les probabilités de panne q_i et les fiabilités p_i données par : pour $i = 1, ..., n$

$$q_i = \mathbb{P}(X_i = 0)\ , \quad p_i = 1 - q_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$$

Définition 5 *La fiabilité de la structure ϕ est définie par :*

$$R(\mathbf{p}) = \mathbb{P}(\phi(X) = 1) = \mathbb{E}(\phi(X))$$

Où : $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ et $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
Exemple 6 *(Système en série). Chaque composant i a une fiabilité p_i, on a : $\phi(X) = \min_{1\leq i\leq n} X_i$. Donc si les composants sont indépendants alors la fiabilité du système est donnée par* :

$$R(\mathbf{p}) = \mathbb{P}(\phi(X) = 1) = \mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} X_i = 1) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Exemple 7 *(Système en parallèle). Chaque composant i a une fiabilité p_i, on a : $\phi(X) = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Donc si les composants sont indépendants alors la fiabilité du système est donnée par :*

$$\begin{aligned} R(\mathbf{p}) &= \mathbb{P}(\phi(X) = 1) = \mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i = 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i = 0) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \end{aligned}$$

Exemple 8 *(Système "k-parmi-n :F"). Si les composants sont supposés indépendants et identiques, La fiabilité est donnée par* :

$$\begin{aligned} R(p) &= \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n - k + 1\Big) \\ &= \sum_{m=n-k+1}^{n} \binom{n}{m} p^m\, q^{n-m}. \end{aligned}$$

Exemple 9 *(Structure du pont).*
**Pour les liens minimaux* $L_m = \Big\{\{1,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,5\}\Big\}$*, on a :*

$$\phi(X) = 1 - \prod_{i=1}^{4}(1 - \prod_{j\in L_i} X_j) \qquad \textit{Tel que } L_i \in L_m$$

$$\textit{Alors :} \qquad R(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^{4}(1 - \prod_{j\in L_i} p_j) \qquad \textit{Tel que } L_i \in L_m$$

**Pour* $\mathbf{p} = (0.95, 0.92, 095, 0.96, 0.95)$ *on a :* $R(\mathbf{p}) = 0.9997$.

Importance en fiabilité des composants

Définition 6 *Soit ϕ une fonction du structure cohérente d'ordre n. Alors l'importance en fiabilité du composant i, noté I_i^m, est définie par :*

$$I_i^m = \mathbb{E}\Big(\phi(1_i, X) - \phi(0_i, X)\Big)$$

elle s'appelle aussi l'importance moyenne du composant i.
Définition 7 *Soit ϕ une fonction du structure cohérente d'ordre n ayant des composants indépendants. L'importance en fiabilité du composant i est la dérivée partielle de la fonction R par rapport à p_i, c'est-à-dire :*

$$I_i^m = \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i}$$

Pour $i = 1, 2, ..., n$; et $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$.
*Dans le cas d'une structure cohérente d'ordre n ayant des composants indépendants, les définitions 6 et 7 sont équivalentes. On peut écrire $R(\mathbf{p})$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{p}) &= \mathbb{P}(\phi(X) = 1) \\
&= \mathbb{P}\Big(\{\phi(X) = 1\} \cap \{X_i = 1\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{\phi(X) = 1\} \cap \{X_i = 0\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(X_i = 1\Big)\mathbb{P}\Big(\phi(X) = 1/_{X_i=1}\Big) + \mathbb{P}\Big(X_i = 0\Big)\mathbb{P}\Big(\phi(X) = 1/_{X_i=0}\Big) \\
&= p_i \;\mathbb{P}\big(\phi(1_i, X) = 1\big) + (1 - p_i)\mathbb{P}\big(\phi(0_i, X) = 1\big) \\
&= p_i R(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) R(0_i, \mathbf{p})
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i} &= R(1_i, \mathbf{p}) - R(0_i \mathbf{p}) \\
&= \mathbb{P}\big(\phi(1_i, X) = 1\big) - \mathbb{P}\big(\phi(0_i, X) = 1\big) \\
&= \mathbb{E}\big(\phi(1_i, X)\big) - \mathbb{E}\big(\phi(0_i, X)\big) \\
&= \mathbb{E}\big(\phi(1_i, X) - \phi(0_i, X)\big) = I_i^m
\end{aligned}$$

Remarques

- $R(\mathbf{p})$ *est une fonction multilinéaire. Si les composants sont supposés de même fiabilité, c'est-à-dide* $p_1 = ... = p_n = p$ *alors* $R(p)$ *est un polynome en* p*.*
- *Pour tout* i*,* $i = 1, ..., n$*, tel que* $p_i = \frac{1}{2}$*, alors l'importance du structure du composant* i *coincide avec l'importance en fiabilité du composant* i *c'est-à-dire :* $I_i = I_i^m$*.*

Exemple 10 *(Système en série). On a :* $R(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{n} \; p_i$ *alors :*

$$I_i^m = \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \prod_{j=1,\ j \neq i}^{n} \; p_j$$

**Si* $p_1 < p_2 < ... < p_n$ *alors* $I_1^m > I_2^m > ... > I_n^m$*. Le composant ayant la plus petite fiabilité est le composant le plus important.*
**Si les composants sont supposés identiques c'est-à-dire* $p_1 = ... = p_n = p$*, alors on obtient :* $I_i^m = p^{n-1}$*.*
**Il est clair pour tout* i*,* $i = 1, ..., n$*,* $p_i = p = \frac{1}{2}$ *on a :* $I_i^m = \frac{1}{2^{n-1}} = I_i$*.*

Exemple 11 *(Système en parallèle). On a :* $R(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \; (1 - p_i)$ *alors :*

$$I_i^m = \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \prod_{j=1,\ j \neq i}^{n} \; (1 - p_j)$$

**Si* $p_1 < p_2 < ... < p_n$ *alors* $I_1^m < I_2^m < ... < I_n^m$*. Le composant ayant la plus grande fiabilité est le composant le plus important.*
**Si les composants sont supposés identiques, alors :* $I_i^m = (1 - p)^{n-1} = q^{n-1}$*.*
**Si pour tout* i*,* $i = 1, ..., n$*,* $p_i = p = \frac{1}{2}$ *on a :* $I_i^m = (1 - \frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} = I_i$*.*

Première partie

Système "k-consécutifs-sur-n" dans le Cas unidimensionnel

Chapitre 1

Système "k-consécutifs-sur-n"

Notre objectif dans ce chapitre est étudié quelques résultats déja trouvées pour le système **"k-consécutifs-sur-n"**. On commence par la formule exacte et récursive de la fiabilité dans le cas indépendant, ainsi on présente les bornes de sa fiabilité et théorème limites des temps de panne. Ensuite, on reppele l'importance en fiabitité et en structure des composants. Enfin, on étudie les formules récursives de la fiabilité des systèmes liés.

1.1 *Notations et Définitions*

n : le nombre des composants dans le système.

k : le nombre minimum des composants consécutifs en panne qui cause la panne du système.

j : le nombre des composants dans le système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** en panne.

X_i : l'état du composant dans la position i, il vaut 0 si le composant i est en panne et 1 si non.

p_i , q_i : la fiabilité du composant i, pour tout $i = 1, 2, ..., n$ tel que : $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = q_i$.

p , q : la fiabilité du composant i dans le cas identique pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

$N(j; n, k)$: le nombre de fois que le système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** fonctionne sachant que j composants dans le système sont en panne.

$R(n, k; \mathbf{p})$: la fiabilité du système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** avec : $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$.

$R_c(n, k; \mathbf{p})$: la fiabilité du système circulaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** avec : $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$.

$R\,(n,k;p)$: la fiabilité du système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** avec : $p = p_1 = ... = p_n$.

$R_c\,(n,k;p)$: la fiabilité du système circulaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** avec : $p = p_1 = ... = p_n$.

$Q(n,k;\mathbf{p}) = 1 - R(n,k;\mathbf{p})$: Probabilité du panne du système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"**.

$Q_c(n,k;\mathbf{p}) = 1 - R_c(n,k;\mathbf{p})$: Probabilité du panne du système circuliare **"k-consécutifs-sur-n :F"**.

Définition 1.1. *On dit que le système est* ***"k-consécutifs-sur-n :F"*** *où le système tombe en panne si et seulement si au moins* k $(k \leq n)$ *composants consécutifs tombent en panne.*

Définition 1.2. *On dit que le système* ***"k-consécutifs-sur-n"*** *est linéaire(circulaire) si les* n *composants sont arrangés linéairement (circulairement). Voir figure* 1.1 *(figure* 1.2*).*

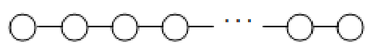


FIGURE 1.1 – Le système linéaire **"k-consécutifs-sur-n"**

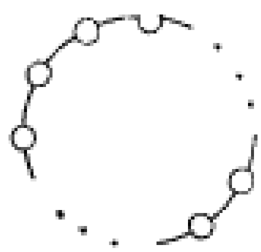


FIGURE 1.2 – Le système circulaire **"k-consécutifs-sur-n"**

Remarque 1.1. *Il est clair, si* $k = 1$*, ou* $k = n$*, alors on obtient le système en série ou en parallèle respectivement.*

Définition 1.3. *On dit que le système forme de n composants disposés linéairement ou circulairement est* ***"k-consécutifs-sur-n :G"*** *si le système fonctionne si et suelment si au moins k composants consécutifs fonctionnent.*

Exemple 1.1. *"Stationnement dans la rue". Supposons qu'il existe n des espaces en parallèle dans une parking et chaque espace est adapté pour une voiture. Si un bus veut stationner dans la parking, il faut deux espaces consécutifs. Chaque espace de stationnement a une probabilité qu'il est disponible. Le problème est de trouver la probabilité que le bus peuve se garer dans cette parking. Ce problème est équivalent à la fiabitité d'un système linéaire* ***"2-consécutifs-sur-n :G"****.*

Exemple 1.2. *"Transport du pétrole par pipe-lines". Un système de transport du pétrole par des tuyeaux d'un point A au point B a n stations de pompage. chaque station de pompage peut transporter le pétrole pour les k stations des pompages suivantes. Si une station de pompage est en panne, le flux de pétrole ne pouvait pas être interromper puisque la station suivante pourrait supporter la charge. Cependant, si au moins k stations de pompage consécutifs tombent en panne, l'huile s'arrête et le système tombe en panne. Ce problème est équivalent à la fiabitité d'un système linéaire* ***"k- consécutifs-sur-n :F"****.*

1.2 *Formules de la fiabilité dans le cas indépendant*

Ici les états des composants sont des variables aléatoires binaires et indépendantes. Nous allons étudier deux cas, dans le premier cas qu'ils sont supposés les composants identiques (formule exacte et récursive de fiabilité) et dans le deuxième cas qu'ils sont supposés les composants non identiques (formule récursive de fiabilité).

1.2.1 Formule exacte de la fiabilité

Cas linéaire

On considère un système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** et nous supposons que les n composants sont indépendants et identiquement distribués. *La fiabilité* de ce système est donnée par :

$$R(n,k;p)=\sum_{j=0}^{n}p^{n-j}q^{j}N(j;n,k) \tag{1.1}$$

Tel que :

$p^{n-j}\ q^j$ est la probabilité pour chaque arrangement de j composants sont en panne, et $n-j$ composants sont en marche.

$N\left(j;n,k\right)$ est donné dans la notation.

En **1982**, *Bolinger* a donné les formules récurssives de $N\left(j;n,k\right)$:

$$N\left(j;n,k\right)=\begin{cases}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} & si\ \ j<k \\ 0 & si\ \ j\geq k \\ \sum_{i=0}^{k-1} N\left(j-i;n-i-1,k\right) & si\ \ n>j\geq k \end{cases}$$

En particulier, si $k=2$,ou $k=3$,on a :

$$N\left(j;n,2\right)=\begin{pmatrix} n-j+1 \\ j \end{pmatrix}$$

$$N\left(j;n,3\right)=\sum_{i\geq 0}\begin{pmatrix} n-j+1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-j-i+1 \\ j-2i \end{pmatrix}$$

Théorème 1.1. *si* $n>j\geq k\geq 1$ *:*

$$N\left(j;n,k\right)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\begin{pmatrix} n-j+1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-ik \\ n-j \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Démonstration. En utilisant les formules récursives de $N(j;n,k)$:

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k-1} N\left(j-l;n-l-1,k\right) &= \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n-j}{i}\binom{n-l-1-ik}{n-j-1} \\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\begin{pmatrix} n-j \\ i \end{pmatrix}\sum_{l=0}^{k-1}\begin{pmatrix} n-l-1-ik \\ n-j-1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\begin{pmatrix} n-j \\ i \end{pmatrix}\sum_{x=n-ik-k}^{n-ik-1}\begin{pmatrix} x \\ n-j-1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\begin{pmatrix} n-j \\ i \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} n-ik \\ n-j \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n-ik-k \\ n-j \end{pmatrix}\right] \\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\begin{pmatrix} n-j \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-ik \\ n-j \end{pmatrix}-\sum_{i\geq 0}(-1)^i \\ &\quad \begin{pmatrix} n-j \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-ik-k \\ n-j \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i-1}\binom{n-j}{i-1}\binom{n-ik}{n-j}-\sum_{i\geq 1}(-1)^{i} \\
&\quad \binom{n-j}{i-1}\binom{n-ik-k}{n-j} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\binom{n-j}{i-1}\binom{n-ik}{n-j}-(-1)^{-1}\sum_{i\geq 1}(-1)^{i} \\
&\quad \binom{n-j}{i-1}\binom{n-ik-k}{n-j} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\binom{n-ik}{n-j}\left[\binom{n-j}{i}+\binom{n-j}{i+1}\right] \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\binom{n-ik}{n-j}\binom{n-j+1}{i} \\
&= N\left(j;n,k\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

Corollaire 1.1. *Si $k=1$, le système est en série, on obtient donc : $N(j;n,1)=0$*

Maintenant, nous dennorons la formule exacte de *la fiabilité* pour le système étudié :

Théorème 1.2.

$$R\left(n,k;p\right)=\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}p^{i-1}q^{ik}\left[\binom{n-ik+1}{i}-q\binom{n-ik}{i}\right]. \tag{1.3}$$

pour $k\geq 1$

Démonstration. D'après les formules (1.1), et (1.2) on a :

$$
\begin{aligned}
R\left(n,k;p\right) &= \sum_{j\geq 0}p^{n-j}q^{j}\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\binom{n-ik}{n-j}\binom{n-j+1}{i} \\
&= \sum_{j\geq 0}p^{n-j}q^{j}\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\frac{(n-ik)!}{(n-j)!(n-ik-n+j)!}\frac{(n-j+1)!}{i\,!(n-j+1-i)!} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\frac{(n-ik)!}{i\,!(n-(k+1)i+1)!}\sum_{j\geq 0}p^{n-j}q^{j}(n-j+1) \\
&\quad \frac{(n-(k+1)i+1)!}{(j-ik)!(n-i+1-j)!}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
R\left(n,k;p\right) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(n-ik)!}{i\,!\big(n-(k+1)i+1\big)!}\sum_{l\geq 0} p^{n-ik-l}\; q^{ik+l}\big(n-(ik+l)+1\big) \\
&\quad \binom{n-(k+1)i+1}{l} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(n-ik)!}{i\,!\big(n-(k+1)i+1\big)!} p^{i-1}\; q^{ik} \sum_{l\geq 0} p^{n-ik-l-i+1}\; q^{l}\;(n-ik+1-l) \\
&\quad \binom{n-(k+1)i+1}{l} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\; p^{i-1}\; q^{ik} \frac{(n-ik)!}{i\,!(n-(k+1)i+1)!} \sum_{l=0}^{n-(k+1)i+1} p^{n-(k+1)i+1-l}\; q^{l}\;(n-ik+1-l) \\
&\quad \binom{n-(k+1)i+1}{l} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\; p^{i-1}\; q^{ik} \frac{(n-ik)!}{i\,!(n-(k+1)i+1)!}\Big[n-ik+1-(n-ik-i+1)q\Big] \\
&= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\; p^{i-1}\; q^{ik} \left[\binom{n-ik+1}{i} - q\binom{n-ik}{i}\right]
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Cas circulaire :

Ici, on considère un système circulaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** dont les n composants sont indépendants et de même fiabilité c'est-à-dire : $p = p_1 = ... = p_n$. *La fiabilité* de ce système est donnée par :

$$R_c\left(n,k;p\right) = \sum_{j=0}^{n} p^{n-j} q^j N_c\left(j;n,k\right) \tag{1.4}$$

tel que :

$p^{n-j}\; q^j$ est la probabilité pour chaque arrangement de j composants sont en panne, et $n-j$ composants sont en marche.

$N_c(j;n,k)$ le nombre de fois pour ce système fonctionne sachant que j composants dans le système sont en panne. Il est donné par :

$$N_c(j;n,k) = \frac{n}{n-j}\; N(j;n-1,k)$$

En **1982**, *Derman, Librman, et Ross* ont présenté dans le théorème suivant la relation entre la fiabilité du ce système et la fiabilité du système linéaire :

Théorème 1.3.

$$R_c\,(n, k; p) = p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) q^j R\,(n-j-2, k; p) \tag{1.5}$$

Démonstration. soit N (respectivement $N^{'}$) le nombre de composants en panne jusqu'au premier composant qui fonctionne dans le sens des aiguilles d'une montre (le sens inverse des aiguilles d'une montre) de n'importe quel point choisi sur le cercle entre deux composants.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(N=i) = \mathbb{P}\left(N^{'}=i\right) &= pq^i && si \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\
\mathbb{P}\,(N=i) = \mathbb{P}\left(N^{'}=i\right) &= q^n && si \quad i = n
\end{aligned}$$

Supposons que N et $N^{'}$ sont indépendants, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N+N^{'}=j) &= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(N=j-i) \quad \mathbb{P}(N^{'}=i) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \quad pq^{j-i} \quad pq^i \\
&= (j+1)p^2q^j \qquad\qquad j = 0, 1, ..., n-2
\end{aligned}$$

L'événement $N+N^{'}=j$ veut dire qu'il existe une série de j composants consécutifs en panne entre deux composants qui fonctionnement. Ainsi, le reste du système se trait comme un système linéaire "k-consécutifs-sur-n-j-2 :F". Alors :

$$\begin{aligned}
R_c\,(n, k; p) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(N+N^{'}=j) R(n-j-2, k; p) \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) q^j R\,(n-j-2, k; p)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Maintenant, nous dennerons la formule exacte de la fiabilité pour le système circulaire "k -consécutifs-sur-n :F". D'abord, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.1.

$$q^n = \sum_{i \geq 0} \left(-pq^k\right)^i \left[\binom{n-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i} q^l\right]$$

Pour $n \geq k \geq 0$.

