



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Larbi Ben M'hidi Oum-EL-Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la vie et de la nature
Laboratoire des Systèmes Dynamiques et Contrôle
Département de Mathématiques et Informatique

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN 3^{ème} CYCLE

Spécialité : Mathématique
Option : Mathématique Appliquée

Présentée par

Aouaouda Meryem
Intitulée

**Modèle Mathématique du cyclone tropical basé sur
les trajectoires du vent**

Soutenue le : 07/07/2021

Devant le Jury composé de :

Mr. REZZOUG Imad	MCA	Univ. Oum El Bouaghi	Président
Mr. AYADI Abdelhamid	Prof.	Univ. Oum El Bouaghi	Rapporteur
Mr. Fujita Yashima Hisao	Prof.	E.N.S. de Constantine	Co-Rapporteur
Mr. BESSILA Khaled	MCA	Univ. Constantine	Examineur
Mme. BERHAIL Amel	MCA	Univ. Guelma	Examineur
Mr. OUSSAEIF Taki eddine	MCA	Univ. Oum El Bouaghi	Examineur

Année Universitaire 2020/2021.

Modèle mathématique du cyclone tropical basé sur les trajectoires du vent

Aouaouda Meryem

Thèse de Doctorat en mathématiques

Université d'oum El bouaghi

15 juillet 2021

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Pour leur patience, leur amour, leur soutien

Toute ma famille,

Tous mes amis ...



Remerciements

PAR ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse.

Au début, je tiens à remercier spécialement mon co-directeur de thèse le professeur **Hisao FUJITA YASHIMA** pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant d'encadrer ce travail. Je le remercie également pour le temps et la patience qu'il m'a accordés tout au long de ces années.

Mes remerciements à mon directeur de thèse le professeur **Ayadi Abdelhamid** à l'université de Oum El Bouaghi, d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour ses encouragements, ses conseils tout le long ce travail.

Mes remerciements vont également à professeur **Oscar. Dìaz Rodrìguez** de l'institut de météorologie, Habana (Cuba) pour ses remarques et ses discussions très utiles pour notre travail de recherche.

A Dr. Remaoun Bourega de l'Université des sciences et technologies, Oran (Algérie) pour son aide à afficher les résultats des calculs numériques dans le centre de calcul.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux membres du jury : Mr. **REZZOUG Imad** le président, Mr. **BESSILAKhaled**, Mr. **OUSSAEIF Taki eddine** et Mme. **BERHAIL Amel** les examinateurs, qui ont accepté d'évaluer cette thèse à sa juste valeur, et de me faire part de leurs remarques pertinentes et objectives qui paieraient contribuer à l'enrichissement de cette recherche.

Un grand merci à tous mes proches amis et collègues qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de cette thèse.



Table des matières

ملخص	4
Résumé	5
Abstract	6
1 Introduction	7
1.1 Introduction générale	7
1.2 Phénomènes de cyclones tropicaux	9
2 Présentation des équations du mouvement de l'air	14
2.1 Equations fondamentales du mouvement de l'air	14
2.2 Equations du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau . . .	16
2.3 Equations de la microphysique	16
2.4 Quantité de condensation	18
2.5 Etat hydrostatique de l'air sec	19
2.6 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau	22
3 Modèle d'un cyclone tropical	24
3.1 Introduction au modèle	24
3.2 Principes de la modélisation et transformation des équations	26
3.3 Système d'équations d'un cyclone tropical	27
4 Modèle numérique du cyclone tropical basé sur les trajectoire du vent	30
4.1 Système d'équations sur les trajectoires	30
4.2 Choix des trajectoires	33

4.3	Ulérieures conditions et définitions pour le calcul numérique	37
4.4	Exemple de simulation numérique	40
4.5	Résultat de calcul numérique	44
5	Modèle de l'évaporation et de la diffusion de la vapeur d'eau	56
5.1	Introduction	56
5.2	Définition des solutions approchées et résultat principal	58
5.3	Preliminaires	61
5.4	Bornitude uniforme des solutions approchées et de leurs dérivées	64
5.5	Convergence des solutions approchées	77
5.6	Passage à la limite	83
5.7	Modèle numérique de l'évaporation et de la diffusion de la vapeur d'eau .	88
5.8	Résultats numériques	89
	Conclusion et perspectives	91
	Bibliographie	94
	Activités de recherches	98

المخلص

في هذه الأطروحة، نحن بصدد تقديم نمذجة رياضية لظاهرة الإعصار الاستوائي. تطرقنا في البداية إلى التذكير بألية واهم العوامل المتدخلة في تشكيله والتي تتمثل في الحرارة الكامنة لتكثيف بخار الماء و الية حركة الهواء، و استنادا لذلك اقترحنا نموذجا يتكون من جملة معادلات على مسارات الرياح. حيث يتم اختيار هذه المسارات في مجال اسطواني مع خاصية التناظر المحوري، بينما في معادلات الحركة نعتبر الهواء غازًا بدون لزوجة وبدون توصيل حراري . يوضح الحل العددي لهذه المعادلات زيادة سرعة الرياح تزامنا مع تكثيف بخار الماء وتسخين الهواء بالحرارة الكامنة؛ ثم بعد ذلك تصبح السرعة ثابتة توافقا مع تراكم الماء السائل في الهواء، ويؤدي الاحتكاك مع الهواء إلى إبطاء حركة الهواء الصاعد. بالإضافة إلى ذلك، باعتبار عملية تبخر بخار الماء من سطح البحر وانتشاره في الهواء أمر ضروري لظاهرة الأعاصير الاستوائية، قمنا بدراسة معادلة انتشار النقل في نصف المستوى مع شرط ديريتشليت الغير متجانس، تم إجراء هذه الدراسة من خلال بناء سلسلة من الحلول التقريبية ثم بعد ذلك دعمنا عملنا بنموذج عددي لنمذجة تبخر البخار من سطح الماء وانتشاره ونقل بخار الماء في الهواء.

الكلمات المفتاحية: إعصار استوائي، معادلة حركة الهواء، تكثيف بخار الماء، الحرارة الكامنة، الفروق المنتهية، معادلة نقل الانتشار، التبخر.

Résumé

DANS la présente thèse on s'intéresse à la modélisation mathématique d'un cyclone tropical. En rappelant le mécanisme de sa formation, dont les facteurs principaux sont la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau et la mécanique du mouvement de l'air, on propose un modèle consistant en un système d'équations sur les trajectoires du vent. Les trajectoires sont choisies dans un domaine cylindrique avec la symétrie axiale, tandis que dans les équations du mouvement on considère l'air comme un gaz sans viscosité et sans conductivité thermique. Le résultat du calcul numérique montre la croissance de la vitesse du vent en correspondance à la condensation de la vapeur d'eau et au réchauffement de l'air par la chaleur latente et la stabilisation de la vitesse en correspondance à l'accumulation de l'eau liquide dans l'air, dont la friction avec l'air amortit l'ascension de l'air.

En outre, pour contribuer à l'éclaircissement du processus d'évaporation de la vapeur d'eau à partir de la surface de la mer et sa diffusion dans l'air, qui sont essentiels pour le phénomène de cyclone tropical, on étudie l'équation de transport-diffusion dans le demi-plan avec la condition de Dirichlet non homogène. Cette étude se fait par la construction d'une famille de solutions approchées et on construit des modèles numériques modélisant l'évaporation de la vapeur à partir de la surface d'eau et la diffusion et le transport de la vapeur d'eau dans l'air.

Mots-Clés : Cyclone tropical, équation de mouvement de l'air, trajectoires du vent, condensation de la vapeur d'eau, chaleur latente, méthode de différences finies, équation de transport-diffusion, évaporation.

Abstract

IN this thesis we are interested in the mathematical modeling of a tropical cyclone. By recalling the mechanism of its formation, the main factors of which are the latent heat of the condensation of water vapor and the mechanics of air movement, we propose a model consisting of a system of equations on the trajectories of the wind. The trajectories are chosen in a cylindrical domain with axial symmetry, while in the equations of motion we consider air as a gas without viscosity and without thermal conductivity. The result of the numerical calculation shows the increase of the wind velocity in accordance with the steam condensation and air warming; later, the velocity becomes stable as the liquid or small pieces of ice accumulate in the air and the friction of water against air decelerates the air updraft.

In addition, to contribute clarifying the process of water vapor evaporation from the sea surface and its diffusion in the air, which are essential for the tropical cyclone phenomenon, we study the equation of transport diffusion in the half-plane with the non-homogeneous Dirichlet condition. This study is done by the construction of a family of approximate solutions and we construct numerical models modeling the evaporation of vapor from the water surface and the diffusion and transport of water vapor in the water air.

Key-words : tropical cyclone, equations of motion of the air, wind trajectories, condensation of water vapor, latent heat, finite difference method, transport-diffusion equation, evaporation.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction générale

LES cyclones tropicaux, aussi appelés ouragans et typhons, figurent parmi les catastrophes naturelles les plus dévastatrices au monde, causant chaque année des milliers de victimes et des dégâts matériels pouvant dépasser le milliard d'euros. Ils s'accompagnent généralement de vents très forts, de précipitations abondantes, de fortes houles et d'une onde de tempête (une élévation du niveau de la mer), et représentent un réel danger pour les populations côtières et leurs biens ; ils se trouvent aux États-Unis, à Madagascar, au Japon, en Australie, en Indonésie ou dans les petites îles tropicales, là où les conditions environnementales sont propices. Les phénomènes météorologiques, en particulier ceux qui sont accompagnés par le vent et la précipitation violents, sont des sources des soucis pour toute l'humanité. Pour cette raison ces phénomènes sont étudiés dans tous les pays du monde et depuis des décennies une partie assez importante des ressources pour les calculs numériques est consacrée à l'analyse des phénomènes météorologiques.

Comme nous le voyons régulièrement, le vent violent et la précipitation abondante se produisent souvent dans les cyclones. Parmi les cyclones, ceux qui sont classifiés généralement sous la dénomination de cyclones tropicaux (ils peuvent être appelés typhons ou ouragans selon l'habitude régionale) ont une structure assez autonome bien déterminée, ce qui nous permet de proposer des modèles mathématiques d'un cyclone tropical à partir des principes de la mécanique des fluides et de la thermody-

namique.

L'objectif de cette thèse est la construction d'un modèle mathématique de ce phénomène météorologique : cyclone tropical. Les modèles mathématiques de ce type utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires, dont en général on ne connaît pas de solutions analytiques. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul. Pour développer ultérieurement la modélisation de ces phénomènes naturels, nous étudions aussi l'équation de transport-diffusion qui peut modéliser le processus d'évaporation de la vapeur d'eau et sa diffusion dans l'air.

Plan de la thèse

Cette thèse contient cinq chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons le système d'équations qui décrivent le mouvement de l'air et l'éventuel processus de condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air et ses conséquences. Pour les équations qui décrivent la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère nous suivons le modèle proposé dans [18].

Dans le troisième chapitre, nous allons illustrer notre modèle mathématique d'un cyclone tropical. Pour ce faire, en partant des équations fondamentales de la mécanique des fluides et en y négligeant la viscosité et la conductivité thermique, nous considérons le système d'équations dans un domaine cylindrique avec la symétrie axiale et y imposons les conditions qui résultent de la condensation de la vapeur d'eau.

Ensuite, dans le quatrième chapitre il y a deux parties : partie théorique et partie numérique.

Dans la partie théorique nous transformons les équations aux dérivées partielles de premier ordre en une famille d'équations sur les trajectoires sur le plan (r, z) (des coordonnées cylindriques (r, ϑ, z)). Pour réaliser le calcul numérique, nous considérons le problème approché de ce système d'équations, problème formulé par la séparation entre l'évolution temporelle et la structure spatiale pour v_γ, ρ, T .

Dans la partie numérique, on présente la solution numérique du système d'équations par la méthode de différences finies qui a été réalisée sur huit trajectoires. Le

résultat du calcul réalisé dans ce travail montre d'une manière assez claire l'aspect de l'évolution d'un cyclone tropical due à la condensation de la vapeur d'eau qui provoque l'ascension de l'air et de sa stabilisation par la friction des gouttelettes avec l'air.

Enfin dans le dernier chapitre il y a deux parties.

Dans la première partie, nous construisons une famille de solutions approchées de l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace avec une condition aux limites et démontrons la convergence de ces solutions approchées vers la solution de l'équation de transport-diffusion. Ces solutions approchées sont construites par une moyenne locale des valeurs de la fonction à l'instant précédent dans l'échelle du temps discrétisé.

Dans la seconde partie, utilisant la structure de ces solutions approchées, nous proposons des modèles numériques de l'évaporation de la vapeur d'eau et de son transport et diffusion et montrons le résultat du calcul numérique.

1.2 Phénomènes de cyclones tropicaux

Autour du nom *cyclone*

Le terme *cyclone* appliqué aujourd'hui aux cyclones tropicaux, aurait été forgé par le capitaine de marine anglais Henry Piddington (1797-1858) à la suite de ses études sur ces terribles phénomènes dans l'Océan Indien. En 1848, dans son livre "The Sailor's Horn-book for the Law of Storms", ce pionnier de la météorologie compara le phénomène météorologique à un serpent s'enroulant en cercle, «kyklos» en grec, d'où ce terme de *cyclone*. Dans le Nord-Ouest du Pacifique et la Mer de Chine méridionale, on lui préfère le nom *typhon* (*typhoon* en anglais), dans l'Atlantique du Nord, le golfe du Mexique et le Nord-Est du Pacifique, on lui donne plutôt le nom *ouragan* (*hurricane* en anglais).

Description des cyclones tropicaux

La gigantesque machine thermique que constitue le cyclone tropical est, à l'évidence, d'une très grande complexité et la compréhension de ses mécanismes n'est pas facile. Les nombreuses questions non élucidées et les incertitudes qui demeurent résultent avant tout du manque d'observations suffisamment précises à l'intérieur des

cyclones tropicaux et, de manière plus générale, de la grave carence de données d'observation dans les régions océaniques sur lesquelles les cyclones tropicaux se développent et évoluent. Dans ces circonstances, il est généralement difficile de valider les hypothèses proposées, d'autant plus que la variabilité est très importante d'un cyclone tropical à un autre ainsi que pendant les différents stades d'évolution du cyclone tropical (variabilité, en particulier, du poids respectif des différents processus impliqués).

Un cyclone tropical est une perturbation atmosphérique tourbillonnaire se caractérisant par une énorme masse nuageuse d'un diamètre moyen de 500 km, mais pouvant dépasser exceptionnellement 1 000 km. Il naît au-dessus des eaux chaudes tropicales uniquement si des conditions thermiques, géographiques et météorologiques bien définies sont réunies. L'activité nuageuse associée au cyclone est organisée en bandes spiralées qui convergent vers un anneau central où les pluies sont torrentielles et les vents d'une violence extrême. Cet anneau, matérialisé par une muraille nuageuse de 14 à 18 km de hauteur, constitue ce que l'on appelle le mur de l'œil du cyclone. Il délimite une zone centrale « d'accalmie » correspondant à l'œil du cyclone, d'un diamètre très variable, de l'ordre de 40 km en moyenne, et où les vents sont faibles et le ciel peu nuageux.

Le mécanisme fondamental du cyclone tropical est le réchauffement de l'air par la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau effectuée dans la formation des nuages. En effet, même si les données d'observation directe ne sont pas disponibles, de ce qu'on peut observer les chercheurs déduisent qu'à l'intérieur du cyclone tropical il y a un écoulement ascendant important de l'air humide, qui, par la diminution de la température par l'altitude, provoque la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air ; la condensation de la vapeur d'eau est accompagnée par la chaleur latente, qui réchauffe l'air ; l'air réchauffé a un volume plus grand, c'est-à-dire il est plus léger, ce qui pousse l'air vers le haut, donc provoque encore le mouvement ascendant de l'air ; ce processus produit également une quantité énorme de gouttelettes d'eau (ou de petits morceaux de glace), qui forment les nuages et causent des précipitations.

L'autre aspect important du cyclone tropical est le vent circulaire, c'est-à-dire mouvement circulaire de l'air autour du centre du cyclone, où on trouve souvent l'œil du

cyclone. On peut affirmer que ce mouvement est dû à la force de Coriolis. En effet, on observe que tous les cyclones tropicaux dans l'hémisphère Sud ont le vent circulaire dans le sens des aiguilles d'une montre et tous les cyclones tropicaux dans l'hémisphère Nord ont le vent circulaire dans le sens contraire.

Pour plus d'aspects caractéristiques des cyclones tropicaux, voir par exemple [4], [2].

Un cyclone vu par satellite :

Les cyclones tropicaux présentent trois parties distinctes bien visibles (figure (1.1)) :

- l'œil représente le centre du cyclone tropical et correspond à une zone calme au milieu de la tempête ;
- le mur de l'œil, situé à quelques dizaines de km du centre, est constitué d'une ceinture de cumulonimbus qui peut s'étendre sur un rayon de 10 à 50 km de large ;
- enfin, d'autres bandes convectives convergent en s'enroulant de l'extérieur vers le mur de l'œil, ce sont les bandes spirales.



FIGURE 1.1 – Image d'un cyclone capturer par un satellite

En ce qui concerne la modélisation mathématique, en particulier numérique, du cyclone tropical, nous citons d'abord le travail d'Ooyama [29] (1969), qui a proposé le premier modèle numérique axisymétrique d'un cyclone tropical ; le modèle d'Ooyama permettait de simuler de manière pratique le cycle de vie typique des cyclones tropicaux en deux dimensions (radiale et verticale), tout en estimant correctement les taux de précipitations, la production et dissipation de l'énergie cinétique, et les autres caractéristiques énergétiques. D'autre part, Anthes, sur la base de ses études [1], a proposé un modèle d'ouragans en trois dimensions mais limité à trois niveaux verticaux (afin de limiter les temps de calcul). Les travaux [12], [13] d'Emanuel sur les interactions air-mer pour les cyclones tropicaux ont influencé considérablement la recherche de la modélisation des cyclones tropicaux. Le modèle proposé par Holland [20] a été adopté par plusieurs chercheurs, tandis que l'analyse de Camp-Montgomery [7] a été utilisée par beaucoup de chercheurs. Dans [8] l'auteur a étudié le développement du phénomène d'un cyclone tropical dans la phase initiale dans sa structure mécanique et thermodynamique, il a construit un modèle qui décrit ce dernier et ils ont trouvé la solution analytique pour le modèle proposé. Toutefois pour la construction de la solution ils ont utilisé des hypothèses qui ne sont pas compatibles avec le comportement observé par les physiciens et les météorologues par exemple ils ont proposé une solution qui croît infiniment et la corrige en coupant artificiellement. Dans [27] on peut trouver des présentations de recherches plus récentes. Nous citons également d'autres tentatives de modélisation d'un cyclone tropical [22], [28], [32], [36], [14], [16] et d'autres.

En ce qui concerne l'écoulement ascendant de l'air provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur de l'eau, beaucoup d'auteurs parlent de ce processus qualitativement, mais sa modélisation mathématique quantitative ne se trouve pas facilement. Dans [18] les auteurs ont proposé un modèle numérique et calculé la densité, la température et la vitesse de l'air à l'intérieur d'une "cheminée", cylindre vertical à section constante de 12 km . Dans leur travail, où la section est constante, la solution numérique obtenue avec l'approximation par la séparation de l'évolution temporelle et la structure spatiale montre une croissance initiale très rapide suivie par la stabili-

sation. Nous rappelons aussi que dans [5] on a étudié le cas où la section du cylindre vertical est croissante, éliminant l'effet non naturel de la section constante, et on a trouvé un phénomène très intéressant d'oscillation de la pluie.

Dans la présente thèse on s'intéresse à la construction d'un modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un cyclone tropical. Nous proposons une modélisation qui se base sur la description du processus de "condensation - réchauffement de l'air - écoulement ascendant de l'air" et pour ce faire nous allons construire une famille d'équations sur les trajectoires du vent, en tenant compte de ce processus provoquant l'écoulement ascendant de l'air; nous allons tenir compte aussi l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air. Pour calculer la solution numérique du système d'équations proposé, nous utilisons la méthode de différences finies et le domaine pour le calcul est composé de trois parties : la partie inférieure où l'air se déplace parallèlement vers le centre, la partie ascendante et la partie supérieure où l'air se déplace parallèlement vers l'extérieur. Le résultat du calculs numériques montre que la solution numérique obtenue représente bien l'évolution d'un cyclone tropical due à la condensation de la vapeur d'eau qui provoque l'ascension de l'air et sa stabilisation par la friction des gouttelettes avec l'air.

On rappelle que dans la réalité dans la partie inférieure du cyclone tropical il y a une diffusion de la vapeur d'eau qui vient de l'évaporation de l'eau à partir de la surface de la mer et il n'est pas facile de modéliser ce processus d'une manière cohérente. Pour contribuer à la modélisation de ce phénomène, nous étudions l'équation de transport-diffusion avec une condition aux limites (condition de Dirichlet non homogène). Nous allons construire une famille de solutions approchées et démontrer leur convergence vers la solution de l'équation. Ensuite nous allons construire des modèles numériques du processus d'évaporation de la vapeur d'eau et de sa diffusion et son transport dans l'air.

Chapitre 2

Présentation des équations du mouvement de l'air

DANS ce chapitre nous rappelons les équations aux dérivées partielles qui modélise de manière suffisamment détaillée le mouvement de l'atmosphère et l'éventuel processus de condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air et ses conséquences.

Dans notre étude en général, nous considérons l'air comme gaz visqueux et calorifère et pour les équations fondamentales de son mouvement nous suivons essentiellement la formulation de [24]. D'autre part, pour les équations qui décrivent la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère nous avons suivi des modèles développés dans une série de travaux [6], [25], [23], qui à leur tour se sont basés sur les descriptions des phénomènes physiques données dans [25], [31].

2.1 Equations fondamentales du mouvement de l'air

Comme les cyclones tropicaux sont des phénomènes qui se produisent dans l'atmosphère et cette dernière n'est autre que la masse d'air, qui est un gaz, donc un fluide compressible, nous allons utiliser les équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'un gaz. Nous rappelons donc avant tout les équations fondamentales du mouvement d'un gaz suivant la description classique (voir [24]).

Désignons par $\rho = \rho(t, x)$ la densité du gaz en considération, par $v = v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$ la vitesse, par $p = p(t, x)$ la pression et par $T = T(t, x)$ la

température. La loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement s'expriment par les équations

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \partial_t v_j + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \\ = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi + F_j, \\ j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

tandis que le bilan d'énergie, exprimé en fonction de la température, sera décrit par l'équation

$$\begin{aligned} \rho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p \nabla \cdot v = \\ = \nabla \cdot \kappa \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où η et ζ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique du gaz, Φ est le potentiel de la force extérieure, F_j est la j -ième composante d'une éventuelle force, E est la source de chaleur, c_v est la chaleur spécifique de l'air, κ est la conductivité thermique du gaz.

En ce qui concerne la pression p , elle est en général une fonction de la densité ρ et de la température T . Mais pour les gaz dans un état ordinaire, comme l'air de notre atmosphère, la loi qui détermine la pression p est assez proche de l'équation de la pression pour le gaz idéal, qui est

$$p = R_0 \frac{\rho}{\mu} T, \quad (2.4)$$

où R_0 est la constante universelle des gaz ($R_0 \approx 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/mole} \cdot K$) et μ est la masse molaire du gaz (pour les détails, voir [23]).

La rotation de la Terre cause, dans le système de coordonnées qui tourne avec la Terre, non seulement la force centrifuge mais aussi la force de Coriolis (pour la définition de la force de Coriolis, voir [24]). Si on tient compte de la force de Coriolis, l'équation de quantité de mouvement aura la forme

$$(2.2)\text{bis} \quad \rho \partial_t v_j + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p =$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) - 2\rho\omega \times v - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi + F_j,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

où ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre ; dans (2.2)bis la force de Coriolis est exprimée par le terme $-2\rho\omega \times v$.

2.2 Equations du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau

Pour modéliser les cyclones tropicaux, nous allons utiliser les équations dans lesquelles on néglige l'effet de la viscosité et de la conductivité thermique. En outre nous allons utiliser toujours l'approximation de la pression (2.4). Pour cela nous rappelons ici le système d'équations du mouvement de l'air sans viscosité et sans conductivité thermique, système d'équations obtenu, en posant $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\kappa = 0$ et $p = R_1 \rho T$ dans les équations (2.2)bis et (2.3) ; il s'agit du système d'équations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = -R_1 \nabla \rho T - \rho \nabla \Phi - 2\rho\omega \times v + F, \quad (2.6)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) = -R_1 \rho T \nabla \cdot v + E, \quad (2.7)$$

où

$$R_1 = \frac{R_0}{\mu} \quad (2.8)$$

tandis que $F = (F_1, F_2, F_3)$.

2.3 Equations de la microphysique

Comme on le connaît bien, la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère, en faisant naître des nuages et en provoquant de la pluie et de la neige, joue le rôle très important dans l'étude des phénomènes météorologiques, comme dans les cyclones tropicaux. Il nous faut donc rappeler les équations qui décrivent ces phénomènes ; l'ensemble de ces descriptions est souvent dit *microphysique*.

Dans la dynamique de l'air impliquant la transition de phase de l'eau, la pression de la vapeur saturée et la chaleur latente de H_2O jouent le rôle essentiel. Leurs valeurs dans les conditions normales de l'atmosphère sont expérimentalement bien établies comme fonction de température (voir par exemple [25], voir aussi [31]), la pression de la vapeur saturée relative à l'état liquide a approximativement les valeurs

$$\bar{p}_{vs}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar), \quad (2.9)$$

Il nous est commode de définir, à l'aide de l'expression générale de la pression, la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide $\bar{\pi}_{vs}(T)$ par

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_h \bar{p}_{vs}(T)}{RT}, \quad (2.10)$$

où R et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de H_2O .

La pression ainsi que la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau solidifiée ont des valeurs différentes de celles de la pression et de la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide (pour les détails, voir [25], [31]).

D'autre part, ces processus de transition s'accompagnent d'un dégagement ou d'une absorption de l'énergie ; ce phénomène est connu sous le nom de chaleur latente, qui constitue un facteur important dans les phénomènes météorologiques.

Comme il est bien connu, pour que l'évaporation du liquide s'effectue sans variation de sa température, il faut lui apporter de la chaleur ; au contraire, si la chaleur n'est pas fournie de l'extérieur, l'évaporation du liquide doit s'accompagner de son refroidissement. La quantité de chaleur qu'il est nécessaire de fournir pour l'évaporation d'une certaine quantité de liquide, sans variation de sa température, à la pression extérieure de la vapeur égale à la pression de la vapeur saturée, est appelée chaleur latente (d'évaporation). Si la chaleur latente est absorbée par le processus d'évaporation, la même quantité de chaleur doit être donnée par le processus de condensation à son environnement.

