المجلس الأعلى للغة العربية

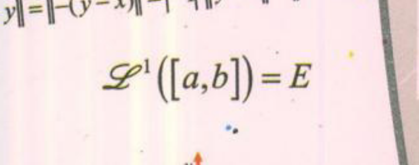
المُقعّد المجلّي للتحليل الدالّيّ

ملقّح بتمارين محلولة
ومصفّح بأخرى للحلّ

$$\|x-x_0\| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\|;$$

$$\mathscr{L}^1([a,b]) = E$$



الأستاذ الدكتور محمد حازي

منشورات المجلس - 2013

● كتاب:

● إعداد:

● قياس الصفحة: 23/15.5

● عدد الصفحات:

الإيداع القانوني:
ردمك:

المجلس الأعلى للغة العربية
شارع فرونكلين روزفلت – الجزائر
ص. ب: 575 الجزائر ـــ ديدوش موراد
الهاتف: 021.23.07.24/25
الفاكس: 021.23.07.07

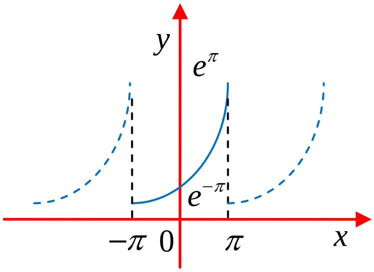
محمد حازي

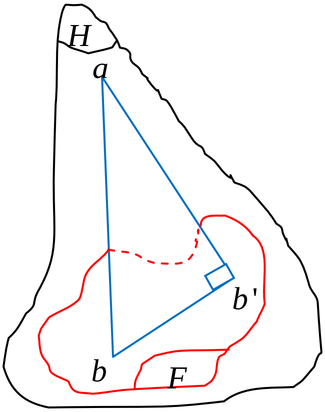
المُقعّد المجلّي للتحليل الدالّيّ

ملقّح بتمارين محلولة

و

ومصفّح بأخرى للحلّ





للسنتين الأولى والثانية

من المرحلة الأولى الجامعيّة

إهداء

إلـى

أصدقائي في المملكة المغربيّة الشقيقة

... ...

إنّ كثرتكم تحول دون ذكركم اسميًا.

أنشودة الفالج[1]

يا من معدّله عن العشرة قد طفا
فزتَ، فانعم اليوم بالتهاني و"الوفا"
قل للذي دون ذلك لا تراع
كلّ امرئ عن أمره يوما قد غفا
ما له أن يركن حين الملمات إلى
اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"
لئن لم يضرب الفوز في حزيران له
موعدا، ولم ينج من أيلول ضيفا
فله في " الفالج المقروض " خير معين
على الاستذكار، ومن الهم خير "الشفا"
يجلي عن وجهه غلس الأسى
فيغدو مثل السماء حين "الصفا"
يأتي ركبَكم يرفل بوشاحه
يحمد اللّه و" الفالج " الذي رفل

[1] كلام شبه منظّم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويج له لدى جمهور مستخدميه. لم أفهم (ولم أهضم) لماذا اعترضت مديريّة النشر بديوان المطبوعات الجامعيّة على ضمّه في طبعة الكتاب الثانية.

للمؤلّف في ديوان المطبوعات الجامعيّة:

أ. **في التأليف:**

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général
2. المختصر في الطبولوجيا
3. Introduction aux espaces normés
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.

ب. **في الترجمة:**

1. معادلات الفيزياء الرياضيّة (جزآن).
2. دروس في الطبولوجيا.
3. سلاسل وتكاملات.
4. المصفوفات: دروس ومسائل.
5. مسائل وتمارين محلولة.
6. مدخل إلى الطبولوجيا العامّة.

7. دروس في الجبر الخطيّ.
8. الجبر الخطيّ.
9. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

وفي دار القصبة للنشر:

1. أطلس الرياضيّات
2. الطلع النضيد للطالب والمعيد.

0

تصدير

1.0 مدخل

بعد أن أخذنا بيدك في جولة، تفسّحنا خلالها عبر شعاب المفاهيم الطبولوجيّة العامّة وميزاتها، مرورا بروضة الفضاءات المتريّة وتطبيقاتها ها نحن نحطّ الرحال بموطن الفضاءات النظيميّة، التي تعدّ الأرضيّة الأكثر خصوبة للتحليل الدالّيّ. إنّها المحطّة الأخيرة المكمّلة للمشروع المستعرض للطبولوجيا الذي أطلقناه من قبل عبر مؤلّفينا [1] و[2].

نتناول فيه ستّة فصول، هي:

الفصل الأوّل: الفضاء النظيميّ: تعاريف وخصائص عامّة،

الفصل الثاني: فضاء التطبيقات الخطيّة الشعاعيّ،

الفصل الثالث: العائلات القابلة للجمع،

الفصل الرابع: الفضاءات الهيلبرتيّة،

الفصل الخامس: سلاسل فوريي،

الفصل السادس: مدخل إلى نظرية المؤثّرات.

ذيّلنا كالعادة كلّ فصل بمجموعة من مسائل وتمارين محلولة وأخرى للبحث، يفوق عددها في الإجمال المائة وسبعة وأربعين؛ وجئنا بخمسة ملاحق ودليلين هي بالتفصيل: وقفة تعليميّة؛ الألفبائيّة والأبجديّة العربيّة واللاتينية؛ رموز المجموعات العدديّة المألوفة؛ رموز بعض الأدوات

المنطقيّة؛ المراجع؛ دليل المصطلحات وأخيرا، دليل الريّاضيّاتيّين المذكورين في سياق الكتاب.

حريّ بنا أن نشير في الأخير إلى أنّه بالرغم من ح رصنا، في وضع هذه الدروس، على التبسيط في المفاهيم و التفصيل في البراهين والتنويع في الأمثلة، إلاّ أنّ ملاحظات القارئ المستعمل ونقده هي الكفيلة بالارتقاء بهذا العمل وجعله يبلغ السقف الذي يزيل الشوائب ويكمّل النواقص ويدرّ الفوائد ...

1

الفضاء النظيميّ: تعاريف وخصائص عامّة

0.1 تمهيد

إنّ أولى ميزة تحتاج إليها الفضاءات التي نحن مقبلون على دراستها هي أن تكون **متمتّعة ببنية فضاء شعاعيّ.** لا شكّ أنّه لم يذهب عنك أنّنا أهملنا هذه الطبيعة الجبريّة ولم نكن في حاجة إليها فيما سبق من أنماط الفضاءات (الطبولوجيّة والمتريّة).

سنسلك في تقديم هذه الفضاءات نفس النهج والنسق الذي انتهجناه من قبل في الفضاءات المتريّة، ذلك لأنّ **الفضاءات النظيميّة فضاءات متريّة خاصّة.**

وقبل أن نأخذ في ذلك، نشير إلى أنّنا نرمز بـ K، في كلّ ما سيلحق لأحد حقلي الأعداد الحقيقيّة □ أو العقديّة □. سوف **يكون المعني منهما في كلّ مرّة، مزوّدا بالطبولوجيا الاعتياديّة.**

إنّه من نافلة القول التذكير بأنّ ما صيغ في الجزأين السابقين من مفاهيم يظلّ مقبولا ها هنا. وعليه، فإنّنا سنتوخّى الحرص على تسليط الأضواء على ما تنفرد به هذه الفضاءات من مزايا.

1.1 النظيم

1.1.1 تعريف

ليكن E فضاء شعاعيّا على K نسمّي **نصف نظيم** على E كلّ تطبيق φ من E نحو $\mathbb{R}$ يحقّق الشروط الثلاثة التالية:

[ش$_1$] $\forall x \in E \quad \varphi(x) \geq 0$

[ش$_2$] $\forall \lambda \in \mathrm{K}, \forall x \in E \quad \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$

[ش$_3$] $\forall x \in E, \forall y \in E \quad \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

من أجل كلّ عنصر x من E نكتب $\|x\| = \varphi(x)$، ونسمّي الزوج $(E, \|.\|)$ **فضاء نصف نظيميّ**. يقال عن [ش$_2$] إنّه شرط **التجانس** وعن [ش$_3$] إنّه شرط **متباينة المثلّث**، أو المتباينة المثلّثيّة.

2.1.1 أمثلة

1) القيمة المطلقة في $\mathbb{R}$ والطويلة في $\mathbb{C}$ تحقّقان الشروط أعلاه.

2) التطبيق $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ :

$$\varphi(x, y) = |x - y|,$$

نصف نظيم على $\mathbb{R}^2$.

3) لنعتبر الفضاء $\mathscr{R}([a,b])$، المؤلّف من الدوال الحقيقيّة القابلة للمكاملة ريمانيّا[1] على $[a,b]$. إنّ التطبيق الحقيقيّ المعرّف عليه بـ:

$$f \mapsto \varphi(f) = \int_a^b f(t)\, dt$$

---

[1] Bernhard Riemann: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في17 سبتمبر 1826 بهانوفر ومات في 20 جويلية 1866 بسيلاسكا بإيطاليا. فحص الجوانب الهندسية لدى الدوال ذات متغيّر عقديّ. شكّل هذا العمل فحوى موضوع رسالة الدكتوراه التي حضرها تحت إشراف ڤاوص وناقشها عام 1851.

نصف نظيم.

3.1.1 قضية

إذا كان $\left(E,\|.\|\right)$ فضاء نصف نظيميّ فإنّ:

1) $\|0\| = 0$

2) $\|x-y\| = \|y-x\| \quad \forall\ x,y\in E$

3) $\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \le \|x-y\| \quad \forall\ x,y\in E$

إثبات

1) ليكن λ عنصرا من K، لا تساوي طويلته 1. لدينا $\lambda.0 = 0$.
وبمقتضى شرط التجانس [ش$_2$] يأتي:

$$\|0\| = \|\lambda.0\| = |\lambda|.\|0\|.$$

ومنه:

$$\|0\|\left(1-|\lambda|\right) = 0,$$

إذن، $\|0\| = 0$.

2) من أجل كلّ x و y من E يكون لدينا:

$$\|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\|.$$

3) لنكتب:

$$y = y-x+x \quad\Rightarrow\quad \|y\| = \|y-x+x\| \le \|y-x\| + \|x\|.$$

ومنه:

$$\|y\| - \|x\| \le \|x-y\|. \qquad (*)$$

وبالمثل لدينا:

$$x = x - y + y \;\Rightarrow\; \|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|.$$

ومنه:

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|. \qquad (**)$$

وإذا أقرنّا النتيجتين $(*)$ و $(**)$ حصلنا على المطلوب.

4.1.1 تعريف

نسمّي **نظيما** على فضاء شعاعيّ E (على K)، كلّ تطبيق N من E نحو □ يحقّق، علاوة على الشروط الثلاثة ([ش$_1$]، [ش$_2$]، [ش$_3$]) المذكورة أعلاه، الشرط الرابع التالي:

$$N(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0. \qquad [ش_4]$$

يقال عن هذا الشرط إنّه شرط **الفصل**.

يسمّى الزوج (E, N) **فضاء نظيميّا**. وكما هو الشأن بالنسبة لنصف النظيم، فإنّه يرمز للنّظيم N بـ $\|.\|$ كذلك.

5.1.1 أمثلة

1) القيمة المطلقة في □ والطويلة في □ نظيمان.

2) التطبيقان الواردان في المثالين الثاني والثالث من المجموعة (2.1.1) ليسا نظيمين، ذلك لأنّهما لا يحقّقان الشرط [ش$_4$]. بخصوص الأوّل، لدينا على سبيل المثال، $\|(1,1)\| = |1-1| = 0$ مع أنّ $(1,1) \neq (0,0)$. وبخصوص الثاني، نلاحظ أنّ الدالّة f المعطاة بـ:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad a \le t < b \\ 3 & ; \quad t = b \end{cases}$$

عنصر غير معدوم من $\mathscr{R}([a,b])$ غير أنّ $\varphi(f) = 0$.

على غرار المسافات الأساسيّة على $\mathbb{R}^n$ لدينا:

3) النظيمات الأساسيّة على $\mathbb{R}^n$

إذا كان x عنصرا من $\mathbb{R}^n$، مركّباته x_1، x_2، ....، x_n وضعنا:

أ. $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ب. $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ج. $$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

يدعى النظيم $\|.\|_2$ بالنظيم **الإقليديّ**[1]، بينما يدعى النظيم $\|.\|_\infty$ بنظيم **التقارب المنتظم**.

يمكننا أن نلحق بهذه الطائفة نظيم هولدر[2] الموالي:

د. $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$ (حيث $1 \le p < +\infty$).

من السهل التأكّد، بحساب مباشر، من أنّ التطبيقين الواردين في (أ) و(ج) نظيمان؛ في حين يتطلّب تبيان المتباينة المثلّثية [ش3] بخصوص (د) (وبالتالي (ب)) اللجوء إلى متبايِنتي هولدر ومينكوفسكي[3] (مع تكييف بسيط اللتين أوردناهما في كتابنا [2].

وفي هذا الصدد يمكننا أن نأتي، بالمثل، بـ:

---

[1] Rudolf Otto Sigismund, Lipschitz: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 14 جوان 1832 بكونينڤسبرڤ ومات في 7 أكتوبر 1903 ببون. حقول اهتماماته شاسعة. تمتدّ من نظريات الأعداد ودوال بيسال وسلاسل فوريي والمعادلات التفاضليّة العادية وذات المشتقّات الجزئيّة إلى الميكانيكا التحليليّة ونظرية الكمون.

[2] Otto Ludwig, Hölder : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 ديسمبر 1859 بشتوتڤارت ومات في 29 أوت 1937 بلبيزيڤ. له نتائج كثيرة في التحليل الدالّيّ والمنطق والبنى الجبريّة. اكتشف المتراجحة الحاضرة، المقترنة باسمه، عام 1884.

[3] Hermann Minkowski : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 جوان 1864 بألكسوتا (ليتوانيا الحالية) ومات في 12 جانفي 1909 بـڤوتنڤان. تدور أعماله حول الفضاءات النظيميّة الحقيقيّة وكذا الأشكال التربيعيّة. كان في زوريخ أحد أساتذة ألبير أنشتاين.

4) **النظيمات الأساسيّة على** $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

من أجل كلّ عنصر f من $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ نضع:

أ. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$؛

ب. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b (f(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$؛

ج. $\|f\|_\infty = \max_{a\le t\le b}|f(t)|$

د. $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (حيث $1\le p<+\infty$).

2.1 الطبولوجيا الملحقة بنظيم

نحصر اهتمامنا حاليا في كيفيّة إضفاء بنية طبولوجيّة على فضاء نظيميّ. فإذا ما وضعنا:

$$\forall\ x,y\in E \quad \|x-y\| = d(x,y), \qquad (*)$$

سهل علينا التحقّق من أنّ هذا التطبيق d الوارد في العلاقة (*) مسافة على E.

يكون هكذا ممكنا أن **نلحق بكلّ نظيم مسافة** معرّفة على النحو السابق. وعليه، **يضحى كلّ فضاء نظيميّ فضاء متريّا**. سنوفّر عن أنفسنا، استنادا إلى ذلك، عناء الخوض من جديد في كلّ المفاهيم الطبولوجيّة التي صادفناها في الفضاءات المتريّة. إنّها تنقل بصورة طبيعيّة إلى الفضاءات النظيميّة. نلخّص كلّ ذلك في هذه الـ:

1.2.1 نتيجة

كلّ فضاء نظيميّ فضاء متريّ. (إنّه فضاء طبولوجيّ إذن!)

وبالطبع، فإنّ المسافة المعنيّة هنا هي تلك المعرّفة أعلاه، أي الملحقة نظيم فضاءنا. هكذا، فإنّ المفاهيم الآتيّة تظلّ محتفظة بنفس التعاريف والخصائص ويتمتّع بها كلّ فضاء نظيميّ متى تمتّع بها كفضاء متريّ مزوّد بالمسافة الملحقة بنظيمه:

الكرات، المفتوحات، الجوارات، أنماط النقاط (الداخليّة، الحافويّة، الملاصقة، الخارجيّة،...)، الفصل، الكثافة، القابليّة للفصل، النظاميّة، الناظميّة، التقارب، الاستمرار ولواحقه، التراص وأنماطه، الترابط وأصنافه، إلخ...

وبالطبع، فإنّه يؤتى بهذه المفاهيم مع تعديل في الشكل، إذ يتوجّب هنا توظيف النظيم مكان المسافة. فلا بأس أن نعيد وضع بعض منها للاستئناس بها. ها هي تترى:

- الكرة المفتوحة $B(a,r)$ في فضاء نظيميّ $(E,\|.\|)$:

$$B(a,r)=\{x\in E:\|a-x\|<r\}.$$

- الكرة المغلقة $B_f(a,r)$:

$$B_f(a,r)=\{x\in E:\|a-x\|\le r\}.$$

- نسمّي جوار عنصر x من $(E,\|.\|)$ كلّ جزء V من E بحيث:

$$\exists r>0: B(x,r)\subset V.$$

نرمز، كالعادة وعلى مدار الفصول، لعائلة جوارات x بـ $\mathscr{V}(x)$.

- x نقطة داخلية لجزء A من E $\Leftrightarrow$ $A\in\mathscr{V}(x)$

نرمز لداخلية A بـ $\overset{\circ}{A}$. **إنها جزء مفتوح**.

- x نقطة ملاصقة لجزء A من E $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \mathscr{V}(x)\ \ V \cap A \neq \phi$

نرمز لملاصقة A بـ $\overline{A}$. **إنها جزء مغلق.**

- x نقطة تراكمية لـ A $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \mathscr{V}(x)\ \ card V \cap A = +\infty$

نرمز لمجموعة نقاط A التراكميّة بـ A' ونسمّيها **مشتقّة** A. **إنّها جزء مغلق.**

- x نقطة معزولة لجزء A $\Leftrightarrow$ $\exists V \in \mathscr{V}(x)\ \ V \cap A = \{x\}$
- x نقطة حافويّة لجزء A $\Leftrightarrow$ $x \in \overline{A} \cap \overline{C_E A}$

نرمز لحافّة A بـ $\mathscr{F}_r(A)$. **إنّها جزء مغلق.**

- x نقطة خارجية لجزء A من E $\Leftrightarrow$ $x \in \overset{\circ}{C_E A}$

نرمز لخارجية A بـ $E_x(A)$. **إنّها جزء مفتوح.**

- $\mathscr{W}(x)$ جملة أساسية لجوارات x

$$\Updownarrow$$

$$\forall V \in \mathscr{V}(x)\ \exists W \in \mathscr{W}(x)\ \ W \subset V.$$

- β أساس للطبولوجيا σ $\Leftrightarrow$ $\forall \Omega \in \sigma\ \exists (\mathrm{O}_i)_{i\in I} \subset \beta\ \ \Omega = \bigcup_{i \in I} \mathrm{O}_i$
- (E,d) منفصل

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{\substack{x, y \in E \\ x \neq y}}\ \exists V_x \in \mathscr{V}(x), W_y \in \mathscr{V}(y):\ V_x \cap W_y = \phi$$

- A كثيف في (E,d) $\Leftrightarrow$ $\overline{A} = E$
- (E,d) قابل للفصل $\Leftrightarrow$ E يحتوي جزءا قابلا للعدّ وكثيف فيه.
- (E,d) نظاميّ $\Leftrightarrow$ E منفصل ولكلّ نقطة منه جملة أساسيّة من الجوارات المغلقة.
- (E,d) ناظميّ $\Leftrightarrow$ E منفصل ولكلّ مغلقين غير متقاطع منه

جواران غير متقاطعين.

- يتمتّع (E,d) بخاصية العدّ الأولى إذا قبلت فيه كلّ نقطة منه جملة أساسيّة قابلة للعدّ من الجوارات.
- يتمتّع (E,d) بخاصية العدّ الثانية إذا تمتّعت طبولوجياه بأساس قابل للعدّ.

إنّ للكرات، في فضاء نظيميّ، خصائص مميّزة لم تكن تتمتّع بها في الفضاءات المتريّة العامّة (راجع المثال 3 من (2.2.1) من الجزء الثاني).

وبعبارة أوضح لدينا:

2.2.1 قضية

من أجل كلّ عدد $r>0$ وكلّ عنصر a من فضاء نظيميّ $(E,\|.\|)$ لدينا:

(1 $B(a,r)=\overset{\circ}{\overline{B_f}}(a,r)$

(2 $\overline{B(a,r)}=B_f(a,r)$

(3 $S(a,r)=\mathscr{F}_r\left(B_f(a,r)\right)=\mathscr{F}_r\left(B(a,r)\right)$

إثبات

1) لدينا تعريفا:

$$B(a,r)\subset B_f(a,r).$$

ولمّا كانت $B(a,r)$ مفتوحة أمكن الحصول على أنّ:

$$B(a,r)\subset \overset{\circ}{\overline{B_f}}(a,r).$$

للحصول على الاحتواء العكسيّ نقوم بما يلي:

من أجل كلّ عنصر x من $\overset{\circ}{B_f}(a,r)$ يوجد عدد $\rho > 0$ بحيث:

$$B(x,\rho) \subset B_f(a,r).$$

إذا كان x مساويا a فالأمر واضح ! وإذا كان x يختلف عن a، اعتبرنا العنصر z المعرّف بـ:

$$z = x + \frac{\rho}{\|x-a\|}(x-a).$$

يكون لدينا عندئذ $\|z-x\| = \rho$ وهو ما يؤدّي إلى أنّ:

$$z \in B_f(x,\rho) \subset B_f(a,r).$$

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ:

$$x-a = \frac{1}{1+\frac{\rho}{\|x-a\|}}(z-a).$$

ومنه:

$$\|x-a\| = \left(\frac{1}{1+\frac{\rho}{\|x-a\|}}\right)\|z-a\| < \|z-a\| \le r;$$

أي أنّ x عنصر من $B(a,r)$، وهو مطلوبنا.

2) نتّبع نفس الطريقة التي اعتمدناها سابقا. لدينا بطبيعة الحال:

$$\overline{B(a,r)} = B_f(a,r),$$

(ذلك لأنّ $B_f(a,r)$ مغلق يحوي $B(a,r)$)، لنبيّن الاحتواء العكسيّ. إذا كان x عنصرا من $B_f(a,r)$ وكان $r > \|a-x\|$ فإنّ x يضحى عنصرا من $\overline{B(a,r)}$.

لنفترض حاليا أنّ $r=\|a-x\|$ ولنبيّن أنّ x ينتمي إلى $\overline{B(a,r)}$. يكفي بغية ذلك أن نثبت أنّ التقاطع $B(a,r)\cap B_f(x,\rho)$ غير خال، من أجل كلّ عدد ρ بحيث $0<\rho<r$. ليكن العنصر y المعرّف بـ:

$$y=\frac{\rho}{r}a+\left(1-\frac{\rho}{r}\right)x,$$

يأتي عندئذ:

$$\|y-x\|=\frac{\rho}{r}\|a-x\|=\rho.$$

ممّا يجعل y عنصرا من $B_f(x,\rho)$. ولدينا أيضا:

$$\|y-a\|=\left(1-\frac{\rho}{r}\right)\|x-a\|=r-\rho<r.$$

ممّا يجعل y من $B(a,r)$ نستخلص في الأخير أنّ y ينتمي إلى:

$$B_f(x,\rho)\cap B(a,r)$$

3) لدينا استنادا إلى ما سبق:

$$\mathscr{F}_r B(a,r)=\overline{B(a,r)}\cap\overline{C_E B(a,r)}=B_f(a,r)\cap C_E B(a,r)=S(a,r),$$

$$\mathscr{F}_r B_f(a,r)=\overline{B_f(a,r)}\cap\overline{C_E B_f(a,r)}=B_f(a,r)\cap C_E B(a,r)=S(a,r).$$

3.2.1 قضية

النظيم تطبيق مستمرّ بانتظام.

إثبات

وبالفعل، فإنّ الجزء (3) من القضية (3.1.1) يظهر أنّ النظيم تطبيق ليبشيتزيّ[1] نسبته 1.

4.2.1 تعريف

ليكن E فضاء نظيميّا على K و N_1 و N_2 نظيمين عليه. نقول عن N_1 و N_2 إنّهما **متكافئان** إذا تكافأت على E الطبولوجيّتان المولّدتان بواسطتهما.

وفي هذا السياق لدينا:

5.2.1 قضية

إذا كان N_1 و N_2 نظيمين معرّفين على فضاء شعاعيّ E فإنّهما يكونان متكافئين إذا وفقط إذا وجد عددان موجبان α و β بحيث $\alpha < \beta$ و:

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) < N_2(x) < \beta N_1(x).$$

[1] Rudolf Otto Sigismund, Lipschitz: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 14 جوان 1832 بكونينڤسبرڤ ومات في 7 أكتوبر 1903 ببون. حقول اهتماماته شاسعة. تمتدّ من نظريات الأعداد ودوال بيسال وسلاسل فوريي والمعادلات التفاضليّة العادية وذات المشتقّات الجزئيّة إلى الميكانيكا التحليليّة ونظرية الكمون.

إثبات

لنستهلّ هذا الإثبات بالإشارة إلى أنّه سبق تناول هذا المفهوم في الفضاءات المتريّة. ميّزنا وقتئذ، التكافؤ الطبولوجيّ والتكافؤ المتريّ للمسافات، موضّحين استلزام الأوّل للثاني. الأمر هنا خلاف ذلك؛ **فالمفهومان متطابقان.**

لزوم الشرط:

لنفترض أنّ N_1 و N_2 نظيمان متكافئان على E. إنّهما يزوّدان E بطبولوجيا واحدة. واستنادا إلى ذلك يكون التطبيق المطابق:

$$id_E:(E,N_1)\to(E,N_2)$$

مستشاكلا (وهو بطبيعة الحال تشاكل جبريّ). يمكن أن نكتب عندئذ:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \rho>0/\forall\ x\in E,\ \forall a\in E: N_1(x-a)\leq\rho\ \Rightarrow N_2(x-a)\leq\varepsilon.$$

وإذا لاحظنا أنّ $N_1\left(\dfrac{x-a}{N_1(x-a)}\rho\right)=\rho$ حصلنا على:

$$N_1\left(\frac{x-a}{N_1(x-a)}\rho\right)\leq\varepsilon,$$

أي:

$$N_2(x-a)\leq\frac{\varepsilon}{\rho}N_1(x-a).$$

يكفي، الآن، أخذ $\beta=\dfrac{\varepsilon}{\rho}$ للحصول على الشطر الأيمن من العلاقة المطلوبة.

للحصول على الشطر الأيسر نترجم بالمثل، استمرار التطبيق العكسيّ (وهو التطبيق المطابق ذاته !) $id_E^{-1}:(E,N_2)\to(E,N_1)$ ونتّبع في ذلك الطرح السابق نفسه. يوجد عندئذ عدد موجب $0<\alpha$ بحيث:

$$\forall\ x,a\in E\ \ N_1(x-a)\leq\frac{1}{\alpha}N_2(x-a),$$

وهو ما ينهي لزوم الشرط.

كفاية الشرط:

لنرمز بـ $B_1(a,r)$ للكرة المفتوحة المتمركزة عند a وذات نصف القطر r في (E,N_1) وبـ $B_2(a',r')$ للكرة المفتوحة ذات المركز a' ونصف القطر r' في (E,N_2). إذا تمعنّا قليلا في العلاقة المذكورة وجدناها تفيد أنّ كلّ كرة مفتوحة بالنسبة لـ N_1 تحوي كرة مفتوحة بالنسبة لـ N_2 وبالعكس. وبصفة أوضح لدينا:

$$\forall\ a \in E,\ \forall r > 0\quad B_1\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_2(a,r) \subset B_1\left(a, \frac{r}{\alpha}\right);$$

وهو ما يؤدّي إلى أنّ كلّ مفتوح بالنسبة لـ N_1 يكون مفتوحا بالنسبة لـ N_2 وبالعكس؛ أي أنّ الطبولوجيّتين الملحقتين بالنظيمين متكافئتان.

6.2.1 نتيجتان

1) لكي يكون نظيمان N_1 و N_2 متكافئين على فضاء E، يلزم ويكفي أن يكون المقدار $\frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ (أو $\frac{N_2(x)}{N_1(x)}$) محدودا بأعداد موجبة تماما (من أجل x غير معدوم).

2) النظيمات الأساسيّة الثلاثة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة.

إثبات

1) وبالفعل، فإنّ النتيجة مستوحاة مباشرة من إعادة صوغ العلاقة الواردة في القضية أعلاه. أمّا بخصوص النتيجة الثانيّة فإنّها تعزى إلى العلاقتين الواضحتين (وضّحهما) التاليتين:

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^n$ لدينا:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2 \,,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \,.$$

لنشر في هذا المضمار إلى أنّ النظيمات الأساسيّة الثلاثة المعرّفة على $\mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ لا تتمتّع بهذه الخاصيّة؛ إنّها ليست متكافئة ! يمكن أن نستدلّ على ذلك بعدم تكافؤ المسافات الأساسيّة المرافقة وهو أمر سبقت رؤيته في الفضاءات المتريّة. ومع ذلك، فإنّنا نسوق هذين المثالين لترسيخ هذا المفهوم وإدراكه إدراكا تامّا.

7.2.1 مثالان

1) نزوّد الفضاء الشعاعيّ $\mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right) = E$ بالنظيمين الأساسيّين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ ونعتبر فيه المتتالية $(f_n)_n$ المعرّفة بـ:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt \;\; ; \;\; 0 \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ 0 \qquad ; \;\; \dfrac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

يكون لدينا عندئذ:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{2n},\ \|f_n\|_\infty = 1.$$

نستخلص أنّ $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ ليسا متكافئين، ذلك لأنّ النسبة $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n$ ليست محدودة.

2) ليكن $\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right) = E$ الفضاء الشعاعيّ المؤلّف من الدوال الحقيقيّة القابلة للاشتقاق باستمرار) نضع:

$$E_1 = \{\, f \in E : f(1) = 0 \}.$$

نزوّد E_1 (الذي يتمتّع ببنية فضاء شعاعيّ جزئيّ مغلق من $(E,\|.\|_\infty)$.
وضّح ذلك!) بالنظيمين التاليين. من أجل كلّ f من E_1 نضع:

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|;$$

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

لنتأكّد من أنّ النظيمين متكافئان على E_1. لدينا إنشاء:

$$\|f\|_2 \le \|f\|_1; \qquad (*)$$

وبتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على f (من E_1) في $[x,1]$ نحصل على:

$$f(1)-f(x)=(1-x)f'(c),$$

حيث $0\le x<c<1$. ولمّا كان $f(1)=0$ وجدنا:

$$(x-1)f'(c)=f(x).$$

ومنه:

$$|f(x)|=|1-x||f'(c)|\le|f'(c)|,$$

وبالتالي:

$$\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|\le \sup_{0\le x\le 1}|f'(x)|.$$

يترتّب عن هذا أنّ:

$$\|f\|_1 \le 2\|f\|_2. \qquad (**)$$

وإذا أقرنّا النتيجتين (*) و (**) حصلنا على المطلوب.

3.1 فضاءات الجداء النظيميّة

الفضاءات النظيميّة الجزئيّة

1.3.1 تعريف

لتكن $\left(E_i, \|.\|_i\right)_{1\le i\le m}$ عائلة منتهيّة من فضاءات نظيميّة على حقل واحد K ولنضع:

$$\prod_{i=1}^{m} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m = E.$$

إنّه فضاء شعاعيّ على K (إذا ما زوّد بالعمليّتين التقليديّتين: الجمع والضرب في سلميّ)، نعرّف على E نظيمات أساسيّة، تماما كما عرّفنا المسافات الأساسيّة على فضاء الجداء المتريّ من قبل؛ وذلك بأن نضع، من أجل كلّ $x = (x_i)_{1\le i\le m}$ من E:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i \ ; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \ ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \|x_i\|_i$$

من السهل التأكّد من أنّ هذه الأنماط تعرّف نظيمات متكافئة على E.

2.3.1 مبرهنة

ليكن E فضاء نظيميّا على K يكون عندئذ التطبيقان:

أ) $f : E\times E \to E$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$$

ب) $g : \mathrm{K}\times E \to E$

$$(\lambda, x) \mapsto g(\lambda, x) = \lambda . x$$

مستمرّين.

إثبات

أ) ليكن x_0 و y_0 من E و $\varepsilon > 0$. إذا كان x و y من E بحيث:

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\|y - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

كان لدينا:

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| = \|(x-x_0)+(y-y_0)\| \leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\| \leq \varepsilon,$$

ممّا يدلّ على أنّ f مستمرّ بانتظام على $E \times E$ المزوّد بالنظيم الأساسيّ $\|\cdot\|_1$.