Démonstration. • Pour $k = 0$:

$$\sum_{i \geq 0} (-p)^i \binom{n}{i} = (1-p)^n = q^n$$

- Pour $k = n$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \geq 0} (-pq^n)^i \left[\binom{n-in}{i} - p\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1-in-l}{i} q^l\right] \\
= \;& (-pq^n)^0 \left[\binom{n}{0} - p\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1-l}{i} q^l\right] \\
= \;& 1 - p \sum_{l=0}^{n-1} q^l \\
= \;& 1 - p\,q^0 - p\,q^1 - \ldots - p\,q^{n-1} \\
= \;& 1 - (1-q) - (1-q)\,q - \ldots - (1-q)\,q^{n-1} \\
= \;& q^n
\end{aligned}$$

- Pour $1 \leq k \leq n-1$, on utilise la démonstration par récurrence sur n : On suppose que le lemme est vrai pour $(n-1)$ et on montre qu'il est vrai pour n :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \geq 0} (-pq^k)^i \left[\binom{n-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i} q^l\right] \\
&-\sum_{i \geq 0} (-pq^k)^i \left[\binom{(n-1)-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{(n-1)-1-ik-l}{i} q^l\right] \\
= \;& \sum_{i \geq 0} (-pq^k)^i \left[\binom{n-ik}{i} - \binom{(n-1)-ik}{i} - p \sum_{l=0}^{k-1} q^l \right. \\
&\left. \left[\binom{n-1-ik-l}{i} - \binom{(n-1)-1-ik-l}{i}\right]\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\geq 1}(-pq^k)^i\left[\binom{n-ik-1}{i-1} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-2-ik-l}{i-1}q^l\right]\\
&= -pq^k\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\left[\binom{n-1-k-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-k-1-ik-l}{i}q^l\right]\\
&= -pq^k\ q^{n-1-k}
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\left[\binom{n-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i}q^l\right]\\
&= \sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\left[\binom{(n-1)-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{(n-1)-1-ik-l}{i}q^l\right] - pq^k\ q^{n-1-k}\\
&= q^{n-1} - pq^k\ q^{n-1-k}\\
&= q^{n-1}(1-p)\\
&= q^n
\end{aligned}
$$

□

Théorème 1.4.

$$R_c(n,k,p) = \sum_{i\geq 0}\left(-pq^k\right)^i\binom{n-ik}{i} - q^n + k\sum_{i\geq 0}\left(-pq^k\right)^{i+1}\binom{n-i(i+1)-1}{i} \quad (1.6)$$

Démonstration. D'après la formule (1.5) on a :

$$
\begin{aligned}
R_c(n,k,p) &= p^2\sum_{l=0}^{k-1}(l+1)q^lR(n-l-2,k;p)\\
&= p^2\sum_{l=0}^{k-1}(l+1)q^l\sum_{i\geq 0}(-1)^ip^{i-1}q^{ik}\left[\binom{n-l-1-ik}{i} - q\binom{n-l-2-ik}{i}\right]\\
&= p\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\sum_{l=0}^{k-1}(l+1)q^l\left[\binom{n-1-ik-l}{i} - q\binom{n-2-ik-l}{i}\right]\\
&= p\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\left[\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i}q^l - k\binom{n-k-1-ik}{i}q^k\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
R_c(n,k,p) &= p\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i}q^l - p\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i k\binom{n-k-1-ik}{i}q^k \\
&= \sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\binom{n-ik}{i} - \sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\binom{n-ik}{i} + p\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i \\
&\quad \sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i}q^l + k\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^{i+1}\binom{n-k(i+1)-1}{i} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\binom{n-ik}{i} - \sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\left[\binom{n-ik}{i} - p\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n-1-ik-l}{i}q^l\right] \\
&\quad +k\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^{i+1}\binom{n-k(i+1)-1}{i} \\
&= \sum_{i\geq 0}(-pq^k)^i\binom{n-ik}{i} - q^n + k\sum_{i\geq 0}(-pq^k)^{i+1}\binom{n-k(i+1)-1}{i}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.2.2 Formules récursives de la fiabilité

Cas linéaire

Chiang & Nui (**1981**) sont les premiers qu'ont donné la formule recursive de la fiabilité du système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** dont les n composants sont indépendants et identiquements distribues comme suivant :

$$R(n,k,p) = p^{n-k-1} + \sum_{i=1}^{n-k+1}\sum_{j=i+1}^{i+k-1} p^i\, q^{j-i}\, R(n-j,k,p) \qquad (1.7)$$

Hwang (**1982**) a donné les formules récursives pour $R(n,k,\mathbf{p})$ dans les théorèmes suivants :

Théorème 1.5. *Pour $n \leq k-1$:*

$$R(n,k,\mathbf{p}) = 1$$

Pour $n \geq k$:

$$R(n,k,\mathbf{p}) = \sum_{i=n-k+1}^{n} p_i\Big(\prod_{j=i+1}^{n} q_j\Big)R(i-1,k,p_1,..,p_{i-1}) \qquad (1.8)$$

Démonstration. Pour $n \geq k$, soit E_i l'évènement que le dernier composant qui fonctionne est i, c'est-à-dire : $\mathbb{P}(E_i) = p_i \left(\prod_{j=i+1}^{n} q_j\right)$. Il est clair que E_i, $\big(n-k+1 \leq i \leq n\big)$, sont des évènements disjoints, et le système fonctionne si et seulement si au moins des évènements $E_{n-k+1}, ..., E_n$ se réalise.

$$\begin{aligned} R(n,k,\mathbf{p}) &= \mathbb{P}\{\text{le système fonctionne}\} \\ &= \mathbb{P}\{\text{au moins des évènements } E_{n-k+1}, ..., E_n \text{ se réalise}\} \\ &= \sum_{i=n-k+1}^{n} \mathbb{P}(E_i) R(i-1,k,p_1,..,p_{i-1}) \\ &= \sum_{i=n-k+1}^{n} p_i \Big(\prod_{j=i+1}^{n} q_j\Big) R(i-1,k,p_1,...,p_{i-1}) \end{aligned}$$

□

*Si les n composants sont supposés identiques, alors :

$$R(n,k,p) = \sum_{i=n-k+1}^{n} p\, q^{n-i} R(i-1,k,p)$$

Où d'autre façon : $R(n,k,p) = \sum_{i=0}^{k-1} p\, q^i R(n-i-1,k,p)$

Théorème 1.6. *Pour $n \geq k$:*

$$\begin{aligned} R(n,k,\mathbf{p}) &= R(n-1,k,p_1,...,p_{n-1}) - p_{n-k}\Big(\prod_{j=n-k+1}^{n} q_j\Big) \\ & \quad R(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Démonstration. Pour $n \geq k$, soit F_i l'évènement que la première panne du système se réalise au niveau du composant i, c'est-à-dire : $\mathbb{P}(F_{i-k}) = p_i \left(\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\right)$. Il est clair que F_i, $(k \leq i \leq n)$, sont des évènements disjoints, et le système est en panne si et seulement si au moins des évènements $F_k, ..., F_n$ se réalise.

$$\begin{aligned} 1 - R(n,k,\mathbf{p}) &= \mathbb{P}\{\text{le système est en panne}\} \\ &= \mathbb{P}\{\text{au moins des évènements } F_k, ..., F_n \text{ se réalise}\} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}(F_i) R(i-k-1,k,p_1,..,p_{i-k-1}) \\ &= \sum_{i=k}^{n} p_{i-k} \Big(\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\Big) R(i-k-1,k,p_1,...,p_{i-k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - R(n,k,\mathbf{p}) &= \sum_{i=k}^{n-1} p_{i-k}\Big(\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\Big) R(i-k-1,k,p_1,...,p_{i-k-1}) \\ &\quad + p_{n-k}\Big(\prod_{j=n-k+1}^{i} q_j\Big) R(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1}) \\ &= 1 - R(n-1,k,p_1,...,p_{n-1}) + p_{n-k} \\ &\quad \Big(\prod_{j=n-k+1}^{i} q_j\Big) R(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1}) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} R(n,k,\mathbf{p}) &= R(n-1,k,p_1,...,p_{n-1}) - p_{n-k}\left(\prod_{j=n-k+1}^{n} q_j\right) \\ &\quad R(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1}) \end{aligned}$$

$\square$

Maintenant, les composants sont supposés identiquemets distribués et d'après la formule (1.9) on obtient :

$$R(n,k,p) = R(n-1,k,p) - pq^k R(n-k-1,k,p)$$

Relation entre la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n :F" et "k-consécutifs-sur-n :G" :

On peut classer le système "k-consécutifs-sur-n" en deux catégories :

1. Le système "k-consécutifs-sur-n :F".
2. Le système "k-consécutifs-sur-n :G".

D'après la définition 1.3, on a :

$$\begin{aligned} R_G(n,k;\mathbf{p}) &= 1 - Q_G(n,k;\mathbf{p}) \\ &= \mathbb{P}\{\text{au moins } k \text{ composants consécutifs dans le système} \\ &\qquad \textbf{"k-consécutifs-sur-n :G"} \text{ fonctionnent.}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(n,k;\mathbf{p}) &= 1 - R(n,k;\mathbf{p}) \\ &= \mathbb{P}\{\text{au moins } k \text{ composants consécutifs dans le système} \\ &\qquad \textbf{"k-consécutifs-sur-n :F"} \text{ tombent en panne.}\} \end{aligned}$$

On remarque que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$ dans le système **"k-consécutifs-sur-n :G"** est égal $\mathbb{P}(X_i = 0) = q_i$ dans le système **"k-consécutifs-sur-n :F"** pour $i = 1, 2, ..., n$, alors :

$$Q(n, k; \mathbf{q}) = R_G(n, k; \mathbf{p})$$

Donc, on obtient le lemme suivant :

Lemme 1.2. *Si la fiabilité du $i^{ème}$ composant p_i dans un type de système "k-consécutifs-sur-n" (par exemple $1^{ière}$ type)est égal à la probabilité du panne du $i^{ème}$ composant q_i dans autre type de système "k-consécutifs-sur-n" ($2^{ième}$ type) pour tout i, et si les deux types des systèmes ont le même k et n. Alors, la fiabilité du type de système ($1^{ière}$ type) est égal à la probabilité du panne de l'autre type de système ($2^{ième}$ type).*

1.3 *Encadrement de la valeur de la fiabilité du système*

Plusieures chercheurs ont proposé des bornes inférieures et supérieures pour la fiabilité du système linéaire et circulaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** ; par exemple *Chain & Niu, Derman et all, Fu, Papastavridis, Chrysphinou & Papastavridis, Barbour et all, et Muselli.*

*En **1981**, *Chain & Niu* ont donné les bornes inférieures et supérieures pour la fiabilité du système linéaire "k-consécutifs-sur-n :F" dont les composants sont indépendants et identiquement distribués.*Derman et al*, **1982**, ont généralisé ce résultat avec les composants sont indépendents mais non identiques distribués. *Fu* [13] et *Papastavridis & Koutras* [12] ont trouvé les bornes suivantes :

1. **Cas linéaire** :

$$\begin{aligned} L = \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j) &\leq R(n, k, \mathbf{p}) \\ &\leq \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - p_{i-1} \prod_{j=(i-1)k+1}^{ik} q_j) = U \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. **Cas circulaire** :

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j) \leq R_c(n, k, \mathbf{p}) \leq \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - p_{i-1} \prod_{j=(i-1)k+1}^{ik} q_j)$$

*Si les composants sont identiques distribués, on a :

1. **Cas linéaire** :

$$l_1 = (1-q^k)^{n-k+1} \leq R(n,k,p) \leq (1-pq^k)^{n-k+1} = u_1 \tag{1.11}$$

2. **Cas circulaire** :

$$(1-q^k)^n \leq R_c(n,k,p) \leq (1-pq^k)^{n-k+1}$$

*En **1987**, *Papastavridis* a obtenu les bornes inférieures et supérieures pour la fiabilité du système linéaire et circulaire où $q < \frac{k}{k+1}$ dans le cas simple, cette méthode est basée sur l'analyse des racines d'une fonction génératrice.

1. **Cas linéaire** :

$$l_2 = bm^{n+1} - e \leq R(n,k,p) \leq aM^{n+1} + e = u_2 \tag{1.12}$$

Tel que :

$$m = 1 - \frac{pq^k}{(1-q^k)^k} \qquad M = 1 - pq^k$$

$$a = \frac{m^k - q^k}{m^k - (k+1)pq^k} \qquad b = \frac{M^k - q^k}{M^k - (k+1)pq^k}$$

$$e = \frac{2(k-1)q^{n+2}}{p(k+(k+1)q)}$$

2. **Cas circulaire** :

$$M^n - (k-1)q^n \leq R_c(n,k,p) \leq M^n + (k-1)q^n$$

*En **1990**, *Chrysaphinou & Papastavridis* ont obtenu autre inégalité pour les bornes de la fiabilité par utilisation la méthode de *Stien-Chen*, cette forme est donné par :

$$\Big|R(n,k,p) - \exp(-\lambda)\Big| \leq (2k-1)q^k + 2(k-1)q$$

Où : $\lambda = (n-k+1)q^k$

Cette inégalité donne les bornes inférieures et supérieures pour la fiabilité :

$$l_3 = \exp(-\lambda) - e_1 \leq R(n,k,p) \leq \exp(-\lambda) + e_1 = u_3 \tag{1.13}$$

Où : $e_1 = (2k-1)q^k + (2k-2)q$

*En **1991**, *Barbour, Holst, et Janson*, ont donné l'inégalité suivante :

$$\left|R(n,k,p) - \exp(-p.\lambda)\right| \leq (2k.p-1)q^k$$

Où : $\lambda = (n-k+1)q^k$

Cette inégalité donne les bornes inférieures et supérieures pour la fiabilité :

$$l_4 = \exp(-p.\lambda) - e_2 \leq R(n,k,p) \leq \exp(-p.\lambda) + e_2 = u_4 \tag{1.14}$$

Où : $e_2 = (2k.p-1)q^k$

*En **1997** et **2000**, *Muselli* a présenté les nouvelles bornes de la valeur de la fiabilité pour le système linéaire "k-consécutifs-sur-n :F" dans le cas simple (cas des composants indépendants et identiques) comme suit :

$$l_5 = (1-q^k)^{\frac{n-k}{h_l}+1} \leq R(n,k,q) \leq (1-q^k)^{\frac{n-k}{h_u}+1} = u_5 \tag{1.15}$$

Pour $1 \leq k \leq n$ et $0 < q < 1$. Tel que :

$$h_l = h_l(k,q) = \frac{(1-q^k)^k}{p}$$

$$h_u = h_u(k,q) = \frac{1-q^k}{p}$$

Cette borne est généralisé l'inégalité suivante :

$$(1-q^k)^{n-k+1} \leq R(n,k,q) \leq (1-q^k)^{[n/k]}$$

Tel que $h_l = 1$, et $h_u = k$.

1.4 *Théorèmes limites du temps de panne*

Maintenant, nous présenterons les théorèmes limites ; pour cela, on concidére un système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"** dont les compossants sont indépendants. Nous allons étudier deux cas, dans le 1$^{\text{er}}$ cas les composants sont supposés de même distribution de panne et dans le 2$^{\text{ème}}$ cas les composants sont supposés non identiques distributions de panne. Mais d'abord, on utilise les notations suivantes :

T_i : le temps de panne du i$^{\text{ème}}$ composant. Pour $i = 1, 2, ..., n$.

T : le temps de panne du composant dans le cas identique.

$q_i(t) = \mathbb{P}(T_i \leq t)$: Distribution de panne du i$^{\text{ème}}$ composant pour$i = 1, 2, ..., n$ et $t \geq 0$. $p_i(t) = 1 - q_i(t)$.

$q(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$: Distribution de panne du i$^{\text{ème}}$ composant dans le cas identique pour $i = 1, 2, ..., n$ et $t \geq 0$. $p(t) = 1 - q(t)$

Z_n : le temps de panne du ystème.

$Q(n, k; \mathbf{p}(t)) = \mathbb{P}(Z_n \leq t)$: Distribution de panne du système pour $t \geq 0$

$Q(n, k; p(t)) = \mathbb{P}(Z_n \leq t)$: Distribution de panne du système pour $t \geq 0$ dans le cas identique.

Cas identique

Soient λ et α des réels positifs et constants. Nous montrons que la loi de variable alétoire $n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n$ converge en loi vers une loi de *Weibull* deux paramètres λ et αk , quand n tend vers l'infini (*Papastavridis* [8]).

Théorème 1.7. *Soit $q(t) \sim Weib(\lambda, \alpha)$, c'est-à-dire :*

$$q(t) = (\lambda t)^{\alpha} + o(t^{\alpha})$$

Où α, λ sont des réels positifs et constants.Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) \quad = \quad 1 - \exp\Big(-(\lambda t)^{\alpha k} \Big) \tag{1.16}$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. Soient $p(t) = 1 - q(t) = \mathbb{P}(T > t)$ la fiabilité du composant pour $i = 1, 2, ..., n$, et $R(n, k; p(t))$ la fiabilité du système considéré. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) &= \mathbb{P}(Z_n \leq t n^{-\frac{1}{\alpha k}}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z_n > t n^{-\frac{1}{\alpha k}}) \\ &= 1 - R\Big(n, k; p(t n^{-\frac{1}{\alpha k}})\Big) \end{aligned}$$

Il est clair que pour montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(n^{\frac{1}{\alpha k}} T_n \leq t) = 1 - \exp\Big(-(\lambda t)^{\alpha k} \Big)$$

pour tout $t \geq 0$, il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} R(n, k; p(t n^{-\frac{1}{\alpha k}})) = \exp\Big(-(\lambda t)^{\alpha k} \Big)$$

pour tout $t \geq 0$.
On pose : $t_n = tn^{-\frac{1}{\alpha k}}$ il est évident que $t_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
En 1967, *Feller* a défini la formule $R(n,k;p(t_n))$ comme suit :

$$R(n,k;p(t_n)) = \frac{1-q(t_n)x(t_n)}{(k+1-kx(t_n))p(t_n)} x(t_n)^{-(n+1)}$$

Tel que $x(t)$ est la racine possitive du polynome :

$$1 - pz(1 + pz + ... + p^{k-1}z^{k-1})$$

Et $x(t)$ donné par : $x(t) = 1 + (\lambda t)^{\alpha k} + o(t^\alpha k^\alpha)$
D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
q(t) &= (\lambda t)^\alpha + o(t^\alpha) \\
n^{\frac{1}{k}} q(t_n) &= n^{\frac{1}{k}} (\lambda t_n)^\alpha + o(t_n^\alpha) \\
n^{\frac{1}{k}} q(t_n) &= (\lambda t)^\alpha + o(n^{-\frac{1}{k}}) \longrightarrow (\lambda t)^\alpha \qquad \textit{quand} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

Alors : $\lim_{n\to\infty} q(t_n) \simeq \lim_{n\to\infty} (\lambda t)^\alpha n^{-\frac{1}{k}} = 0$, et $\lim_{n\to\infty} p(t_n) = 1$
D'après la formule précédente de $R(n,k;p(t_n))$:

$$\begin{aligned}
\log R(n,k;p(t_n)) &= \log \frac{1-q(t_n)x(t_n)}{(k+1-kx(t_n))p(t_n)} + \log x(t_n)^{-(n+1)} \\
\lim_{n\to\infty} \log R(n,k;p(t_n)) &= \lim_{n\to\infty} \Big[\log \frac{1-q(t_n)x(t_n)}{(k+1-kx(t_n))p(t_n)} + \log x(t_n)^{-(n+1)} \Big] \\
\lim_{n\to\infty} \log R(n,k;p(t_n)) &= -(\lambda t)^{\alpha k}
\end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{n\to\infty} \log \frac{1-q(t_n)x(t_n)}{(k+1-kx(t_n))p(t_n)} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{q(t_n)x(t_n)}{kx(t_n)p(t_n)} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log x(t_n)^{-(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} -(n+1) \log x(t_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} -(n+1) \Big[\frac{(\lambda t)^{\alpha k}}{n} + o(\frac{1}{n}) \Big] \\
&= -(\lambda t)^{\alpha k}
\end{aligned}$$

Alors : $\lim_{n\to\infty} R(n,k;p(t_n)) = \exp\Big(-(\lambda t)^{\alpha k} \Big)$. D'oú le résultat. □

Cas non identique

Toujours, nous montrons que la probapilité de panne du système (un système linéaire "k-consécutif-sur-n :F") converge vers la loi de *Weibull* du paramètre *d'échelle* λ et du paramètre *de forme* αk ($Weib(\alpha k, \lambda)$), où λ et α sont des réels strictement positifs et constants, et la distribution de panne du $i^{\text{ème}}$ composant est la loi de $Weibl(\alpha, \lambda)$ (*Chryssaphinou & Papastavridis* [7]). On utilise les hypothèses suivantes :

1. soient les nombres positifs λ_i, α_i et les fonctions ϕ_i tel que :
   $q_i(t) = (\lambda_i t)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i}\phi_i(t)$ pour $i = 1, 2, ...$ et $0 \leq t \leq \delta$ où δ est un nombre positif.
2. $\lim_{t\to\infty} \phi_i(t) = 0$, uniformément en i.
3. $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$.