Nous désignons par L_{gl} , L_{ls} , L_{gs} , respectivement la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, liquide-solide, gaz-solide. Les valeurs expérimentalement établies de la chaleur latente d'évaporation de H_2O dans les conditions normales de l'at-

mosphère, sont données approximativement en fonction de T . Les valeurs approximatives de la chaleur latente de la transition de l'état gazeux à l'état liquide L_{gl} sont données par

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T)10^3 \quad (J/kg). \quad (2.11)$$

Comme il est logique, entre L_{gl} , L_{ls} , L_{gs} on a la relation

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}$$

(pour les détails, voir [23],[25]).

2.4 Quantité de condensation

Pour modéliser le cyclone tropical, il est important de déterminer la quantité de la vapeur d'eau qui se transforme en liquide ou en solide. Or, comme la valeur de L_{gs} ne diffère pas beaucoup (c'est-à-dire le rapport $\frac{L_{gs} - L_{gl}}{L_{gl}} = \frac{L_{ls}}{L_{gl}}$ est relativement petit), tandis que le processus de la solidification de l'eau est assez complexe, dans notre modélisation nous allons utiliser l'approximation par laquelle on ne distingue pas le processus de condensation et celui de sublimation inverse (ou condensation + congélation). Pour cela, ici nous présentons l'équation déterminant la quantité de transition de phase de l'eau dans l'atmosphère utilisée dans le travail [18].

Désignons donc par H_{tr} la quantité de la vapeur d'eau qui se transforme en liquide ou en solide. Notons la hauteur z , c'est-à-dire $z = x_3$. Alors, dans l'écoulement ascendant de l'air avec vapeur d'eau saturée, H_{tr} sera déterminé par

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_3, \quad (2.12)$$

ici ρ désigne le densité totale, c'est-à-dire la somme de la densité de l'air sec et celle de la vapeur d'eau, tandis que v_3 désigne (comme d'habitude) la composante verticale de la vitesse de l'air.

Rappelons la justification de la formule (2.12) donnée dans [18].

En effet, si on désigne par $\pi(z)$ la densité de vapeur en z , et si on suppose que la quantité de H_2O qui dépasse $\pi_{vs}(z)$ devient immédiatement liquide ou solide, on aura

$$\pi(z) = \bar{\pi}_{vs}(T(z)).$$

Lorsque l'air monte de Δz , la quantité de H_2O contenue dans l'air sera

$$\pi(z) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} = \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)},$$

tandis que la densité de la vapeur saturée sera $\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z))$, d'où

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} [\pi_{vs}(z) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} - \bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z))] = \\ & = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\bar{\pi}_{vs}(T(z)) \left(\frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} - 1 \right) - (\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z)) - \bar{\pi}_{vs}(T(z))) \right] = \\ & = \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T). \end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation $\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{dz}{dt} = v_z$, on aura

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_z$$

(pour les détails voir [18]).

2.5 Etat hydrostatique de l'air sec

Comme pour tous les phénomènes dans l'atmosphère, même pour modéliser les cyclones tropicaux la distribution de la densité et de la température de l'état hydrostatique de l'air joue un rôle important dans leur modélisation. Or, à cause de la présence de la vapeur d'eau susceptible de subir la transition de phase et donc de fournir de la chaleur dans la forme de la chaleur latente, l'état *hydrostatique* peut être différent du cas de l'air sec au cas de l'air humide (dans lequel la condensation ou la sublimation inverse de la vapeur d'eau se produit constamment).

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. A cause de ce comportement de l'air, dans la troposphère nous trouvons une distribution de la pression, de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état *hydrostatique*. En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (2.3) se réduit à

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) + R_1 \rho T \nabla \cdot v = 0, \quad (2.13)$$

Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, le long de la trajectoire de chaque partie de l'air, le rapport

$$\vartheta = \frac{T(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (2.14)$$

avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + \frac{R}{\mu}}{c_v}$ reste invariant, où γ est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4, tandis que la trajectoire est définie par la relation

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(t, x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t', x(t', x_0)) dt'$$

(pour plus de détail voir [15]).

Donc sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$T(t, x) = C_1 \rho(t, x)^{\gamma-1} \quad (2.15)$$

avec une constante C_1 . Supposons maintenant que la valeur de la constante C_1 figurant dans (2.15) est identique dans une région Ω , alors dans cette région, pour la pression p qui satisfait à l'équation (2.4), on a la relation

$$p = h \rho^\gamma, \quad (2.16)$$

où h est une constante, plus précisément $h = C_1 \frac{R}{\mu}$. Soit Φ le géopotentiel, si on substitue $v \equiv 0$ et la relation (2.16) dans l'équation (2.2) (ou (2.2)bis), on obtient l'équation

$$h \nabla \rho^\gamma = -\rho \nabla \Phi. \quad (2.17)$$

Comme

$$\nabla \rho^\gamma = \nabla \rho^{(\gamma-1) \frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho \nabla \rho^{\gamma-1},$$

de (2.17) on déduit que

$$h \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla \rho^{\gamma-1} = -\nabla \Phi,$$

ce qui implique que

$$\rho^{\gamma-1} = \rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h} (\Phi_0 - \Phi). \quad (2.18)$$

ou

$$\rho = \left(\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.19)$$

où $\Phi_0 = \Phi_{x_0}$ et $\rho_0 = \rho(x_0)$ avec un point $x_0 \in \Omega$. Pour l'application de (2.19) à l'atmosphère réelle, il est souvent commode de prendre Φ_0 comme la valeur de Φ au niveau de la mer et ρ_0 comme la densité de l'air au niveau de la mer. Naturellement, il faut rappeler que, du point de vue physique, (2.18) et (2.19) sont valables seulement si $\rho(x_0) > 0$ et $\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h} (\Phi_0 - \Phi) > 0$.

La relation (2.19) signifie que dans l'approximation "adiabatique", l'atmosphère "au repos" aura la distribution de la densité ρ . En outre, compte tenu de la relation $\frac{C_1}{h} = \frac{\mu}{R}$, on déduit de (2.15) et (2.18) que

$$T = C_1 \left(\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h} (\Phi_0 - \Phi) \right) = T_0 + \frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi), \quad (2.20)$$

où $T_0 = C_1 \rho_0^{\gamma-1}$ est la température au niveau de de la mer. D'autre part, de (2.16) et (2.19) on déduit que

$$p = h \left(\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma h} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{h^{\frac{1}{\gamma}} \gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (2.21)$$

où $p_0 = h \rho_0^\gamma$ est la pression au niveau de la mer. La distribution de la densité $\rho(x)$, de la température $T(x)$ et de la pression $p(x)$, donnée par (2.19)-(2.21) dans une région Ω , définit un état *hydrostatique*. Il est intéressant de remarquer que dans l'état *hydrostatique*, la température $T(x)$ descend linéairement par rapport au géopotential $\Phi(x)$, ce qui correspond à son comportement dans la troposphère.

2.6 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans le cas où la vapeur d'eau contenue dans l'air est partout saturée et la température est distribuée comme s'il y a constamment la condensation, cas communément dit *de l'air humide*, la distribution de la densité et de la température est différente et doit être déterminée compte tenu du processus de possible condensation.

Pour établir le système d'équations de l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau, introduisons la densité de la vapeur d'eau π et, pour éviter l'équivoque, désignons par ρ_a la densité de l'air sec. Pour la densité de l'air sec ρ_a , qui ne subit pas de transition de phase, l'équation de continuité (2.1) est toujours valable, c'est-à-dire on a

$$\partial_t \rho_a + \nabla \cdot (\rho_a v) = 0. \quad (2.22)$$

D'autre part, pour la densité de la vapeur d'eau π il y a la variation de sa masse due à la transition de phase; en désignant par H_{tr} la quantité de la vapeur d'eau qui se transforme en liquide ou en solide, on a l'équation de continuité pour π

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{tr}. \quad (2.23)$$

Si on désigne par ρ la somme de la densité de l'air sec et de celle de la vapeur d'eau

$$\rho = \rho_a + \pi,$$

en faisant la somme des équations (2.22) et (2.23), on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = -H_{tr}. \quad (2.24)$$

Or, en substituant au second membre de cette équation l'expression (2.12), on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = -(\bar{\pi}_{vs}(T)) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) v_3. \quad (2.25)$$

D'autre part, considérons l'équation stationnaire de (2.7), dans laquelle nous substituons

$$E = L_{tr} H_{tr},$$

où $L_{tr} \approx L_{gl} \approx L_{gs}$ (comme nous l'avons mentionné en haut). Alors on obtient

$$\rho c_v v \cdot \nabla T = -R_1 \rho T \nabla \cdot v + L_{tr} H_{tr}.$$

Dans cette équation nous substituons l'expression (2.12) et

$$\rho \nabla \cdot v = -v \cdot \nabla \rho - (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_3,$$

qui s'obtient de l'équation stationnaire de (2.25). De la sorte on obtient

$$\rho c_v v \cdot \nabla T - R_1 T v \cdot \nabla \rho = (R_1 T + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v_3. \quad (2.26)$$

Si dans (2.26) on suppose

$$v = (0, 0, v_3), \quad v_3 > 0,$$

de (2.26) on obtient

$$\rho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\rho}{dz} = (R_1 T + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right). \quad (2.27)$$

Si on adjoint à l'équation (2.27) l'équation


$$R_1 \frac{d}{dz} (\rho T) = -g\rho, \quad (2.28)$$

on obtient le système d'équations (2.27)–(2.28) qui détermine la distribution de la densité et de la température dans l'état hydrostatique de l'atmosphère avec la condensation de la vapeur d'eau.

Chapitre 3

Modèle d'un cyclone tropical

3.1 Introduction au modèle

OMME nous le voyons régulièrement, le vent violent et la précipitation abondante se produisent souvent dans les cyclones. Parmi les cyclones, ceux qui sont classifiés généralement sous la dénomination de cyclones tropicaux (ils peuvent être appelés typhons ou ouragans selon l'habitude régionale) ont une structure assez autonome bien déterminée, ce qui nous permet de proposer des modèles mathématiques d'un cyclone tropical à partir des principes de la mécanique des fluides et de la thermodynamique. Pour les cyclones tropicaux on sait que le processus essentiel qui provoque ce phénomène est la condensation de la vapeur d'eau et sa chaleur latente qui entraînent l'ascension de l'air réchauffé (voir par exemple [27], [12], [30], [13], [22]). Toutefois la complexité du phénomène n'a pas permis de construire de modèle suffisamment cohérent du point de vue physique et du point de vue mathématique. Dans ce contexte nous proposons une modélisation qui se base sur la description du processus de condensation - réchauffement de l'air - écoulement ascendant de l'air sur la trajectoire de l'air. En effet, dans un travail récent [18] un cas simplifié de cette description où les auteurs ont étudié un modèle de l'écoulement vertical ascendant du l'air provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur de l'eau. Dans [18] on calcule la densité, la température et la vitesse de l'air à l'intérieur d'une "cheminée", cylindre vertical de 12 km, en supposant que du bas de la cheminée entre librement l'air avec la densité et la température ordinaires ($T = 300^{\circ}$ K, la pression = $R_1 \rho T = 1013$

mb) et avec la vapeur d'eau saturée (l'humidité relative = 100 %). Quand il y a un écoulement ascendant, il y a la condensation de la vapeur d'eau et par conséquent il y a un réchauffement de l'air. Pour cela au sommet de la cheminée la pression (que nous désignons par $p = R_1 \rho T$) sera plus grande que celle de l'extérieur de la cheminée cylindrique (les auteurs de [18] ont supposé que la pression de l'extérieur est celle de la distribution de l'état hydrostatique de l'air sec). On a interprété cette différence de pression divisée par la hauteur de la cheminée comme la force exercée sur l'air se trouvant dans la cheminée.

Cette "interprétation" peut être un peu arbitraire. Mais, en tout cas le calcul effectué dans [18] donne une bonne caractérisation de l'évolution de l'écoulement dans la cheminée. Or, on pourrait poser la condition qu'au sommet de la cheminée la pression à l'intérieur de la cheminée et celle à l'extérieur soient égales et interpréter la différence de la pression qui sera créée à l'entrée (extrémité inférieure, de la cheminée) entre la pression intérieure et celle de l'extérieure comme la force qui pousse l'air se trouvant dans la cheminée. Cette interprétation serait plus naturelle du point de vue physique, ce qui nous donne une bonne possibilité de développer un modèle du cyclone tropical sur la base de cette idée.

L'objectif principal du présent travail est de mettre en évidence ce mécanisme par le calcul numérique. Pour ce faire, en partant des équations fondamentales de la mécanique des fluides (voir [24]) et en y négligeant la viscosité et la conductivité thermique, on considère le système d'équations dans un domaine cylindrique avec la symétrie axiale (voir en bas (3.8)–(3.12)). Comme ces équations sont des équations aux dérivées partielles de premier ordre, avec un choix convenable de trajectoires (caractéristiques), on les transforme en une famille d'équations sur les trajectoires, ce qui nous donne la possibilité de calculer la solution. L'idée de cette modélisation a été partiellement illustrée dans [14].

Pour réaliser le calcul numérique, nous utilisons la méthode de différences finies et nous nous appuyons partiellement sur les techniques développées dans [18] et [5]. Comme dans ces travaux le calcul a été effectué seulement pour l'écoulement vertical de l'air, dans le présent travail, pour réaliser le calcul pour notre modèle, un nouveau

schéma numérique avec les composantes radiale et tangentielle de la vitesse est élaborée.

Dans la limite des approximations adoptées (rayon du cyclone invariant, trajectoires du vent fixées, absence de l'effet de viscosité et de la conduction de la chaleur), le résultat du calcul réalisé dans ce travail montre d'une manière assez claire l'aspect de l'évolution d'un cyclone tropical due à la condensation de la vapeur d'eau qui provoque l'ascension de l'air et de sa stabilisation par la friction des gouttelettes avec l'air.

3.2 Principes de la modélisation et transformation des équations

Nous considérons le mouvement de l'air à l'intérieur d'un cyclone tropical, en adoptant son approximation par la symétrie axiale dans un domaine cylindrique fixé. Plus précisément nous considérons le domaine (exprimé dans les coordonnées cylindriques (r, ϑ, z))

$$\Omega = \{(r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \mid (r, z) \in \Gamma_{r,z}, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}, \quad (3.1)$$

$$\Gamma_{r,z} = \{(r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid 0 < z < \bar{z}_1, \Lambda_0(z) < r < \Lambda_1\}. \quad (3.2)$$

Ici l'axe z est choisi de telle sorte qu'il coïncide avec l'axe du mouvement circulaire de l'air et la région $\{0 < z < \bar{z}_1, 0 \leq r < \Lambda_0(z)\}$ doit correspondre à la zone de l'*oeil*. Comme dans l'*oeil* le mouvement de l'air a des aspects assez différents du reste du cyclone tropical, dans le présent travail nous l'excluons de notre considération.

Comme il est bien connu, les dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes et celles par rapport aux coordonnées cylindriques sont liées par les relations

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.3)$$

On introduit les notations v_r, v_ϑ et v_z qui sont respectivement les composantes radiale, tangentielle et verticale de la vitesse v . C'est-à-dire, les composantes v_1, v_2, v_3 de la vitesse v dans le système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et les composantes v_r, v_ϑ et v_z sont reliées par les relations

$$v_r = v_1 \cos \vartheta + v_2 \sin \vartheta, \quad v_\vartheta = -v_1 \sin \vartheta + v_2 \cos \vartheta, \quad v_z = v_3. \quad (3.4)$$

Dans notre modèle on suppose la symétrie axiale, c'est-à-dire on suppose que toutes les fonctions y comprises les trois composantes de la vitesses (composantes radiale, tangentielle et verticale) ne dépendent pas de ϑ ; on a donc

$$\rho = \rho(t, r, z), \quad T = T(t, r, z), \quad v_r = v_r(t, r, z), \quad v_\vartheta = v_\vartheta(t, r, z), \quad v_z = v_z(t, r, z).$$

En ce qui concerne la force de Coriolis, on choisit x_1 dans la direction de Est-Ouest et x_2 dans la direction de Nord-Sud. Alors dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre s'exprime par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ |\omega| \cos \varphi_0 \\ |\omega| \sin \varphi_0 \end{pmatrix},$$

où φ_0 est la latitude du centre du cyclone. Si on traduit ces relations dans les coordonnées cylindriques, la force de Coriolis $-2\omega \times v$ aura la composante radiale

$$2|\omega| \cos \varphi_0 v_z \cos \vartheta - 2|\omega| \sin \varphi_0 v_\vartheta,$$

la composante tangentielle

$$-2|\omega| \cos \varphi_0 v_z \sin \vartheta + 2|\omega| \sin \varphi_0 v_r$$

et la composante verticale

$$-2|\omega| \cos \varphi_0 (\cos \vartheta v_r + \sin \vartheta v_\vartheta).$$

Mais pour garantir la symétrie par rapport à l'axe z , on néglige la force de Coriolis due à la composante verticale de la vitesse et la composante verticale de la force de Coriolis. De la sorte, la force de Coriolis que l'on considère sera

$$\begin{pmatrix} -2|\omega| \sin \varphi_0 v_\vartheta \\ 2|\omega| \sin \varphi_0 v_r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

pour plus de détails [6]

3.3 Système d'équations d'un cyclone tropical

Pour formuler les équations du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau dans le cyclone tropical, dans l'équation (2.6) nous posons

$$\nabla \Phi = (0, 0, g),$$

où g est l'accélération de pesanteur. De plus, il faut prendre en considération également la force

$$-\Sigma \nabla \Phi = (0, 0, -g\Sigma)$$

due à la "friction" des gouttelettes avec l'air, ici Σ désigne la masse des gouttelettes et des morceaux de glace se trouvant dans l'air.

Or, même si nous avons adopté le modèle sans viscosité et sans onductivité thermique, il nous semble raisonnable de tenir compte au moins l'effet de la friction entre l'air et la surface de la mer. Nous supposons que l'effet de cette friction est représenté par

$$-\varepsilon_1(x_3)(v - (v \cdot e_3)e_3),$$

où $\varepsilon_1(x_3)$ est une fonction qui est strictement positive dans le voisinage de $x_3 = 0$ et s'annule pour x_3 suffisamment grand.

Donc, en résumant nos considérations, dans l'équation (2.6) nous posons

$$F = (0, 0, -g\Sigma) - \varepsilon_1(x_3)(v - (v \cdot e_3)e_3).$$

D'autre part, dans l'équation (2.7) il faut considérer la source de la chaleur

$$E = L_{tr} H_{tr},$$

qui représente le réchauffement de l'air par la chaleur latente de la condensation. Ainsi en précisant la forme des équations (2.6) et (2.7), nous avons

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = -R_1 \nabla \rho T - (\rho + \Sigma) g e_3 - 2\rho \omega \times v, \quad (3.6)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) = -R_1 \rho T \nabla \cdot v + L_{tr} H_{tr}. \quad (3.7)$$

Maintenant nous transformons les équations (2.24), (3.6), (3.7) dans les coordonnées cylindriques sous l'hypothèse de la symétrie axiale. En utilisant les relations (3.3) et (3.5) et l'hypothèse de l'indépendance de toutes les fonctions de ϑ , par des calculs élémentaires, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = -H_{tr}, \quad (3.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\vartheta^2 + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial (\rho T)}{\partial r} + f_0 \rho v_\vartheta - \varepsilon_1(z) v_r, \quad (3.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta v_r + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -f_0 \rho v_r - \varepsilon_1(z) v_\theta, \quad (3.10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\rho T)}{\partial z} - [\Sigma + \rho] g, \quad (3.11)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -R_1 \rho T \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + L_{tr} H_{tr}, \quad (3.12)$$

où

$$f_0 = 2|\omega| \sin \varphi_0.$$

Chapitre 4

Modèle numérique du cyclone tropical basé sur les trajectoire du vent

4.1 Système d'équations sur les trajectoires



On remarque que, comme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\rho v_r}{r} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$$

dans chaque équation du système (3.8)–(3.12) il y a un opérateur différentiel commun de transport

$$v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \cdot \cdot$$

Cet opérateur définit les trajectoires du vent sur le plan (r, z) , même si elles sont inconnues. Pour mettre en évidence l'effet du processus de condensation - réchauffement de l'air - ascension de l'air -, qui détermine l'évolution d'un cyclone tropical, nous supposons que les trajectoires ainsi définies sur le plan (r, z) sont régulières et approximativement stables. Cela étant, en choisissant d'une manière convenable les trajectoires sur le plan (r, z) (dans la section suivante nous allons illustrer notre choix des trajectoires), nous transformons le système d'équations (3.8)–(3.12) en une famille d'équations sur les trajectoires.

En supposant que $v_r^2 + v_z^2 > 0$, on pose

$$q_r = \frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}}, \quad q_z = \frac{v_z}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \quad (4.1)$$

et on introduit la famille de fonctions $\gamma(s) = (\gamma_r(s), \gamma_z(s))$ déterminées par les relations

$$\frac{d}{ds}\gamma_r(s) = q_r(\gamma(s)), \quad \frac{d}{ds}\gamma_z(s) = q_z(\gamma(s)); \quad (4.2)$$

il est clair que sous l'hypothèse de la régularité de $(q_r(r, z), q_z(r, z))$ la famille de fonctions γ passant par chaque point (r, z) de $\Gamma_{r,z}$ et satisfaisant aux équations (4.2) remplira le domaine $\Gamma_{r,z}$.

Supposons que la famille de fonctions $\{\gamma\}$ est bien définie et ne dépend pas de t . Alors, à l'aide de la relation

$$v_r \frac{\partial}{\partial r} \varphi(t, r, z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \varphi(t, r, z) = v_\gamma \frac{\partial}{\partial s} \varphi(t, \gamma(s)) \equiv v_\gamma \frac{\partial}{\partial s} \varphi(t, s)$$

avec $v_\gamma = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$, les équations (3.8) et (3.10) se transforment en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_\gamma)}{\partial s} + \frac{\rho v_r}{r} + \rho v_\gamma \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = -H_{tr}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_\gamma \frac{\partial v_\theta}{\partial s} + \frac{q_r v_\gamma v_\theta}{r} = -f_0 q_r v_\gamma - \frac{\varepsilon_1(z) v_\theta}{\rho}, \quad (4.4)$$

tandis que, à l'aide de l'égalité $\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -H_{tr} - \frac{\partial \rho}{\partial t} - v_\gamma \frac{\partial \rho}{\partial s}$, qui est équivalente à (3.8), l'équation (3.12) se transforme en

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_\gamma \frac{\partial T}{\partial s} \right) - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_\gamma \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) = (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}. \quad (4.5)$$

D'autre part, en multipliant par q_r les deux membres de (3.9) et par q_z les deux membres de (3.11) et en utilisant l'égalité

$$\frac{\partial q_r^2}{\partial s} + \frac{\partial q_z^2}{\partial s} = 0,$$

on obtient

$$\rho \left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial s} + v_\gamma \frac{\partial v_\gamma}{\partial s} - \frac{q_r}{r} v_\theta^2 \right) = -R_1 \frac{\partial(\rho T)}{\partial s} + q_r \rho f_0 v_\theta - \left[\varepsilon_1(z) q_r^2 v_\gamma - q_z g(\rho + \Sigma) \right]. \quad (4.6)$$

Pour la résolution numérique, nous considérons le problème approché de ce système d'équations, problème formulé par la séparation entre l'évolution temporelle et la structure spatiale pour v_γ , ρ , T (comme il a été fait dans [18], [5]). Plus précisément, on pose

$$v_\gamma(t, s) = \alpha_\gamma(t) w(t, s) \quad (4.7)$$

sur chaque trajectoire γ (donc $w(t, s) = w(\gamma; t, s)$) et on suppose

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0. \quad (4.8)$$

D'autre part, on considère $v_\theta(t, s) = v_\theta(\gamma; t, s)$ sur chaque γ toujours comme fonction de (t, s) , car son évolution ne peut pas être décrite comme conséquence directe du processus de la condensation de la vapeur et de l'ascention de l'air.

Pour transformer les équations (4.3)–(4.6) en un problème approché en utilisant la séparation entre l'évolution temporelle et la structure spatiale introduite dans (4.7)–(4.8), on pose aussi

$$D(t) = D_\gamma(t) = \frac{d}{dt} \alpha_\gamma(t), \quad (4.9)$$

$$J(s) = J(\gamma; s) = \int_0^s \left(\frac{\partial q_r(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial q_z(r, z)}{\partial z} \right) \Big|_{(r, z) = \gamma(s')} ds'. \quad (4.10)$$

Enfin on adopte l'expression suivante de H_{tr} :

$$H_{tr} = h_{tr} [v_z]^+ = h_{tr} [\alpha(t) q_z w]^+, \quad h_{tr} = \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \quad (4.11)$$

($[\cdot]^+$ désigne la partie positive), dont on trouve la justification par exemple dans [18]. Ainsi, en supposant que $\rho > 0$, $w > 0$, $q_z \geq 0$ et en écrivant $\frac{dw}{ds}$, $\frac{d\rho}{ds}$, $\frac{dT}{ds}$ au lieu de $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial \rho}{\partial s}$, $\frac{\partial T}{\partial s}$, sur chaque trajectoire γ , au lieu de (4.3)–(4.6) on considère le système d'équations

$$\frac{d}{ds}(\rho w) = -q_z w \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T)}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{dT}{dz} \right) - \frac{\rho w}{rJ} \frac{d(rJ)}{ds}, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{\alpha(t)w} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{\partial v_\theta}{\partial s} + \frac{q_r}{r} v_\theta = -f_0 q_r - \frac{\varepsilon_1(z)}{\alpha(t)\rho w} v_\theta, \quad (4.13)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{ds} - R_1 T \frac{d\rho}{ds} = (R_1 T + L_{tr}) q_z \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T)}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{dT}{dz} \right), \quad (4.14)$$

$$\rho w D(t) + \rho \left((\alpha(t))^2 w \frac{dw}{ds} - \frac{q_r}{r} v_\theta^2 \right) = \quad (4.15)$$

$$= -R_1 \frac{d}{ds}(\rho T) + q_r \rho f_0 v_\theta - \left[\varepsilon_1(z) \alpha q_r^2 w + q_z g(\rho + \Sigma) \right].$$

Comme les trajectoires du déplacement de l'eau liquide ou solide sont différentes de celles de l'air γ , on introduira une détermination pratique pour le calcul numérique de la quantité de l'eau liquide et solide sur chaque trajectoire du mouvement de l'air

dans la section 4.3 après la définition de notre choix des trajectoires du mouvement de l'air. Dans la section 4.3 on expliquera aussi le rôle du terme $D(t)$ dans l'équation (4.15) ainsi que les conditions d'entrée et de sortie pour les équations (4.12)–(4.15).