ب) ليكن x_0 من E و λ_0 من K و $\varepsilon > 0$ ولنضع:

$$0 < \delta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{1+|\lambda_0|+\|x_0\|}\right).$$

إذا كان x من E و λ من K بحيث:

$$\|x - x_0\| \leq \delta \text{ و } |\lambda - \lambda_0| \leq \delta$$

فإنّه يكون لدينا عندئذ:

$$\begin{aligned}\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0) + \lambda_0(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0\| \\ &\leq |\lambda-\lambda_0|\|x-x_0\| + |\lambda_0|\|x-x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\|x_0\| \\ &\leq \delta^2 + \delta|\lambda_0| + \delta|x_0| \leq \left(1+|\lambda_0|+|x_0|\right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

3.3.1 ملحوظة

تستوقفنا هذه المبرهنة لنشير إلى أنّ كلّ فضاء شعاعيّ يكون من أجله الدالّتان المذكورتان أعلاه مستمرّتين يدعى **فضاء شعاعيّا طبولوجيّا**.

ونسمّي، بعبارة أخرى، فضاء شعاعيّا طبولوجيّا كلّ فضاء شعاعيّ مزوّد بطبولوجيا منسجمة مع قانوني التركيب الواردين في المبرهنة. وبالطبع، تشكّل الفضاءات النظيميّة نمطا خاصّا من الفضاءات الشعاعيّة الطبولوجيّة، وتؤلّف هذه الأخيرة توسيعا هامّا لها.

4.3.1 تعريف

ليكن E فضاء نظيميّا, نسمّي **فضاء نظيميّا جزئيّا** كلّ فضاء شعاعيّ جزئيّ A من E يكون مزوّدا بطبولوجيا الأثر.

وبعبارة أخرى، يكون الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ A فضاء نظيميّا جزئيّا إذا ما زوّد بمقصور نظيم E عليه. وبالطبع، فإنّ هذا المقصور يعرّف نظيما على A.

5.3.1 قضية

إذا كان H فضاء نظيميّا جزئيّا من E غدت ملاصقته $\overline{H}$ كذلك.

إثبات

الملاصقة $\overline{H}$ غير خالية لاحتوائها H. علاوة على ذلك، إذا كان x و y عنصرين من $\overline{H}$ فإنّه توجد متتاليتان $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ من H بحيث:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1\in\mathbb{N}\ /\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ :\ n\geq n_1\ \Rightarrow\ \|x-x_n\|\leq\varepsilon\,,$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_2\in\mathbb{N}\ /\forall\ n\in\mathbb{N}\ :\ n\geq n_2\ \Rightarrow\ \|y-y_n\|\leq\varepsilon.$$

وإذا كان α و β من K واخترنا $\max(n_1,n_2)=n_3$ أمكننا أن نكتب:

$$n\geq n_3\Rightarrow\ \|(\alpha x+\beta y)-(\alpha x_n+\beta y_n)\|=\|\alpha(x-x_n)+\beta(y-y_n)\|$$
$$\leq|\alpha|\ \|x-x_n\|-|\beta|\ \|y-y_n\|\leq\varepsilon\big(|\alpha|+|\beta|\big).$$

إذن:

$$\alpha x+\beta y=\lim_{n\to\infty}\alpha x_n+\beta y_n,$$

وبالتالي:

$$\alpha x+\beta y\in\overline{H}.$$

6.3.1 نتيجة

كلّ مستو مصعّد (فومستوي) H من فضاء نظيميّ E مغلق أو كثيف في E.

إثبات

وفعلا، فالفضاءان الشعاعيّان الجزئيّان اللذان يحويان H هما H و E. ولمّا كان $\overline{H}$ فضاء جزئيّا يحوي H فإنّه ينتج لدينا حينئذ إمّا $H=\overline{H}$ وإمّا $E=\overline{H}$.

7.3.1 تعريف

ليكن A جزءا من فضاء نظيميّ E وليكن H الفضاء الشعاعيّ المولّد بواسطة A. نقول عن A إنّه **كلّيّ** في E إذا كان H كثيفا في E.

وبعبارة أخرى، يكون A كليّا في E إذا توفّر هذا الشرط:

إذا كان x عنصرا من E فإنّ كلّ جوار V من $\mathscr{V}(x)$ يضمّ عبارة خطيّة من عناصر من A. نرمز لِ H بِ $[A]$.

8.3.1 مثال

لقد شاهدنا سابقا (انظر مبرهنة فيرشتراس[1] (4.3.4) من [2]) أنّه إذا اعتبرنا الفضاء $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بنظيم التقارب المنتظم ووضعنا:

---

7. Karl Theodor Weierstrass : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 31 أكتوبر 1815 بأستنفيلد ومات في 19 فيفري 1897 ببرلين. من ضمن أعماله الرياضيّاتيّة نظرية الدوال الآبليّة والتحليليّة. يذكر له التاريخ أنّه عارض زميله وصديقه كرونيكر حول اكتشافات كانتور المثيرة.

$$A=\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\},$$

حصلنا على أنّ A كلّيّ في E، أي أنّ $E=\overline{[A]}$.

نعمد في ختام هذا المقطع إلى تعريف فضاءات حاصل القسمة النظيميّة.

ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء نظيميّا و F فضاء شعاعيّا جزئيّا منه. نفترض أنّ F مغلق ونعرّف على E علاقة التكافؤ $\mathscr{R}$ التالية:

$$x \mathscr{R} y \iff x-y \in F$$

نرمز بِـ E/F لفضاء حاصل القسمة الناتج وبِـ s للغمر القانونيّ:

$$s: E \to E/F$$

$$x \mapsto s(x)=\dot{x},$$

الذي يربط كل عنصر x من E بصفه التكافئيّ $\dot{x}$. بعد هذا نضع:

9.3.1 قضية

إنّ التطبيق المعرّف بِـ :

$$s: E/F \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto N\left(\dot{x}\right)=\left\|\dot{x}\right\|=\inf\left\{\|y\| : y \in \dot{x}\right\},$$

نظيم على E/F.

إثبات

[ش$_1$] : $0 \leq \left\|\dot{x}\right\|$، واضح إنشاء.

[ش$_2$] : من السهل التأكّد من أنّ $\left\|\dot{0}\right\|=0$.

والآن، إذا كان λ من $\mathbb{K}$ و $\dot{x}$ من E/F أمكننا أن نضع:

$$\left\|\lambda \dot{x}\right\| = \left\|\dot{(\lambda x)}\right\| = \inf\left\{\|y\| / y \in \dot{(\lambda x)}\right\} = \inf\left\{\|y\| / y - \lambda x \in F\right\}.$$

ليكن z من E بحيث يكون $z - x$ عنصرا من F . يأتي من هذا أنّ:

$$\lambda z - \lambda x \in E,$$

$$\left\|\lambda \dot{x}\right\| \le \|\lambda z\| = |\lambda|\, \|z\|.$$

ومنه:

$$\left\|\dot{(\lambda x)}\right\| = \inf\left\{\|z\| : z - x \in F\right\} = |\lambda|\, \left\|\dot{x}\right\|. \qquad (*)$$

للحصول على المتباينة الثانية (الضامنة للمساواة) نعتبر λ من K^* و z من E بحيث يكون $z - \lambda x$ منتميّا إلى F . يأتي على التوّ:

$$\frac{1}{\lambda} z - \frac{\lambda}{\lambda} x \in F.$$

ومنه:

$$|\lambda|\, \left\|\dot{x}\right\| \le |\lambda|\, \left\|\frac{1}{\lambda} z\right\| = \|z\|.$$

وعليه:

$$|\lambda| \left\|\dot{x}\right\| \le \inf\left\{\|z\| : z - \lambda x \in F\right\} = \left\|\dot{(\lambda x)}\right\|. \qquad (**)$$

وبتكأكإ النتيجتين (*) و(**) نحصل على المساواة المطلوبة.

[ش$_3$] : من أجل $\dot{x}$ و $\dot{y}$ من E/F لدينا:

$$\left\|\dot{x} + \dot{y}\right\| = \left\|\dot{(x + y)}\right\| = \inf\left\{\|z\| : z - (x + y) \in F\right\}.$$

من أجل كلّ t و u من E بحيث يكون $t - x$ و $u - y$ من F يأتي:

$$t + u - (x + y) \in F$$

$$\|t + u\| \le \|t\| + \|u\|.$$

ومنه:

$$\left\| \overset{\bullet}{\overline{x+y}} \right\| = \inf\left\{ \|z\| : z-(x+y)\in F \right\} \le \|t+u\| \le \|t\|+\|u\|.$$

وعليه:

$$\left\| \overset{\bullet}{\overline{x+y}} \right\| \le \inf\left\{ \|t\| : t-x\in F \right\} + \inf\left\{ \|u\| : u-y\in F \right\} \le \left\| \dot{x} \right\| + \left\| \dot{y} \right\|;$$

وهو ما يختم إثبات المتباينة المثلّثيّة. (لاحظ أنّنا في الشرطين [ش$_1$] و[ش$_3$] استعنّا بكون الغمر القانونيّ s خطيّا. سنبيّن ذلك في الفصل الموالي، فإن استعجلت فاسبق!)

[ش$_4$] : لدينا:

$$\begin{aligned} \left\| \dot{x} \right\| = 0 \;&\Leftrightarrow\; \inf\left\{ \|y\| : y-x\in F \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \left\{ \forall \varepsilon>0\ \exists y\in E : y-x\in F \wedge \|y\|<\varepsilon \right\} \\ &\Leftrightarrow\; \left\{ \forall \varepsilon>0\ \exists y-x\in F : \|x-(x-y)\|<\varepsilon \right\} \\ &\Leftrightarrow\; x\in\overline{F} \;\Leftrightarrow\; x\in F \;\Leftrightarrow\; \dot{x}=\dot{0}. \end{aligned}$$

10.3.1 قضية

إنّ الغمر القانونيّ $x\mapsto s(x)=\dot{x}$ مستمرّ بانتظام على E.

إثبات

نزوّد، بطبيعة الحال، بالنظيم المعرّف أعلاه. من أجل كلّ عنصرين x و y من E لدينا:

$$\|s(x)-s(y)\| = \left\| \dot{x}-\dot{y} \right\| = \left\| \overset{\bullet}{\overline{x-y}} \right\| = \inf\left\{ \|z\| : z-(x-y)\in F \right\}.$$

نلاحظ أنّه لو أخذنا $z=x-y$ لوجدنا:

$$x-y-(x-y)=0\in F,$$

وعليه، يأتي:

$$\left\|\dot{x}-\dot{y}\right\|\leq\|x-y\|.$$

وهو ما يعني أنّ s ليبشيتزيّ نسبته 1. إذن، فهو مستمرّ بانتظام.

إذا أضفنا إلى (10.3.1) أنّ s تطبيق مفتوح تمكّنّا من وضع هذه الـ:

11.3.1 قضية

إنّ الطبولوجيا الملحقة بالنظيم المعرّف أعلاه وطبولوجيا حاصل القسمة المعرّفة على E/F متطابقتان.

إثبات

لنرمز بِـ τ للطبولوجيا الأولى وبِـ σ للطبولوجيا الثانية.

إذا كان Ω عنصرا من σ أضحى $s^{-1}(\Omega)$ مفتوحا في E (تعريفا).

ولمّا كان $s^{-1}(\Omega)$ مفتوحا بالنسبة لِـ τ، صار $\Omega=s\left(s^{-1}(\Omega)\right)$ عنصرا من τ. نستخلص أنّ $\sigma\subset\tau$.

ليكن حاليا، Ω عنصرا من τ. إنّ استمرار s يؤدّي إلى أنّ $s^{-1}(\Omega)$ مفتوح في E. وعليه، فإنّ Ω ينتمي إلى σ (تعريفا). إذن:

$$\tau\subset\sigma.$$

4.1 فضاءات بناخ[1]

8. Stefan Banach: رياضيّاتيّ بولونيّ. ولد في 30 مارس 1892 بكراكوف ومات في 31 أوت 1945 بلفوف. ناقش رسالة الدكتوراه حول نظرية القياس. قام عام 1920 بوضع مسلّمات ما يعرف الآن بفضاءات بناخ.

1.4.1 تعريف

نقول عن فضاء نظيميّ E إنّه **بناخيّ** إذا كانت كلّ متتالية كوشيّة[1] منه متقاربة، أي أنّه تامّ كفضاء متريّ مزوّد بالمسافة المرفقة بالنظيم.

لعلّ من المهمّ أن نشير هنا إلى أن مفهوم الفضاء النظيميّ التام قد أدخل في حدود عام 1922 من قبل بناخ وفينر [2]، باستقلال أحدهما عن الآخر.

2.4.1 نتيجة

كلّ فضاء بناخيّ بيريّ[3].

وفعلا، إنّه فضاء متريّ تامّ.

3.4.1 أمثلة

1) $(\square,|.|)$ و $(\square,|.|)$ بناخيّان.

2) $\left(\mathscr{C}([a,b],\square),\|.\|_\infty\right)$ بناخيّ.

3) $\left(\mathscr{C}([a,b],\square),\|.\|_1\right)$ ليس بناخيّا.

إنّ هذه الأمثلة واضحة، لا يختلف إثباتها عمّا أوتي به في الفضاءات المتريّة في نفس المضمار.

---

9. Augustin Louis Cauchy: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أوت 1789 بباريس ومات في 23 ماي 1857 بصو. يعتبر الرياضيّاتيّ الفرنسيّ الأغزر إنتاجا. تنطوي أعماله العلميّة على أزيد من 800 بحثا في مواضيع متنوّعة في الرياضيات والفيزياء. له باع طويل في تأسيس التحليل الحديث.

10. Norbert Wiener: رياضيّاتيّ أمريكيّ. ولد في 26 نوفمبر 1894 بكولومبيا ومات في 18 مارس 1964 بستكهولم. كان باحثا في الرياضيّات التطبيقيّة وله مساهمة مشهودة في الكهروتقنية وجمل المراقبة.

11. René Baire : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 جانفي 1874 بباريس ومات في 5 جويلية 1932 بشامبيري. يعدّ، إلى جانب إميل بوريل وهنري لوبيق، أحد علماء مطلع القرن العشرين الفرنسيّين الذين أثّرت أفكارهم الجديدة على تطوّر التحليل.

لنتوقّف عند المثال الأخير. نجده يقدّم، بطبيعة الحال، فضاء نظيميّا غير بناخيّ. فلو عدنا إلى المثال المضاد الذي سقناه لتبيين أنّه غير تامّ لاتّضح أنّ عدم استمرار النهاية هو الذي حرم الفضاء من أن يكون تامّا. نعتزم، هنا إنشاء فضاء أوسع من E يكون بناخيّا ويتمتّع بِ E كجزء كثيف فيه؛ غير أنّنا نستغني عن طلب الاستمرار من عناصره.

هذا تفصيل وتوسيع للفكرة.

4) لتكن $\mathscr{L}^1([a,b])=E$ المجموعة المؤلّفة من الدوال العدديّة (الحقيقيّة أو العقديّة) المعرّفة على المجال $[a,b]$ من □ والقابلة للمكاملة مطلقا مفهوم لوبيڤ. من السهل التأكّد من أنّ E فضاء شعاعيّ إذا ما زوّدت بالعمليّتين التركيبيّتين التقليديّتين من أجل كلّ عنصر f من E نضع:

$$\| f \|_1 = \int_a^b | f(t)| dt. \qquad (*)$$

إنّ هذه العبارة لا تعرّف نظيما على E. إنّها، وإن حقّقت الشروط الثلاثة الأولى ([ش$_1$] و[ش$_2$] و[ش$_3$])، لا تتوفّر على الشرط الرابع [ش$_4$]. وبالضبط، يمكن حدوث $\| f \|_1 = 0$ دون أن يقتضي ذلك $f = 0$. إنّ العلاقة $\| f \|_1 = 0$ تفيد أنّ الدالّة f **معدومة تقريبا حيثما كانت**؛ وهو ما يعني، بعبارة أوضح، أنّ المجموعة التي لا تنعدم فيها f **قياسها معدوم**.

هكذا، وللحصول على نظيم من خلال العلاقة $(*)$، نسلك هذا المنهج:

نعرّف على E علاقة التكافؤ $\mathscr{R}$ التالية:

$$f \mathscr{R} g \iff f-g=0 \qquad (\text{" تقريبا حيثما كان"})$$

ونرمز بـ $L^1([a,b])$ لفضاء حاصل القسمة الشعاعيّ الناتج، أي الفضاء الشعاعيّ المؤلّف من صفوف التكافؤ المترتّبة عن العلاقة $\mathscr{R}$.

إذا كان $\dot{f}$ صفًّا تكافئيًّا (أي أنّه عنصر من $L^1([a,b])$) فإنّنا نضع:

$$\left\|\dot{f}\right\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt \;;\; f \in \dot{f},$$

وهي عبارة تعرّف نظيما على $L^1([a,b])$. وأكثر من ذلك، فإنّ $L^1([a,b])$ يضحى به بناخيًّا (نسلّم به).

5) نعرّف بالمثل الفضاء $L^2([a,b])$.

نعتبر، في سبيل ذلك، الفضاء الشعاعيّ $\mathscr{L}^2([a,b]) = E$ المؤلّف من الدوال f الحقيقيّة (أو العقديّة) ذات المربّعات $|f|^2$ القابلة للمكاملة. فإذا وضعنا:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt},$$

فإنّنا لا نحصل، وللسبب السابق نفسه، على نظيم. نلجأ، هنا كذلك، إلى اعتبار فضاء حاصل القسمة $L^2([a,b]) = \mathscr{L}^2([a,b])/\mathscr{R}$. إنّه فضاء شعاعيّ (تأكّد من ذلك). وإذا ما زوّد بالنظيم:

$$\left\|\dot{f}\right\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,dt};\; f \in \dot{f}$$

أصبح فضاء بناخيًّا.

يمكننا وبالكيفيّة ذاتها، إنشاء الفضاءات $L^p([a,b])$ حيث $1 \le p < +\infty$.

فنعتبر، من أجل كلّ p من $[1,+\infty[$ الفضاء $\mathscr{L}^p([a,b])$ المشكّل من العناصر f التي يكون من أجلها $|f|^p$ قابلا للمكاملة. وإذا ما أدرجنا عليه علاقة التكافؤ $\mathscr{R}$ السابقة حصلنا على فضاء حاصل القسمة المرموز له بِ $L^p([a,b])$ والذي يحظى بالنظيم:

$$\left\|\dot{f}\right\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b \left(|f(t)|\right)^p dt};\ f \in \dot{f}.$$

وبالطبع، فإنّ الفضاء النظيميّ $L^p\left([a,b]\right)$ بناخيّ.

في هذا السياق دائما، وإذا راعينا الشروط التي عرّفنا في إطارها فضاء حاصل القسمة النظيميّ فإنّه يمكننا الحصول على هذه الـ :

4.4.1 قضية

إذا كان E بناخيّا غدا E/F كذلك.

إثبات

لتكن $\left(\dot{y}_n\right)_n$ متتاليّة كوشيّة من E/F. ولنرمز بِـ $\psi(0)$ لأصغر عدد طبيعيّ يسمح بالكتابة:

$$n > m \geq \psi(0) \quad \Rightarrow \quad \left\|\dot{y}_n - \dot{y}_m\right\| \leq \frac{1}{2}.$$

ولنرمز بالمثل، بِـ $\psi(1)$ لأصغر عدد طبيعيّ يفوق $\psi(0)$ ويتحقّق بموجبه:

بالإستمرار في هذه العمليّة، نتمكّن شيئا فشيئا، من إنشاء متتالية متزايدة $\left(\psi(k)\right)_k$ في بحيث:

$$\left\|\dot{y}_n - \dot{y}_m\right\| \leq \frac{1}{2^{k+1}},\quad \forall\, n,m \geq \psi(k).$$

وبالخصوص، ونظرا لكون $\psi(k+1) > \psi(k)$، يمكن الحصول على:

$$\left\|\dot{y}_{\psi(k+1)} - \dot{y}_{\psi(k)}\right\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad (*)$$

نشرع حاليا في إنشاء متتالية (x_n) (بالتدريج) في E تحقّق:

من أجل كلّ دليل طبيعيّ k يكون x_k عنصرا من $\dot{y}_{\psi(k)}$ و:

$$\|x_{k+1}-x_k\|<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

لنأخذ x_0 من $\dot{y}_{\psi(0)}$. ولنفترض أنّنا أنشأنا هكذا، العناصر x_0، x_1، ...، x_k. إذا استندنا إلى العلاقة (*)، تبيّن وجود عنصرين x في $\dot{y}_{\psi(k+1)}$ و x' في $\dot{y}_{\psi(k)}$ بحيث:

$$\|x-x'\|<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

ولمّا كان x_k من $\dot{y}_{\psi(k)}$ أضحى العنصر $z=x_k-x'$ منتميّا إلى F ؛ وإذا وضعنا $x_{k+1}=x+z$ حصلنا على:

$$\|x_{k+1}-x_k\|=\|x+x_k-x'-x_k\|=\|x-x'\|<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

يترتّب عن هذه النتيجة أنّ المتتالية $(x_n)_n$ كوشيّة في E التامّ. إنّها تتمتّع إذن، بنهاية نرمز لها بِـ ℓ. ولمّا كان الغمر القانونيّ s مستمرّا بانتظام وجب على $\left(\dot{y}_{\psi(k)}\right)$ أن تتقارب نحو $s(\ell)$ في E/F. نستخلص من هذا أنّ للمتتالية الكوشيّة $\left(\dot{y}_n\right)_n$ قيمة ملاصقة. إنّ ذلك كفيل بجعلها متقاربة.

5.1 الفضاءات النظيميّة المنتهية الأبعاد

إنّ هذا المقطع من الأهميّة بمكان. سنبيّن من خلاله أنّ الخصائص الطبولوجيّة لكلّ فضاء ذي بعد منته n تتطابق مع خصائص K^n. وبعبارة أدقّ، سنبيّن **أنّ الإثنين مستشاكلان (طبولوجيّا وجبريّا)**. نعتبر K في كلّ ما سيلحق متمتّعا بأساسه القانونيّ $(e_i)_{1\le i\le n}$، حيث:

$$e_i = (0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1},0,\ldots,0),$$

ومزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_1$. في البداية نضع:

1.5.1 قضية

كلّ نظيم N على K^n مستمرّ بانتظام.

إثبات

ليكن N نظيما على K^n. من أجل كلّ عنصر $x = (x_i)_{1\le i\le n}$ من K^n يمكن أن نكتب:

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N(e_i),$$

وبوضع $\sup\limits_{1\le i\le n} N(e_i) = M$ نحصل على:

$$N(x) \le M\,\|x\|_1 .$$

هكذا، ومن أجل x و y من نكتب K^n:

$$|N(x) - N(y)| \le N(x-y) \le M\,\|x-y\|_1$$

وهو ما يدلّ على أنّ N تطبيق ليبشيتزيّ نسبته K. إذن، فهو مستمرّ بانتظام.

نأتي حاليا إلى تبيان النتيجة الأساسيّة التي أعلنّا عنها. وهي:

2.5.1 مبرهنة

كلّ فضاء نظيميّ (E,N) ذي بعد منته n مستشاكل بانتظام مع K^n.

إثبات

لنرمز بِـ $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ للأساس القانونيّ الذي يتمتّع به الفضاء النظيميّ E. يمكن عند ذلك أن نكتب كلّ عنصر x من E تحت الشكل $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i$، حيث $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ عنصر من K^n. يكفينا، بعد هذا، أن نبيّن أنّ التطبيق $\psi: E\to\mathrm{K}^n$ المعرّف بِـ:

$$x\mapsto(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$$

يؤدّي المطلوب؛ أي أنّه تشاكل جبريّ ومستشاكل بانتظام. نقوم بذلك بالتدريج وعلى مدى المراحل التالية:

أ. الفضاء النظيميّ (E,N) ذو البعد 1 و K متشاكلان جبريّا ومستشاكلان بانتظام.

وبالفعل، فإنّ التطبيق $f: E\to\mathrm{K}$ المعطى بـ:

$$x=\lambda\alpha\mapsto f(x)=f(\lambda\alpha)=\lambda$$

يحقّق شروطنا؛ ذلك أنّه واضح الخطيّة وتقابل. وهو مستمرّ بانتظام أيضا. فإذا كان $x=\lambda\alpha$ و $y=\lambda'\alpha$ كتبنا:

$$|f(x)-f(y)|=|\lambda-\lambda'|=\frac{1}{N(\alpha)}N(x-y)$$

أي أنّ f ليبشيتزيّ نسبته $\frac{1}{N(\alpha)}$. يمكن بالمثل أن نرى أنّ f^{-1} المعرّف بِـ:

$$f^{-1}(\lambda)=\lambda\alpha,$$

ليبشيتزيّ نسبته $N(\alpha)$. إنّه مستمرّ بانتظام.

ب. نفترض أنّ النتيجة السابقة صحيحة من أجل كلّ فضاء ذي بعد منته $n-1$ ولنبيّن أنّها تظلّ كذلك في الفضاء ذي البعد n. من أجل ذلك نحتاج إلى:

1) من أجل كلّ $i=1، 2، \ldots، n$ نعرّف التطبيق $g_i : E \to \mathrm{K}$ بِـ

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j \mapsto g_i(x) = \lambda_i$$

ونضع $H_i = g_i^{-1}(\{0\})$. لنبيّن أنّ الجزء H مغلق في E. لدينا:

$$\begin{aligned} H_i &= g_i^{-1}(\{0\}) = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j \in E / \lambda_i = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in E / y = \sum_{j \neq i}^{n} \lambda_j \alpha_j \right\}. \end{aligned}$$

نستخلص أنّ H_i هو الفضاء الجزئيّ المولّد بواسطة العائلة $(\alpha_j)_{1 \le j \le n, j \neq i}$. إنّه ذو بعد يساوي $n-1$. واستنادا إلى فرضيّة التدريج المعلن عنها في (ب)، يضحى H_i و K^{n-1} متشاكلين جبريّا ومستشاكلين بانتظام. ولمّا كان K^{n-1} بناخيّا وجب على H_i أن يكون كذلك؛ وهذا كفيل بجعله مغلقا.

2) إذا كان a من متمّمة H_i فيوجد عنصر b لا ينتمي إلى H_i ويحقّق $g_i(b)=1$. وبالفعل، إنّ كون بعد H_i مساويّا $n-1$ يجعله جزءا فعليّا من E. وعليه، هناك عنصر a في E لا ينتمي إلى H_i. علاوة على ذلك، لدينا بحكم خطيّة g_i:

$$g_i\left(\frac{a}{g_i(a)}\right) = \frac{g_i(a)}{g_i(a)} = 1$$

(وبالطبع، فإنّ عدم انتماء a إلى H_i يضمن عدم انعدام $g_i(a)$). إنّ العنصر $b=\dfrac{a}{g_i(a)}$ يلبّي الطلب.

3) إنّ الفضاء الجزئيّ $b+H_i$ مغلق، ويوجد عدد حقيقيّ موجب r بحيث:

$$B(0,r)\cap(b+H_i)=\phi.$$

من السهل أن نرى أنّ التطبيق:

$$h: H_i \to b+H_i$$

$$x \mapsto h(x)=b+x$$

مستشاكل. ولمّا كان H_i مغلقا وجب على $b+H_i$ أن يكون كذلك. ومن جهة أخرى، يظهر كون b من متممة H_i أنّ الصفر لا ينتمي إلى $b+H_i$ المغلق. وعليه، فهو لا ينتمي إلى $\overline{b+H_i}$. يسمح ذلك بالجزم بوجود عدد $0<r$ بحيث:

$$B(0,r)\cap(b+H_i)=\phi.$$

4) كلّ عنصر x من $B(0,r)$ يذعن للقيد $|g_i(x)|<1$. وفعلا، فإنّ وجود x في $B(0,r)$ يمنع $x+b$ من الانتماء إلى $b+H_i$. وعليه، فإنّ $x-b$ لا ينتمي إلى H_i. يأتي إذن أنّ $g_i(x-b)$ غير معدوم؛ أي:

$$g_i(x)\neq g_i(b)=1.$$

والآن، لو كان $1<|g_i(x)|$ لتمكّنّا من الحصول، بوضع $z=\dfrac{x}{g_i(x)}$، على:

$$N(z)=N\left(\frac{x}{g_i(x)}\right)<N(x)<r,$$

وهو ما يعني أنّ z عنصر من الكرة المفتوحة $B(0,r)$، وأنّ $g_i(z)\neq 1$.
ولكن لدينا:

$$g_i(z)=g_i\left(\frac{1}{g_i(x)}x\right)=1,$$

وهذا تناقض. إذن:

$$|g_i(x)|<1.$$

5) إنّ الدالّة g_i مستمرّة بانتظام.

وبالفعل، من أجل كلّ $\varepsilon>0$ نضع $\rho=\varepsilon r$. وعليه، إذا كان $N(x-y)<\rho$ أتى:

$$N\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)<r.$$

ومنه:

$$\left|g_i\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right|=\frac{1}{\varepsilon}|g_i(x)-g_i(y)|<1,$$

إذن:

$$|g_i(x)-g_i(y)|<\varepsilon.$$

نصل في الأخير إلى إثبات المبرهنة المذكورة. نعتبر التطبيق ψ الوارد أعلاه ونكتبه على هذا الشكل:

$$\psi(x)=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\left(g_1(x),g_2(x),\dots,g_n(x)\right),$$

حيث $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i$ عنصر من E و $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ عناصر من K. من الواضح أنّ ψ تشاكل جبريّ. لنبيّن أنّه مستمرّ بانتظام. لقد جاء سابقا أنّ g_i مستمرّ بانتظام. نترجم ذلك بِـ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}_+^* \ / \ N(x-y) < \rho_i \ \Rightarrow \ |g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

وبوضع $\min(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \rho$ نجد:

$$N(x-y) < \rho \ \Rightarrow \ \|\psi(x) - \psi(y)\| = \sum_{i=1}^{n} |g_i(x) - g_i(y)| < \varepsilon.$$

بقي لنا، في الختام، أن نبرهن أنّ ψ^{-1} مستمرّ بانتظام. لدينا:

$$\psi^{-1} : \mathrm{K}^n \to E$$
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda,\dots,_2 \lambda_n) \mapsto \psi^{-1}(\lambda) = x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i,$$

وعليه:

$$\begin{aligned} N\left(\psi^{-1}(\lambda) - \psi^{-1}(\lambda')\right) &= N\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \alpha_i\right) \\ &= N\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i') \alpha_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_i'| N(\alpha_i) \end{aligned}$$

وبوضع $\sup_{1 \le i \le n} N(\alpha_i) = R$ يأتي:

$$N\left(\psi^{-1}(\lambda) - \psi^{-1}(\lambda')\right) \le R \|\lambda - \lambda'\|.$$

إذن، ψ^{-1} ليبشيتزيّ نسبته R. إنّه المطلوب.

3.5.1 نتيجة

النظيمات متكافئة جميعها في أيّ فضاء نظيميّ ذي بعد منته.

إثبات

يكفي، تبعا للمبرهنة أعلاه، أن نرى ذلك على K^n يمثّل n البعد المنتهي المذكور). ليكن N نظيما على K^n. سنبيّن أنّ N يكافئ أحد النظيمات الأساسيّة الذي نرمز له بـ $\|.\|$. إنّ غلاف الوحدة الكرويّ:

$$S(0,1) = \left\{ x \in K^n / \|x\| = 1 \right\},$$

مغلق ومحدود فهو متراص إذن. ولمّا كان N مستمرّا على S جعله ذلك محدودا. لنضع:

$$m = \inf_{x \in S(0,1)} N(x).$$

يأتي من ذلك على التوّ:

$$N(x) \geq m \quad \forall x \in S(0,1).$$

وبالتحاكي نحصل على:

$$N(x) \geq m\|x\| \quad \forall x \in K^n. \qquad (*)$$

ومن جهة أخرى، بيّنا سابقا (راجع القضية (1.5.1)) أنّه يوجد عدد موجب k بحيث:

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq k\|x\| \quad \forall x \in K^n. \qquad (**)$$

إذا أقرنّا النتيجتين $(*)$ و$(**)$، تبيّن لنا أنّ النظيمين N و $\|.\|$ متكافئان.