Théorème 1.8. *(i) Si $\alpha = \alpha_i$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$:*

$$\lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) = 1 - exp\Big(- (\lambda t)^{\alpha k}\Big)$$

(ii) Si $\alpha > 0$, pour tout $i = 1, ..., n$, il existe j avec $i \leq j \leq i+k-1$ tel que $\alpha_j > \alpha$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) = 0$$

Démonstration. Pour t fixé et :

$$q(t) = \max_{1\leq i\leq n} q_i(t)$$

On considére la variable aléatoire X_j, $j = 1, ..., n-k+1$, qui prend la valeur 1 si et seulement si les composants $j, j+1, ..., j+k-1$ sont en panne, et la valeur 0 dans les autres cas. Alors :

$$\begin{aligned} E(X_j) &= 1\,\mathbb{P}(X_j = 1) + 0\,\mathbb{P}(X_j = 0) \\ &= q_j(t)\; q_{j+1}(t)\; ...\; q_{j+k-1}(t) = Q_j(t) \end{aligned}$$

Et la variable aléatoire $X = \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j$. Alors on a :

$$E(X) = E\left(\sum_{j=1}^{n-k+1} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n-k+1} E(X_j) = \sum_{j=1}^{n-k+1} Q_j(t) = \lambda(t)$$

On remarque que le système est en panne si $X > 0$. On utilise l'inégalité de *Barbour* et *Eagleson* :

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbb{P}(Z_n \leq t) - \big(1 - \exp(-E(X))\big)\Big| &\leq \min\left(1, \frac{1}{E(X)}\right) \sum_{j=1}^{n-k+1} \left[Q_j^2(t) + \sum_{i=j-k+1}^{j+k-1} [Q_i(t)Q_j(t)\right. \\
&\quad \left. + E(X_jX_i)]\right] \\
&\leq \frac{1}{E(X)} \left[\sum_{j=1}^{n-k+1} Q_j(t)\, Q_j(t) + \sum_{j=1}^{n-k+1} Q_j(t) \sum_{i=j-k+1}^{j+k-1} Q_i(t)\right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-k+1} \sum_{i=j-k+1}^{j+k-1} E(X_jX_i)\right] \\
&\leq \frac{1}{E(X)} \left[\sum_{j=1}^{n-k+1} Q_j(t)q^k(t) + \sum_{j=1}^{n-k+1} Q_j(t)(2k-2)q^k(t)\right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-k+1} E(X_j)(2k-2)q(t)\right] \\
&= \frac{1}{E(X)}\Big[E(X)q^k(t) + E(X)(2k-2)q^k(t) \\
&\quad + E(X)(2k-2)q(t)\Big] \\
&= (2k-1)q^k(t) + 2(k-1)q(t)
\end{aligned}$$

(i) On pose : $t_n = tn^{-\frac{1}{\alpha k}}$ tel que $t_n \to 0$ quand $n \to \infty$. On remarque que :

$$(2k-1)q^k(t_n) + 2(k-1)q(t_n) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t_n) - \big(1 - \exp(-\lambda(t_n))\big) = 0$$

Pour $t_n = tn^{-\frac{1}{\alpha k}}$ on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^{-\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) = 1 - \exp\Big(-(\lambda t)^{\alpha k}\Big)$$

Puisque :

$$\begin{aligned}
\lambda(t_n) &= \sum_{j=1}^{n-k+1} Q_j(t_n) = \sum_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} q_i(t_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} \Big[(\lambda_i t_n)^\alpha + t_n^\alpha \phi_i(t_n)\Big] \quad , \qquad t_n = tn^{-\frac{1}{\alpha k}} \\
\lim_{n\to\infty} \lambda(t_n) &= (\lambda t)^{\alpha k}
\end{aligned}$$

(ii) On pose : $t_n = tn^{-\frac{1}{\alpha k}}$ tel que $t_n \to 0$ quand $n \to \infty$, et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(t_n) = 0$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^{-\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) = 1 - \exp(0) = 0$$

D'où le résultat. □

Exemple 1.3. *Soit* $q_i(t) \sim Weib(\alpha, \lambda_i)$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$, *c'est-à-dire :*

$$q_i(t) = 1 - \exp[-(\lambda_i\, t)^\alpha] = (\lambda_i\, t)^\alpha + O(t^\alpha)$$

Avec $\lambda_i \to \lambda$ *quand* $i \to \infty$. *Alors :* $n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n \sim Weib(\alpha k, \lambda)$

1.5 *Importance en fiabilité et Importance de structure des composants*

On considère un système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :F"**, et nous sont supposés que les n copmosants indépendants. Quelques composants peuvent être plus importants que d'autres, alors, on puet définir l'importance en fiabilité (ou l'importance au sens de *Birnhaum*) et l'importance du structure du i$^{\text{ème}}$ composant.

1.5.1 Importance en fiabilité des composants

Définition 1.4. *L'importance au sens de Birnhaum du* i$^{\text{ème}}$ *composant* I_i *est défini par :*

$$I_i\,(n, k; \mathbf{p}) = \frac{\partial R\,(n, k; \mathbf{p})}{\partial p_i}$$

où : $R(n,k;\mathbf{p}) = p_i R(n,k;\mathbf{p},1_i) + q_i R(n,k;\mathbf{p},0_i)$, *et* $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$.
On désigne par $R(n,k;\mathbf{p},1_i)$ *ou* $R(n,k;\mathbf{p},0_i)$ *la fiabilité du système sachant que le* $i^{\text{ème}}$ *composant est en marche ou en panne.*

L'importance I_i mesure la variation de la fiabilité du système par rapport à la fiabilité du composant i. On posse que : $J_i(n,k;\mathbf{p}) = R(i-1,k;\mathbf{p})\, R(n-i,k;\mathbf{p})$.
En **1987**, *Papastavridis* a donné le théorème suivant :

Théorème 1.9.
$$I_i(n,k;\mathbf{p}) = \frac{J_i(n,k;\mathbf{p}) - R(n,k;\mathbf{p})}{q_i} \tag{1.17}$$

Démonstration. On a :

$$R(n,k;\mathbf{p}) = p_i R(n,k;\mathbf{p},1_i) + q_i R(n,k;\mathbf{p},0_i) \tag{1.18}$$

Alors :
$$R(n,k;\mathbf{p},0_i) = \frac{R(n,k;\mathbf{p}) - p_i R(n,k;\mathbf{p},1_i)}{q_i}$$

D'autre part, on peut définir $R(n,k;\mathbf{p},1_i)$ comme suit :

$$R(n,k;\mathbf{p},1_i) = R(i-1,k;\mathbf{p})\, R(n-i,k;\mathbf{p})$$

Alors :

$$\begin{aligned}
I_i(n,k;\mathbf{p}) &= \frac{\partial R(n,k;\mathbf{p})}{\partial p_i} \\
&= R(n,k;\mathbf{p},1_i)\, R(n,k;\mathbf{p},0_i) \\
&= \frac{R(i-1,k;\mathbf{p})\, R(n-i,k;\mathbf{p}) - R(n,k;\mathbf{p})}{q_i} \\
&= \frac{J_i(n,k;\mathbf{p}) - R(n,k;\mathbf{p})}{q_i}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Dans le cas, où les composants sont identiques $(p_1 = p_2 = ... = p_n = p)$:

$$I_i(n,k;p) = \frac{J_i(n,k;p) - R(n,k;p)}{q} \tag{1.19}$$

En **1982**, *Hwang* a donné la formule récursive de la fiabilité dans ce cas par :

$$\begin{aligned} R(n,k;p) &= pR(n-1,k;p) + pqR(n-2,k;p) + pq^2 R(n-3,k;p) \\ &\quad +\ldots + pq^{k-1} R(n-k,k;p) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} pq^j R(n-j-1,k;p) \end{aligned}$$

Le lemme suivant donne la formule récursive de I_i :

Lemme 1.3.

$$(i) \qquad I_i(n,k;p) = \sum_{j=0}^{k-1} pq^j I_{i-1-j}(n-1-j,k;p) \qquad i \geq k+1$$

$$(ii) \qquad I_i(n,k;p) = \sum_{j=0}^{k-1} pq^j I_i(n-1-j,k;p) \qquad i \leq n-k$$

Démonstration. Voir [15]. □

Relation entre l'importance en fiabilité du système linéaire "k-consécutifs-sur-n :F" et "k-consécutifs-sur-n :G" :

On considère un système linéaire **"k-consécutifs-sur-n :G"**, où R_G et I_i^G désignent la fiabilité, et l'importance en fiabilité du système. On remarque que :

$$\overline{R}_G(n,k;\mathbf{p}) = 1 - R_G(n,k;\mathbf{p}) = 1 - Q(n,k;\mathbf{q}) = R(n,k;\mathbf{q})$$

En **2000**, *Hwang, Cui, Chang, & Lin* ont donné le corollaire suivant :

Corollaire 1.2. *D'après la formule (1.19), on a :*

$$\begin{aligned} I_i(n,k;\mathbf{p}) &= \frac{R(i-1,k;\mathbf{p})\,R(n-i,k;\mathbf{p}) - R(n,k;\mathbf{p})}{q_i} \\ &= \frac{\overline{R}_G(i-1,k;\mathbf{q})\,\overline{R}_G(n-i,k;\mathbf{q}) - \overline{R}_G(n,k;\mathbf{q})}{p_i} \\ &= I_i^G(n,k;\mathbf{q}) \end{aligned}$$

1.5.2 Importance de structure des composants

Dans ce paragraphe, on considère un système linèaire "k-consécutifs-sur-n :F" où les n composants sont supposés indépendants et identiques distribués. L'importance en fiabilité du $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ composant est dite importance de structure du composant i si : $p_1 = ... = p_n = p = \frac{1}{2}$.

Théorème 1.10.

$$I_i\left(n, k; \frac{1}{2}\right) = I_{n-i+1}\left(n, k; \frac{1}{2}\right)$$

Démonstration. D'après la formule (1.19), et pour $p = \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n-i+1}(n, k; \frac{1}{2}) &= \frac{J_{n-i+1}(n, k; p) - R(n, k; \frac{1}{2})}{q} \\ &= \frac{R(n-i+1, k; \frac{1}{2})R(n-(n-i+1), k; \frac{1}{2}) - R(n, k; \frac{1}{2})}{q} \\ &= I_i(n, k; \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

□

Le théorème précédent montre que les importances de structure des composants dans un système "k-consécutifs-sur-n" sont symétriques par rapport au composant du centre du système.

Définition 1.5. *La suite de Fibonacci d'ordre k $(k \geq 2)$, noté par $f_{k,n}$, est donné par :*

$$f_{k,n} = \begin{cases} 0 & 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & n = k \\ \sum_{j=n-k}^{n-1} f_{k,j} & n \geq k+1 \end{cases}$$

Propriétés $\mathbf{f_{k,n}}$

Soit $f_{k,n}$ suite de Fibonacci d'ordre k ayant les Propriétés suivantes :

1. Formule spéciale :
$$f_{k,n} = \begin{cases} 2^{n-k-1} & si\ n \in \{k+1, ..., 2k\} \\ 2^{n-k-1} - (n-2k+1)2^{n-2k-2} & si\ n \in \{2k+1, ..., 3k+1\} \end{cases}$$
2. Formule récursive : $f_{k,n} = 2f_{k,n-1} - f_{k,n-k-1} \quad si\ n \geq k+2$

3. Formule générale :
   $f_{k,n} = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j 2^{n-jk-k-j-1}\binom{n-jk-k-1}{j}\frac{n-jk-k+j}{n-jk-k-j}$

   $f_{k,n} = 2^{n-k-1} + \sum_{j=1}^{m}(-1)^j 2^{n-jk-k-j-1}\binom{n-jk-k-1}{j}\frac{n-jk-k+j}{n-jk-k-j}$

   Où $m = \left[\frac{n-2}{k+1}\right]$, et $n \geq 2$.

***Relation entre la fiabilité du système et la suite de Fibonacci** $f_{k,n}$ est montré dans le théorème suivant :

Théorème 1.11.

$$R\Big(n, k, \frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f_{k,n+k+1}$$

Le terme $f_{k,n+k+1}$ interprété le nombre de fois que le système "k-consécutifs-sur-n :F" fonctionne.

Démonstration. D'après la formule récursive de la fiabilité du système linéaire "k-consécutifs-sur-n :F" dans le cas identique on a :

$$R(n, k, p) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq n < k \\ p & si\ n = k \\ R(n-1, k, p) - pq^k R(n-k-1, k, p) & si\ n > k \end{cases}$$

Pour $p = \frac{1}{2}$ et :

- Pour $0 \leq n < k$,

$$R\Big(n, k, \frac{1}{2}\Big) = 1 = \frac{1}{2^n}\ 2^n = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f_{k,n+k+1}$$

  D'après la Propriété 1 de $f_{k,n}$.
- Pour $n = k$,soit j le dernier composant qui fonctionne alors le système "k-consécutifs-sur-n :F" fonctionne si et seulement si $n - k + 1 \leq j \leq n$, donc :

$$\begin{aligned} R\Big(k, k, \frac{1}{2}\Big) &= \sum_{j=n-k+1}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^j R\Big(j-1, k, \frac{1}{2}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-j+1} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{j-1} f_{k,j+k} \\ &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^k \sum_{j=1}^{k} f_{k,j+k} \\ &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^k f_{k,2k+1} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f_{k,n+k+1} \end{aligned}$$

– Pour $n > k$, on peut montrer $R\Big(n,k,\frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f_{k,n+k+1}$ par utilisation la démonstration par récurrence sur n :

(i) Pour $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
R\Big(k+1,k,\frac{1}{2}\Big) &= R\Big(k,k,\frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\Big)^n R\Big(0,k,\frac{1}{2}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^k f_{k,2k+1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^0 f_{k,k+1} \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k+1}\Big[2f_{k,2k+1} - f_{k,k+1}\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k+1} f_{k,2k+2} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f_{k,n+k+1}
\end{aligned}$$

(ii) On suppose que la formule $R(n,k,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n f_{k,n+k+1}$ est réalisé jusqu'à l'ordre $n-1$, c'est-à-dire $R(n-1,k,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{n-1} f_{k,n+k}$ et on montre que la formule est réalisé pour l'ordre n.

$$\begin{aligned}
R\Big(n,k,\frac{1}{2}\Big) &= R\Big(n-1,k,\frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k+1} R\Big(n-k-1,k,\frac{1}{2}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} f_{k,n+k} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k-1} f_{k,n} \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big[2f_{k,n+k} - f_{k,n}\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f_{k,n+k+1}
\end{aligned}$$

□

*Maintenant, nous donnerons **la Relation entre l'importance de structure et la suite de Fibonacci** $f_{k,n}$ dans le théorème suivant :

Théorème 1.12.

$$I_i\Big(n,k,\frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\Big]$$

En remplacent $i = 1$, on obtient : $I_1(n,k,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{n-1} f_{k,n}$

Démonstration. D'après la formule (1.19) on a :

$$
\begin{aligned}
I_i\Big(n,k,\frac{1}{2}\Big) &= 2\Big[J_i(n,k) - R(n,k)\Big] \\
&= 2\Big[R(i-1,k)R(n-i,k) - R(n,k)\Big] \\
&= 2\Big[\Big(\frac{1}{2}\Big)^{i-1} f_{k,i+k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-i} f_{k,n-i+k+1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n} f_{k,n+k+1}\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\Big]
\end{aligned}
$$

□

Il existe autre relation entre l'importance de structure et la suite de Fibonacci $f_{k,n}$:

Théorème 1.13.

$$
I_i\Big(n,k,\frac{1}{2}\Big) = \sum_{j=n-k}^{n-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-j} I_i\Big(j,k,\frac{1}{2}\Big) \qquad , si \quad i \leq n-k
$$

Démonstration. En utilisant le théorème précédent et pour $i \leq n-k$ on a :

$$
\begin{aligned}
I_i\Big(n,k,\frac{1}{2}\Big) &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big[2f_{k,i+k}\sum_{j=n-i+1}^{n-i+k} f_{k,j} - \sum_{j=n+1}^{n+k} f_{k,j}\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big[\sum_{j=n+1}^{n+k}\Big(2f_{k,i+k}f_{k,j-i} - f_{k,j}\Big)\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big[\sum_{j=n-k}^{n-1}\Big(2f_{k,i+k}f_{k,j-i+k+1} - f_{k,j+k+1}\Big)\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\sum_{j=n-k}^{n-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-(j-1)} I_i\Big(j,k,\frac{1}{2}\Big) \\
&= \sum_{j=n-k}^{n-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-j} I_i\Big(j,k,\frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

le théorème est donc démontré. □

Théorème 1.14. *Pour $k+1 \leq n \leq 2k$:*

$$I_i\Big(n, k, \frac{1}{2}\Big) = \begin{cases} \frac{i}{2^k} & si \quad 1 \leq i \leq n-k \\ \frac{n-k+2}{2^k} & si \quad n-k < i \leq [\frac{n}{2}] \end{cases}$$

Démonstration. Voir [10]. □

1.6 *Systèmes liés*

Le système lié "k-consécutifs-sur-n :F" a été expliqué pour la première fois par *Chaing & Chaing* en **1986**. *Hwang*, en **1988**, a introduit la notion du système lié unipolaire et bipolaire "k-consécutifs-sur-n :F". Pour cela, nous considérons un système lié "k-consécutifs-sur-n :F", tel que dans le cas unipolaire, le premier composant est appellé *la source*, et dans le cas bipolaire le premier et le dernier composants sont appellés *la source* et *la cible* respectivements.

Définition 1.6. *Le système lié unipolaire "k-consécutifs-sur-n :F" est un système composé de n éléments disposés linéairement tel que le système est en panne si et seulement si la source est en panne ou au moins k composants consécutifs sont en panne.regarde figure 1.3.*

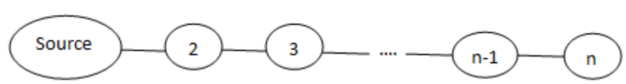


FIGURE 1.3 – Un système lié unipolaire "k-consécutifs-sur-n :F"

Définition 1.7. *Le système lié bipolaire "k-consécutifs-sur-n :F" est un système composé de n éléments disposés linéairement tel que le système est en panne si et seulement si la source, la cible, ou au moins k composants consécutifs sont en panne.regarde figure 1.4.*

*Maintenant, nous allons étudier quelques résultats dans ce type du système :

FIGURE 1.4 – Un système lié bipolaire "k-consécutifs-sur-n :F"

1.6.1 Formule de la fiabilité du système lié

D'abord on désigne les notations suivantes :

$R_u(n,k,\mathbf{p})$: la fiabilité du système lié unipolaire "k-consécutifs-sur-n :F" avec : $\mathbf{p}=(p_1,...,p_n)$.