4.2 Choix des trajectoires

Comme nous l'avons vu en haut, si on fixe les trajectoires γ , on peut réduire le système d'équations (3.8)–(3.12) pour les inconnues ρ , T , v_r , v_θ et v_z en un système de quatre équations pour quatre inconnues ρ , T , v_γ et v_θ , qui, avec d'ultérieures approximations, nous permet de réaliser le calcul d'une manière efficace. Mais, en principe les trajectoires sont inconnues. Donc, pour que le résultat du calcul soit une bonne représentation de ce qui se passe réellement dans le cyclone tropical, les trajectoires que nous choisissons doivent être une bonne approximation de celles qui se réalisent dans la réalité. On rappelle que la littérature concernant les cyclones tropicaux concorde à considérer que dans la partie inférieure du cyclone l'air se déplace vers le centre, dans la partie proche du centre il se déplace vers le haut et dans la partie supérieure il se déplace vers la périphérie. Nous adoptons donc avant tout ce schéma général de l'écoulement de l'air.

Or, pour que le choix des trajectoires ne modifie pas d'une manière artificielle le résultat, il faut une élaboration précise dans leur choix. En particulier, il est essentiel de les choisir de telle sorte que la famille des trajectoires choisies soit compatible avec la loi de la conservation de la masse appliquée à la densité de référence $\bar{\rho}$ et le champ de vitesse principal \bar{v} , c'est-à-dire que

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{v})$$

reste suffisamment petit ; même si la densité ρ et le champ de vitesse v sont des fonctions inconnues de notre problème, on peut avoir la densité de référence $\bar{\rho}$ par le principe hydrostatique et le champ de vitesse principal \bar{v} conformément à la loi de la conservation de la masse et à de nombreuses observations effectuées sur les cyclones tropicaux.

Dans le choix pratique pour le calcul numérique, nous devons choisir un certain nombre N de trajectoires ; nous les notons γ_j , $j = 1, \dots, N$. Selon le schéma général

adopté, nous supposons que chaque trajectoire γ_j est composée par trois parties : la partie inférieure $\gamma_j^{[1]}$ où l'air se déplace presque horizontalement vers le centre, la partie ascendante $\gamma_j^{[2]}$ et la partie supérieure $\gamma_j^{[3]}$ où l'air se déplace presque horizontalement vers la périphérie. Dans le présent travail, pour la vitesse principale \bar{v} dans $\gamma_j^{[1]}$ et $\gamma_j^{[3]}$ nous adoptons l'approximation de l'écoulement horizontal, de sorte que la fonction w aura le comportement $r w(r) \approx a_{j,1}$ sur $\gamma_j^{[1]}$ et $r w(r) \approx a_{j,3}$ sur $\gamma_j^{[3]}$ ($a_{j,1}$ et $a_{j,3}$ étant des constantes) et que les écoulements sur $\gamma_j^{[1]}$ et sur $\gamma_j^{[3]}$ seront parallèles sur le plan (r, z) . Ainsi nous posons

$$\gamma_j = \gamma_j^{[1]} \cup \gamma_j^{[2]} \cup \gamma_j^{[3]}, \quad (4.16)$$

$$\gamma_j^{[1]} = \{(r, z) \in \Gamma_{r,z} \mid r_j(z_j^-) \leq r \leq \Lambda_1, z = z_j^-\},$$

$$\gamma_j^{[2]} = \{(r, z) \in \Gamma_{r,z} \mid r = r_j(z), z_j^- \leq z \leq z_j^+\},$$

$$\gamma_j^{[3]} = \{(r, z) \in \Gamma_{r,z} \mid r_j(z_j^+) \leq r \leq \Lambda_1, z = z_j^+\}.$$

Il est vrai que dans cette structure la trajectoire γ_j fait un angle au point $(r_j(z_j^-), z_j^-)$ qui joint $\gamma_j^{[1]}$ et $\gamma_j^{[2]}$ et au point $(r_j(z_j^+), z_j^+)$ qui joint $\gamma_j^{[2]}$ et $\gamma_j^{[3]}$, ce qui n'est pas très naturel. Mais il nous semble que cet aspect peu naturel n'a pas d'influence sensible sur le résultat du calcul.

Pour choisir les fonctions $r_j(z)$ qui figurent dans la définition de $\gamma_j^{[2]}$, nous utilisons la densité de référence $\bar{\rho}$ qui est la distribution de la densité de l'état hydrostatique de l'air humide et adoptons le critère empirique du rapport entre la valeur maximale de la composante verticale \bar{v}_z et celle de la composante radiale \bar{v}_r du champ de vitesse principal \bar{v} ainsi que le critère selon lequel la quantité $r w(r, z)|_{(r,z) \in \gamma_j^{[2]}}$ n'est pas influencée par r , ce qui est analogue au critère adopté pour les parties $\gamma_j^{[1]}$ et $\gamma_j^{[3]}$ des trajectoires.

Pour définir la densité de référence $\bar{\rho}$ que nous utilisons, nous considérons le système d'équations de l'état hydrostatique de l'air éventuellement humide

$$\rho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\rho}{dz} = \vartheta(z) \left(R_1 T + L_{tr} \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right), \quad (4.17)$$

$$R_1 \frac{d}{dz} (\rho T) = -g\rho, \quad (4.18)$$

où $0 \leq \vartheta(z) \leq 1$ (pour l'existence et l'unicité de la solution de ce système d'équations, voir [5]). Le cas $\vartheta(z) = 0$ correspond au cas de l'air sec, tandis que le cas $\vartheta(z) = 1$ correspond à celui de l'air complètement humide, c'est-à-dire le cas où la vapeur d'eau contenue dans l'air est partout saturée et la température est distribuée comme s'il y avait constamment la condensation. Nous choisissons la solution de ce système d'équations avec $\vartheta(z) = 1$ comme $\bar{\rho}$.

En ce qui concerne le rapport entre la valeur maximale de la composante verticale et celle de la composante radiale de la vitesse du vent, la description de différents auteurs n'est pas nécessairement concordante. Dans notre exemple de simulation, en suivant la tendance principale ([7]), nous adoptons le critère

$$\frac{\text{valeur maximale de } v_z \text{ sur } \gamma_j^{[2]}}{\text{valeur maximale de } |v_r| \text{ sur } \gamma_j^{[1]}} \approx \frac{1}{3}. \quad (4.19)$$

Commençons par déterminer la fonction $\Lambda_0(z)$, qui représente la limite extérieure de l'oeil (voir (3.2)). Nous posons

$$\Lambda_0(z) = \Lambda_0(0) \sqrt{\frac{\bar{\rho}(0)}{\bar{\rho}(z)}}. \quad (4.20)$$

En effet, dans la région de l'oeil $\{0 < z < \bar{z}_1, 0 \leq r < \Lambda_0(z)\}$ avec $\Lambda_0(z)$ définie par (4.20), si l'air se déplace avec une vitesse (suffisamment faible) \bar{v}_0 avec la composante verticale indépendante de z , on aura $\nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{v}_0) = 0$, c'est-à-dire, l'éventuel mouvement (suffisamment faible) de l'air dans l'oeil ne sera pas influencé d'une manière artificielle par le choix de $\Lambda_0(z)$.

Pour déterminer $\gamma_j^{[2]}$ conformément aux critères adoptés, nous supposons que

$$r w(r, z) \Big|_{(r,z) \in \gamma_j^{[2]}} = a_{j,2} Q. \quad (4.21)$$

où $a_{j,2}$ est une constante et

$$Q = \frac{1}{\sqrt{9q_z^2 + q_r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 8q_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 - 8q_r^2}}. \quad (4.22)$$

Comme Q est fonction seulement de q_r et de q_z , la quantité $r w(r, z) \Big|_{(r,z) \in \gamma_j^{[2]}} = a_{j,2} Q$ n'est pas influencée par r ; d'autre part, si $(q_r, q_z) = (0, 1)$, alors $Q = \frac{1}{3}$, tandis que, si $(q_r, q_z) = (1, 0)$, alors on a $Q = 1$, conformément au critère (4.19).

Comme nous avons supposé que $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ (voir (4.8)) et que H_{tr} est relativement petit, en substituant $v_r = \alpha_{\gamma_j} q_r w$ et $v_z = \alpha_{\gamma_j} q_z w$ dans (3.8) et en considérant α_{γ_j} comme indépendante de r et de z dans la zone représentée par la trajectoire γ_j , on a

$$\frac{\partial(r w \rho q_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r w \rho q_z)}{\partial z} \approx 0. \quad (4.23)$$

En substituant $r w = a_{j,2} Q$ et $\rho = \bar{\rho}(z)$ dans (4.23), on obtient

$$\frac{\partial(Q \bar{\rho}(z) q_r)}{\partial r} + \frac{\partial(Q \bar{\rho}(z) q_z)}{\partial z} = 0.$$

En tenant compte de la relation $\frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}(z) = 0$, on a

$$-(q_z Q) \frac{d}{dz} \bar{\rho}(z) = \bar{\rho} \left(\frac{\partial(Q q_r)}{\partial r} + \frac{\partial(Q q_z)}{\partial z} \right). \quad (4.24)$$

Nous écrivons l'équation (4.24) dans la forme

$$-(q_z Q) \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} \bar{\rho} = q_r \frac{\partial Q}{\partial r} + q_z \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right). \quad (4.25)$$

De l'expression de (4.22) on déduit que

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{9-8q_r^2}} = \frac{8q_r}{(9-8q_r^2)^{3/2}} \frac{\partial q_r}{\partial r} = 8q_r Q^3 \frac{\partial q_r}{\partial r}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{1+8q_z^2}} = \frac{-8q_z}{(1+8q_z^2)^{3/2}} \frac{\partial q_z}{\partial z} = -8q_z Q^3 \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad (4.27)$$

Maintenant nous substituons (4.26) et (4.27) dans (4.25), et remarquons les égalités

$$1 + 8q_r^2 Q^2 = \frac{9}{9-8q_r^2} = 9Q^2, \quad 1 - 8q_z^2 Q^2 = \frac{1}{1+8q_z^2} = Q^2,$$

qui résultent de (4.22). Ainsi nous obtenons

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} = \frac{1}{9Q^2} \left(-Q^2 \frac{\partial q_z}{\partial z} - q_z \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} \bar{\rho} \right). \quad (4.28)$$

Supposons que la trajectoire $\gamma_{j-1} = \gamma_{j-1}^{[1]} \cup \gamma_{j-1}^{[2]} \cup \gamma_{j-1}^{[3]}$ est donnée. Pour construire la partie $\gamma_j^{[2]}$ de la trajectoire γ_j , nous utilisons l'approximation de $\frac{d}{dz}(r_j(z) - r_{j-1}(z))$ par

$$\frac{d}{dz}(r_j(z) - r_{j-1}(z)) = (r_j(z) - r_{j-1}(z)) \frac{1}{q_z} \frac{\partial q_r}{\partial r} + o(|r_j(z) - r_{j-1}(z)|). \quad (4.29)$$

On remarque que le second membre de l'équation (4.28) ne contient pas $\frac{\partial q_r}{\partial r}$ (et q_r). Donc, si on calcule q_z et $\frac{\partial q_z}{\partial z}$ sur $\gamma_{j-1}^{[2]}$ et le substitue dans le second membre de (4.28), on aura une valeur (approximative) de $\frac{\partial q_r}{\partial r}$. Si on néglige le terme $o(|r_j(z) - r_{j-1}(z)|)$ dans (4.29) et substitue la valeur de $\frac{\partial q_r}{\partial r}$ dans cette équation, on parvient à

$$\frac{dr_j(z)}{dz} + \frac{1}{9q_z Q^2} \left(Q^2 \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_z \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} \bar{\rho} \right) r_j(z) = \frac{1}{9q_z Q^2} \left(Q^2 \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_z \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} \bar{\rho} \right) r_{j-1}(z).$$

On voit que cette égalité est une équation différentielle ordinaire pour la fonction inconnue $r_j(z)$. Donc en résolvant cette équation, on détermine la fonction $r_j(z)$.

4.3 Ultérieures conditions et définitions pour le calcul numérique

Les trajectoires $\gamma_j = \{\gamma_j(s) | 0 \leq s \leq \bar{s}_j^1\}$ étant choisies, on peut poser les conditions d'entrée pour les fonctions inconnues ρ , v_θ , T , w au point d'entrée $\gamma_j(0) = (\Lambda, z_j^-)$ de chaque trajectoire γ_j . En outre, la présence de l'inconnue $D(t)$ dans l'équation (4.15) nous permet d'imposer aussi une condition au point de sortie $\gamma_j(\bar{s}_j^1) = (\Lambda, z_j^+)$ de chaque trajectoire. C'est-à-dire, en dénotant $\rho(\gamma_j; t, 0) = \rho(\gamma_j; t, s)|_{s=0}$, etc..., nous allons poser les quatre conditions d'entrée

$$\rho(\gamma_j; t, 0) = \bar{\rho}_j^0, \quad v_\theta(\gamma_j; t, 0) = \bar{v}_{\theta,j}^0, \quad T(\gamma_j; t, 0) = \bar{T}_j^0, \quad w(\gamma_j; t, 0) = \bar{w}_j^0$$

et une condition de sortie

$$\rho(\gamma_j; t, \bar{s}_j^1) T(\gamma_j; t, \bar{s}_j^1) = \bar{p}_{*,j}^1.$$

Comme, du point de vue du modèle physique, les conditions au point d'entrée $\gamma_j(0) = (\Lambda, z_j^-)$ et au point de sortie $\gamma_j(\bar{s}_j^1) = (\Lambda, z_j^+)$ doivent correspondre aux conditions de l'extérieur du cyclone tropical, nous supposons de connaître la densité $\rho_{ex}(z)$ et la température $T_{ex}(z)$ à l'extérieur du cyclone, qui sont des fonctions de z , et nous posons

$$\bar{\rho}_j^0 = \rho_{ex}(z_j^-), \quad \bar{T}_j^0 = T_{ex}(z_j^-), \quad \bar{p}_{*,j}^1 = \rho_{ex}(z_j^+) T_{ex}(z_j^+).$$

Quant à $\bar{v}_{\vartheta,j}^0$, pour ne pas influencer l'évolution de v_{ϑ} par le choix arbitraire de la condition d'entrée, nous le choisissons suffisamment petit (indépendamment de j), tandis que, comme w est la vitesse normalisée (voir (4.7)), nous choisissons \bar{w}_j^0 comme constante indépendante de j .

En résumant, nous posons les conditions

$$\varrho(\gamma_j; t, 0) = \varrho_{ex}(z_j^-), \quad (4.30)$$

$$w_{\vartheta}(\gamma_j; t, 0) = \bar{v}_{\vartheta}^0, \quad (4.31)$$

$$T(\gamma_j; t, 0) = T_{ex}(z_j^-), \quad (4.32)$$

$$w(\gamma_j; t, 0) = \bar{w}^0, \quad (4.33)$$

$$\varrho(\gamma_j; t, \bar{s}_j^1) T(\gamma_j; t, \bar{s}_j^1) = \varrho_{ex}(z_j^+) T_{ex}(z_j^+). \quad (4.34)$$

En ce qui concerne la quantité de l'eau liquide et solide Σ qui figure dans l'équation (4.15), on remarque qu'il a son effet seulement dans la partie $\gamma_j^{[2]}$, où l'air ascend. Donc, compte tenu que les trajectoires $\gamma_j^{[2]}$ sont inclinées et se trouvent l'une sur l'autre, nous utilisons l'approximation

$$\begin{aligned} \Sigma_j(t) = & \frac{1}{[\widetilde{\gamma}_j^+]} \int_0^t \varphi_j(t-s) \int_{[\widetilde{\gamma}_j^+]} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) w q_z dz ds + \\ & + \beta_j \frac{[\widetilde{\gamma}_j^+]}{[\widetilde{\gamma}_{j-1}^+]} \Sigma_{j-1}(t), \end{aligned} \quad (4.35)$$

où

$$[\widetilde{\gamma}_j^+] = z_j^+ - z_j^- \quad (= \text{la hauteur de } \gamma_j^{[2]}),$$

tandis que $\varphi_j(\tau)$ représente la probabilité que la gouttelette (ou le morceau de glace) reste dans l'air après le temps τ passé depuis sa création et β_j est une constante représentant la quantité de l'eau liquide ou solide qui passent de la trajectoire γ_{j-1} à γ_j .

Pour le calcul numérique, nous utilisons la méthode de différences finies. On dénote par $\{t_k\}$ le temps discrétisé et par $\{s_{j,i}\}$ la position discrétisée sur la trajectoire γ_j , c'est-à-dire

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots,$$

$$0 = s_{j,0} < s_{j,1} < \dots < s_{j,i} < s_{j,i+1} < \dots < s_{j,N_j} = \bar{s}_j^1.$$

Il est bon de rappeler que la position s est prise dans la direction de l'écoulement de l'air, de sorte que $0 = s_{j,0}$ et $s_{j,N_j} = \bar{s}_j^1$ correspondent à la position d'entrée et à celle de sortie de l'écoulement de l'air sur la trajectoire γ_j . On peut prendre le pas de discrétisation homogène pour le temps (c'est-à-dire $t_{k+1} - t_k = \delta_t$ pour tout k), tandis qu'il nous est commode de prendre les pas de discrétisation de position dépendants de (j, i) (c'est-à-dire $s_{j,i+1} - s_{j,i} = \delta_s = \delta_s(j, i)$) pour s'adapter à la structure des trajectoires γ_j . Toutefois la dépendance de (j, i) du pas de discrétisation n'influence pas le principe du schéma numérique.

La solution numérique sera construite par le schéma explicite de différences finies. Quand on a la solution $(\alpha, \rho, v_\theta, T, w)$ pour t_0, \dots, t_{k-1} et sur toutes les trajectoires, on va calculer $(\alpha, \rho, v_\theta, T, w)$ pour t_k de manière suivante.

Premièrement, on va déterminer $v_\theta(t_k, s_{j,i})$ pour $i = 0, \dots, N_j$ sur chaque trajectoire γ_j , en écrivant l'équation (4.13) dans la forme

$$\frac{v_\theta(t_k, s_{j,i}) - v_\theta(t_{k-1}, s_{j,i})}{\delta_t \alpha(t_{k-1}) w(t_{k-1}, s_{i,j})} + \frac{v_\theta(t_k, s_{j,i}) - v_\theta(t_k, s_{j,i-1})}{\delta_s(j, i)} = F(v_\theta, \alpha, \rho, w)$$

ou

$$\begin{aligned} (\delta_s(j, i) + \delta_t \alpha(t_{k-1}) w(t_{k-1}, s_{i,j})) v_\theta(t_k, s_{j,i}) &= \\ = \delta_s(j, i) v_\theta(t_{k-1}, s_{j,i}) + \delta_t \alpha(t_{k-1}) w(t_{k-1}, s_{i,j}) v_\theta(t_k, s_{j,i-1}) + \\ + \delta_s(j, i) \delta_t \alpha(t_{k-1}) w(t_{k-1}, s_{i,j}) F(v_\theta, \alpha, \rho, w). \end{aligned} \quad (4.36)$$

La condition $v_\theta(t_k, s_{j,0}) = \bar{v}_\theta^0$ (voir (4.31)) et les équations (4.36) pour $i = 1, \dots, N_j$ détermineront $v_\theta(t_k, s_{j,i})$ pour $i = 0, \dots, N_j$.

Deuxièmement, on doit déterminer $(\rho(t_k, s_{j,i}), T(t_k, s_{j,i}), w(t_k, s_{j,i}))$ pour $i = 0, \dots, N_j$ et $D(t_k) = D_j(t_k)$ sur chaque trajectoire γ_j . Si α , v_θ et Σ sont données et si on se donne une valeur provisoire $D^{(m)}$ à $D(t_k) = D_j(t_k)$, alors les équations (4.12), (4.14), (4.15) sur chaque trajectoire γ_j forment un système d'équations différentielles ordinaires pour les fonctions inconnues ρ , T et w , que, avec les conditions initiales (4.30), (4.32), (4.33), on peut résoudre de manière usuelle par la méthode de différences finies; comme cette solution dépend de la valeur provisoire $D^{(m)}$ donnée à $D(t_k) = D_j(t_k)$, la valeur du produit $\rho(\gamma_j; t, \bar{s}_j^1) T(\gamma_j; t, \bar{s}_j^1) = \rho(t_k, s_{j,N_j}) T(t_k, s_{j,N_j})$, que nous notons $\rho^{(m)}(t_k, \bar{s}_j^1) T^{(m)}(t_k, \bar{s}_j^1)$, elle aussi dépend de $D^{(m)}$. Or, comme entre $D^{(m)}$ et

$\rho^{(m)}(t_k, \bar{s}_j^1) T^{(m)}(t_k, \bar{s}_j^1)$ il y a une forte corrélation – justifiée du point de vue physique et constatée par le calcul numérique –, on peut construire une suite $\{D^{(m)}\}$ qui converge rapidement vers une valeur $D^{(m_0)}$ telle que $\rho^{(m_0)}(t_k, \bar{s}_j^1) T^{(m_0)}(t_k, \bar{s}_j^1)$ satisfasse à la condition (4.34). Ainsi, avec cette valeur $D^{(m_0)}$ de $D(t_k) = D_j(t_k)$ on aura la solution $(\rho, T, w, D(t))$ des équations (4.12), (4.14), (4.15) avec les conditions (4.30), (4.32), (4.33), (4.34).

La troisième et dernière étape consiste à déterminer $\alpha(t_k) = \alpha_j(t_k)$ par la relation simple

$$\alpha_j(t_k) = \alpha_j(t_{k-1}) + D_j(t_k) \delta t. \quad (4.37)$$

Rappelons que, si à $D(t)$ on substitue $\frac{d}{dt} \alpha(t)$ (voir (4.9)), des relations (4.7)–(4.8) on déduit $\rho w D(t) = \rho \frac{\partial v_\gamma}{\partial t}$. Ceci nous permet d’interpréter le terme $\rho w D(t)$ dans l’équation (4.15) comme l’effet qui résulte de l’égalité de la pression à l’intérieur et à l’extérieur au point d’entrée $\gamma(0)$ et au point de sortie $\gamma(\bar{s}_1)$ avec la présence de la chaleur latente de la condensation de la vapeur d’eau dans la trajectoire γ , effet comme une force qui pousse l’air vers le haut s’opposant éventuellement au frottement des gouttelettes d’eau (ou des morceaux de glace) qui pousse l’air vers le bas.

4.4 Exemple de simulation numérique

Dans la suite nous allons illustrer un exemple de simulation du modèle de l’évolution d’un cyclone tropical consistant dans les équations (4.9), (4.12)–(4.15) et les conditions (4.30)–(4.34). Pour effectuer le calcul, conformément aux lois physiques connues (voir par exemple [23], [25]), nous devons fixer avant tout les paramètres physiques

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad R_1 = \frac{R_0}{\mu_a}, \quad c_v = \frac{5 R_0}{2 \mu_a},$$

$$R_0 = 8,314 \text{ J/mole}, \quad \mu_a = 28.96 \text{ g/mol}$$

(R_0 et μ_a sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de l’air) et définir la fonction de la densité de la vapeur saturée

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_a}{R_0 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \text{ (mbar)}, \quad (4.38)$$

ainsi que la chaleur latente

$$L_{tr}(T) = (3244 - 2,72 T) 10^3 \text{ (J/kg)}. \quad (4.39)$$

Dans cet exemple de simulation, comme la différence de la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide et de celle relative à la surface de glace et la chaleur latente de l'eau liquide au solide sont relativement petites, en les négligeant, nous utilisons les valeurs données dans (4.38)–(4.39), qui sont relatives à la transition de phase de H_2O du gaz en liquide (et vice-versa).

Le paramètre de la force de Coriolis f_0 est fixé à $3 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$, qui correspond à la valeur mesurée à 12 N.

Pour définir le domaine Ω (ou $\Gamma_{r,z}$) donné dans (3.1) (ou (3.2)), nous choisissons $\Lambda_1 = 200 \text{ km}$, $\bar{z}_1 = 12 \text{ km}$; nous choisissons aussi $\Lambda_0(0) = 10 \text{ km}$ et avec ceci nous déterminons la fonction $\Lambda_0(z)$ selon la formule (4.20). Il s'agira du modèle d'un cyclone tropical de dimension moyenne.

Dans cet exemple, nous considérons 8 trajectoires γ_j , $j = 1, \dots, 8$. Si on devait remplir le domaine $\Gamma_{r,z}$ par la famille de trajectoires $\{\gamma_j\}$, le nombre 8 serait trop petit. Mais si l'objectif est de faire représenter le comportement de l'écoulement de l'air par celui sur des trajectoires, à notre avis, les 8 trajectoires peuvent décrire d'une manière significative le comportement de l'écoulement de l'air dans l'évolution d'un cyclone tropical.