4.5.1 ملحوظة

عكس هذه النتيجة صحيح، أي أنه إذا كانت كافة النظيمات في فضاء نظيميّ متكافئة كان هذا الفضاء ذا بعد منته.

5.5.1 نتيجة

كلّ فضاء نظيميّ ذي بعد منته بناخيّ.

إثبات

وبالفعل، فالأمر واضح هنا، ذلك أنّ كلّ فضاء نظيميّ ذي بعد منته مستشاكل بانتظام مع K^n البناخيّ.

6.5.1 نتيجة

كلّ فضاء نظيميّ ذي بعد منته n متراصّ محلّيّا.

إثبات

وبالفعل، فإنّ ذلك مردّه كون K^n متراصّا محلّيّا كذلك (مع الاستناد، بطبيعة الحال، إلى المبرهنة (2.5.1)).

إذا استحضرنا أنّ التحاكي والانسحاب تطبيقان مستشاكلان (راجع المبرهنة (2.3.1)) أمكن الحصول بكلّ سهولة على التكافؤ الهام التالي:

$$E \text{ متراصّ محليّا } \Leftrightarrow B_f(0,1) \text{ متراصّة}$$

حيث رمزنا هنا، بِ E لأيّ فضاء نظيميّ كيفيّ البعد وبِ $B_f(0,1)$ لكرة الوحدة المغلقة في E. وإذا رمزنا بِ $B(0,1)$ لكرة الوحدة المفتوحة من E أمكن استبدال الشطر الأيسر من التكافؤ المذكور بِ $B(0,1)$ متراصّة نسبيّا. وإذا عدنا بعد هذا إلى النتيجة أعلاه تيسّر لنا وضعها على هذا النحو:

7.5.1 نتيجة

كرة الوحدة المغلقة (المفتوحة على التوالي) في كلّ فضاء نظيميّ منتهي البعد متراصة (متراصّة نسبيّا على التوالي).

وبالطبع، فإنّ تراصّ كرة الوحدة المغلقة ينجرّ عنه تراصّ كلّ كرة مغلقة كيفيّة من E. وهذا أمر يسمح بوضع تمييز للتراص في عائلة أجزاء فضاء نظيميّ ذي بعد منته. إنّه نفسه ذاك الذي سقناه من أجل $(□,|.|)$. وبالضبط لدينا:

8.5.1 نتيجة

يكون جزء A من فضاء نظيميّ ذي بعد منته E متراصّا إذا وفقط إذا كان مغلقا ومحدودا.

إثبات

ليس علينا بطبيعة الحال، إلاّ أن نشير، بخصوص كفاية الشرط، إلى أنّه إذا كان A محدودا أضحى محتوى في كرة مغلقة من E وما دامت هذه الأخيرة متراصّة و A مغلقا أوجب ذلك على A أن يكون متراصّا كذلك.

نختم هذه السلسلة من النتائج بمبرهنة شهيرة، تربط بين بعد فضاء نظيميّ والتراصّ المحلّي الفضاء نفسه. إنّها مبرهنة ريس[1] وتنصّ على:

9.5.1 مبرهنة (ريس)

يكون فضاء نظيميّ E متراصّا محليّا، إذا وفقط إذا كان بعده منتهيا.

إثبات

12. Frédéric Riesz: رياضيّاتيّ مجريّ. ولد في 22 جانفي 1880 بـڤيور وتوفّي في 28 فيفري 1956 ببودابست. يعد أحد مؤسّسي التحليل الدالّيّ. كان، من خلال أحد أعماله (1910) وراء ميلاد نظرية المؤثّرات. وفي 1918 أتمّ التقعيد التبديهيّ لنظرية فضاءات بناخ.

لنسرع إلى القول بأنّ كفاية الشرط هي ترديد للنتيجة (5.5.1) السابقة وهو ما يحصر أهميّة هذه المبرهنة في لزوم شرطها، وهو أنّ التّراص المحلّيّ لفضاء نظيميّ ما يجعل هذا الأخير ذا بعد منته. وإذا قرأنا هذه النتيجة بطريقة مغايرة (ولكن مكافئة) فهمنا أنّ كرة الوحدة في أيّ فضاء نظيميّ ذي بعد غير منته ليست متراصّة (إن كانت مغلقة وليست متراصّة نسبيّا إن كانت مفتوحة !)

إذا عدنا إلى لزوم الشرط استعنّا بهذه الـ:

10.5.1 توطئة

إذا كان F فضاء جزئيّا مغلقا من فضاء نظيميّ E، لا يطابق E، فإنّه يوجد عنصر x_0 من E بحيث $\|x_0\|=1$ و:

$$d(x_0,F)\geq\frac{2}{3}.$$

إثبات

وبالفعل، إذا كان y عنصرا من $E\setminus F$ حصلنا على:

$$d(y,F)=\alpha>0,$$

لكون F مغلقا. ولكن لدينا:

$$d(y,F)=\inf_{z\in F}\|y-z\|,$$

وعليه، يوجد عنصر z_0 في F بحيث:

$$\alpha\leq\|y-z_0\|\leq\frac{2}{3}\alpha,$$

$$\|y-t\|\geq\alpha\quad\forall t\in F.$$

إذا وضعنا $t=z_0+s$ كتبنا:

$$\forall s\in F\quad\|y-t\|=\|y-z_0-s\|\geq\alpha.$$

ومن أجل $s=\|y-z_0\|u$، حيث u من F، نكتب أيضا:

$$\|y-z_0-\|y-z_0\|\,u\|\geq\alpha.$$

لنختر $x_0=\dfrac{1}{\|y-z_0\|}(y-z_0)$. يأتي حينئذ أنّ $\|x_0\|=1$ و:

$$\forall u\in F\quad \|x_0-u\|\geq\frac{\alpha}{\|y-z_0\|}\geq\frac{2}{3},$$

وهو ما يختم برهان التوطئة.

لنعد إلى مبرهنتنا.

نستخدم البرهان بالتناقض. لنفترض أنّ الفضاء E ذو بعد غير منته. إنّنا نعلم أنّ كون E متراصّا محليّا يكافئ تراص كرة الوحدة المغلقة $B_f(0,1)$ استنادا إلى النتيجة (7.5.1) وكذا استخدام التحاكي والانسحاب). سنقوم بإنشاء متتالية غير منتهيّة $(x_n)_n$ في $B_f(0,1)$ تكون مؤلّفة من عناصر يبعد بعضها عن بعض بمقدار يفوق (أو يساوي) $\dfrac{2}{3}$. وما دام مثل هذه المتتالية لا يقبل، بطبيعة الحال، أيّة متتالية جزئيّة كوشيّة (أي لا وجود لنقطة ملاصقة) فإنّ الكرة $B_f(0,1)$ المذكورة تضحى غير متراصّة وهو ما يفضي إلى أنّ E غير متراصّ محلّيّا، الأمر الذي يناقض الفرض.

بشأن العنصر الأوّل x_1، نأخذ أي عنصر كيفيّ من $B_f(0,1)$ بحيث $\|x_1\|=1$. ونرمز بِ $F_1=[\{x_1\}]$ للفضاء الشعاعيّ الجزئيّ المولّد بواسطة x_1. إنّ بعد F_1 منته، فهو مغلق. نستخلص أنّ $F_1\neq E$. وإذا استندنا إلى التوطئة أعلاه جزمنا بوجود عنصر x_2 من E يحقّق $\|x_2\|=1$ و:

$$\|x_2-x\|\geq\frac{2}{3},\ \forall x\in F_1.$$

وبالخصوص:

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{2}{3}.$$

وبالمثل، نضع $F_2 = [\{x_1, x_2\}]$. إنّه مغلق. وبإعادة استخدام التوطئة السابقة نضمن وجود عنصر x_3 من E يحقّق $\|x_3\| = 1$ و:

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{2}{3}, \ \forall x \in F_2.$$

وبالخصوص لدينا:

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{2}{3},$$

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{2}{3}.$$

وبمواصلة هذه العمليّة، ننشئ شيئا فشيئا متتالية متزايدة من فضاءات جزئيّة $(F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset ...)$ بعدها منته وكلّ واحد منها جزء فعليّ من E (لا تنس أنّ بعد هذا الأخير قد افترض غير منته!) وتحقّق المتتالية المتحصّل عليها $(x_n)_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| = 1,$$

$$\forall \underset{p \neq q}{p, q} \in \mathbb{N} \quad \|x_p - x_q\| \geq \frac{2}{3}.$$

إنّ هذه العلاقة تمنع من أن تتمتّع بقيمة ملاصقة ممّا يجعل $B_f(0,1)$ غير متراصة ويوصل إلى التناقض المنشود.

11.5.1 تعريف

نقول عن جزء A من فضاء شعاعيّ E إنّه **محدّب** إذا حقّق:

من أجل كلّ عنصرين x و y من A وكلّ عددين موجبين α و β بحيث $\alpha+\beta=1$، يكون لدينا:

$$\alpha x+\beta y\in A$$

وهو ما يعبّر عنه هندسيّا أنّ A يحوي القطعة المستقيمة التي طرفاها x و y كلّما ضمّ هذين الطرفين. إنّه حال المجالات في $(\mathbb{R},|.|)$.

يمكن، بالطبع، أنّ نعيد صوغ هذا الشرط على القالب التالي:

$$A \text{ محدّب } \Leftrightarrow \quad \forall\ x,y\in A, \forall t\in[0,1]:\ tx+(1-t)y\in A$$

لدينا على سبيل المثال:

1) كلّ فضاء شعاعيّ جزئيّ محدّب.
2) كلّ كرة من فضاء نظيميّ محدّبة.
3) تقاطع أجزاء محدّبة محدّب.

إذا تمعنّا في الشكل الأخير لشرط التحدّب، وجدناه يقدّم من أجل كلّ زوج من نقطتين x و y من A سبيلا f :

$$f:[0,1]\subset(\mathbb{R},|.|)\to A$$
$$t\mapsto tx+(1-t)y$$

مبدؤه y وطرفه x. إنّ هذا الأمر يجعل A جزءا مترابطا بالأقواس. يمكننا أن نضع:

12.5.1 نتيجة

في فضاء نظيميّ، كلّ جزء محدّب مترابط بالأقواس (إنّه مترابط إذن!) وبالخصوص، كلّ فضاء نظيميّ مترابط بالأقواس.

نعرض في ختام هذا الفصل تعريفا لفضاءات نظيميّة خاصّة. إنّها جبور بناخ. يتعلّق الأمر بتعريف قانون تركيب ثالث ضربيّ على فضاء شعاعيّ نظيميّ E يحقّق شروطا معيّنة. لنفصّل ذلك في المقطع الموالي.

6.1 جبور بناخ

1.6.1 تعريف

نقول عن فضاء شعاعيّ E على K إنّه **جبر** على K، إذا عرّفنا عليه قانون الضرب:

$$(x,y)\mapsto x.y$$

تتحقّق به الخصائص التالية:

أ. $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y),\ \ \forall x,y\in E,\ \forall \alpha\in \mathrm{K},$

ب. $(xy)z=x\ (yz),\ \ \forall x,y,z\in E,$

يعرف هذان الشرطان بشرطي التجميع.

ج. $(x+y)z=xz+yz,\ \ \forall x,y,z\in E,$

د. $x(y+z)=xy+xz,\ \ \forall x,y,z\in E.$

يعرف هذان الشرطان الأخيران بشرطي التوزيع.

إنّ هذا الضرب ليس تبديليّا عموما؛ بمعنى أنّ العلاقة $xy=yx$ قد تكون خاطئة من أجل بعض الأزواج (x,y) من E^2. وإذا كانت المساواة $xy=yx$ صحيحة مهما كان العنصران x و y من E قلنا، في هذه الحالة، إنّ E **جبر تبديليّ**.

وإذا وجد عنصر e من E بحيث تتحقّق به المساواتان:

$$xe=ex=x;\ \ \forall x\in E,$$

فإنّنا نقول عن e إنّه عنصر **حيّادي** للضرب وإنّ الجبر E **واحديّ**.

نقول عن عنصر x من الجبر الواحديّ E إنّه **مقلوب** عنصر y من E إذا تحقّقت المساواتان:

$$xy = yx = e.$$

نقول عن فضاء جزئيّ G من جبر E إنّه جبر **جزئيّ** من E إذا تحقّق:

$$\forall x, y \in G,\ \ xy \in G.$$

2.6.1 مثال

إنّ المجموعة E المؤلّفة من كثيرات الحدود ذات معاملات من K تشكّل، بطبيعة الحال، إذا ما زُوّدت بعمليتي الجمع والضرب الإعتياديّتين جبرا تبديليّا وواحديّا.

3.6.1 تعريف

نسمّي جبرا **نظيميّا** على K كلّ جبر واحديّ متمتّع بنظيم يجعل التطبيق $(x, y) \mapsto x.y$ مستمرّا. وإذا كان الجبر النظيميّ E تامّا قلنا عنه إنّه جبر **بناخيّ**.

إذا استخدمنا شرط استمرار التطبيقات ثنائيّة الخطيّة (انظر ذلك في الفصل الموالي) أمكننا أن نكتب:

$$\exists \delta > 0\ \ \|xy\| \leq \delta \|x\|\,\|y\|.$$

وباستبدال النظيم المستعمل بنظيم مكافئ نحصل على:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

يمكن أن نصوغ تعريف جبر نظيميّ على هذا النحو:

الجبر النظيميّ هو كلّ فضاء شعاعيّ نظيميّ E يحقّق إلى جانب الشروط الأربعة أعلاه:

أ. E واحديّ.

ب. $\|e\|=1$

ج. $\forall x,y\in E \ \ \|xy\|\leq\|x\|\|y\|.$

4.6.1 مثال

الفضاء $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ المزوّد بنظيم التقارب المنتظم يشكّل جبرا بناخيّا.

7.1 مسائل محلولة

1) ليكن E فضاء شعاعيّا حقيقيّا و $N:E\to\mathbb{R}_+$ تطبيقا يذعن للقيود الثلاثة التالية:

أ. $\forall x\in E \ \ N(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0_E$

ب. $\forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \forall x\in E \ \ N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$

ج. المجموعة $B=\{x\in E: N(x)\leq 1\}$ محدّبة.

برهن أنّ N نظيم على E.

2) ليكن g عنصرا من الفضاء $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ المزوّد بنظيم التقارب المنتظم $\|.\|_\infty$. من أجل كلّ دالّة f من E نضع:

$$N_g(f)=\|fg\|_\infty.$$

اعط شرطا لازما وكافيا على g يجعل N_g نظيما على E.

3) ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء نظيميّا حقيقيّا. نضع:

$$u(E)=\sup_{x,y\in E\setminus\{0\}}\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}.$$

1) اثبت أنّ:

$$1\leq u(E)\leq 2.$$

2) احسب $u(\mathbb{R}^2)$ عندما يكون $\mathbb{R}^2$ مزوّدا بنظيمه الإقليديّ.

4) نعرّف على الفضاء $\mathbb{R}^2$ تطبيقا حقيقيّا α بِـ:

$$x\mapsto\alpha(x)=\|x\|_1+2\|x\|_\infty,$$

حيث $\|x\|_1$ و $\|x\|_\infty$ هما النظيمان الأساسيّان على $\mathbb{R}^2$.

1) اثبت أنّ α نظيم على $\mathbb{R}^2$.

2) مثّل هندسيّا كرة الوحدة المغلقة $B_f^\alpha(0,1)$.

5) ليكن $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ فضاء المصفوفات الحقيقيّة المربّعة ذات الرتبة n.

نعرّف على $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ تطبيقا حقيقيّا N على هذا النحو:

$$N(M)=\mathrm{su}_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right),$$

حيث $M=(a_{ij})$ مصفوفة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) اثبت أنّ N نظيم على $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) اثبت أنّه من أجل كلّ M و M' من $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ يكون لدينا:

$$N(M.M')\leq N(M).N(M').$$

3) استخلص أنّ $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ جبر نظيميّ.

6) ليكن N_1 و N_2 نظيمين على فضاء شعاعيّ E.

1) برهن أنّ:

$$N_1 = N_2 \quad \Leftrightarrow \quad B_f^1(0,1) = B_f^2(0,1)$$

حيث:

$$B_f^i(0,1) = \{x \in E : N_i(x) \le 1\};\ i = 1, 2.$$

2) جب على السؤال الأوّل مستبدلا الكرات المغلقة بالكرات المفتوحة.

7) من أجل كلّ f من $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ نضع:

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty;$$
$$N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

1) اثبت أنّ N و N' نظيمان على E.

2) هل N و $\|.\|_\infty$ متكافئان؟

3) اثبت أنّ N و N' متكافئان؟

8) ليكن الفضاء $E = \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_2$.

بيّن أنّ $(E, \|.\|_2)$ ليس بناخيّا مستعينا بالمتتالية التالية:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ nx - \dfrac{n}{2} & ; \quad \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \\ 1 & ; \quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

9) نزوّد الفضاء $E = \mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_2$ ونضع من أجل كلّ عدد طبيعيّ n:

$$f_n(x)=\cos nx,\ \ x\in[0,2\pi].$$

1) احسب $\|f_p-f_q\|_2$، حيث p و q من $\mathbb{N}$.

2) استخلص أنّ كرة الوحدة المغلقة $B_f(0,1)$ ليست متراصّة.

3) ماذا عن بعد الفضاء E؟

10) ليكن E فضاء بناخيّا و $f:E\to E$ تطبيقا مركّبته $f\circ f$ مقلّصة. برهن أنّ f يقبل نقطة صامدة وحيدة.

11) ليكن E فضاء الدوال الحقيقيّة المعرّفة على $I=[0,1]$ بحيث:

$$\sup_{(x,y)\in I^2,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=K(f)<\infty.$$

1) اثبت أنّ E فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

2) نضع:

$$M(f)+K(f)=N(f)\ ;\ \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=M(f)$$

حيث f عنصر من E. اثبت أنّ N نظيم على E لا يكافئ النظيم M. (يمكنك أن تستعين بالمتتالية:

$$f_n(x)=\begin{cases} x & ;\ 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n} & ;\ \dfrac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases})$$

3) اثبت أنّ كرة الوحدة المغلقة $B_f(0,1)$ ليست متراصّة في (E,N).

4) هل بعد E منته؟ وهل (E,N) بناخيّ؟

12) ليكن E فضاء نظيميّا. برهن أنّه إذا وجد في E جزء متراصّ A داخليته غير خالية، فإنّ E يكون عندئذ ذا بعد منته.

13) ليكن f التطبيق المعرّف على $\mathbb{R}^n$ بِـ :

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2-x_n^2,$$

ولتكن المجموعة:

$$E=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\neq 0\}.$$

1) اثبت أنّ الأجزاء:

$$E_1=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)>0\},$$
$$E_2=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<0\ ,\ x_n>0\},$$
$$E_3=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<0\ ,\ x_n<0\},$$

مترابطة بالأقواس.

2) بيّن أنّ الأجزاء E_1 و E_2 و E_3 تؤلّف المركّبات المترابطة لـE .

8.1 حلول

1) ليس علينا بطبيعة الحال سوى التعرّض للمتباينة المثلّثيّة:

$$N(x+y)\leq N(x)+N(y).$$

إذا كان $x=0$ أو $y=0$ أضحى الأمر بديهيّا. إذا انتفت هاتان الحالتان اعتبرنا الشعاعين الواحديّين المرفقين $u=\dfrac{x}{N(x)}$ و $v=\dfrac{y}{N(y)}$ من B ووضعنا:

$$w=\frac{x+y}{N(x)+N(y)}.$$

يأتي بفضل تحدّب B أنّ w ينتمي إلى B ويحقّق:

$$w=\frac{N(x)}{N(x)+N(y)}u+\frac{N(y)}{N(x)+N(y)}v;$$

وعليه:

$$N(w)\leq 1$$

وبالتالي:

$$N(x+y)\leq N(x)+N(y).$$

2) لنضع:

$$Z_g=\{x\in[0,1]:g(x)=0\},$$

ولنشر على التوّ إلى أن شرطي التجانس [ش2] ومتباينة المثلّث [ش3] واضحا الحضور. اللبس الوحيد آت من شرط الفصل:

$$N_g(f)=0 \quad\Rightarrow\quad f=0.$$

إذا كانت الداخلية $\overset{o}{Z}_g$ غير خالية (أي يوجد مجال لا تكون عليه الدالّة g مطابقة الدالّة المعدومة) فإنّ N_g لا يعرّف نظيما.

وبالفعل، من أجل كلّ عنصر a من $\overset{o}{Z}_g$ (نفترضه مختلفا عن 0 و 1) يوجد عدد $\varepsilon>0$ بحيث:

$$[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\subset Z_g;$$

يمكن والحال هذه، أن نجد دالّة f من E تكون معدومة خارج المجال $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ دون أن تطابق الدالّة المعدومة. يأتي هكذا أنّ $f\neq 0$ و $fg=0$ وبالتالي:

$$N_g(f)=\|fg\|_\infty=0,$$

وهو ما يتعارض وشرط الفصل.

إذا كانت الداخلية $\overset{o}{Z}_g$ خالية كان N_g نظيما.

وفعلا، إذا كان f عنصرا من E بحيث $N_g(f)=0$ فإن $fg=0$ ، وبالتالي يكون f معدوما عند كلّ نقطة من $[0,1]\setminus Z_g$. ولمّا كان هذا الأخير كثيفا في $[0,1]$ و f مستمرّا على $[0,1]$ نتج أنّ f يطابق الدالّة المعدومة. نكتب في الخلاصة:

N_g نظيم على E $\Leftrightarrow$ $\mathring{Z}_g = \phi$

3) 1) نعلم أنّ:

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \min\left(\|x+y\|,\|x-y\|\right) \le \|x\|+\|y\|.$$

وعليه:

$$1-\frac{2\|x\|\|y\|^2}{\|x\|^2+\|y\|^2} \le \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)} \le 2,$$

وبالتالي:

$$1-\inf_{x,y\in E\setminus\{0\}} \frac{2\|x\|\|y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} \le \mu(E) \le 2;$$

ومنه النتيجة.

2) لدينا بالتعويض المباشر $u(\mathbb{R}^2)=1$.

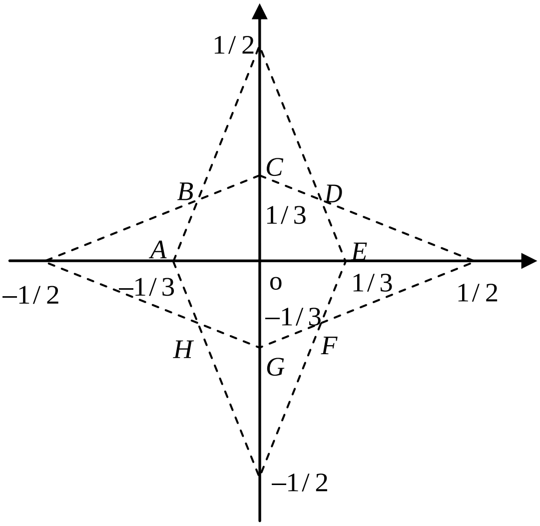
4) 1) واضح.

2) لدينا:

$$\begin{aligned}
B_{f,u}(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : u(x,y)\le 1\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}+2\left(|x|+|y|\right)\le 1\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3|x|+2|y|\le 1 \,;\, 2|x|+3|y|\le 1\right\}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(3x+2y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right), \\ \left(3x-2y \leq 1, x \geq 0, y \leq 0\right), \left(-3x+2y \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\right), \\ \left(-3x-2y \leq 1, x \leq 0, y \leq 0\right), \left(2x+3y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right), \\ \left(2x-3y \leq 1, x \geq 0, y \leq 0\right), \left(-2x+3y \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\right), \\ \left(-2x-3y \leq 1, x \leq 0, y \leq 0\right). \end{array} \right\}$$

وعليه، تأتي $B_f^{\alpha}(0,1)$ ممثّلة بالحيز المحاط بالمضلع $ABCDEFGH$ في الرسم الموالي.



5) 1) لدينا بكلّ وضوح:

$$N(M)=0 \;\Leftrightarrow\; \sup_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|=0,\ \forall\, i=1,2,\ldots,n$$

$$\Leftrightarrow\; a_{ij}=0,\ \forall\, i,\, j=1,2,\ldots,n \;\Leftrightarrow\; M=0$$

ومنه الشرط [ش$_4$].

من أجل كلّ λ من $\mathbb{K}$ و M من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ نكتب:

$$N(\lambda M)=\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda a_{ij}\right|\right)=\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda\right|\left|a_{ij}\right|\right)=\sup_{1\le i\le n}\left(\left|\lambda\right|\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right)$$
$$=\left|\lambda\right|\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right)=\left|\lambda\right|N(M).$$

ومنه الشرط [ش2].

في الأخير يتم التأكّد من المتباينة المثلّثيّة على النحو:

$$\forall M=(a_{ij}),M'=(b_{ij})\in\mathscr{M}_n(\square^{\,n}):$$
$$N(M+M')=\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}+b_{ij}\right|\right)\le\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left|a_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|\right)\right)$$
$$\le\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right)+\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|\right)\le N(M)+N(M').$$

إذن، N نظيم كما هو مطلوب.

2) إذا كانت $M=(a_{ij})$ و $M'=(b_{ij})$ مصفوفتين من $\mathscr{M}_n(\square)$ فإنّ $MM'=(c_{ij})$ حيث $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. وعليه:

$$\left|c_{ij}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|.$$

ومنه:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|\le\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)\le\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\max_{1\le k\le n}\left|b_{kj}\right|\right)\le N(M')\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|.$$

وبالانتقال إلى الحدّ الأعلى وفق i يأتي:

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|\le N(M')\max_{1\le i\le n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|;$$

أي:

$$N(MM')\le N(M)N(M').$$

3) من المؤكّد أنّ الجداء المصفوفيّ يحقّق بكلّ وضوح كلّ ما جاء في التعريف (1.6.1)، كما أنّ النظيم N يحقّق بدوره بنود التعريف (3.6.1) ممّا يجعل $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), N)$ جبرا نظيميّا.

6) 1) لدينا بداهة:

$$N_1 = N_2 \quad \Rightarrow \quad B_f^1 = B_f^2.$$

لنفترض بالعكس، أنّ $B_f^1 = B_f^2$. ليكن x من E. إذا كان x معدوما جاءنا:

$$N_1(x) = N_2(x) = 0.$$

إذا لم يكن x معدوما اعتبرنا العنصر $y = \dfrac{x}{N_1(x)}$ المنتمي إلى الكرة B_f^1.

ولمّا كانت $B_1 = B_2$ حصلنا على $N_2(y) \leq 1$. ومنه:

$$N_2(x) \leq N_1(x).$$

وبالمثل، نبيّن أنّ:

$$N_1(x) \leq N_2(x),$$

وهو ما يوصل إلى المساواة المبتغاة.

2) نكرّر المنهج المتّبع أعلاه باعتبار النقطة $y = \dfrac{x}{N_1(x) + \varepsilon}$، حيث $0 < \varepsilon$. نحصل عندئذ على:

$$N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon.$$

سوف تتبع مساواتنا بجعل ε يؤول إلى الصفر.

7) 1) N عبارة عن مجموع نظيمين، إذن فهو نظيم بدوره.

بخصوص التطبيق N' نكتب باختصار:

$$N'(f)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(0)=0 \\ f'=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f\equiv 0$$

$$N'(\lambda f)=|\lambda f(0)|+\|\lambda f'\|_\infty=|\lambda|\left(|f(0)|+\|f'\|_\infty\right)=|\lambda|N'(f).$$

$$N'(f+g)=|(f+g)(0)|+\|f+g\|_\infty$$

$$\le |f(0)|+\|f\|_\infty+|g(0)|+\|g\|_\infty \le N'(f)+N'(g).$$

2) من أجل $f_n(x)=\cos 2n\pi x$ لدينا:

$N(f_n)=1+2n\pi$ و $\|f_n\|_\infty=1$

وعليه:

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty}=1+2n\pi.$$

ولمّا كانت هذه النسبة غير محدودة جزمنا بأنّ النظيمين N و $\|.\|_\infty$ ليسا متكافئين.

3) لدينا بوضوح:

$$N'(f)\le N(f).$$

من جهة أخرى، نكتب من أجل كلّ x من $[0,1]$:

$$|f(x)|=\left|f(0)+\int_0^x f'(t)dt\right|\le|f(0)|+\int_0^x\|f'\|_\infty dt=|f(0)|+x\|f'\|_\infty$$
$$\le N'(f).$$

وعليه:

$$\|f\|_\infty\le N'(f).$$

ولمّا كان:

$$\|f'\|_\infty\le N'(f),$$

حصلنا على:

$$N(f)\leq 2N'(f).$$

هكذا، نجد:

$$N'(f)\leq N(f)\leq 2N'(f).$$

8) لنتأكّد من أنّ المتتالية $(f_n)_n$ كوشيّة. إذا كان p و q عددين طبيعيّين بحيث $p>q$ حصلنا على:

$$\|f_p - f_q\|_2 = \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (f_p(x)-f_q(x))^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} (f_p(x)-f_q(x))^2\,dx}$$

$$= \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (p-q)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \left(1-q\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 dx}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-q)^2}{3p^3}+\frac{(p-q)^3}{3p^3q}} = \sqrt{\frac{1}{3q}\left(1-\frac{p}{q}\right)^2} < \sqrt{\frac{1}{3q}}.$$

وعليه، إذا كان ε عددا موجبا تماما اكتفينا بالرتبة $n_0=\left[\frac{1}{3\varepsilon^2}\right]+1$ لإنهاء التساؤل.

المتتالية المعتبرة تتقارب وفق النظيم المعطى نحو الدالّة المعرّفة بـ:

$$f(x)=\begin{cases} 0\ ; & -1\leq x\leq \frac{1}{2},\\ 1\ ; & \frac{1}{2}<x\leq 1.\end{cases}$$

وفعلا، لدينا في هذا الصدد:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_2 = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(n\left(x-\frac{1}{2}\right)-1\right)^2 dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n}} = 0.$$

الآن، نلاحظ أنّ الدالّة النهاويّة f غير مستمرّة عند $\frac{1}{2}$. إنّها لا تنتمي بذلك إلى E. إنّه الأمر الذي يحول دون أن يكون هذا الأخير بناخيّا.

9) نزوّد الفضاء $E = \mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_2$ ونضع من أجل كلّ عدد طبيعيّ n:

$$f_n(x) = \cos nx,\ \ x \in [0,2\pi].$$

1) ليكن p و q من $\mathbb{N}$ بحيث $p > q$. لدينا:

$$\|f_p - f_q\|_2^2 = \int_0^{2\pi}(\cos px - \cos qx)^2\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos px)^2\,dx + \int_0^{2\pi}(\cos qx)^2\,dx - 2\int_0^{2\pi}\cos px\cos qx\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2px}{2}\,dx + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2qx}{2}\,dx -$$

$$-\int_0^{2\pi}\cos(px+qx)\,dx - \int_0^{2\pi}\cos(px-qx)\,dx = 2\pi.$$

وعليه:

$$\|f_p - f_q\|_2 = \sqrt{2\pi}.$$

2) إنّ المتتالية المقترحة محتواة في الكرة $B_f\left(0,\sqrt{\pi}\right)$.

وفضلا عن ذلك، نلاحظ أنّه، أيّا كان تطبيق استخراج المتتاليات الجزئيّة φ لدينا:

$$d(f_{\varphi(p)}, f_{\varphi(q)}) = \sqrt{2\pi}.$$

نستنتج أنّه لا يمكن للمتتالية $(f_n)_n$ قبول أيّة متتالية جزئيّة كوشيّة. وعليه، كلّ متتالياتها الجزئيّة متباعدة. إنّه الأمر الذي يحرمها من التمتّع بقيمة ملاصقة. يترتّب عن هذا أنّ الكرة $B_f\left(0,\sqrt{\pi}\right)$ ليست متراصّة. وبفضل التحاكي:

$$B_f\left(0,\sqrt{\pi}\right) \to B_f(0,1)$$

$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} f$$

نستنتج أنّ الحكم يسري على الكرة $B_f(0,1)$.

3) بعد الفضاء E غير منته طبقا لمبرهنة ريس.

