

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI
OUM EL BOUAGHI**

**FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET LA
VIE**

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :

N° série :

THESE

**Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT ES.SCIENCES EN MATHEMATIQUES**

Thème

**«PROBLEMES MIXTES POUR EQUATIONS AUX
DERIVEES PARTIELLES AVEC CONDITIONS AUX
BORDS INTEGRALES»**

Option

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par

TEYAR NADIR

Devant le jury :

Président :	Mr.A. AYADI	Prof	U.L.Ben M'hidi, O.EL-Bouaghi.
Rapporteur :	Mr.M. BOUZIT	M.C.A	U.L.Ben M'hidi, O.EL-Bouaghi.
Examineurs :	Mr.T.ZERZAIHI	Prof	U.M.S.Benyahia, Jijel.
	Mr.N.ADJEROUD	M.C.A	U.A. Laghrour, Khenchela.
	Mr.A.ALIOUCHE	M.C.A	U.L.Ben M'hidi, O.EL-Bouaghi.

soutenu le: 25/06/2014

Remerciements

*C'est tout naturellement que mes premiers remerciements s'adressent à monsieur le Docteur **M. BOUZIT** qui a accepté de diriger mes travaux pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au cours de ces années de thèse. Je voudrais ici lui exprimer ma profonde gratitude pour toute la sollicitude dont il a fait preuve tout au long de la préparation de cette thèse.*

*Je remercie également monsieur Le Professeur **A. AYADI** d'avoir bien voulu présider le jury auquel ce travail est soumis.*

*Je voudrais aussi exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur **T.ZERZAIHI** et aux Docteurs **N.ADJEROUD** et **A.ALIOUCHE** d'avoir accepté de faire partie du jury.*

Mes remerciements sont aussi pour mes parents et mon époux pour leur soutien constant et leur encouragement dans les moments difficiles.

Table des matières

Conventions, symboles et notations.....	5
<i>INTRODUCTION</i>	6

CHAPITRE I

NOTIONS PRELIMINAIRES

<i>I. 1. Opérateurs monotones et dissipatifs</i>	13
<i>I.1.1. Opérateurs monotones et dissipatifs dans un espace de Hilbert</i>	13
<i>I.1.2. Opérateurs monotones dans un espace de Banach</i>	16
<i>I. 2. Opérateurs régulièrement monotones</i>	17

CHAPITRE II

UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

PARABOLIQUES DU TROISIEME ORDRE AVEC CONDITIONS

INTEGRALES

<i>II.1 Introduction</i>	24
<i>II.2 Position du problème</i>	24
<i>II.3 Problème équivalent</i>	24
<i>II.4. Estimation à priori</i>	27
<i>II.5. Existence et unicité de la solution</i>	32

CHAPITRE III
UNE SOLUTION FORTE POUR EQUATIONS
DIFFERENTIELLES PARABOLIQUES D'ORDRE SUPERIEUR DE
TYPE MIXTE AVEC CONDITION INTEGRALE

<i>III.1 Introduction.....</i>	<i>36</i>
<i>III.2 Position du problème</i>	<i>36</i>
<i>III.3 Préliminaires</i>	<i>38</i>
<i>III.4 une estimation a priori et ses conséquences.....</i>	<i>38</i>
<i>III.5. Résolubilité du problème.....</i>	<i>47</i>
<i>Conclusion et perspectives.....</i>	<i>52</i>
<i>Bibliographie</i>	<i>53</i>

Conventions, symboles et notations

EDP : équation aux dérivées partielles .

Re z : partie réelle d'un nombre complexe z .

\bar{z} : le conjugué du nombre complexe z .

R(A) : image directe de l'opérateur A.

H : espace de Hilbert.

X : espace de Banach.

L(H) : ensemble des opérateurs linéaires bornés

$\Omega = (0, T) \times (0, 1)$.

$\Omega^\tau = (0, \tau) \times (0, 1)$.

$(\cdot, \cdot)_E$: produit scalaire sur E.

$$\frac{\partial^0 u(t, x)}{\partial x} = u(t, x).$$

$L^p(\Omega)$: espace de Lebesgue des fonctions mesurables u définies sur Ω avec : $\int_{\Omega} |u(t, x)|^p dx dt < \infty$.

$L^2(\Omega)$: espace Hilbertien des fonctions mesurables u définies sur Ω avec: $\int_0^1 |u(t, x)|^2 dx dt < \infty$.

$\|\cdot\|_E$: norme définie sur E

$\|u(t, x)\|_p$: la norme définie sur $L^p(\Omega)$ par : $\left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

$H^1(0, 1)$: $\{u \in L^2(0, 1) / \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, 1)\}$

$W_2^1(0, T)$: espace de Sobolev défini par : $\{u \in L^2(0, T) / \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T)\}$.

$W_2^{2\alpha}(\Omega)$: espace de Sobolev défini par : $\{u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2(\Omega), i = \overline{0, 2\alpha}\}$.

ε – inégalité : $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$, $\forall \varepsilon > 0$.

Introduction

Le but de cette thèse est d'étudier deux problèmes paraboliques mixtes avec conditions non classiques, appelées également conditions non-locales.

Les équations liées au type de problèmes paraboliques mixtes étudiés sont tellement variées que l'élaboration d'une théorie générale est loin d'être achevée. Les problèmes mixtes avec conditions intégrales liés aux équations unidimensionnelles du second ordre sont étudiés en utilisant différentes méthodes. Par exemple, en utilisant la méthode du potentiel : J.R.Cannon [10], lors de l'étude de conduction thermique dans une barre mince chauffée, a prouvé l'existence et l'unicité de la solution classique (Dirichlet) et une condition intégrale pour l'équation de la chaleur. A l'aide de la méthode de séparation des variables de Fourier : N.I.Ionkin [23] a démontré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte combinant une condition de Dirichlet avec une condition intégrale pour une équation parabolique. En ce basant sur le principe du maximum : L.A.Mauravey et V.Philipovski ont montré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte en combinant une condition de Neumann et une condition intégrale pour une équation parabolique.

Concernant l'étude des problèmes mixtes avec conditions intégrales pour les équations paraboliques unidimensionnelles, en utilisant la méthode des estimations a priori, on cite les travaux de N.I.Yurchuk [49], Benouar et Yurchuk [5], A.Bouziani et N.E.Benouar [7, 8], M.Denche et A.L.Marhoune [14].

Les problèmes aux limites avec conditions intégrales ont été principalement motivés par le travail de Samarskii [38]. Un cas régulier de ce problème pour les équations du second ordre est étudié dans [21]. Le problème où l'équation de type mixte contient un opérateur de la forme $a(t) \frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^{2\alpha} \partial t}$ est traité dans [15], l'opérateur de la forme

$\frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ et $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(a(t, x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right)$ est traité dans [25] et [16]. Des problèmes aux valeurs

limites en deux points pour les équations paraboliques, avec une condition intégrale, sont étudiés en utilisant la méthode des inégalités énergétiques dans [5, 7, 8, 10, 17, 49] et la méthode de Fourier [21]. Le problème aux valeurs limites en trois points avec une condition intégrale, pour des équations paraboliques avec l'opérateur de Bessel est étudié dans [14].

Et récemment des équations paraboliques et hyperboliques avec conditions aux limites intégrales sont traitées par la méthode de Fourier dans ([1], [6]), et par les opérateurs de régularisation dans [28].

Plusieurs phénomènes physiques peuvent être modélisé et décrits en termes de problèmes non locaux, c'est-à-dire comme des problèmes mixtes avec des conditions aux limites intégrales. Les conditions aux limites non locales se posent beaucoup lorsque les informations sur la frontière ne peuvent être mesuré directement mais les valeurs moyennes son connues.

Plus précisément, les conditions standards (de type Dirichlet, Neumann, et Robin), qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours adéquates à mesure qu'elles dépendent du contexte physique dont les informations peuvent être mesuré sur la frontière du domaine physique. Dans plusieurs cas, il est impossible de prescrire la solution u (pression, température,) ponctuellement, car seulement la valeur moyenne de la solution peut être mesurée tout au long de la frontière ou d'une de ses parties. Une condition intégrale, peut représenter physiquement une moyenne, un flux, une énergie totale ou une masse totale.

Ces problèmes peuvent être rencontrés en théorie de transmission de chaleur, élasticité et thermo-élasticité, physique de plasmas, dynamique de populations et dynamique de fluide (applications biomédicales instables par exemple, voir [30]).

Pour voir de près l'utilité des équations différentielles aux dérivées partielles traitées ici, dans leurs formes la plus simple, ainsi que leur formulation, à partir d'une modélisation mathématique de problèmes chimiques, il suffit de consulter [38], qui est spécialement consacré à ce genre d'équations différentielles.

Résultats principaux :

On démontre dans cette thèse l'unicité de la solution pour chacun des deux problèmes étudiés, en utilisant une des méthodes les plus efficaces de l'analyse fonctionnelle, dite méthode des estimations a priori ou méthodes des inégalités énergétiques. Cependant, l'existence est démontrée pour le premier problème, par une méthode classique fournie par Fourier; et pour le deuxième problème, par une méthode non classique utilisant la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré, chose faisable moyennant des opérateurs de régularisation.

Notre travail a visé l'extension de la méthode des inégalités énergétiques à une nouvelle classe de problèmes avec des conditions aux limites non locales, on peut le considérer également comme une généralisation de résultats obtenus récemment, surtout dans [1], [6] et [28].

Dans (1) l'équation étudiée est hyperbolique homogène d'ordre deux, tandis que dans (6) l'équation est parabolique non homogène d'ordre deux. L'équation que nous étudions dans le second chapitre est parabolique non homogène d'ordre trois.

Dans [28] l'équation étudiée possède une singularité d'ordre un. L'équation que nous étudions dans le troisième chapitre possède une singularité d'ordre trois.

Les travaux présentés dans cette thèse ont déjà fait l'objet de deux articles dans des revues internationales, et figurent comme référence pour certains articles et thèses internationaux :

- A Class of third order parabolic equations with integral conditions.
- Strong solution for high order mixed type differential equations with integral boundary condition.

Organisation de la thèse :

Cette thèse se compose de trois chapitres :

Chapitre I : est réservée à l'exposition des notions préliminaires qui vont nous servir comme outils dans nos démonstrations de l'existence de la solution pour le problème du troisième chapitre, à savoir les opérateurs de régularisation.