Pour choisir les trajectoires γ_j , $j = 1, \dots, 8$, nous supposons que l'air qui entre dans le domaine du cyclone Ω est humide à moitié, tandis que celui qui sort de Ω est humide à plein; ainsi nous définissons la distribution de la densité $\tilde{\rho}_1(z)$ comme la solution des équations (4.17)-(4.18) avec

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } 0 \leq z \leq \bar{\zeta}_M, \\ 1 & \text{pour } \bar{\zeta}_M < z \leq \bar{z}_1, \end{cases} \quad (4.40)$$

où $\bar{\zeta}_M$ est choisi de telle sorte que $\{r = \Lambda_1, 0 < z < \bar{\zeta}_M\}$ soit la frontière d'entrée ($v_r < 0$) et $\{r = \Lambda_1, \bar{\zeta}_M < z < \bar{z}_1\}$ soit la frontière de sortie ($v_r > 0$); formellement la détermination de $\bar{\zeta}_M$ n'est pas facile, mais numériquement sa valeur approximative peut être trouvée assez facilement. En utilisant cette fonction $\tilde{\rho}_1(z)$, nous posons

$$M_\rho = \int_0^{z_1^+} \tilde{\rho}_1(z) dz, \quad (4.41)$$

et définissons z_j^- et z_j^+ (voir (4.16)) par les relation

$$\int_0^{z_j^-} \tilde{\rho}_1(z') dz' = \frac{4j-2}{61} M_\rho, \quad j = 1, \dots, 8, \quad (4.42)$$

$$\int_0^{z_j^+} \tilde{\varrho}_1(z') dz' = \frac{4(16-j)+2}{61} M_\varrho, \quad j = 3, \dots, 8, \quad (4.43)$$

$$\int_0^{z_2^+} \tilde{\varrho}_1(z') dz' = \frac{57,5}{61} M_\varrho, \quad (4.44)$$

$$\int_0^{z_1^+} \tilde{\varrho}_1(z') dz' = \frac{60}{61} M_\varrho. \quad (4.45)$$

Les valeurs de z_j^- et z_j^+ ainsi établies sont illustrés dans le tableau suivant ((4.1)) :

TABLE 4.1 – Les valeurs de z_j^- et z_j^+

γ_j	$z_j^-(km)$	$z_j^+(km)$
γ_1	$z_1^- = 0.23$	$z_1^+ = 11.71$
γ_2	$z_2^- = 0.70$	$z_2^+ = 10.77$
γ_3	$z_3^- = 1.20$	$z_3^+ = 9.01$
γ_4	$z_4^- = 1.72$	$z_4^+ = 7.91$
γ_5	$z_5^- = 2.28$	$z_5^+ = 6.94$
γ_6	$z_6^- = 2.86$	$z_6^+ = 6.05$
γ_7	$z_7^- = 3.48$	$z_7^+ = 5.25$
γ_8	$z_8^- = 4.25$	$z_8^+ = 4.50$

Les trajectoires construites par l'équation (4.29) avec les valeurs de z_j^- et de z_j^+ sont illustrées dans la figure suivante (4.1)

Dans les conditions (4.30), (4.32), (4.34) nous avons utilisé les valeurs de la densité $\varrho_{ex}(z)$ et de la température $T_{ex}(z)$ à l'extérieur de la région du cyclone. Nous les choisissons comme solution du système d'équations (4.17)-(4.18) avec

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 1/3 & \text{pour } 0 \leq z \leq \bar{\zeta}_M, \\ 2/3 & \text{pour } \bar{\zeta}_M < z \leq \bar{z}_1. \end{cases} \quad (4.46)$$

On remarque que la condition (4.40) correspond à une humidité intermédiaire entre la condition (4.46) et l'humidité pleine $\vartheta(z) \equiv 1$ avec laquelle on a défini $\bar{\varrho}$.

Pour la fonction $\varphi_j(\tau)$ utilisée dans l'expression (4.35) de Σ_j , nous utilisons la fonction

$$\varphi_j(\tau) = \exp\left(\frac{\pi\tau^2}{4b_j^2}\right) \quad (4.47)$$

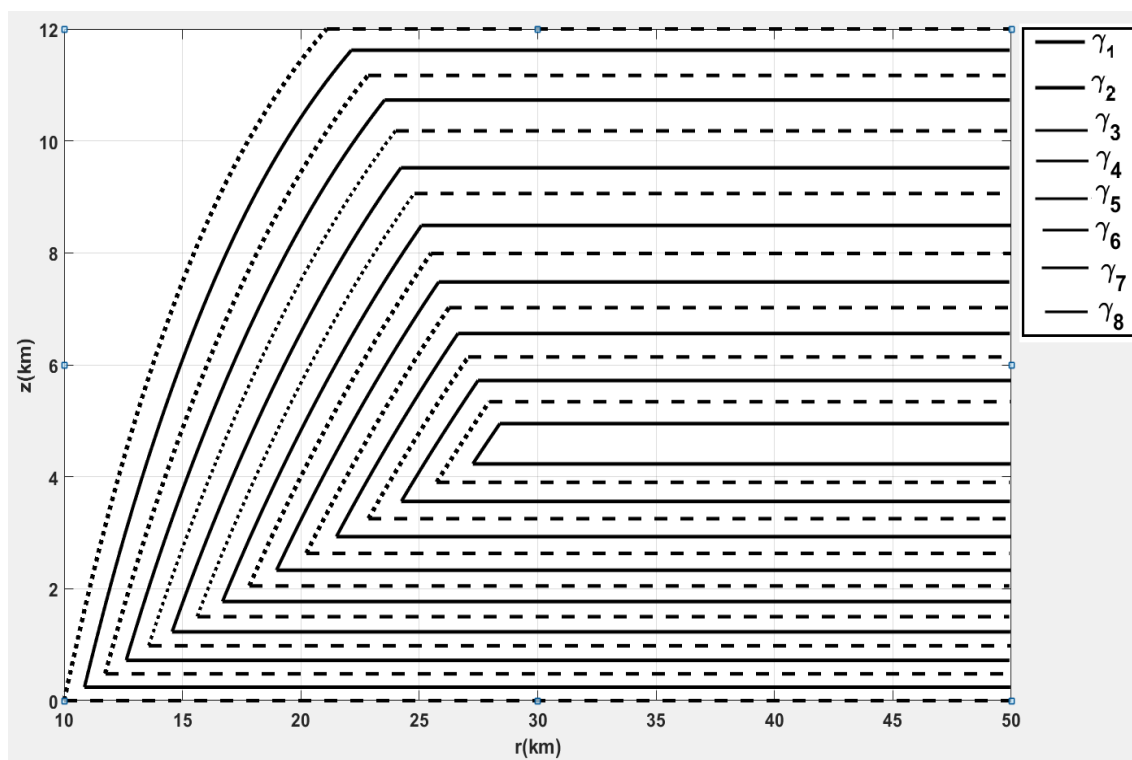


FIGURE 4.1 – les familles des trajectoires (jusqu'à 50 km du centre)
-sur le plan (r,z) -

avec

$$b_j = \begin{cases} 10 \text{ minutes}(= 600 \text{ secondes}) & \text{pour } \gamma_j, j = 1,2,3,4,5 \\ 8 \text{ minutes}(= 480 \text{ secondes}) & \text{pour } \gamma_6 \\ 5 \text{ minutes}(= 300 \text{ secondes}) & \text{pour } \gamma_7, \\ 2 \text{ minutes}(= 120 \text{ secondes}) & \text{pour } \gamma_8. \end{cases} \quad (4.48)$$

On rappelle qu'on a

$$\int_0^{\infty} \varphi_j(\tau) d\tau = b_j,$$

de sorte que b_j est la durée moyenne de la permanence de la gouttelette (ou le morceau de glace) dans l'air après sa création. D'autre part, pour les coefficients β_j utilisés eux aussi dans l'expression (4.35) de Σ_j , nous choisissons

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } \gamma_j, j = 2,3,4, \\ \frac{2}{3} & \text{pour } \gamma_j, j = 5,6,7 \\ \frac{1}{3} & \text{pour } \gamma_8, \end{cases} \quad (4.49)$$

Pour la fonction représentant l'effet de la friction entre l'air et la surface de la mer,

nous posons

$$\varepsilon_1(z) = \begin{cases} 8 \times 10^{-5} & \text{sur } \gamma_1, \\ 0 & \text{sur } \gamma_j, j = 2, \dots, 8. \end{cases} \quad (4.50)$$

4.5 Résultat de calcul numérique

Nous illustrons le résultat de la simulation numérique réalisé.

TABLE 4.2 – *les valeurs de $\alpha_j(t)$ sur $\gamma_j, j = 1, \dots, 8$*
Avec $\delta_t = 100s$ après 24 h

k	$\alpha_1(k\delta_t)$	$\alpha_2(k\delta_t)$	$\alpha_3(k\delta_t)$	$\alpha_4(k\delta_t)$	$\alpha_5(k\delta_t)$	$\alpha_6(k\delta_t)$	$\alpha_7(k\delta_t)$	$\alpha_8(k\delta_t)$
k=0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
k=30	15.86	14.47	12.16	9.25	6.24	3.50	1.38	0.21
k=60	15.90	14.77	13.17	11.04	8.18	5.07	2.13	0.29
k=100	15.81	14.64	13.25	11.66	9.30	6.32	2.87	0.39
k=150	15.71	14.38	13.09	11.74	9.80	7.24	3.57	0.50
k=200	15.63	14.04	12.88	11.63	9.91	7.74	4.10	0.60
k=300	15.62	13.88	12.64	11.28	9.74	8.08	4.80	0.74
k=500	15.62	13.89	12.74	11.56	9.90	7.67	5.02	0.85
k=700	15.62	13.89	12.74	11.57	10.03	8.52	4.06	0.72
k=800	15.62	13.89	12.74	11.57	10.03	8.70	3.68	0.59

TABLE 4.3 – *les valeurs de Σ_j sur $\gamma_j, j = 1, \dots, 8$*
Avec $\delta_t = 100s$ après 24 h

k	$\Sigma_1(k\delta_t)$	$\Sigma_2(k\delta_t)$	$\Sigma_3(k\delta_t)$	$\Sigma_4(k\delta_t)$	$\Sigma_5(k\delta_t)$	$\Sigma_6(k\delta_t)$	$\Sigma_7(k\delta_t)$	$\Sigma_8(k\delta_t)$
k=0	0	0	0	0	0	0	0	0
k=30	0.0125	0.0150	0.0151	0.0123	0.0086	0.0049	0.0021	0.0002
k=60	0.0128	0.0156	0.0164	0.0142	0.0107	0.0064	0.0029	0.0003
k=100	0.0127	0.0155	0.0164	0.0146	0.0114	0.0072	0.0033	0.0004
k=150	0.0125	0.0152	0.0161	0.0145	0.0116	0.0076	0.0035	0.0004
k=200	0.0124	0.0148	0.0157	0.0142	0.0115	0.0077	0.0037	0.0004
k=300	0.0124	0.0146	0.0153	0.0138	0.0112	0.0076	0.0037	0.0005
k=500	0.0124	0.0146	0.0154	0.0139	0.0113	0.0075	0.0037	0.0005
k=700	0.0124	0.0146	0.0154	0.0139	0.0113	0.0078	0.0037	0.0005
k=800	0.0124	0.0146	0.0154	0.0139	0.0113	0.0078	0.0037	0.0005

TABLE 4.4 – *les valeurs de v_γ sur $\gamma_j, j = 1, \dots, 8$ après 24 h -partie inférieure-*

r(km)	$\gamma_1^{[1]}$	$\gamma_2^{[1]}$	$\gamma_3^{[1]}$	$\gamma_4^{[1]}$	$\gamma_5^{[1]}$	$\gamma_6^{[1]}$	$\gamma_7^{[1]}$	$\gamma_8^{[1]}$
r=200	4.58	4.16	3.82	3.47	3.01	2.63	1.14	0.15
r=150	6.16	5.55	5.09	4.62	4.01	3.50	1.52	0.19
r=100	9.36	8.32	7.63	6.92	6.01	5.25	2.29	0.28
r=50	18.72	16.34	15.27	16.66	12.06	10.52	4.58	0.57
r=27	34.07	30.93	28.31	25.67	22.27	19.50	8.42	1.06
r=25	37.5	33.42	30.59	27.73	24.06	21.06	9.46	
r=22	42.64	38.03	34.8	31.54	27.36	25.51		
r=19	49.45	44.14	40.36	36.56	31.87			
r=17	55.37	49.45	45.19	41.91				
r=15	62.93	56.24	53.17					
r=13	72.95	67.48						
r=11	88.60							

TABLE 4.5 – *les valeurs de v_θ sur $\gamma_j, j = 1, 2$ après 24 h - partie inférieure -*

r(km)	les valeurs sur $\gamma_1^{[1]}$	les valeurs sur $\gamma_2^{[1]}$
r=180	0.55	0.62
r=160	1.04	1.34
r=140	1.52	2.18
r=120	2.05	3.19
r=100	2.68	4.49
r=80	3.56	6.28
r=60	4.93	9.07
r=40	7.56	14.53
r=20	15.29	29.52
r=13	23.48	46.63
r=11	28.21	

Dans FIG.4.2 et TAB.4.2 l'évolution dans 24 h des coefficients d'intensité $\alpha_j(t)$ sur les trajectoire $\gamma_1, \dots, \gamma_8$, est présentée (le calcul a été effectué avec le pas de discrétisation 100s).

L'évolution de la vitesse de l'écoulement de l'air sur les trajectoires γ_j est accompagnée par l'augmentation de la quantité de l'eau liquide ou solide $\Sigma_j(t)$ illustrée dans FIG.4.3 et TAB.4.3. On constate une corrélation bien précise entre $\alpha_j(t)$ et $\Sigma_j(t)$.

En outre, on remarque que dans les conditions de ce modèle le développement du

TABLE 4.6 – *les valeurs de v_θ sur $\gamma_j, j = 1, 2$ après 24 h - partie supérieur -*

r(km)	les valeurs sur $\gamma_1^{[2]} \cup \gamma_1^{[3]}$	les valeurs sur $\gamma_2^{[2]} \cup \gamma_2^{[3]}$
r=11	28.21	
r=13	23.50	46.63
r=20	15.10	29.45
r=40	7.08	14.25
r=60	4.21	8.98
r=80	2.63	6.21
r=100	1.56	4.43
r=120	0.75	3.14
r=140	0.09	2.13
r=160	-0.48	1.30
r=180	-0.99	0.57

TABLE 4.7 – *les valeurs de pression $p = R_1 \rho T$ sur γ_1 , après 24 h - sur la partie inferieur - où $p_{ex} = R_1 \rho_{ex} T_{ex} |_{z_1^-} = 9.8705e + 04$*

r(km)	p(Pas)
r=200	9.8705e+04
r=150	9.871e+04
r=100	9.871e+04
r=50	9.859e+04
r=20	9.752e+04
r=11	9.418e+04

cyclone est assez rapide : moins de 24h il atteint sa structure mature. Nous illustrons le profil de la composante en la direction des trajectoires v_γ sur la partie inférieure des trajectoires $\gamma_1, \dots, \gamma_8$ après 24 h (FIG.4.4, TAB.4.4) et la composante tangentielle v_θ du vent toujours sur la partie inférieure des trajectoires γ_1 et γ_2 après 24 h (FIG.4.5, TAB.4.5) ; l'unité des composantes de vitesse est m/s . On remarque que la composante tangentielle du vent est plus grande sur la trajectoire γ_2 que sur γ_1 , ce qui nous suggère l'effet de la friction avec la surface de la mer de freiner le vent dans la proximité de la surface de la mer. La (FIG.4.6, TAB.4.6) montre que la vitesse tangentielle dans la partie supérieure sur la trajectoire γ_2 reste dans la même direction que dans la partie inférieure, tandis que celle sur γ_1 dans la partie périphérique atteint la direction opposée. Cette différence s'explique, à notre avis, par le fait que sur γ_2 , l'effet du frottement avec la surface de la mer étant très faible, la valeur de la composante v_θ atteinte quand l'air

arrive à la partie centrale centrale après le parcourt de la périphérie au centre diminue par l'effet de la force de Coriolis avec la même proportion quand l'air se déplace de la partie centrale vers la périphérie, tandis que sur γ_1 la valeur de ν_θ dans la partie centrale est plus petite que celle qui pourrait être en absence du frottement avec la surface de la mer et donc l'effet de la force de Coriolis dans la partie supérieure où l'effet du frottement avec la surface de la mer est absent ramène ν_θ jusqu'à une valeur de signe opposé. Le fait que l'effet du frottement avec la surface de la mer est moins évident dans le résultat du calcul pour la composante en la direction des trajectoires peut être interprété comme conséquence des trajectoires fixés dans le calcul.

Quant à la pression $p = R_1 \rho T$, son profil sur γ_1 (partie inférieure, à 230 mètres du niveau de la mer) après 24 h de développement est illustré dans la FIG.4.7 et TAB.4.7.

Les figures FIG.4.4, FIG.4.5, FIG.4.6, FIG.4.7 montrent que le modèle proposé dans ce travail reproduit d'une manière raisonnable la structure d'un cyclone tropical.

• Résultat de calcul pendant cinq jours (5j) :

Nous montrons aussi l'évolution des coefficients d'intensité $\alpha_j(t)$ et de la quantité d'eau liquide ou solide $\Sigma_j(t)$ dans cinq jours. Comme on le voit dans les figures Fig.4.8 et FIG.4.9, les valeurs de $\alpha_j(t)$ et de $\Sigma_j(t)$ se stabilisent à peu près. Mais on remarque aussi que, pour les trajectoires sur lesquelles la quantité de l'eau liquide ou solide est grande, la stabilisation est rapide, tandis que, pour celles sur lesquelles $\Sigma_j(t)$ reste petite, la stabilisation est lente. Dans les figures FIG.4.8 et FIG.4.9, nous n'avons pas inséré l'évolution de $\alpha_8(t)$ et $\Sigma_8(t)$, car sur la trajectoire γ_8 à certains moments la solution numérique de $\alpha_8(t)$ et $\Sigma_8(t)$ devient négative, de sorte qu'elle perd le sens physiques.

Notre modèle du cyclone tropical admet une solution stationnaire numérique, dont les valeurs des coefficients d'intensité α_j et de la quantité d'eau liquide ou solide $\Sigma_j(t)$ sont illustrées dans le tableau ci-dessous. On voit que dans TAB.4.8 quand Σ_j est grande, il y a la convergence rapide de $\alpha_j(t)$ et $\Sigma_j(t)$ vers les valeurs correspondantes de la solution stationnaire. On remarque aussi que la quantité de l'eau liquide ou solide sur γ_8 est très petite par rapport aux autres valeur de $\gamma_1, \dots, \gamma_8$ ce qui, à notre avis, cause une instabilité relative de la solution sur γ_8 .

TABLE 4.8 – les valeurs de α_j et Σ_j , après 24 h

γ_j	α_j	Σ_j
γ_1	15.62	0.0124
γ_2	13.89	0.0146
γ_3	12.74	0.0154
γ_4	11.57	0.0139
γ_5	10.03	0.0113
γ_6	8.70	0.0078
γ_7	3.68	0.0037
γ_8	0.59	0.0005

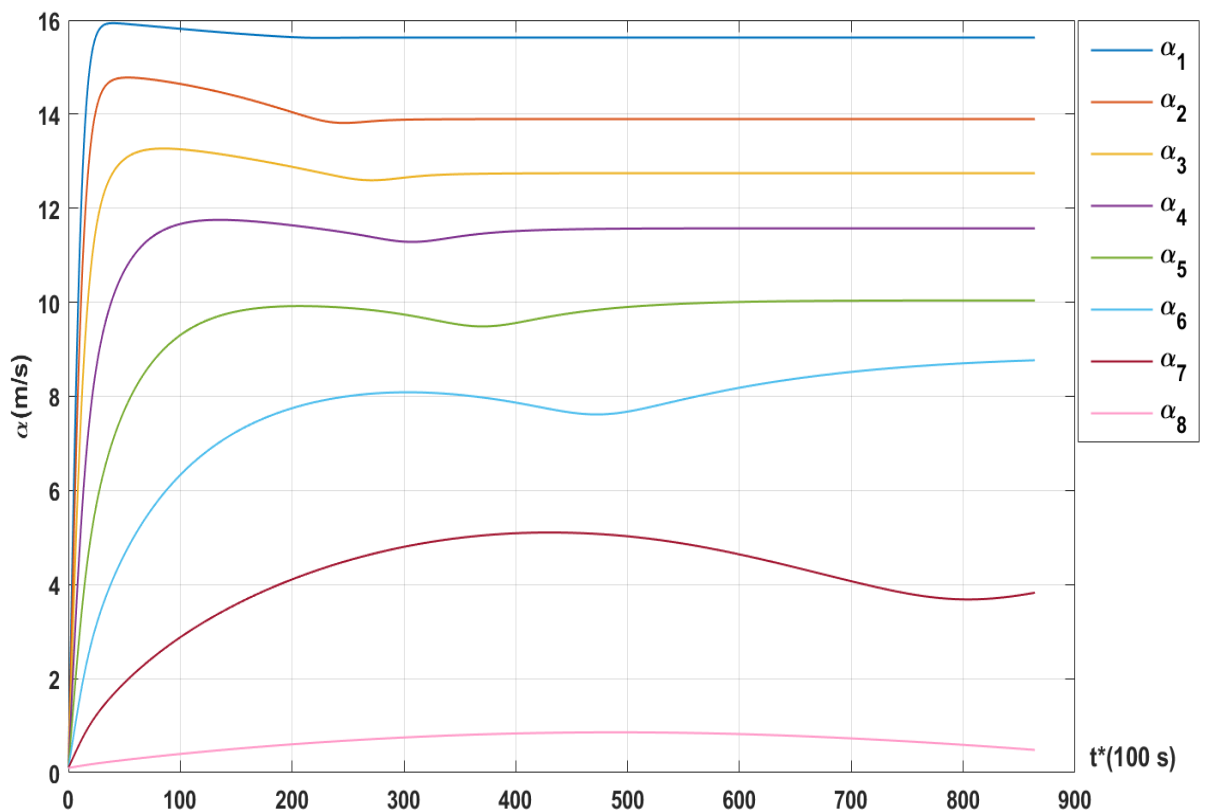


FIGURE 4.2 – Évolution du coefficient d'intensité $\alpha_j(t)$ pour 24 h

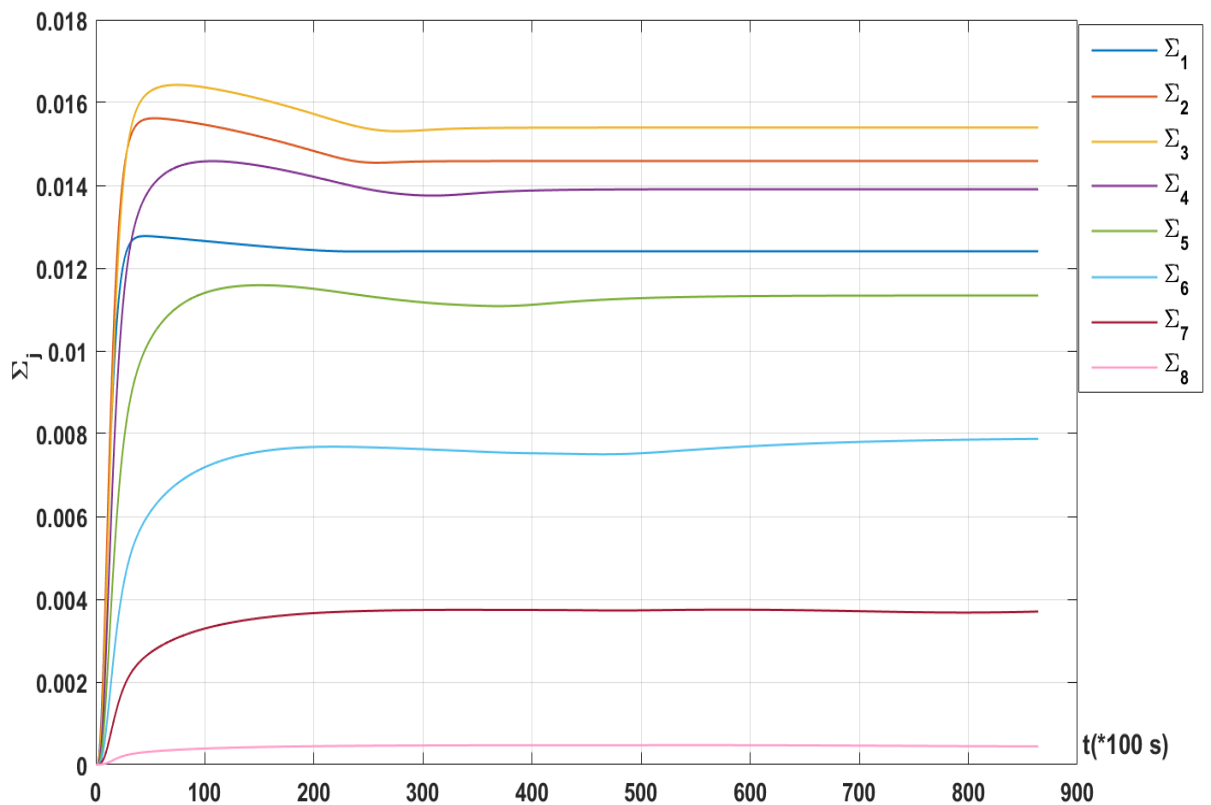


FIGURE 4.3 – Évolution de la quantité d'eau liquide ou solide $\Sigma_j(t)$ pour 24 h

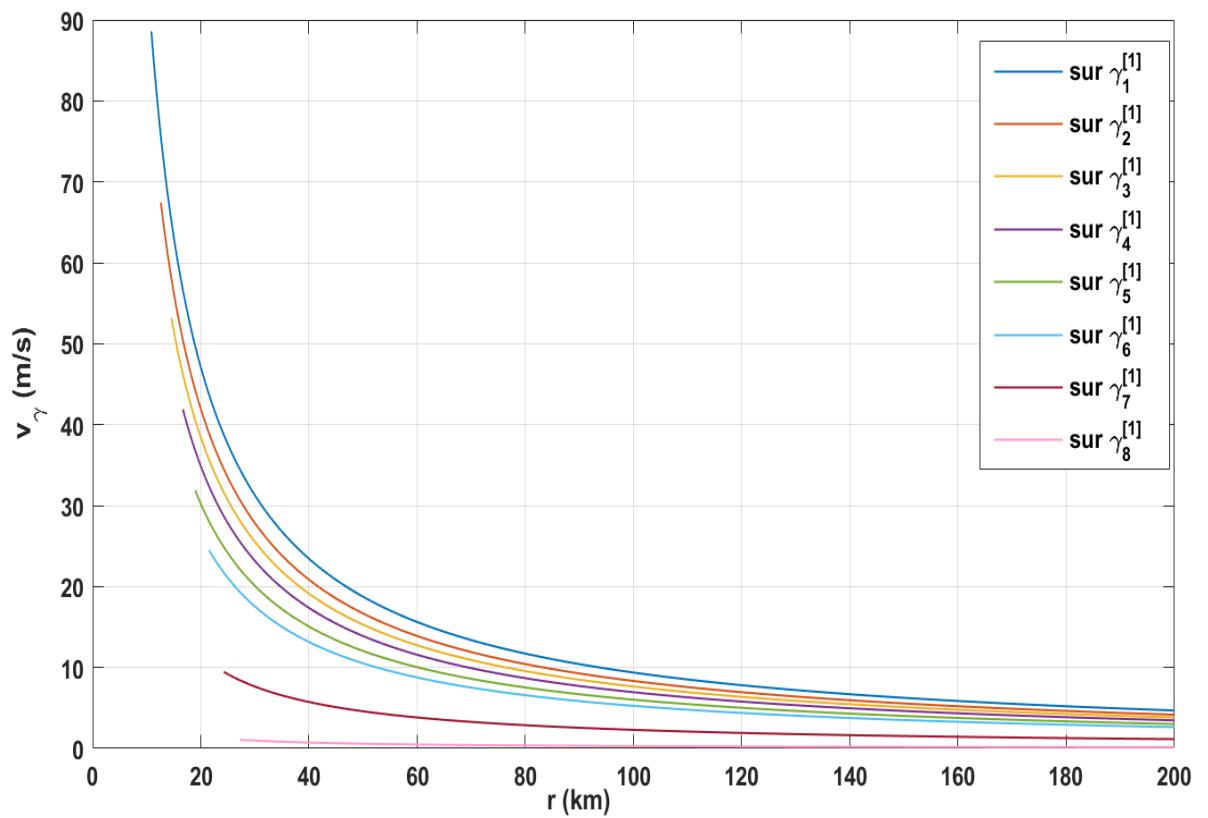


FIGURE 4.4 – Composante de vitesse v_γ en direction du vent sur γ_j
-partie inférieure, après 24 h -