$R_u(n,k,p)$: la fiabilité du système lié unipolaire "k-consécutifs-sur-n :F" dans le cas identique, où $p=p_1=...=p_n$.

$R_b(n,k,\mathbf{p})$:la fiabilité du système lié bipolaire "k-consécutifs-sur-n :F" avec : $\mathbf{p}=(p_1,...,p_n)$.

$R_b(n,k,p)$:la fiabilité du système lié bipolaire "k-consécutifs-sur-n :F" dans le cas identique, où $p=p_1=...=p_n$.

**Hwang* a donné la fiabilité du système lié "k-consécutifs-sur-n :F" par utilisation la fiabilité du système linéaire "k-consécutifs-sur-n :F". *La fiabilité* est donnée par :

$$R_u(n,k,\mathbf{p})=p_1R(n-1,k,p_2,...,p_n)$$

Et :

$$R_b(n,k,\mathbf{p})=p_1p_nR(n-2,k,p_2,...,p_{n-1})$$

Formule récursive

Mokhlis et Mohamed, en **1999**, ont représenté les formules récursives pour la fiabilité du système liée "k-consécutifs-sur-n :F" comme suivant :

Théorème 1.15. *1. Cas unipolaire :*

$$R_u(n,k,\mathbf{p})=\begin{cases}1 & si\ \ n=0\\ p_1 & si\ \ 0<n\leq k\\ R_u(n-1,k,p_1,...,p_{n-1}) & \\ -R_u(n-k-1,k,p_2,...,p_{n-1})p_{n-k} & \\ \prod_{j=n-k+1}^{n}q_j & si\ \ n>k\end{cases} \tag{1.20}$$

2. *Cas bipolaire :*

$$R_b(n,k,\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & si \;\; n=0 \\ p_1 & si \;\; n=1 \\ p_1 p_n & si \;\; 0<n\leq k+1 \\ R_b(n-1,k,p_1,...,p_{n-2},p_n) & \\ -R_b(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1})p_n & \\ \prod_{j=n-k}^{n} q_j & si \;\; n>k+1 \end{cases} \tag{1.21}$$

Démonstration. 1. Cas unipolaire :

– Pour $n=0$, on a : $Q_u(n,k,\mathbf{p})=0$ donc :

$$R_u(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_u(n,k,\mathbf{p}) = 1$$

– Pour $0<n\leq k$, on a : $Q_u(n,k,\mathbf{p})=q_1$ donc :

$$R_u(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_u(n,k,\mathbf{p}) = p_1$$

– Pour $n>k$, on utilise la définition 1.10 :
  (a) L'évènement A est "le 1er composant (la source) tombe en panne". Ou :
  (b) L'évènement B est "le 1er composant (la source) ne tombe pas en panne, et k composants consécutifs tombent en panne $i-k+1, i-k+2, ..., i-1, i$ où $k+1\leq i\leq n$. Donc :

$$\begin{aligned} Q_u(n,k,\mathbf{p}) &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \\ &= q_1 + \sum_{i=k+1}^{n}\Big[1-Q_u(i-k-1,k,p_1,...,p_{i-k-1})\Big] \\ & \quad p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j \\ &= q_1 + \sum_{i=k+1}^{n-1}\Big[1-Q_u(i-k-1,k,p_1,...,p_{i-k-1})\Big] \\ & \quad p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j + \Big[1-Q_u(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1})\Big] \\ & \quad p_{n-k}\prod_{j=n-k+1}^{n} q_j \end{aligned}$$

Alors, on peut écrire Q_u sous la formule suivante :

$$\begin{aligned}Q_u(n,k,\mathbf{p}) &= Q_u(n-1,k,p_1,...,p_{n-1})\\ &\quad + \Big[1-Q_u(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1})\Big]p_{n-k}\prod_{j=n-k+1}^{n} q_j\end{aligned}$$

D'autre part on a : $R_u(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_u(n,k,\mathbf{p})$ alors on obtient la formule (1.20).

2. Cas bipolaire :
   - Pour $n = 0$, on a : $Q_u(n,k,\mathbf{p}) = 1$ donc :
   $$R_u(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_u(n,k,\mathbf{p}) = 0$$
   - Pour $n = k$, on a : $Q_u(n,k,\mathbf{p}) = q_1$ donc :
   $$R_u(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_u(n,k,\mathbf{p}) = p_1$$
   - Pour $0 < n \leq k+1$, on a : $Q_u(n,k,\mathbf{p}) = q_1 q_n$ donc :
   $$R_u(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_u(n,k,\mathbf{p}) = p_1 p_n$$
   - Pour $n > k+1$, on utilise la définition 1.11 :
     (a) L'évènement A est "le 1$^{\text{er}}$ composant (la source) tombe en panne". Ou :
     (b) L'évenement B est "le 1$^{\text{er}}$ composant (la source) et le dernier composant (la cible) tombent en panne". Ou :
     (c) L'évenement C est "k composants consécutifs tombent en panne $i-k+1, i-k+2, ..., i-1, i$ où $k+1 \leq i \leq n-1$ et la source et la cible sont en panne". Donc :

$$\begin{aligned}Q_b(n,k,\mathbf{p}) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\\ &= q_1 + q_1 q_n + \sum_{i=k+1}^{n-1}\Big[1-Q_u(i-k-1,k,p_1,...,p_{i-k-1})\Big]\\ &\quad p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\\ &= q_1 + q_1 q_n + \sum_{i=k+1}^{n-1}\Big[1-Q_u(i-k-1,k,p_1,...,p_{i-k-1})\Big]\\ &\quad p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i+1} q_j + \Big[1-Q_b(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1})\Big]p_n\prod_{j=n-k}^{n} q_j\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire Q_b comme la formule suivante :

$$\begin{aligned} Q_b(n,k,\mathbf{p}) &= Q_b(n-1,k,p_1,...,p_{n-1}) \\ &\quad + \Big[1 - Q_b(n-k-1,k,p_1,...,p_{n-k-1})\Big] p_{n-k} \prod_{j=n-k+1}^{n} q_j \end{aligned}$$

D'autre part on a : $R_b(n,k,\mathbf{p}) = 1 - Q_b(n,k,\mathbf{p})$ alors on obtient la formule (1.21). □

Remarque 1.2. *Si la fiabilité de chaque composant est identique, C'est-à-dire : $p_i = p$ pour $i = 1,...,n$ alors on obtient :*

1. *Cas unipolaire*

$$R_u(n,k,p) = \begin{cases} 1 & si\ \ n = 0 \\ p & si\ \ 0 < n \leq k \\ R_u(n-1,k,p) - pq^k R_u(n-k-1,k,p) & si\ \ n > k \end{cases}$$

2. *Cas bipolaire*

$$R_b(n,k,p) = \begin{cases} 0 & si\ \ n = 0 \\ p & si\ \ n = 1 \\ p^2 & si\ \ 1 < n \leq k+1 \\ R_b(n-1,k,p) - pq^k R_b(n-k-1,k,p) & si\ \ n > k+1 \end{cases}$$

1.6.2 Bornes de la fiabilité du système lié

On considère un système lié "k-consécutifs-sur-n :F" dont les n composants dans le cas simple (indépendants et identiquements distribués). *Mokhlis & Mohamed*, **1999**, ont donné les bornes suivantes :

$$Lr_2^{-n} - e_1 < R_u(n,k,p) < Ur_1^{-n} - e_1$$

$$pLr_2^{-(n-1)} - e_2 < R_b(n,k,p) < pUr_1^{-(n-1)} - e_2$$

Tel que :

$$r_1 = (1-pq^k)^{-1}, \quad r_2 = \left(\frac{1-pq^k}{(1-q^k/(1-q^k)^k)^k}\right)^{-1}, \quad L = \frac{1-qr_1}{(k+1)-kr_1}$$

$$U = \frac{1-qr_2}{(k+1)-kr_2}, \quad e_1 = \frac{2(k-1)pq^n}{(k+1)q^k}, \quad e_2 = \frac{2(k-1)pq^n}{(k+1)q^k}$$

Et : $q < \frac{k}{k+1}$.

Chapitre 2

Système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n"

L'objet de ce chapitre est l'étude des systèmes "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" et leurs résultats. Ces systèmes forment des n composants où la panne des systèmes est causée par l'existence de m composants consécutifs comprand au moins k composants en panne, alors d'après cette définition, ces systèmes sont une généralisation des modèles "k-consécutifs-sur-n" avec $m = k$. On s'intéresse ici à présenter la formule de la fiabilité où $n = m+\lambda$ et $\lambda \leq m$, puis les bornes (*Sfakianakis, kounias & Hillaris* **1992**, *Cai* **1994**, *Habib & Szántai* **2000**) et enfin les théorèmes limites (*Papastavridis* **1988**, *Ghoraf & Ksir* **2006**).

2.1 *Notations et Définitions*

n : le nombre des composants dans le système.

m : une série de m composants consécutifs parmi n où $m < n$.

k : le nombre minimum des composants en panne de m composants consécutifs qui cause la panne du système avec $k < m$.

$R(n, m, k; \mathbf{p})$: la fiabilité du système linéaire **"k-parmi-m-consécutifs-sur-n"** avec $\mathbf{p} = [p_i]_{1 \leq i \leq n}$, et on note par $R(n, m, k, p)$ dans le cas des composants identiques, c'est-à-dire $p = p_i$ pour $i = 1, ..., n$.

$R_c(n, m, k, p)$: la fiabilité du système circulaire **"k-parmi-m-consécutifs-sur-n"** avec $p = p_i$ pour $i = 1, ..., n$.

$N(j; n, m, k)$ $(N_c(j; n, m, k))$: le nombre de fois que le système linéaire (circulaire) **"k-parmi-m-consécutifs-sur-n"** fonctionne sachant que j composants dans le système sont en panne.

Définition 2.1. *Le système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n :F" est un système composé de n éléments disposés linéairement ou circulairement, tel que le système est en panne si et seulement si au moins k composants parmi m composants consécutifs sont en panne.*

Remarque 2.1. *On remarque que si $m = k$ ou $m = n$ alors on obtient le système "k-consécutifs-sur-n :F" ,ou "k-parmi-n :F" respectivement.*

Remarque 2.2. *On remarque que si $k = 1$ alors on obtient un système en série.*

Exemple 2.1. *Le système de télécommunication utilise n-octets des messages. le dernier bit de chaque octet est la parité de bit (1 quand la parité de octet est correct). Le detecteur des erreurs indique une erreur quand il trouve deux erreur ou plus dans une série de largeur 4 bit. C'est ça le système "2-parmi-4-consécutifs-sur-n :F".*

2.2 Formules particulières de la fiabilité

On considère un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n :F" dont les composants sont supposés indépendants et identiquements distribués (voir [23]).
Cas.1 : pour $k = 2$
La fiabilité du système linéaire "2-parmi-m-consécutifs-sur-n :F" est donnée par :

$$R(n, m, 2; p) = \sum_{j=0}^{r} N(j; n, m, 2)p^{n-j}q^j \tag{2.1}$$

où : $r = [(n + m - 1)/m]$, et d'après la définition de $N(j; n, m, 2)$ dans la notation on a :

$$N(j; n, m, 2) = \binom{n - (j - 1)(m - 1)}{j}$$

Mais la fiabilité du système circulaire "2-parmi-m-consécutifs-sur-n :F" est donnée par :

$$R_c(n, m, 2; p) = \sum_{j=0}^{s} N_c(j; n, m, 2)p^{n-j}q^j \tag{2.2}$$

où : $s = [n/m], \ N_c(j; n, m, 2) = \frac{n}{n-j(m-1)}\binom{n-j(m-1)}{j}$
Cas.2 : pour $n = m + \lambda, \ \lambda \leq m$

Théorème 2.1. *La fiabilité du système linéaire est définie par :*

$$R(n, m, k; p) = \sum_{j=1}^{k} R(2\lambda, \lambda, j; p)\binom{m - \lambda}{k - j}p^{m-\lambda-k+j}q^{k-j} \tag{2.3}$$

Corollaire 2.1. *Pour* $n = m + 1,\ \lambda = 1$ *on a :*

$$\begin{aligned}
R(n,m,k;p) &= \sum_{j=1}^{k} R(2,1,j;p)\binom{m-1}{k-j}p^{m-1-k+j}\ q^{k-j} \\
&= R(2,1,1;p)\binom{m-1}{k-1}p^{m-k}\ q^{k-1} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k} R(2,1,j;p)\binom{m-1}{k-j}p^{m-1-k+j}\ q^{k-j} \\
&= p_n^2\binom{m-1}{k-1}p^{m-k}\ q^{k-1} + \sum_{j=0}^{k-2} R(2,1,j+2;p) \\
&\quad \binom{m-1}{k-j-2}p^{m-1-(k-j-2)}\ q^{k-j-2} \\
&= \binom{m-1}{k-1}p^{m-k+2}\ q^{k-1} + \sum_{j=0}^{k-2}\binom{m-1}{j}p^{m-1-j}\ q^{j} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Tel que : $R(n,m,k;p) = 1,$ *si* $k > m,$ *et* $k = 1,$ *on obtient :* $R(2,1,1;p) = p^2.$

Corollaire 2.2. *Pour* $n = m + 2,\ \lambda = 2$ *on a :*

$$\begin{aligned}
R(n,m,k;p) &= \sum_{j=1}^{k} R(4,2,j;p)\binom{m-2}{k-j}p^{m-2-k+j}q^{k-j} \\
&= R(4,2,1;p)\binom{m-2}{k-1}p^{m-1-k}q^{k-1} + R(4,2,2;p)\binom{m-2}{k-2}^{m-k}q^{k-2} \\
&\quad + \sum_{j=3}^{k} R(4,2,j;p)\binom{m-2}{k-j}p^{m-2-k+j}q^{k-j} \\
&= \binom{m-2}{k-1}p^{m-k+3}q^{k-1} + p^2(1+2q_n)\binom{m-2}{k-2}p^{m-k}q^{k-2} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-3} R(4,2,j+3;p)\binom{m-2}{k-j-3}p^{m-2-(k-j-3)}q^{k-j-3} \\
&= \binom{m-2}{k-1}p^{m-k+3}q^{k-1} + p^2(1+2q)\binom{m-2}{k-2}p^{m-k}q^{k-2} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-3}\binom{m-2}{j}p^{m-2-j}q^{j} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Pour $k=1$, on obtient le système en série donc : $R(4,2,1;p)=p^4$.
Pour $k=m=2$, on obtient le système "2-consécutifs-sur-n :F" et d'après la formule récursive de la fiabilité du système et corollaire 2.1 on a :

$$\begin{aligned} R(4,2,2;p) &= pR(3,2,2;p)+pqR(2,2,2;p) \\ &= p(p^2q+p)+pq(1-q^2) \\ &= p\Big[p^2q+1-q^2+pq^2\Big] \\ &= p\Big[p^2q-p^2+2p+pq^2\Big] \\ &= p^2\Big[1+2q\Big] \end{aligned}$$

Corollaire 2.3. *Pour $n=m+3$, $\lambda=3$ on a :*

$$\begin{aligned} R(n,m,k;p) &= \sum_{j=1}^{k} R(6,3,j;p)\binom{m-3}{k-j}p^{m-3-k+j}q^{k-j} \\ &= R(6,3,1;p)\binom{m-3}{k-1}p^{m-2-k}q^{k-1}+R(6,3,2;p)\binom{m-3}{k-2}p^{m-k-1}q^{k-2} \\ &\quad R(6,3,3;p)\binom{m-3}{k-3}p^{m-k}q^{k-3}+\sum_{j=4}^{k}R(6,3,j;p)\binom{m-3}{k-j}p^{m-3-k+j}q^{k-j} \\ &= p^6\binom{m-3}{k-1}p^{m-k-2}q^{k-1}+\big[p^5q+p^4(1+2q)+qp^2(p^3+3qp^2\big] \\ &\quad \binom{m-3}{k-2}p^{m-k-1}q^{k-2}+(1-4q^3+3q^4)\binom{m-3}{k-3}p^{m-k}q^{k-3} \\ &\quad +\sum_{j=0}^{k-4}\binom{m-3}{j}p^{m-3-j}q^j \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour $k=1$, on obtient : $R(6,3,1;p)=p^6$
Pour $k=m=3$, on obtient le système "3-consécutifs-sur-n :F" et d'après la formule exacte de la fiabilité (1.3) :

$$R(6,3,3;p) = (1-4q^3+3q^4)$$

Pour $k=2$ et la formule (2.1), on a :

$$R(6,3,2;p)=\sum_{j=0}^{3}\binom{6-(j-1)2}{j}p^{6-j}q^j=\big[p^5q+p^4(1+2q)+qp^2(p^3+3qp^2\big]\binom{m-3}{k-2}p^{m-k-1}q^{k-2}$$

2.3 *Les bornes de la fiabilité du système dans le cas indépendant*

2.3.1 Cas des composants non identiques

On considère un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n :F" dont les n composants sont indépendants et non identiquements distribués. *Cai.J*, en **1994**, a donné les bornes inférieures et supérieure pour ce système. On définit d'abord les notations suivantes :

A_i : L'évènement "les composants $1, 2, ..., i$ sont en marche".
$\overline{A}_i$: L'évènement "les composants $1, 2, ..., i$ sont en panne".
$A(i, j)$: L'évènement "les composants $i, i+1, ..., j$ sont en marche".
$B_l(i, j)$: L'évenèment "exactement l composants parmi les composants $i, i+1, ..., j$ sont en panne".
$B_l^*(i, j)$: L'évènement "au moins l composants parmi $i, i+1, ..., j$ sont en panne".
$a_m = b_m = \mathbb{P}\left\{B_k^*(1, m)\right\}$ $\quad c_{mn} = 1$;
$a_i = q_i \mathbb{P}\left\{B_{k-1}^*(i-m+1, i-1)\right\}$ $\quad$ pour $i = m+1, ..., n$
$b_i = q_i \mathbb{P}\left\{B_{k-1}(i-n+1, i-1)\right\}$ $\quad$ pour $i = m+1, ..., n$
$c_i = \mathbb{P}\left\{A(i-m, i-1)\right\}$ $\quad$ pour $i = m+1, ..., n$
$p_i = 1,$ $\quad$ pour $i \leq 0$

Théorème 2.2. *Soit* $1 \leq k \leq m \leq n$*, alors :*

$$LB \leq R(n, m, k; \mathbf{p}) \leq UB \tag{2.7}$$

où :

$$LB = \prod_{i=m}^{n}(1 - a_i), \qquad UB = \prod_{i=m}^{n}(1 - \frac{b_i}{c_i} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_j)$$

Démonstration. D'après la définition de A_i on a : $A_n \subset ... \subset A_{m+1} \subset A_m$

Implique :
$$\begin{aligned} R(n, m, k, \mathbf{p}) = \mathbb{P}\{A_m\} &= \mathbb{P}\{A_m\} \prod_{i=m+1}^{n} \mathbb{P}\{A_i | A_{i-1}\} \\ &= \mathbb{P}\{A_m\} \prod_{i=m+1}^{n} \Big(1 - \mathbb{P}\{\overline{A}_i | A_{i-1}\}\Big) \end{aligned}$$

D'autre part on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_{i-1}\overline{A}_i\} &= \mathbb{P}\{A_{i-1} B_{k-1}(i-m+1, i-1) F_i\} \\ &\leq \mathbb{P}\{A_{i-1} B_{k-1}^*(i-m+1, i-1) F_i\} \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{P}\{A_{i-1}\overline{A}_i\} \quad \leq \quad \mathbb{P}\{A_{i-1}\}\mathbb{P}\{B^*_{k-1}(i-m+1,i-1)\}q_i$$