10) لتكن $(a_n)_n$ المتتالية المعطاة على النحو:

$$a_{n+1} = f(a_n),\ a_0 \in E.$$

للدالّة f^2 نقطة صامدة وحيدة طبقا لمبرهنة بناخ . بيكار[1]. المتتاليتان المستخرجتان $(a_{2n})_n = (f^2(a_{2n-2}))_n$ و $(a_{2n+1})_n = (f^2(a_{2n-1}))_n$ تتقاربان نحو هذه النقطة الصامدة. نخلص من هذا إلى أنّ المتتالية تتقارب بدورها نحو النهاية نفسها. تشكّل هذه النهاية نقطة f الصامدة المطلوبة.

11) 1) لنبيّن أنّ E فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

نلاحظ، بادئ ذي بدء، أنّه مهما يكن f من E يكون لدينا:

$$K(f) = \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < +\infty;$$

---

13. Charles Emile Picard: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 24 جويلية 1856 بباريس ومات بها في 11 ديسمبر 1920. له مساهمات عدّة في نظرية الدوال والمعادلات التفاضليّة والهندسة التحليليّة.

ومنه:

$$\forall x, y \in E \ \left| f(x) - f(y) \right| \leq K(f)\left| x - y \right|.$$

نستخلص أنّ f ليبشيتزيّ، فهو مستمرّ إذن:

$$E \subset \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right).$$

ليكن الآن، f و g عنصرين من E و α و β عددين حقيقيّين. نكتب عندئذ:

$$\begin{aligned}
K(\alpha f + \beta g) &= \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)\right|}{\left|x - y\right|} \\
&= \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|\alpha\left(f(x) - f(y)\right) + \beta\left(g(x) - g(y)\right)\right|}{\left|x - y\right|} \\
&\leq \left|\alpha\right| \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|\left(f(x) - f(y)\right)\right|}{\left|x - y\right|} + \left|\beta\right| \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|\left(g(x) - g(y)\right)\right|}{\left|x - y\right|} \\
&\leq \left|\alpha\right| K(f) + \left|\beta\right| K(g) < +\infty.
\end{aligned}$$

يترتّب عن ذلك أنّ $(\alpha f + \beta g)$ عنصر من E، وهو ما يجعل هذا الأخير فضاء شعاعيّا جزئيّا من $\mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$.

2) نستهلّ هذا السؤال بتبيان أنّ N نظيم على E. لدينا على التوّ:

$$\begin{aligned}
N(f) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \sup_{x\in I}\left|f(x)\right| + \sup_{(x,y)\in I^2, x\neq y} \frac{\left|f(x) - f(y)\right|}{\left|x - y\right|} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_{x\in I}\left|f(x)\right| = 0 \\ \sup\limits_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \dfrac{\left|f(x) - f(y)\right|}{\left|x - y\right|} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, \ f(x) = 0 \\ \underset{\forall (x,y)\in I^2}{f(x) = f(y)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ f \equiv 0;
\end{aligned}$$

ومنه الشرط [ش$_4$].

وبالمثل، لدينا:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f \in E \quad N(\lambda f) = M(\lambda f) + K(\lambda f)$$
$$= |\lambda|\big(M(f) + K(f)\big) = |\lambda| N(f).$$

ومنه الشرط [ش2].

وفي الأخير، يكون لدينا:

$$\forall f, g \in E \ N(f+g) = M(f+g) + \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|}$$
$$\leq \big(M(f)+M(g)\big) + \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}$$
$$\leq \big(M(f)+K(f)\big) + \big(M(g)+K(g)\big) \leq N(f)+N(g).$$

وهو ما ينهي إثبات الشقّ الأوّل من السؤال. (لاحظ أنّنا استخدمنا هنا كون M نظيما وكذا خصائص القيمة المطلقة والحدّ الأعلى الابتدائيّة).

بخصوص الشطر الأخير من هذا السؤال نكتفي بإثبات أنّ المتتالية المعطاة كوشيّة بالنسبة لأحد النظيمين وليست كذلك بالنسبة للآخر. ليكن p و q عددين طبيعيّين ولنفترض $q<p$. يأتي عندئذ:

$$f_p(x) - f_q(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq x \leq \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \leq 1, \\ \frac{1}{p} - x & ; \ \frac{1}{p} \leq x \leq \frac{1}{q} \leq 1, \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} & ; \ \frac{1}{q} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ومنه:

$$\sup_{x\in I} |f_p(x) - f_q(x)| = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

وعليه:

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} M(f_p - f_q) = 0.$$

نستنتج أنّ المتتالية $(f_n)_n$ كوشيّة في (E,M).

علينا الآن، أن نبيّن أنّ هذه المتتالية ليست كوشيّة في (E,N). من أجل ذلك نسوق هذا الحساب. أيّا كان p و q من $\mathbb{N}$ بحيث $q<p$ نكتب:

$$K(f_p - f_q) = \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)\right|}{|x-y|}$$

$$= \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|\left(f_p(x) - f_p(y)\right) + \left(f_q(y) - f_q(x)\right)\right|}{|x-y|}.$$

واختصارا للكتابة وتخفيفا لها نضع:

$$g_{p,q}(x,y) = \frac{\left|\left(f_p(x) - f_p(y)\right) + \left(f_q(y) - f_q(x)\right)\right|}{|x-y|}.$$

نفترض أنّ $x<y$ ونحصل تبعا لذلك على:

$$f_p(x) - f_q(x) = \begin{cases} 0 & ;\quad 0\le x<y\le \frac{1}{p}<\frac{1}{q}\le 1, \\ \dfrac{-\frac{1}{p}+y}{|x-y|} & ;\quad 0\le x\le \frac{1}{p}\le y\le \frac{1}{q}\le 1, \\ \dfrac{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{|x-y|} & ;\quad 0\le x\le \frac{1}{p}<\frac{1}{q}\le y\le 1, \\ \dfrac{y-x}{|x-y|}=1 & ;\quad \frac{1}{p}\le x<y\le \frac{1}{q}\le 1, \\ \dfrac{\frac{1}{q}-x}{|x-y|} & ;\quad \frac{1}{p}\le x\le \frac{1}{q}\le y\le 1, \\ 0 & ;\quad \frac{1}{p}<\frac{1}{q}\le x<y\le 1. \end{cases}$$

ومنه:

$$K(f_p - f_q) = \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} g_{p,q}(x,y) \geq 1,$$

يترتّب عن هذا أنّ:

$$N(f_p - f_q) = M(f_p - f_q) + K(f_p - f_q) \geq 1,$$

ممّا يجعل النهاية $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} N(f_p - f_q)$ غير معدومة، أي أنّ المتتالية المعتبرة ليست كوشيّة في (E,N).

3) لدينا على الفور:

$$K(f_n) = 1;\ M(f_n) = \frac{1}{n};\ N(f_n) = 1 + \frac{1}{n}.$$

وعليه:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad f_n \in B_f(0,2).$$

إنّ المتتالية $(f_n)_n$ لا تتمتّع بأيّة قيمة ملاصقة في (E,N)؛ ممّا يمنع الكرة المغلقة $B_f(0,2)$ من أن تكون متراصّة. وبالتحاكي (وهو المحافظ على التراص) نستنتج أنّ كرة الوحدة المغلقة $B_f(0,1)$ لا يمكنها أن تكون متراصة كذلك.

4) بعد الفضاء E غير منته لكون الكرة $B_f(0,1)$ غير متراصة، وهذا طبقا لمبرهنة ريس.

إنّ الفضاء (E,N) بناخيّ. وبالفعل، إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية كوشيّة من (E,N) كتبنا عندئذ:

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, p,q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \ \Rightarrow\ N(f_p - f_q) \leq \varepsilon.$$

وبما أنّ:

$$N(f_p - f_q) = M(f_p - f_q) + K(f_p - f_q),$$

إذن:

$$p > q \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M(f_p - f_q) \leq \varepsilon, & (*) \\ K(f_p - f_q) \leq \varepsilon. & (**) \end{cases}$$

يتّضح من خلال العلاقة (*) أنّ المتتالية $(f_n)_n$ كوشيّة في (E, M). ولكن هذا الأخير تامّ بالنسبة لنظيم التقارب المنتظم M (ولا أخالك لذلك ناسيا!). وعليه، فإنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتمتّع بنهاية f في (E, M). لنبيّن أنّ التقارب واقع وفق النظيم N. من أجل ذلك لدينا:

$$N(f_n - f) = M(f_n - f) + K(f_n - f).$$

أثبتنا أعلاه أنّ $\lim_{n\to\infty} M(f_n - f) = 0$. بقي أن نبيّن أنّ $\lim_{n\to\infty} K(f_n - f) = 0$.
إذا استندنا إلى (**) أمكننا أن نكتب:

$$p > n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad K(f_p - f_n) \leq \varepsilon,$$

أي:

$$p > n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{\left|\left(f_p(x) - f_n(x)\right) - \left(f_p(y) - f_n(y)\right)\right|}{|x - y|} \leq \varepsilon.$$

ومنه:

$$p > n \geq n_0 \quad \Rightarrow \frac{\left|\left(f_p(x) - f_n(x)\right) - \left(f_p(y) - f_n(y)\right)\right|}{|x - y|} \leq \varepsilon, \ \forall \underset{x\neq y}{(x, y)} \in I^2.$$

إذا ثبّتنا n بحيث $n \geq n_0$ وجعلنا p يؤول إلى $+\infty$ حصلنا حينئذ على:

$$\frac{\left|\left(f(x) - f_n(x)\right) - \left(f(y) - f_n(y)\right)\right|}{|x - y|} \leq \varepsilon, \quad \forall \underset{x\neq y}{(x, y)} \in I^2.$$

ومنه:

$$\sup_{\substack{(x,y)\in I^2\\ x\neq y}} \frac{\left|\left(f(x)-f_n(x)\right)-\left(f(y)-f_n(y)\right)\right|}{|x-y|}\leq \varepsilon,$$

أي $\lim\limits_{n\to\infty} K(f_n - f) = 0$، وهو ما ينهي البرهان.

12) ليكن A جزءا متراصّا من E داخليته غير خالية. وليكن a عنصرا من $\overset{\circ}{A}$. يوجد عندئذ عدد حقيقيّ $0<r$ بحيث:

$$B(a,r)\subset \overset{\circ}{A}\subset A.$$

وعليه:

$$B_f(a,r)\subset A.$$

يترتّب عن هذه العلاقة الأخيرة أنّ الكرة المغلقة $B_f(a,r)$ متراصّة (لكونها جزءا مغلقا من A المتراصّ). وكالمعتاد نستخدم التحاكي والانسحاب:

$$B_f(a,r)\to B_f(0,r)\to B_f(0,1)$$
$$x\ \mapsto x-a\ \ \mapsto \frac{1}{r}(x-a)$$

للحصول على أنّ كرة الوحدة المغلقة $B_f(0,1)$ متراصّة بدورها. إنّ هذا يفضي إلى أنّ الفضاء ذو بعد منته، طبقا لمبرهنة ريس.

13) 1) نستغلّ النتيجة (12.5.1) للاكتفاء بإثبات أنّ الجزأين E_2 و E_3 محدّبان، وهو ما يجعل هذين الأخيرين مترابطين بالأقواس. سنعالج E_1 على حدى.

ليكن x و y عنصرين من E_2، من أجل كلّ t من $[0,1]$ نضع:

$$z=tx+(1-t)y.$$

يكون لدينا عندئذ:

$$f(z)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(tx_i+(1-t)y_i\right)^2-\left(tx_n+(1-t)y_n\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(t^2x_i^2+2t(1-t)x_iy_i+(1-t)^2y_i^2\right)-$$
$$-t^2x_n^2-2t(1-t)x_ny_n-(1-t)^2y_n^2$$
$$=t^2\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2-x_n^2\right)+(1-t)^2\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2-y_n^2\right)+$$
$$+2t(1-t)\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-x_ny_n\right)$$
$$=t^2f(x)+(1-t)^2f(y)+2t(1-t)\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-x_ny_n\right). \qquad (*)$$

إلى جانب هذا، يمكننا أن نكتب فرضا:

$$f(x)<0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2-x_n^2)<0 \quad\Rightarrow\quad |x_n|=x_n>\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2},$$

$$f(y)<0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n-1}(y_i^2-y_n^2)<0 \quad\Rightarrow\quad |y_n|=y_n>\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}.$$

نستخلص من هاتين العلاقتين أنّ:

$$x_ny_n>\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}.$$

وبالاستعانة بمتباينة كوشي . شوارتز يأتي:

$$x_ny_n>\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}\geq\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i.$$

وعليه:

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-x_ny_n<0.$$

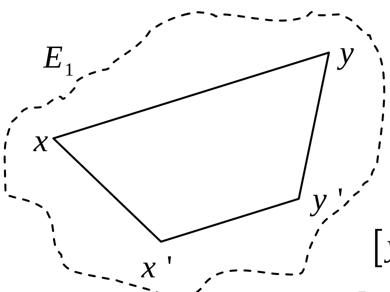
نستنتج أنّ $f(z)<0$ ، وهو ما يبيّن أنّ z ينتمي إلى E_2 . نرى في الأخير أنّ E_2 جزء محدّب، وبالتالي فهو مترابط بالأقواس.

إنّ حساب مماثلا يوصل إلى أنّ E_3 مترابط بالأقواس.

بخصوص E_1 نتّبع الخطّة الموالية.

ليكن x و y عنصرين من E_1 ، أي أنّ $f(x)$ و $f(y)$ موجبان تماما. ينجرّ عن هذا أنّ x و y غير معدومين لزوما. نحاول إيصال x بـ y عبر الخطّ المنكسر التالي.

ليكن $x'=(0,0,...,x_i,0,...,0)$ و $y'=(0,0,...,y_j,0,...,0)$ عنصرين من E_1 بحيث $i \neq j \neq n$ و $x_i y_j \neq 0$ (x_i و y_j هما إحدى مركّبات x و y على الترتيب). من الواضح أنّ



x' و y' عنصران من E_1 إذ أنّ:

$$f(x')=x_i^2>0,$$

$$f(y')=y_j^2>0.$$

لنبيّن أنّ القطع $[xx']$ و $[x'y']$ و $[y'y]$ محتواة في E_1 . ليكن z عنصرا من $[xx']$.

نكتب عندئذ:

$$z=tx+(1-t)x',\ \ t\in[0,1].$$

وبمقتضى العلاقة (*) السابقة يأتي:

$$f(z)=t^2 f(x)+(1-t)^2 x_i^2+2t(1-t)x_i^2>0.$$

ممّا يضمن انتماء z إلى E_1 ؛ ومنه:

$$[xx']\subset E_1.$$

وبالمثل، إذا كان z عنصرا من $[x'y']$ فإنّ:

$$f(z)=t^2x_i^2+(1-t)^2y_j^2>0.$$

إذن:

$$[x'y']\subset E_1.$$

في الأخير، نكتب من أجل كلّ عنصر z من $[y'y]$:

$$f(z)=t^2y_j^2+(1-t)^2f(y)+2t(1-t)y_j^2>0.$$

نستخلص هكذا أنّ E_1 مترابط بالأقواس.

2) من الواضح أنّ $E=E_1\cup E_2\cup E_3$ وأنّ الأجزاء E_1 و E_2 و E_3 مفتوحة وغير متقاطعة مثنى مثنى الأمر الذي يجعلها تجزئة للجزء E.

يتبيّن هكذا أنّ هذه الأجزاء تشكّل المركّبات المترابطة لـ E.

9.1 مسائل للبحث

1) 1) ليكن $\mathbb{R}_n[x]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة ذات درجة لا تفوق n ولتكن x_1، x_2، ... ، x_m أعدادا حقيقيّة متمايزة معطاة.

أ) اثبت أنّ التطبيق N المعرّف بِـ:

$$N:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}$$

$$P\mapsto N(P)=\sum_{i=1}^{m}|P(x_i)|$$

نصف نظيم على $\mathbb{R}_n[x]$.

ب) ما هو الشرط الذي ينبغي توفّره حتّى يعرّف N نظيما على $\mathbb{R}_n[x]$ ؟

2) برهن أنّ التطبيقين الحقيقيّين N_1 و N_2 المعرّفين على $\mathbb{R}_n[x]$ بِـ:

$$N_1(P)=\max_{-1\le x\le 1}|P(x)|;\ N_2(P)=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{d^kP(0)}{dx^k}\right|,$$

نظيمان على $\mathbb{R}_n[x]$.

2) من أجل كلّ عنصر $A=(a_{ij})$ من فضاء المصفوفات $\mathscr{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ ذات الصنف $n\times p$ نضع:

$$\|A\|_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2},$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n,1\le j\le p}|a_{ij}|.$$

اثبت أنّ هذه العبارات الثلاث تعرّف نظيمات على $\mathscr{M}_{n,p}(\mathrm{K})$.

3) 1) برهن أنّ التطبيق $(x,y)\mapsto\dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ يعرّف نظيما على $\mathbb{R}^2$.

2) ارسم كرة الوحدة المغلقة.

3) ليكن E فضاء نظيميّا. برهن أنّ:

1) $\forall a,b\in E\setminus\{0\}\quad \left\|\dfrac{a}{\|a\|}-\dfrac{b}{\|b\|}\right\|\le 2\dfrac{\|a-b\|}{\|a\|};$

2) $\forall a\in E\ \ \forall r\in\mathbb{R}_+^*\quad B(a,r)=\{a\}+B(0,r);$

3) $\forall a,b\in E\ \ \forall r,\rho\in\mathbb{R}_+^*\quad B(a+b,r+\rho)=B(a,r)+B(b,\rho).$

5) نعرّف على الفضاء $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ النظيمات الأربعة التالية:

$$\|f\|_1=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|,$$

$$\|f\|_2 = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)| + \int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

$$\|f\|_3 = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)| + \sup_{0\le x\le 1}|f'(x)|,$$

$$\|f\|_4 = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx.$$

قارن فيما بينها.

6) ليكن a و b عددين حقيقيّين موجبين تماما. من أجل كلّ x و y من $\mathbb{R}^2$ نضع:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

1) برهن أنّ $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ فضاء نظيميّ.

2) مثّل هندسيّا، في معلم متعامد متجانس، كرة الوحدة في $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$.

3) اثبت أنّ النظيمين $\|.\|$ و(الأساسيّ) $\|.\|_2$ متكافئان.

4) عيّن العدد الحقيقيّ الأصغر $0 < \alpha$ بحيث:

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \|u\| \le \alpha \|u\|_2$$

5) عيّن، بالمثل، العدد الحقيقيّ الأكبر $0 < \beta$ بحيث:

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \|u\| \ge \beta \|u\|_2 .$$

7) ليكن λ وسيطا حقيقيّا. من أجل كلّ (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع:

$$N_\lambda(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}.$$

1) ما هي قيم الوسيط λ التي من أجلها يكون N_λ معرّفا على $\mathbb{R}^2$.

2) جد قيم الوسيط λ التي من أجلها يعرّف N_λ نظيما على $\mathbb{R}^2$ ؟

3) بيّن أنّ الفضاء النظيميّ $(\mathbb{R}^2, N_\lambda)$ بناخيّ.

8) ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء نظيميّا و $f:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$ الدالّة المعطاة بـ:

$$f(x)=\frac{1}{\max(1,\|x\|)}x.$$

برهن أنّ f ليبشيتزيّة نسبتها 2.

9) ليكن $(E,\|.\|_1)=(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$. نعتبر التطبيق الحقيقيّ $\|.\|_{10}$ المعرّف على E بـ :

$$\|f\|_9=\int_0^1 10^x|f(x)|dx.$$

1) برهن أنّ $\|.\|_{10}$ نظيم على E.

2) برهن أنّ النظيمين $\|.\|_{10}$ و $\|.\|_1$ متكافئان.

3) هل الفضاء $(E,\|.\|_{10})$ تامّ؟ متراصّ؟ مترابط؟ علل.

10) ليكن E_1 و E_2 الفضاءين الجزئيّين من $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$، حيث E_1 مؤلّف من العناصر f المحدودة و E_2 مؤلّف من العناصر f التي تحقّق:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=0.$$

برهن أنّ E_1 و E_2 بناخيّان إذا ما زوّدناهما بالتّنظيم $\|.\|_\infty$.

11) نعتبر على الفضاء ℓ^1 المؤلّف من المتتاليات الحقيقيّة $(x_n)_n$ المحقّقة:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<+\infty,$$

تطبيقين حقيقيّين N_1 و N_2 بحيث:

$$x=(x_n)_n\mapsto N_1(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}|2x_n|,$$

$$x=(x_n)_n\mapsto N_2(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|.$$

1) تحقّق من أنّ N_1 و N_2 نظيمان.

2) ليكن $(x_n)=(x_{n_k})_{k\geq 1}$ عنصرا من ℓ^1 معرّفا بِ :

$$x_{n_k}=\begin{cases}\frac{1}{k} & ; \quad k\leq n,\\ 0 & ; \quad k>n.\end{cases}$$

احسب $N_1\left((x_n)\right)$ و $N_2\left((x_n)\right)$ واستنتج أنّ N_1 و N_2 غير متكافئين.

12) ليكن E فضاء المتتاليات الحقيقيّة ذات العناصر المعدومة ابتداء من مرتبة معيّنة. من أجل كلّ x من E نضع:

$$N_1(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|;\ N_\infty(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|.$$

1) تأكّد من أنّ هذين التطبيقين نظيمان على E.

2) نعتبر في E المتتالية $(x_p)_p$ المعرّفة بِ:

$$x_p=\left(x_p^0,x_p^1,\dots,x_p^i,\dots\right),$$

حيث:

$$x_p^i=\begin{cases}\frac{1}{1+i} & ; \quad i\neq p,\\ 0 & ; \quad i=p.\end{cases}$$

اثبت أنّ $(x_p)_p$ كوشيّة في $\left(E,N_\infty\right)$ غير أنّها ليست كذلك في $\left(E,N_1\right)$.

3) نعتبر في E متتالية أخرى $(y_p)_p$ بحيث:

$$y_p^i=\begin{cases}\frac{1}{2^i} & ; \quad i\leq p,\\ 0 & ; \quad i>p.\end{cases}$$

اثبت أنّ $(y_p)_p$ كوشيّة في $\left(E,N_1\right)$ وأنّها تبقى كذلك في $\left(E,N_\infty\right)$.

4) برهن أنّ الفضاءين $\left(E, N_1\right)$ و $\left(E, N_\infty\right)$ ليسا بناخيّين.

13) ليكن E فضاء المتتاليات العقديّة $(x_n)_n$ التي تحقّق $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

نزوّد E بالنظيم $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

1) برهن أنّ $\left(E, \|.\|\right)$ بناخيّ.

2) لتكن E_0 المجموعة الجزئيّة من E والمؤلّفة من المتتاليات $(e_n)_n$ التي تساوي جميع عناصرها صفرا ماعدا العنصر ذي الرتبة n، فهو يساوي 1. اثبت أنّ E_0 كثيف في E.

3) اثبت أنّ كلّ متتالية $(e_n)_n$ تنتمي إلى الكرة $B_f(0,1)$ وأنّه لا يمكن أن نستخرج منها أيّة متتالية كوشيّة.

4) استخلص أنّ بعد E غير منته.

14) ليكن $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ ولنضع من أجل كلّ f من E و α من $[0,1]$:

$$\| f \|_\alpha = \int_0^\alpha | f(t)| dt + (1-\alpha) \sup_{t\in[\alpha,1]} | f(t)|.$$

1) اثبت أنّه من أجل عنصر α من $[0,1]$ يكون $\|.\|_\alpha$ نظيما على E.

2) اثبت أنّه إذا كان $\alpha \geq \beta$ فإنّ:

$$\forall f \in E \ \| f \|_\alpha \leq \| f \|_\beta .$$

3) استنتج أنّ كلّ متتالية متقاربة بالنسبة للنظيم $\|.\|_\beta$ تكون كذلك بالنسبة للنظيم $\|.\|_\alpha$.

4) لتكن المجموعة:

$$\{ f \in E / f(x) = 0\} = F_x$$

حيث x من $[0,1]$.

أ. هل F_x مفتوحة في $\left(E, \|\cdot\|_\alpha\right)$ ؟

ب. احسب $d\left(1, F_x\right)$ في $\left(E, \|\cdot\|_\alpha\right)$ (يرمز 1 للدالّة الثابتة $f \equiv 1$)

ج. ماذا تستنتج ؟

د. اثبت أنّه إذا كان $x > \alpha$ كانت F_x عندئذ كثيفة في $\left(E, \|\cdot\|_\alpha\right)$، وأنّه إذا كان $x \leq \alpha$ كانت F_x مغلقة في $\left(E, \|\cdot\|_\alpha\right)$.

15) ليكن E فضاء نظيميّا حقيقيّا بعده منته و F فضاء جزئيّا، لا يطابق E. برهن أنّه لكي تكون المتمّمة مترابطة يلزم ويكفي أن يكون البعد المرافق لـ F أكبر أو يساوي 2.

16) ليكن E فضاء نظيميّا و F أحد فضاءاته الجزئيّة.

1) برهن أنّ:

$$\overset{\circ}{F} \neq \phi \quad \Rightarrow \quad E = F$$

2) نزوّد الفضاء $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ بنظيميه الأساسيّ $\|\cdot\|_\infty$. برهن أنّ مجموعتي الدوال ذات الصنف $\mathscr{C}^1$ ودوال كثيرات الحدود تشكّلان فضاءين جزئيّين داخليتاهما خاليتان.

17) ليكن $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1\left([0,1], \mathbb{R}\right) : f(0) = 0 \right\}$. من أجل كلّ f من E نضع:

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) + f'(x) \right|.$$

1) اثبت أنّ $\left(E, \|\cdot\|\right)$ فضاء نظيميّ.

2) هل النظيمان $\|.\|_\infty$ و $\|.\|$ متكافئان؟

(يمكن الاستعانة متتالية الدوال $f_n : t \mapsto f_n(t) = t^n$)

3) من أجل عنصر g من $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ حل، مستخدما طريقة تغيّر الثابت، المعادلة التفاضليّة:

$$y' + y = g.$$

4) برهن أنّه يوجد عدد $0 < k$ بحيث:

$$\forall f \in E \ \|f\|_\infty \le k\|f\|.$$

من أجل عنصر f من E نضع:

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

أ. اثبت أنّ N نظيم على E.

ب. برهن أنّ النظيمين N و $\|.\|$ متكافئان.

(يمكن إدراج التوابع $x \mapsto e^x f(x)$)

ج. هل الفضاء (E,N) بناخيّ؟

18) لتكن المجموعة:

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

من أجل كلّ f من E نضع:

$$N(f) = |f'(0)| + \|f''\|_\infty .$$

1) اثبت أنّ (E,N) فضاء نظيميّ.

2) هات متتالية توابع تتقارب نحو الصفر وفق النظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$ ولا تفعل ذلك وفق النظيم N.

3) قارن بين النظيمين $\|\cdot\|_\infty$ و N ثمّ بيّن أنّ الفضاء (E,N) بناخيّ.

19) ليكن $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ فضاء المصفوفات الحقيقيّة المربّعة $n\times n$ الشعاعيّ. نزوّده بالنظيم:

$$\|M\|=\sup_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).$$

لتكن A مصفوفة من E بحيث $\|A\|<1$ و b شعاعا من $\mathbb{R}^n$.

1) اثبت أنّ $(E,\|\cdot\|)$ بناخيّ.

2) برهن أنّ المعادلة $x=Ax+b$ تقبل حلاًّ وحيدا في $\mathbb{R}^n$.

3) استنتج أنّ المصفوفة $I-A$ قابلة للقلب. (يرمز I لمصفوفة الوحدة في E).

4) نضع:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}A^k.$$

برهن أنّ المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة في E. نرمز لنهايتها بـ $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$.

5) احسب المصفوفة $(I-A)S_n$ ثمّ استخلص العلاقة:

2

فضاء التطبيقات الخطّيّة الشعاعيّ

نستحضر في مستهلّ هذا الفصل بعضا من التعاريف الجبريّة التي يطغى استخدامها هنا، بل وفي كثير ممّا تبقّى من الفصول.

1.2 الفضاء $L(E,F)$

1.1.2 تعريف

ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$.

نقول عن تطبيق، u منطلقه E ومستقرّه F، إنّه **خطّيّ** إذا حقّق:

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

2.1.2 أمثلة

إنّ التطبيقات الموالية تطبيقات خطّيّة:

1)
$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) = ax,\ \ (a \in \mathbb{R}).$$

2)
$$u : \mathscr{C}^1\left([a,b], \mathbb{R}\right) \to \mathscr{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right)$$
$$f \mapsto u(f) = f'.$$

3)
$$u : \mathscr{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto u(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

تؤلّف التطبيقات الخطّيّة المعرّفة من E نحو F مجموعة يرمز لها بِ $L(E,F)$. من السهل، بطبيعة الحال، التأكّد من أنّ هذه الأخيرة تتمتّع ببنية فضاء شعاعيّ على K، وهذا إذا ما زُوّدت بالقانونين التركيبيّين التقليديّين:

$$(\lambda, f)\mapsto \lambda f \ \ ; \ \ (f,g)\mapsto f+g$$

حيث f و g من $L(E,F)$ و λ من K.

3.1.2 تعريف

نسمّي **شكلا خطّيّا** على فضاء شعاعيّ E (على K) كلّ تطبيق خطّيّ منطلقه E ومستقرّه K.

يترتّب عن هذا التعريف أنّ التطبيقين الواردين في المثالين (1) و(3) أعلاه شكلان خطّيّان.

نرمز لمجموعة الأشكال الخطّيّة المعرّفة على E بِ $L(E,\mathrm{K})=E^*$ ونسميّها **بِثنوي E الجبريّ**. وبالطبع، فإنّ هذا الأخير يتمتّع ببنية فضاء شعاعيّ على K كما تقدّم.

4.1.2 تعريف

إذا كان E فضاء شعاعيّا على $\mathbb{C}$ فإنّنا نسمّي **شكلا نصف خطّيّ** على E كلّ تطبيق u معرّف من E نحو $\mathbb{C}$ بحيث:

$$\forall x,y\in E \quad u(x+y)=u(x)+u(y),$$
$$\forall\ x\in E,\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C} \quad u(\lambda x)=\bar{\lambda}u(x).$$

(يشير $\bar{\lambda}$ إلى مرافق λ). لدينا على سبيل المثال:

$$u_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto u_1(z) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i},$$

$$u_2 : \mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{C}\right) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto u_2(f) = \int_a^b \overline{f(t)}\,dt,$$

يحقّقان شرطي هذا التعريف.

تعريف 5.1.2

نسمّي **نواة** تطبيق u من $L(E,F)$ المجموعة الجزئيّة من E والمؤلّفة من العناصر x التي تحقّق $u(x)=0$.

نرمز لنواة u بِـ $Ker\ u$ (مستمدّ من اللفظ الإنجليزيّ *Kernel* الذي يعني نواة) ونكتب حينئذ:

$$Ker\ \ u = \{x \in E / u(x) = 0\} = u^{-1}\left(\{0\}\right).$$

يتّضح من هذا التعريف أنّ **للنواة بنية فو مستويّ**. وبالخصوص، فإنّ $Ker\ u$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من E.

تعريف 6.1.2

نسمّي **صورة** عنصر u من $L(E,F)$ المجموعة الجزئيّة من F والمؤلّفة من العناصر y التي تتمتّع بسابقة من E. نرمز لصورة u بـ $\mathrm{Im}\,u$ نكتب:

$$\mathrm{Im}\,u = \{y \in F / \exists x \in E,\ u(x) = y\} = \{u(x) \in F,\ x \in E\}.$$

من السهل التأكّد من أ نّ $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{u}$ **فضاء شعاعيّ جزئيّ** من F.

7.1.2 تعريف

ليكن E_1، E_2، ...، E_m و F فضاءات شعاعيّة على حقل K و u تطبيقا من $E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ نحو F.

نقول عن u إنّه **متعدّد الخطّيّة** إذا كان من أجل كلّ دليل k من المجموعة $\{1, 2, ..., m\}$ وكلّ عنصر $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_m)$ من $E_1 \times E_2 \times ... \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times ... \times E_m$ يكون التطبيق الجزئيّ:

$$u_K : E_K \to F$$

$$x_k \mapsto u_k(x_k) = (a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_m),$$

خطّيًا. وبعبارة أخرى، يكون u متعدّد الخطّيّة إذا كان خطّيّا بالنسبة لكلّ متغيّر على حدة عندما تُثبّت بقيّة المتغيّرات. يكون u والحال هذه، معدوما كلّما كان أحد المتغيّرات معدوما.

وبالطبع، إذا كان $K = F$، فإنّ u يضحى شكلا متعدّد الخطّيّة.