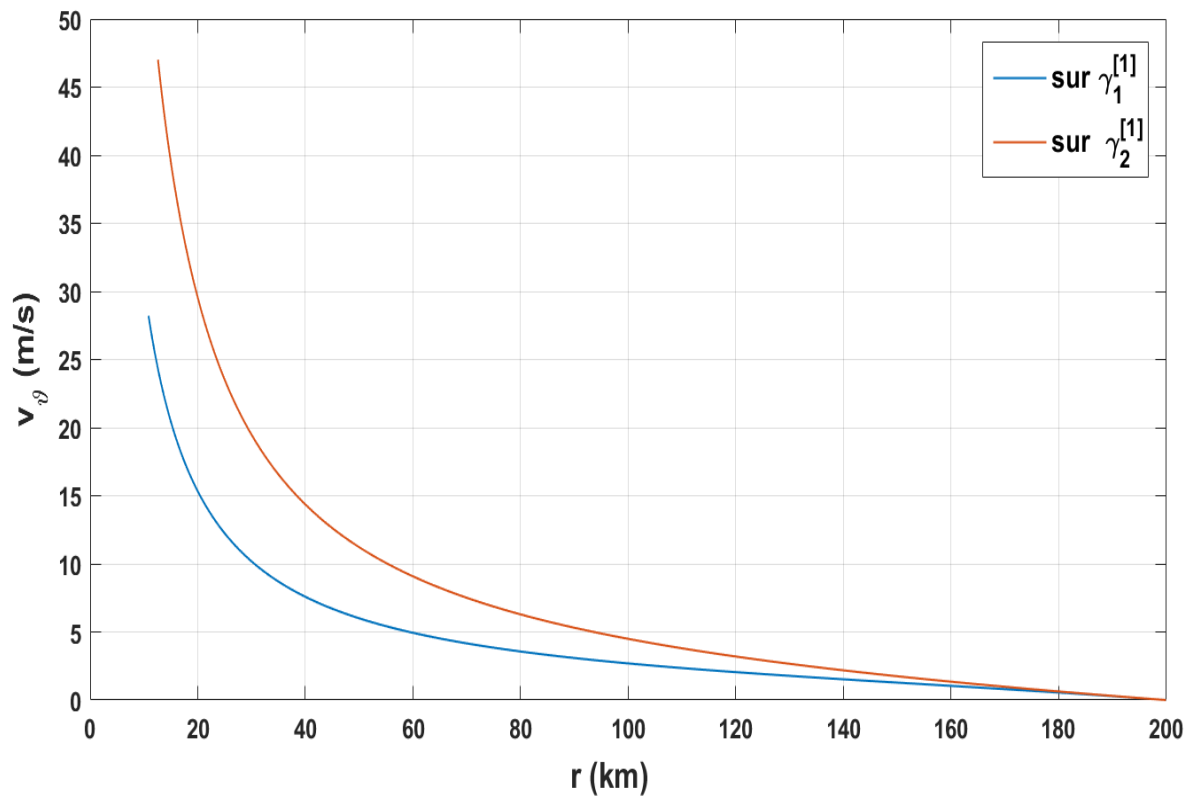


FIGURE 4.5 – Composante tangentielle v_{θ} du vent sur γ_1, γ_2
- partie inférieure, après 24 h -

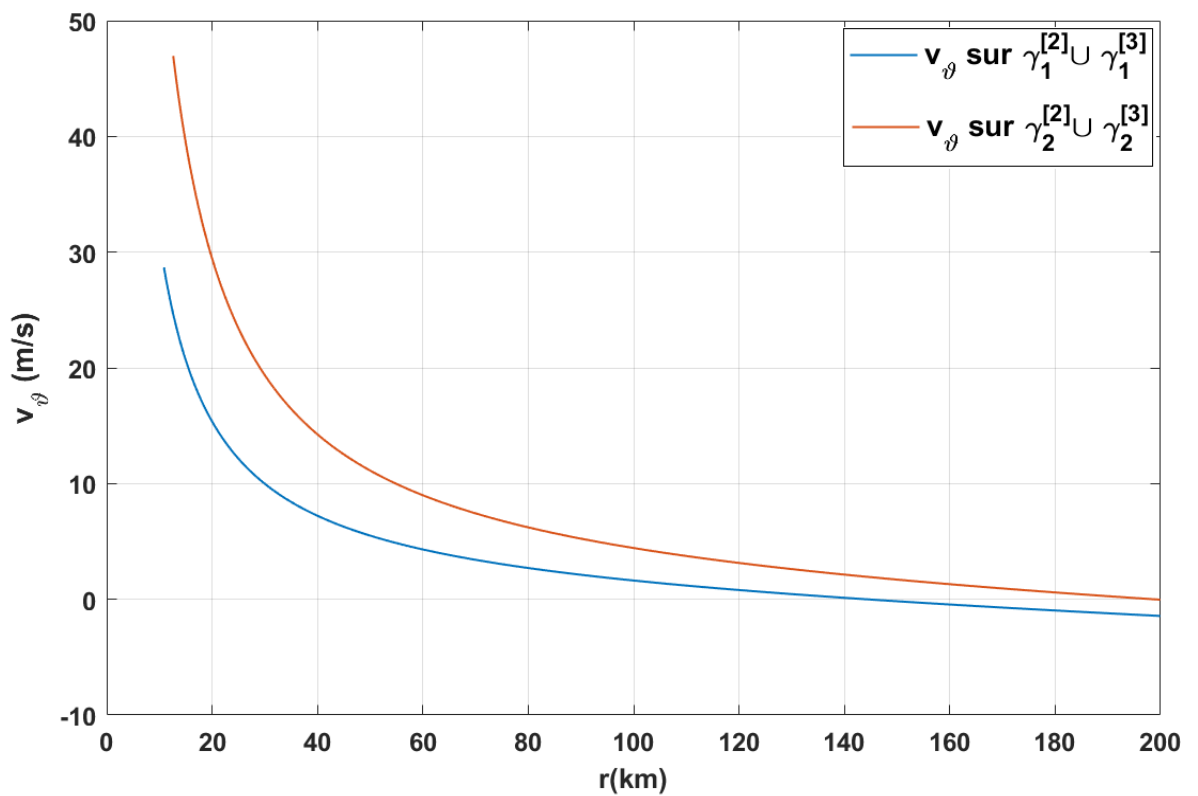


FIGURE 4.6 – Composante tangentielle v_θ du vent sur γ_1, γ_2
- partie supérieur, après 24 h -

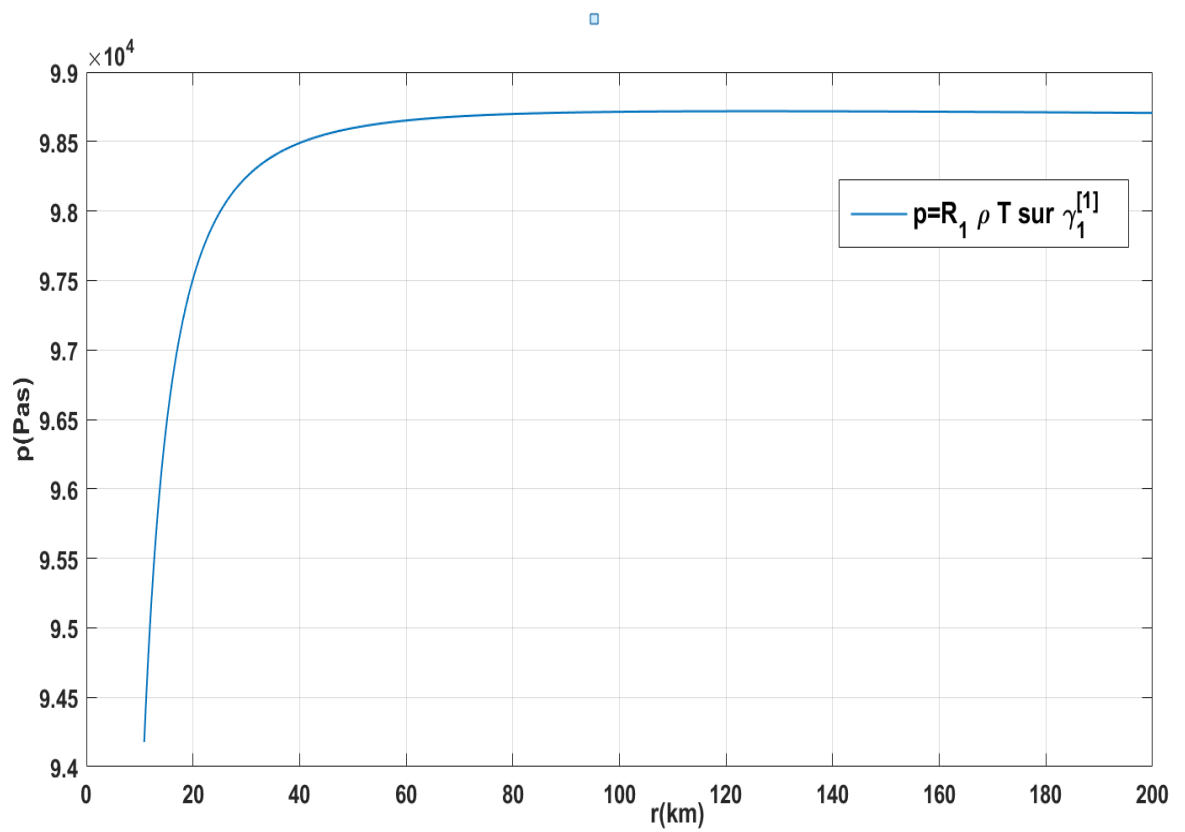


FIGURE 4.7 – **Pression $p = R_1 \rho T$ sur γ_1**
- partie inférieure, après 24 h -

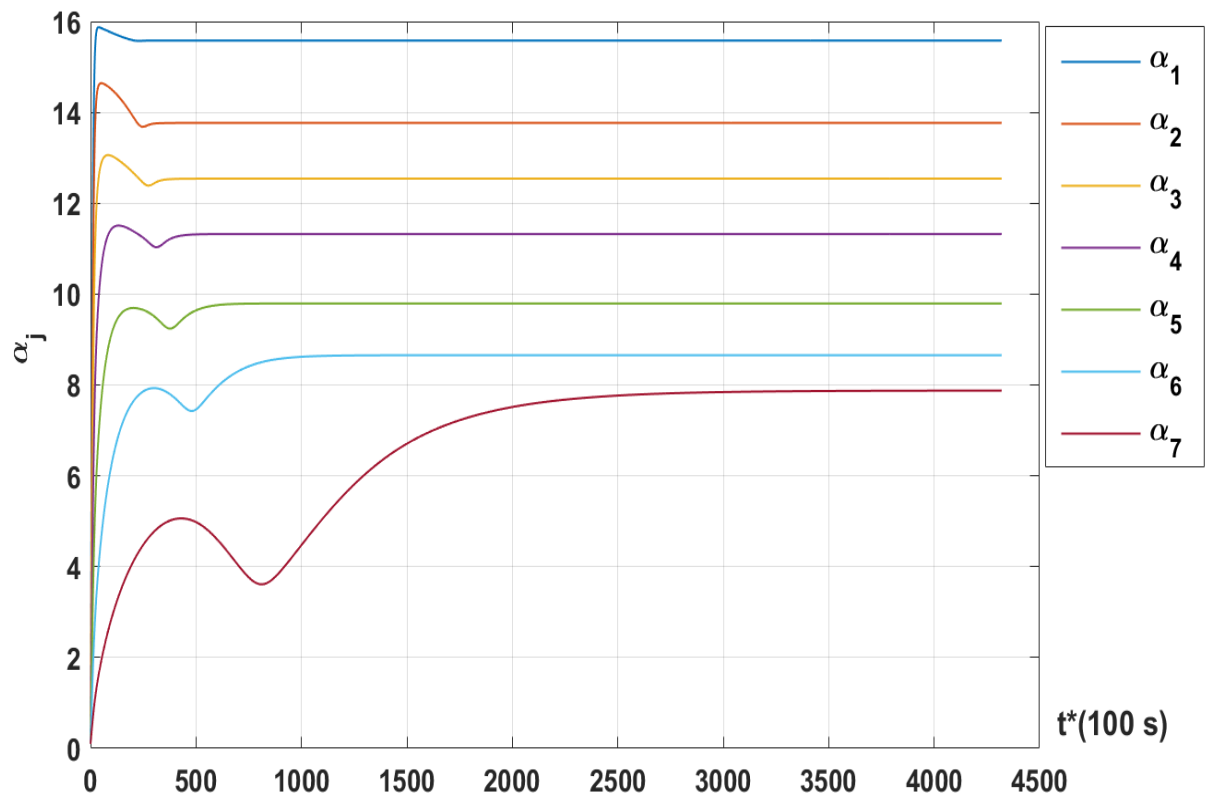


FIGURE 4.8 – Évolution des coefficients d'intensité $\alpha_j(t)$ pour 5 jours

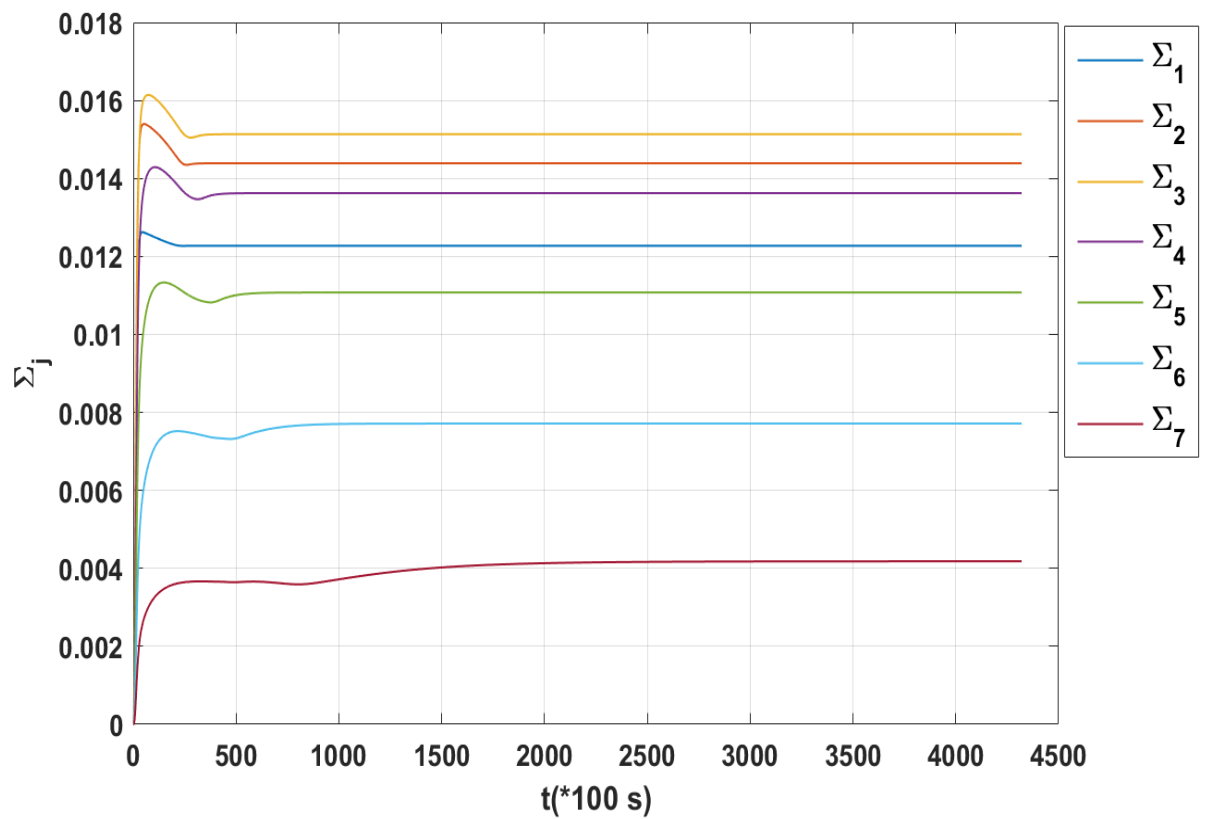


FIGURE 4.9 – Évolution de la quantité d'eau liquide ou solide $\Sigma_j(t)$ pour 5 jours

Chapitre 5

Modèle de l'évaporation et de la diffusion de la vapeur d'eau

5.1 Introduction

L'ÉVAPORATION de la vapeur d'eau à partir de la surface de la mer et la diffusion et le transport de la vapeur dans l'air sont essentiels pour des phénomènes météorologiques et atmosphériques de grand intérêt comme le cyclone tropical ou "*el Niño*" (voir [9], [12], [3], etc...). On peut proposer de le décrire par une équation de transport-diffusion avec une condition aux limites correspondante à l'évaporation à partir de la surface d'eau. Mais il nous semble qu'il n'est pas nécessairement simple de le modéliser d'une manière cohérente ; parmi les nombreuses tentatives, on trouve par exemple [21], [17] (pour certaines difficultés techniques, voir par exemple [19]).

Dans le présent travail, en utilisant l'idée de [33], nous construisons une famille de solutions approchées de l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace avec une condition aux limites et proposons des modèles numériques correspondants à ces solutions approchées de l'évaporation de la vapeur d'eau et de son transport et diffusion.

Dans la première partie du travail nous construisons une famille de solutions approchées de l'équation de transport-diffusion avec un transport horizontal

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \partial_{x_1} u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) \quad (5.1)$$

dans le demi-espace \mathbb{R}_+^2 avec la condition aux limites $u = 1$ sur $\{x_2 = 0\}$. Pour l'équation

(5.1), outre la positivité stricte du coefficient constant κ , on supposera une certaine régularité sur les fonctions $v(t, x)$ et $f(t, x, u)$. Les solutions approchées sont construites d'une manière similaire à [33], pour cela il nous est commode de transformer le problème en un problème sur \mathbb{R}^2 . En effet, comme il est bien connu, si on pose $U = u - 1$, en utilisant le prolongement impair, on peut transformer le problème en un problème dans l'espace \mathbb{R}^2 entier (voir par exemple [34], chap. 3, § 3, n. 2). Ceci nous permet d'utiliser amplement les techniques développées dans [33]. Toutefois, le traitement de la condition aux limites exige une élaboration non indifférente pour l'estimation de la régularité des solutions approchées. Pour obtenir ces estimations on utilisera quelques notions élémentaires de distributions (pour ces notions, voir par exemple dans [35]).

Dans la seconde partie nous montrons d'abord le schéma de calcul numérique d'un modèle de l'évaporation et de la diffusion et le transport de la vapeur d'eau. Ce schéma numérique a des aspects similaires à la méthode d'Euler-Maruyama (voir par exemple [26], [11]). Mais la méthode d'Euler-Maruyama introduit la "diffusion" au pas suivant, tandis que la nôtre prend la moyenne locale du pas précédent. Nous allons montrer deux exemples de calcul numérique : le premier exemple modèle le processus élémentaire d'évaporation et de diffusion locale de la vapeur. On verra que, comme il est naturel, dans la couche la plus proche de la surface d'eau la densité de vapeur tend assez rapidement vers la densité de saturation, tandis que dans les couches suivantes la densité de vapeur augmente graduellement. Dans le second exemple nous montrons le cas où la densité de vapeur initiale est proche (95%) de la saturation et après certains temps à la hauteur de 100 – 200 mètres la densité de vapeur atteint la densité de saturation, ce qui déclenchera le processus de "condensation–réchauffement– ascension de l'air", qui à son tour déclenche une évolution orageuse. Dans ces exemples les paramètres sont choisis pour la commodité pour montrer le fonctionnement du modèle, en renvoyant aux travaux futurs une modélisation avec des paramètres plus fidèles à la réalité physique,

5.2 Définition des solutions approchées et résultat principal

Pour construire les solutions approchées de l'équation (5.1), comme dans [33] nous utilisons une discrétisation du temps spécifique : nous définissons le pas

$$\delta_n = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

et, avec ce pas δ_n , la famille de temps discrétisés

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \dots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \dots, \quad t_k^{[n]} = k\delta_n. \quad (5.3)$$

Nous posons aussi

$$\vartheta_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\delta_n\kappa}\right), \quad \text{pour } r \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

$$\Theta_n(x) = \Theta_n(x_1, x_2) = \vartheta_n(x_1)\vartheta_n(x_2) \quad \text{pour } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.5)$$

où κ est une constante strictement positive.

Désignons par $\Lambda(\cdot)$ l'opérateur de prolongement impair d'une fonction définie sur $r > 0$, c'est-à-dire

$$\Lambda(\varphi(\cdot))(r) = \begin{cases} \varphi(r), & \text{si } r > 0 \\ 0, & \text{si } r = 0 \\ -\varphi(-r), & \text{si } r < 0 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Il est utile de rappeler que la solution $\eta(t, r)$ du problème

$$\partial_t \eta(t, r) = \kappa \partial_r^2 \eta(t, r) \quad \text{pour } t > 0, r > 0,$$

$$\eta(0, r) = \psi(r) \quad \text{pour } r > 0, \quad \eta(t, 0) = 0 \quad \text{pour } t > 0,$$

peut être construite comme la restriction $\eta = \tilde{\eta}|_{\{r \geq 0\}}$ à $r \in [0, \infty[$ de la solution $\tilde{\eta}(t, r)$ du problème

$$\partial_t \tilde{\eta}(t, r) = \kappa \partial_r^2 \tilde{\eta}(t, r) \quad \text{pour } t > 0, r \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{\eta}(0, r) = \Lambda(\psi(\cdot))(r) = \begin{cases} \psi(r), & \text{si } r > 0 \\ 0, & \text{si } r = 0 \\ -\psi(-r), & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

(pour les détails, voir par exemple [34], chap. 3, § 3, n. 2).

Posons

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}. \quad (5.7)$$

Soit $u_0(x)$ une fonction définie sur Ω . Avec l'opérateur $\Lambda(\cdot)$ nous définissons les solutions approchées $u^{[n]}(t, x)$ par

$$u^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = 1 + & \\ & + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) \Lambda(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y_1, \cdot) - 1)(x_2 - y_2) dy_1 dy_2 + \\ & + \delta_n \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \left[\int_{-\infty}^{x_2} \vartheta_n(y_2) f(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2)) dy_2 + \right. \\ & \left. + \int_{x_2}^{\infty} \vartheta_n(y_2) (-f(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, y_2 - x_2, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, y_2 - x_2))) dy_2 \right] dy_1, \\ & x \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$u^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad x \in \Omega. \quad (5.10)$$

On rappelle que, en vertu de la symétrie $\vartheta_n(r) = \vartheta_n(-r)$, dans (5.9), $-y_1$ et $-y_2$ peuvent être remplacés par $+y_1$ et $+y_2$ respectivement (comme dans l'écriture adoptée dans [33]).

Nous allons démontrer que, sous les conditions que nous allons préciser, les fonctions $u^{[n]}(t, x)$ ainsi définies convergent vers une fonction $u(t, x)$ qui satisfait à l'équation de transport-diffusion (5.1) et à la condition aux limites $u = 1$ sur $\{x_2 = 0\}$ ainsi qu'à la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$ dans Ω . Pour préciser les conditions, nous allons utiliser les notations

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad D_{x,u}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial u^{\alpha_3}},$$

où

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{si } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{si } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3.$$

Les fonctions données et leurs dérivées seront considérées sur $\mathbb{R}_+^2 = \overline{\Omega}$ (pour les dérivées, on considère de manière usuelle leur prolongement par continuité sur $\partial\Omega = \{x_2 = 0\}$). Nous désignons par $C_b(\mathbb{R}_+^2)$ (resp. $C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})$) la classe des fonctions continues et

bornées dans \mathbb{R}_+^2 (resp. $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$) et par $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2))$ (resp. $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}))$) la classe des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2$ (resp. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$) et bornées dans $[0, \tau] \times \mathbb{R}_+^2$ (resp. $[0, \tau] \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$) pour tout $\tau > 0$.

Alors on a le

Théorème 5.2.1. *On suppose que*

$$D_x^\alpha v(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 3, \quad (5.11)$$

$$\partial_t D_x^\alpha v(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 2, \quad (5.12)$$

$$\partial_{x_2} v(t, x)|_{x_2=0} = 0, \quad (5.13)$$

$$D_{x,u}^\alpha f(t, x, u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 3, \quad (5.14)$$

$$\partial_t D_{x,u}^\alpha f(t, x, u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 2, \quad (5.15)$$

$$f(t, 0, 1) = 0, \quad (5.16)$$

$$D_x^\alpha u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}_+^2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 3, \quad (5.17)$$

$$u_0(x_1, 0) = 1 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

Alors, quel que soit $\bar{\tau} > 0$, les fonctions $u^{[n]}(t, x)$ définies dans (5.8)–(5.10) et leurs dérivées premières par rapport à x convergent uniformément dans $[0, \bar{\tau}] \times \Omega$. Leurs dérivées secondes par rapport à x convergent ponctuellement pour tout (t, x) , $t > 0$, $x \in \Omega$. La fonction limite $u(t, x)$ satisfait à l'équation

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \partial_{x_1} u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) \quad \text{pour } t > 0, x \in \Omega, \quad (5.19)$$

et aux conditions

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.20)$$

$$u(t, x_1, 0) = 1 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, x_1 \in \mathbb{R} (x_2 = 0). \quad (5.21)$$

Dans (5.19) par Δ on entend l'opérateur de Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

5.3 Préliminaires

Si on pose

$$U_0(x) = (\Lambda(u_0(x_1, \cdot) - 1))(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.22)$$

$$V(t, x_1, x_2) = V(t, x_1, -x_2) = v(t, x_1, x_2), \quad t \geq 0, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0, \quad (5.23)$$

$$F(t, x_1, x_2, U) = \begin{cases} f(t, x_1, x_2, 1 + U), & \text{si } x_2 > 0 \\ 0, & \text{si } x_2 = 0 \\ -f(t, x_1, -x_2, 1 - U), & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}, \quad t \geq 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, U \in \mathbb{R}, \quad (5.24)$$

les solutions approchées $u^{[n]}(t, x)$ peuvent être définies d'une autre manière. Pour cela nous posons

$$U^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.25)$$

$$U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y_1, x_2 - y_2) dy_1 dy_2 + \quad (5.26)$$

$$+ \delta_n \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$U^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (5.27)$$

Nous écrivons le premier terme du second membre de (5.26) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy, \quad \vec{e}_1 = (1, 0)^T, \quad (5.28)$$

quand ce sera commode.