Chapitre II : est consacré à l'étude d'un problème mixte avec conditions aux limites non classiques (précisément, deux conditions intégrales homogènes, une sans poids et une à poids) pour une équation parabolique du troisième ordre. On démontre l'existence et l'unicité de la solution. La preuve de l'unicité est basée sur une estimation a priori, l'existence est établie par la méthode standard de Fourier.

Chapitre III : est destiné à l'étude d'un problème parabolique mixte unidimensionnelle, d'ordre supérieur, ayant une singularité d'ordre trois, où on combine des conditions au bord classiques avec une condition intégrale sans poids homogène.

Les équations étudiées dans cette thèse sont de la forme :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} + \frac{(-1)^\alpha}{x^r} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^s \frac{\partial^{\alpha+\beta-1} u}{\partial x^\alpha \partial t^{\beta-1}} \right) \right) + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x)$$

Pour deux choix particuliers de β on trouve les deux équations étudiées dans le deuxième et troisième chapitre. Et plus précisément :

- Pour $\beta=2$, $\alpha=1$ et $\gamma=1$ on a le problème parabolique mixte singulier d'ordre trois du deuxième chapitre.

- Pour $\beta = 1$, α entier positif et $\gamma = 1$ on obtient le problème parabolique mixte singulier d'ordre supérieur du troisième chapitre.

Description de méthode :

La méthode des inégalités énergétiques, est basée sur la recherche d'un opérateur Mu , dit multiplicateur, qui dépend généralement de la condition non locale, la fonction u , ses dérivées et d'une certaine fonction poids.

La présence de conditions non locales provoque des complications dans l'application de méthodes standards pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Pour cela, on a transféré le problème du **chapitre II** en un autre problème classique sans condition intégrale, pouvant être traité plus efficacement. On démontre l'existence par la méthode standard de Fourier, la preuve de l'unicité est basée sur une estimation a priori. Ce qui conduit au schéma suivant :

Schéma 1 :

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $L: E \rightarrow F$ est l'opérateur engendré par le problème considéré, E est un espace de Banach, F est un espace de Hilbert, $u \in E$ et $\mathcal{F} \in F$.

On démontre l'inégalité à priori:

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L), \quad (*)$$

où C est une constante.

L'unicité de la solution est assurée par l'inégalité.

Pour le problème du **chapitre III** l'existence de la solution forte découle de la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré, l'unicité découle d'une estimation a priori selon le schéma suivant :

Schéma 2 :

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $L: E \rightarrow F$ est l'opérateur engendré par le problème considéré, E est un espace de Banach, F est un espace de Hilbert, $u \in E$ et $\mathcal{F} \in F$.

On démontre l'inégalité à priori:

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L), (**)$$

où C est une constante.

En passant à la limite, on prolonge l'inégalité (***) à $D(\bar{L})$. Comme l'image $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} , est fermée dans F , telle que $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$, il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans F , chose faisable moyennant des opérateurs de régularisation que l'on choisira suivant la nature du problème.

CHAPITRE I

NOTIONS PRELIMINAIRES

I.1. OPERATEURS MONOTONES ET DISSIPATIFS

I.1.1. Operateurs monotones et dissipatifs dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert, soit A un opérateur de $D(A)$ vers H avec $D(A) = H$.

Définition 1 : On dit que l'opérateur A est un opérateur dissipatif si

$$\operatorname{Re}(Au, u) \leq 0 \quad \forall u \in D(A) \quad (\text{I.1})$$

Définition 2 : On dit que l'opérateur A est monotone si $(-A)$ est un opérateur dissipatif, i.e. $\operatorname{Re}(Au, u) \geq 0 \quad \forall u \in D(A)$ (I.2)

Définition 3 : Un opérateur monotone A , est dit maximal s'il n'admet pas d'extension propre. (Il n'existe aucun opérateur monotone contenant strictement A , au sens de l'inclusion des graphes dans $H \times H$).

Définition 4 : Un opérateur monotone A , est dit maximal si $R(A+I) = H$.

Proposition 1 : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire de domaine dense dans H . alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un opérateur dissipatif.

(ii) $\|(A - \lambda I)u\| \geq \operatorname{Re} \lambda \|u\|$, pour tout $u \in D(A)$ et tout λ tel que $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

(iii) $\|(A - \lambda I)u\| \geq \lambda \|u\|$, pour tout $u \in D(A)$ et tout $\lambda > 0$. (I.3)

Proposition 2 : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ (Hilbert réel), un opérateur maximal monotone. Alors :

(i) $D(A)$ est dense dans H .

(ii) A est fermé

(iii) Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{L(E)} \leq 1$.

Théorème 1 (Minty) : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ (Hilbert réel) un opérateur, alors les propriétés suivantes sont équivalentes .

(i) A est un opérateur maximal monotone dans H .

(ii) $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie dans H , pour tout $\lambda \geq 0$.

(iii) A est monotone, et il existe $\lambda \geq 0$ tel que $(I + \lambda A)$ est surjectif.

Théorème 2 : Tout opérateur monotone admet un prolongement maximal monotone.

Proposition 3 : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ (H complexe) un opérateur linéaire de domaine dense dans H . alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un opérateur maximal dissipatif.

(ii) $R(A - \lambda I) = H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

(iii) $R(A - \lambda I) = H$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda > 0$.

Théorème 3 : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire de domaine dense dans H . alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un opérateur maximal dissipatif.

(ii) A est fermé, $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$, où $\rho(A)$ est l'ensemble

résolvant de A .

Définition 5 : Soit A un opérateur maximal monotone. On pose pour tout $\lambda > 0$

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad \text{et} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda} (I - J_\lambda)^{-1}$$

Proposition 4 : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ (Hilbert réel), un opérateur maximal monotone. Alors :

a) $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$, $\forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$

b) $A_\lambda v = A_\lambda (Jv)$, $\forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$

c) $\|A_\lambda v\| \leq \|Av\|$, $\forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$

d) $J_\lambda v = v$ $\forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$

e) $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$, $\forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$

$$f) (A_\lambda v, v) \geq 0, \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0$$

$$g) \|A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|, \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0.$$

Théorème 4 : Soit $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire de domaine dense dans H . Si A est un opérateur dissipatif maximal, soit $A_\varepsilon = I - \varepsilon A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- A_ε^{-1} borné.

2- $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq 1$.

3- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} u = u \quad \forall u \in H$, où $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$

Preuve : Soit $\{\varepsilon > 0\}$ alors

$$\{\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \rho(A)$$

Donc $(A - \lambda I)$ est continument inversible d'où $(I - \lambda A)^{-1}$ existe, il est borné et défini sur H tout entier.

Puisque

$$\frac{1}{\varepsilon} \in \{\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

On déduit que

$$(I - \frac{1}{\varepsilon} A)^{-1} \in L(H)$$

Mais

$$(A - \frac{1}{\varepsilon} I) = -\frac{1}{\varepsilon} (I - \varepsilon A)$$

D'où

$$(A - \frac{1}{\varepsilon} I)^{-1} = -\varepsilon (I - \varepsilon A)^{-1}$$

On pose

$$A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$$

On déduit que

$$A_\varepsilon^{-1} \in L(H)$$

Et en utilisant le théorème 3, on obtient

$$\left\| \left(A - \frac{1}{\varepsilon} I \right)^{-1} \right\| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} = \varepsilon$$

Donc

$$\left\| A_\varepsilon^{-1} \right\| \leq 1$$

Supposons tout d'abord $u \in D(A)$, d'où :

$$\left\| A_\varepsilon^{-1} u - u \right\| = \left\| (I - \varepsilon A)^{-1} u - u \right\| = \left\| \varepsilon (I - \varepsilon A)^{-1} A u \right\| \leq \varepsilon \|A u\|$$

Ainsi par passage à la limite quand ε tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} u = u \quad \forall u \in D(A)$$

Et comme $D(A)$ dense dans H , alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} u = u \quad \forall u \in H$$

I.1.2. Opérateurs monotones dans un espace de Banach

L'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires continues définies sur X (X un espace linéaire réel ou complexe) constitue un espace conjugué de X , noté X^* .

L'espace X^* est un espace de Banach munit de la norme

$$\|f\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |f(u)| \quad f \in X^*, u \in X. \quad (I.4)$$

Définition 6 : Soit X un espace normé et X^* son conjugué. L'ensemble de tous les éléments $f \in X^*$ satisfaisant

$$(u, f) = \|u\|^2 = \|f\|^2, \quad \text{Pour tout } u \in X \quad (I.5)$$

est noté par F_u . F est appelé application de dualité de X dans X^* .

Soit X un espace de Banach complexe et soit F application de dualité dans X . On a

$$\|u\|^2 = \|f\|^2 = (u, f) \quad \forall u \in X, f \in Fu \subset X^*. \quad (I.6)$$

Définition 7 : Soit A un opérateur linéaire dans X . Si pour tout $u \in D(A)$ il existe $f \in Fu$ satisfaisant $\operatorname{Re}(Au, f) \leq 0$, A est appelé opérateur dissipatif. Si $-A$ est dissipatif, A est appelé opérateur monotone.

Remarque : Proposition 3 reste vraie dans un espace de Banach .

Théorème 5 [43] : Soit A un opérateur dissipatif fermé. Si $R(A - \lambda I) = X$ pour un certain λ satisfaisant $\operatorname{Re} \lambda > 0$, alors $R(A - \lambda I) = X$ pour tout λ satisfaisant $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Si, en plus, $D(A)$ est dense dans X , alors

$$\operatorname{Re}(Au, f) \leq 0 \quad \forall u \in D(A), \forall f \in Fu. \quad (I.7)$$

Théorème 6 [43]: Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ dense. A et A^* sont dissipatifs tous les deux si et seulement si le demi plan ($\lambda / \operatorname{Re} \lambda > 0$) est contenu dans $\rho(A)$

et $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$ est vraie dans le même demi plan.

I. 2. OPERATEURS REGULIEREMENT MONOTONES

Soit X un espace de Hilbert complexe, son produit scalaire et sa norme sont notés par (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$, respectivement.

Soit V un autre espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme notés par $((\cdot, \cdot))$ et $\|\cdot\|$, respectivement.