En divisant cet inégalité sur $\mathbb{P}\{A_{i-1}\}$ puis en multipliant par -1 :

$$\begin{aligned}
1-\mathbb{P}\{\overline{A}_i|A_{i-1}\} &\geq 1-\mathbb{P}\{B^*_{k-1}(i-m+1,i-1)\}\mathbb{P}\{A_{i-1}\}q_i \\
\mathbb{P}\{A_m\}\prod_{i=m+1}^{n}\Big(1-\mathbb{P}\{\overline{A}_i|A_{i-1}\}\Big) &\geq \mathbb{P}\{A_m\}\prod_{i=m+1}^{n}\Big(1-B^*_{k-1}(i-m+1,i-1)q_i\Big) \\
R(n,m,k,\mathbf{p}) &\geq \mathbb{P}\{A_m\}\prod_{i=m+1}^{n}(1-a_i) \\
R(n,m,k,\mathbf{p}) &\geq \prod_{i=m}^{n}(1-a_i) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Puisque : $\mathbb{P}\{A_m\}=1-\mathbb{P}\{\overline{A}_m\}=1-\mathbb{P}\{B^*_k(1,m)\}=1-a_m$
D'autre part pour $i=m+1,...,2m-k$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}\{A_{i-1}\overline{A}_i\}}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}} &= \frac{\mathbb{P}\Big\{\overline{F}_1...\overline{F}_{i-1}B_{k-1}(i-m+1,i-1)\Big\}q_i}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}} \\
&\geq \frac{\mathbb{P}\Big\{\overline{F}_1...\overline{F}_{i-m}B_{k-1}(i-m+1,i-1)\Big\}q_i}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big\{B_{k-1}(i-m+1,i-1)\Big\}q_i}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}}\prod_{j=1}^{i-m}p_j \\
&\geq \frac{b_i}{\mathbb{P}\{A(i-m,i-1)\}}\prod_{j=1}^{i-m}p_j=\frac{b_i}{c_i}\prod_{j=1}^{i-m}p_j
\end{aligned}$$

Et pour $i=2m-k+1,...,n$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}\{A_{i-1}\overline{A}_i\}}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}} &\geq \frac{\mathbb{P}\Big\{A_{i-2m+k-1}\overline{F}_{i-2m+k}...\overline{F}_{i-m}B_{k-1}(i-m+1,i-1)\Big\}q_i}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{A_{i-2m+k-1}\}}{\mathbb{P}\{A_{i-1}\}}\prod_{j=i-2m+k}^{i-m}p_{jn}b_i=\frac{b_i}{c_i}\prod_{j=i-2m+k}^{i-m}p_j
\end{aligned}$$

Puisque : $\mathbb{P}\{A_{i-1}\} = \mathbb{P}\Big\{A_{i-2m+k-1}A(i-m, i-1)\Big\}$

$$R(n, m, k, \mathbf{p}) \quad \leq \quad \prod_{i=m}^{n}(1 - \frac{b_i}{c_i}\prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_j) \tag{2.9}$$

D'après les inégalités (2.8) et (2.9) on obtient les bornes supérieures et inférieures (2.7) pour le système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n :F". □

Remarque 2.3. *Si $m = k$ on obtient les bornes du système "k-consécutifs-sur-n :F" (1.10) tel que :*

$$\begin{aligned} LB = \prod_{i=k}^{n}(1-a_i) &= \prod_{i=k}^{n}\Big(1 - q_i\mathbb{P}\Big\{B^*_{k-1}(i-k+1, i-1)\Big\}\Big) \\ &= \prod_{i=k}^{n}(1 - q_i\prod_{j=i-k+1}^{i-1} q_j) \\ &= \prod_{i=k}^{n}(1 - \prod_{j=i-k+1}^{i} q_j) = L \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} UB &= \prod_{i=k}^{n}\Big(1 - \frac{b_i}{c_i}\prod_{j=i-k}^{i-k} p_j\Big) \\ &= \prod_{i=k}^{n}\left(1 - p_{i-k}\frac{q_i\mathbb{P}\Big\{B_{k-1}(i-n+1, i-1)\Big\}}{\mathbb{P}\Big\{A(i-k, i-1)\Big\}}\right) \\ &= \prod_{i=k}^{n}\left(1 - p_{i-k}q_i\Big(\prod_{j=i-k+1}^{i-1} q_j\Big|\prod_{j=i-k}^{i-1} p_j\Big)\right) \\ &= \prod_{i=k}^{n}\left(1 - p_{i-k}\Big(\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\Big|\prod_{j=i-k}^{i-1} p_j\Big)\right) \\ &\leq \prod_{i=k}^{n}\Big(1 - p_{i-k}\prod_{j=i-k+1}^{i-1} q_j\Big) = U \end{aligned} \tag{2.11}$$

D'après (2.10), et (2.11) on obtient :

$$L \leq R(n, k; \mathbf{p}) \leq U \tag{2.12}$$

2.3.2 Cas des composants identiques

Ici les n composants sont supposés indépendants et identiquements distribués. On peut définir :

$a_m = b_m = \mathbb{P}\left\{B_k^*(1,m)\right\} \qquad c_m = 1$

$a = q\mathbb{P}\left\{B_{k-1}^*(i-m+1, i-1)\right\} \qquad$ pour $i = m+1, ..., n$

$b = q\mathbb{P}\left\{B_{k-1}(i-n+1, i-1)\right\} \qquad$ pour $i = m+1, ..., n$

$c = \mathbb{P}\left\{A(i-m, i-1)\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{B_k^*(i-m, i-1)\right\} = 1 - a_m \quad$ pour $i = m+1, ..., n$

Corollaire 2.4. *Soit* $1 \leq k \leq m \leq n$, *alors :*

$$lb \leq R(n,m,k;p) \leq ub \tag{2.13}$$

Où :

$$lb = (1-a_m)(1-a)^{n-m}, \quad ub = (1-a_m)\prod_{i=m+1}^{n}\left[1 - \frac{b}{c}\, p^*\right]$$

Et :

$$p^* = p^{\min(i-m, m-k+1)} = \prod_{i-2m+k}^{i-m} p_j$$

Remarque 2.4. *D'après l'inégalité (2.12) et si* $m = k$ *on obtient :*

$$l_1 = (1-q)^{n-k+1} \leq R(n,k,p) \leq (1-pq^k)^{n-k+1} = u_1$$

Le même résultat dans le chapitre 01 l'inégalité (1.11).

Maintenent, nous donnerons un autre type des bornes. *Sfakianakis et all*, en **1992**, ont appliqué pour la première fois les bornes de Boole-Bonferronni pour estimer la fiabilité de ce système. *Habib & Szántai*, en **2000**, ont donné une généralisation de ces bornes. Cette généralisation est basée sur la définition des moments binomiales et la solution du problème linéaire de programmation en relation avec ces moments. Pour cela on utilise les notations suivantes :

N : $n - m + 1$.

A_i : L'évènement "au moins k composants parmi $i, i+1, ..., i+m-1$ sont en panne", où $i = 1, 2, ..., N$ et :

$$\mathbb{P}(A_i) = \sum_{x=k}^{m}\binom{m}{x} q^x\, p^{m-x} = W$$

$g(u) = \mathbb{P}(A_i A_{i+u})$, où : $1 \leq u \leq m-1$ et $1 \leq i \leq N-1$

$h(u,z) = \mathbb{P}(A_i A_{i+u} A_{i+u+z})$, où : $1 \leq u \leq m-1$, $1 \leq z \leq m-1$ et $1 \leq i \leq N-2$.

μ : La variable aléatoire qu'elle est définie le nombre de fois que les évènements $A_1, A_2, ..., A_N$ sont réalisés, $\mu = \{1, 2, ..., N\}$.

Soient S_1, S_2, et S_3 des moments binomiales de la variable aléatoire μ.

Théorème 2.3.

$$\begin{aligned}
S_1 &= N\,.\,W \\
S_2 &= \binom{N-m+1}{2} W^2 + \sum_{u=1}^{r} \binom{N-u}{1} g(u) \quad \textit{où} \;\; r = \min(m-1, N-1) \\
S_3 &= \binom{N-2m+2}{3} W^3 + 2\,W \sum_{u=1}^{r} \binom{N-u-m+1}{2} g(u) \\
&\quad + \sum_{u=1}^{s} \sum_{z=1}^{t} \binom{N-u-z}{1} h(u,z)
\end{aligned}$$

Où :

$r = \min(m-1, N-m-1)$
$s = \min(m-1, N-2)$
$t = \min(m-1, N-1-u)$

Démonstration. On considère S_i, $i = 1, 2, ..., M$ et $M < N$ les moments binomiales de la variable aléatoire μ, donc on peut définir S_i comme suite :

$$\begin{aligned}
S_i &= \mathbb{E}\left[\binom{\mu}{i}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \binom{j}{i} \mathbb{P}(\mu = j)
\end{aligned}$$

- Pour $i = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \mathbb{E}\left[\binom{\mu}{1}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \binom{j}{1} \mathbb{P}(\mu = j) \\
&= \binom{1}{1} \mathbb{P}(\mu = 1) + \binom{2}{1} \mathbb{P}(\mu = 2) + ... + \binom{N}{1} \mathbb{P}(\mu = N) \\
&= 1\,\mathbb{P}(\mu = 1) + 2\,\mathbb{P}(\mu = 2) + ... + N\,\mathbb{P}(\mu = N)
\end{aligned}$$

D'après cette écriture, on peut donner S_1 par :

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + ... + \mathbb{P}(A_N) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{N} \ W = N \ . \ W \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(A_j) = W$ est indépendant pour tout $j = 1, 2, ..., N$.

- Pour $i = 2$ on obtient :

$$\begin{aligned} S_2 &= \mathbb{E}\left[\binom{\mu}{2}\right] \\ &= \sum_{j=2}^{N} \binom{j}{2} \mathbb{P}(\mu = j) \\ &= \binom{2}{2} \mathbb{P}(\mu = 2) + \binom{3}{2} \mathbb{P}(\mu = 3) + ... + \binom{N}{2} \mathbb{P}(\mu = N) \end{aligned}$$

Cette écriture équivalant $\quad S_2 = \sum_{ij} \mathbb{P}(A_i \ A_j) \quad$ où $1 \leq i < j \leq N$

– Si $i + m - 1 < j$, alors : $\mathbb{P}(A_i \ A_j) = \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}((A_j) = W^2$

– Si $i < j < m - 1$, on a $j - i = u$ alors : $\mathbb{P}(A_i \ A_j) = \mathbb{P}(A_i A_{i+u}) = g(u)$, mais on a :

$$\mathbb{P}(A_i \ A_j) = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \sum_{x_2=t_2}^{m_2} \sum_{x_3=t_3}^{m_3} \binom{m+i-j}{x_1} \binom{j-i}{x_2} \binom{j-i}{x_3} q^x \ p^{m+j-i-x}$$

Où : $x = x_1 + x_2 + x_3$, $k \leq x_1 + x_2 \leq m$, $k \leq x_1 + x_2 \leq m$
$t_1 = \max(0, k - j + i)$, $\ m_1 = m + i - j$
$t_2 = \max(0, k - x_1)$, $\ m_2 = j - i$
$t_3 = \max(0, k - x_1)$, $\ m_3 = j - i$
Donc :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{ij} \mathbb{P}(A_i \ A_j) \\ &= \binom{(n-m+1)-m+1}{2} W^2 \ + \sum_{u=1}^{r} \binom{n-m+1-u}{1} \mathbb{P}(A_i A_{i+u}) \\ &= \binom{N-m+1}{2} W^2 \ + \sum_{u=1}^{r} \binom{N-u}{1} g(u) \end{aligned}$$

Où : $r = \min(m - 1, N - 1)$.

- Pour $i = 3$ on obtient :

$$\begin{aligned} S_3 &= \mathbb{E}\left[\binom{\mu}{3}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N} \binom{j}{3} \mathbb{P}(\mu = j) \end{aligned}$$

équivalant : $S_3 = \sum_{ijv} \mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_v)$ où $1 \leq i < j < v \leq N$

- Si $i + m - 1 < j$, $j + m - 1 < v$, alors : $\mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_v) = \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}(A_v)$
- Si $i + m - 1 < j < v \leq N$, alors : $\mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_v) = \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}(A_j\ A_v)$
- Si $i < j$ et $j + m - 1 < v$, alors : $\mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_v) = \mathbb{P}(A_i A_j)\ \mathbb{P}(A_v)$
- Si $i < j \leq i + m - 1$, $j < v \leq j + m - 1$, on a $j - i = u$ et $v - j = z$ alors : $\mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_v) = \mathbb{P}(A_i A_{i+u} A_{i+u+z}) = h(u, z)$, mais on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_v) &= \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \sum_{x_2=t_2}^{m_2} \sum_{x_3=t_3}^{m_3} \sum_{x_4=t_4}^{m_4} \sum_{x_5=t_5}^{m_5} \binom{i+m-v}{x_1} \binom{v-j}{x_2} \\ & \binom{j-i}{x_3} \binom{j-i}{x_4} \binom{v-j}{x_5} q^x\ p^{v+m-i-x} \end{aligned}$$

Où : $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, $k \leq x_1 + x_2 + x_3$, $k \leq x_1 + x_2 + x_4$, $k \leq x_1 + x_3 + x_5$
$t_1 = \max(0, k - v + i)$, $m_1 = i + m - v$
$t_2 = \max(0, k - x_1 - j + i)$, $m_2 = v - j$
$t_3 = \max(0, k - x_1 - x_2)$, $m_3 = j - i$
$t_4 = \max(0, k - -x_2)$, $m_4 = j - i$
$t_5 = \max(0, k - x_1 - x_3)$, $m_5 = v - j$
Donc :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{ijv} \mathbb{P}(A_i\ A_j\ A_j) \\ &= \binom{(n-m+1) - m + 1 - m + 1}{3} W^3 + \sum_{u=1}^{r} \binom{n-m+1-u-m+1}{2} \\ & \mathbb{P}(A_i A_{i+u})\ W + \sum_{u=1}^{r} \binom{n-m+1-u-m+1}{2} \mathbb{P}(A_i A_{i+u})\ W \\ & + \sum_{u=1}^{s} \sum_{z=1}^{t} \binom{n-m+1-u-z}{1} \mathbb{P}(A_i A_{i+u} A_{i+u+z}) \end{aligned}$$

$$= \binom{N-2m+2}{2} W^3 + 2\,W \sum_{u=1}^{r} \binom{N-u-m+1}{2} g(u)$$
$$+ \sum_{u=1}^{s} \sum_{z=1}^{t} \binom{N-u-z}{1} h(u,z)$$

Où :
$r = \min(m-1, N-m-1)$
$s = \min(m-1, N-2)$
$t = \min(m-1, N-1-u)$

$\square$

*Nous utilisons les moments binomiales S_1, S_2 et S_3 pour obtenir les nouvelles bornes de la distribution du temps de panne du système $Q(n,m,k,p) = 1-R(n,m,k,p)$:

$$Q(n,m,k,p) = \mathbb{P}(\mu \geq 1) = \mathbb{P}(A_1 + A_2 + ... + A_N)$$

- Pour S_1 et S_2 :

$$\frac{2}{t+1}S_1 - \frac{2}{t(t+1)}S_2 \leq Q(n,m,k,p) \leq S_1 + \frac{2}{N}S_2 \qquad (2.14)$$

Où : $t = \left[\frac{2\,S_2}{S_1}\right]$

- Pour S_1, S_2 et S_3 :

$$\frac{t_1+2N-1}{(t_1+1)N}S_1 - \frac{2(2t_1+N-2)}{t_1(t_1+1)N}S_2 + \frac{6}{t_1(t_1+1)}S_3$$
$$\leq \quad Q(n,m,k,p) \leq S_1 - \frac{2(2t_2-1)}{t_2(t_2+1)}S_2 + \frac{6}{t_2(t_2+1)}S_3 \qquad (2.15)$$

Où : $t_1 = 1 + \left[\frac{-6S_3+2(N-2)S_2}{-2S_2+(N-1)s_1}\right]$, $t_2 = 2 + \left[\frac{3\,S_3}{S_2}\right]$

2.4 Théorèmes limites du temps de panne

On considère un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n :F" dont les n composants indépendants et de même distribution de panne.On peut définir :

T : le temps de panne du composant pour $i = 1, ..., n$.

Z_n : le temps de panne du système.

$q(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$: Distribution de panne du composant pour $i = 1, ..., n$, $p(t) = 1 - q(t)$.

$Q(n, m, k; p(t)) = \mathbb{P}(Z_n \leq t)$: Distribution de panne du système pour $t \geq 0$.

En **1988**, *Papastavridis* a donné le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soient $2 \leq k \leq m$, et $q(t) = \lambda^\alpha t^\alpha + o(t^\alpha)$ où α et λ sont des réels positifs et constants. Alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^{\frac{1}{\alpha k}} Z_n \leq t) \quad = \quad 1 - \exp\left(- (\lambda t)^{\alpha k} \sum_{j=k}^{m} \binom{j-2}{k-2} \right) \tag{2.16}$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. Pour $t \geq 0$ et $p(t) = 1 - q(t)$. Soit la variable aléatoire X_J, $J \in A$ où :

$$A = \Big\{(i-j+1, ..., i) : i-j+1 \geq 1, n \geq i, k \leq j \leq m\Big\}$$

qui prend la valeur 1 si et seulement si les composants $(i-j+1)$ et i sont en panne et il existe k composants en panne parmi $i-j+1, ..., i$, et la valeur 0 dans les autres cas. Alors :

$$E(X_J) = \mathbb{P}(X_J = 1) = q^2(t)\binom{j-2}{k-2} q^{k-2}(t) p^{j-k}(t) = p_J$$

Et soit la variable aléatoire $X = \sum_{J\in A} X_J$, on a :

$$E(X) = E\Big(\sum_{J\in A} X_J\Big) = \sum_{J\in A} E(X_J)$$

Alors :

$$E(X) = (n-m+1)q^k(t)\sum_{j=k}^{m}\binom{j-2}{k-2}p^{j-k}(t) + \sum p_J$$

Il est clair que le système est en panne si et seulement si $X > 0$.Soit $t_n = tn^{-(1/\alpha k)}$; où $t \geq 0$, $t_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors on a :

$$q^k(t_n) = (\lambda t)^{\alpha k}/n + o(1/n) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E(X) &= \lim_{n\to\infty}\Big[nq^k(t_n)\sum_{j=k}^{m}\binom{j-2}{k-2}p^{j-k}(t_n)\\ &\quad +(1-m)q^k(t_n)\sum_{j=k}^{m}\binom{j-2}{k-2}p^{j-k}(t_n)+\sum p_J\Big]\\ &= (\lambda t)^{\alpha k}\sum_{j=k}^{m}\binom{j-2}{k-2} \qquad (2.17)\end{aligned}$$

puisque : $\lim p(t_n) = p(0) = 1$, et $\lim \sum p_J = 0$
D'après l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{P}(Z_n \le t_n) - \big(1-\exp(-E(X))\big)\Big| &\le \min(1, 1/E(X))\Big(\sum p_J^2\\ &\quad +\sum(p_Jp_K + E(X_JX_K))\Big) \qquad (2.18)\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sum p_J^2 + \sum(p_Jp_K + E(X_JX_K))\Big] = 0$$

Alors, d'après l'égalité (2.17) et l'inégalité (2.18), on obtient notre résultat. □

Remarque 2.5. *Pour $m = k$ et d'après l'égalité (2.16) on obtient le théorème limite du temps de panne du système "k-consécutifs-sur-n :F" (voir la formule (1.16)).*

*En **2006**, *Ghoraf.N & Ksir.B* ont présenté une généralisation pour les résultats dans [7] et [22]. Ils ont donné la loi limite de la variable aléatoire $a^{-1}(n,k)Z_n$ où $a(n,k)$ est une fonction choisie (par exemple $a(n,k) = n^{-\frac{1}{\alpha k}}$).