Par rapport à la définition des solutions approchées de [33], dans le présent travail nous avons défini la contribution de F sous la convolution avec Θ_n , ce qui n'était pas le cas dans [33]. Cette modification est motivée pour une raison technique pour l'estimation de la dérivée troisième de $U^{[n]}(t, x)$.

Rappelons aussi que la condition (5.13) et la définition (5.23) implique que $V(t, x)$, $\partial_{x_2} V(t, x)$ et $\partial_{x_2}^2 V(t, x)$ sont continues même aux points $\{x_2 = 0\}$.

La restriction de $1 + U^{[n]}(t, x)$ à Ω coïncidera avec la solution approchée $u^{[n]}(t, x)$ défini dans (5.8)–(5.10). Pour nous convaincre de cette coïncidence, nous rappelons la relation suivante.

Remarque 5.3.1. *Supposons que $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ est continue et bornée dans \mathbb{R}^2 et impaire par rapport à x_2 . Alors $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ définie dans (5.26) est elle aussi continue et bornée dans \mathbb{R}^2 et impaire par rapport à x_2 .*

DÉMONSTRATION. On remarque que d'après (5.24), si $x_2 < 0$, alors on a

$$F(t, x_1, x_2, U) = -F(t, x_1, -x_2, -U).$$

Donc, compte tenu de l'imparité de $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$, on a

$$F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2)) = -F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, -x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, -x_2)).$$

C'est-à-dire, la fonction $F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2))$ est impaire par rapport à x_2 .

Donc, compte tenu de la relation $\vartheta_n(y_2) = \vartheta_n(-y_2)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) F(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2)) dy_1 dy_2 = \quad (5.29) \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) F(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, -x_2 - y_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, -x_2 - y_2)) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

On rappelle aussi que d'après notre hypothèse la fonction $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ est continue en x et impaire par rapport à x_2 et donc $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0) = 0$. Donc, en vertu de (5.24) et de (5.16), on a

$$F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0)) = 0 = f(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0, 1 + U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0)), \quad (5.30)$$

ce qui, joint à (5.14), implique que la fonction $F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ est continue en $x \in \mathbb{R}_+^2$ et par la symétrie entre x_2 et $-x_2$ elle est continue dans \mathbb{R}^2 . D'après la condition (5.14) et la définition (5.24) $F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ est bornée.

D'autre part, comme $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2)$ est impaire en x_2 , compte tenu encore de la relation $\vartheta_n(y_2) = \vartheta_n(-y_2)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x_1, x_2) - y_1, x_2 - y_2) dy_1 dy_2 = \quad (5.31) \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x_1, -x_2) - y_1, -x_2 - y_2) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la bornitude et la continuité, de l'hypothèse de la bornitude et de la continuité de $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ et de celles de $v(t, x)$ (et donc de $V(t, x)$) on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \tilde{e}_1 - y) dy$$

est bornée et continue en $x \in \mathbb{R}^2$.

Les deux termes du second membre de (5.26) sont continues et bornées dans \mathbb{R}^2 et impaires par rapport à x_2 (voir (5.29), (5.31)), l'est aussi leur somme, ce qu'il fallait démontrer. \square

On rappelle que la fonction $F(t, x, U)$ définie dans (5.24) n'est pas nécessairement continue aux points $(x_1, 0)$; donc pour démontrer la continuité de $F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ on a besoin de l'égalité (5.30).

L'affirmation de la remarque 5.3.1 et le raisonnement de sa démonstration nous permettent de conclure comme suit :

Remarque 5.3.2. *Les fonctions $U^{[n]}(t, x)$ définies dans (5.25)–(5.27) sont bornées et continues dans \mathbb{R}^2 et impaires par rapport à x_2 , c'est-à-dire*

$$U^{[n]}(t, x_1, x_2) = -U^{[n]}(t, x_1, -x_2) \quad \text{pour } t \geq 0, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.32)$$

En particulier on a

$$U^{[n]}(t, x_1, 0) = 0 \quad \forall (t, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (5.33)$$

En outre, on a

$$U^{[n]}(t, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t, x_1, \cdot) - 1))(x_2) \quad \text{pour } t \geq 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.34)$$

où $u^{[n]}(t, x)$ est la fonction définie dans (5.8)–(5.10).

DÉMONSTRATION. Rappelons que, en vertu des définitions (5.22), (5.25) et des conditions (5.17)–(5.18), la fonction $U^{[n]}(t_0^{[n]}, x)$ est continue et bornée dans \mathbb{R}^2 et impaires par rapport à x_2 . Donc l'affirmation de la remarque 5.3.1 implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ est continue et bornée dans \mathbb{R}^2 et impaires par rapport à x_2 .

La définition (5.27) nous permet d'en déduire que $U^{[n]}(t, x)$ est bornée et continue en $t \in \mathbb{R}_+$ et en $x \in \mathbb{R}^2$ et impaire par rapport à x_2 .

En outre, en raisonnant d'une manière analogue à la démonstration de la remarque 5.3.1, il n'est pas difficile de voir que, si

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, \cdot) - 1))(x_2) \quad \text{pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

alors on aura

$$U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, \cdot) - 1))(x_2) \quad \text{pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les définitions (5.10), (5.27) nous permettent d'en tirer (5.34). \square

La relation (5.34) nous permet de définir $u^{[n]}(t, x)$ par

$$u^{[n]}(t, x_1, x_2) = 1 + U^{[n]}(t, x_1, x_2) \quad \text{pour } t \geq 0, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0. \quad (5.35)$$

Pour la convergence de $u^{[n]}(t, x)$, nous allons la démontrer pour $U^{[n]}(t, x)$. En effet, la définition (5.25)–(5.27) de $U^{[n]}(t, x)$ est similaire à celle étudiée dans [33], de sorte que nous pouvons utiliser des techniques de [33]. Toutefois la condition aux limites (5.21) provoque une perte de régularité. Ainsi nous devons construire une estimation plus élaborée.

5.4 Bornitude uniforme des solutions approchées et de leurs dérivées

La bornitude uniforme de $U^{[n]}(t, x)$ s'obtient d'une manière assez simple.

Lemme 5.4.1. *Soit $\bar{t} > 1$. Posons*

$$A_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U_0(x)|, \quad A_F = \sup_{(t, x, u) \in [0, \bar{t}] \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}} |F(t, x, u)|. \quad (5.36)$$

Alors, sous les hypothèses du théorème 5.2.1, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{x \in \Omega} |U^{[n]}(t, x)| \leq A_0 + A_F t, \quad \forall t \in [0, \bar{t} - 1]. \quad (5.37)$$

DÉMONSTRATION. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta_n(y)| dy = 1,$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \bar{e}_1 - y) dy \right| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)|.$$

Donc compte tenu de la relation

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) dy \right| \leq A_F,$$

on obtient

$$\sup_{x \in \Omega} |U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq A_0 + k \delta_n A_F = A_0 + t_k^{[n]} A_F,$$

d'où, compte tenu de (5.27), on obtient (5.37). \square

Pour les estimations des dérivées de $U^{[n]}(t, x)$, nous suivons le schéma de [33]. Mais à la différence du cas de [33], dans notre cas nous devons préciser le comportement des dérivées aux points $(x_1, 0)$.

Lemme 5.4.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Alors il existe une fonction $\Phi_1(t)$ continue sur \mathbb{R}_+ , croissante, indépendante de n et telle que l'on ait*

$$\sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t, x) \right| \leq \Phi_1(t). \quad (5.38)$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad i = 1, 2. \quad (5.39)$$

Comme l'opérateur différentiel ∂_{x_i} commute avec la convolution, en dérivant par rapport à x_i les deux membres de (5.26), on a

$$\begin{aligned} w_{i,k}^{[1,n]}(x) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[w_{i,k-1}^{[1,n]}(\xi(x, y)) - \delta_n \frac{\partial V(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_i} w_{1,k-1}^{[1,n]}(\xi(x, y)) \right] dy + \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$+\delta_n \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[\frac{\partial F(t_k^{[n]}, x-y, U)}{\partial U} \Big|_{U=U^{[n]}(t_k^{[n]}, x-y)} w_{i,k-1}^{[1,n]}(x-y) + \frac{\partial F(t_k^{[n]}, \xi, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x))}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi=x-y} \right] dy,$$

où

$$\xi(x, y) = x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y. \quad (5.41)$$

Compte tenu des hypothèses du théorème 5.2.1, de l'égalité (5.40) on déduit que, si on pose

$$A_k^{[1,n]} = \sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{i,k}^{[1,n]}(x)|,$$

on a

$$A_k^{[1,n]} \leq (1 + \delta_n C) A_{k-1}^{[1,n]} + \delta_n C,$$

où C est une constante indépendante de n . On a donc

$$A_k^{[1,n]} \leq A_0^{[1,n]} (1 + \delta_n C)^k + \delta_n C \sum_{j=1}^k (1 + \delta_n C)^{k-j}, \quad A_0^{[1,n]} = \sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \Omega} |\partial_{x_i} u_0(x)|.$$

De cette inégalité, compte tenu de la relation $t_k^{[n]} = k\delta_n$ et aussi de la définition (5.27), on déduit l'existence d'une fonction $\Phi_1(t)$ satisfaisant à (5.38) (pour les détails du raisonnement, voir la démonstration du lemme 3.1 de [33]). \square

Pour estimer les dérivées secondes de $U^{[n]}(t, x)$ par rapport à x , on rappelle que $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t, x)$ n'est pas nécessairement définie sur $\{0 \leq t < t_1^{[n]}, x_2 = 0\}$ (voir (5.17), (5.18), (5.22), (5.25)). Mais ce défaut ne cause pas de difficulté.

Lemme 5.4.3. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Si nous convenons de définir*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t, x) \Big|_{x_2=0} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq t < t_1^{[n]} = \delta_n, \quad (5.42)$$

alors il existe une fonction $\Phi_2(t)$ continue sur \mathbb{R}_+ , croissante, indépendante de n et telle que l'on ait

$$\sum_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_2(t). \quad (5.43)$$

DÉMONSTRATION. Rappelons d'abord que pour $k \geq 1$, en vertu de (5.26), $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ est bien définie sur \mathbb{R}^2 et que $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2)$ est impaire par rapport à x_2 et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|_{x_2=0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

D'autre part, en vertu des hypothèses (5.17)–(5.18) (voir aussi (5.22) et (5.25)) on a

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x_1, x_2) = u''_{00}(x_1), \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x_1, x_2) = -u''_{00}(x_1),$$

où

$$u''_{00}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_0(x_1, x_2). \quad (5.44)$$

Donc, la convention (5.42) donne la moyenne entre la valeur limite pour $x_2 \rightarrow 0^+$ et celle pour $x_2 \rightarrow 0^-$ de $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t, x)$ définie par (5.27) pour $0 \leq t < t_1^{[n]} = \delta_n$, de sorte que la convention (5.42) n'influence pas sur l'estimation (5.43).

Nous démontrons l'existence d'une fonction $\Phi_2(t)$ vérifiant l'inégalité (5.43) d'une manière similaire à la démonstration du lemme 4.1 de [33]. En effet, si on pose

$$w_{\alpha,k}^{[2,n]}(x) = D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad \alpha \in \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\} \quad (5.45)$$

et si on utilise la notation $\xi(x, y)$ introduite dans (5.41), on a

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi(x, y)) = w_{\alpha,k-1}^{[2,n]}(\xi(x, y)) + \quad (5.46)$$

$$+ \sum_{|\beta|=2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'} P_{\beta,m'}(DV) w_{\beta,k-1}^{[2,n]}(\xi(x, y)) - \delta_n w_{1,k-1}^{[1,n]}(\xi(x, y)) D^\alpha V(t_k^{[n]}, x),$$

$$\begin{aligned} & D_x^\alpha F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) = \quad (5.47) \\ & = \frac{\partial}{\partial U} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{\alpha,k-1}^{[2,n]}(x) + R(DF, DU^{[n]}), \end{aligned}$$

où $P_{\beta,m'}(DV)$ est une somme de produit de m' dérivées premières de V par rapport à x_1 ou x_2 et $R(DF, DU^{[n]})$ est une somme de dérivées de F d'ordre 1 ou 2 éventuellement multipliées par des dérivées première de $U^{[n]}$ (ici $w_{1,k-1}^{[1,n]}(\cdot)$ est la fonction définie dans (5.39)). Dans le cas $\alpha = (0, 2)$, en général la dérivée $D_x^\alpha F$ dans (5.47) n'est pas définie aux points $x \in \{x_2 = 0\}$. Mais, comme $\partial_{x_2} F$ est continue, dans l'intégrale du second terme du second membre de (5.26) la valeur de la dérivée $\partial_{x_2}^2 F$ (où on remplace x par $x - y$)

qui n'est pas bien définie aux points $\{x_2 - y_2 = 0\}$ n'influence pas sur le résultat du calcul intégral.

Cela étant, en appliquant l'opérateur différentiel D^α aux deux membres de (5.26) et en substituant les expressions de (5.46)–(5.47) sous l'intégrale du second membre de (5.26), compte tenu des hypothèses du théorème 5.2.1 et du résultat du lemme 5.4.2, pour

$$A_k^{[2,n]} = \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |w_{\alpha,k}^{[2,n]}(x)|,$$

on obtient l'inégalité

$$A_k^{[2,n]} \leq (1 + \delta_n C_1) A_{k-1}^{[2,n]} + \delta_n R_1(t_k^{[n]})$$

avec une constante C_1 indépendante de n et une fonction continue croissante $R_1(t)$. De cette inégalité d'une manière habituelle on obtient (5.43). \square

Lemme 5.4.4. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Alors il existe une fonction $\Phi_3(t)$ continue sur \mathbb{R}_+ , croissante et indépendante de n et une constante \bar{C}_3 indépendante de n telles que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un nombre naturel $\bar{n}(\varepsilon_1)$ tel que pour tout $n \geq \bar{n}(\varepsilon_1)$ on ait*

$$\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon_1, |x_2| \geq \varepsilon_1} |D_x^\alpha U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_3(\varepsilon_1) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \bar{C}_3, \quad |\alpha| = 3, \quad (5.48)$$

$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_3(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} \bar{C}_3, \quad t \geq \varepsilon_1. \quad (5.49)$$

DÉMONSTRATION. Introduisons deux fonctions auxiliaires $v(x)$ et $H_{[n]k}(x)$. On pose

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} u''_{00}(x_1) \zeta(x_2) \frac{x_2^2}{2} & \text{si } x_2 \geq 0 \\ -u''_{00}(x_1) \zeta(-x_2) \frac{x_2^2}{2} & \text{si } x_2 \leq 0 \end{cases}, \quad (5.50)$$

où $u''_{00}(x_1)$ est la valeur définie dans (5.44) et $\zeta(x_2)$ est une fonction décroissante de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\zeta(x_2) = 1 \quad \text{pour } 0 \leq x_2 \leq 1, \quad \zeta(x_2) = 0 \quad \text{pour } x_2 \geq 2. \quad (5.51)$$

On pose aussi

$$H_{[n]k}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(t_k^{[n]}, x_1, r, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, r)), & \text{si } x_2 > 0 \\ 0, & \text{si } x_2 = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0^-} \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(t_k^{[n]}, x_1, r, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, r)), & \text{si } x_2 < 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

On rappelle que, en vertu du lemme 5.4.3, $H_{[n]k}(x_1, x_2)$ est bien définie. Nous posons aussi

$$H'_{[n]k}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} H_{[n]k}(x_1, x_2); \quad (5.53)$$

ici la dérivée doit être prise dans le sens de distribution. Comme il est bien connu, $H'_{[n]k}(x_1, x_2)$ peut être exprimée en utilisant la δ de Dirac. Mais pour éviter d'éventuelles équivoques dues à des symboles trop similaires, nous utilisons la notation $H'_{[n]k}(x_1, x_2)$.

On introduit aussi l'opérateur

$$G_n(\varphi)(x) = G_{n,k'}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \varphi(x - \delta_n V(t_{k'}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy. \quad (5.54)$$

Même si l'opérateur $G_{n,k'}$ dépend de $t_{k'}^{[n]}$, comme sa dépendance n'influence pas ses propriétés principales que nous allons utiliser, par abus de langage nous écrivons

$$G_n^1(\varphi)(x) = G_n(\varphi)(x) = G_{n,k'}(\varphi)(x), \quad G_n^{k+1}(\varphi)(x) = G_n(G_n^k(\varphi))(x). \quad (5.55)$$

Pour démontrer l'existence d'une fonction $\Phi_3(t)$ qui satisfait à (5.49), nous posons

$$\tilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) = D_x^\alpha [U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - (G_n^k \nu)(x)] \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}. \quad (5.56)$$

On examine d'abord la contribution du premier terme intégral du second membre de (5.26). On remarque que, comme on le voit de manière similaire à (5.46), compte tenu de (5.56) on a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi(x, y)) &= \tilde{w}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) + D_x^\alpha (G_n^{k-1} \nu)(\xi(x, y)) + \\ &+ \sum_{|\beta|=3} \sum_{m'=1}^3 (-\delta_n)^{m'} P_{\alpha,\beta,m'}(DV) (\tilde{w}_{\beta,k-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) + D_x^\beta (G_n^{k-1} \nu)(\xi(x, y))) + \\ &+ \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'} Q_{\alpha,\beta,m'}(DV) w_{\beta,k-1}^{[|\beta|,n]}(\xi(x, y)). \end{aligned} \quad (5.57)$$

où $\xi(x, y)$ est la fonction introduite dans (5.41), $P_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ est une somme de produit de m' dérivées premières de V par rapport à x_1 ou x_2 , $Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ est une somme de

produits de m' dérivées d'ordre inférieur ou égal à 3 de V par rapport à x_1 ou x_2 . Nous rappelons que, comme le transport $V(t, x)\vec{e}_1$ est seulement dans la direction de x_1 , le calcul de la dérivée d'une fonction composée (de $U^{[n]}$ et de V) entraîne que pour tout α , $|\alpha| = 3$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a

$$P_{\alpha,(0,3),m'}(DV) = 0. \quad (5.58)$$

En ce qui concerne la contribution du second terme intégral du second membre de (5.26), rappelons que l'hypothèse (5.14) sur la régularité de $f(t, x, u)$ et le prolongement impair avec la condition (5.16) impliquent la continuité de $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ même aux points $\{x_2 = 0\}$ et donc, même si $\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^3} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ n'est pas définie sur $\{x_2 = 0\}$, on peut le négliger quand on effectue l'intégration (comme dans (5.26)). D'autre part, $\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} F(t_k^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2))$ et $\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} F(t_k^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2))$ généralement ne coïncident pas, ce qui implique que, lorsqu'on effectue l'intégration de $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} F(t_k^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2))$, il faut considérer une distribution avec une mesure singulière non nulle concentrée sur $\{x_2 = 0\}$. Pour cela il nous est commode de distinguer la partie de $D_x^\alpha F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ et la partie sur $\{x_2 = 0\}$; il est clair que cette dernière doit être considérée comme une distribution. Ainsi, en procédant d'une manière similaire à (5.47), on a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) &= \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial U} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) (\tilde{w}_{\alpha, k-1}^{[3, n]}(x) + D_x^\alpha (G_n^{k-1} \nu)(x)) + R_\alpha(DF, DU^{[n]}) \right]_{\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} + \\ &\quad + I_{\alpha, k-1}(x), \end{aligned} \quad (5.59)$$

où $R_\alpha(DF, DU^{[n]})$ est une somme de produits de dérivées de F d'ordre inférieur ou égal à 3 et de dérivées de $U^{[n]}$ d'ordre inférieur ou égal à 2, tandis que

$$I_{\alpha, k-1}(x) = \begin{cases} H'_{[n]k-1}(x) & \text{si } \alpha = (0, 3), \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}. \quad (5.60)$$

Posons

$$\tilde{w}_k^{[3, n]}(x) = (\tilde{w}_{(3,0),k}^{[3, n]}(x), \tilde{w}_{(2,1),k}^{[3, n]}(x), \tilde{w}_{(1,2),k}^{[3, n]}(x), \tilde{w}_{(0,3),k}^{[3, n]}(x)). \quad (5.61)$$

Introduisons l'opérateur

$$(\Pi \tilde{w})_\alpha = -G_n \left(\sum_{|\beta|=3} \sum_{m'=1}^3 (-\delta_n)^{m'-1} P_{\alpha,\beta,m'}(DV) \tilde{w}_\beta(\xi(\cdot, \cdot)) \right) + \frac{\partial F}{\partial U} \tilde{w}_\alpha \quad (5.62)$$

qui agit sur $\tilde{w} = (\tilde{w}_{(3,0)}, \tilde{w}_{(2,1)}, \tilde{w}_{(1,2)}, \tilde{w}_{(0,3)})$. Introduisons aussi la fonction

$$(\Psi_k)_\alpha = -G_n \left(\sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'-1} Q_{\alpha,\beta,m'}(DV) w_{\beta,k}^{[|\beta|,n]}(\xi(\cdot, \cdot)) \right) + [R_\alpha(DF, DU^{[n]})]_{\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} \quad (5.63)$$

Posons en outre

$$I_k = (0, 0, 0, H'_{[n]k}(\cdot)) \quad (5.64)$$

(qui n'est autre qu'une autre écriture de (5.60)). En réalité l'opérateur Π dépend de k . Mais, comme dans l'estimation qui nous intéresse n'intervient pas sa dépendance de k , pour la simplicité d'écriture nous l'écrivons sans indiquer sa dépendance de k . Enfin on pose

$$D_x^{[3]} = (D_x^{(3,0)}, D_x^{(2,1)}, D_x^{(1,2)}, D_x^{(0,3)}). \quad (5.65)$$

Avec ces notations la partie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ de la formule (5.26) peut être réécrite sous la forme

$$\tilde{w}_k^{[3,n]} = (G_n + \delta_n \Pi) \tilde{w}_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n \Pi D_x^{[3]} G_n^{k-1} \nu + \delta_n \Psi_{k-1} + \delta_n G_{0,n}(I_{k-1}) \quad \text{pour } k \geq 1, \quad (5.66)$$

où

$$G_{0,n}(I_{k-1}) = \Theta_n * I_{k-1} \quad (5.67)$$

(ici $*$ désigne la convolution). En posant

$$\tilde{w}_0 = D_x^{[3]}(U_0 - \nu), \quad (5.68)$$

on a en particulier

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1^{[3,n]} &= (G_n + \delta_n \Pi) \tilde{w}_0 + \delta_n \Pi D_x^{[3]} \nu + \delta_n \Psi_0 + \delta_n G_{0,n}(I_0), \\ \tilde{w}_2^{[3,n]} &= (G_n + \delta_n \Pi)^2 \tilde{w}_0 + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{2-1-j} \Pi D_x^{[3]} G_n^j \nu + \\ &\quad + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{2-1-j} \Psi_j + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} G_n^{2-1-j} G_{0,n}(I_j) + \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$+\delta_n^2 \sum_{h=0}^{2-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{2-2-h} G_n^{2-2-h-j} G_{0,n}(I_j).$$

En outre, si $w_k^{[3,n]}$ a l'expression

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k^{[3,n]} &= (G_n + \delta_n \Pi)^k \tilde{w}_0 + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Pi D_x^{[3]} G_n^j v + \\ &+ \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Psi_j + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j) + \\ &+ \delta_n^2 \sum_{h=0}^{k-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{k-2-h} G_n^{k-2-h-j} G_{0,n}(I_j), \end{aligned} \quad (5.70)$$

alors (5.66) nous donne $\tilde{w}_{k+1}^{[3,n]}$ ayant l'expression (5.70) où k est remplacé par $k+1$. Donc compte tenu de (5.69) on peut déduire que pour tout $k \geq 2$, $\tilde{w}_k^{[3,n]}$ a l'expression (5.70).

Nous allons estimer chaque terme du second membre de (5.70). Pour cela introduisons la notation

$$\|\tilde{w}\|_A = \sum_{|\alpha|=3} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\tilde{w}_\alpha(x)|. \quad (5.71)$$

Maintenant nous considérons un intervalle fini fixé $[0, \bar{t}]$; les nombres k que nous considérons ci-dessous sont tels que $0 \leq k \leq \frac{\bar{t}}{\delta_n}$. Alors d'après la définition (5.62) (voir aussi (5.11), (5.14)) il existe une constante C_π telle que

$$\|\Pi \tilde{w}\|_A \leq C_\pi \|\tilde{w}\|_A \quad (5.72)$$

pour Π défini dans l'intervalle $[0, \bar{t}]$. Analoguement d'après (5.63) (voir aussi (5.11), (5.13), (5.14)) et le lemme 5.4.3) il existe une constante C_ψ telle que

$$\|(\Psi_k)\|_A \leq C_\psi \quad \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, \frac{\bar{t}}{\delta_n}]. \quad (5.73)$$

Pour estimer les termes relatifs à I_j et v , nous utilisons le lemme 5.4.5, que nous allons démontrer dans la suite. En effet, en rappelant que d'après l'hypothèse (5.14) et le lemme 5.4.3 il existe une constante C_H telle que

$$|H_{[n]k}(x)| \leq C_H \quad \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, \frac{\bar{t}}{\delta_n}], \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

(voir (5.52)) et donc d'après le lemme 5.4.5 on a

$$\|G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j)\|_A \leq \frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa(k-j)\delta_n}} C_H \equiv \frac{1}{\sqrt{(k-j)\delta_n}} C_\eta. \quad (5.74)$$

En ce qui concerne $D_x^{[3]} G_n^j v$, comme

$$D_x^{[3]} G_n^j v(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) D_x^{[3]} G_n^{j-1} v(\xi(x, y)) dy \quad (5.75)$$

(voir (5.54), (5.41)), il est utile de rappeler l'égalité

$$\begin{aligned} D_x^\alpha G_n^{j-1} v(\xi(x, y)) &= D_\xi^\alpha G_n^{j-1} v(\xi) \Big|_{\xi=\xi(x,y)} + \\ &+ \sum_{|\beta|=3} \sum_{m'=1}^3 (-\delta_n)^{m'} P_{\alpha,\beta,m'}(DV) D_\xi^\beta G_n^{j-1} v(\xi) \Big|_{\xi=\xi(x,y)} + \\ &+ \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'} Q_{\alpha,\beta,m'}(DV) D_\xi^\beta G_n^{j-1} v(\xi) \Big|_{\xi=\xi(x,y)}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

qui s'obtient de manière analogue à (5.57).