On suppose que V est immergé dans X ($V \hookrightarrow X$) comme sous espace dense, V possède une topologie plus forte que celle de X . Alors, il existe un M_0 tel que:

$$\|u\| \leq M_0 \|u\| \quad \forall u \in V.$$

Soit $a(u, v)$ une forme quadratique définie sur $V \times V$. Alors, pour tout $u, v \in V$ il correspond nombre complexe $a(u, v)$, linéaire en u et anti linéaire en v :

$$a(u_1+u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v),$$

$$a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2),$$

$$a(\lambda u, v) = \lambda a(u, v),$$

$$a(u, \lambda v) = \bar{\lambda} a(u, v).$$

On assume que $a(u, v)$ est bornée, i.e., il existe un certain nombre M tel que

$$|a(u, v)| < M \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{I.8})$$

On assume aussi qu'il existe un nombre positif δ et un nombre réel k tel que

$$\text{Re } a(u, v) > \delta \|u\|^2 - k \|u\|^2 \quad \forall u \in V. \quad (\text{I.9})$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Garding.

Dans le cas particulier $k=0$, on obtient

$$\text{Re } a(u, u) > \delta \|u\|^2 \quad \forall u \in V. \quad (\text{I.10})$$

On associe à la forme bilinéaire $a(u, v)$, la forme linéaire définie par $a(u, v) = (Au, v)$

Dans ce cas, on interprète $u \in D(A)$ et $Au = f$.

En appliquant le lemme de Lax-Milgram le problème $Au = f$ admet une solution.

En étudiant un tel opérateur A , il est souvent convenable de le prolonger comme suit:

L'espace de toutes les fonctionnelles anti-linéaires continues définies sur V et X sont notés par V^* et X^* , respectivement.

i.e: V^* et X^* sont les espaces de toutes les fonctionnelles continues l sur V et X , satisfaisant :

$$l(u + v) = l(u) + l(v),$$

$$l(\lambda u) = \bar{\lambda} l(u).$$

Pour tout $(u, v) \in V \times X$, et tout complexe λ .

Pour tout élément de V^* ou de X^* , la norme est définie de façon pareille afin qu'elle soit une fonctionnelle linéaire continue.

Alors, les normes de l comme élément de V^* et de X^* sont données respectivement par

$$\|l\|_* = \sup_{\|v\|<1} |l(v)| \quad \text{and} \quad |l|_* = \sup_{|f|<1} |l(f)|,$$

Soit $l|_V$ désignant la restriction de $l \in X^*$ à V , alors

$$|l|_V(v) = |l(v)| \leq |l| \cdot \|v\| \leq |l| \cdot M_0 \|v\|, \quad (\text{I.12})$$

D'où, $l|_V \in V^*$.

Comme V est dense dans X , la correspondance $l \rightarrow l|_V$ est bijective, alors en identifiant l avec $l|_V$, on va considérer $X^* \subset V^*$. Comme $\|l|_V\|_* \leq M_0 |l|_*$ by (I.12), X^* possède topologie plus forte que V^* .

De plus, les immersions $V \rightarrow X$ et $X \rightarrow V^*$ sont continues toutes les deux. On peut montrer que V est dense dans V^* comme suit.

Si $v \in V$ satisfait $(u, v) = 0$ pour tout u , alors en prenant $u = v$ on a $v = 0$. En conséquence, d'après la réflexivité de V et un résultat de l'analyse fonctionnelle, V est dense dans V^* , et, alors, X est aussi dense dans V^* .

Pour $l \in V^*$ la valeur $l(v)$ de l en v est aussi notée par (l, v) . L'emploi de cette notation est convenable, Car si, en particulier, $l = f \in X$, il découle du sens de $X \subset V^*$ que la notation représente précisément le produit scalaire de f et de v dans X . Notons les éléments de V^* par f, g , et parfois $\overline{(f, v)}$ par (v, f) . Quant $a(u, v)$ ($u \in V$ fixé) est considérée comme fonctionnelle de v , elle constitue un élément de V^* d'après (I.8).

Alors, en utilisant un élément $f \in V^*$, on peut exprimer $a(u, v) = (f, v)$. Alors f ainsi obtenu est déterminé par u , on écrit

$$\tilde{A}u = f.$$

D'où, \tilde{A} est un operateur défini par :

$$a(u, v) = (\tilde{A}u, v) \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{I.13})$$

Il est évident que \tilde{A} est une extension de l'opérateur A défini par (I.11). Plus précisément

$$D(A) = \{u \in V : \tilde{A}u \in X\}. \quad (\text{I.14})$$

Lemme 1 Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire et d'une norme notes par (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$, respectivement. Assumons que $B[u, v]$ est une forme quadratique complexe définie sur $H \times H$ et qu'il existe deux constantes C et c telles que

$$|B[u, v]| \leq C\|u\| \cdot \|v\|, \quad (\text{I.15})$$

$$|B[u, v]| \geq c\|u\|^2 \quad \forall u, v \in H. \quad (\text{I.16})$$

Sous ces conditions, si $F \in H^*$, i.e. si F est une fonctionnelle anti-linéaire continue sur H , il existe un élément u tel que

$$F(v) = B[u, v] \quad \forall v \in H.$$

De plus, u est déterminé d'une façon unique par F .

Remarque : Si $B[u, v]$ est une forme quadratique réelle, (I.15) et (I.16) deviennent

$$B[u, v] \leq C\|u\| \cdot \|v\|,$$

$$B[u, v] \geq c\|u\|^2 \quad \forall u, v \in H$$

Lemme 2 : Si $D(A)$ est dense dans V . Alors, il est aussi dense dans X .

Définition 7 : Un opérateur A défini par (I.11), utilisant une forme quadratique satisfaisant (I.8) et (I.10) est appelé opérateur régulièrement monotone. Si $-A$ est régulièrement monotone, A est appelé opérateur régulièrement dissipatif.

Définition 8 : La forme quadratique $a^*(u, v)$ définie par $a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$ est appelée une forme quadratique adjointe.

Si $a(u, v)$ satisfait (I.8), (I.9) ou (I.10), alors, par correspondance, il est de même, pour $a^*(u, v)$.

Soit \tilde{A} un opérateur défini par

$$(\tilde{A}u, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V, \quad (\text{I.17})$$

Et soient A' et \tilde{A}' deux operateurs définis par $a^*(u, v)$ d'une façon similaire à (I.11) et (I.17), respectivement.

Soit $u \in H$. Il existe un $f \in X$ tel que $a^*(u, v) = (f, v)$ pour tout $v \in V$, alors

$$u \in D(A') \text{ et } A'u = f. \quad (\text{I.18})$$

$$a^*(u, v) = (\tilde{A}'u, v) \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{I.19})$$

Lemme 3 : Soit A^* l'adjoint de A considéré comme étant un opérateur dans X . Alors $A' = A^*$.

Théorème 7 : Si A opérateur régulièrement monotone alors A est maximal monotone.

Théorème 8 : Soit $a(u, v)$ une forme quadratique sur $V \times V$ satisfaisant (I.8) et (I.9), et soit A l'opérateur défini par (I.11). Le domaine $D(A)$ est dense dans V et dans X , et $0 \in \rho(A + kI)$. De plus soit \tilde{A} un opérateur défini par (I.17). Alors $\tilde{A} + kI$ est un isomorphisme de V dans V^* .

Soit $a^*(u, v)$ la forme adjointe de $a(u, v)$ et A' l'opérateur défini par (I.18). Alors the l'opérateur adjoint A^* de A dans X coïncide avec A' . $A + kI$ est un opérateur régulièrement monotone.

A et \tilde{A} sont notés tous les deux par A . On note aussi \tilde{A}' par A^* . Alors on a

$$a(u, v) = (Au, v), \quad a^*(u, v) = (A^*u, v) \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{I.20})$$

Cette notation ne va pas causer de confusion.

où $a^*(u, v) = a(u, v)$ pour tout $u, v \in V$, la forme quadratique $a(u, v)$ est dite symétrique.

Dans ce cas, par le théorème 8, un opérateur A dans X est auto-adjoint. Il est évident que $a(u, v)$ est un nombre réel pour tout $u \in V$, et d'après (I.9), on a

$$(Au, u) = a(u, u) \geq -k|u|^2 \quad \forall u \in D(A).$$

Théorème 9 : Si $a(u,v)$ est une forme quadratique symétrique satisfaisant (I.8) et (I.10), Alors A est défini positif et auto-adjoint, $D(A^{1/2})=V$, et

$$a(u,v) = (A^{1/2}u, A^{1/2}v), \quad \forall u,v \in V. \quad (\text{I.21})$$

Exemple 1 : On prend $A = \frac{\partial^3}{\partial t^3}$ où

$$D(A) = \left\{ u \in L^2(0,T) / \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2(0,T), u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(T) = 0 \right\}$$

Alors A est un opérateur dissipatif.

Preuve : En effet, nous avons

$$\operatorname{Re}(Au, u) = \operatorname{Re} \int_0^T \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \bar{u} dt = - \operatorname{Re} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} dt = - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} \leq 0. \blacksquare$$

On pose $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1} = (I - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3})^{-1}$, pour $\varepsilon > 0$.

Les opérateurs A_ε^{-1} ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$g_\varepsilon - \varepsilon \frac{\partial^3 g_\varepsilon}{\partial t^3} = g, \quad g_\varepsilon(0) = 0, \quad \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial t^2}(T) = 0$$

Donc le problème adjoint est

$$g_\varepsilon^* - \varepsilon \frac{\partial^3 g_\varepsilon^*}{\partial t^3} = g, \quad g_\varepsilon^*(0) = 0, \quad \frac{\partial g_\varepsilon^*}{\partial t}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial t^2}(T) = 0$$

Remarque : Ces opérateurs de régularisations seront utiles dans le dernier chapitre.

CHAPITRE II

UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES PARABOLIQUES DU TROISIEME ORDRE AVEC CONDITIONS INTEGRALES

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème mixte avec conditions aux limites non classiques pour une équation parabolique du troisième ordre. On démontre l'existence et l'unicité de la solution. La preuve de l'unicité est basée sur une estimation a priori, l'existence est établie par la méthode standard de Fourier.