بعد هذه اللمحة، نعمد إلى تمييز استمرار التطبيقات الخطّيّة، وهو موضوع الفقرة الموالية.

2.2 استمرار تطبيق خطّيّ

1.2.2 مبرهنة

إذا كان E و F فضاءين نظيميّين على K و u عنصرا من $L(E,F)$ فإنّه لكي يكون u مستمرّا على E يلزم ويكفي أن يوجد عدد موجب a بحيث:

$$\forall\ x \in E \quad \|u(x)\|_F \le a\|x\|_E .$$

إثبات

لزوم الشرط:

إنّ استمرار u على E يستلزم استمراره عند الصفر بالخصوص.

نكتب عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \rho > 0 \quad \|x\|_E \leq \rho \ \Rightarrow \|u(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

لنثبّت $\varepsilon = 1$ ولنضع، من أجل كلّ x غير معدوم:

$$z = \frac{\rho}{\|x\|_E} x.$$

يأتي أنّ $\rho = \|z\|_E$ وعليه:

$$\|u(z)\|_F \leq 1.$$

إذن:

$$\|u(z)\|_F = \left\| u\left(\frac{\rho}{\|x\|_E} x\right)\right\| = \frac{\rho}{\|x\|_E}\|u(x)\|_F \leq 1,$$

أي:

$$\|u(x)\|_F \leq \frac{1}{\rho}\|x\|_E.$$

يكفي عند ذلك أخذ $a = \frac{1}{\rho}$.

كفاية الشرط:

من أجل كلّ x و y من E يكون لدينا:

$$\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x - y)\|_F \leq a\|x - y\|_E.$$

يُستشفّ من هذه العلاقة أنّ u ليبشيتزيّ نسبته a؛ إذن، فهو مستمرّ (وبانتظام).

يمكن أن نصوغ ما جاء في هذه المبرهنة على المنوال التالي:

2.2.2 نتيجة

من أجل كلّ عنصر u من $L(E,F)$ تكون الدعاوى الثلاث أدناه متكافئة:

1) u مستمرّ على E،
2) u مستمرّ عند الصفر،
3) u مستمرّ بانتظام على E.

إثبات

واضح !

تشكّل التطبيقات الخطّيّة المستمرّة من $L(E,F)$ مجموعة جزئيّة نرمز لها بِـ $\mathscr{L}(E,F)$. تتمتّع هذه الأخيرة ببنية فضاء شعاعيّ جزئيّ.

وبالمثل، تؤلّف الأشكال الخطّيّة المستمرّة على E مجموعة نرمز لها بِـ $\mathscr{L}(E,\mathrm{K})=E'$، وتدعى **بِثنوي** E **الطبولوجيّ**. إنّه بطبيعة الحال، فضاء شعاعيّ جزئيّ من E^*. نشير في الأخير إلى أنّه إذا تطابق E و F وضعنا آنئذ:

$$\mathscr{L}(E)=\mathscr{L}(E,F).$$

3.2.2 أمثلة

1) $$u_1:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$$
$$x\mapsto u_1(x)=ax;\ a\in\mathbb{R}.$$

لدينا:

$$|u_1(x)|=|ax|=|a||x|;$$

إذن، u_1 مستمرّ على $\mathbb{R}$.

2)
$$u_2:\left(\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|.\|_\infty\right)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$$
$$f\mapsto u_2(f)=\int_0^1 f(t)dt.$$

لدينا:

$$|u_2(f)|=\left|\int_0^1 f(t)dt\right|\le\int_0^1|f(t)|dt\le\int_0^1\sup_{0\le x\le 1}|f(t)|dt\le\|f\|_\infty;$$

ومنه، u_2 مستمرّ.

3)
$$u_3:\left(\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|.\|_\infty\right)\to\left(\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|.\|_\infty\right)$$
$$f\mapsto u_3(f)=f'.$$

إنّ التطبيق u_3 غير مستمرّ. يكفي من أجل ذلك أن نبيّن أنّه غير مستمرّ بالتتالي. من أجل ذلك، نعتبر المتتالية:

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

من الواضح أنّ $(f_n)_n$ متتاليّة من $\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ وأنّها تتقارب نحو $f=0$ ذلك لأنّ:

$$0\le\lim_{n\to\infty}\|f_n-o\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

غير أنّ $u_3(f_n)(x)=\cos nx$ لا تتقارب نحو $u_3(f)=0$. نستخلص أنّ u_3 ليس نصف مستمرّ، وبالتالي فهو غير مستمرّ. (يمكنك اعتبار المتتالية $g_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$).

4)
$$u_4:\left(\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|.\|_\infty\right)\to\left(\mathscr{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|.\|_\infty\right)$$
$$f\mapsto u_4(f)/u_4(f)(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

لدينا:

$$\|u_4(f)\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x f(t)dt\right| \le \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x |f(t)|dt \le \|f\|_\infty \sup_{0\le x\le 1} x \le \|f\|_\infty ;$$

ومنه، u_4 مستمرّ.

يجدر بنا أن نشير، قبل الانتقال إلى المثال الأخير، أنّ التطبيقات الأربعة السابقة واضحة الخطّيّة. يتعلّق الأمر في المثال الموالي بمعالجة خطّيّة واستمرار الغمر القانونيّ s الذي يربط فضاء نظيميّا E بفضاء حاصل القسمة E/F الذي سبق تناوله. وبالضبط لدينا:

5) إذا كان E فضاء نظيميّا و F فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا منه، فإنّ الغمر القانونيّ $s:E\to E/F$:

$$x \mapsto s(x) = \overset{\bullet}{x}$$

خطّيّ ومستمرّ.

أوّلا: s خطّيّ، ذلك لأنّ:

$$\forall \lambda \in \mathrm{K}\ \forall x, y \in E \quad \begin{cases} \overset{\bullet}{\overline{x+y}} = \overset{\bullet}{x} + \overset{\bullet}{y}, & (*) \\ \overset{\bullet}{\overline{\lambda x}} = \lambda \overset{\bullet}{y}. & (**) \end{cases}$$

وبالفعل:

$$\begin{aligned} z \in \left(\overset{\bullet}{x} + \overset{\bullet}{y}\right) &\Rightarrow z = \alpha + \beta : \alpha \in \overset{\bullet}{x},\ \beta \in \overset{\bullet}{y} \\ &\Rightarrow z = \alpha + \beta : \alpha - x \in F,\ \beta - y \in F \\ &\Rightarrow (\alpha + \beta) - (x + y) \in F \\ &\Rightarrow z = \alpha + \beta \in \overset{\bullet}{\overline{x+y}}. \end{aligned}$$

وبالعكس لدينا:

$$\begin{aligned} z \in \overset{\bullet}{\overline{x+y}} &\Rightarrow z - (x + y) \in F \\ &\Rightarrow (z - x) - y \in F \ ;\ (z - y) - x \in F \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ (z-x)\in \dot{y}\ ;\ (z-y)\in \dot{x}$$
$$\Rightarrow\ z-(x+y)\in\left(\dot{x}+\dot{y}\right).$$

ولمّا كان $x+y$ عنصرا من $\dot{x}+\dot{y}$ استنتجنا أنّ z ينتمي إلى $\dot{x}+\dot{y}$.

نحصل في الأخير على أنّ (*) متوفّر.

بخصوص الشرط (**) نلاحظ أنّه يضحى واضحا إذا ما كان λ معدوما. وفعلا لدينا:

$$0\dot{x}=\dot{\overline{0x}}=\dot{0}=F.$$

لنفترض حاليا أنّ λ غير معدوم. نكتب عندئذ:

$$z\in\lambda\dot{x}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\lambda}z\in\dot{x}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\lambda}z-x\in F\ \Leftrightarrow\ z-\lambda x\in F\ \Leftrightarrow\ z\in\dot{\overline{\lambda x}}.$$

وعليه، الشرط (**) متوفّر.

ثانيّا: s مستمرّ. وبالفعل، نعلم أنّ:

$$\|s(x)\|=\left\|\dot{x}\right\|=\inf\left\{\|y\|:y\in\dot{x}\right\}=\inf\left\{\|y\|:(y-x)\in F\right\}.$$

ولما كان x يحقّق:

$$x-x=0\in F,$$

أمكن الحصول على:

$$\|s(x)\|=\left\|\dot{x}\right\|\le\|x\|,$$

وهو ما يضمن الاستمرار المنشود.

4.2.2 قضية

إذا كان E فضاء نظيميّا ذا بعد منته، فإنّه من أجل كلّ فضاء نظيميّ F يكون:

$$\mathscr{L}(E,F)=L(E,F),$$

(أي أنّ كلّ تطبيق خطّيّ معرّف على E مستمرّ.)

إثبات

ليكن $(e_i)_{1\le i\le P}$ الأساس القانونيّ لِ E المزوّد بالنظيم الأساسيّ $\|\cdot\|_1$ و u تطبيقا خطّيّا من E نحو فضاء نظيميّ F. نكتب عندئذ:

$$\|u(x)\| = \left\| u\left(\sum_{i=1}^{P} x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{P} x_i u(e_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{P} |x_i|\,|u(e_i)|.$$

وبوضع $\max\limits_{1\le i\le P}\|u(e_i)\| = M$ تأتي العلاقة الضامنة للاستمرار:

$$\|u(x)\| \le M\,\|x\|_1 .$$

5.2.2 نتيجة

إذا كان E ذا بعد منته كان $E^* = E'$.

3.2 نظيم الفضاء $\mathscr{L}(E,F)$

1.3.2 قضية

إذا كان E و F فضاءين نظيميّين على حقل K و u عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$، كانت الأعداد الأربعة التالية عندئذ متساوية:

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = a,$$

$$\sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = b,$$

$$\sup_{\|x\|_E \le 1} \|u(x)\|_F = c,$$

$$\inf\left\{k>0 / \|u(x)\|_F \le k\,\|x\|_E\right\} = d.$$

إثبات

من أجل كلّ عنصر غير معدوم x نضع $z = \frac{1}{\|x\|} x$. يمكن الحصول عندئذ على:

(1)

$$a = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \left\| u\left(\frac{1}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F = \sup_{\|z\|_E = 1} \|u(z)\|_F = b.$$

ولدينا إنشاء:

(2)
$$b \leq c.$$

نلاحظ، من جهة أخرى، أنّه لمّا كان u مستمرّا أمكننا أن نكتب، من أجل كلّ k يحقّق $\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$:

$$\|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|u(x)\|_F \leq k.$$

وعليه:

$$c = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F \leq k.$$

ومنه:

(3)
$$c \leq d.$$

لدينا في الأخير:

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq a \quad \Rightarrow \quad \|u(x)\|_F \leq a \|x\|_E .$$

ينجم عن هذه العلاقة أنّ a ينتمي إلى المجموعة:

$$\left\{ k > 0 / \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E \right\},$$

ممّا يؤدّي إلى:

(4) $$d \leq a.$$

يأتي في الخلاصة أنّ الأعداد الأربعة المذكورة تحقّق:

$$a = b \leq c \leq d \leq a;$$

وهو ما يضمن تساويها.

2.3.2 قضية . تعريف

إنّ التطبيق $N : \mathscr{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ المعرّف بِـ:

$$u \mapsto N(u) = \|u\| = a = b = c = d$$

يعرّف نظيما على $\mathscr{L}(E,F)$.

إثبات

لنضع:

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

لدينا:

1) شرط الفصل:

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = 0 \iff \sup_{E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \iff \|u(x)\|_F = 0,\ \forall x \in E \setminus \{0\}$$

$$\iff u(x) = 0,\ \forall x \in E \setminus \{0\} \iff u \equiv 0.$$

(لاحظ أنّ $u(0) = 0$ من خطّيّة u.)

2) شرط التجانس:

$$\forall \lambda \in \mathrm{K} \ \ \forall u \in \mathscr{L}(E,F)$$

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_{\mathscr{L}(E,F)} &= \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\|(\lambda u)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda u(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{|\lambda| \| u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\| u(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= |\lambda| \|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}.\end{aligned}$$

3) شرط المتباينة المثلّثيّة:

$$\forall u, v \in \mathscr{L}(E,F)$$

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{\mathscr{L}(E,F)} &= \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\|(u+v)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)+v(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &\leq \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\| u(x)\|_F + \| v(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &\leq \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\| u(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\| v(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &\leq \|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} + \|v\|_{\mathscr{L}(E,F)}.\end{aligned}$$

خلاصة

$\|.\|_{\mathscr{L}(E,F)}$ نظيم على $\mathscr{L}(E,F)$.

3.3.2 أمثلة

لنحسب نظيمات التطبيقات الخطّيّة التالية:

1) $u : \left(\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\right) \to (\mathbb{R}, |.|)$

$$f \mapsto u(f) = \int_0^1 f(t)dt,$$

علمنا سابقا أنّ $|u(f)|\leq \|f\|_{\infty}$. ومنه $\|u\|\leq 1$. وإذا أخذنا $f_0=1$ وجدنا أنّ f_0 ينتمي إلى الكرة $B_f(0,1)$ من $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ وأنّ $|u(f_0)|=1$. نستخلص إذن أنّ $\|u\|=1$.

2) نعتبر التطبيق الخطّيّ u الوارد في المثال (4) من (3.2.1). لدينا سابقا:

$$\forall f\in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \quad \|u(f)\|_{\infty}\leq \|f\|_{\infty}.$$

ومنه، $\|u\|\leq 1$. وبأخذ $f_0=1$، نجد $u(f_0)(x)=x$. وعليه:

$$\|u(f_0)\|=1\leq \|u\|.$$

نستخلص إذن $\|u\|=1$.

لا شكّ أنّه لم يفتك أنّنا تمكنّا في المثالين السابقين من إيجاد عنصر f_0 (في كلّ مرّة) يدرك عنده الحدّ الأعلى المعرّف للنظيم. إنّ المثال الموالي يبيّن أنّ **الأمور ليست كذلك على الدوام.**

3) نزوّد الفضاء $E=\mathscr{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ بالنظيم $\|.\|_{\infty}$ ونعتبر التطبيق:

$$u:E\to(\mathbb{R},|.|)$$
$$f\mapsto u(f)=\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

نترك لك أن توضّح أنّ u عنصر من E'. نعتزم هنا، حساب نظيم u وإبراز أنّه لا يوجد عنصر f_0 من الكرة $B_f(0,1)$ يتحقّق به:

$$|L(f_0)|=\|u\|.$$

لدينا في البداية:

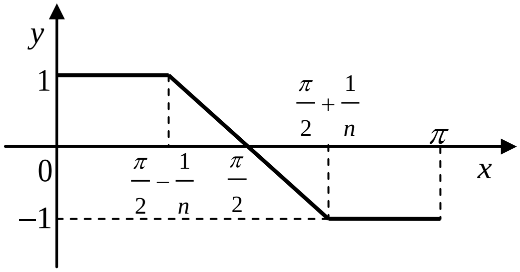
$$\forall f\in E \quad |u(f)|\leq \int_0^{\pi}|f(x)||\cos x|\,dx\leq \|f\|_{\infty}\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx;$$

ومنه:

$$\|u\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|u(f)\| \le \int_0^\pi |\cos x|\, dx = 2.$$

لنبيّن أنّ $\|u\| \ge 2$. من أجل ذلك نعتبر المتتالية $(f_n)_n$ التالي تعريفها:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \\ -nx + \frac{n}{2}\pi & ; \; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \\ -1 & ; \; \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \le x \le \pi. \end{cases}$$



من الواضح أنّ $(f_n)_n$ متتالية من E تحقّق:

$$|u(f_n)| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \cos x \; dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} f_n(x) \cos x \; dx + \int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi} -\cos x \, dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \cos x \, dx + n \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi} \cos x \, dx \right|$$

$$= \left| \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} + n \left[\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \sin x - \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi} \right|$$

$$= n \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \right|.$$

على ضوء مبرهنة التزايدات المنتهية يأتي:

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{2}{n}\left|\sin(c_n)\right|;\ \ c_n\in\left]\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right[.$$

وعليه:

$$\lim_{n\to\infty}\left|u(f_n)\right|=2\lim_{n\to\infty}\sin(c_n)=2\sin\left(\lim_{n\to\infty}c_n\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

ولكن لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \left|u(f_n)\right|\le\|u\|\|f_n\|=\|u\|.$$

إذن:

$$\|u\|\ge\lim_{n\to\infty}\left|u(f_n)\right|=2.$$

نحصل هكذا على أنّ $\|u\|=2$.

لنبيّن أخيرا أنّه لا يوجد عنصر f_0 من الكرة $B_f(0,1)$ بحيث:

$$\left|u(f_0)\right|=\int_0^\pi\left|\cos x\right|dx=2=\|u\|.$$

نستعين بالاستدلال بالخلف. لنفترض إذن أنّ الأمر خلاف ما أعلنّا عنه.

نكتب عندئذ:

$$\int_0^\pi\left(f_0(x)\cos x-\left|\cos x\right|\right)dx=0.$$

نلاحظ أنّ إشارة العبارة $f_0(x)\cos x-\left|\cos x\right|$ هي إشارة العبارة:

$$\cos x\left(f_0(x)-\frac{\left|\cos x\right|}{\cos x}\right),$$

(حيث $x\neq\frac{\pi}{2}$ بطبيعة الحال). نميّز عندئذ حالتين:

1) $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos x\left[f_0(x)-1\right]\le 0$

ذلك لأنّ $\cos x < 0$ و $|f_0(x)| \leq 1$ فرضا.

2) $\cos x\left[f_0(x)+1\right] \leq 0, \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

نستخلص من كلّ هذا أنّ:

$$f_0(x)\cos x - |\cos x| \leq 0, \ \forall x[0,\pi].$$

وعليه، يأتي:

$$\int_0^{\pi}\left(f_0(x)\cos x - |\cos x|\right)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0(x)\cos x - |\cos x| = 0.$$

ومنه:

$$f_0(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2};$$

أي أنّ:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{اختياري} & ;\ x = \frac{\pi}{2}, \\ -1 & ;\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

من الواضح أنّ f_0 غير مستمرّ عند $\frac{\pi}{2}$ وهو ما يجعله ملفوظا من E ويحدث التناقض المنشود.

4.3.2 ملحوظات

1) نستقي ممّا سبق أنّ $\|u\|$ هو أصغر عدد يجعل التطبيق u مستمرّا.

فكلّما كان u مستمرّا كتبنا:

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|.$$

2) u مستمرّ على E $\Leftrightarrow$ u محدود على كرة الوحدة $B_f(0,1)$.

(لاحظ أهميّة هذه النتيجة وأنت لا يخفى عليك أنّ المحدوديّة لا تستلزم الاستمرار !)

3) إذا كان u عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$ وكان u معدوما على كرة الوحدة ظلّ u كذلك على E كلّه.

4) إذا تطابق عنصران من $\mathscr{L}(E,F)$ على $B_f(0,1)$ تطابقا على E كلّه.

قبل الانتقال إلي القضية الموالية نشير إلى أنّنا نسمّي **فومستويّا تآلفيّا** في فضاء نظيميّ E كلّ مجموعة من الشكل:

$$H=\{x\in E:f(x)=\alpha\}=f^{-1}(\{\alpha\}),$$

حيث f عنصر غير معدوم من E^* و α عدد حقيقيّ. نقول عندئذ إنّ H فومستويّ معادلته $[f=\alpha]$.

5.3.2 قضية

يكون الفومستويّ $H=[f=\alpha]$ من فضاء نظيميّ E^* مغلقا، إذا وفقط إذا كان f مستمرّا.

إثبات

إنّ كفاية الشرط واضحة، ذلك لأنّ H مغلق لكونه صورة عكسيّة لمغلق وفق تطبيق مستمرّ.

لزوم الشرط:

لنفترض أنّ H مغلق. يترتّب عن ذلك أنّ C_EH مفتوح غير خال (لكون f غير معدوم). ليكن x_0 عنصرا من C_EH ولنفترض، على سبيل المثال، أنّ $f(x_0)<\alpha$. مادام C_EH مفتوحا فإنّه يوجد عدد $0<r$ بحيث:

$$B(x_0,r)\subset C_E H.$$

لنبيّن أنّ:

$$\forall x \in B(x_0,r) \;\; f(x)<\alpha. \qquad (*)$$

لنفترض، أنّه من أجل عنصر معيّن x_1 من الكرة $B(x_0,r)$ لدينا:

$$f(x_1)>\alpha$$

مادامت الكرة $B(x_0,r)$ محدّبة فإنّه من أجل كلّ عدد t من $[0,1]$ يكون $x_t=(1-t)x_1+tx_0$ منتميا إليها ممّا يضمن:

$$f(x_t)\neq\alpha \quad \forall t\in[0,1].$$

غير أنّنا نلاحظ أنّه من أجل:

$$t=\frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)},$$

يكون لدينا:

$$f(x_t)=\alpha,$$

وهذا غير ممكن، ممّا ينهي إثبات (*).

يترتّب عن العلاقة (*) أنّ:

$$f(x_0+rz)=f(x_0)+rf(z)<\alpha, \quad \forall z\in B(0,1).$$

ومنه:

$$f(z)<\frac{1}{r}(\alpha-f(x_0)).$$

وعليه:

$$\|f\|\leq\frac{1}{r}(\alpha-f(x_0)).$$

إذن، f مستمرّ.

من هذه القضية نستخلص توّا هذه النتيجة الهامّة والواضحة:

6.3.2 نتيجة

يكون عنصر u من E^* مستمرّا إذا وفقط إذا كانت نواته مغلقة.

7.3.2 قضية

إذا كان E و F و G ثلاثة فضاءات نظيميّة على K وكان u عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$ و v عنصرا من $\mathscr{L}(F,G)$ فإنّ:

1) $v\circ u$ يضحى عنصرا من $\mathscr{L}(E,G)$ ،

2) $\|v\circ u\| \leq \|u\|\|v\|,$

وإذا كان u عنصرا من $\mathscr{L}(E)$ فإنّه:

3) $\forall n\in \mathbb{N}^* \quad \|u^n\| = \|\underbrace{u\circ u\circ u\circ \ldots \circ u}_{n}\| \leq \|u\|^n .$

إثبات

1) أ. $v\circ u$ خطّيّ:

$$\forall \lambda,\mu\in \mathrm{K} \quad \forall x,y\in E \quad (v\circ u)(\lambda x+\mu y) = v\big(u(\lambda x+\mu y)\big)$$
$$= v\big(\lambda u(x)+\mu u(y)\big)$$
$$= \lambda(v\circ u)(x)+\mu(v\circ u)(y).$$

ب. $v\circ u$ مستمرّ:

$$\forall x\in E \quad \|(v\circ u)(x)\|_G = \|v\big(u(x)\big)\|_G \leq \|v\|_{\mathscr{L}(F,G)}\|u(x)\|_F$$
$$\leq \|v\|_{\mathscr{L}(F,G)}\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|x\|_E .$$

2) نتيجة مباشرة من (1).

3) نستخدم البرهان بالتدريج. العلاقة مساواة بيّنة من أجل $n=1$. ومن (2) نحصل من أجل $n=2$ على:

$$\|u^2\| \leq \|u\|\|u\| = \|u\|^2 .$$

إذا افترضنا صحّة العلاقة إلى غاية رتبة ما k كتبنا من أجل الرتبة الموالية:

$$\left\|u^{k+1}\right\| = \left\|u^k \circ u\right\| \leq \left\|u^k\right\| \left\|u\right\| \leq \left\|u\right\|^k \left\|u\right\| = \left\|u\right\|^{k+1}.$$

8.3.2 مبرهنة

إذا كان F بناخيّا أضحى $\mathscr{L}(E,F)$ كذلك.

إثبات

لتكن $(u_n)_n$ متتالية كوشيّة من $\mathscr{L}(E,F)$. نكتب عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \forall p,q \in \mathbb{N} \ : \ p > q \geq n_0 \ \Rightarrow \ \left\|u_p - u_q\right\| \leq \varepsilon;$$

ومن أجل كلّ x من $B_f(0,1)$ يكون لدينا:

$$p > q \geq n_0 \ \Rightarrow \ \left\|u_p(x) - u_q(x)\right\| \leq \varepsilon.$$

وباستخدام التحاكي $x \mapsto \frac{1}{\|x\|} x$ يمكننا الحصول على:

$$p > q \geq n_0 \ \Rightarrow \ \left\|u_p(x) - u_q(x)\right\| \leq \varepsilon, \ \forall x \in E.$$

نستخلص، إذن، أنّه من أجل كلّ x من E تكون المتتالية $(u_n(x))_n$ كوشيّة في F. ولمّا كان هذا الأخير بناخيّا أضحت $(u_n(x))_n$ متقاربة فيه. لنضع حينئذ:

$$\forall x \in E \ \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x),$$

ولنبيّن أنّ الدالّة النهاويّة u تنتمي إلى $\mathscr{L}(E,F)$.

1) u خطّيّ: وفعلا، من أجل كلّ x و y من E وكلّ α و β من K لدينا:

$$u(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \alpha u_n(x) + \lim_{n\to\infty} \beta u_n(y)$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} u_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} u_n(y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

2) u مستمرّ: إذا ثبّتنا $q \geq n_0$ حصلنا، من أجل كلّ x من $B_f(0,1)$ وكلّ دليل $p \geq n_0$، على:

$$\left| \|u_p(x)\| - \|u(x)\| \right| \leq \|u_p(x) - u(x)\| \leq \varepsilon.$$

ومنه:

$$\|u(x)\| \leq \varepsilon + \|u_p(x)\|;$$

وعليه:

$$\|u\| \leq \varepsilon + \|u_p\|;$$

وهو ما يضمن استمرار u المطلوب.

3) بقي أخيرا أن نبيّن أنّ u نهاية للمتتالية $(u_n)_n$ في $\mathscr{L}(E,F)$.

لدينا سابقا:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon,\;\; \forall x \in B_f(0,1);$$

وعليه:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow \|u_n - u\| \leq \varepsilon,$$

وهو المبتغى.

إذا استندنا إلى هذه المبرهنة تبيّن لنا على التوّ:

9.3.2 نتيجة

الثنوي الطبولوجيّ E' بناخيّ على الدوام.

إثبات

وفعلا، $F = \mathrm{K}$ بناخيّ.

يمكن بطبيعة الحال، أن نعمّم بشيء من السهولة النتائج السابقة إلى التطبيقات المتعدّدة الخطّيّة. في هذا المضمار لدينا:

10.3.2 مبرهنة

ليكن $\prod_{i=1}^{P} E_i = E$ فضاء الجداء الملحق بعائلة منتهية $(E_i)_{1\le i\le p}$ من فضاءات نظيميّة على K وليكن u تطبيقا متعدّد الخطّيّة معرّفا من E نحو فضاء نظيميّ F (على K) تكون عندئذ الميزات الثلاث التالية متكافئة.

1) u مستمرّ عند كلّ نقطة من E.

2) u مستمرّ عند الصفر.

3) u محدود على جداءات كرات الوحدة $\|x_i\| \le 1$، $1 \le i \le p$.

إثبات

1) ⇐ 2)

واضح !

2) ⇐ 3)

إنّ استمرار u عند الصفر يستلزم أنّ الصورة العكسيّة لكرة الوحدة في F جوار للصفر في E. وعليه، يوجد عدد موجب δ بحيث:

$$\underset{1\le i\le p}{\|x_i\|_{E_i}} \le \delta \;\Rightarrow\; \|u(x_1, x_2, ..., x_p)\|_F \le 1.$$

ومن أجل $y_i = \frac{1}{\delta} x_i$ نجد:

$$\underset{1\le i\le p}{\|y_i\|_{E_i}} = \frac{1}{\delta} \underset{1\le i\le p}{\|y_i\|_{E_i}} \le 1 \Rightarrow \|u(x_1, x_2, ..., x_p)\|_F = \|u(\delta y_1, \delta y_2, ..., \delta y_p)\|_F$$

$$= \delta^p \|u(y_1, y_2, ..., y_p)\|_F \le 1.$$

ومنه:

$$\underset{1\le i\le p}{\|y_i\|_{E_i}\le 1} \;\Rightarrow\; \|u(y_1,y_2,...,y_p)\|_F \le \frac{1}{\delta^p}.$$

3) $\Leftarrow$ 1)

ينجرّ عن الفرضية (3) وجود عدد موجب M بحيث:

$$\underset{1\le i\le p}{\|x_i\|_{E_i}\le 1} \;\Rightarrow\; \|u(x_1,x_2,...,x_p)\|_F \le M.$$

وإذا كانت $(x_i)_{1\le i\le p}$ كيفيّة تحصّلنا (باستخدام تحاك ملائم) على:

$$\|u(x_1,x_2,...,x_p)\|_F \le M\,\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}...\|x_p\|_{E_p}. \qquad (*)$$

لنبيّن أنّ هذه العلاقة تستوجب استمرار u على E. لنعتبر بغية ذلك نقطة كيفيّة $a=(a_1,a_2,...,a_p)$ من E. يمكننا عندئذ أن نكتب:

$$u(x_1,x_2,...,x_p)-u(a_1,a_2,...,a_p)=u(x_1-a_1,x_2,...,x_p)+$$
$$+u(a_1,x_2-a_2,...,x_p)+...+u(a_1,a_2,...,a_{p-1},x_p-a_p)$$

وهو أمر ناتج من كون u خطّيّا بالنسبة إلى كلّ متغيّر على حدة. وعليه، وبمقتضى (*) يأتي:

$$\|u(x_1,x_2,...,x_p)-u(a_1,a_2,...,a_p)\|_F \le M\,\|x_1-a_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}...\|x_p\|_{E_p}+$$
$$+M\,\|x_2-a_2\|_{E_2}\|a_1\|_{E_1}\|x_3\|_{E_3}...\|x_p\|_{E_p}+...$$
$$...+M\,\|x_p-a_p\|_{E_p}\|a_1\|_{E_1}\|a_2\|_{E_2}...\|a_{p-1}\|_{E_{p-1}}.$$

لنفترض أنّ:

$$\|x_i-a_i\|_{E_i}\le\varepsilon \quad \forall i=1,2,...,p.$$

يأتي عندئذ أنّ:

$$\left|\|x_i\|_{E_i}-\|a_i\|_{E_i}\right|\le\|x_i-a_i\|_{E_i}\le\varepsilon \quad \forall i=1,2,...,p.$$

ومنه:

$$\|x_i\|_{E_i} \le \|a_i\|_{E_i} + \varepsilon \quad \forall\, i = 1, 2, ..., p.$$

وإذا ما وضعنا $A = \max\limits_{1\le i\le p} \|a_i\|_{E_i} + \varepsilon$ حصلنا على:

$$\|u(x_1, x_2, ..., x_p) - u(a_1, a_2, ..., a_p)\|_F \le p\, M\, \varepsilon\, A^{p-1}.$$

نستخلص أنّ $u(x_1, x_2, ..., x_p)$ يؤول إلى $u(a_1, a_2, ..., a_p)$ كلّما آل x_1 إلى a_1 و x_2 إلى a_2 و ... و x_p إلى a_p ؛ وهو ما يعني أنّ u مستمرّ عند a .

قبل مغادرة هذه المبرهنة، نشير إلى أنّنا نرمز، كما هو الشأن في السابق، بِـ $\mathscr{L}\left(\prod\limits_{i=1}^{p} E_i, F\right)$ للفضاء الشعاعيّ المؤلّف من التطبيقات المتعدّدة الخطّيّة المعرّفة والمستمرّة من $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i = E$ نحو فضاء نظيميّ F يُزوّد $\mathscr{L}(E, F)$ بنظيم التقارب المنتظم على كرة الوحدة:

$$\|u\| = \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ 1\le i\le p}} \|u(x_1, ..., x_p)\|.$$

(تحقّق من أنّ هذه العبارة تعرّف نظيما.)

11.3.2 مثالان

1) ليكن E و F و G ثلاثة فضاءات نظيميّة على حقل K . إنّ التطبيق المعرّف بِـ:

$$\varphi : \mathscr{L}(F, G) \times \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E, G)$$

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = g \circ f$$

ثنائي الخطّيّة ولدينا:

$$\|\varphi(f, g)\| = \|g \circ f\| \le \|f\| \|g\|;$$

ومنه:

$$\|\varphi\| \leq 1.$$

2) إنّ الفضاءين $\mathscr{L}(E\times F,G)$ و $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$ متقايسان.