Rappelons aussi que, en raisonnant de manière analogue à la démonstration des lemmes 5.4.2 et 5.4.3 mais avec $F = 0$, il n'est pas difficile de constater qu'il existe une fonction croissante $\Phi_v(t)$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha G_n^j v| \leq \Phi_v(j\delta_n), \quad \text{pour tout } \alpha, |\alpha| \leq 2. \quad (5.77)$$

Pour $\alpha = (3, 0), (2, 1), (1, 2)$, nous posons

$$\|D_x^{[3]} G_n^j v\|_{A'} = \sum_{\alpha \in \{(3,0), (2,1), (1,2)\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha G_n^j v(x)|.$$

Si $\alpha \in \{(3, 0), (2, 1), (1, 2)\}$, en vertu de (5.58) le second membre de (5.76) est indépendant de $\partial_{x_2}^3 G_n^{j-1} v(\xi(x, y))$, ce qui nous permet d'obtenir de l'égalité (5.76) et de la définition de l'opérateur G_n (voir (5.54)) l'inégalité

$$\|D_x^{[3]} G_n^j v\|_{A'} \leq (1 + C_1 \delta_n) \|D_x^{[3]} G_n^{j-1} v\|_{A'} + \delta_n C_1 \Phi_v((j-1)\delta_n),$$

où C_1 est une constante indépendante de n . De cette inégalité de manière habituelle on déduit qu'il existe une fonction croissante $\Phi_{v,1}(t)$ telle que

$$\|D_x^{[3]} G_n^j v\|_{A'} \leq \Phi_{v,1}(j\delta_n). \quad (5.78)$$

En ce qui concerne $\partial_{x_2}^3 G_n^j v(x)$, pour que la présentation soit claire, nous utilisons la notation

$$\xi_j(x, y) = x - \delta_n V(t_j^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y,$$

de sorte que

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j v(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^{j-1} v(\xi_j(x, y)) dy$$

(voir (5.75)). Nous allons vérifier la relation

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j(v)(x) = I_{v,j}(x) + f_{v,j}(x) + g_{v,j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (5.79)$$

où

$$I_{v,j} = G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \Big|_{\{x_2=0\}} \right), \quad f_{v,j} = G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \Big|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} \right),$$

tandis que $g_{v,j}$ est une fonction telle qu'il existe une fonction croissante $\Phi_{v,g}(\cdot)$ indépendante de n vérifiant l'inégalité

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |g_{v,j}(\xi)| \leq \Phi_{v,g}(j\delta_n).$$

En effet, on a

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^{j-1}(v)(\xi_j(x, y)) = \frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G_n^{j-1}(v)(\zeta) \Big|_{\zeta=\xi_j(x,y)} + \delta_n \tilde{g}_{j-1},$$

où \tilde{g}_{j-1} est une somme de produits d'une dérivée de $G_n^{j-1}(v)$ d'ordre inférieur ou égal à 3 et de dérivées de $V(t_j^{[n]}, x)$ par rapport à x_2 d'ordre inférieur ou égal à 3 ; ici le terme \tilde{g}_j ne contient pas dans son intérieur la dérivée $\frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G_n^{j-1}(v)$ (en vertu de la relation $P_{(0,3),(0,3),m'}(DV) = 0$ montrée dans (5.58)). On a donc

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j(v)(x) = G_n \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^{j-1}(v) \right)(x) + \delta_n G_n(\tilde{g}_{j-1})(x).$$

En itérant j fois ce procédé, on parviendra à

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j(v)(x) = G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \right)(x) + \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G_n^{j-j'}(\tilde{g}_{j'})(x).$$

Comme $\tilde{g}_{j'}$ ne contient pas $\frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G_n^{j-1}(v)$, il peut être majoré par les estimations déjà établies, de sorte qu'il existe une fonction croissante $\Phi_{v,g}(\cdot)$ indépendante de n telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G_n^{j-j'}(\tilde{g}_{j'})(x) \right| \leq \Phi_{v,g}(j\delta_n).$$

D'autre part, il est clair que

$$G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \right) (x) = I_{v,j}(x) + f_{v,j}(x).$$

Cela étant, si on pose

$$g_{v,j} = \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G_n^{j-j'} (\tilde{g}_{j'}) (x),$$

on obtient (5.79).

Rappelons que, en vertu de (5.50), $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \Big|_{\{x_2=0\}}$ satisfait à la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_2) \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \Big|_{\{x_2=0\}} (x_1, x_2) dx_2 = 2u''_{00}(x_1) \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{R}),$$

C'est-à-dire, $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v \Big|_{\{x_2=0\}} (x_1, x_2)$ est la distribution $\delta(x_2)$ de Dirac sur $-\infty < x_2 < \infty$ multipliée par $2u''_{00}(x_1)$. Ainsi, d'après le lemme 5.4.5 on a

D'après le lemme 5.4.5 on a

$$|f_{v,j}(x)| \leq \bar{C}_f, \quad |I_{v,j}(x)| \leq \frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi j \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4j \delta_n \kappa}\right),$$

où

$$\bar{C}_f = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} \left| \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} v(x) \right|, \quad \bar{C}_I = 2 \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} |u''_{00}(x_1)|.$$

On a donc

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} (G_n^j v)(x) \right| \leq \bar{C}_f + \frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi j \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4j \delta_n \kappa}\right) + \Phi_{v,g}(j \delta_n). \quad (5.80)$$

Les relations (5.73)–(5.80) nous donnent, pour $t = k \delta_n$ et avec $\Phi_v(t) = \Phi_{v,1}(t) + \Phi_{v,g}(t)$,

$$\begin{aligned} \|(G_n + \delta_n \Pi)^k \tilde{w}_0\|_A &\leq (1 + \delta_n C_\pi)^k \tilde{w}_0\|_A \leq e^{t C_\pi} \|\tilde{w}_0\|_A, \\ \|\delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Pi D_x^{[3]} G_n^j v\|_A &\leq C_\pi \int_0^t e^{(t-s) C_\pi} (\Phi_v(s) + \bar{C}_f + \frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi \kappa s}}) ds, \\ \|\delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Psi_j\|_A &\leq C_\psi \int_0^t e^{(t-s) C_\pi} ds, \\ \|\delta_n \sum_{j=0}^{k-1} G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j)\|_A &\leq C_\eta \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds, \\ \|\delta_n^2 \sum_{h=0}^{k-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{k-2-h} G_n^{k-2-h-j} G_{0,n}(I_j)\|_A &\leq C_\pi \int_0^t e^{s C_\pi} \int_0^{t-s} \frac{1}{\sqrt{t-s-r}} dr ds. \end{aligned}$$

Comme le second membre de ces inégalités est majoré par une constante qui dépend de \bar{t} mais ne dépend ni de $t \in [0, \bar{t}]$ ni de n , de ces inégalités on déduit qu'il existe une fonction $\tilde{\Phi}_3(\bar{t})$ telle que

$$\|\tilde{w}_k^{[3,n]}\|_A \leq \tilde{\Phi}_3(\bar{t}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, \frac{\bar{t}}{\delta_n}]. \quad (5.81)$$

En dénotant t au lieu de \bar{t} dans (5.81) et en rappelant les définitions (5.56) et (5.71) ainsi que le passage de $\{t_k^{[n]}\}$ à $t \in [0, \bar{t}]$ par (5.27), des inégalités (5.78), (5.80) et (5.81) on déduit qu'il existe une fonction croissante $\Phi_3(t)$ indépendante de n et une constante \bar{C}_3 indépendante de n qui vérifient les relations (5.48) et (5.49). Le lemme est démontré.

□

Lemme 5.4.5. *i) Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction mesurable définie sur \mathbb{R}^2 . Soit $g(x_2)$ une fonction mesurable non-négative définie sur \mathbb{R} . Si*

$$|f(x_1, x_2)| \leq g(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.82)$$

alors on a

$$|(G_n^k f)(x_1, x_2)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi k \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{4k \delta_n \kappa}\right) g(x_2 - y_2) dy_2. \quad (5.83)$$

ii) Soit $\eta(x_1)$ une fonction mesurable bornée définie sur \mathbb{R} . Alors on a

$$|(G_n^k(\eta(\cdot)\delta(\cdot)))(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi k \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4k \delta_n \kappa}\right) \sup_{x'_1 \in \mathbb{R}} |\eta(x'_1)|, \quad (5.84)$$

où $\delta(\cdot)$ est la distribution de Dirac sur $-\infty < x_2 < \infty$.

Dans les inégalités (5.83)–(5.84) G_n^k peut être remplacé par $G_n^{k-1} G_{0,n}$.

DÉMONSTRATION. Comme le transport $V\vec{e}_1$ est seulement dans la direction de x_1 , la condition (5.82) implique que, pour quelconque $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x_1 - \delta_n V(t, x), x_2)| \leq g(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui implique que

$$|(G_{n,k'} f)(x_1, x_2)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{4\delta_n \kappa}\right) g(x_2 - y_2) dy_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

En répétant ce raisonnement, on parvient à (5.83).

Pour démontrer la seconde affirmation, il suffit de rappeler que la convolution de δ de Dirac avec une fonction localement intégrable $\varphi(x_2)$ n'est autre que la même fonction $\varphi(x_2)$, ce qui implique l'inégalité (5.84) avec $k = 1$, donc d'après la première affirmation on parvient à (5.84). L'opérateur $G_{0,n}$ est simplement le cas de G_n avec $V = 0$.
□

5.5 Convergence des solutions approchées

Dans ce paragraphe, en utilisant la bornitude uniforme de $U^{[n]}(t, x)$ et de ses dérivées premières, secondes et troisièmes par rapport à x , démontrée dans les lemmes 5.4.1–5.4.4, nous allons démontrer la convergence de $U^{[n]}(t, x)$ et ses dérivées premières et secondes. Pour la convergence uniforme de $U^{[n]}(t, x)$ et de leurs dérivées premières, nous suivons le schéma des propositions 5.1 et 6.1 de [33], tandis que pour la convergence ponctuelle des dérivées secondes, nous allons utiliser un autre raisonnement. Lorsque les argumentations de la démonstration sont similaires à celles de [33] (même si la définition des solutions approchées est légèrement différente), nous renvoyons les détails du calcul à [33].

Lemme 5.5.1. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Alors, quel que soit $\tau > 0$, les fonctions $U^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, définies dans (5.25)–(5.27) convergent uniformément sur $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ pour $n \rightarrow \infty$.*

DÉMONSTRATION. Nous suivons l'idée de la démonstration de la proposition 5.1 de [33]. Si on pose

$$\xi_{k'}^{[n']}(x, y) = x - \delta_{n'} V(t_{k'}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y \quad (5.85)$$

pour $k' = k + 1$ ou $= 2k + 1$ ou $= 2k + 2$ et $n' = n$ ou $= n + 1$, on a

$$U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = I_{2k}^{[n+1]} + J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]}, \quad (5.86)$$

où

$$I_{2k}^{[n+1]} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y^{(1)}, y^{(2)})) dy^{(1)} dy^{(2)}, \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \xi^*(y^{(1)}, y^{(2)}) &= \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \vec{e}_1 - y^{(2)}, \\ J_{a,2k}^{[n+1]} &= \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) (\Theta_{n+1} * F(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot, U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot))) (\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) dy^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$J_{b,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F(t_{2k+1}^{[n+1]}, x - y^{(1)}, \bar{U}_1 + \bar{U}_2) dy^{(1)}, \quad (5.89)$$

$$\bar{U}_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+1}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)})) dy^{(2)},$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_2(x - y^{(1)}) = \delta_{n+1} (\Theta_{n+1} * F(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot, U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot))) (x - y^{(1)});$$

ici et dans la suite nous utilisons l'écriture avec la convolution $*$, quand l'écriture devient plus simple.

Pour $I_{2k}^{[n+1]}$, en utilisant la relation

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(z) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, z)) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, y^{(1)} + y^{(2)})) dy^{(1)} dy^{(2)} \end{aligned} \quad (5.90)$$

et l'inégalité

$$\begin{aligned} & |\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y_1) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - y^{(2)} - \xi_{k+1}^{[n]}(x, y^{(1)} + y^{(2)}))| \leq \\ & \leq \delta_{n+1}^2 \sup |\partial_t V| + \delta_{n+1} \sup |\nabla V| (\delta_{n+1} \sup |V| + |y^{(1)}|), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left| I_{2k}^{[n+1]} - \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_k^{[n]}, x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy \right| \leq \\ & \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| + K_1 \delta_n^{3/2} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|, \end{aligned} \quad (5.91)$$

où K_1 est une constante indépendante de n (pour les détails du calcul, voir le lemme 5.1 de [33]).

D'autre part, pour

$$J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_n (\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))) (x),$$

en utilisant les hypothèses sur la régularité de $V(t, x)$ et de $F(t, x, U)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| J_{a,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} (\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))) (x) \right| \leq \\ & \leq K_1 \delta_{n+1}^2 (1 + \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|) + K_1 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\left| J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} (\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)))(x) \right| \leq \quad (5.93)$$

$$\leq K_2 \delta_{n+1}^2 (1 + \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|) + K_2 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|,$$

où K_1 et K_2 sont des constantes indépendantes de n (pour les détails du calcul, voir le lemme 5.1 de [33]).

De (5.91)–(5.93) pour $k = 0$ on obtient

$$|U^{[n+1]}(t_2^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_1^{[n]}, x)| \leq K_3 \delta_n^{3/2} (\delta_n^{1/2} + \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U_0(y)|). \quad (5.94)$$

En estimant $\sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|$ dans (5.91)–(5.93) à l'aide du lemme 5.4.2, des relations (5.86), (5.91), (5.92), (5.93) on déduit qu'il existe une constante K_4 indépendante de n telle que

$$\begin{aligned} & |U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq \\ & \leq (1 + K_4 \delta_{n+1}) \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| + K_4 \delta_{n+1}^{3/2}, \end{aligned}$$

d'où, compte tenu (5.94), on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t, x) - U^{[n]}(t, x)| \leq \sqrt{\delta_{n+1}} e^{tK_4}. \quad (5.95)$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} < \infty,$$

l'inégalité (5.95) et la définition (5.27) impliquent que, quel que soit $\tau > 0$, la suite $U^{[n]}(t, x)$ converge uniformément sur $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$. \square

Lemme 5.5.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Soient $U^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, les fonctions définies dans (5.25)–(5.27). Alors, quel que soit $\tau > 0$, leurs dérivées premières $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t, x)$ ($j = 1, 2$) convergent uniformément sur $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ pour $n \rightarrow \infty$.*

DÉMONSTRATION. Nous suivons l'idée de la démonstration de la proposition 6.1 de [33]. En dérivant par rapport à x_i les deux membres de (5.86) (voir aussi (5.87)–(5.89)), on a

$$\begin{aligned}
 w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) &= I_{a,2k}^{[1,n+1]} + I_{b,2k}^{[1,n+1]} + J_{a,2k}^{[1,n+1]} + J_{b,2k}^{[1,n+1]}, \quad (5.96) \\
 I_{a,2k}^{[1,n+1]} &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) dy^{(1)} dy^{(2)}, \\
 I_{b,2k}^{[1,n+1]} &= -\delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) w_{1,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) \times \\
 &\quad \times \left(V'_{i,2k+2}(x) + \sum_{j=1}^2 V'_{j,2k+1}(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) \partial_{x_i} \xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \right) dy^{(1)} dy^{(2)}, \\
 J_{a,2k}^{[1,n+1]} &= \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\Theta_{n+1} * \sum_{j=1}^2 \left[F'_{j,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) + F'_{u,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\cdot) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \partial_{x_i} \xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \right) (\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) dy^{(1)}, \\
 J_{b,2k}^{[1,n+1]} &= \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F'_{i,2k+1}(x - y^{(1)}, \bar{U}_1 + \bar{U}_2) dy^{(1)} + \\
 &\quad + \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F'_{u,2k+1}(x - y^{(1)}, \bar{U}_1 + \bar{U}_2) \times \\
 &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(2)}) \sum_{j=1}^2 w_{j,2k}^{[n+1]}(\xi_{2k+1}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)})) \partial_{x_i} \xi_{2k+1,j}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)}) dy^{(2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{n+1} \left(\Theta_{n+1} * \left(F'_{i,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) + F'_{u,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) w_{i,2k}^{[n+1]}(\cdot) \right) (x - y^{(1)}) \right] dy^{(1)},
 \end{aligned}$$

où, outre les notations $w_{i,k}^{[1,n]}(x)$ et $\xi_{k'}^{[n]}(x, y)$ déjà introduites (voir (5.39), (5.85)), on a utilisé les notations

$$\xi^* = \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) \bar{e}_1 + y^{(2)}, \quad U_k^{[n]}(x) = U^{[n]}(t_k^{[n]}, x),$$

$$V'_{j,2k+1} = \partial_{x_j} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, x), \quad F'_{i,k} = \partial_{x_i} F(t_k^{[n]}, x, U), \quad F'_{u,k} = \partial_U F(t_k^{[n]}, x, U).$$

D'autre part, en dérivant par rapport à x_i les deux membres de (5.26) (voir aussi (5.28), (5.90)), on a

$$\begin{aligned}
 w_{i,k+1}^{[1,n]}(x) &= I_{a,k}^{[1,n]} + I_{b,k}^{[1,n]} + 2J_k^{[1,n]}, \quad (5.97) \\
 I_{a,k}^{[1,n]} &= (\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * w_{i,k}^{[1,n]})(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \bar{e}_1), \\
 I_{b,k}^{[1,n]} &= -2\delta_{n+1} V'_{i,2k+2}(x) (\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * w_{1,k}^{[1,n]})(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \bar{e}_1), \\
 J_k^{[1,n]} &= \delta_{n+1} (\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * \partial_{x_i} F(t_k^{[n]}, \cdot, U_k^{[n]}(\cdot)))(x).
 \end{aligned}$$

De (5.96) et de (5.97) il résulte que

$$w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k+1}^{[1,n]}(x) = \quad (5.98)$$

$$= I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]} + I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]} + J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]} + J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}.$$

Pour estimer $I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}$ on remarque que

$$\xi^* - (x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y^{(1)} - y^{(2)}) = \delta_{n+1} (V(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}))) \vec{e}_1,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) - w_{i,k}^{[1,n]}(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y^{(1)} - y^{(2)})| &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + \\ &+ \delta_{n+1} \sup |\nabla w_{i,2k}^{[1,n+1]}| (\delta_{n+1} \sup |\partial_t V| + \sup |\nabla V| (\delta_{n+1} \sup |V| + |y^{(1)}|)). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Donc $|I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}|$ est majoré par le second membre de (5.99).

Pour estimer $|I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]}|$, $|J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$, $|J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$, on rappelle que d'après les hypothèses (5.11), (5.12) et (5.14) les dérivées de V et de F qui interviennent dans leur estimation sont uniformément bornées. Rappelons aussi que d'après le lemme 5.4.3 les dérivées secondes par rapport à x de $U^{[n+1]}(t, x)$ sont elles aussi uniformément bornées. Cela étant, en faisant des calculs explicites, qui sont un peu long, mais plutôt élémentaires, on peut estimer $|I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]}|$, $|J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$, $|J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$. Comme les calculs sont analogues à ceux effectuées dans la démonstration de la proposition 6.1 de [33] (même si la définition des solutions approchées est formellement différente, les argumentations sont tout à fait analogues), nous renvoyons les détails du calcul à [33]. Ainsi, en rappelant l'estimation de $|I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}|$ obtenue ci-dessus et en faisant l'attention à la présence du facteur δ_n dans les autres termes, on aura

$$\begin{aligned} |w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k+1}^{[1,n]}(x)| &\leq \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + C_0 (\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}) + \delta_{n+1} C_0 (Y_k + Y_k^{[1]}), \end{aligned}$$

où C_0 est une constante indépendante de n dans l'intervalle $[0, \tau]$ et

$$Y_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \quad Y_k^{[1]} = \sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k}^{[1,n]}(x)|.$$

De cette dernière inégalité de manière usuelle on déduira la convergence uniforme de $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t, x)$ ($j = 1, 2$) sur $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ (pour les détails, voir la démonstration de la proposition 6.1 de [33]). \square

Lemme 5.5.3. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Soient $U^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$ les fonctions définies dans (5.25)–(5.27). Alors, quel que soit $t > 0$, leurs dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) convergent ponctuellement sur \mathbb{R}^2 pour $n \rightarrow \infty$.*

DÉMONSTRATION. Soit $t > 0$. Considérons un nombre $M > 0$ et l'ensemble fermé

$$Q_M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq M, |x_2| \leq M\}.$$

Rappelons que d'après le lemme 5.4.3 les fonctions $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, x)$ sont uniformément bornées dans \mathbb{R}^2 et que d'après le lemme 5.4.4 leurs dérivées par rapport à x_1 et x_2 sont elles aussi uniformément bornées dans \mathbb{R}^2 (pour $t > 0$ fixé). Donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n_m]}(t, \cdot)\}_{m=1}^\infty$ qui converge uniformément dans Q_M . Désignons par $\bar{L}(x)$ la limite de cette sous-suite.

On remarque que la limite $\bar{L}(x)$ ne peut que la dérivée par rapport à x_j de la limite de la suite $\{\frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t, \cdot)\}_{n=1}^\infty$, dont la convergence uniforme est démontrée dans le lemme 5.5.2. Donc il n'existe pas une autre sous-suite qui converge vers une autre limite.

Supposons par absurde qu'il existe une sous-suite $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n_q]}(t, \cdot)\}_{q=1}^\infty$ qui ne converge pas vers $\bar{L}(x)$. Mais, comme $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n_q]}(t, \cdot)\}_{q=1}^\infty$ est uniformément bornée et équi-continue, il existerait une sous-suite convergente; sa limite ne peut être que la même limite $\bar{L}(x)$. Il en résultera une contradiction, ce qui prouve que la suite $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, \cdot)\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers la limite $\bar{L}(x)$ dans Q_M .

Maintenant on considère une suite croissante $\{M_m\}_{m=1}^\infty$ de nombres positifs qui tend vers l'infini. On désigne par $\bar{L}_m(x)$ la limite vers laquelle la suite $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, \cdot)\}_{n=1}^\infty$ converge dans Q_{M_m} . On a alors

$$\bar{L}_{m_1}(x) = \bar{L}_{m_2}(x) \Big|_{Q_{M_{m_1}}} \quad \text{pour } m_2 > m_1 > 0.$$

En effet, dans le cas contraire, suivant le raisonnement cité ci-dessus on pourra en déduire facilement une contradiction.

Cela étant, comme

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{M_m} = \mathbb{R}^2,$$

on peut définir la fonction $\bar{L}_{\infty}(x)$ sur \mathbb{R}^2 par la relation

$$\bar{L}_{\infty}(x) = \bar{L}_m(x) \quad \text{pour } x \in Q_{M_m}$$

et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, x) = \bar{L}_{\infty}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Le lemme est démontré. \square

5.6 Passage à la limite

Pour démontrer que les solutions approchées $U^{[n]}(t, x)$ convergent vers une fonction $U(t, x)$ qui satisfait à une équation de transport-diffusion, nous rappelons d'abord la propriété suivantes des solutions approchées $U^{[n]}(t, x)$.

Lemme 5.6.1. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Soient ε_1 et $\bar{\tau}$ deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon_1 < \bar{\tau} < \infty$. Soit $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ la fonction définie par (5.25)–(5.26). Alors pour $\varepsilon_1 \leq t_{k-1}^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \bar{\tau}$, on a*

$$\frac{U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} = -V(t_k^{[n]}, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \quad (5.100)$$

$$+ \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + R$$

avec

$$|R| \leq \delta_n^{1/2} C_0, \quad (5.101)$$

où C_0 est une constante indépendante de n déterminée par les hypothèses.

DÉMONSTRATION. D'après la formule de Taylor on a

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) = \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned}
 &= U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - y \cdot \nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\
 &+ \frac{1}{2} \delta_n^2 (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2} + \delta_n \sum_{j=1}^2 V(t_k^{[n]}, x) y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1 \partial x_j} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^2 \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h},
 \end{aligned}$$

où $\mu_1 = -\delta_n V - y_1$ et $\mu_2 = -y_2$, tandis que \tilde{x} est un point entre x et $x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y$.

Or, comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y_j dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y_i y_j dy = 0 \text{ si } i \neq j, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y_i^2 dy = 2\delta_n \kappa,$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y \cdot \nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0, \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \left[\frac{1}{2} \delta_n^2 (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2} + \delta_n \sum_{j=1}^2 V(t_k^{[n]}, x) y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1 \partial x_j} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] dy = \\
 = \delta_n \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n^2 \frac{1}{2} (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2}.
 \end{aligned} \quad (5.104)$$

D'autre part, comme $|\mu_1| \leq \delta_n |V| + |y_1|$ et $|\mu_2| = |y_2|$, il existe une constante C telle que

$$\left| \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^2 \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \right| \leq C (\delta_n |V| + |y|)^3 \left| \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \right|.$$

Comme d'après le lemme 5.4.4 les dérivées troisièmes de $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)$ ($0 < \varepsilon_1 \leq t_{k-1}^{[n]} < \bar{\tau}$) sont uniformément bornées, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^2 \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} dy \right| \leq (\delta_n^3 + \delta_n^{3/2}) C_0. \quad (5.105)$$

En ce qui concerne le terme relatif à F on a

$$\begin{aligned}
 &F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) = \\
 &= F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) - \sum_{i=1}^2 y_i (F'_{i,k-1}(\tilde{x}) + F'_{u,k-1}(\tilde{x}) w_{i,k-1}^{[1,n]}(\tilde{x})),
 \end{aligned}$$

où $F'_{i,k-1}(\tilde{x})$ et $F'_{u,k-1}(\tilde{x})$ sont les notations introduites dans (5.96) (calculées au point \tilde{x} au lieu de x) et $w_{i,k-1}^{[1,n]}$ est la notation introduite dans (5.39), tandis que \tilde{x} est un point entre x et $x - y$. Comme d'après l'hypothèse (5.14) et le lemme 5.4.2, $F'_{i,k-1}$, $F'_{u,k-1}$ et $w_{i,k-1}^{[1,n]}$ sont uniformément bornées, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x-y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x-y)) dy - F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) \right| \leq C'_0 \sqrt{\delta_n}, \quad (5.106)$$

où C'_0 est une constante indépendante de n .