Théorème 2.5. *Si $\lim_{n\to\infty} n\, q^k\,(a(n,k)\,t) = \Delta(t)$,où $0 \le \Delta(t) \le 1$,*

et $a(n,k) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(a^{-1}(n,k)Z_n \le t\right) = \binom{m-1}{k-1}\Delta(t) \qquad (2.19)$$

Démonstration. Soit E_i : l'évènement "le composant i tombe en panne et au moins $(k-1)$ composants parmi $i+1,...,i+m-1$ tombent en panne" pour $i = 1,2,...,n-m+1$, alors :

$$\mathbb{P}\big(E_i\big) = \sum_{j=k-1}^{m-1}\binom{m-1}{j}q^{j+1}(t)\,p^{m-j-1}(t)$$

On remarque que :

$$\mathbb{P}\big(Z_n \leq t\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-m+1} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n-m+1} \mathbb{P}(E_i) = (n-m+1)\mathbb{P}\big(E_i\big)$$

On pose : $D_n(t) = (n-m+1)\mathbb{P}\big(E_i\big)$ Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Z_n \leq t\big) &\leq D_n(t) \\ \mathbb{P}\big(Z_n \leq a(n,k)\ t\big) &\leq D_n(a(n,k)\ t) \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(a^{-1}(n,k) Z_n \leq t\big) &\leq \binom{m-1}{k-1}\Delta(t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{W(t)}\left(\left[\frac{n}{ml}\right]-1\right) mlA(t) \leq \mathbb{P}\big(Z_n \leq t\big)$$

Où : $W(t) = 1 + 2m(l-1)A(t) + 2a(m-1)(2m-k+1)\frac{q(t)}{(1-q(t))^{m-k}}$ et $A(t) = \binom{m-1}{k-1} q^k(t)(1-q^k(t))^{m-k}$, avec $a = \frac{\max_{k-1\leq h\leq 2m-1}\binom{2m-1}{h}}{\binom{m-1}{k-1}}$ et l est un entier positif. Pour $l = l_n$ où $l_n \to \infty$ *et* $\frac{l_n}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$ (par exemple $l_n = c\log n,\ c > 0$), on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} W(a(n,k)t) = 1$$

Alors

$$\binom{m-1}{k-1}\Delta(t) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t\big) \tag{2.21}$$

Alors d'après les inégalités (2.20) et (2.21) on a notre résultat. □

Théorème 2.6. *Si* $\lim_{n\to\infty} n\ \ q^k\,(a(n,k)\ t) = \lim_{n\to\infty} l_n\ \ q^k\,(a(n,k)\ t) = \Delta(t)$,*où* $0 \leq \Delta(t) \leq 1$, *et* $a(n,k) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour* $l_n = c\log n,\ c > 0$. *Alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t) = \begin{cases} 1 - \exp\Big(-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\Big) & si\ t > 0,\ \alpha > 0 \\ \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Démonstration. Voir [29]. □

Deuxième partie

Système "k-consécutifs-sur-n" dans le Cas bidimensionnel

Chapitre 3

Système réseau "X-connectés-sur-(m,n)"

Dans ce chapitre, nous allons proposer un autre type de généralisation du système considéré dans le premier chapitre. *Salvia* et*Lasher* (**1990**) introduisent le concept des systèmes à deux dimension "k-consécutifs-sur-n :F" (noté par :"k^2-connectés-sur-n^2 :F"). *Boehme*,*Kossow*,et *Preuss*(**1992**) ont présenté une généralisation de la notion du tel système (noté par : "X-connectés-sur-(m,n) :F" où $X = (r,s)$ ou $X = (r,s) - ou - (s,r)$).
D'abord, nous utiliserons les notions suivantes :

Le système rectangulaire est constitué de $m.n$ éléments disposés comme des éléments la matrice $M(m,n)$, c'est -à-dire chaque de m lignes contiennent n éléments, et chaque de n colonnes contiennent m éléments. Ce système est appellé un système réseau (m,n) linéaire (*Regarde figure* 3.1).

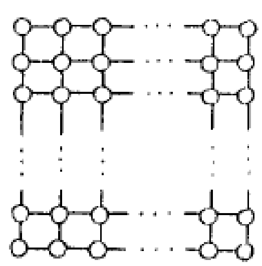


FIGURE 3.1 – Le système réseau (m,n) linéaire

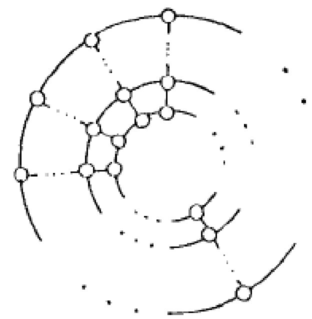


FIGURE 3.2 – Le système réseau (m, n) circulaire

Le système cylindrique est constitué de m cercles, Centrés au même point, et n rayons. L'intersection des cercles et des rayons représentent les éléments, c'est-à-dire chaque de m cercles contiennent n éléments, et chaque de n rayons contiennent m éléments. Ce système est appellé un système réseau (m, n) circulaire (*Regarde figure* 3.2). Si nous coupons des cercles entre deux rayons, le système réseau (m, n) circulaire peut être déformé au système réseau (m, n) linéaire.

Le système réseau (m, n) linéaire ou circulaire est appellé le système réseau "X-connectés-sur-(m,n) :F" linéaire ou circulaire quand il tombe en panne si et seulement si au moins un sous ensemble X de composantes connexes sont en panne. Donc d'après ces notions, il est très clair que le système linéaire ou circulaire "X-connectés-sur-(m,n) :F" sont généralisés pour les modèles envisagés dans le premier chapitre où $X = (1, k)$, et $(m, n) = (1, n)$.
Le sous ensemble X peut prendre l'une des formes suivantes :
(i) $X = (k, k)$,et $(m, n) = (n, n), k \leq n$
(ii) $X = (r, s), r \leq m, s \leq n$.
(iii) $X = (r, s) - ou - (s, r), r, s \leq m, n$.

3.1 *Notations et Définitions*

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :
m, n, r, s : paramètres du système.
(i, j) : le composant dans la ligne i et colonne j.
$M(i, j)$: la matrice composée de i lignes et j colonnes.

$p_{i,j}$ $q_{i,j}$: La fiabilité du composant dans la position (i, j) pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$ $q_{i,j} = 1 - p_{i,j}$.

$R\Big((m, n), X, [p_{i,j}]\Big)$: la fiabilité du système réseau **"X-connectés-sur-(m,n) :F"** linéaire, avec $[p_{i,j}] = (p_{1,1}, ..., p_{m,n}) = [p_{i,j}]_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$.

$R\Big((m, n), X, p\Big)$: la fiabilité du système réseau **"X-connectés-sur-(m,n) :F"** linéaire, avec $p = p_{1,1} = ... = p_{m,n}$.

$R_C\Big((m, n), X, [p_{i,j}]\Big)$: la fiabilité du système réseau **"X-connectés-sur-(m,n) :F"** circulaire, avec $[p_{i,j}] = (p_{1,1}, ..., p_{m,n}) = [p_{i,j}]_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$.

$R_C\Big((m, n), X, p\Big)$: la fiabilité du système réseau **"X-connectés-sur-(m,n) :F"** circulaire, avec $p = p_{1,1} = ... = p_{m,n}$.

3.1.1 Système deux dimensions "k-consécutifs-sur-n : F"

Définition 3.1. *Le système deux dimensions "k-consécutifs-sur-n : F" est représenté par une grille carrée de côté n (n^2 composants), et qu'il tombe en panne si et seulement si au moins une grille carré de côté k $(2 \leq k \leq n-1)$ dont tous ses composonts tombent en panne.*

On remarque que, si $k = 1$, ou $k = n$ on obtient le système en série ou en parallèle respectivement.

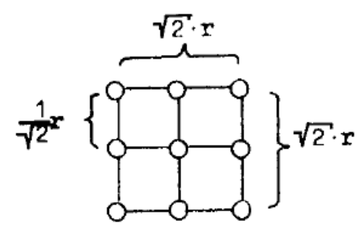


FIGURE 3.3 – Le système de surveillance

Exemple 3.1 (**Le système de surveillance**). *Le système de surveillance (voir figure (3.3)) couvre le carré avec des côtés d'une largeur $\sqrt{2}.r$, alors chaque station couvre un disque de rayon r, et il est présenté par le point noir si le composant est en panne. Le système est en panne si la zone de l'intérieur du carré n'est pas couvere.*

D'autre façon, il est en panne si et seulement si au moins la matrice $M(2,2)$ *est en panne, tel que la matrice est en panne si tous ses composants sont en panne. Alors, ce système est équivalent au système "(2,2)-connectés-sur-(3,3) : F" ou noté par "*2^2*-connectés-sur-*3^2 *: F".*

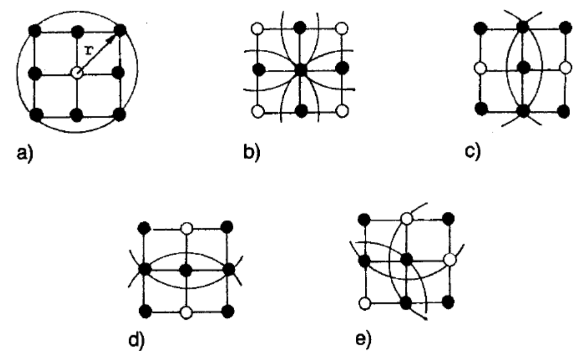


FIGURE 3.4 – système"2^2-connectés-sur-3^2 : F" en marche

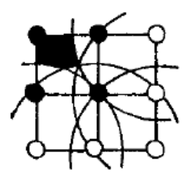


FIGURE 3.5 – système"2^2-connectés-sur-3^2 : F" en panne

3.1.2 système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) : F"

On propose un modèle plus général des systèmes deux dimensions "k-consécutifs-sur-n : F".

Définition 3.2. *Le système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) : F" linéaire est un système composé de m.n éléments disposés comme une matrice* $M(m,n)$ *et il est en panne si et seulement si au moins une sous matrice* $M(r,s)$ *(*$r \neq s$*) parmi la matrice* $M(m,n)$ *tombe en panne. La sous matrice* $M(r,s)$ *est en panne si tous ses composants sont en panne.*

Définition 3.3. *Le système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) : F" circulaire est un système composé de m.n éléments arrangés sur la surface du cylindre et qu'il est en panne si et seulement si au moins une sous matrice $M(r,s)$ $(r \neq s)$ parmi la matrice $M(m,n)$ dont tous ses composants sont en panne.*

Remarque 3.1. *Le système réseau "(1,1)-connectés-sur-(m,n) : F" linéaire ou circulaire coincide avec le système en série, parce qu'il est en panne si et seulement si au moins un élément est en panne. Le système réseau "(m,n)-connectés-sur-(m,n) : F" linéaire ou circulaire fonctionne si et seulement si au moins un élément fonctionne, alors, ce système coinside avec le système en parallèle.*

Remarque 3.2. *Il est clair, si $(r,s) = (1,k)$, et $(m,n) = (1,n)$ on obtient le système "k-consécutifs-sur-n :F".*

Exemple 3.2 (**Diagnostique des maladies**). *La présence d'une maladie est diagnostiquée en lisant au rayon r. la radioloque ne peut pas détecter la présence des cellules malades au moins qu'ils ne soient agrégés dans une zone suffisamment large (un rectangle d'une dimension $r \times s$). p est la probabilité qu'une petite cellule individulle est saine. Ce problème est égale à la fiabilité du système réseau "(r, s)-connectés-sur-(m, n) : F" linéaire.*

Cas particuliers

Cas.1
Le système réseau **"(1,k)-connectés-sur-(m,n) : F"** $(k \leq n)$ linéaire (circulaire) est en panne si et seulement si au moins une ligne (cercle) comprand k composants consécutifs en panne. Alors, chaque de m ligne (cercle) coincide avec le système linéaire (circulaire) "k-consécutifs-sur-n : F". D'une façon précise, le système fonctionne si tous ses lignes (cercles) fonctionnent.

Cas.2
Le système réseau **"(k,1)-connectés-sur-(m,n) : F"** $(k \leq m)$ linéaire (circulaire) est en panne si et seulement si au moins une colonne (rayon) comprand k composants consécutifs en panne. On peut concidérer que chaque de n colonne (rayon) comme le système linéaire (circulaire) "k-consécutifs-sur-m : F". D'autre façon, le système fonctionne si tous ses colonnes (rayons) fonctionnent.

Cas.3
Le système réseau **"(m,k)-connectés-sur-(m,n) : F"** $(k \leq n)$ linéaire (circulaire) est en panne si et seulement si au moins k colonnes (rayons) consécutifs sont en panne, tel que la colonne (rayon) est en panne si tous ses composants sont en panne. La probabilité de panne de chaque colonne (rayon) qui contient m éléments en panne

est $\tilde{q} = q^m$, alors on peut considèrer chaque colonne (rayon) comme un nouvel élément avec la probabilité de panne $\tilde{q}$ et la fiabilité $\tilde{p} = 1 - \tilde{q}$.

Cas.4
Le système réseau **"(k,n)-connectés-sur-(m,n) : F"** ($k \leq m$) linéaire (circulaire) est en panne si et seulement si au moins k lignes (cercles) consécutifs sont en panne, tel que chaque ligne (cercle) contient n composants en panne.
La probabilité de panne de chaque ligne (cercle) qui contient m éléments en panne est $\tilde{q} = q^n$, alors on peut considérer chaque ligne (circle) comme un nouvel élément avec la probabilité de panne $\tilde{q}$ et la fiabilité $\tilde{p} = 1 - \tilde{q}$.

3.1.3 Système réseau "(r,s)-ou-(s,r)-connectés-sur-(m,n) : F"

Définition 3.4. *Le système réseau "(r,s)-ou-(s,r)-connectés-sur-(m,n) : F" linéaire (circulaire) est composé de* $m.n$ *éléments disposés comme une matrice (cylindre)* $M(m,n)$*. Il est en panne si et seulement si au moins une sous matrice* $M(r,s)$ *ou* $M(s,r)$ *parmi la matrice* $M(m,n)$*) sont en panne, tel que la sous matrice* $M(r,s)$ *ou* $M(s,r)$ *est en panne si tous ses composants sont en panne.*

Exemple 3.3. *Le système de surveillance (voir la figure (3.6)) est défini (par exemple) des caméras de télévision. Il est composé de* 16 *éléments disposés dans* 4 *lignes et* 4 *colonnes chaque caméras de télévision peut couvrir un disque de rayon* r*. Le système de surveillance est en panne si et seulement si au moins deux caméras connectées dans une ligne ou une colonne tombent en panne.*
Dans la figure (3.7), la zone noire entre les éléments (2,2) et (2,3) ,partie a) ou les éléments (2,2) et (3,2) partie b) indique la défaillance du système.
Le système fonctionne si deux caméras voisins ne sont pas liées par une ligne en panne. ce système est équivalant au système réseau "(1,2)-ou-(2,1)-connectés-sur-(4,4) : F" linéaire.

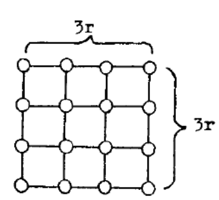


FIGURE 3.6 – Le système de surveillance

FIGURE 3.7 – Le système réseau "(1,2)-ou-(2,1)-connectés-sur-(4,4) :F" en panne

Exemple 3.4 (**Un système de mesure de la température**). *Un objet cylindrique couvert par un système des antennes pour mesurer la température avec* m *cercles dont chacun comprenne* n *antennes. Le système de mesure est en panne si au moins une matrice* $M(3,2)$ *ou* $M(2,3)$ *est en panne. ce porblème est équivalant au système réseau "(3,2)-ou-(2,3)-connecté-sur-(m,n) :F" circulaire (figure(3.8)).*

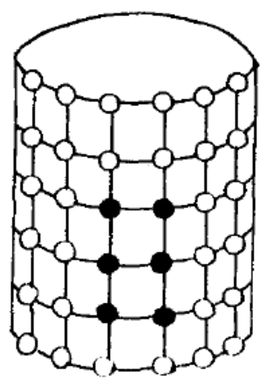


FIGURE 3.8 – Le système de mesure de la température

3.2 Formules exactes particulières de la fiabilité dans le cas indépendant

Elle est très difficulte pour obtenir la formule simple de la fiabilité du système réseau "X-connectés-sur-(m,n) :F" (où $X = (r, s),\ ou\ \ (r, s) - ou - (s, r)$).

système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) :F"

Cas particulières :

Nous supposons que les composants sont indépendants et de même probabilité de bon fonctionnement ($p_{ij} = p, q_{ij} = q = 1 - p$)

Cas.1

La fiabilité du système réseau "(1,1)-connectés-sur-(m,n) :F" linéaire (circulaire) coincide avec la fiabilité du système en série :

$$R\Big((m,n),(1,1),p\Big) = R_c\Big((m,n),(1,1),p\Big) = p^{mn}$$

Cas.2

La fiabilité du système réseau "(m,n)-connectés-sur-(m,n) :F" linéaire (circulaire) coincide avec la fiabilité du système en parallèle :

$$R\Big((m,n),(m,n),p\Big) = R_c\Big((m,n),(m,n),p\Big) = 1 - (1-p)^{mn} = 1 - q^{mn}$$

Cas.3

La fiabilité du système réseau "(1,k)-connectés-sur-(m,n) :F" linéaire (circulaire) est donnée par :

$$\begin{aligned} R\Big((m,n),(1,k),p\Big) &= \Big[R(n,k,p)\Big]^m \\ R_c\Big((m,n),(1,k),p\Big) &= \Big[R_c(n,k,p)\Big]^m \end{aligned}$$

Tel que : $R(n,k,p)$ ($R_c(n,k,p)$) la fiabilité du système linéaire (circulaire) "k-consécutifs-sur-n :F". Si $k = 1$, on obtient :

$$R\Big((m,n),(1,1),p\Big) = \Big[R(n,1,p)\Big]^m = \Big[p^n\Big]^m = p^{nm}$$

Cas.4

La fiabilité du système réseau "(k,1)-connectés-sur-(m,n) :F" linéaire (circulaire) est définie par :

$$\begin{aligned} R\Big((m,n),(k,1),p\Big) &= \Big[R(m,k;p)\Big]^n \\ R_c\Big((m,n),(k,1),p\Big) &= \Big[R_c(m,k;p)\Big]^n \end{aligned}$$

Tel que : $R(m,k,p)$ ($R_c(m,k,p)$) la fiabilité du système linéaire (circulaire) "k-consécutifs-sur-m :F" (formule exacte de la fiabilité (1.3)).