لنوضّح ذلك. نعتبر التطبيق φ المعرّف على هذا النحو:

ليكن u عنصرا من $\mathscr{L}(E\times F,G)$. من أجل كلّ عنصر مثبّت x من E يكون التطبيق:

$$\begin{aligned} u_x &: F \to G \\ & y \mapsto u_x(y) = u(x,y) \end{aligned}$$

خطّيًا ومستمرًا من F نحو G، إذ لدينا:

$$\|u_x(y)\|_G = \|u(x,y)\|_G \leq \|u\|\,\|x\|_E\,\|y\|_E\,.$$

ومنه:

$$\|u_x\| \leq \|u\|\,\|x\|_E\,.$$

بهذا يكون التطبيق:

$$\begin{aligned} v &: E \to \mathscr{L}(F,G) \\ & x \mapsto u_x \end{aligned}$$

خطّيًا ومستمرًا على E، إذ لدينا:

$$\|v(x)\| = \|u_x\| \leq \|u\|\,\|x\|_E\,.$$

ونستخلص بالإضافة إلي ذلك أنّ:

$$\|v\| \leq \|u\|.$$

نكون في الخلاصة، قد أرفقنا كلّ عنصر u من $\mathscr{L}(E\times F,G)$ بعنصر v من $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$. لنضع:

$$\varphi : u \mapsto \varphi(u) = v.$$

إنّ التطبيق φ معرّف جيّدا وخطّيّ ومستمرّ، إذ لدينا:

$$\|\varphi(u)\| = \|v\| \leq \|u\|.$$

وأكثر من ذلك لدينا:

$$\|\varphi\| \leq 1.$$

نقوم، بالعكس، بتعريف تطبيق:

$$\psi : \mathscr{L}\left(E, \mathscr{L}(F,G)\right) \to \mathscr{L}(E\times F,G).$$

ليكن g عنصرا من $\mathscr{L}\left(E, \mathscr{L}(F,G)\right)$. من أجل كلّ عنصر x من E يكون التطبيق $g(x)$ خطّيّا ومستمرّا من F نحو G. وعليه، ومهما يكن x من E و y من F، يكون التطبيق:

$$f : E\times F \to G$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \left(g(x)\right)(y),$$

ثنائي الخطّيّة. وعلاوة على ذلك لدينا:

$$\|g(x)\| \leq \|g\| \, \|x\|_E .$$

وعليه:

$$\| f(x,y)\| \leq \|g(x)\| \, \|y\|_F \leq \|g\| \, \|x\|_E \, \|y\|_F .$$

وهو ما يدلّ على أنّ f مستمرّ وأنّ:

$$\| f \| \leq \|g\|.$$

هكذا نكون قد أرفقنا كلّ عنصر g من $\mathscr{L}\left(E, \mathscr{L}(F,G)\right)$ بعنصر f من $\mathscr{L}\left(E\times F,G\right)$. إذا وضعنا $\psi(g) = f$ أتانا على التوّ أنّ ψ خطّيّ ومستمرّ (ذلك لأنّ $\|\psi(g)\| = \| f \| \leq \|g\|$) وأنّ $\|\psi\| \leq 1$.

من الواضح في الأخير، أنّ التطبيقين φ و ψ يشكّل أحدهما عكسا للآخر. هكذا يكون التطبيق $\psi \circ \varphi$ تطبيقا مطابقا على الفضاء $\mathscr{L}\left(E\times F,G\right)$؛ وعليه فإنّ نظيمه يساوي 1. نكتب عندئذ:

$$1 = \|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\| \, \|\varphi\|.$$

ولمّا كان $\|\varphi\|\leq 1$ و $\|\psi\|\leq 1$ استخلصنا أنّ $\|\varphi\|=1$ و $\|\psi\|=1$. وعليه، فإنّ التطبيق φ تقايس. إنّه المبتغى.

4.2 مبرهنات أساسيّة

نودّ التطرّق هنا، إلى بعض المبرهنات الأساسيّة التي تشكّل، إلى جانب تلك التي أريناكها من قبل ((عد إلى [2]))، رصيدا ذا وزن ثقيل في التحليل الدالّيّ. نستهلّها بتلك المتعلّقة بمفهوم تمديد تطبيق خطّيّ. لقد سبق أن برهنّا خلال مرورنا بالفضاءات المتريّة أنّه إذا كان A جزءا كثيفا من فضاء طبولوجيّ E وكان f تطبيقا مستمرّا من A نحو فضاء متريّ تام فإنّه يوجد تطبيق مستمرّ وحيد g يمدّد f إلى E كلّه. إنّ إعادة صوغ هذه النتيجة في إطارنا الحالي تعطي ما يلي.

1.4.2 مبرهنة

ليكن E فضاء نظيميّا و A فضاء جزئيّا كثيفا فيه. وليكن u تطبيقا خطّيّا مستمرّا معرّفا من A نحو فضاء بناخيّ F. يوجد عندئذ تطبيق وحيد v من $\mathscr{L}(E,F)$ بحيث:

$$v_{/A}=u \text{ ؛ } \|v\|=\|u\|$$

إثبات

من أجل كلّ عنصر x من E نضع:

$$v(x)=\lim_{n\to\infty}u(x_n),$$

حيث $(x_n)_n$ متتالية من A تتقارب نحو x. لنبيّن أنّ التطبيق v المعرّف بهذه الشاكلة يحقّق شروط المبرهنة.

أ. v خطّيّ:

ليكن x و y عنصرين من E. توجد بحكم كثافة A متتاليتان $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ من A تتقاربان نحو x و y على التوالي. من أجل كلّ α و β من K وكلّ n من ℕ لدينا:

$$\begin{aligned} v(\alpha x+\beta y) &= \lim_{n\to\infty} u(\alpha x_n+\beta y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha u(x_n)+\beta u(y_n)\right) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} u(x_n)+\beta \lim_{n\to\infty} u(y_n)=\alpha v(x)+\beta v(y), \end{aligned}$$

ب. v مستمرّ:

لدينا تبعا لاستمرار u:

$$\|u(x_n)\|_F \le \|u\|\,\|x_n\|_E .$$

ولمّا كان النظيم تطبيقا مستمرّا كتبنا:

$$\|v(x)\|_F=\left\|\lim_{n\to\infty} u(x_n)\right\|_F=\lim_{n\to\infty}\|u(x_n)\|_F \le \|u\|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E=\|u\|\|x\|_E .$$

ممّا يدلّ على أنّ v مستمرّ وأنّ:

$$\|v\|\le\|u\|.$$

ج. $v_{/A}=u$ واضح إنشاء. نستخلص أنّ:

$$\|u\|\le\|v\|.$$

ومنه، $\|u\|=\|v\|$.

د. لنفترض أن التمديد v ليس وحيدا. يوجد عندئذ تطبيق آخر w من $\mathscr{L}(E,F)$ يذعن لنفس القيود الموضوعة. يوجد تبعا لهذا عنصر x_0 في E كما هو موصوف في البند (أ) بحيث:

$$\begin{aligned} 0\neq w(x_0)-v(x_0) &= w\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)-v\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} w(x_n)-\lim_{n\to\infty} v(x_n)=\lim_{n\to\infty} u(x_n)-\lim_{n\to\infty} u(x_n)=0; \end{aligned}$$

وهذا غير ممكن.

2.4.2 نتيجتان

1) الخاصيّة أعلاه تظلّ صحيحة إذا تعلّق الأمر بتمديد شكل خطّيّ.
2) إذا كان u شكلا خطّيّا مستمرّا ومعدوما على جزء كثيف A من E فإنّ u يكون معدوما على E كلّه.

3.4.2 مبرهنة (التشاكل لبناخ)

إذا كان u تطبيقا خطّيّا مستمرّا وتقابليّا من فضاء بناخيّ E نحو فضاء بناخيّ F كان u^{-1} عندئذ مستمرّا.

إثبات

نسلم بهذه المبرهنة. نستخلص منها أنّ u مستتشاكل. وعليه فهو تطبيق مفتوح. واستنادا إلى ذلك، كثيرا ما تعرف المبرهنة الحاضرة باسم مبرهنة مبرهنة التطبيق المفتوح (لِبناخ).

4.4.2 نتيجة

إذا كان E فضاء بناخيّا بالنسبة إلى نظيمين N_1 و N_2 وكان التطبيق المطابق $id_E:(E,N_1)\to(E,N_2)$ مستمرّا فإنّ النظيمين يضحيان متكافئين.

إثبات

وفعلا، فإنّ التطبيق المذكور خطّيّ؛ ولمّا كان مستمرّا فإنّه يوجد عدد $0<r_1$ بحيث:

$$N_2(x)\le r_1N_1(x);$$

ولكن id_E تقابليّ أيضا؛ وعليه، فإنّ المبرهنة السابقة تضمن استمرار التطبيق العكسيّ $id_E=id_E^{-1}$. يوجد، إذن، عدد $0<r_2$ بحيث:

نستخلص في الأخير، أنّ:

$$\frac{1}{r_1}N_2(x) \leq N_1(x) \leq r_2 N_2(x).$$

يتبيّن هكذا أنّ التطبيق المطابق id_E مستشاكل. إذن، الزظيمان المعنيان متكافئان.

5.4.2 **مبرهنة** (البيان المغلق لبناخ)

ليكن E و F فضاءين بناخيّين و u تطبيقا من $L(E,F)$ بيانه Γ_u.
يكون لدينا عندئذ:

$$\Gamma_u \text{ مغلق } \Leftrightarrow \quad u \in \mathscr{L}(E,F)$$

إثبات

لا بأس قبل الشروع في البرهان أن نعيد قراءة النتيجة المحمولة في المبرهنة على هذا المنوال:

يكون تطبيق خطّيّ u مستمرّا إذا وفقط إذا كان بيانه مغلقا.

إنّ لزوم الشرط واضح، ذلك أنّ u مستمرّ ومستقرّه (F) منفصل. (إنّها نتيجة سبق أن صادفناها **ويتمتّع بها كلّ تطبيق مستمرّ مستقرّه منفصل**).

كفاية الشرط

لنزوّد الفضاء $E \times F$ بأحد النظيمات الأساسيّة الثلاثة المعرّفة على الجداء. يضحى بها $E \times F$ بناخيّا. ولمّا كان البيان:

$$\Gamma_u = \{(x,y) \in E \times F : y = u(x)\},$$

مغلقا فيه غدا (هذا البيان) تامّا. نلاحظ من جهة أخرى، أنّ الإسقاط:

$$\pi_E:(x,y)\mapsto \pi_E(x,y)=x,$$

خطّيّ ومستمرّ وغامر من $E\times F$ نحو E. مقصوره π_{E/Γ_u} على Γ_u متباين. وعليه، يكون هذا المقصور π_{E/Γ_u} خطّيّا وتقابليّا ومستمرّا من الفضاء البناخيّ Γ_u نحو الفضاء البناخيّ E. وبمقتضى مبرهنة التطبيق المفتوح يكون التطبيق العكسيّ $\left(\pi_{E/\Gamma_u}\right)^{-1}$ مستمرّا من E نحو Γ_u. ولكن هذا التطبيق العكسيّ معرّف كما يلي:

$$\left(\pi_{E/\Gamma_u}\right)^{-1}:E\to\Gamma_u$$
$$x\mapsto\left(x,u(x)\right),$$

إذن، استمراره يستلزم استمرار مركّبتيه اللتين من ضمنهما تطبيقنا u. إنّه المطلوب.

6.4.2 قضية

ليكن $(\varphi_i)_{i\in I}$ عائلة من دوال نصف مستمرّة من الأدنى من فضاء بناخيّ E نحو $]-\infty,+\infty]$. برهن أنّ القيد:

$$\forall\, x\in E\ \sup_{i\in I}\varphi_i(x)<+\infty,$$

يضمن وجود مفتوح غير خال Ω من E تتحقّق عليه العلاقة:

$$\exists M>0:\ \sup_{i\in I}\varphi_i\le M<+\infty.$$

إثبات

لنضع $\psi=\sup_{i\in I}\varphi_i$. من الواضح أنّ ψ نصف مستمرّ من الأدنى مثل كلّ عنصر φ_i من العائلة المعتبرة. وبما أنّه لا يأخذ القيمة $+\infty$ فإنّه يمكننا أن نضع من أجل كلّ عدد طبيعيّ n:

$$E_n=\{x\in E:\psi(x)\leq n\}=\psi^{-1}([-\infty,n]).$$

وعليه:

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n.$$

الأجزاء E_n مغلقة تبعا لكون ψ نصف مستمرّ من الأدنى. لو كانت داخلية كلّ E_n خالية لكانت داخلية E ذاته خالية. غير أنّ هذا مستبعد لكون E بيريّا. نستخلص أنّه يوجد جزء E_{n_0} يتمتّع بداخلية غير خالية.

لنضع $\Omega=\mathring{E}_{n_0}$. يتّضح أنّ Ω مفتوح غير خال، تكون جميع قيم ψ عليه محدودة من الأعلى بـ $n_0=M$. إنّه الغاية.

7.4.2 مبرهنة (بناخ . شتاينهوس[1])

ليكن E و F فضاءين بناخيّين و $(u_n)_n$ متتالية من $\mathscr{L}(E,F)$.

إذا كانت $(u_n(x))_n$ (x من E) متتالية محدودة، كانت المتتالية $(\|u_n\|)_n$ محدودة من الأعلى بثابت واحد.

إثبات

نقوم بتطبيق القضية السابقة على متتالية الدوال:

$$x\mapsto\|u_n(x)\|,\ n\in\mathbb{N}.$$

إنّ النتيجة المذكورة تضمن وجود مفتوح Ω من E وعدد $0<\delta$ بحيث:

$$\sup_{x\in\Omega,\ n\in\mathbb{N}}\|u_n(x)\|<\delta.$$

ولمّا كان Ω مفتوحا تأكّد احتواؤه لكرة $B(a,r)$. نلاحظ أنّه إذا كان x عنصرا من $B(0,r)$ فإنّ $x+a$ يضحى عنصرا من $B(a,r)$. وعليه يأتي:

---

14. Hugo Dyonizy Steinhaus: رياضيّاتيّ بولونيّ. ولد في 14 جانفي 1887 بجاسلو بروكلاف. تركّزت أبحاثه على التحليل 1972 فيفري 25 (بولونيا الحالية) ومات في الدالّيّ وتطبيقاته المختلفة ونظرية الاحتمالات.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \|u_n(x)\|=\|u_n(x+a-a)\|=\|u_n(x+a)-u_n(a)\|$$
$$\leq\|u_n(x+a)\|+\|u_n(a)\|\leq 2\delta.$$

إذا ما وضعنا $x'=\frac{1}{r}x$ حصلنا على أنّ x' من الكرة $B_f(0,1)$ وأنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \|u_n(x)\|=\|u_n(r\,x')\|=r\,\|u_n(x')\|\leq 2\delta.$$

نستخلص إذن:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \|u_n\|\leq\frac{2\delta}{r}.$$

وهو المطلوب.

8.4.2 نتيجة

إذا كان E و F فضاءين بناخيّين و $(u_n)_n$ متتالية من $\mathscr{L}(E,F)$ بحيث:

$$\forall x\in E\ \lim_{n\to\infty} u_n(x)=u(x),$$

فإنّه يكون لدينا عندئذ:

1) u خطّيّ ومستمرّ.

2) $(u_n)_n$ متقاربة بانتظام نحو u في كلّ جزء متراصّ.

3) إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية متقاربة نحو x في E أضحت $(u_n(x_n))_n$ حينئذ متقاربة نحو $u(x)$ في F.

إثبات

1) إنّ u واضح الخطّيّة. أمّا بخصوص استمراره فإنّنا نلاحظ في البداية أنّ المتتالية $(u_n(x))_n$ محدودة لكونها متقاربة. وطبقا للمبرهنة أعلاه يوجد عدد بحيث:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|=M<+\infty.$$

نخلص من هذا إلى أنّ المتتالية $(u_n)_n$ متساوية الاستمرار. وعليه، تضحى النهاية u مستمرّة.

2) نتيجة مباشرة لمبرهنة أسكولي[1] . أرزيلا[2].

3) لقد جاء في (1) أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \le M.$$

وعليه، يأتي:

$$\begin{aligned}\|u(x)-u_n(x_n)\| &\le \|u(x)-u_n(x)\| + \|u_n(x)-u_n(x_n)\| \\ &\le \|(u-u_n)(x)\| + \|u_n(x-x_n)\| \\ &\le \|u-u_n\|\ \|x\|_E + M\,\|x-x_n\|_E .\end{aligned}$$

وبما أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\| = 0;\ \lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_E = 0,$$

إذن:

$$\lim_{n\to\infty}\|u(x)-u_n(x_n)\| = 0;$$

وهو المطلوب.

لا شكّ أنّك قد لاحظت أنّ هذه النتيجة عبّرت عن استمرار نهاية متتالية دوال مستمرّة بالنسبة إلى ا لتقارب البسيط؛ وهو أمر نادرا ما يحدث في الإطار العامّ، بمعنى أنّ **التقارب البسيط لمتتالية دوال مستمرّة لا يضمن استمرار النهاية.**

9.4.2 مبرهنة (هان[1] . بناخ)

---

15. Giulio Ascoli: رياضيّاتيّ إيطاليّ. ولد في 20 جانفي 1843 بترياست ومات في 12 جويلية 1896 بمايلاند. له مساهمة ثريّة في نظرية الدوال ذات متغيّر حقيقيّ وفي سلاسل فوريي.

16. Cesare Arzelà: رياضيّاتيّ إيطاليّ. ولد في 6 مارس 1847 بسانتو ستيفانو دي ماقره ومات بها في 15 مارس 1912. يقرّ له بأعماله في متتاليات الدوال.

أ. الشكل التحليليّ الحقيقيّ

إذا كان E فضاء شعاعيّا على $\mathbb{R}$،

و p نصف نظيم على E،

و G فضاء شعاعيّا جزئيّا من E،

و u_0 شكلا خطّيّا على G بحيث:

$$\forall x \in G \ \ u_0(x) \leq p(x),$$

فإنّه يوجد شكل خطّيّ u على E بحيث $u/_G = u_0$ و:

$$\forall x \in E \ u(x) \leq p(x).$$

إثبات

نقوم بذلك على مرحلتين.

المرحلة الأولى:

ننشئ عائلة $\mathscr{F} = \left((G_i, u_i)\right)_i$ من تمديدات u_i لِـ u_0 إلى G_i المحتوية G ثمّ نعمد إلي ترتيبها على هذا النحو:

$$(G_i, u_i) \subseteq (G_j, u_j) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G_i \subseteq G_j, \\ u_j/_{G_i} = u_i. \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

17. Hans Hahn: رياضيّاتيّ نمساويّ. ولد في 27 سبتمبر 1879 بفيينا ومات بها في 24 جويلية 1934. يعتبر أحد رواد نظرية المجموعات والتحليل الدالّيّ. له أيضا مساهمة هامّة في حساب التغيّرات.

نطبّق فيها مسلمة زورن[1] على العائلة $\mathscr{F}$.

نستهلّ المرحلة الأولى بالإشارة إلى أنّ $\mathscr{F}$ غير خاليّة لضمّها (G,u_0). ومن جهة أخرى، يستلزم كون $G \neq E$ وجود عنصر y_0 من E لا ينتمي إلى G. لنضع:

$$G_1 = [G, y_0] = G \oplus \mathbb{R} y_0,$$

الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ المولّد بواسطة G و y_0 أي أنّ:

$$G_1 = \{z \in E : z = x + ty_0;\ t \in \mathbb{R}, x \in G\}.$$

إنشاء u_1:

لو أنّ u_1 مدّد u_0 إلى G_1 محقّقا الشرط:

$$u_1(x) \le p(x), \quad \forall x \in G_1, \qquad (*)$$

لكتبنا عندئذ:

$$u_1(x+ty_0) = u_0(x) + tu_1(y_0).$$

وإذا وضعنا $u_1(y_0) = a$ جاء توا:

$$u_1(z) = u_0(x) + ta.$$

وعليه، فإنّ تحديد a يعيّن u_1 تعيينا جيّدا. إنّ احترام الشرط (*) يتكفّل بذلك. لدينا:

$$u_1(z) = u_0(x) + ta \le p(x+ty_0).$$

إذا كان $t=0$ فالنتيجة واضحة غير أنّها لا تنبّئ عن a.

وإذا كان $t>0$ فالشرط (*) يضحى:

$$a \le p\left(\frac{x}{t} + y_0\right) - u_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

وإذا كان $t<0$ أعطى الشرط ذاته:

---

18. Max Zorn: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 6 جوان 1906 بكريفيلد ومات في 9 مارس 1993 ببلومينڤتون (بإنديانا، الولايات المتحدة الأمريكية). بحث في الجبر ونظرية الزمر والتحليل. ذاع صيته بمسلّمته التي تعدّ أداة قويّة في نظرية المجموعات.

$$a \geq -p\left(\frac{x}{|t|} - y_0\right) + u_0\left(\frac{x}{|t|}\right).$$

لنبيّن أنّ عددا a يحقّق هذين الشرطين مضمون الوجود. نلاحظ قصد ذلك أنّه من أجل كلّ y' و y'' من G يكون لدينا:

$$u_0(y'') - u_0(y') = u_0(y'' - y') \leq p(y'' - y') = p((y'' + y_0) - (y' - y_0)) \leq p(y'' + y_0) + p(-y' - y_0).$$

وعليه يأتي:

$$-u_0(y'') + p(y'' + y_0) \geq -u_0(y') - p(-y' - y_0).$$

لنضع:

$$\alpha = \inf_{y'' \in G}\left(-u_0(y'') + p(y'' + y_0)\right),$$
$$\beta = \sup_{y' \in G}\left(-u_0(y') - p(-y' - y_0)\right).$$

لمّا كان العنصران y' و y'' كيفيّين في G نتج عن ذلك أنّ $\alpha \geq \beta$. فإذا أُختير a من المجال $[\beta, \alpha]$ أصبح u_1 معرّفا جيّدا ومحقّقا الشروط الموضوعة.

هكذا، يمكن بمتابعة هذا المنهج، أن نستكمل شيئا فشيئا إنشاء العائلة $\mathscr{F}$.

نشرع حاليا في المرحلة الثانية. لقد أنشأنا العائلة $\mathscr{F} = ((G_i, u_i))_i$ التي تحقّق عناصرها:

$$\begin{cases} G \subseteq G_i, \\ u_{i/G} = u_0, \\ u_i(x) \leq p(x) \quad \forall\ x \in G_i. \end{cases}$$

نعرّف على $\mathscr{F}$ علاقة الترتيب التالية:

$$(G_i, u_i) \subseteq (G_j, u_j) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G_i \subseteq G_j, \\ u_{j/G_i} = u_i. \end{cases}$$

من السهل التأكّد من أنّ هذه العلاقة تجعل $\mathscr{F}$ مرتّبة واستقرائيّة↓. إنّها تقبل إذن، وبموجب مسلّمة زورن↓↓، عنصرا أعظميّا نرمز له بِ $\left(\bigcup_i G_i, u_i\right)$ بحيث:

$$u(x) = u_i(x) \quad \forall\, x \in G_i,$$

$$u(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in \bigcup_i G_i.$$

بعد هذا، يحقّ لنا أن نجزم بأنّ $\bigcup_i G_i = E$. فلو كان الأمر خلاف ذلك لوجد عنصر y_0 من E لا ينتمي إلى $\bigcup_i G_i$. نضع حينذاك:

$$\tilde{E} = \bigcup_i G_i \oplus \mathbb{R}\, y_0,$$

ونعيد البرهان من أوّله. يوصلنا ذلك إلى أنّ u يقبل تمديدا $\tilde{u}$ إلى $\tilde{E}$ وهو ما يتناقض مع كون $\left(\bigcup_i G_i, u_i\right)$ أعظميّا.

ب. الشكل التحليلي العقديّ

إذا كان E فضاء شعاعيّا على $\mathbb{R}$،

و p نصف نظيم على E،

و G فضاء شعاعيّا جزئيّا من E،

و u_0 شكلا خطّيّا على G بحيث:

$$|u_0(x)| \leq p(x), \ \forall x \in G$$

فإنّه يوجد شكل خطّيّ u على E بحيث:

$$u/_G = u_0,$$

↓ لكلّ جزء مرتّب ترتيبا جيّدا منها حادّ أعلى. ⟺ مجموعة استقرائية

↓↓ مسلّمة زورن: لكلّ مجموعة مرتّبة واستقرائيّة وغير خالية عنصر أعظميّ.

$$|u(x)| \le p(x),\ \forall x \in E.$$

إثبات

لنضع من أجل كلّ x من G:

$$v_0(x) = \operatorname{Re} u_0(x).$$

يأتي أنّ v_0 شكل خطّيّ على G المعتبر فضاء شعاعيّا جزئيّا من الفضاء الشعاعيّ E على □. نلاحظ أنّ:

$$v_0(ix) = \operatorname{Re} u_0(ix) = \operatorname{Re} i u_0(x) = -\operatorname{Im} u_0(x).$$

وعليه:

$$u_0(x) = \operatorname{Re} u_0(x) + i \operatorname{Im} u_0(x) = v_0(x) - i v_0(ix).$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$v_0(x) \le |v_0(x)| \le |u_0(x)| \le p(x) \quad \forall x \in G.$$

يتّضح من ذلك أنّ v_0 يحقّق شروط الحالة السابقة من مبرهنتنا. يوجد إذن شكل v خطّيّ، على □، (أي بسلميّات حقيقيّة) من E نحو □، يمدّد v_0 إلى E كلّه ويحقّق:

$$v(x) \le p(x) \quad \forall x \in E.$$

لنضع، الآن:

$$u(x) = v(x) - i v(ix).$$

يأتي أنّ u خطّيّ على □. وفعلا، يكفي من أجل ذلك أن نتأكّد من أنّ:

$$\forall x \in E \quad u(ix) = i u(x).$$

لدينا:

$$u(ix) = v(ix) - i v(-x) = v(ix) + i v(x) = i\big(v(x) - i v(ix)\big) = i u(x).$$

يتبيّن، هكذا، أنّ u شكل خطّيّ، يمدّد u_0 إلى E العقديّ. بقي أن نتأكّد من أنّ:

$$|u(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in E.$$

من أجل ذلك نضع:

$$u(x) = re^{i\theta} \quad \left(r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right).$$

نستخلص عندئذ:

$$|u(x)| = r = u(x)e^{-i\theta} = \mathrm{Re}\left(u(x)e^{-i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(u\left(xe^{-i\theta}\right)\right)$$
$$= v\left(xe^{-i\theta}\right) \leq p\left(xe^{-i\theta}\right) = p(x).$$

وهو المطلوب

10.4.2 ملحوظة

من السهل أن نرى أنّ المبرهنة (1.4.2) السابقة نتيجة مباشرة لمبرهنتنا الحاضرة. لنبيّن ذلك في الحالة الحقيقيّة. نحتفظ بنفس ترميزة المبرهنة المذكورة ونضع:

$$p(x) = \|u\| \|x\|_E .$$

إنّ p نصف نظيم. وعليه، فإنّ u يقبل تمديدا v يحقّق:

$$v(x) \leq p(x) = \|u\| \|x\|_E ,$$
$$v(-x) \leq p(-x) = \|u\| \|x\|_E .$$

ومنه:

$$-v(x) \leq \|u\| \|x\|_E ,$$

أي أنّ:

$$v(x) \geq -\|u\| \|x\|_E .$$

إذن:

$$|v(x)| \leq \|u\| \|x\|_E ;$$

وهو ما يستدعي المتباينة:

$$\|v\| \leq \|u\|.$$

ولمّا كان v تمديدا لِـ u حصلنا أخيرا على:

$$\|v\| = \|u\|.$$

11.4.2 نتيجة

ليكن M فضاء شعاعيّا جزئيّا من فضاء نظيميّ E. فلكي يكون M كثيفا في E يلزم ويكفي أن يكون الشرط الموالي متوفّرا:

$$\forall u \in E' \quad u/_M = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

إثبات

لزوم الشرط:

ما دام u مستمرّا فإنّ النواة $Ker\, u$ تضحى مغلقة. فإذا كان $u/_M = 0$ جاءنا:

$$M \subseteq Ker\, u.$$

ومنه:

$$\overline{M} \subseteq Ker\, u.$$

ولمّا كان $E = \overline{M}$ نتج $u \equiv 0$.

كفاية الشرط:

لنفترض أنّ الملاصقة $\overline{M}$ لا تطابق E. يوجد عندئذ عنصر x_0 من E لا ينتمي إلى $\overline{M}$ نعتبر تبعا لذلك الفضاء الجزئيّ:

$$\left[\overline{M}, x_0\right] = \overline{M} \oplus \mathrm{K} x_0 = F,$$

والتطبيق:

$$u : F \to \mathrm{K}$$

$$x \mapsto u(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x \in \overline{M}, \\ 1 \ ; & x = x_0. \end{cases}$$

من المؤكّد أنّ u شكل خطّيّ مستمرّ ذلك لأنّ $Ker\,u=\overline{M}$ مغلق في F يمكن عند ذلك تمديده بِـ $\tilde{u}$ من E' بحيث $\tilde{u}/_{M}\equiv 0$ و $\tilde{u}(x_0)=1\neq 0$. وهذا يتنافى مع الفرض.

12.4.2 نتيجة

ليكن E فضاء نظيميّا. من أجل كلّ عنصرين مختلفين x_1 و x_2 من E يوجد شكل خطّيّ مستمرّ f يفصلهما: $f(x_1)\neq f(x_2)$.

إثبات

إنّ الأمر، في الواقع، يمكن ردّه إلى أنّه، من أجل كلّ عنصر غير معدوم x_0، يوجد f من E' بحيث $f(x_0)\neq 0$. من أجل ذلك ننشئ على الفضاء الجزئيّ $F=[x_0]$ شكلا خطّيّا مستمرّا f_0 بوضع $\lambda=f_0(\lambda x_0)$ ثمّ نقوم بتمديد هذا الشكل (مستخدمين مبرهنة هان. بناخ) إلى الفضاء E كلّه. وفي الخلاصة، نكون قد حصلنا على شكل خطّيّ ومستمرّ f يحقّق الشرط:

$$1=f(x_0)\neq 0.$$

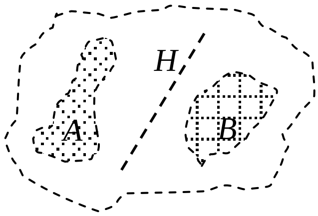
نختتم هذه الفقرة والفصل معا بسرد مبرهنة هان. بناخ في شكلها الهندسيّ دون برهانها.

13.4.2 تعريف

ليكن A و B جزأين من فضاء نظيميّ E. نقول عن الفومستوي H ذي المعادلة $[f=\alpha]$ (أي $H=\{x\in E: f(x)=\alpha\}$) إنّه يفصل A و B **بالمعنى الواسع** إذا توفّر ما يلي:

$$f(x)\geq\alpha\quad\forall x\in A,$$
$$f(x)\leq\alpha\quad\forall x\in B.$$

ونقول عن H إنّه يفصل A و B **بالمعنى الضيّق** إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث:



$$f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in A,$$
$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

يعبّر عن الفصل المذكور، هندسيّا، عن تواجد A في جهة و B في الجهة المقابلة بالنسبة إلى H. بعد هذا نضع:

14.4.2 مبرهنة (هان . بناخ)

أ. **الشكل الهندسيّ الأوّل**

ليكن A و B جزأين محدّبين غير خاليين وغير متقاطعين من فضاء نظيميّ E. ولنفترض أنّ A مفتوح. يوجد عندئذ فومستوي مغلق يفصل A و B بالمعنى الواسع.

ب. **الشكل الهندسيّ الثاني**

ليكن A و B جزأين محدّبين غير خاليين وغير متقاطعين من فضاء نظيميّ E. ولنفترض أنّ A مغلق و B متراصّ. يوجد عندئذ فومستوي مغلق يفصل A و B بالمعنى الضيّق.