II.2 Position du problème

Dans le rectangle $\Omega = (0, T) \times (0, 1)$, on considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x^r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right) + k \frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x), \quad r > 0 \text{ and } k \geq 0, \quad (\text{II.1})$$

A l'équation (II.1) on associe les conditions initiales

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad x \in (0, 1), \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi(x) \quad x \in (0, 1), \quad (\text{II.3})$$

et les conditions intégrales,

$$\int_0^1 u(t, x) dx = 0, \quad \int_0^1 x^r u(t, x) dx = 0 \quad \text{pour } t \in (0, T) \quad (\text{II.4})$$

Où $\varphi(x), \psi(x) \in L^2(0, 1)$ sont des fonctions données satisfaisants les conditions de compatibilité (II.4).

II.3 Problème équivalent

La présence de conditions non locales provoque des complications dans l'application de méthodes standard pour la résolution de (II.1)-(II.4). Pour cela, et afin de surmonter cette difficulté on va transférer ce problème en un autre pouvant être traité plus efficacement. Ainsi, on a le lemme suivant.

Lemme 1. Le problème (II.1)-(II.4) est équivalent au problème suivant:

$$(\text{Pr})_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x^r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right) + k \frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x) \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{1}{r} \left(\int_0^1 x^r F(t, x) dx - \int_0^1 F(t, x) dx \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, 1) = - \int_0^1 x^r F(t, x) dx \end{array} \right.$$

Preuve : Soit $u(t, x)$ une solution de (II.1)-(II.4). Intégrons l'équation (II.1)

par rapport à x sur $(0,1)$, en prenant en considération (II.4), on obtient:

$$- \left[x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_0^1 - r \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \int_0^1 F(t, x) dx$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, 1) + r \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) \right) = - \int_0^1 F(t, x) dx$$

Afin d'éliminer la seconde condition non locale $\int_0^1 x^r u(t, \xi) d\xi = 0$, on multiplie les

deux membres de (II.1) par x^r et on intègre le résultat sur $(0,1)$, et en tenant compte de

(II.4), on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, 1) = - \int_0^1 x^r F(t, x) dx$$

Qu'on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{1}{r} \left(\int_0^1 x^r F(t, x) dx - \int_0^1 F(t, x) dx \right)$$

Et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t,1) = -\int_0^1 x^r F(t,x) dx$$

Soit maintenant $u(t,x)$ une solution de $(\mathbf{Pr})_1$, il reste de montrer que

$$\int_0^1 u(t,x) dx = 0,$$

Et

$$\int_0^1 x^r u(t,x) dx = 0$$

On intègre la première équation du $(\mathbf{Pr})_1$ par rapport à x , On obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(t,x) dx + k \frac{d}{dt} \int_0^1 u(t,x) dx = 0, \quad t \in (0,T) \quad (\star)$$

Et on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 x^r u(t,x) dx + k \frac{d}{dt} \int_0^1 x^r u(t,x) dx = 0, \quad t \in (0,T) \quad (\star\star)$$

Posons : $W(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 u(t,x) dx$, alors (\star) devient :

$$\frac{d}{dt} W(t) + kW(t) = 0, \quad t \in (0,T), \text{ donc : } W(t) = e^{-kt} W(0)$$

Or : $W(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(0,x) dx = \int_0^1 \psi'(x) dx = 0$, puisque ψ vérifie les conditions de

compatibilité (II.4), d'où : $W(t) = 0, \quad \forall t \in (0,T)$.

Par conséquent : $\frac{d}{dt} \int_0^1 u(t,x) dx = 0, \quad \forall t \in (0,T)$

Et finalement : $\int_0^1 u(t,x) dx = cte = \int_0^1 u(0,x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0$.

$\int_0^1 x^r u(t,x) dx = 0$ découle de $(\star\star)$ de la même manière. ■

On introduit maintenant la nouvelle fonction $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t)$, où

$$u_0(x,t) = \alpha(x) \int_0^t m_1(\tau) d\tau + \beta(x) \int_0^t m_2(\tau) d\tau, \alpha(x) = -x + x^2, \beta(x) = 2x - x^2,$$

$$m_1(t) = -\int_0^1 x^r F(t,x) dx,$$

$$m_2(t) = \frac{1}{r} (-m_1(t) - \int_0^1 F(t,x) dx)$$

Alors **(Pr)₁** est transformé en ce problème:

$$(\mathbf{Pr})_2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{x^r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) \right) + k \frac{\partial v}{\partial t} = f(t,x) \\ v(0,x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = \Psi(x) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t,1) = \frac{\partial v}{\partial t}(t,0) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(t,1) = 0 \end{array} \right.$$

Où

$$f(t,x) = F(t,x) + \left(\alpha(x) - \frac{\beta(x)}{r} \right) \int_0^1 x^r F_t(t,x) dx + \frac{\beta(x)}{r} \int_0^1 F_t(t,x) dx + \gamma(t,x),$$

$$\gamma(t,x) = -(r+1) + 2(r+2)x m_1(t) + (2(r+1) - 2(r+2)x) m_2(t) - k\alpha(x) m_1(t) - k\beta(x) m_2(t)$$

$$\Psi(x) = \psi(x) + \alpha(x) \int_0^1 x^r F(0,x) dx + \frac{\beta(x)}{r} \left(-\int_0^1 x^r F(0,x) dx + \int_0^1 F(0,x) dx \right)$$

II.4. Estimation à priori

On considère **(Pr)₂** comme solution de l'équation opératorielle

$$Lv = \mathcal{F},$$

où L est l'opérateur engendré par le **(Pr)₂**, et $\mathcal{F} = (f, \varphi, \Psi)$. L est considéré de

l'espace de Banach $D(L)=E$ dans F tels que :

$$E = \left\{ v : x^{\frac{r+1}{2}} v, x^{\frac{r+1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t}, x^{\frac{r+1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L^2(0,1) \text{ et} \right. \\ \left. x^{\frac{r}{2}} \frac{\partial v}{\partial t}, x^{\frac{r+1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, x^{\frac{r}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, x^{r+1} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t}, x^r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L^2(\Omega^\tau) \right\}$$

de norme :

$$\|v\|_E^2 = \int_{\Omega^\tau} x^r \left(\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 \right) + x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt \\ + \int_{\Omega^\tau} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) \right|^2 dxdt + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 x^{r+1} \left(|v|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^2 \right) dx$$

F étant l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\| \mathcal{A} \|_F^2 = \|(f, \varphi, \psi)\|_F^2 = \int_{\Omega^\tau} |f(t, x)|^2 dxdt + \int_0^1 (|\Psi|^2 + |\Psi'|^2 + |\varphi|^2) dx$$

Lemme 1 : Pour toute fonction $v \in E$, on a

$$\frac{\exp(-cT)}{8} \int_0^1 x^r |v(\tau, x)|^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 x^r |\varphi|^2 dx + \frac{1}{8} \int_0^1 \int_0^\tau x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx \quad (\text{II.5})$$

Avec c une constante vérifiant $c \geq 1$.

Preuve: En intégrant par parties $(\exp(-ct)x^r v, \frac{\partial v}{\partial t}) = \int_0^1 \int_0^\tau \exp(-ct)x^r v \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dt dx$ et en

utilisant des inégalités élémentaires on obtient (II.5).

On a

$$\int_0^1 \int_0^\tau x^r e^{-ct} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dxdt = \int_0^1 \left[x^r |v|^2 e^{-ct} \right]_0^\tau dx + c \int_0^1 \int_0^\tau x^r |v|^2 e^{-ct} dxdt - \int_0^1 \int_0^\tau x^r e^{-ct} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} dxdt \\ 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \int_0^\tau x^r e^{-ct} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dxdt \right) = \int_0^1 x^r |v(x, \tau)|^2 e^{-c\tau} dx - \int_0^1 x^r |\varphi|^2 dx + c \int_0^1 \int_0^\tau x^r e^{-ct} |v|^2 dxdt \quad (\text{C})$$

En utilisant l' ε -inégalité pour $\varepsilon=1$ au premier membre, on obtient:

$$2 \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \int_0^\tau x^r e^{-ct} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dx dt \right) \leq \int_0^\tau \int_0^1 x^r e^{-ct} |v|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^1 x^r e^{-ct} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt .$$

En utilisant (C), on obtient:

$$\int_0^1 x^r |v(x, \tau)|^2 e^{-c\tau} dx + c \int_0^\tau \int_0^1 x^r e^{-ct} |v|^2 dx dt + \leq \int_0^\tau \int_0^1 x^r e^{-ct} |v|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^1 x^r e^{-ct} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_0^1 x^r |\phi|^2 dx$$

Pour $c \geq 1$, on a:
$$e^{-c\tau} \int_0^1 x^r |v(x, \tau)|^2 dx \leq \int_0^\tau \int_0^1 x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_0^1 x^r |\phi|^2 dx \quad \blacksquare$$

Théorème 1. Pour le problème $(Pr)_2$ On a

$$\|v\|_E \leq C \|Lv\|_F,$$

Où $C > 0$ ne dépend pas de v

Preuve. Soit

$$Mv = 2x^r \frac{\partial v}{\partial t} + x^r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

On considère le produit scalaire $(\ell v, Mv) = \int_0^1 \int_0^\tau \ell v \overline{Mv} dt dx$, et on intègre sur

$\Omega^\tau = (0, \tau) \times (0, 1)$, On obtient :

$$i) \operatorname{Re} 2 \int_0^1 \int_0^\tau x^r \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt dx = \int_0^1 x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\tau, x) \right|^2 dx - \int_0^1 x^r |\Psi(x)|^2 dx$$

$$ii) 2k \int_0^1 \int_0^\tau x^r \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} dt dx = 2k \int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt$$

$$iii) -2 \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) dx = 2 \int_{\Omega^\tau} x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt$$

$$iv) \int_0^1 \int_0^\tau x^r \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} dt dx = \int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt$$

$$v) \operatorname{Re} k \int_0^1 \int_0^\tau x^r \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt dx = \frac{k}{2} \int_0^1 x^r \left| \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x) \right|^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^1 x^r |\Psi(x)|^2 dx$$

$$\int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(\tau, x) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} (\Psi')^2 dx$$

$$vi) \operatorname{Re} \left(- \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) dx dt \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(\tau, x) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} |\Psi'(x)|^2 dx$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^1 \int_0^\tau \ell v \overline{Mv} dt dx &= \left(1 + \frac{k}{2}\right) \int_0^1 x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\tau, x) \right|^2 dx - \left(1 + \frac{k}{2}\right) \int_0^1 x^r |\Psi|^2 dx + 2k \int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt + \\ &2 \int_{\Omega^\tau} x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt + \int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(\tau, x) \right|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} (\Psi')^2 dx dt \end{aligned}$$