Cas.5
La fiabilité du système réseau "(m,k)-connectés-sur-(m,n) :F" linéaire (circulaire) est donnée par :

$$\begin{aligned} R\Big((m,n),(m,k),p\Big) &= R(n,k;\tilde{p}) \\ R_c\Big((m,n),(m,k),p\Big) &= R_c(n,k;\tilde{p}) \end{aligned}$$

Où : $\tilde{p} = 1 - q^m$
Cas.6
La fiabilité du système réseau "(k,n)-connecté-sur-(m,n) :F" linéaire (circulaire) est définie par :

$$\begin{aligned} R\Big((m,n),(k,n),p\Big) &= R(m,k;\tilde{p}) \\ R_c\Big((m,n),(k,n),p\Big) &= R_c(m,k;\tilde{p}) \end{aligned}$$

Où : $\tilde{p} = 1 - q^n$

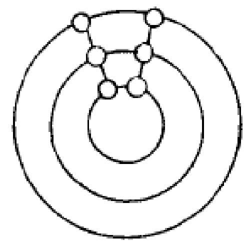
Système réseau "(r,s)-ou-(s,r)-connectés-sur-(m,n) : F"

Cas particulières :
Cas.1
La fiabilité du système réseau "(1,2)-ou-(2,1)-connectés-sur-(2,2) :F" linéaire (circulaire) coincide avec la fiabilité du système circulaire "2-consécutifs-sur-4 :F" :

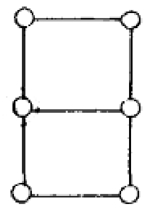
$$\begin{aligned} R\Big((2,2),(1,2)-ou-(2,1),p\Big) &= R_c(4,2;p) \\ R_c\Big((2,2),(1,2)-ou-(2,1),p\Big) &= R_c(4,2;p) \end{aligned}$$

*Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :
E_s : l'évènement que le système est en panne.
$E_{i,j}$: l'évènement que le composant (i,j) est en panne.
Cas.2
Le système réseau "(1,2)-ou-(2,1)-connectés-sur-(3,2) :F" linéaire (circulaire) (vigure 1) est en panne si au moins deux composants connectées sont en panne.
Alors, la fiabilité du ce système est donnée par :

$$R\Big((3,2),(1,2)-ou-(2,1),p\Big) = \mathbb{P}\Big(\overline{E}_s\Big) = \mathbb{P}\Big(\overline{E}_{2,1}\bigcap\overline{E}_s\Big) + \mathbb{P}\Big(E_{2,1}\bigcap\overline{E}_s\Big)$$



a)Le cas circulaire



a)Le cas linéaire

FIGURE 3.9 – Le système réseau "(1,2)-ou-(2,1)-connectés-sur-(3,2) :F"

Mais l'évènement $\overline{E}_{2,1} \bigcap \overline{E}_s$ est équivalent à l'évènement que le composant $(2,1)$ est en marche ($\overline{E}_{2,1}$) et le système linéaire "2-consécutifs-sur-5 :F" (il est composé des éléments (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2)) est en marche alors :

$$\mathbb{P}\Big(\overline{E}_{2,1} \bigcap \overline{E}_s\Big) = p\, R(5,2,p) \tag{3.1}$$

Où : $R(5,2,p)$ est donnée par l'équation (1.1) et : $N(j;n,2) = \binom{n-j+1}{j}$.
D'autre part, l'évènement $E_{2,1} \bigcap \overline{E}_s$ est équivalent à l'évènement que le composant $(2,1)$ est en panne ($E_{2,1}$), les éléments ((1,1), (2,2), (3,1)) sont en marche et ((1,2), (3,2)) peut être en panne ou non. Alors :

$$\mathbb{P}\Big(E_{2,1} \bigcap \overline{E}_s\Big) = q\, p^3\, (p^2 + q^2 + 2\,p\,q) \tag{3.2}$$

D'après l'égalité (3.1) et (3.2) on a :

$$\begin{aligned} R\Big((3,2),(1,2) - ou - (2,1), p\Big) &= R_c\Big((3,2),(1,2) - ou - (2,1), p\Big) \\ &= p\, R(5,2,p) + q\, p^3\, (p^2 + q^2 + 2\,p\,q) \\ &= p^6 + 5p^5 q + 6p^4 q^2 + p^3 q^3 + p^3 q. \end{aligned}$$

Cas.3
La fiabilité du système réseau "(1,2)-ou-(2,1)-connectés-sur-(3,3) :F" linéaire :

$$R\Big((3,3),(1,2)-ou-(2,1),p\Big)=\mathbb{P}\Big(\overline{E}_s\Big)=\mathbb{P}\Big(\overline{E}_{2,2}\bigcap\overline{E}_s\Big)+\mathbb{P}\Big(E_{2,2}\bigcap\overline{E}_s\Big)$$

Mais l'évènement $\overline{E}_{2,2}\bigcap\overline{E}_s$ est équivalent à l'évènement que le composant $(2,2)$ est en marche et le système circulaire "2-consécutifs-sur-8 :F" (il est composé des éléments (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), ('3,3)) est en marche alors :

$$\mathbb{P}\Big(\overline{E}_{2,2}\bigcap\overline{E}_s\Big)=p\,R_c(8,2,p) \tag{3.3}$$

Où : $R_c(8,2,p)$ est donnée par les équations (1.4) ou (1.6).
D'autre part, l'évènement $E_{2,2}\bigcap\overline{E}_s$ est équivalent à l'évènement que le composant $(2,2)$ est en panne ($E_{2,2}$), les éléments ((1,2), (2,1), (2,3), (3,2)) sont en marche, Alors :

$$\mathbb{P}\Big(E_{2,1}\bigcap\overline{E}_s\Big)=q\,p^4 \tag{3.4}$$

D'après les égalitées (3.3) et (3.4) on a :

$$R\Big((3,2),(1,2)-ou-(2,1),p\Big) \;=\; p\,R_c(8,2,p)+q\,p^4.$$

Relation enter la fiabilité du système réseau "X-connectés-sur-(m,n) : F" et "X-connectés-sur-(m,n) : G" :
Comme pour le système un dimension "k-consécutifs-sur-n : F", le système réseau **"X-connectés-sur-(m,n)"** linéaire (circulaire) peut être classé en deux catégories :
(i) système "X-connectés-sur-(m,n) : F".
(ii) système "X-connectés-sur-(m,n) : G".

Définition 3.5. *Le système réseau "X-connectés-sur-(m,n) : G" fonctionne si et seulement si au moins une sous ensemble X des composants fonctionnent.*
*On noté par $R_G\big((m,n),X,[p_{i,j}]\big)$ la fiabilité du système réseau **"X -connectés-sur-(m,n) :G"** avec $[p_{i,j}]=[p_{i,j}]_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$.*

Alors, d'après cette définition, on remarque que :

$$\begin{aligned} R_G\big((m,n),X,[p_{i,j}]\big) &= 1-Q_G\big((m,n),X,[p_{i,j}]\big)\\ &= \mathbb{P}\{\text{au moins un sous ensemble } X \text{ des composants dans le}\\ &\qquad \text{système réseau } \textbf{"k-connectés-sur-n :G"} \text{ fonctionne.}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q\Big((m,n),X,[p_{i,j}]\Big) &= 1 - R\Big((m,n),X,[p_{i,j}]\Big) \\ &= \mathbb{P}\{\text{au moins un sous ensemble } X \text{ des composants dans le} \\ &\quad \text{système réseau } \textbf{"X-connectés-sur-n :F"} \text{ tombe en panne.}\} \end{aligned}$$

On remarque que $\mathbb{P}(X_i = 1)$ dans le système réseau **"X-connectés-sur-(m,n) :G"** est égal $\mathbb{P}(X_i = 0)$ dans le système réseau **"X-connectés-sur-(m,n) :F"** pour $i = 1, 2, ..., n$, alors :

$$R_G\Big((m,n),X,[p_{i,j}]\Big) = Q\Big((m,n),X,[q_{i,j}]\Big)$$

.

3.3 *Les bornes de la fiabilité dans le cas indépendant*

3.3.1 Cas des composants identiques

*En **1990**, *Salvia & Lasher* ont introduit les bornes inférieures et supèrieures pour la fiabilité du système linéaire deux dimensions "k-consécutifs-sur-n :F". Ces bornes dépendent à la fiabilité du système considéré dans le 1er chapitre. Elles sont données par :

$$L_1 \leq R\Big((n,n),(k,k),p\Big) \leq U_1 \tag{3.5}$$

Où :

$$L_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Big[1 - R(n,k,p)\Big]^i R(n,k,p)^{n-i}, \quad U_1 = \Big[1 - R(nk,k^2,p)\Big]^{[n/k]}$$

et $R(n,k,p)$ est la fiabilité du système linéaire "k-consécutifs-sur-n :F".

*En **1997, 1999**, *Moukhlis* et *all* ont prolongé ce résultat pour le système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) : F" linéaire ou circulaire comme suivants :

1. **Cas linéaire** :

$$L_2 = \max(L^{'}, L^{''}) \leq R\Big((m,n),(r,s),p\Big) \leq \min(U^{'}, U^{''}) = U_2 \tag{3.6}$$

Tel que :

$$L^{'} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m}{i} \Big[1 - R(n,s,p)\Big]^i R(n,s,p)^{m-i}$$

$$L'' = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} \Big[1 - R(m,r,p)\Big]^{i} R(m,r,p)^{n-i}$$

$$U' = R\Big((r,n),(r,s),p\Big)^{[m/r]}, \qquad U" = R\Big((m,s),(r,s),p\Big)^{[n/s]}$$

2. **Cas circulaire** : On prend la même stratégie précédente (cas linéaire) mais on pose $R_c\Big((m,n),(r,s),p\Big)$ au lieu de $R\Big((m,n),(r,s),p\Big)$ et $R_c(n,k,p)$ au lieu de $R(n,k,p)$.

3.3.2 Cas des composants non identiques

système deux dimensions "k-consécutifs-sur-n :F"

*En **1993**, *Koutras, Papadopoulos & Papastavridis* ont donné des bornes de la fiabilité du système deux dimensions "k-consécutifs-sur-n :F" dans le cas où les cm-posants sont indépendants mais non identiquements distribués comme suivants :

$$\left| R\Big((n,n),(k,k),[p_{ij}]\Big) - \exp(-\lambda_1) \right| \leq (1-\exp(-\lambda_1))\Big((2k-1)^2\, q^{k^2} + 4Q_1\Big) \quad (3.7)$$

Où :
$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} q^{k^2-ij} - 1$ et $q = \max_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n} q_{ij}$

$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} q_{\alpha_{ij}}, \qquad q_{\alpha_{ij}} = \prod_{i,j\in\alpha_{ij}} q_{ij}$ et α_{ij} sont les coupes minimales du système, c'est-à-dire :
$\alpha_{ij} = \Big\{(i+x-1, j+y-1)\ \textit{tel que}:\ x,y = 1,...,k\Big\},\ i,j = 1,2,...,n-k+1.$

*Dans le cas où les composants sont identiques distribués, on obtient les bornes suivantes :

$$L_3 = \exp(-\lambda_1) - (1-\exp(-\lambda_1))\big[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4Q_1\big] \quad (3.8)$$

$$U_3 = \exp(-\lambda_1) + (1-\exp(-\lambda_1))\big[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4Q_1\big] \quad (3.9)$$

Où : $\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} q_{\alpha_{ij}} = (n-k+1)^2 q^{k^2}$

système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) : F"

*En**1997-1999**, *Mokhlis* et *all* ont donné les bornes suivantes du système réseau "(r,s)-connectés-sur-(m,n) : F" :

1. **Cas linéaire** :
$$L_4 \leq R\Big((m,n),(r,s),[p_{ij}]\Big) \leq U_4 \tag{3.10}$$
Tel que :
$$L_4 = \exp(-\lambda_2) - \big(1-\exp(-\lambda_2)\big)Q_2\ , \quad U_4 = \exp(-\lambda_2) + \big(1-\exp(-\lambda_2)\big)Q_2$$
Où : $q = \max_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n} q_{ij}$
$Q_2 = (2r-1)(2s-1)q^{rs} + 4\Big[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} q^{rs-ij} - 1\Big]$
$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{m-r+1}\sum_{j=1}^{n-s+1} q_{\alpha_{ij}}$, $\quad q_{\alpha_{ij}} = \prod_{i,j\in\alpha_{ij}} q_{ij}$ et α_{ij} sont les coupes minimales du système, elles sont données par :
$\alpha_{ij} = \big\{(i+x-1, j+y-1)\ tel\ que :\ x=1,...,r,\ y=1,...,s\big\}$,
$i=1,2,...,m-r+1,\ j=1,...,n-s+1$.
2. **Cas circulaire** :
$$L_4^c \leq R_c\Big((m,n),(r,s),[p_{ij}]\Big) \leq U_4^c$$
Tel que :
$$L_4^c = L_4\ , \qquad U_4^c = U_4$$
Et $j=1,...,n$ au lieu de $j=1,...,n-s+1$.

*Il est clair quand on prend $m=n$ et $r=s$ dans l'inégalité (3.10), on obtient (3.7).
*Dans le cas où les composants sont identiques distribués, on obtient les bornes suivantes :
$$L_4 = \exp(-\lambda) - \big(1-\exp(-\lambda)\big)Q = L_5 \tag{3.11}$$
$$U_4 = \exp(-\lambda) + \big(1-\exp(-\lambda)\big)Q = U_5 \tag{3.12}$$
Où : $Q = Q_2$ et $\lambda = (m-r+1)\,(n-s+1)\,q^{rs}$.

système réseau "(r,s)-ou-(s,r)-connectés-sur-(m,n) : F"

*En**1997-1999**, *Moukhlis* et *all* ont obtenu les bornes du système réseau "(r,s)-ou-(s,r)-connectés-sur-(m,n) : F" linéaire ou circulaire comme suivantes :

1. **Cas linéaire** :
$$L_6 \leq R\Big((m,n),(r,s)-ou-(s,r),[p_{ij}]\Big) \leq U_6$$
Tel que :
$$L_6 = \exp(-\lambda_2) - \big(1-\exp(-\lambda_2)\big)Q_2\ , \quad U_6 = \exp(-\lambda_2) + \big(1-\exp(-\lambda_2)\big)Q_2$$

Où :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \Big[(2r-1)(2s-1)+(r+s-1)\Big]q^{rs} \\ &+ 4\Big[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} q^{rs-ij} + \sum_{i=1}^{\min(r,s)}\sum_{j=1}^{\min(r,s)} q^{rs-ij} - 1\Big] \end{aligned}$$

$q = \max_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n} q_{ij}$ et $\lambda_2 = \lambda_1$.

2. **Cas circulaire** :

$$L_6^c \leq R_c\Big((m,n),(r,s)-ou-(s,r),[p_{ij}]\Big) \leq U_6^c$$

Tel que :

$$L_6^c = L_6\ , \qquad U_6^c = U_6$$

Applications numériques

Système "k-consécutifs-sur-n"

Programme pour calculer la formule exacte de la fiabilité

- **Cas linéaire** pour la formule (1.3)

```
function R = Relia( n,k,p )
q=1-p;
R=0;
for i=0 :1 :n
    t=n-(i*k);
        if t+1>i
            Y1=nchoosek(t+1,i);
            Y2=nchoosek(t,i);
            Y=(-1)^(i)*p^(i-1)*q^(i*k)*[Y1-(q*Y2)];
            R=R+Y;
        else
        end
end
R;
end
```

- **Cas circulaire**
  1. Pour la formule (1.5) :

```
function Rc = Reliac( n,k,p )
q=1-p;
I=0;
for j=0 :1 :k-1
    R=Relia(n-j-2,k,p);
    I=I+(j+1)*q^(j)*R;
end
```

```
I ; Rc=p^ (2)*I ;
end
```

2. Pour la formule (1.6) :

```
function Rc = Reliac1( n,k,p )
q=1-p ;
I=0 ;
for i=0 :1 :n
    if n-i*k>=i
        I1=nchoosek(n-i*k,i) ;
        I=I+(-p*q^ (k))^ (i)*I1 ;
    else
    end
end
I ;Y=0 ;
for i=0 :1 :n
    if n-i.*(i+1)-1>=i
        Y1=nchoosek(n-i*(i+1)-1,i) ;
        Y=Y+(-p*q^ (k))^ (i+1)*Y1 ;
    else
    end
end
Y ;
Rc=-q^ (n)+I+k*Y ;
end
```

Programme pour calculer les bornes

1. **Bornes de *Papastavridis* (l'inégalité (1.12))** :

```
function [l2,u2] = papas( n,k,p )
q=1-p ;
M=1-p*q^ (k) ;
b=(M^ (k)-q^ (k))/(M^ (k)-(k+1)*p*q^ (k)) ;
m=1-[(p*q^ (k))/(1-q^ (k))^ (k)] ;
e=(2*(k-1)*q^ (n+2))/(p*(k+k*q+q)) ;
a=(m^ (k)-q^ (k))/(m^ (k)-(k+1)*p*q^ (k)) ;
l2=sprintf('%.5f',b*m^ (n+1)-e)
```

```
u2=sprintf('%.5f',a*M^(n+1)+e)
end
```

2. **Bornes de *Chrysaphinou* et *Papastavridis* (l'inégalité (1.13))** :

```
function [ l3,u3 ] = cp( n,k,p )
q=1-p;
t=-((n-k+1)*q^(k));
e=(2*k-1)*q^(k)+2*q*(k-1);
l3=sprintf('%.5f',exp(t)-e)
u3=sprintf('%.5f',exp(t)+e)
end
```

3. **Bornes de *Barbour* et *Holst* et *Janson* (l'inégalité (1.14))** :

```
function [ l4,u4 ] = BHJ( n,k,p )
q=1-p;
t=-((n-k+1)*p*q^(k));
e=(2*k-1)*q^(k);
l4=sprintf('%.5f',exp(t)-e)
u4=sprintf('%.5f',exp(t)+e)
end
```

4. **Borne de *Muselli* (l'inégalité (1.15))** :

```
function [ l5,u5 ] = Musel( n,k,p )
q=1-p;
h=((1-(q^k))^(k))/p;
hl=(n-k)/h;
l5=sprintf('%.5f',(1-(q^k))^(hl+1))
t=(1-(q^k))/p;
hu=(n-k)/t;
u5=sprintf('%5f',(1-(q^k))^(hu+1))
end
```

Table 3.1 – Le système linéaire "k-consécutifs-sur-10 :F"

	$n=10,\ k=2,\ p=0.8$			$n=10,\ k=2,\ p=0.9$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.6925	0.7267	0.7462	0.9135	0.9197	0.9219
l_2 , u_2	0.7231		0.7461	0.9196		0.9215
l_3 , u_3	0.1777		1.2177	0.6839		1.1439
l_4 , u_4	0.6298		0.8698	0.8922		0.9522
l_5 , u_5	0.7230		0.7313	0.9195		0.9202

	$n=10,\ k=4,\ p=0.8$			$n=10,\ k=4,\ p=0.9$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.9889	0.9907	0.9911	0.9993	0.9994	0.9994
l_2 , u_2	0.9907		0.9908	0.9994		0.9994
l_3 , u_3	-0.2223		2.2001	0.3986		1.6000
l_4 , u_4	0.9799		1.0023	0.9987		1.0001
l_5 , u_5	0.9907		0.9907	0.9994		0.9994

Table 3.2 – Le système linéaire "k-consécutifs-sur-50 :F"

	$n=50,\ k=2,\ p=0.8$			$n=50,\ k=2,\ p=0.9$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.1353	0.1798	0.2032	0.6111	0.6363	0.6421
l_2 , u_2	0.1759		0.2031	0.6358		0.6418
l_3 , u_3	-0.3791		0.6609	0.3826		0.8426
l_4 , u_4	0.0885		0.3285	0.6134		0.6734
l_5 , u_5	0.1752		0.1876	0.6357		0.6385