15.4.2 نتيجة

إذا كان G فضاء شعاعيّا جزئيّا من فضاء نظيميّ E بحيث $E \neq \overline{G}$ فإنّه يوجد عندئذ f من $E' \setminus \{0\}$ بحيث:

$$f(x) = 0, \ \forall x \in G.$$

إثبات

ليكن x_0 عنصرا من E لا ينتمي إلى $\overline{G}$ تضمن المبرهنة أعلاه في شكلها الثاني والمطبّقة على $\overline{G}=A$ و $\{x_0\}=B$ وجود عنصر f من $E'\setminus\{0\}$ وعدد حقيقيّ a بحيث يفصل الفومستوي $H=[f=a]$ الجزأين $\overline{G}$ و $\{x_0\}$ بالمعنى الضيّق. يكون لدينا عندئذ:

$$f(x)<a<f(x_0)\ \forall x\in G;$$

ولمّا كان G فضاء شعاعيّا جزئيّا استنتجنا أنّ:

$$f(x)=0\ \ \forall x\in G.$$

5.2 مسائل محلولة

1) ليكن $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$ و $\varphi:E\to F$ تطبيقا معرّفا بـ :

$$\varphi(f)(x)=\int_0^x f(t)dt,\ f\in E.$$

1) اثبت أنّ التطبيق $\varphi\circ\varphi=\varphi^2$ خطّيّ ومستمرّ.

2) احسب النظيم $\|\varphi^2\|$.

3) اثبت أنّ φ^2 يقبل نقطة صامدة وحيدة.

2) ليكن الفضاء $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|$.

1) اثبت أنّ الشكل الخطّيّ $f\in E\mapsto f(0)$ ليس مستمرّا.

2) ماذا يمكن استخلاصه إزاء الفضاء الجزئيّ المؤلّف من الدوال المعدومة عند الصفر؟

3) ليكن E الجزء من $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ المؤلّف من الدوال f بحيث يكون المقدار $(1+x^2)|f(x)|$ محدودا على $\mathbb{R}$. نضع:

$$N(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|.$$

1) تأكّد من أنّ N نظيم على E.

2) اثبت استمرار الشكل الخطّيّ $L:E\to\mathbb{R}$:

$$f\mapsto L(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx.$$

3) احسب نظيمه.

4) ليكن $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بنظيم التقارب المنتظم $\|.\|_\infty$ و h عددا حقيقيّا موجبا تماما. نعرّف تطبيقا u_h من E نحو $\mathbb{R}$ بِـ:

$$f\mapsto u_h f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx.$$

1) اثبت أنّ u_h عنصر من E'.

2) اثبت أنّه من أجل كلّ عنصر f من E يكون لدينا:

$$\lim_{h\to 0}u_h(f)=f(0).$$

5) ليكن E فضاء نظيميّا. برهن أنّه لا يمكن إيجاد تطبيقين u و v في $\mathscr{L}(E)$ بحيث:

$$u\circ v-v\circ u=id_E.$$

6) ليكن E و F فضاءين نظيميّين على $\mathbb{R}$ و u تطبيقا من E نحو F بحيث:

1) $\forall x,y\in E\quad u(x+y)=u(x)+u(y),$

2) u محدود على كرة الوحدة.

برهن عندئذ أنّ u ينتمي إلى $\mathscr{L}(E,F)$.

7) ليكن $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بنظيم التقارب المنتظم $\|.\|_\infty$. نضع:

$$F=\left\{f\in E: \int_0^1 f(t)dt=0\right\}.$$

1) اثبت أنّ لكلّ دالّة f من E دالّة أصليّة وحيدة T_f من F.

2) اثبت أنّ التطبيق $f\mapsto T(f)=T_f$، عنصر من $\mathscr{L}(E,F)$.

3) احسب $\|T\|$.

8) ليكن $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$ و φ تطبيقا حقيقيّا معرّفا على E بـِ :

$$f\mapsto \varphi(f)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx,$$

حيث g تطبيق من E لا ينعدم إلاّ عددا منتهيا من المرّات على المجال $[0,1]$.

1) بيّن أنّ φ عنصر من الثنوي E' واحسب نظيمه.

2) هل يوجد عنصر f من E يدرك φ عنده نظيمه ؟

9) ليكن E و F فضاءين بناخيّين و u عنصرا من $L(E,F)$.

نفترض أنّه من أجل كلّ متتالية $(x_n)_n$ متقاربة نحو 0 في E بحيث تكون المتتالية $(u(x_n))_n$ متقاربة في F، يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n)=0.$$

اثبت عندئذ أنّ التطبيق u مستمرّ.

10) ليكن E فضاء نظيميّا و $u:E\to\mathbb{R}$ شكلا خطّيّا غير معدوم. نضع:

$$H = Ker u.$$

1) برهن أنّه إذا كان u مستمرّا حصلنا حينئذ على:

$$d(a,H) = \frac{|u(a)|}{\|u\|},$$

أيّا كان a في E.

2) لنفترض بالعكس أنّ H مغلق. برهن عندئذ أنّ $0 < d(a,H)$ كلّما كان a من $E \setminus H$ ثمّ استخلص أنّ u مستمرّ وأنّ نظيمه لا يتعدّى المقدار $\frac{|u(a)|}{d(a,H)}$.

11) ليكن $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بنظيم التقارب المنتظم $\|.\|_\infty$. ولتكن $(T_n)_n$ متتالية من تطبيقات معرّفة من E نحو $\mathbb{R}$ بِ:

$$f \mapsto T_n(f) = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1) بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، يكون T_n عنصرا من E'.

2) احسب $\|T_n\|$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

3) اثبت أنّ:

$$\forall f \in E \quad \lim_{n\to\infty} T_n(f) = T(f) = f(0).$$

4) استخلص أنّ T مستمرّ واحسب نظيمه.

نزوّد الفضاء E فيما يلي بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_1$.

5) بيّن أنّه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$ فإنّ $\|T_n\| \leq n$.

6) باستخدام الدالّة الحقيقيّة f :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le x\le \frac{1}{2n},\\ -2nx+2 & ; \quad \frac{1}{2n}\le x\le \frac{1}{n},\\ 0 & ; \quad \frac{1}{n}\le x\le 1,\end{cases}$$

اثبت أنّ:

$$\forall\ n\in \mathbb{N}^{*},\quad \|T_n\|=n.$$

7) استخلص أنّ المتتالية $(T_n)_n$ ليست متساوية الاستمرار.

8) تأكّد من أنّ:

$$\forall\ f\in E\ \lim_{n\to\infty} T_n(f)=T(f)=f(0),$$

ثمّ برهن أنّ T ليس مستمرّا، أي:

$$\forall\ c>0\ \exists\ f_0\in E:|T(f_0)|>c\|f_0\|_1 .$$

(إرشاد: يمكن استعمال الدالّة:

$$f(x)=\begin{cases}n & ; \quad x=0,\\ -n^2x+n & ; \quad 0\le x\le \frac{1}{n},\\ 0 & ; \quad \frac{1}{n}\le x\le 1.\end{cases}$$

9) ما هي النتيجة التي يبدو أنّها انتقضت بهذا ؟ ما الذي أدّى إلى ذلك في نظرك ؟

6.2 حلول

1) 1) إنّ التطبيق φ^2 خطّيّ لكون φ كذلك (لا تعف نفسك من التأكّد من

ذلك.) و φ^2 مستمرّ أيضا إذ أنّ:

$$\left\|\varphi^2(f)\right\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}\left|\varphi^2(f)(x)\right| = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x\left(\int_0^t f(s)ds\right)dt\right|$$
$$\le \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x\left(\int_0^t |f(s)|ds\right)dt \le \|f\|_\infty \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x tdt = \frac{1}{2}\|f\|_\infty .$$

2) نستخلص ممّا سبق أنّ:

$$\left\|\varphi^2\right\| \le \frac{1}{2}.$$

وإذا اعتبرنا الدالّة $f_0 \equiv 1$ وجدناها في كرة الوحدة المغلقة وتحقّق:

$$\left\|\varphi^2(f_0)\right\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}\left|\varphi^2(f_0)(x)\right| = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x\left(\int_0^t ds\right)dt\right| = \frac{1}{2} \le \left\|\varphi^2\right\|.$$

هكذا نجد:

$$\left\|\varphi^2\right\| = \frac{1}{2}.$$

3) يتّضح من الحساب أعلاه أنّ φ^2 دالّة مقلّصة. وإذا أضفنا إلى ذلك أنّ E بناخيّ تبيّن أنّ φ^2 تتمتّع بنقطة صامدة وحيدة.

2) 1) لنرمز للشكل الخطّيّ المعطى بـ u. لنعتبر المتتالية $(f_n)_n$ المعرّفة على النحو:

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n(1-nt) \ ; \ 0 \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ 0 \qquad\qquad ; \ \dfrac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$$

لدينا $\|f_n\| = 1$ و $u(f_n) = 2n$. وعليه:

$$\frac{|u(f_n)|}{\|f_n\|} = 2n.$$

هذه النسبة ليست محدودة؛ إذن، u ليس مستمرّا.

2) لنضع:

$$H=\{f\in E: f(0)=0\}.$$

يأتي أنّ $H=Ker u$. ولمّا كان u غير مستمرّ تبيّن أنّ H ليس مغلقا.

3) 1) يمكن دونما عناء التحقّق من توفّر شروط النظيم في N.

2) من أجل كلّ عدد حقيقيّ x لدينا:

$$(1+x^2)|f(x)|\le N(f).$$

وعليه:

$$|u(f)|\le\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx\le\int_{\mathbb{R}}\frac{N(f)}{1+x^2}dx\le N(f)\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}dx\le\pi N(f).$$

إذن، u مستمرّ.

3) من أجل كلّ f من E لدينا:

$$\|u\|=\sup_{N(f)\le1}|u(f)|\le\pi.$$

من جهة أخرى، نحصل من أجل $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ على $N(f)=1$ و:

$$u(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi.$$

نستخلص أنّ $\|u\|=\pi$.

4) 1) التطبيق u_h واضح الخطّيّة. إنّها خاصية موروثة عن التكامل.

يكفي بغية انتمائه إلى الثنوي E' أن يكون مستمرّا. من أجل ذلك لدينا:

$$|u_h(f)|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx\right|\le\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\|f\|_{\infty}\int_{0}^{1}\frac{h}{h^{2}+x^{2}}dx=\left(\frac{2}{\pi}Arctg\frac{1}{h}\right)\|f\|_{\infty}.$$

إنّه المبتغى.

2) ليكن f عنصرا من E. نكتب بشأنه:

$$\left|u_h(f)-f(0)\right|=\left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{h}{h^{2}+x^{2}}f(x)\,dx-f(0)\right|.$$

باللجوء إلى التبديل $\frac{x}{h}=t$ يأتي:

$$\left|u_h(f)-f(0)\right|=\left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{1}{1+t^{2}}\big(f(th)-f(0)\big)dt+\frac{2}{\pi}f(0)\left(\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{dt}{1+t^{2}}-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\max_{0\leq t\leq \frac{1}{h}}\left|f(th)-f(0)\right|\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{dt}{1+t^{2}}+\frac{2}{\pi}\left|f(0)\right|\left|\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{dt}{1+t^{2}}-\frac{\pi}{2}\right|$$

$$\leq\left(\frac{2}{\pi}Arctg\frac{1}{h}\right)\left(\max_{0\leq t\leq \frac{1}{h}}\left|f(th)-f(0)\right|\right)+\frac{2}{\pi}\left|f(0)\right|\left|Arctg\frac{1}{h}-\frac{\pi}{2}\right|.$$

وبما أنّ:

$$\lim_{h\to 0}\left|f(th)-f(0)\right|=0;\ \lim_{h\to 0^{+}}Arctg\frac{1}{h}=\frac{\pi}{2},$$

إذن:

$$\lim_{h\to 0}\left|u_h(f)-f(0)\right|=0.$$

وعليه:

$$\lim_{h\to 0}u_h(f)=f(0).$$

5) لنفترض أنّه يوجد u و v من $\mathscr{L}(E)$ بحيث:

$$u\circ v-v\circ u=uv-vu=id_E.$$

يترتّب عن ذلك أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad uv^n - v^n u = nv^{n-1}. \qquad (*)$$

لنثبت هذه العلاقة بالتدريج. لدينا فرضا:

$$uv - vu = id_E;$$

أي أنّ العلاقة $(*)$ صحيحة من أجل $n=1$. لنفترض الآن أنّ:

$$uv^{n-1} - v^{n-1}u = (n-1)v^{n-2}.$$

نكتب عندئذ:

$$uv^n = \left(uv^{n-1}\right)v\left(v^{n-1}u + (n-1)v^{n-2}\right)v = v^{n-1}uv + (n-1)v^{n-1}.$$

وبما أنّ $uv = vu + id_E$ إذن:

$$uv^n = v^{n-1}\left(uv + id_E\right) + (n-1)v^{n-1} = v^n u + nv^{n-1}.$$

ومنه:

$$uv^n - v^n u = nv^{n-1},$$

وهو ما ينهي تبرير العلاقة $(*)$.

نلاحظ من جهة أخرى، أنّ استمرار u و v^{n-1} يقتضي:

$$\left\|nv^{n-1}\right\| = n\left\|v^{n-1}\right\|\left\|v^n u + uv^n\right\| \le \|u\|\,\left\|v^n\right\| + \|u\|\,\left\|v^n\right\| \le 2\|u\|\,\|v\|\,\left\|v^{n-1}\right\|.$$

ومنه:

$$\left(2\|u\|\,\|v\| - n\right)\left\|v^{n-1}\right\| \ge 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

إذا تمعنّا في هذه العلاقة تبيّن لنا وجود مرتبة غير معدومة بحيث يكون لدينا انطلاقا منها $\left\|v^{n-1}\right\| = 0$. لنرمز بـ p لأصغر الأعداد الطبيعيّة التي تحقّق $\left\|v^p\right\| = 0$. يأتي تبعا لذلك أنّ:

$$uv^p - v^p u = pv^{p-1} = 0.$$

وعليه، $v^{p-1}=0$ ؛ وهو ما يتناقض مع تعريف p . إذن، لا يوجد تطبيقان u و v من $\mathscr{L}(E)$ ، يحققّان العلاقة المذكورة.

6) المطلوب إثبات أنّ f خطّيّ ومستمرّ. يكفي بخصوص خطّيّة f أن نبرهن أنّ:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

نقوم بهذا على المراحل التالية:

أ. إذا كان $\lambda = n$ عنصرا من $\mathbb{N}$ فإنّنا نحصل بالتدريج على:

$$f(nx)=f(\underbrace{x+x+...+x}_{n})=\underbrace{f(x)+f(x)+...+f(x)}_{n}=n\,f(x).$$

ب. لدينا:

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0).$$

ومنه $f(0)=0$. نستخلص من هذه النتيجة أنّ:

$$\forall x\in E \quad f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)=0.$$

ومنه:

$$\forall x\in E \quad f(-x)=-f(x),$$

وهو ما يسمح بالحصول على:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in E \quad f(-nx)=-n\,f(x).$$

ج. نخلص من (ب) إلى أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{Z} \quad \forall x\in E \quad f(nx)=n\,f(x).$$

د. لدينا:

$$\forall \lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in E \quad f\left(\frac{p}{q}x\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q}x + \frac{1}{q}x + \ldots + \frac{1}{q}x}_{p}\right)$$

$$= p\, f\left(\frac{1}{q}x\right).$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ:

$$f(x) = f\left(\frac{q}{q}x\right) = q\, f\left(\frac{1}{q}x\right).$$

ومنه:

$$f\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{1}{q} f(x);$$

وعليه:

$$f(\lambda x) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q} f(x) = \lambda f(x).$$

قبل الانتقال إلى الخطوة الأخيرة من خطّيّة f نتوقّف قليلا لتبيان أنّ هذا الأخير مستمرّ. نقوم بذلك بالتناقض. لنفترض أنّ f غير مستمرّ عند الصفر. نكتب عندئذ:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \alpha > 0\ \exists x_\alpha \in E : 0 < \|x_\alpha\|_E < \alpha \wedge \|f(x_\alpha)\|_F > \varepsilon_0.$$

وإذا أخذنا $\alpha = \frac{1}{n}$ حصلنا على متتالية $(x_n)_n$ تتقارب نحو الصفر وتحقّق:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|f(x_n)\|_F > \varepsilon_0.$$

ولمّا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_n\|_E \neq 0,$$

تبيّن عندئذ وجود متتالية $(\lambda_n)_n$ في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\frac{1}{2} \le \lambda_n \|x_n\|_E \le 1.$$

هذه العلاقة الأخيرة تقتضي:

$$\lambda_n x_n \in B_f(0,1).$$

ولكن:

$$\| f(\lambda_n x_n)\|_F = \lambda_n \| f(x_n)\|_F > \lambda_n \varepsilon_0 \geq \frac{\varepsilon_0}{2\|x_n\|_E},$$

غير محدود، وهو ما يتنافى مع الفرض؛ نستنتج إذن، أنّ f مستمرّ عند الصفر. وبموجب العلاقة

$$f(x_0+y) = f(x_0) + f(y),$$

يتّضح أنّ f مستمرّ على E كلّه.

هـ. نذكّر، قصد إنهاء تبرير خطّيّة f، بأنّ كلّ عدد حقيقيّ نهاية لمتتالية من أعداد ناطقة، وإذا استحضرنا استمرار f أمكننا أن نكتب:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in E \quad f(\lambda x) = f(\lim_{n\to\infty} \lambda_n x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x),$$

حيث $(\lambda_n)_n$ متتالية من $\mathbb{Q}$ تتقارب نحو λ. نتأكّد هكذا أنّ f خطّيّ ومستمرّ، وهو ما يجعله عنصرا من $\mathscr{L}(E)$.

7) 1) إنّ الدالّة g المعرّفة بـ $g(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ دالّة أصليّة لـ f. وإذا وضعنا $C = \int_0^1 g(t)\,dt$ اتّضح أنّ الدالّة $T_f(t) = g(t) - C$ دالّة أصليّة لـ f تنتمي إلى F. نلاحظ من جهة أخرى، أنّه إذا كانت g_1 و g_2 دالّتين أصليّتين لـ f على $[0,1]$، فإنّنا نعلم أنّه يوجد ثابت K بحيث $g_1 - g_2 = K$. وعليه:

$$\int_0^1 g_1(t)\,dt = \int_0^1 g_2(t)\,dt + K.$$

وإذا كانت g_1 و g_2 منتميتين إلى F وجدنا أنّ $K=0$. ومنه $g_1 \equiv g_2$ على F. نستخلص أنّ f تتمتّع بدالّة أصليّة وحيدة في F.

2) لنبيّن أنّ T عنصر من $\mathscr{L}(E,F)$.

إنّ خطّيّة T نابعة من وحدانية T_f. وبالفعل إذا كان u و v عنصرين من E وكان λ عنصرا من $\mathbb{R}$ فإنّ T_u+T_v و λT_u يضحيان دالّتين أصليّتين لـ $u+v$ و λu على الترتيب وتنتميان إلى F (لأنّ هذا الأخير فضاء شعاعيّ جزئيّ من E). نستخلص من هذا، وبالاستناد إلى الوحدانيّة المذكورة، أنّ:

$$T_{u+v}=T_u+T_v \ ; \ T_{\lambda u}=\lambda T_u.$$

نقوم حاليا بإثبات استمرار T. من أجل ذلك نبحث في البداية عن شكل بسيط للدالّة T_f. لقد جاء أعلاه أنّ $T_f(t)=g(t)-C$، حيث:

$$g(t)=\int_0^t f(s)\,ds \,;\, C=\int_0^1 g(t)\,dt.$$

يكون لدينا عندئذ:

$$C=\int_0^1\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt=\iint_D f(s)\,dsdt,$$

حيث:

$$D=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 : 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1\right\}.$$

باستخدام خصائص حساب التكاملات المضاعفة على جزء متراصّ من $\mathbb{R}^2$ نجد:

$$C=\int_0^1\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt=\int_0^1 f(s)\left(\int_s^1 dt\right)ds=\int_0^1(1-s)\,f(s)ds.$$

وعليه:

$$T_f(t)=\int_0^t f(s)\,ds-\int_0^1(1-s)f(s)ds=\int_0^t f(s)\,ds-\int_0^t(1-s)f(s)ds-\int_t^1(1-s)f(s)ds$$
$$=\int_0^t s\,f(s)ds-\int_t^1(1-s)f(s)ds.$$

إذا اعتمادا على هذه العبارة أتانا:

$$|T_f(t)|\le\int_0^t s|f(s)|ds+\int_t^1(1-s)|f(s)|ds$$
$$\le\|f\|\int_0^t s\,ds+\|f\|\int_t^1(1-s)ds\le\|f\|\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right).$$

وعليه:

$$\|T_f\|=\sup_{0\le t\le 1}|T_f(t)|\le\|f\|\sup_{0\le t\le 1}\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\|f\|.$$

نستنتج أنّ T مستمرّ، وبه يضحى هذا الأخير عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$.

3) يتّضح ممّا سبق أنّ:

$$\|T\|\le\frac{1}{2}. \qquad (*)$$

نعتبر إلى جانب ذلك، الدالّة $f\equiv 1$ التي نحصل بواسطتها على:

$$T_f(t)=\int_0^t sds-\int_t^1(1-s)ds=\int_0^1 s\,ds-\int_t^1 ds=t-\frac{1}{2}.$$

وعليه:

$$\|T_f\|=\sup_{0\le t\le 1}\left(t-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

نكون هكذا قد تحصّلنا على:

$$\|T\|\ge\frac{1}{2}. \qquad (**)$$

من تكأكإ العلاقتين $(*)$ و $(**)$ تأتي النتيجة المنشودة $\|T\|=\frac{1}{2}$.

8) نفترض خلال هذا الحلّ أنّ الدالّة g تنعدم مرّة واحدة عند نقطة x_0 من المجال $[0,1]$.

1) إنّ φ واضح الخطيّة.

لنبيّن أنّه مستمرّ. من أجل كلّ عنصر f من E يكون لدينا:

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |f(x)||g(x)|\,dx \le \|f\|\int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

نستخلص أنّ φ مستمرّ و:

$$\|\varphi\| \le \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

لنحسب $\|\varphi\|$. من أجل ذلك نعتبر المتتالية المعرّفة على هذا المنوال:

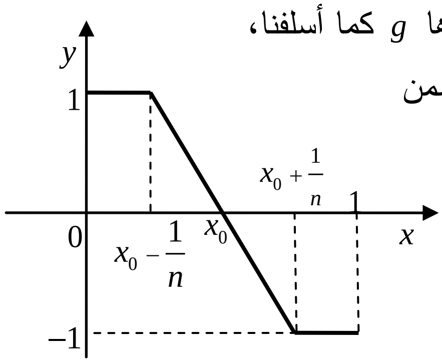
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{|g(x)|}{g(x)} = 1 & ; \quad 0 \le x \le x_0 - \dfrac{1}{n}, \\ \alpha_n x + \beta_n & ; \quad x_0 - \dfrac{1}{n} \le x \le x_0 + \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{|g(x)|}{g(x)} = -1 & ; \quad x_0 + \dfrac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases}$$

حيث x_0 هي النقطة التي تنعدم عندها g كما أسلفنا،

و α_n و β_n مختاران بالكيفية التي تضمن

استمرار f_n على $[0,1]$.

بعد هذا يكون لدينا:



$$\varphi(f_n) = \int_0^{x_0 - \frac{1}{n}} |g(x)|\,dx + \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} (\alpha_n + \beta_n) g(x)\,dx + \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{1} |g(x)|\,dx.$$

وعليه، $\lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \int_0^1 |g(x)|\,dx$ ، وهو ما يترتّب عنه:

$$\int_0^1 |g(x)|\,dx \le \|\varphi\|;$$

أي:

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

2) لا يوجد أيّ عنصر f من E يدرك عنده الشكل φ نظيمه. نبيّن ذلك بالتناقض. لنفترض وجود دالّة f_0 من كرة الوحدة المغلقة $B_f(0,1)$ بحيث $\varphi(f_0) = \|\varphi\|$ ، أي:

$$\int_0^1 f_0(x)g(x)dx = \int_0^1 |g(x)|\,dx,$$

ومنه:

$$\int_0^1 \left(f_0(x)g(x) - |g(x)| \right) dx = 0.$$

لندرس إشارة العبارة $h(x)$ المعرفّة بـ :

$$h(x) = f_0(x)g(x) - |g(x)|, \quad x \ne x_0.$$

هذه العبارة يمكن وضعها تحت الشكل:

$$h(x) = g(x)\left(f_0(x) - \frac{|g(x)|}{g(x)} \right), \quad x \ne x_0.$$

بعد هذا، نميّز حالتين:

أ. إذا كان $g(x) > 0$ فإنّ الدالّة h تأخذ عندئذ هذا الشكل:

$$h(x) = g(x)\left(f_0(x) - 1 \right).$$

ولمّا كانت f_0 من $B_f(0,1)$ نجد:

$$f_0(x) - 1 \le 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

نستنتج، في هذه الحالة، أنّ:

$$h(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

ب. إذا كان $g(x) < 0$ وجدنا عندئذ:

$$h(x) = g(x)\left(f_0(x) + 1 \right).$$

ولكن:

$$f_0(x) + 1 \geq 0, \ \forall x \in [0,1],$$

إذن:

$$h(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

يتّضح هكذا أنّ h سالبة مهما كانت إشارة g. إنّ ذلك يسمح بالحصول على:

$$\int_0^1 h(x)dx = 0 \ \Rightarrow \ f_0(x)g(x) - |g(x)| = 0 \ \Rightarrow \ f_0(x) = \frac{|g(x)|}{g(x)}, \ x \neq x_0.$$

وبالطبع، $f_0(x_0)$ يضحى كيفيّا. نستدلّ بالعلاقة الأخيرة للجزم بأنّ f_0 لا يمكنها أن تكون مستمرّة، ذلك لأنّ الدالّة g تغيّر إشارتها مرّة واحدة على الأقلّ في المجال $[0,1]$. إنّ هذا متناقض مع الفرض.

9) نستند في إثباتنا إلى مبرهنة البيان المغلق (5.4.2)، فنكتفي بأن نبيّن أنّ بيان u مغلق. لنرمز لهذا البيان كالمعتاد بـ Γ_u ولنثبت أنّ:

$$\overline{\Gamma_u} \subseteq \Gamma_u.$$

ليكن (x, y) عنصرا من $\overline{\Gamma_u}$. توجد عندئذ متتالية $(x_n, u(x_n))_n$ في Γ_u بحيث:

$$\lim_{n \to \infty}(x_n, u(x_n)) = (x, y).$$

نستخلص أنّ المتتالية $(x_n - x)_n$ تتقارب نحو الصفر. وبمقتضى الفرض يأتي:

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n - x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) - u(x) = 0,$$

أي $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u(x)$. ولكن المتتالية $(u(x_n))_n$ أخذت متقاربة نحو y فرضا. وعليه، نحصل من مبدإ وحدانية النهاية على $y = u(x)$. يأتي هكذا أنّ (x, y) نقطة من Γ_u ، وهو ما يضمن الاحتواء المنشود وينهي البرهان.

9) 1) إذا كان $u(a) = 0$ كان a من H وبالتالي $d(a, H) = 0$. إذن، العلاقة صحيحة. لنفترض أنّ $u(a) \neq 0$. يأتي عندئذ $E = H + \mathbb{R}a$.
وبالفعل، من أجل عنصر x من E يوجد عدد حقيقيّ λ بحيث:

$$u(x) = \lambda u(a).$$

وعليه، $u(x - \lambda a) = 0$. بوضع $h = x - \lambda a$ يأتي أنّ h من H و$x = h + \lambda a$ هو التفكيك وفق $H + \mathbb{R}a.$. إذا كان u مستمرّا كان $\|u\|$ منتهيا. نكتب تبعا لذلك:

$$\|u\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{h\in H, \lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0} \frac{\|u(h+\lambda a)\|}{\|h+\lambda a\|}$$

$$= |u(a)| \sup_{h\in H, \lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0} \frac{|\lambda|}{\|h+\lambda a\|} = |u(a)| \sup_{h\in H} \frac{1}{\|h+a\|}$$

$$= |u(a)| \frac{1}{\inf\limits_{h\in H} \|h+a\|} = |u(a)| \frac{1}{d(a,H)};$$

إنّها المساواة المنشودة.

2) إذا كان H مغلقا تأكّد أنّ $d(a, H) > 0$ إن لم يكن a من H . نستمدّ من المساواة المبرهنة أعلاه أنّ $\|u\|$ منته. إذن، u مستمرّ.

10) 1) إنّ T_n واضح الخطّيّة. وهو مستمرّ إذ أنّ:

$$|T_n(f)| \leq n\int_0^{\frac{1}{n}} |f(x)|dx \leq n \max_{0\leq x\leq \frac{1}{n}} |f(x)| \frac{1}{n} \leq \|f\|_\infty .$$

2) لدينا من السؤال الأوّل:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |T_n(f)| \leq \|f\|_\infty .$$

وبالتالي:

$$\|T_n\| \leq 1.$$

من جهة أخرى، نجد بأخذ $f_0 \equiv 1$ على $[0,1]$:

$$T_n(f_0) = n\int_0^{\frac{1}{n}} dx = 1.$$

ومنه:

$$\|T_n\| = 1.$$

3) من أجل كلّ f من E لدينا:

$$|T_n(f) - f(0)| = \left| n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx - n\int_0^{\frac{1}{n}} f(0)dx \right|$$

$$\leq n\int_0^{\frac{1}{n}} |f(x) - f(0)|dx \leq \max_{0\leq x\leq \frac{1}{n}} |f(x) - f(0)|.$$

يضمن استمرار انتهاء المقدار الأخير إلى الصفر مع مآل n إلى $+\infty$.

4) T خطّيّ. وفضلا عن ذلك لدينا:

$$|T(f)| = |f(0)| \leq \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| = \|f\|_\infty .$$

نستخلص أنّ T مستمرّ و $\|T\| \leq 1$. وإذا أخذنا $f_0 \equiv 1$ كما سبق حصلنا على $\|T\| = 1$.

5) لدينا:

$$\left|T_n(f)\right| \le n\int_0^{\frac{1}{n}} \left|f(x)\right| dx \le n\|f\|_1 .$$

ومنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|T_n\| \le n.$$

6) لدينا:

$$T_n(f) = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = n\left(\int_0^{\frac{1}{2n}} dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (-2nx+2)dx\right) = n\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}\right) = \frac{3}{4}$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \left|f(x)\right| dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (-2nx+2)dx = \frac{1}{2n}+\frac{1}{4n} = \frac{3}{4n};$$

وعليه:

$$\left|T_n(f)\right| = \frac{3}{4} = n\|f\|_1 ,$$

وبالتالي:

$$\|T_n\| = n.$$

7) نعلم، على ضوء لازمة أرخميدس[1] أنّ أمام كلّ ثابت موجب M عدد طبيعيّ n_0 بحيث $n_0 > M$. يأتي تبعا لهذا أنّ:

$$\forall n \ge n_0 \quad \|T_n\| = n \ge n_0 > M.$$

وعليه، المتتالية $(T_n)_n$ ليست متساوية الاستمرار.

---

19. Archimède: عالم يونانيّ. ولد حوالي 287 قبل الميلاد في سيراكوز. نبغ في الهندسة. برهن باستعمال مضلّعات منتظمة من 69 ضلعا دستوره المشهور لتقريب العدد π:

$$\frac{223}{71} \le \pi \le \frac{22}{7}.$$

8) تسمح الدالّة f المعطاة بالحصول على:

$$|T(f)| = |f(0)| = n,$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (-n^2 x + n)\,dx = \frac{1}{2}.$$

هكذا، من أجل كلّ $0 < c$ نحصل، من أجل دليل n كبير بما فيه الكفاية، على:

$$n = |T(f)| > \frac{c}{2} = c\|f\|_1 .$$

نستخلص أنّ T ليس مستمرّا.

9) النتيجة (8.4.2). الفضاء $(E, \|.\|_1)$ ليس بناخيّا.

7.2 مسائل للبحث

1) ليكن $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$ ولنعرّف عليه التطبيق الحقيقيّ φ:

$$\varphi(f) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} f(t)\,dt.$$

1) اثبت أنّ φ عنصر من الثنوي E'.

2) احسب النظيم $\|\varphi\|$.

2) ليكن E و F فضاءين نظيميّين و u تطبيقا من $L(E,F)$.

اثبت عندئذ أنّ الدعاوى الثلاث التالية متكافئة:

1) u مستشاكل.

2) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : \ \alpha\|x\| \le \|u(x)\| \le \beta\|x\|, \ \forall x \in E.$

3) $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}_+^* : \lambda\leq\|u(x)\|\leq\mu,\ \forall x\in B_f(0,1).$

3) ليكن E و F و G ثلاثة فضاءات نظيميّة على K ولتكن $(u_n)_n$ متتالية من $\mathscr{L}(E,F)$ تتقارب نحو u و $(v_n)_n$ متتالية من $\mathscr{L}(F,G)$ تتقارب نحو v.