Et comme ($x \leq 1$) on a : $x^{r+1} \leq x^r$ alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^1 \int_0^\tau \ell v \overline{Mv} dt dx &\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) \int_0^1 x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\tau, x) \right|^2 dx - \left(1 + \frac{k}{2}\right) \int_0^1 x^r |\Psi|^2 dx + 2k \int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt + \\ &2 \int_{\Omega^\tau} x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt + \int_{\Omega^\tau} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(\tau, x) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^r |\Psi'|^2 dx \end{aligned}$$

(II.6)

On applique maintenant une ε -inégalité au terme $(\ell v, 2x^r \frac{\partial v}{\partial t} + x^r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2})$ on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\Omega^r} \ell v \overline{Mv} dx dt &\leq \left| \int_{\Omega^r} \ell v \overline{Mv} dx dt \right| \leq \int_{\Omega^r} |\ell v| |\overline{Mv}| dx dt \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\Omega^r} x^r |f|^2 dx dt + \varepsilon_1 \int_{\Omega^r} x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{\Omega^r} x^r |f|^2 dx dt + \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Omega^r} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

De l'équation $\ell v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{x^r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) \right) + k \frac{\partial v}{\partial t} = f(t, x)$ on a

$$\frac{1}{8} \int_{\Omega^r} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) \right|^2 dx dt \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega^r} x^r |f|^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega^r} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \frac{1}{4} k \int_{\Omega^r} x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt \quad (\text{II.8})$$

En Combinant les inégalités (II.5), (II.6), (II.7) et (II.8) et comme $(x \leq 1)$ on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \int_{\Omega^r} |f|^2 dx dt + (1 + \frac{k}{2}) \int_0^1 |\Psi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |\Psi'|^2 dx + \frac{1}{8} \int_0^1 |\phi|^2 dx \geq \\ &(1 + \frac{k}{2}) \int_0^1 x^{r+1} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\tau, x) \right|^2 dx + (\frac{7k}{4} - \varepsilon_1 - \frac{1}{8}) \int_{\Omega^r} x^r \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 dx dt + 2 \int_{\Omega^r} x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\ &+ (\frac{3}{4} - \frac{\varepsilon_2}{2}) \int_{\Omega^r} x^r \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{r+1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(\tau, x) \right|^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega^r} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) \right|^2 dx dt \\ &+ \frac{\exp(-cT)}{8} \int_0^1 x^{r+1} |v(\tau, x)|^2 dx \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

On choisit $\varepsilon_i, i = 1, 2$ tels que $\frac{7k}{4} - \varepsilon_1 - \frac{1}{8} = k_1 > 0$ et $\frac{3}{4} - \frac{\varepsilon_2}{2} = k_2 > 0$.

Le membre gauche de (II.9) est indépendant de τ , ainsi on remplace le membre droit par sa borne supérieure relativement à τ , dans l'intervalle $[0, T]$, on obtient l'inégalité recherchée.

Ce qui complète la preuve.

II.5. Existence et unicité de la solution

On va établir l'existence de la solution du problème $(Pr)_2$. Pour cela on utilisera la méthode de Fourier.

Considérons la fonction $v_n(t, x) = T_n(t)X_n(x)$

Où $X_n(x)$ est une fonction propre du problème aux valeurs limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x^r} \left(\frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_n}{dx} \right) \right) - kX_n = \lambda_n X_n \\ X_n(1) = X_n(0) \\ \frac{dX_n}{dx}(1) = 0 \end{array} \right.$$

$\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ est appelé valeur propre associée à la fonction propre $X_n(x)$, et $T_n(t)$

satisfait le problème aux valeurs initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T_n}{dt^2} - \lambda_n \frac{dT_n}{dt} = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ \frac{dT_n}{dt}(0) = \Psi_n \end{array} \right.$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n X_n(x)$$

$$\Psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^* X_n(x)$$

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

Et d'après l'égalité de Parseval-Steklov on a

$$\|\varphi\|_{L_2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2,$$

$$\|\Psi\|_{L_2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^2,$$

$$\|\Psi\|_{L_2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_n^*)^2,$$

Et
$$\int_0^1 f(t, x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t).$$

D'où
$$\int_{\Omega} f^2(t, x) dx dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T f_n^2(t).$$

En multipliant $\frac{d^2 T_n}{dt^2} - \lambda_n \frac{dT_n}{dt} = f_n(t)$ par $\exp(-\lambda_n t)$ on obtient:

$$\frac{d}{dt} \left[\exp(-\lambda_n t) \frac{dT_n}{dt} \right] = f_n(t) \exp(-\lambda_n t)$$

On intègre deux fois sur $(0, t)$, le calcul direct donne:

$$T_n(t) = \varphi_n + \int_0^t \Psi_n \exp(\lambda_n \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^s f_n(\tau) \exp(\lambda_n s - \lambda_n \tau) d\tau ds$$

De plus on a:

$$\int_0^1 x^r X_n(x) X_m(x) dx = 0, n \neq m$$

En effet:

Soient X_n et X_m deux fonctions propres associées respectivement aux valeurs

propres λ_n et λ_m alors on a:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^r} \left(\frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_n}{dx} \right) \right) + (\lambda_n - k) X_n = 0 \\ \frac{1}{x^r} \left(\frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_m}{dx} \right) \right) + (\lambda_m - k) X_m = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{A})$$

Avec:

$$\begin{cases} X_n(1) = X_n(0), \frac{dX_n}{dx}(1) = 0 \\ X_m(1) = X_m(0), \frac{dX_m}{dx}(1) = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{B})$$

Multiplions les deux équations de (A) par X_m et X_n respectivement et en les soustrayant membre à membre on obtient:

$$\frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_n}{dx} \right) X_m - \frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_m}{dx} \right) X_n = (\lambda_m - \lambda_n) x^r X_n X_m$$

Une intégration par parties donne :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 x^r X_n(x) X_m(x) dx = \frac{dX_n}{dx}(1) X_m(1) - \frac{dX_m}{dx}(1) X_n(1)$$

car

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_n}{dx} \right) X_m dx = \frac{dX_n}{dx}(1) X_m(1) - \int_0^1 x^{r+1} \frac{dX_n}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(x^{r+1} \frac{dX_m}{dx} \right) X_n dx = \frac{dX_m}{dx}(1) X_n(1) - \int_0^1 x^{r+1} \frac{dX_m}{dx} \frac{dX_n}{dx} dx$$

En utilisant (B) on a le résultat.

Et

$$\varphi_n = \frac{\int_0^1 x^r \varphi(x) X_n(x) dx}{\int_0^1 x^r X_n^2(x) dx}$$

$$\Psi_n = \frac{\int_0^1 x^r \Psi(x) X_n(x) dx}{\int_0^1 x^r X_n^2(x) dx}$$

$$\Psi_n^* = \frac{\int_0^1 x^r \Psi'(x) X_n(x) dx}{\int_0^1 x^r X_n^2(x) dx}$$

D'après le principe de superposition, la solution de (Pr)₂ est donnée par les séries

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x). \quad (\text{II.10})$$

Alors on a:

Théorème 2. Soit $f, \varphi \in L^2(\Omega)$, et $\Psi \in H^1(0,1)$. (Alors la solution $v(t,x)$ de $(Pr)_2$ existe et est représentée par les séries (II.10) qui convergent dans E .

Preuve. On considère la somme partielle $S_N(t,x) = \sum_{n=1}^N T_n(t)X_n(x)$ des séries (II.10)

alors d'après le **théorème 1**

$$\left\| \sum_{n=1}^N T_n(t)X_n(x) \right\|_E^2 \leq C_1 \sum_{n=1}^N \left(\int_0^T f_n^2(t) dt + \varphi_n^2 + \Psi_n^2 + (\Psi_n')^2 \right) \quad (\text{II.11})$$

Les séries $\sum_{n=1}^N \int_0^T f_n^2(t) dt$, $\sum_{n=1}^N \varphi_n^2$, $\sum_{n=1}^N \Psi_n^2$, et $\sum_{n=1}^N (\Psi_n')^2$ convergent. D'où l'on déduit de

(II.11) que les séries (II.10) convergent dans E et par suite leurs sommes $v \in E$.

CHAPITRE III

***UNE SOLUTION FORTE POUR
EQUATIONS DIFFERENTIELLES
PARABOLIQUES D'ORDRE SUPERIEUR DE
TYPE MIXTE AVEC CONDITION INTEGRALE***

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème parabolique mixte avec conditions aux limites non classiques pour des équations d'ordre supérieur. On démontre l'existence et l'unicité de la solution. La preuve de l'unicité est basée sur une estimation a priori, l'existence est établie à partir de la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré, chose faisable moyennant des opérateurs de régularisation.

III.2 Position du problème

III.3 Préliminaires

On associe au problème (III.1)-(III.5) l'opérateur L , de domaine de définition $D(L)$ constitué des fonctions $u \in W_2^{2\alpha}(\Omega)$ telles que $\frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \in L^2(\Omega)$, $i = \overline{0, \alpha}$, défini de E dans F , où E l'espace de Banach composé des fonctions $u \in L_2(\Omega)$, satisfaisants (III.3), (III.4) et (III.5), avec la norme finie :

$$\|u\|_E^2 = \int_{\Omega} x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right|^2 dxdt + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 x^4 |u|^2 dx. \quad (\text{III.6})$$

Et F l'espace de Hilbert des éléments $\mathcal{F}=(f, \varphi)$, obtenu par la complétion de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^{2\alpha}(0,1)$ avec la norme suivante

$$\| \mathcal{F} \|_F^2 = \|(f, \varphi)\|_F^2 = \int_{\Omega} x^3 |f(t, x)|^2 dxdt + \int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx + \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx. \quad (\text{III.7})$$

En utilisant la méthode des inégalités énergétiques, méthode proposé dans [15], on établie une estimation a priori.

Lemme 1 : Pour toute fonction $u \in E$, on a

$$e^{-cT} \int_0^1 x^4 |u(\tau, x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx + \int_0^1 \int_0^\tau x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \quad (\text{III.8})$$

Avec c une constante vérifiant $c \geq 1$.

Preuve. En intégrant par parties $\int_0^1 \int_0^\tau e^{-cT} x^4 u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dt dx$ et en utilisant des inégalités élémentaires on obtient (III.8) (de la même manière que dans la démonstration de (II.5) Chapitre II).