	$n=50,\ k=4,\ p=0.8$			$n=50,\ k=4,\ p=0.9$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.9275	0.9410	0.9416	0.9953	0.9958	0.9958
l_2 , u_2	0.9409		0.9413	0.9958		0.9958
l_3 , u_3	-0.2836		2.1388	0.3946		1.5960
l_4 , u_4	0.9304		0.9528	0.9951		0.9965
l_5 , u_5	0.9409		0.9412	0.9958		0.9958

Table 3.3 – Le système linéaire "k-consécutifs-sur-100 :F"

	$n = 100,\ k = 4,\ p = 0.8$			$n = 100,\ k = 4,\ p = 0.9$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.8561	0.8823	0.8832	0.9903	0.9913	0.9913
l_2 , u_2	0.8822		0.8829	0.9913		0.9913
l_3 , u_3	-0.3550		2.0674	0.3896		1.5910
l_4 , u_4	0.8720		0.8944	0.9906		0.9920
l_5 , u_5	0.8822		0.8827	0.9913		0.9913

	$n = 100,\ k = 10,\ p = 0.8$			$n = 100,\ k = 10,\ p = 0.7$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9996	0.9996
l_2 , u_2	1.0000		1.0000	0.9996		0.9996
l_3 , u_3	-2.6000		4.6000	-4.4006		6.3996
l_4 , u_4	1.0000		1.0000	0.9995		0.9997
l_5 , u_5	1.0000		1.0000	0.9996		0.9996

Table 3.4 – Le système linéaire "10-consécutifs-sur-1000 :F"

	$n = 1000,\ k = 10,\ p = 0.7$			$n = 1000,\ k = 10,\ p = 0.8$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.9942	0.9959	0.9959	0.9999	0.9999	0.9999
l_2 , u_2	0.9959		0.9959	0.9999		0.9999
l_3 , u_3	-4.4059		6.3943	-2.6001		4.5999
l_4 , u_4	0.9958		0.9960	0.9999		0.9999
l_5 , u_5	0.9959		0.9959	0.9999		0.9999

	$n = 1000,\ k = 10,\ p = 0.5$			$n = 1000,\ k = 20,\ p = 0.5$		
Types des bornes	Borne inf	R	Borne sup	Borne inf	R	Borne sup
l_1 , u_1	0.3797	0.6146	0.6163	0.9991	0.9995	0.9995
l_2 , u_2	0.6131		0.6160	0.9995		0.9995
l_3 , u_3	-8.6386		9.3985	-18.0010		19.9991
l_4 , u_4	0.5978		0.6349	0.9995		0.9996
l_5 , u_5	0.6130		0.6156	0.9995		0.9995

Système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n"

Programme pour calculer la fiabilité

- Pour les formules (2.4), (2.5) et (2.6) avec $n-m=1$, $n-m=2$ et $n-m=3$ respectivements, et aussi la formule (2.1) :

```
function Rm = fiabm( n,m,k,p )
q=1-p;
if k>2
    if 0<n-m<=1
        Y1=nchoosek(m-1,k-1);
        Y2=Y1*p^(m-k+2)*q^(k-1);
        S=0;
            for j=0:1:k-2
                S1=nchoosek(m-1,j)*p^(m-1-j)*q^(j);
                S=S+S1;
            end
        Rm=Y2+S;
    end
    if 1<n-m<=2
        Y1=nchoosek(m-2,k-1);
        Y=Y1*p^(m-k+3)*q^(k-1);
        T1=nchoosek(m-2,k-2);
        T=p^(m-k+2)*q^(k-2)*(1+2*q)*T1;
        S=0;
            for j=0:1:k-3
                S1=nchoosek(m-2,j);
                 S=S+S1*p^(m-2-j)*q^(j);
            end
        Rm=Y+T+S;
    end
    if 2<n-m<=3
```

```
        Y=nchoosek(m-3,k-1)*p^(m-k+4)*q^(k-1);
        T1=p^(4)*(p*q+1+2*q)+q*p^(4)*(p+3*q);
        T=T1*nchoosek(m-3,k-2)*p^(m-k-1)*q^(k-2);
         A1=1-(4*q^(3))+(3*q^(4));
         A=nchoosek(m-3,k-3)*p^(m-k)*q^(k-3)*A1;
        B=0;
            for j=0:1:k-4
                B1=nchoosek(m-3,j);
                B=B+B1*p^(m-3-j)*q^(j);
            end
        B;
        Rm=Y+T+A+B;
    end
else
    Rm=0;
        for j=0:1:(n+m-1)/m
            N=nchoosek(n-(j-1)*(m-1),j);
            Rm=Rm+N*p^(n-j)*q^(j);
        end
    Rm;
end
end
```

Système réseau "x-connectés-sur-(m,n) :F"

1. **Pour les bornes de *Salvia* & *Lasher* (3.5)** :

```
function [ L1,U1 ] = salvia( n,k,p )
P=Relia(n,k,p);
L1=0;
    for i=0:1:k-1
        t=nchoosek(n,i);
        Y=t*(1-P).^(i)*P^(n-i);
        L1=L1+Y;
    end
L1=sprintf('%.7f',L1)
t=n/k;
```

Table 3.5 – Le système linéaire "k-parmi-m-consécutifs-sur-n :F"

n	m	k	p	R
5	2	2	0.25	0.0156
5	3	2	0.5	0.2813
5	3	3	0.5	0.7500
5	3	2	0.75	0.7119
5	3	3	0.75	0.9609
10	7	2	0.5	0.0166
10	7	2	0.75	0.2816
10	7	5	0.5	0.9698
10	7	5	0.75	0.9698
10	8	5	0.5	0.4683
15	10	2	0.6	0.0083
15	10	2	0.75	0.1025
15	12	8	0.25	0.0837
15	12	2	0.75	0.0891
20	10	2	0.75	0.0437
20	10	10	0.5	0.9941
20	12	2	0.25	0.0370
20	12	12	0.25	0.9050

```
U1=sprintf('%.7f',Relia(n*k,k^(2),p)^(t))
end
```

2. **Pour les bornes de *Koutras, et all* (3.8), (3.9)** :

```
function [ L3,U3 ] = Koutras( n,k,p )
q=1-p;
t=(n-k+1)^(2)*q^(k^(2));
A=0;
  for y=1 :1 :k
    for z=1 :1 :k
      T=q^(k^(2)-y*z);
      A=A+T;
    end
  end
Q=(2*k-1)^(2)*q^(k^(2))+4*(A-1);
L3=sprintf('%.7f',exp(-t)-(1-exp(-t))*Q)
```

```
U3=sprintf('%.7f',exp(-t)+(1-exp(-t))*Q)
end
```

3. **Pour les bornes de *Mokhlis et all* (3.11), (3.12)** :

```
function [ L5,U5 ] = Mok( m,n,r,s,p )
q=1-p;
t=(m-r+1)*(n-s+1)*q^(r*s);
A=0;
   for y=1:1:r
      for z=1:1:s
         T=q^(r*s-y*z);
          A=A+T;
      end
   end
M=(2*r-1)*(2*s-1)*q^(r*s)+4*(A-1);
L5=sprintf('%.7f',exp(-t)-(1-exp(-t))*M)
U5=sprintf('%.7f',exp(-t)+(1-exp(-t))*M)
end
```

4. **Pour les bornes de *Mokhlis* et *all* (3.6)** :

```
function [ l1,l2,u1,u2 ] = Mok2( m,n,r,s,p )
q=1-p;
P=Relia(n,s,p);
l1=0;
   for i=0:1:r-1
      t=nchoosek(m,i);
      Y=t*(1-P)^(i)*P^(m-i);
      l1=l1+Y;
      end
l1=sprintf('%.8f',l1)
z=Relia(m,r,p);
l2=0;
   for i=0:1:s-1
       t=nchoosek(n,i);
      Y=t*(1-z)^(i)*z^(n-i);
      l2=l2+Y;
```

```
    end
l2=sprintf('%.8f',l2)
    if l1>l2
u1=sprintf('%.8f',Relia(n,s,1-q^(r))^(m/r))
u2=sprintf('%.8f',Relia(m,r,1-q^(s))^(n/s))
end
```

TABLE 3.6 – Le système deux dimension "5-consécutifs-sur-8 :F" linéaire

p	L_1	L_3	U_3	U_1
0.25	0.8017713	0.9176823	1.0583807	0.9942868
0.5	0.9998668	0.9999993	0.9999997	0.9999996
0.6	1	1	1	1
0.7	1	1	1	1
Le système deux dimension "5-consécutifs-sur-10 :F" linéaire				
0.25	0.29675883	0.8161693	1.1303749	0.9891179
0.5	0.9998668	0.9999985	0.9999994	0.9999996
0.6	0.9999990	1	1	1
0.7	1	1	1	1

TABLE 3.7 – Le système réseau "(3,6)-connectés-sur-(8,6) :F" linéaire

p	L_5	R	U_5
0.25	0.71425145	0.9712644	1.21922745
0.5	0.99996008	0.9999774	0.99999414
0.6	0.99999946	0.9999996	0.99999972
0.7	1	1	1
Le système réseau "(2,7)-connectés-sur-(10,7) :F" linéaire			
0.25	-0.53737581	0.8638518	2.24104735
0.5	0.99864938	0.9994546	1.00025229
0.6	0.99995691	0.9999759	0.99999478
0.7	0.99999940	0.9999996	0.99999974

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les modèles "k-consécutifs-sur-n" concernant la formule de la fiabilité du système dans le cas linéaire ou circulaire avec les composants sont indépendants. Ainsi, nous avons présenté de quelques résultats sur le comportement asymptotique du temps de panne, et aussi l'importance en fiabilité et en structure des composants. De nombreux travaux scientifiques s'intéressent à étudier des ces systèmes et leurs généralisations dans la version unidimentionnelle, bidimensionnelle, et aussi tridimensionnelle dans tous les cas. Alors, les problèmes qui restent ouverts :

- Le cas réparable de tous les systèmes cités.
- Le cas des composants dépendants.
- La version bidimensionnelle et tridimensionnelle du système "r-consécutifs-k-sur-n".
- Le cas markovien des version bidimensionnelle et tridimensionnelle du système "r-consécutifs-k-sur-n".

Bibliographie

[1] Jean-Louis BON ***"Fiabilité des systèmes Méthodes mathématiques"***. MASSON ,(**1995**).

[2] Christaine.C, Thirent.S, ***"Processus stochastiques et fiabilité des systèmes"***,

[3] Mokhlis.N.A, ***"Consecutive k-out-of-n Systems"***, Handbook of Statistics, vol 20, (**2001**), pp 237-280.

[4] Chao, M.T ; Fu, J.C ; Koutras, M.V ; ***"Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F related systems"***, IEEE. Trans. Reliab., vol 44,(**1995**), pp 120-127.

[5] Hwang F. K, ***"Simplified Reliabilities for Consecutive-k-out-of-n systems"*** SIAM J Alg. Disc. Meth. vol.7,N° 2, april (**1986**). pp 258-264.

[6] Kuo.W, Zhang.W, Zuo.M, ***"A Consecutive-k-out-of-n :G System :The Mirror Image of a Consecutive-k-out-of-n :F System"***, IEEE Transaction On Reliability, vol.39, No.2, December(**1990**), pp 244-253.

[7] Chryssaphinou.O ; Papastavridis.S.G ; ***"Limit distribution for a consecutive-k-out-of-n :F system"***, Advances in Applied Probability, vol 22, (**1990**), pp 491-493.

[8] Papastavridis.S.G, ***"A Limit Theorem for the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n System"***,Advances in Applied Probability, vol.19, No.3, September(**1987**), pp 746-748.

[9] Hwang.F.K, ***"Relayed Consecutive-k-out-of-n :F Lines"***, IEEE Transaction On Reliability, vol.37, No.5, December(**1988**), pp 512-514.

[10] Fen-Hui Lin, Kuo.W, Hwang.F, ***"Structure importance of consecutive-k-out-of-n systems"***, Operations Research Letters,(**1999**), pp 101-107.

[11] Hwang.F, Cui.L, Chang.J.C, Wen-Dar Lin, *"**Comments on "Reliability and component importance of a consecutive-k-out-of-n system" by Zuo**,* Microelectronics Reliability 40 (**2000**), pp 1061-1063.

[12] Papastavridis.S.G, Koutras.M.V, *""**Bounds for Reliability of Consecutive k-within-m-out-of-n : F Systems**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol.42, No.1, December(**1993**), pp 156-160.

[13] Fu.J.C, *""**Bounds for Reliability of Large Consecutive-K-out-of-N :F Systems with Unequal Component Reliability**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol.R-35, No.3, Aout(**1986**), pp 316-319.

[14] Papastavridis.S.G, Chrysaphinou.O, *"**An Approximation for Large Consecutive-k-out-of-n :F Systems**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol.37, No.4, October(**1988**), pp 386-387.

[15] Chang.H.W, Chen.R.J, Hwang.F.K, *"**The Structural Birnbaum Importance of consecutive-k Systems**"*, Journal of Combinatorial Optimization, (**2002**), pp 183-197.

[16] Muselli.M, *"**Useful inequalities for the longest run distribution**"*, Statistics & Probability Leetters 46, (**2000**), pp 239-249.

[17] Muselli.M, *"**New improved bounds for reliability of Consecutive-k-out-of-n :F Systems**"*, J. Appl. Prob. 37, (**2000**), pp 1164-1170.

[18] Papastavridis.S.G, *"**Upper and Lower Bounds for the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n :F System**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol. R-35, No.5, December (**1986**), pp 607-610.

[19] Papastavridis.S.G, *"**The most important component in a consecutive-k-out-of-n :F system.**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol. R-36, (**1987**), pp 266-268.

[20] Kontoleon.J.M, *"**Reliability determination of a r-successive-out-ofn : F system.**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol. R-29, (**1980**), pp 437.

[21] Chiang.D.T, Niu.S.C, *"**Reliability of a consecutive-k-out-of-n :F system**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol. R-30, (**1981**), pp 87-89.

[22] Jun Cai, *"**Reliability of a large Consecutiv-k-out-of-r-from-n :F system with Unequal Component-Reliability**"*, IEEE Transaction On Reliability, vol.43, No.1, March (**1994**), pp 107-111.

[23] Sfakianakis.M, Kounias.S, Hillaris.A, "***Reliability of a Consecutive k-out-of-r-from-n :F system***", IEEE Transaction On Reliability, vol.41, No.3, September(**1992**), pp 442-447.

[24] Papastavridis.S.G, "***A Weibull limit for the reliability of a Consecutive k-within-m-out-of-n system***", Adf. Appl. Probab.vol.20, r(**1988**), pp 960-962.

[25] Papastavridis.S.G, Sfakianakis.M.E, "***Optimal-Arrangement & Importance of the Components in a Consecutive k-out-of-r-from-n :F system***", IEEE Transaction On Reliability, vol.40, No.3, August (**1991**), pp 277-279.

[26] Makri.F.S, Psillakis.Z.M, "***Reliability Evaluation of a Consecutive k-out-of-r-from-n :F system a simulation approach***", pp 137-139.

[27] Ghoraf.N, Ksir.B, "***A Weibull limit law for the failure time of Consecutive k-out-of-r-from-n :F system***", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, vol.13, No.5, (**2006**), pp 421-431.

[28] Salvia.A.A, Lasher.W.C, "***2-Dimensional Consecutive-k-out-of-n :F Models***", IEEE Transaction On Reliability, vol.39, No.3, August (**1990**), pp 382-385.

[29] Boehme.T.K, Kossow.A, Preuss.W, "***A Generalization of Consecutive-k-out-of-n :F system***", IEEE Transaction On Reliability, vol.41, No.3, September(**1992**), pp 451-457.

[30] Zuo.M.J, "***Reliability & Design of 2-Dimensional Consecutive-k-out-of-n Systems***", IEEE Transaction On Reliability, vol.42, No.3, September (**1993**), pp488-490.

[31] Preuse.W, "***ON THE RELIABILITY OF GENERALIZED CONSECUTIVE SYSTEMS***" ,Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol.30, No.8, (**1997**), pp 5425-5429.

[32] Koutras.M.V, Papadopoulos.G.K, Papastavridis.S.G, "***Reliability of 2-Dimensional Consecutive-k-out-of-n :F System***", IEEE Transaction On Reliability, vol.42, No.4, December (**1993**), pp658-661.

[33] Ghoraf.N, Ksir.B, "***A Weibull limit law for the failure time of Consecutive k-out-of-m-from-n :F system with unequal components reliability***", 1999 Proceedings, 5th ISSAT International conference on Reliability and

Quality in Design, Las Vegas, Nevada, USA, August 11-13, (**1999**), pp 371-374.

[34] Ghoraf.N, Boushaba.M, Ksir.B, *"**Etudes des modèles k-Consécutifs-sur-n**"*, Rencontre 2000 des Mathématiciens Algériens, Institut Superieur de Gestion et de Planification (I.S.G.P) Bordj El-Kifan, Algérie. 21-24 Mai (**2000**).

[35] Ghoraf.N, Ksir.B, *"**Reliability formula & Optimal assignment of "r-consecutive-k-out-of-n : systems" for** $n \leq (r+1)k$"*, Far East Journal of Theoretical statistics, Vol.21, Issue 1, January (**2007**), pp 83-96.

Résumé

Dans ce travail, nous avons opté pour étudier le système "k-consécutifs-sur-n :F ou G" et quelques uns de ses résultats. Notre objectifs est d'analyser deux généralisations du système considéré. Dans la première généralisation, nous avons étudié les systèmes "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" et leur résultats concernant *les formules particulières de la fiabilité*, *des bornes de la fiabilité*, et aussi *les théorèmes limites du temps de panne* du système. Dans ce cas, si $m = k$ alors on obtient le système étudié dans le premier chapitre. Et la deuxième généralisation est le système réseau "X-connectés-sur-(m,n)". Nous avons examiné les formules exactes de la fiabilité dans le cas particulier, et les bornes de la fiabilité dans le cas général. Si $X = (1, k)$ et $(m, n) = (1, n)$ alors on obtient le système "k-consécutifs-sur-n". Finalement, comme conclusion, nous avons calculé les valeurs ou les bornes de la fiabilité en utilisant le programme MATLAB et nous avons cité quelques problèmes ouverts.

Mots clés
système "k-consécutifs-sur-n". système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n". système "X-connectés-sur-(m,n)". Formules de la fiabilité. Bornes de la fiabilité. Théorème limite. Importance en fiabilité et de ctructure.

Abstract

In this work, we opted to study the "Consecutive-k-out-of-n :F or G" system and some result. To which one of our main objectives is to analyse and deduce from two case generalizations of a conditioned effect on the "Consecutive-k-out-of-n" system. At first, we have analysed "Consecutive k-within-m-out-of-n" system. Where we have covered that the *special formulas of reliability* and *bounds of reliability* and theorem limit of the failure time of the system. In this case study, if $m = k$ then we will arrive to the system we have studied in the first chapter. And the second case generalization was "Connected-X-out-of-(m,n)" lattice system. In which we have examined the exact formulas of reliability in the case special, and bounds of the reliability. If $X = (1, k)$ et $(m, n) = (1, n)$ then we will obtain the "Consecutive-k-out-of-n" system.
As a conclusion we calculated value of the reliability or the bounds by using MATLAB programme and we quote some overt problems.

Keywords
"Consecutive-k-out-of-n" system. "Consecutive k-within-m-out-of-n" system. "Connected-X-out-of-(m,n)" system. Formulas of the reliability. Bounds of reliability. Théorème limite. Reliability importance and Structure importance.