De (5.102)–(5.106) on en déduit que

$$\begin{aligned} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) &= -\delta_n V(t_k^{[n]}, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &\quad + \delta_n F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + R' \end{aligned}$$

avec $|R'| \leq (\delta_n^3 + \delta_n^{3/2}) C_0$ avec une constante C_0 ; donc en divisant les deux membres de cette égalité par δ_n , on obtient (5.100). \square

Corollaire 5.6.1. *Soient ε_1 et $\bar{\tau}$ deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon_1 < \bar{\tau} < \infty$. Alors il existe une constante K qui dépend de ε_1 et de $\bar{\tau}$ mais ne dépend pas de n et satisfait aux relations*

$$|U^{[n]}(t_1, x) - U^{[n]}(t_2, x)| \leq K |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [\varepsilon_1, \bar{\tau}], \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (5.107)$$

$$|U(t_1, x) - U(t_2, x)| \leq K |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [\varepsilon_1, \bar{\tau}], \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (5.108)$$

où $U(t, x)$ est la fonction limite de la suite $U^{[n]}(t, x)$.

DÉMONSTRATION. Comme la valeur absolue du second membre de (5.100) est majorée par une constante K , l'inégalité (5.107) résulte de (5.100) et de (5.27).

L'inégalité (5.108) résulte de (5.107) et du passage à la limite. \square

Posons maintenant

$$\zeta^{[n]}(t, x) = \frac{U^{[n]}(t, x) - U^{[n]}(t - \delta_n, x)}{\delta_n}. \quad (5.109)$$

Lemme 5.6.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont remplies. Soient ε_1 et $\bar{\tau}$ deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon_1 < \bar{\tau} < \infty$. Soit $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ la fonction définie par (5.25)–(5.26). Alors pour $\varepsilon_1 + 2\delta_n \leq t \leq \bar{\tau} - \delta_n$ et $x \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\begin{aligned} \zeta^{[n]}(t, x) = & -V(t, x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \kappa\Delta U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \\ & + F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x)) + R_1 \end{aligned} \quad (5.110)$$

avec

$$|R_1| \leq \delta_n^{1/2} C_0, \quad (5.111)$$

où C_0 est une constante indépendante de n déterminée par les hypothèses et le choix de $[\varepsilon_1, \bar{\tau}]$.

DÉMONSTRATION. Si $t = k\delta_n$ ($k \in \mathbb{N}$), alors (5.110) avec (5.111) n'est autre que (5.100) avec (5.101). Si $t_k^{[n]} < t < t_{k+1}^{[n]}$, alors, d'après (5.27) on a

$$\zeta^{[n]}(t, x) = \frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n} \zeta^{[n]}(t_k^{[n]}, x) + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} \zeta^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x). \quad (5.112)$$

Donc, si on pose

$$\begin{aligned} D_V = & - \left[\frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n} (V(t_k^{[n]}, x) - V(t, x))\partial_{x_1}U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \right. \\ & \left. + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} (V(t_{k+1}^{[n]}, x) - V(t, x))\partial_{x_1}U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) \right], \\ D_F = & \frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n} [F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) - F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x))] + \\ & + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} [F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) - F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x))], \end{aligned}$$

on déduit de (5.100) et de (5.27) que

$$\begin{aligned} \zeta^{[n]}(t, x) = & -V(t, x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \kappa\Delta U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \\ & + F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x)) + D_V + D_F + R, \quad |R| \leq \delta_n^{1/2} C_0. \end{aligned}$$

En outre, il n'est pas difficile de déduire des hypothèses sur la régularité de v et de f ainsi que du lemme 5.5.2 et du corollaire 5.6.1 qu'on a

$$|D_V + D_F| \leq \delta_n C_0$$

avec une constante C_0 indépendante de n déterminée par les hypothèses et $[\varepsilon_1, \bar{\tau}]$. En adjoignant ces relations, on obtient (5.110). \square

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer le théorème 5.2.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.2.1. Les lemmes 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3 nous permettent de passer à la limite dans (5.110), de sorte qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^{[n]}(t, x) \equiv \zeta^{[*]}(t, x) = -V(t, x) \partial_{x_1} U(t, x) + \kappa \Delta U(t, x) + F(t, x, U(t, x)). \quad (5.113)$$

D'autre part, de la relation (5.112), à l'aide de (5.27), on déduit que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^{[*]}(t, x) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^{[n]}(t, x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dh \int_{t_1 - \delta_n h}^{t_2 - \delta_n h} \partial_t U^{[n]}(t, x) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dh \left[U^{[n]}(t_2 - \delta_n h, x) - U^{[n]}(t_1 - \delta_n h, x) \right] = U(t_2, x) - U(t_1, x), \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\zeta^{[*]}(t, x) = \partial_t U(t, x). \quad (5.114)$$

Rappelons que la convergence uniforme de $U^{[n]}(t, x)$ et leurs dérivées premières en x dans $[0, \bar{\tau}] \times \mathbb{R}^2$ avec quelconque $\bar{\tau} > 0$ a été démontrée dans les lemmes 5.5.1 et 5.5.2, tandis que la convergence ponctuelle leurs dérivées secondes en x a été démontrée dans le lemme 5.5.3. Comme $u^{[n]}(t, x) = 1 + U^{[n]}(t, x)$ pour $t \geq 0, x_2 > 0$ (voir (5.35)), on a

$$1 + U(t, x) \Big|_{\{x_2 > 0\}} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} U^{[n]}(t, x) \Big|_{\{x_2 > 0\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{[n]}(t, x) \equiv u(t, x).$$

Donc, de (5.113) et de (5.114) on déduit que la fonction limite $u(t, x)$ satisfait à l'équation (5.19) ($t > 0$). Les conditions (5.20) et (5.21) sont vérifiées par $u^{[n]}(t, x) = 1 + U^{[n]}(t, x) \Big|_{\{x_2 > 0\}}$ pour tout n (voir (5.22), (5.33)), ce qui, joint à la convergence uniforme de $U^{[n]}(t, x)$, implique que la fonction limite $u(t, x)$ satisfait aux conditions (5.20) et (5.21). Le théorème est démontré. \square

5.7 Modèle numérique de l'évaporation et de la diffusion de la vapeur d'eau

Dans ce paragraphe nous présentons le schéma de modèle numérique de l'évaporation et de la diffusion de la vapeur d'eau, qui correspond à l'idée des solutions approchées $u^{[n]}$ construites et examinées dans les paragraphes précédents.

Considérons un espace au-dessus d'une surface d'eau et la densité de vapeur d'eau, notée u , dans cet espace. Rappelons que la densité de la vapeur dans le voisinage immédiat de la surface d'eau doit être égale à la densité de la vapeur saturée, notée \bar{u}_{vs} . C'est-à-dire la densité u doit vérifier l'égalité $u = \bar{u}_{vs}$ sur la surface d'eau.

En renvoyant aux travaux futurs une modélisation plus détaillée, dans ce travail nous considérons le cas le plus simple. Ainsi nous considérons le domaine $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ et l'équation

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \partial_{x_1} u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x), \quad \text{pour } t > 0, x \in \Omega, \quad (5.115)$$

avec la condition aux limites

$$u(t, x_1, 0) = \bar{u}_{vs}, \quad \text{pour } x_1 \in \mathbb{R}, \quad (5.116)$$

et la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad (5.117)$$

où v représente le vent (horizontal), κ est le coefficient de diffusion et u_0 est la distribution de la densité de vapeur à l'instant $t = 0$.

Pour effectuer un calcul numérique, il nous faut considérer un domaine borné et discrétiser l'espace et le temps. Ainsi nous considérons la discrétisation de t , $x = x_1$ et $y = x_2$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, \quad t_k - t_{k-1} = \delta_t. \quad (5.118)$$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N_x} = \bar{X}_1, \quad x_i - x_{i-1} = \delta_x, \quad (5.119)$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_{N_y} = \bar{Y}_1, \quad y_j - y_{j-1} = \delta_y. \quad (5.120)$$

Pour réaliser un modèle numérique correspondant à la solution approchée $u^{[n]}(t, x)$ considérée dans les paragraphes précédents, à la position (x_i, y_j) on fait correspondre

la position à l'instant précédent

$$(\tilde{x}, y_j), \quad \tilde{x} = x_i - \delta_t v(t_k, x_i, y_j), \quad (5.121)$$

pour prendre les valeurs de la fonction approchée $u(t_{k-1}, \cdot)$ à l'instant précédent t_{k-1} . Comme en général \tilde{x} ne sera pas un des $x_{i'}$ donnés dans (5.119), il nous faut considérer les deux positions $x_{i'-1}$ et $x_{i'}$ telles que

$$x_{i'-1} \leq \tilde{x} \leq x_{i'}. \quad (5.122)$$

Nous fixons un nombre ε tel que $0 < \varepsilon < 1$. Il représenterait le coefficient de diffusion dans notre modèle numérique. Pour que notre schéma soit une bonne approximation, nous devons choisir ε plutôt petit. Dans les exemples que nous allons montrer, nous choisissons $\varepsilon = 0.2$ et $\varepsilon = 0.4$.

Utilisant ces définitions, nous définissons les valeurs de u à l'instant $t = t_k$ à la position (x_i, y_j) par la relation

$$\begin{aligned} u(t_k, x_i, y_j) = & \quad (5.123) \\ = & \frac{\tilde{x} - x_{i'-1}}{\delta_x} \left[(1 - \varepsilon) u(t_{k-1}, x_{i'}, y_j) + \frac{\varepsilon}{2} u(t_{k-1}, x_{i'}, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2} u(t_{k-1}, x_{i'}, y_{j-1}) \right] + \\ & + \frac{x_{i'} - \tilde{x}}{\delta_x} \left[(1 - \varepsilon) u(t_{k-1}, x_{i'-1}, y_j) + \frac{\varepsilon}{2} u(t_{k-1}, x_{i'-1}, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2} u(t_{k-1}, x_{i'-1}, y_{j-1}) \right]. \end{aligned}$$

La définition (5.123) sera complétée par la condition initiale $u(t_0, x_i, y_j) = u_0(x_i, y_j)$ conformément à (5.117) et par la condition aux limites, pour laquelle on doit imposer $u(t_k, x_i, 0) = \bar{u}_{vs}$ conformément à (5.116).

5.8 Résultats numériques

Nous donnons deux exemples de calcul numérique du modèle numérique illustré dans le paragraphe précédent.

Pour le premier exemple on choisit $\varepsilon = 0.2$, $v(t_k, x_i, y_j) = \log\left(\frac{y + y_0}{y_0}\right)$, $y_0 = \frac{5}{\exp(1) - 1}$,

$$x_i = i\delta_x, \quad i = 0, \dots, 600, \quad \delta_x = 0.5 \text{ (m)},$$

$$y_j = j\delta_y, \quad j = 0, \dots, 60, \quad \delta_y = 0.02 \text{ (m)}$$

(ici l'unité de longueur m est conventionnelle). On définit $u(t_k, x_i, y_j)$ par (5.123) avec la condition aux limites

$$u = \begin{cases} 1 & \text{pour } y = 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0 \text{ ou } y = 1.2. \end{cases}$$

et la condition initiale

$$u(t_0, x_i, y_j) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y.$$

La condition aux limites $u = 1$ sur $\{y = 0\}$ correspond à la normalisation de la condition (5.116). Le résultat du calcul est illustré dans la FIG.5.1, où on voit l'évolution de l'humidité relative (densité de vapeur normalisée), marquée par une diffusion graduelle de la vapeur d'eau.

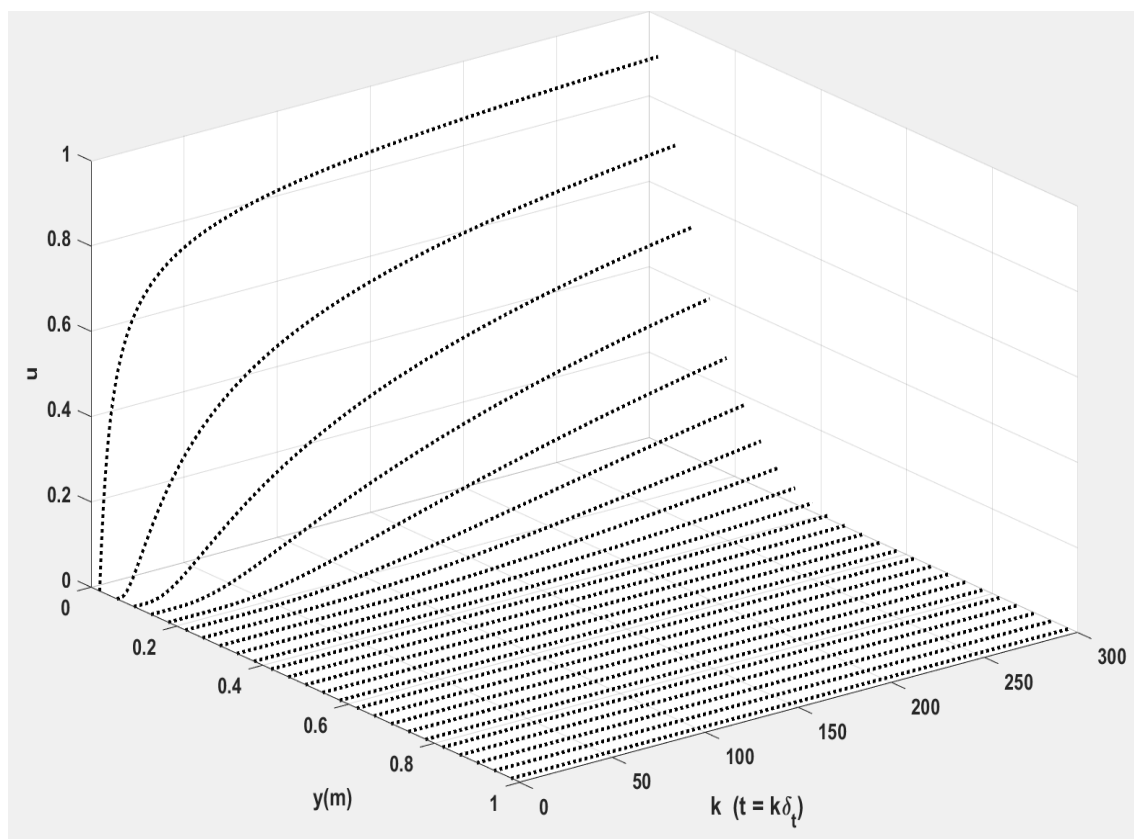


FIGURE 5.1 – Évolution de l'humidité relative à $x = 250$ (m) sur chaque niveau de hauteur $0 < y < 1$ (m) sur l'échelle de temps $0 \leq k \leq 300$ ($t = k\delta_t$).

Pour le deuxième exemple on choisit $\varepsilon = 0.4$, $v(t_k, x_i, y_j) = C \log\left(\frac{y + y_0}{y_0}\right)$, $y_0 = \frac{5}{\exp(1) - 1}$,

$$x_i = i\delta_x, \quad i = 0, \dots, 400, \quad \delta_x = 50(m),$$

$$y_j = j\delta_y, \quad j = 0, \dots, 25, \quad \delta_y = 40(m).$$

On choisit la température $T = T(y)$ à chaque hauteur $y = H(m)$ selon la distribution de l'état hydrostatique de l'air humide (distribution utilisée dans [3]) et on définit la densité de la vapeur saturée $\bar{u}_{vs}(T)$ par la relation

$$\bar{u}_{vs}(T) = \frac{1}{R_1 T} E_0 \cdot 10^{7,63(T-273,15)}.$$

Avec ces valeurs on pose les conditions aux limites

$$u = \bar{u}_{vs}(T) \quad \text{pour } y = 0, \quad u = 0.95 * \bar{u}_{vs}(T) \quad \text{pour } x = 0,$$

$$u = 0.95 * \bar{u}_{vs}(T) \quad \text{pour } y = 1km$$

et la condition initiale

$$u(t_0, x_i, y_j) = 0.95 * \bar{u}_{vs}(T) \quad \text{pour } i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y.$$

Le résultat du calcul du deuxième exemple est illustré dans le tableau 5.1 suivant, où on peut remarquer qu'à $k = 400$ ($t = k\delta_t$) aux niveaux $y = 120m$ et $y = 240m$ la densité de la vapeur u atteint la densité de la vapeur saturée $\bar{u}_{vs}(T(y))$, ce qui provoquera la condensation de la vapeur d'eau et avec ceci peut déclencher le processus de "condensation-réchauffement de l'air-ascension de l'air", provoquant une évolution orageuse.

TABLE 5.1 – Évolution de la densité de vapeur à $x = 18 \text{ km}$ sur l'échelle de temps $0 \leq k \leq 500$ ($t = k\delta_t$)

$H(\text{m})$	$T(\text{K})$	\bar{u}_{vs}	$k = 0$	$k = 100$	$k = 200$	$k = 300$	$k = 400$	$k = 500$
600	294,1	0.01833	0.01742	0.01759	0.01781	0.01799	0.01807	0.01807
480	295,3	0.01962	0.01864	0.01888	0.01916	0.01937	0.01947	0.01947
360	296,5	0.02099	0.01994	0.02030	0.02063	0.02084	0.02093	0.02093
240	297,7	0.02244	0.02132	0.02191	0.02220	0.02237	0.02245	0.02245
120	298,8	0.02397	0.02278	0.02369	0.02387	0.02397	0.02402	0.02402
0	300	0.02559	0.02559	0.02559	0.02559	0.02559	0.02559	0.02559

Conclusion et perspectives

DANS le présent travail nous avons proposé un système d'équations qui, sous l'hypothèse de la symétrie axiale, modélise le mouvement de l'air sur une familles des trajectoires. Le résultat du calcul numérique effectué sur les trajectoires fixées a mis en évidence les aspects fondamentaux de l'évolution du mouvement de l'air due à la condensation de la vapeur d'eau et sa chaleur latente et aussi au frottement de l'eau liquide ou solide qui ralentit l'ascension de l'air. La configuration de la vitesse du vent et de la pression après 24 h de développement obtenue par le calcul numérique coïncide avec les aspects généraux d'un cyclone tropical de puissance moyenne. Nous interprétons la rapidité de la croissance, qui est sensiblement plus grande que ce qu'on observe dans la nature, comme conséquence de la différence entre le modèle qui reproduit le mécanisme principal en état pur et la réalité où outre le mécanisme principal interviennent d'autres facteurs.

Le modèle que nous avons utilisé se base sur les trajectoires fixes (sur le plan (r, z) des coordonnées cylindriques), ce qui a facilité la résolution numérique. Or, il est clair qu'en principe les trajectoires doivent être déterminées par le mouvement même de l'air. En particulier, on devra prendre en considération l'effet de la croissance de la composante tangentielle, qui engendre la force centrifuge et par ceci de facto pousse l'air vers le haut dans la partie inférieure, et l'élargissement du domaine du cyclone par l'évolution même du cyclone, et aussi l'effet du mouvement turbulent. Donc notre prochaine tâche est d'améliorer le modèle en tenant compte des problèmes cités ci-dessus. On devra aussi prendre en considération le déplacement de cyclones tropicaux. Or, la modélisation de ce phénomène exigera une nouvelle méthode.

En outre il ne faut pas oublier de développé ultérieurement l'étude du processus

d'évaporation de la vapeur d'eau à partir de la surface de la mer et sa diffusion dans l'air sur une grande échelle.

Bibliographie

- [1] *Anthes, R. A. : The dynamics and energetics of mature tropical cyclones. *Rev. Geophys. Space Phys.* vol 12 (1974), pp. 495-522.
- [2] Anthes, R. A. : *Tropical cyclones their evolution, structure and effects.* Amer. Meteo. Soc, 1982.
- [3] *Aouaouda, M., Ayadi, A., Fujita Yashima, H. : Modélisation mathématique des cyclones tropicaux sur la base de la description des trajectoires du vent (en russe). *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, vol. **59** (2019), pp. 1554–1569.
- [4] Beucher, F. *Météorologie tropicale : des alizés au cyclone.* Météo-France, 2010.
- [5] *Bourega Remaoun, D., Aouaouda, M., Fujita Yashima, H. : Oscillation de la pluie dans un modèle mathématique de l'orage. *Ann. Math. Afr.*, vol.7 (2018), pp. 19–35.
- [6] *Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.* vol. **49** (2003), pp. 127–159.
- [7] *Camp, J. P., Montgomery, M. T. : Hurricane maximum intensity : past and present. *Monthly Weather Rev.*, vol. **129** (2001), pp. 1704–1717.
- [8] Chanh Q., K. : Theoretical and numerical studies of tropical cyclone development. thèse de Doctorat, 2008, University of Maryland, College Park, Maryland.
- [9] Csanady, G. T. : *Air-sea interaction : law and mechanisms.* Cambridge Univ, Press, 2001.
- [10] Cotton, W., Bryan, G., van den Heever, S. : *Storm and cloud dynamics* (II ed.). Academic Press, 2011.

- [11] *Desmond, J. H., Mao, X., Stuart, A. M. : Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. **40** (2002), pp. 1041–1063.
- [12] *Emanuel, K. A. : An air-sea interaction theory for tropical cyclones : Part I : Steady-state maintenance. *J. Atmos. Sci.*, vol. 43 (1986), pp. 585-604.
- [13] *Emanuel, K. A. : An air-sea interaction theory for tropical cyclones : Part II : Evolutionary study using a non-hydrostatic axisymmetric numerical model. *J. Atmos. Sci.* vol. **44**, pp. 542–561.
- [14] *Fujita Yashima, H. : Modélisation de la structure interne des cyclones tropicaux : équation de l'écoulement sur la trajectoire du vent (en russe). *Itogi Nauk Tekh.*, vol. **137** (2017), pp. 118–130.
- [15] Fujita Yashima., H. : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010.
- [16] *George, H. B., Richard, R : The Maximum Intensity of Tropical Cyclones in Axisymmetric Numerical Model Simulations. *Monthly Weather Rev.*, vol. **137** (2008), pp. 1770–1789.
- [17] *Geta, R. I. : Modélisation de l'évaporation de la surface d'eau basée sur la théorie de la similitude (en russe). *Vestnik VKGTU.*, vol. 4 (2012), pp. 5–12.
- [18] *Ghomrani, S., Marín Antuña, J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. *Rev. Cuba Fís.*, vol. **32** (2015), pp. 3-8.
- [19] *Hallaci, Kh., Fujita Yashima, H. : système d'équations paraboliques linéaires du type : température et densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, vol. **65** (2020), pp. 45–73.
- [20] *Holland, G. J : The maximum potential intensity of tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, vol. **54** (1997), pp. 2519–2541.
- [21] *Kröger, D. G., Branfield, G. R. : Evaporation from a water surface : theory and experiment. *R & D Journal, South Afr. Inst. Mach. Ing.*, vol. **23** (2007), pp. 5–11.

- [22] Khain, A. P. : *Modélisation mathématique des cyclones tropicaux*(en russe). Hidrometeoizdat, Leningrad, 1984.
- [23] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.
- [24] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [25] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère* (en russe). Hidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [26] Milstein, G. N., Tret'yakov, M. V. : *Stochastic numerics for mathematical physics*. Springer (Berlin, Heidelberg), 2004.
- [27] *Montgomery, M. T., Smith, R. K. : Recent developments in the fluid dynamics of tropical cyclones. *Trop. Cycl. Res. Rep.*, vol. **1** (2016), pp. 1–24.
- [28] Ojeda Figueroa, M. : Modelo para el cálculo de intensidad potencial de ciclones tropicales. Tesis de licenciatura en Meteorología. Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, La Habana, Cuba, 2011.
- [29] *Katsuyuki V. Ooyama : Numerical simulation of the life cycle of tropical cyclone. *J. Atmos. Sci.*, vol. **26** (1969) , pp. 3-40.
- [30] *Katsuyuki V. Ooyama. : Conceptual evolution of the tropical cyclone *J. Meteor. Soc. Japan.*, vol. **60** (1981), pp. 369-379.
- [31] Prodi, F, Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004.
- [32] *Rožanova., O., S. , Fujita Yashima., H. : Solution stationnaire des équations du mouvement de l'air dans la partie inférieure d'un typhon (en russe). *Sibir. Zh. Industr. Mat.*, vol. **8** (2005), pp. 100-123.
- [33] *Taleb, L., Selvaduray, S., Fujita Yashima, H : Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, vol. **8** (2020), pp. 53–73.

Bibliographie

- [34] Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. : *Équations de physique mathématique* (en russe), 5^{ème} Ed., Nauka, 1977.
- [35] Vladimirov, V. S. : *Fonctions généralisées en physique mathématique* (en russe), Nauka, 1976.
- [36] *Vlasov, V. I., Skorokhod, S. L., Fujita Yashima, H. : Simulation of air flow in a typhoon lower layer. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.*, vol. **26** (2011), pp. 85-111.

Activités de recherches

PUBLICATIONS INTERNATIONALES

- Aouaouda, M., Ayadi, A., Fujita Yashima, H. : Modélisation mathématique des cyclones tropicaux sur la base de la description des trajectoires du vent (en russe). *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, vol. **59** (2019), pp. 1554–1569.
- Bourega Remaoun, D., Aouaouda, M., Fujita Yashima, H. : Oscillation de la pluie dans un modèle mathématique de l'orage. *Annales Math. Africaines*, vol.7 (2018), pp.19–35.
- Aouaouda, M., Ayadi, A., Fujita Yashima, H : Une équation de transport-diffusion et modèle de l'évaporation et de la diffusion de la vapeur d'eau. soumise à la revue de " *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal* " .

COMMUNICATIONS INTERNATIONALES

- *PDEs- classical Problems, New Approaches, Applications : Numerical simulation of the evaporation water vaper using stochastic diffusion idea Torino,26 settember 2019.*
- *Calcul numérique d'un modèle stochastique de l'évaporation de la vapeur d'eau et sa diffusion dans l'air* (MFOA'2019), Université de Béjaïa , 28 et 29 Octobre 2019.

COMMUNICATIONS NATIONALES

- *Modèle mathématique du cyclone tropical basé sur les trajectoires du vent* (CMA'2018), Université Boumerdes, 12-13 Mai 2018.
- *Modèle mathématique du cyclone tropical basé sur les trajectoires du vent : solution stationnaire et comportement asymptotique*, Workshop SDEDA'2018, université D'Oum EL Bouaghi, 14-15 Novembre 2018.
- *Modèle mathématique du cyclone tropical* (SNM'01), université Frères Mentouri constantine1, 13 Décembre 2016.
- *participation à l'école de printemps EDP et Géométrie qui s'est tenue à Jijel*, 28-07 Mai 2018.