III.4 Une estimation a priori et ses conséquences

Théorème 1. Pour toute fonction $u \in E$, on a l'inégalité

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F, \quad (\text{III.9})$$

Où la constante $C = \frac{5 + 4\alpha}{\inf(1, e^{-cT})}$.

Preuve. Soit

$$Jg = \int_x^1 g(t, \xi) d\xi$$

Et soit

$$Mu = x^4 \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha x^3 J \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On multiplie l'équation (III.1) par \overline{Mu} , et on intègre sur $\Omega^\tau = (0, \tau) \times (0, 1)$, On obtient:

$$\mathcal{L}u M \bar{u} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(-1)^\alpha}{x^3} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right) \right] \left(x^4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \alpha x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \quad (\text{III.10})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{L}uM\bar{u}dx &= \int_0^1 x^4 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \alpha x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx + (-1)^\alpha \int_0^1 x \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \\ &\quad + (-1)^\alpha \int_0^1 \alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} i) \int_0^1 \alpha x^3 \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx &= -\alpha \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right) x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \\ &= -\alpha \left(\left[J \frac{\partial u}{\partial t} x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]_0^1 - \int_0^1 J \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dx \right) \\ \int_0^1 \alpha x^3 \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx &= -\alpha \int_0^1 J \frac{\partial u}{\partial t} x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx + \alpha \int_0^1 J \frac{\partial u}{\partial t} 3x^2 \frac{\partial}{\partial x} J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \\ &= -\alpha \int_0^1 J \frac{\partial u}{\partial t} x^3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx + \alpha \int_0^1 J \frac{\partial u}{\partial t} 3x^2 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \end{aligned}$$

D'où

$$\text{Re} \int_0^1 \alpha x^3 \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \quad (\text{III.12})$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}uM\bar{u}dx &= \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \text{Re} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} \right) dx dt \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} ii) (-1)^\alpha \int_0^1 \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx &= (-1)^\alpha \left[\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]_0^1 \\ &\quad + (-1)^{\alpha+1} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dx \\ &= (-1)^{\alpha+1} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx + (-1)^{\alpha+1} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\alpha+1} \left[\frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]_0^1 + (-1)^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} dx \\
&\quad + (-1)^{\alpha+1} \left[\frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^1 + (-1)^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right) dx \\
&= (-1)^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} dx + (-1)^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} dx \\
&\quad + (-1)^{\alpha+2} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx \\
&= (-1)^{\alpha+2} 2 \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} dx + (-1)^{\alpha+2} \int_0^1 x \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx \\
&= (-1)^{\alpha+2} 2 \left[\frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^1 + (-1)^{\alpha+3} 2 \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx \\
&\quad + (-1)^{\alpha+2} \left[\frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \right]_0^1 + (-1)^{\alpha+3} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \right) dx \\
&= (-1)^{\alpha+3} 2 \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx + (-1)^{\alpha+3} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx \\
&\quad + (-1)^{\alpha+3} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^3 \partial t} dx \\
&= (-1)^{\alpha+3} 3 \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx + (-1)^{\alpha+3} \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^3 \partial t} dx
\end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned}
& (-1)^\alpha \int_0^1 x \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx = (-1)^{2\alpha-1} (\alpha-1) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^{\alpha-1} \bar{u}}{\partial x^{\alpha-2} \partial t} dx + \\
& (-1)^{2\alpha-1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx \\
& = (-1)^{2\alpha-1} (\alpha-1) \left[\left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^{\alpha-1} \bar{u}}{\partial x^{\alpha-2} \partial t} \right]_0^1 \\
& \quad + (-1)^{2\alpha} (\alpha-1) \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx + (-1)^{2\alpha-1} \left[x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} x \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} \right]_0^1 \\
& \quad + (-1)^{2\alpha} \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} \right) dx \\
& = (-1)^{2\alpha} (\alpha-1) \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx + (-1)^{2\alpha} \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx \\
& \quad + (-1)^{2\alpha} \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} x \frac{\partial^{\alpha+1} \bar{u}}{\partial x^\alpha \partial t} dx \\
& = (-1)^{2\alpha} \alpha \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx + (-1)^{2\alpha} \int_0^1 x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} \right) dx
\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$(-1)^\alpha \int_0^1 x \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx = \alpha \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx + \int_0^1 x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} \right) dx \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^\alpha \int_0^1 \alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx = (-1)^\alpha \alpha \left[\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]_0^1 \\
& \quad + (-1)^{\alpha+1} \alpha \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dx \\
& = (-1)^{\alpha+2} \alpha \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \\
& = (-1)^{\alpha+2} \alpha \left[\frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right]_0^1 + (-1)^{\alpha+3} \alpha \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-2}}{\partial x^{\alpha-2}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} dx
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{\alpha+3} \alpha \left[\frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^1 + (-1)^{\alpha+4} \alpha \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha-3}}{\partial x^{\alpha-3}} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} dx$$

En utilisant la technique de récurrence sur α on obtient :

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha \int_0^1 \alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx &= (-1)^{2\alpha} \alpha \left[x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\alpha-1} \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} \right]_0^1 + (-1)^{2\alpha+1} \alpha \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\alpha-1} \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx \\ &= -\alpha \int_0^1 x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{\alpha-1} \bar{u}}{\partial x^{\alpha-1} \partial t} dx. \end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$\operatorname{Re} \int_0^1 \mathcal{L}u M \bar{u} dx = \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \operatorname{Re} \int_0^1 x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} \right) dx \quad (\text{III.15})$$

Intégrons par parties le troisième terme de (III.15)

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} \right) dx dt &= \left[\int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right]_0^\tau - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) dx dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}(\tau, x)}{\partial x^\alpha} x^3 \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} dx - \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}(0, x)}{\partial x^\alpha} x^3 \frac{\partial^\alpha u(0, x)}{\partial x^\alpha} dx \\ &\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} x^3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) dx dt, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial x^\alpha} \right) dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}(\tau, x)}{\partial x^\alpha} x^3 \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \bar{u}(0, x)}{\partial x^\alpha} x^3 \frac{\partial^\alpha u(0, x)}{\partial x^\alpha} dx. \end{aligned}$$

Remplaçons dans (III.15) on obtient :

$$\operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}u M \bar{u} dx = \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx$$

En utilisant des ε -inégalités et certaines propriétés de modules on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}u M \bar{u} dx &\leq \left| \int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}u M \bar{u} dx \right| \\
&\leq \int_0^\tau \int_0^1 |\mathcal{L}u| |M \bar{u}| dx dt \\
&\leq \int_0^\tau \int_0^1 |\mathcal{L}u| \left| x^4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \alpha x^3 J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right| dx dt \\
&\leq \int_0^\tau \int_0^1 |\mathcal{L}u| x^4 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right| dx dt + \alpha \int_0^\tau \int_0^1 |\mathcal{L}u| x^3 \left| J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right| dx dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^4 (\mathcal{L}u)^2 + \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 (x^3 \mathcal{L}u)^2 + \left| J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \mathcal{L}u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \quad (\text{car } 0 \leq x \leq 1) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \mathcal{L}u^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \left| J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\leq \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \mathcal{L}u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \left| J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\leq \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^3 \mathcal{L}u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \quad (\text{car } 0 \leq x \leq 1)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}u M \bar{u} dx &= \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \leq \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^3 |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_0^1 3x^2 \left| J \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|^2 dx dt
\end{aligned}$$

D'où en utilisant le *lemme 1*, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^3 |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\
&+ \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\
&\quad + \frac{e^{-cT}}{\varepsilon_2} \int_0^1 x^4 |u(\tau, x)|^2 dx \tag{III.16}
\end{aligned}$$

De l'équation (III.1) on a:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}u - \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 &= \frac{1}{x^6} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right)^2 \\
\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right|^2 &\leq x^6 \left| \mathcal{L}u + \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \\
&\leq x^4 \left| \mathcal{L}u + \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \\
&\leq 2x^4 |\mathcal{L}u|^2 + 2x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \quad (\text{car } |a+b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)) \\
&\leq 2x^3 |\mathcal{L}u|^2 + 2x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^\tau \int_0^1 \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right|^2 dx dt \leq \frac{2}{\varepsilon_1} \int_0^\tau \int_0^1 x^3 |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \frac{2}{\varepsilon_1} \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt. \quad (\text{III.17})$$

En combinant les inégalités (III.12) and (III.13), on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{2}{\varepsilon_1} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx + \frac{e^{-cT}}{\varepsilon_2} \int_0^1 x^4 |u(\tau, x)|^2 dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^\tau \int_0^1 \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right|^2 dx dt \leq \left(\frac{1+\alpha}{2} + \frac{2}{\varepsilon_1} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^3 |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx \quad (\text{III.18}) \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que : $k = \frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{2}{\varepsilon_1} > 0$, par exemple : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 16$

alors on a :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{16} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^4 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx + \frac{e^{-cT}}{16} \int_0^1 x^4 |u(\tau, x)|^2 dx \\ & + \frac{1}{16} \int_0^\tau \int_0^1 \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right|^2 dx dt \leq \left(\frac{5+4\alpha}{8} \right) \int_0^\tau \int_0^1 x^3 |\mathcal{L}u|^2 dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx + \frac{1}{16} \int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx \quad (\text{III.19}) \end{aligned}$$

Le membre droit de (III.19) est indépendant de τ , ainsi on remplace le membre gauche par sa borne supérieure relativement à τ , dans l'intervalle $[0, T]$, on obtient l'inégalité recherchée.

Ce qui complète la preuve.

Lemme 2. *L'opérateur L de E vers F est fermable.*

Preuve. Supposons $(u_n) \in D(L)$ une suite telle que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ dans } E$$

et

$$Lu_n \rightarrow \mathcal{F} \text{ dans } F$$

Démontrons que $\mathcal{F} = (f, \varphi) \equiv 0$. $\varphi \equiv 0$ résulte directement de la continuité de

l'opérateur trace Introdusant l'opérateur l . [car: $\int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx + \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 x^3 \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 x^4 |u|^2 dx]$$

Maintenant, nous devons montrer que $f = 0$, alors introduisons l'opérateur

$$\mathcal{L}_0 v = -x^3 \frac{\partial v}{\partial t} + (-1)^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right) \right)$$

Défini sur le domaine $D(L_0)$ des fonctions $v \in W_2^{2\alpha}(\Omega)$ vérifiant

$$v|_{t=T} = 0, v|_{t=0} = 0, \frac{\partial^i v}{\partial x^i} \Big|_{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha}, .$$

De plus, comme

$$\int_\Omega x^3 f \bar{v} dx dt = \liminf \int_\Omega x^3 \mathcal{L} u_n \bar{v} dx dt = \liminf \int_\Omega u_n \mathcal{L}_0(\bar{v}) dx dt = 0$$

Pour toute fonction $v \in D(L_0)$, alors on a $f=0$.

Soit \bar{L} la fermeture de cette opérateur, avec le domaine de définition $\forall u \in D(\bar{L}), .$

Définition 1. Une solution de l'équation $\bar{L}u = \mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (III.1)-(III.5).

L'estimation a priori (III.9) peut être prolongée à une solution forte, i.e. on a l'estimation

$$\|u\|_E \leq C \|\bar{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\bar{L}), \quad (III.20)$$

L'inégalité (III.19) implique les corollaires suivants:

Corollaire 1. Une solution forte du problème (III.1)-(III.5) est unique si elle existe, et dépend continûment de $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$

Corollaire 2. L'image $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est fermé dans F , et $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$.

4. Résolubilité du problème

Afin de prouver la Résolubilité de (III.1)-(III.5), il suffit, de montrer que $R(L)$ est dense dans F . La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3: Soit $D_0(L) = \{u \in D(L) / lu=0\}$. Si pour $u \in D_0(L)$ et ω tel que $\omega \in L_2(\Omega)$,

$$\text{Si on a : } \int_{\Omega} x^4 \mathcal{L} u \bar{\omega} dx dt = 0, \quad (\text{III.21})$$

Alors $\omega = 0$.

Proof. L'égalité (III.15) peut être écrite comme suit:

$$-\int_{\Omega} x^4 \frac{\partial u}{\partial t} \bar{\omega} dx dt = (-1)^\alpha \int_{\Omega} x \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \bar{\omega} dx dt. \quad (\text{III.22})$$

Pour $\omega(x,t)$ donné, on introduit la fonction

$$v(x,t) = x^{\alpha-1} \int_x^1 \xi^{1-\alpha} \frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi} d\xi + x^{\alpha-1} \int_x^1 \xi^{-\alpha} \omega(\xi,t) d\xi,$$

Donc on a $\int_x^1 v(x,t) dx = 0$ and $x^4 \omega = x^4 v + \alpha x^3 Jv = Nv$. Alors de l'égalité (III.22) on

obtient

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} N \bar{v} dx dt &= (-1)^\alpha \int_{\Omega} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) x \bar{v} dx dt \\ &+ \alpha (-1)^\alpha \int_{\Omega} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) J \bar{v} dx dt. \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

On intègre par parties le second membre de la partie droite de (III.17), on obtient

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} N \bar{v} dx dt = \int_{\Omega} A u \bar{v} dx dt. \quad (\text{III.24})$$

Où

$$Au = (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^3 \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right).$$

Lorsqu'on introduit les opérateurs de régularisation J_ε^{-1} and $(J_\varepsilon^{-1})^*$, par rapport à \mathbf{t} [49] alors ces opérateurs fournissent la solution aux problèmes

$$\varepsilon \frac{dg_\varepsilon(t)}{dt} + g_\varepsilon(t) = g(t), \quad (\text{III.25})$$

$$g_\varepsilon(t)|_{t=0} = 0,$$

Et

$$-\varepsilon \frac{dg_\varepsilon^*(t)}{dt} + g_\varepsilon^*(t) = g(t), \quad (\text{III.26})$$

$$g_\varepsilon^*(t)|_{t=T} = 0,$$

La solution possède les propriétés suivantes: pour $g \in L^2(0, T)$, les fonctions $g_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})g$ et $g_\varepsilon^* = (J_\varepsilon^{-1})^*g$ sont dans $W_2^1(0, T)$ telles que $g_\varepsilon(t)|_{t=0} = 0$ et $g_\varepsilon^*(t)|_{t=T} = 0$. De plus, (J_ε^{-1}) commute avec $\frac{\partial}{\partial t}$, alors $\int_0^T |g_\varepsilon - g|^2 dt \rightarrow 0$ et $\int_0^T |g_\varepsilon^* - g|^2 dt \rightarrow 0$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Posons dans (III.24) à la place de u la fonction régularisée $(J_\varepsilon^{-1})u$, en utilisant la relation $AJ_\varepsilon^{-1} = J_\varepsilon^{-1}A$, et les propriétés des opérateurs de régularisation on obtient

$$\int_\Omega u N \overline{\left(\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t} \right)} dx dt = \int_\Omega A u \overline{v_\varepsilon^*} dx dt. \quad (\text{III.27})$$

Passons à la limite, (III.27) est satisfaite pour toutes les fonctions satisfaisant les conditions (III.2)-(III.5) telles que

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2(\Omega) \text{ pour } 0 \leq i \leq \alpha.$$

Le membre gauche de (III.27) est une fonctionnelle linéaire continue de u . Alors la fonction v_ε^* possède les dérivées

$$\frac{\partial^i v_\varepsilon^*}{\partial x^i} \in L_2(\Omega), \quad \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^\alpha v_\varepsilon^*}{\partial x^\alpha} \right) \in L_2(\Omega), \quad i = \overline{0, \alpha},$$

Et les conditions suivantes sont satisfaites

$$\left. \frac{\partial^i v_\varepsilon^*}{\partial x^i} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^i v_\varepsilon^*}{\partial x^i} \right|_{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha-1}. \quad (\text{III.28})$$

En plus v_ε^* satisfait la condition intégrale (III.5).

Posons $u = \int_0^t v_\varepsilon^*(x, \tau) d\tau$ dans (III.24), et utilisons (III.26), on obtient

$$-\int_\Omega v_\varepsilon^* \overline{N} v dx dt = \int_\Omega A u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx dt - \varepsilon \int_\Omega A u \frac{\partial \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t} dx dt. \quad (\text{III.29})$$

Intégrons par parties chaque terme membre gauche de (III.29), on a

$$\operatorname{Re} \int_\Omega A u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx dt \geq 0, \quad (\text{III.30})$$

$$\operatorname{Re} \left(-\varepsilon \int_\Omega A u \frac{\partial \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t} dx dt \right) = \varepsilon \int_\Omega x^3 \left| \frac{\partial^\alpha v_\varepsilon^*}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx dt. \quad (\text{III.31})$$

Maintenant, utilisons (III.30) et (III.31) dans (III.29) on a

$$\operatorname{Re} \int_\Omega v_\varepsilon^* \overline{N} v dx dt \leq 0,$$

alors $\operatorname{Re} \int_\Omega v \overline{N} v dx dt \leq 0$ quand ε s'approche de zéro.

Comme $\int_\Omega x^4 |v|^2 dx dt = 0$ (et $\int_\Omega x^3 v \overline{J} v dx dt = 0$), on conclue que $v=0$, alors $\omega=0$, Ce qui

complète la preuve. ■

Théorème 3. *L'image $R(L)$ de l'opérateur L coïncide avec F .*

Preuve. Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L)=F$ si et seulement si l'implication suivante est satisfaite:

$$\int_{\Omega} x^3 \mathcal{L} u \bar{f} dx dt + \int_0^1 x^3 \left(\frac{\partial^\alpha l u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{\varphi}}{\partial x^\alpha} \right) dx + \int_0^1 x^4 l u \bar{\varphi} dx = 0, \quad (\text{III.32})$$

Pour $u \in E$ arbitraire et $\mathcal{F}=(f, \varphi) \in F$, cela implique que f et φ son nulles.

Posons $u \in D(L_0)$ dans (III. 32), on obtient $\int_{\Omega} x^3 \mathcal{L} u \bar{f} dx dt = 0$. Prenons $\omega = \frac{f}{x}$, et en

utilisant *lemme 2*, on obtient $\omega = \frac{f}{x} = 0$, alors $f=0$.

D'ou, on a

$$\int_0^1 x^3 \left(\frac{\partial^\alpha l u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{\varphi}}{\partial x^\alpha} \right) dx + \int_0^1 x^4 l u \bar{\varphi} dx = 0. \quad (\text{III.33})$$

L'image de l'opérateur trace l est partout dense dans un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\left[\int_0^1 x^3 \left(\left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right|^2 \right) dx + \int_0^1 x^4 |\varphi|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent $\varphi=0$, et la présente preuve est complète. ■

Conclusion et perspectives

Dans le but, de trouver un multiplicateur universel pour toutes les équations aux dérivées partielles, on a étudié un très grand nombre d'articles et de thèses en essayant de découvrir la formule magique de ce multiplicateur. On a découvert que chaque problème nécessite un multiplicateur particulier propre à lui, de manière que la généralisation n'est pas pour demain. Cependant on a réussi la formulation du multiplicateur général pour certaines classes d'équations différentielles aux dérivées partielles de type parabolique.

Classe 1 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x^r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x^{r+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right) + k \frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x), \quad r > 0 \text{ and } k \geq 0,$$

(Avec les conditions initiales et les conditions aux limites mentionnées dans le chapitre II)

Le multiplicateur proposé est : $Mv = 2x^r \frac{\partial v}{\partial t} + x^r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, valable

$\forall r > 0$, r étant l'ordre de la singularité.

Classe 2 :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(-1)^\alpha}{x^m} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(x^{m+1} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \right) = f(t, x), \quad \alpha, m \text{ des entiers positifs,}$$

(Avec les conditions initiales et les conditions aux limites mentionnées dans le chapitre III)

Il est facile de remarquer que tous les calculs du chapitre III sont valables pour m entier positif quelconque, et même en inversant les ordres m et $m+1$.

Le multiplicateur proposé est : $Mu = x^{m+1} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha x^m J \frac{\partial u}{\partial t}$, valable

$\forall m$ entier positif, m étant l'ordre de la singularité. Avec $Jg = \int_x^l g(t, \xi) d\xi$.

On envisage dans nos prochaines recherches, d'entamer des problèmes mixtes hyperboliques avec des conditions non locales.

Bibliographie

- [1] M.A.Al-kadhi, *A class of hyperbolic equations with non local conditions*, Int. J. Math. Analysis, **2** (10) (2008), 491-498.
- [2] W. Allegretto; Y. Lin and A. Zhou, *A box scheme for coupled systems resulting from micro sensor thermistor problems*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems, **5** (1-4) (1999), 573-578.
- [3] G. W. Jr. Batten, *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*, Math. Comp., **17** (1963), 405-413.
- [4] A. B. Beilin, *Existence of solutions for one-dimensional wave equation with a non local condition*, Electro.J. Diff. Equa. **76** (2001), 1-8.
- [5] N. E. Benouar; N. I. Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differ. Equ. **27** (12) (1991), 1177-1487.
- [6] L.Bougoffa, *Parabolic equations with nonlocal conditions*, Appl. Math. Sciences **1** (21) (2007), 1041-1048.
- [7] A. Bouziani; N. E. Benouar, *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*, Kobe J. Math. **15** (1998), 47-58.
- [8] A. Bouziani ; N. E. Benouar, *Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1 **321** (1995), 1182.
- [9] B. Cahlon; D.M. Kulkani and P. Shi, *Stepwise stability for the heat equation with non local constraint*, Siam J. Num. Anal. **32** (2) (1995), 571-593.
- [10] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of Energy*, Quart. Appl. Math. **21** (2) (1963), 155-160.
- [11] J. R. Cannon , *The one-dimensional heat equation*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, **23** (1984).
- [12] Y. S. Choi; K. Y. Chan, *A parabolic equation with non local boundary conditions arising from electrochemistry*, Nonlinear Anal. **18** (1992), 317-331.
- [13] M. Denche; H. Khellaf; *Integral inequalities similar to Gronwall inequality*, Electron. J. Differential Equations. Vol. 2007(2007), No. 176 pp. 1-14.
- [14] M. Denche; A. L. Marhoune, *A three-point boundary value problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Appl. Math. Lett. **13** (2000), 85-89.
- [15] M. Denche; A. L. Marhoune, *High-order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions*, Electron. J. Differential Equations **60** (2000), 1-10.

- [16] M. Denche; A. L. Marhoune, *Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **16** (1) (2003), 69-79.
- [17] M. Denche; A. L. Marhoune, *Mixed problem with non local boundary conditions for a third-order partial differential equation of mixed type*, Int. J. Math. Sci. **26** (7) (2001), 417-426.
- [18] A. A. Dezin, *Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels*, Usp. Math. Naouk, **14** (3) (1987), 22-27.
- [19] K. Friderichs, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math. **7** (2) (1954), 345-392.
- [20] L. Gardin, *Cauchy problem for hyperbolic equations*, Univ. of Chicago, Lecture notes, 1957.
- [21] N. I. Ionkin, *A problem for the heat-condition equation with a two-point boundary Condition*, Differ. Uravn. **15** (7) (1979), 1284-1295.
- [22] N. I. Ionkin, *Stability of a problem in heat-condition*, differ. Uravn. **13** (2) (1977), 294-304.
- [23] N. I. Ionkin, *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat condition with a non classical boundary condition*, Differ. Uravn, **13** (2) (1977), 294-304.
- [24] N. I. Kamynin, *A boundary value problem in the theory of the condition with non classical boundary condition*, Th. Vychist. Mat. Fiz. **43** (6) (1964), 1006-1024.
- [25] A. V. Kartynnik, *Three-point boundary-value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation*, Differ. Equ. **26** (9) (1990), 1160-1166.
- [26] O.A. Ladyzenskaya, *Mixed problem for hyperbolic equations*. Edition Mir Nauka, (1974).
- [27] J. Leray, *Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients*. Princeton, Just for adv. Study, 1952.
- [28] A.L.Marhoune; M.Bouzit, *High order differential equations with integral boundary condition*, FJMS, 2006.
- [29] A. L. Marhoune; C. Latrous, *A strong solution of a high-order mixed type partial differential equation with integral conditions* Applicable Analysis. 1563-504X, Volume 87, Issue 6, 2008, Pages 625 – 634.
- [30] Nicoud, F; and Schönfeld, T. *Integral Boundary Conditions for Unsteady Biomedical CFD Applications*, Int. J. of Num. Meth. in Fluids, vol. 40, pp. 457-465, 2002.

- [31] I. G. Petrovsky, *Über das Cauchy'sche Problem für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen in Gebieten der nichtanalytischen Funktionen*, Bull. Univ. D'état. Moscow, **7** (1938) 1-14.
- [32] L. S. Pulkina, *A mixed problem with an integral condition for a hyperbolic equation*. (Russian) Mat. Zametki **74**(3) (2003), 435-445, translation in Math. Notes **74** (3-4) (2003), 411-421.
- [33] L. S. Pulkina, *A non local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electron. J. Differential Equations, **45** (1999), 1-6.
- [34] L. S. Pulkina, *A non local problem for the hyperbolic equation*, J. Nat. Geom. **22** (1-2) (2002), 81-90.
- [35] L. S. Pulkina, *A non local problem with Integral conditions for a hyperbolic equation*, Diff. Equ. **40** (7) (2004), 887-892.
- [36] L. S. Pulkina, *A non local problem for a loaded hyperbolic equation*, (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova, Differ. Uravn. Din. Sist., **236** (2002), 298-303; Translation in Proc. Steklov Inst. Math. **1**(236) (2002), 285-290.
- [37] M. Renardy, W. J. Hrusa and J. A. Nohel, *Mathematical problems in viscoelasticity*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific and Technical, Harlow, **35** (1987).
- [38] R. G. Ric ; D. D. Duong. *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers*. PB - John Wiley & Sons. 1994.
- [39] A. A. Samarski, *Some problems in differential equations theory*, differ. Uravn, **16**(11) (1980), 1221-1228.
- [40] A.A. Samarski, *Some problems in the modern theory of differential equations*, Differ. Uravn., **16** (1980), 1221-1228.
- [41] P. Shi, M. Shillor, *On design of contact patterns in one dimensional thermo elasticity*, Theoretical Aspect of Industrial Design (Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1990), Siam, Pennsylvania, (1992), 76-82.
- [42] P. Shi, *Weak solution to evolution problem with a non local constraint*, Siam J. Math. Anal, **24** (1) (1993), 46-58.
- [43] H. Tanabe, *Equation of evolution*, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.
- [44] V. F. Volkodavov, V. E. Zhukov , *Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic*, Diff. Equ. **34** (4) (1998), 501-505.
- [45] N. I. Yurchuk, *A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations*, Diff. Equa. **13** (4) (1977), 423-429.

- [46] N. I. Yurchuk, *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m+1}}\right) + A$* , Diff. Equa. **10** (4) (1974), 589-592.
- [47] N. I. Yurchuk, *Boundary value problems for equations involving operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\right) + A$* , Diff. Equa. **10** (5) (1974), 735-737.
- [48] N. I. Yurchuk, *Boundary value problems for differential equations with operator valued coefficients depending on parameter*, Diff. Equa. **12** (9) (1976), 1157-1168.
- [49] N. I. Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differ. Equ. **22** (12), (1986), 1457-1463.
- [50] N. I. Yurchuk, *Mixed problem for parabolic equation of variable order*. Soviet. Math. Dokl., **26** (12) (1982), 39-41.
- [51] N. I. Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Diff. Equ. **22** (1986), 1457-1463.
- [52] N. I. Yurchuk, *The energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equation*, Diff. Equ. **14** (12) (1978), 1558-1567.

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة ثلاث حالات خاصة من مسألة مختلطة عامة ذات شروط تكاملية، غير محلية. ويمكن مصادفة هذه المسائل في نظرية النقل الحراري، والمرونة، والمرونة الحرارية، وفيزياء البلازما، وديناميكا المجموعات وديناميكا السوائل (تطبيقات طبية حيوية غير مستقرة، على سبيل المثال).

نستعمل طريقة المتراجحات الطاقوية التي تركز أساسا على إيجاد مؤثر Mu ، يدعى الضارب، يتعلق بالتابع u ، بالشروط الأولية، وبمشتقاته وبتابع معياري معين. ينتج عن حضور شروط غير محلية، تعقيدات عند تطبيق الطرائق المعيارية في حل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية. لأجل هذا، حوّلنا الحالة الأولى إلى أخرى يمكن معالجتها بفعالية أكثر. نبرهن وجود حل للمسألة بطريقة فورييه، أما برهان وحدانية الحل فيرتكز على متراجحة أولية. وفيما يخص الحالتين الثانية والثالثة، فإن وجود الحل القوي ينتج عن كثافة $R(L)$ في F ، الأمر الذي يمكن إثباته بواسطة مؤثرات تسوية تختار حسب طبيعة المسألة المدروسة.

Résumé

Le but de cette présente thèse est d'étudier trois cas particuliers d'un problème mixte général avec conditions intégrales appelées également conditions non locales. Ces problèmes peuvent être rencontrés en théorie de transmission de chaleur, élasticité et thermo-élasticité, physique de plasmas, dynamique de populations et dynamique de fluide (applications biomédicales instables par exemple).

La méthode utilisée est celle des inégalités énergétiques, basée sur la recherche d'un opérateur Mu , dit multiplicateur, qui dépend généralement de la condition non locale, la fonction u , ses dérivées et d'une certaine fonction poids. La présence de conditions non locales provoque des complications dans l'application de méthodes standards pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Pour cela, on a transféré le problème du **1^{er} cas** en un autre pouvant être traité plus efficacement. On démontre l'existence par la méthode standard de Fourier, la preuve de l'unicité est basée sur une estimation a priori. Pour le 2^{ème} et le 3^{ème} cas l'existence de la solution forte découle de la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré, chose faisable moyennant des opérateurs de régularisation que l'on choisira suivant la nature de problème.

Abstract

The purpose of this thesis is to study three particular cases of a general mixed problem with integral conditions also called non-local conditions. These problems may be encountered in the theory of heat transfer, elasticity and thermo-elasticity, plasma physics, population dynamics and fluid dynamics (unstable biomedical applications for example).

The method used is the energy inequalities, based on finding an operator Mu known as multiplier, which usually depends on the non local condition, the function u , its derivatives and a certain weight function. The presence of non-local conditions complicates the application of standard methods for solving partial differential equations. For this, we transferred the problem from **1^{er} case** to another which involves no integral conditions. We prove the existence by Fourier's method, the proof of the uniqueness is based on an a priori estimate. For the **second and third cases**, the existence of strong solution is obtained from the density of the operator range, generated by the considered problem, which is feasible through regularization operators, chosen depending on the nature of the problem.