اثبت أنّ المتتالية $(v_n\circ u_n)_n$ تتقارب نحو $v\circ u$ في $\mathscr{L}(E,G)$.

4) ليكن E فضاء الدوال الحقيقيّة المستمرّة والمحدودة على $[0,+\infty[$ والمتمتّعة بنهاية في اللاّنهاية. نزوّد E بالنظيم $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f(x)|$

ونعرّف تطبيقين u و v على E بِـ:

$$u: f\mapsto u(f)/u(f)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(y)dy & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

$$v: f\mapsto v(f)/v(f)(x)=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(xy)^2}f(y)dy.$$

1) ادرس استمرار u و v.

2) اثبت أنّ التطبيق w المعرّف بِـ:

$$w: f\mapsto \lim_{x\to+\infty}f(x)=w(f)$$

شكل خطّي مستمرّ على E.

3) اثبت أنّ $w=w\circ u$، أي أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}u(f)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

4) بيّن أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}v(f)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=w(f).$$

5) نزوّد الفضاء الشعاعيّ $\mathbb{R}^2$ بالنظيم المعطى بـ:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}},$$

ونعرّف عليه التطبيق الحقيقيّ u على النحو:

$$u(x,y) = \sqrt{2}x + y.$$

اثبت أنّ u عنصر من الثنوي الطبولوجيّ $(\mathbb{R}^2)'$.

6) نعرّف على الفضاء النظيميّ $\left(\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_1\right)$ التطبيق الحقيقيّ u بـ $u(f) = f(1)$.

1) اثبت أنّ u شكل خطّيّ.

2) اثبت، مستعينا بالدوال $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$، أنّ u ليس مستمرّا.

7) نعرّف على الفضاء $L^1([-1,1]) = E$ التطبيق $u : E \to \mathbb{R}$ بِـ :

$$u : f \mapsto u(f) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt.$$

اثبت أنّ u ينتمي إلى E' واحسب نظيمه.

8) ليكن ℓ^2 الفضاء المؤلّف من المتتاليات الحقيقيّة $x = (x_n)_n$ بحيث:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty.$$

نزوّده بالنظيم $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2}$. اثبت أنّ التطبيق π_n المعرّف بِـ:

$$\pi_n : \ell^2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \pi_n(x) = x_n$$

عنصر من $(\ell^2)'$، نظيمه 1.

9) ليكن $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بنظيم التقارب المنتظم و $P_n : E \to \mathbb{R}$

تطبيقا معرّفا على هذا النحو:

$$f \mapsto P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \ n = 1, 2, \ldots$$

1) اثبت أنّ P_n خطّيّ ومستمرّ وذو نظيم يساوي 1 (يدعى P_n بكثير حدود برنشتاين[1]).

2) نعرّف تطبيقا آخر u من E نحو E بِـ :

$$f \mapsto u(f) / u(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

اثبت عندئذ أنّ u خطّيّ ومستمرّ واحسب نظيمه.

10) ليكن E فضاء المتتاليات الحقيقيّة $x = (x_n)_n$ التي تؤول نحو الصفر لمّا يؤول n إلى $+\infty$. نزوّد E بالنظيم $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

1) اثبت أنّ E بناخيّ.

2)

أ. لتكن $(e_p)_p$ المتتالية التي جميع عناصرها معدومة ما عدا ذي المرتبة p الذي يساوي 1. اثبت أنّ الفضاء الجزئيّ المولّد بواسطة الأشعّة $(e_p)_p$ كثيف في E.

ب. اثبت أنّ كلّ شكل خطّيّ مستمرّ u من E' يكتب بكيفيّة وحيدة على الصورة:

$$x \mapsto u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n,$$

حيث $(u_n)_n$ متتالية تحقّق $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

---

21. Sergei Natanovich Bernstein: رياضيّاتيّ سويديّ. ولد في 5 مارس 1880 بأوديسا وتوفّي في 26 أكتوبر 1968 بموسكو. ناقش عام 1904 رسالة الدكتوراه اتّخذت من المسالة الهيلبرتيّة التاسعة عشرة موضوعا لها. عمل برنشتاين حول نظرية تقريب الدوال وله كثيرات حدود تحمل اليوم اسمه.

ج . اثبت أنّ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \sup_{\|x\|\le 1} |u(x)|.$$

3) ليكن F الفضاء الشعاعيّ المؤلّف من المتتاليات الحقيقيّة $y=(y_n)_n$ بحيث: $\sum_{n=0}^{+\infty}|y_n| < +\infty$. اثبت أنّ التطبيق:

$$y \mapsto \|y\| = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|,$$

نظيم على F يجعل هذا الأخير بناخيّا.

4) أ.

ثبت أنّ كلّ شكل خطّيّ مستمرّ u على F يكتب بكيفيّة وحيدة تحت الشكل:

$$x \mapsto u(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n u_n,$$

حيث $(u_n)_n$ متتالية محدودة من أعداد حقيقيّة.

ب. اثبت أنّ:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \sup_{\|y\|\le 1} |u(y)| = \|u\|.$$

11) ليكن E و F فضاءين نظيميّين و u و (u_n) من $\mathscr{L}(E,F)$. اثبت تكافؤ الدعويين:

1) (u_n) تتقارب نحو u في $\mathscr{L}(E,F)$.

2) من أجل كلّ جزء محدود M من E، تكون المتتالية $(u_n(x))$ متقاربة بانتظام نحو $u(x)$، حيث x من M .

12) ليكن $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_\infty$ و $(u_n)_n$ متتالية من دوال حقيقيّة معرّفة على E بـِ :

$$f \mapsto u_n(f) = n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1) اثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n

يكون u_n شكلا

خطّيّا مستمرّا على E .

2) اثبت أنّ:

$$\forall\, f \in E \ \ \lim_{n\to\infty} u_n(f) = u(f) = f\,'(0).$$

3) هل u مستمرّ ؟

هل يمكن تطبيق مبرهنة بناخ . شتاينهوس ؟

13) ليكن E فضاء شعاعيّا نظيميّا على $\mathbb{R}$، بعده منته. نرفق بكل

عنصرّ

x من E شكلا خطّيّا $\tilde{x}$ على E^*، معرّفا بـ :

$$\tilde{x}(f) = f(x),\quad f \in E^*.$$

اثبت أنّ التطبيق $\psi : E \to E^{**}$ المعرّف بـ $\psi(x) = \tilde{x}$ تشاكل

مستتشاكل وتقايس.

العائلات القابلة للجمع

1.3 تعاريف وخصائص عامّة

نعتبر هذا الفصل مكمّلا وموسّعا للدّراسة التي سبق أن مرّت بك من ذي قبل وتناولت بالتفصيل السلاسل العدديّة وسلاسل الدوال. إذا أعدت النظر في هذه الأخيرة وجدتها مشوبة في الحالة العامّة، بنقائص نذكر منها بالخصوص:

1) اقتصار مجموعة الأدلّة على المجموعة $\mathbb{N}$ وحدها.

2) افتقار السلاسل المتقاربة إلى بعض الميزات منها:

خاصيّتا التبديل والتجميع.

للتأكّد من النقطة الأخيرة نسوق هذين المثالين:

1.1.3 مثالان

1) نعتبر السلسلة ذات الحدّ العامّ:

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

إنّنا نعلم أنّها متقاربة وأنّ مجموعها يساوي:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = Log\, 2.$$

لنفترض أنّنا نقوم بتعديل في ترتيب الجمع دونما تغيّر في طبيعة السلسلة ولا في مجموعها. بإمكاننا أن نكتب عندئذ:

$$Log\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\ldots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}\right)-\frac{1}{4n+4}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2(2n+2)}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)}-\frac{1}{(2n+2)}+\ldots\right)=\frac{1}{2}Log\,2,$$

إنّ هذا غير ممكن. يتّضح هكذا أنّه لا يمكن، عموما، إحداث تعديل في ترتيب حدود سلسلة متقاربة.

2) نقوم بمعالجة السلسلة المتناوبة ذات الحدّ العامّ:

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n},\ \ n\in\mathbb{N}^*.$$

من الواضح أنّ هذه السلسلة متقاربة. فإذا وضعنا:

$$I_2=\mathbb{N}^*\setminus 2\mathbb{N}^* \text{،} \ \ I_1=2\mathbb{N}^*$$

وجدنا أنّ I_1 و I_2 يجزّءان $\mathbb{N}^*$، غير أنّ السلسلتين الجزئيّتين الموافقتين:

$$\sum_{n\in I_1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2p}=\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p},$$

$$\sum_{n\in I_2}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{-1}{2p+1},$$

ليستا متقاربتين كما هو معلوم. لا يمكننا أن نكتب تبعا لذلك:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n\in I_1}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n\in I_2}\frac{(-1)^n}{n}.$$

2.1.3 تعريف

ليكن E فضاء نظيميّا على حقل $\mathbb{K}$ و I مجموعة كيفيّة (ندعوها على مدار هذا الفصل بمجموعة الأدلّة). ولتكن Λ العائلة الجزئيّة من $\mathscr{P}(I)$ والمؤلّفة من كافّة أجزاء I المنتهية. ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ عائلة عناصر من E.

نرفق بكلّ جزء J من Λ النقطة المعرّفة بِ :

$$S_J = \sum_{i\in J} x_i,$$

ونسمّيها **مجموعا جزئيا منتهيّا** ذا دليل J للعائلة $(x_i)_{i\in I}$.

3.1.3 تعريف

نقول عن عائلة $(x_i)_{i\in I}$ من فضاء نظيميّ E إنّها قابلة للجمع، وذات مجموع S، إذا توفّر هذا الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, J_0(\varepsilon) \in \Lambda \,/\, \forall J \in \Lambda : J_0 \subseteq J \ \Rightarrow \ \left\| S - S_J \right\|_E \le \varepsilon.$$

4.1.3 أمثلة

1) كلّ عائلة عدديّة (حقيقيّة أو عقديّة) منتهيّة قابلة للجمع.

وفعلا، إذا كانت للعائلة $(x_i)_{1\le i\le n}$ تلك الأوصاف، فإنّ مجموعها يكون بكلّ بداهة:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

يكفي بغية التأكّد من ذلك أخذ $I = \{1, 2, ..., n\}$ وكذا، من أجل كلّ $0 < \varepsilon$ معطى، $J_0(\varepsilon) = I$. يتجلّي هكذا أنّ كلّ جزء منته J من I يتطابق مع I بمجرّد أن يحتوي J_0. يأتي تبعا لذلك أنّ:

$$\left| S - S_J \right| = \left| S - \sum_{i=1}^{n} x_i \right| = 0 < \varepsilon.$$

2) إنّ العائلة $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$، وتتمتّع بمجموع $S = 2$.

وبالفعل، فإنّنا نعلم أنّ السلسلة $\sum \frac{1}{2^n}$ متقاربة نحو النهاية $\ell = 2$.

نترجم ذلك بِـ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ : n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |2 - S_n| = \left| 2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \right| \leq \varepsilon,$$

أي:

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \left| 2 - \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \right| = \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon.$$

نأخذ، قصد مطابقة تعريف القابليّة للجمع في هذه الحالة، $I = \mathbb{N}$ و $J_0(\varepsilon) = \{0, 1, 2, ..., n_0\}$. نلاحظ بعد هذا أنّ كلّ جزء منته J من $\mathbb{N}$، إذا ما احتوى J_0، يكتب على النحو $J = J_0 \cup K$، حيث K جزء منته من $\mathbb{N}$ لا يقطع J_0. يرخّص لنا ذلك بأن نكتب:

$$S_J = \sum_{i \in J_0 \cup K} \frac{1}{2^i} = \sum_{i \in J_0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in K} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i \in K} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{i \in K} \frac{1}{2^i}.$$

من جهة أخرى، يمكن وضع الجزء K على الشكل:

$$K = \{m_1, m_2, ..., m_r\},$$

مع $m_\alpha > n_0$ حيث α من $\{1, 2, ..., r\}$. لنضع:

$$L = \{n_{0+1}, n_{0+2}, ..., m_0\} \ \text{،} \ m_0 = \max_{1 \leq \alpha \leq r} m_\alpha$$

نحصل بذلك على:

$$S_K = \sum_{i \in K} \frac{1}{2^i} \leq S_L + \sum_{i=n_0+1}^{m_0} \frac{1}{2^i}.$$

وعليه:

$$S_J = S_{J_0} + S_K \leq S_{J_0} + S_L = \sum_{i=0}^{m_0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n_0+1}^{m_0} \frac{1}{2^i} = S_{m_0};$$

أي أنّ:

$$S_J \leq 2 - \frac{1}{2^{m_0}} < 2.$$

ولكن، حسب ما سبق، لدينا $m_0 > n_0$ ؛ إذن:

$$\left|S_{m_0} - 2\right| = \frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon.$$

نستخلص في الختام أنّ:

$$2 - \varepsilon \leq S_{n_0} \leq S_J \leq S_{m_0} \leq 2 < 2 + \varepsilon,$$

وهو ما يؤدّي إلى:

$$\left|2 - S_J\right| \leq \varepsilon,$$

وينهي المثال.

لنشر هنا إلى أنّه تعميما لهذا المثال، فإنّ كلّ سلسلة عدديّة متقاربة ذات حدود موجبة تشكّل عائلة قابلة للجمع. وأكثر من ذلك، فإنّنا سنبيّن في فقرة لاحقة أنّ كلّ سلسلة عدديّة متقاربة مطلقا قابلة للجمع.

3) إنّ المتتاليّة $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست قابلة للجمع.

لنثبّت، قصد توضيح ذلك، $\varepsilon = 1$ ولنعتبر جزءا منتهيا J_0 من $\mathbb{N}$. إنّ هذا الأخير يمكن أن يوضع تحت الشكل $J_0 = \{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$. لنضع $m_0 = \max_{1\leq i\leq p} m_i$. إنّ الجزء $J = \{0,1,2,\ldots,m_0\}$ منته يشمل J_0 ويحقّق:

$$\left|\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^i - S_J\right| = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^i - S_{m_0} - \sum_{i=m_0+1}^{+\infty} 2^i > 1.$$

يتّضح هكذا أنّ العائلة المعتبرة ليست قابلة للجمع.

بصفة عامّة، **لا يمكن لأيّة سلسلة متباعدة أن تشكّل عائلة قابلة للجمع.**

5.1.3 ملحوظة

إنّ مفهوم القابليّة للجمع لا يتطلّب أيّ ترتيب على I (عكس السلاسل المتقاربة ذات الحدود غير الموجبة). ومن جهة أخرى، إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع وكان φ تقابلا من مجموعة أدلّة Γ نحو المجموعة I فإنّنا نحصل بوضع $y_\mu = x_{\varphi(i)}$، على عائلة $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ تكون قابلة للجمع وتتمتّع بنفس مجموع العائلة $(x_i)_{i\in I}$. أجل، إذا كان $S=\sum_{i\in I} x_i$ و $\|S-S_J\|_E \le \varepsilon$ من أجل كلّ جزء منته J يحوي الجزء المنتهي J_0، يكون لدينا:

$$\left\|\sum_{\mu\in L} x_i - S\right\|_E \le \varepsilon,$$

من أجل كلّ جزء منته L من Γ يحوي $\varphi^{-1}(J_0)$.

6.1.3 قضية

إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع من فضاء نظيميّ E وكان S مجموعها كان هذا الأخير عندئذ وحيدا.

إثبات

لنفترض أنّ S' مجموع آخر للعائلة $(x_i)_{i\in I}$. نكتب تبعا لذلك:

$$S=\sum_{i\in I} x_i \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ J_0(\varepsilon)\in\Lambda / \forall J\in\Lambda : J_0\subseteq J \ \Rightarrow\ \|S-S_J\|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

$$S'=\sum_{i\in I} x_i \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ J_1(\varepsilon)\in\Lambda / \forall J\in\Lambda : J_1\subseteq J \ \Rightarrow\ \|S'-S_J\|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

وبأخذ $J_2 = J_0\cup J_1$، يأتي:

$$\forall J\in\Lambda : J_2\subseteq J \ \Rightarrow\ \|S'-S\|\le\|S-S_J\|+\|S'-S_J\|\le\varepsilon.$$

وعليه، $S=S'$.

7.1.3 قضية

إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ و $(y_i)_{i\in I}$ جماعتين قابلتين للجمع من E مجموعاهما a و b وكان λ سلمياً من K فإنّ الجماعتين $(z_i)_{i\in I}=(x_i+y_i)_{i\in I}$ و $(t_i)_{i\in I}=(\lambda x_i)_{i\in I}$ تكونان قابلتين للجمع، ومجموعاهما يساويان $a+b$ و λa على الترتيب.

إثبات

لدينا:

$$a=\sum_{i\in I} x_i \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ J_0(\varepsilon)\in\Lambda / \forall J\in\Lambda : J_0\subseteq J \Rightarrow \left\| a-\sum_{i\in J} x_i \right\| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$b=\sum_{i\in I} y_i \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ J_1(\varepsilon)\in\Lambda / \forall J\in\Lambda : J_1\subseteq J \Rightarrow \left\| b-\sum_{i\in J} y_i \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

إذا وضعنا $J_2=J_0\cup J_1$ حقّ لنا أن نكتب عندئذ:

$$\forall J\in\Lambda : J_2\subseteq J \Rightarrow \left\| (a+b)-\sum_{i\in J} z_i \right\| = \left\| (a+b)-\sum_{i\in J} (x_i+y_i) \right\|$$
$$\le \left\| a-\sum_{i\in J} x_i \right\| + \left\| b-\sum_{i\in J} y_i \right\| \le \varepsilon,$$

وهو ما يبيّن أنّ العائلة $(z_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع ومجموعها $a+b$.

نتّبع نفس الطريقة لتبيان صحّة البند الثاني من هذه القضية، التي على ضوئها نضع توّا:

8.1.3 نتيجة

إنّ لمجموعة الجماعات القابلة للجمع بنية فضاء شعاعيّ على K.

2.3 مقاييس للقابليّة للجمع

1.2.3 قضية

لكي تكون عائلة $(x_i)_{i\in I}$ من فضاء نظيميّ E قابلة للجمع يلزم أن تكون مجموعة المجاميع الجزئيّة $(S_J)_{J\in\Lambda} = \left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\in\Lambda}$ محدودة.

إثبات

لنفترض أنّ العائلة $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع ومجموعها S وليكن J_1 جزءا من Λ تتحقّق بموجبه المتراجحة:

$$\|S_J - S\| \le 1,$$

من أجل كلّ جزء J من Λ يحوي J_1.

إذا كان L جزءا كيفيّا من Λ يكون لدينا:

$$\left\|S_{J_1\cup L} - S\right\| =\le 1.$$

وإذا لاحظنا أنّ الفرق $S_{J_1\cup L} - S_L$ هو مجموع العناصر x_i التي تنتمي دلائلها إلى $J_1 \setminus L$ أمكننا أن نكتب حينئذ:

$$\left\|S_{J_1\cup L} - S_L\right\| \le \sum_{i\in J_1\setminus L} \|x_i\| \le \sum_{i\in J_1} \|x_i\|.$$

لنضع $M = \sum_{i\in J_1} \|x_i\|$. نحصل بذلك على:

$$\|S_L - S\| \le \left\|S_L - S_{J_1\cup L}\right\| + \left\|S_{J_1\cup L} - S\right\| \le M + 1.$$

ومنه:

$$\|S_L\| \le \|S\| + M + 1, \ \forall L \in \Lambda;$$

وهو ما ينهي البرهان.

2.2.3 قضية

إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع من فضاء نظيميّ E فإنّ المجموعة I_0، المؤلّفة من الدلائل i بحيث $x_i \neq 0$، قابلة للعدّ.

إثبات

ليكن $S=\sum_{i\in I} x_i$ وليكن، من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، الجزء المنتهي J_n من I بحيث:

$$\forall J \in \Lambda : J_n \subseteq J \;\Rightarrow\; \left\| S-\sum_{i\in J} x_i \right\| \leq \frac{1}{2n}.$$

من أجل كلّ i من $I \setminus J_n$ يكون لدينا لزوما:

$$\|x_i\| \leq \frac{1}{n}.$$

إنّ المجموعة $I_n=\left\{ i\in I : \|x_i\| > \frac{1}{n} \right\}$ محتواة في J_n. وعليه، فهي منتهية؛ وبه تكون المجموعة $I_0=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ قابلة للعدّ.

3.2.3 نتيجة

إذا حذفت العناصر المعدومة من عائلة قابلة للجمع فإنّ هذه الأخيرة تبسّط إلى عائلة قابلة للعدّ، دون أن تستلزم هذه الميزة أيّ ترتيب معيّن لهذه العائلة.

4.2.3 تعريف (مقياس كوشي)

نقول عن عائلة $(x_i)_{i\in I}$ من فضاء نظيميّ E إنّها تحقّق شرط كوشي إذا تمتّعت بالخاصية الموالية:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists J_0(\varepsilon)\in\Lambda \,/\, \forall J\in\Lambda :\; J\cap J_0=\phi \;\Rightarrow\; \|S_J\| \leq \varepsilon.$$

5.2.3 مبرهنة

كلّ عائلة قابلة للجمع من E تحقّق مقياس كوشي.

إثبات

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع من E و S مجموعها. يأتي عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists J_0(\varepsilon) \in \Lambda / \forall J \in \Lambda: \ J_0 \subseteq J \ \ \Rightarrow \ \|S_J - S\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

ليكن L عنصرا من Λ لا يقطع J_0 . بأخذ $J = J_0 \cup L$ يكون لدينا:

$$\|S_L\| = \|S_J - S_{J_0}\| \leq \|S_J - S\| + \|S_{J_0} - S\| \leq \varepsilon.$$

6.2.3 ملحوظة

إنّ الشرط أعلاه يصبح كافيّا إذا كان E بناخيّا.

تستدعي هذه الملحوظة قراءة متأنّيّة، إذ أنّها تنطوي على نتيجة هامّة جدّا (نسلّم بها):

في الفضاءات البناخيّة، يكون مقياس كوشي ضامنا القابليّة للجمع لكلّ عائلة تحقّقه.

3.3 التجميع

1.3.3 قضية

كلّ عائلة جزئيّة من عائلة قابلة للجمع قابلة للجمع في كلّ فضاء بناخيّ.

إثبات

وفعلا، إذا كان مقياس كوشيّ محقّقا من أجل عائلة $(x_i)_{i\in I}$ فإنّه يظلّ كذلك بالخصوص، من أجل كلّ عائلة جزئيّة من $(x_i)_{i\in I}$.

تجدر الإشارة هنا، إلى أنّ هذه الخاصيّة تفتقر إليها السلاسل، كما يتّضح ذلك من خلال المثال الأوّل من الطائفة (1.1.3).

2.3.3 مبرهنة (التجميع)

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع من فضاء نظيميّ E و $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ تجزئة لِـ I. إذا كانت كلّ واحدة من الجماعات الجزئيّة $S_\lambda=\sum\limits_{i\in I_\lambda} x_i$ قابلة للجمع ووضعنا $S_\lambda=\sum\limits_{i\in I_\lambda} x_i$ فإنّ العائلة $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ تكون عندئذ قابلة للجمع ويحقّق مجموعها $S'=\sum\limits_{\lambda\in L} S_\lambda$:

$$S'=\sum_{\lambda\in L} S_\lambda=\sum_{\lambda\in L}\left(\sum_{i\in I_\lambda} x_i\right)=\sum_{i\in I} x_i. \qquad (*)$$

إثبات

لنشر، باديء ذي بدء، إلى أنّه يُفهم من هذه المبرهنة أنّه لحساب مجموع العائلة $(x_i)_{i\in I}$ يمكن استبدال كلّ عائلة جزئيّة بمجموع عناصرها S_λ.

ما دامت $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع ومجموعها S أمكننا ذلك من أن نكتب:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ J_0(\varepsilon)\in\Lambda/\forall J\in\Lambda:\ J_0\subseteq J\ \Rightarrow\left\|\sum_{i\in J} x_i-S\right\|\le\varepsilon. \qquad (**)$$

إنّ المجموعة المنتهية J_0 لا يمكنها أن تقطع إلاّ عددا منتهيا من المجموعات I_λ. لنرمز بِـ L_0 للمجموعة المنتهية المؤلّفة من العناصر λ من L بحيث $J_0\cap I_\lambda\neq\phi$؛ ولنعتبر جزءا منتهيا كيفيّا M من L يحوي

L_0 ، ولنضع $cardM = p$. (نقرأ: أصليّ M يساوي p). إنّ قابليّة العائلة $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ للجمع تستلزم، من أجل كلّ λ من M ، وجود جزء منته J_λ من I_λ يحوي $J_0 \cap I_\lambda$ وتتحقّق به المتراجحة:

$$\left\| \sum_{i\in J_\lambda} x_i - S_\lambda \right\| \le \frac{\varepsilon}{p}.$$

لنضع $J = \bigcup_{\lambda\in M} J_\lambda$. إنّ المجموعة J تحتوي الجزء J_0 . لدينا عندئذ:

$$\left\| \sum_{i\in J} x_i - \sum_{\lambda\in M} S_\lambda \right\| = \left\| \sum_{\lambda\in M} \left(\sum_{i\in J_\lambda} (x_i - S_\lambda) \right) \right\| \le \sum_{\lambda\in M} \left\| \left(\sum_{i\in J_\lambda} (x_i - S_\lambda) \right) \right\| \le \varepsilon.$$

وبالمقارنة مع ما جاء في (**) نجد أنّ:

$$\left\| S - \sum_{\lambda\in M} S_\lambda \right\| \le \left\| S - \sum_{i\in J} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in J} x_i - \sum_{\lambda\in M} S_\lambda \right\| \le 2\varepsilon.$$

تبيّن هذه المتراجحة القائمة من أجل كلّ جزء منته M من L يحوي L_0 أنّ العائلة $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ قابلة للجمع وأنّ مجموعها يساوي S . يمكن على ضوء هذا، أن نكتب صيغة التجميع للمجموع على هذا النحو:

$$\sum_{\lambda\in M} \left(\sum_{i\in I_\lambda} (x_i) \right) = \sum_{i\in \bigcup_{\lambda\in M} I_\lambda} x_i = S.$$

وذلك لمّا يكون للطرف الثاني معنى وتكون العائلة $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ تجزئة لاتّحادها.

3.3.3 ملحوظة

إنّ عكس النتيجة المحمولة في المبرهنة السابقة خاطئ عموما. وبصفة أدقّ، إذا كانت:

أ. $(x_i)_{i\in I}$ عائلة من فضاء نظيميّ E و $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ تجزئة لـ I ،

ب. العائلات الجزئيّة $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ قابلة للجمع بمجاميع S_λ ،

ج. العائلة $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ قابلة للجمع،

فإنّ العائلة الأمّ $(x_i)_{i\in I}$ لا تكون بالضرورة قابلة للجمع.

نستحضر قصد التبرير هذا المثال المضاد.

السلسلة $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ المعرّفة بـ $x_n=(-1)^n$ متباعدة. وعليه، فإنّ العائلة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست قابلة للعدّ.

لتكن $(I_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ التجزئة لـ $\mathbb{N}$ المعرّفة بـ $I_\lambda=\{2\lambda,\ 2\lambda+1\}$. العائلة $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ قابلة للجمع ذلك لأنّ:

$$S_\lambda=\sum_{i\in I_\lambda} x_i = x_{2\lambda}+x_{2\lambda+1}=(-1)^{2\lambda}+(-1)^{2\lambda+1}=0.$$

وعليه:

$$\forall \lambda\in\mathbb{N}\quad S_\lambda=0.$$

نستخلص أنّ العائلة $(S_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع بمجموع S' معدوم:

$$S'=\sum_{\lambda\in\mathbb{N}} S_\lambda=\sum_{\lambda\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_\lambda} x_i\right)=0.$$

لنشر في ختام هذه الفقرة إلى أنّ الأمر خلاف هذا لو كانت المجموعة L منتهية. وبعبارة أوضح، يضحى العكس المدروس صحيحا في حالة تجزئة منتهية لـ I. إليك التفاصيل:

4.3.3 قضية

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ عائلة نقاط من فضاء نظيميّ E و $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ تجزئة منتهية لِـ I. إذا كانت كلّ واحدة من الجماعات الجزئيّة $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ قابلة للجمع كانت العائلة $(x_i)_{i\in I}$ عندئذ قابلة للجمع وكانت العلاقة (*) المذكورة في مبرهنة التجميع السابقة محقّقة.

إثبات

يمكن أن نفترض، رغبة في الاختصار، أنّ $I = I_1 \cup I_2$ (على أن نواصل البرهان من بعد بالتدريج بالنسبة لعدد عناصر L). بو ضع $S_1 = \sum_{i\in I_1} x_i$ و $S_2 = \sum_{i\in I_2} x_i$ نكتب:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_1 \in \Lambda_1 / \forall H_1 \in \Lambda_1 : J_1 \subseteq H_1 \ \Rightarrow \ \left\| \sum_{i\in H_1} x_i - S_1 \right\| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_2 \in \Lambda_2 / \forall H_2 \in \Lambda_2 : J_2 \subseteq H_2 \ \Rightarrow \ \left\| \sum_{i\in H_2} x_i - S_2 \right\| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

حيث يرمز Λ_1 و Λ_2 لعائلتي الأجزاء المنتهية في I_1 و I_2 على الترتيب . إنّ $J_0 = J_1 \cup J_2$ جزء منته من I . ومن أجل كلّ جزء منته H يحوي J_0، يكون واضحا أنّ H من الشكل $H_1 \cup H_2$ مع:

$$J_1 \subset H_1 \subset I_1,$$

$$J_2 \subset H_2 \subset I_2.$$

يأتي إذن:

$$\left\| \sum_{i\in H} x_i - (S_1 + S_2) \right\| \le \left\| \sum_{i\in H_1} x_i - S_1 \right\| + \left\| \sum_{i\in H_2} x_i - S_2 \right\| \le \varepsilon.$$

إنّه المطلوب.

4.3 العائلات القابلة للجمع الحقيقيّة

1.4.3 مبرهنة

لكي تكون عائلة من أعداد حقيقيّة موجبة $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع يلزم ويكفي أن تكون مجموعة المجاميع الجزئيّة $(S_J)_{J\in\Lambda}$ محدودة في $\mathbb{R}$. يكون لدينا عندئذ:

$$S = \sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\in\Lambda} S_J .$$

إثبات

لزوم الشرط: إنّه مضمون القضية (1.2.3).

كفاية الشرط: ليكن $S=\sup\limits_{J\in\Lambda} S_J$ الحدّ الأعلى لعائلة المجاميع $(S_J)_{J\in\Lambda}$.

على ضوء الخاصية المميّزة للحدّ الأعلى نكتب:

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists J_0\in\Lambda / S-\varepsilon<S_{J_0}.$$

ومن أجل كلّ جزء L من Λ بحيث $J_0\subset L$ يكون لدينا $S_{J_0}\leq S_L$. ومنه:

$$S-\varepsilon<S_{J_0}\leq S_L\leq S+\varepsilon.$$

وهو ما يعطي في الختام:

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists\, J_0\in\Lambda/\forall\, L\in\Lambda \;\; J_0\subseteq L \;\Rightarrow\; |S-S_L|\leq\varepsilon.$$

نرى هكذا أنّ العائلة $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع ومجموعها S.

2.4.3 أمثلة

1) من أجل كلّ عدد q من المجال $[0,1[$ تكون المتتالية $(q^n)_n$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$؛ ذلك لأنّ:

ولدينا بشأن مجموعها $S=\dfrac{1}{1-q}$.

2) ليكن a و b عددين حقيقيّين من المجال $[0,1[$. تكون العائلة $(a^m b^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ عندئذ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$. وفعلا، من أجل كلّ جزء منته J_0 من $\mathbb{N}^2$ بحيث $J_0\subset[0,p]\times[0,p]$، يكون لدينا:

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{p}a^m b^n=\sum_{m=0}^{p}a^m\sum_{n=0}^{p}b^n=\left(\frac{1-a^{p+1}}{1-a}\right)\left(\frac{1-b^{p+1}}{1-b}\right)<\frac{1}{(1-a)}\frac{1}{(1-b)}.$$

3) من أجل كلّ عدد حقيقيّ $1<\alpha$ تكون المتتالية $\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)_n$ قابلة للجمع.

لدينا بالفعل:

$$S_{2^{n+1}}-S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{(2^n+k)^{\alpha}}\leq\frac{2^n}{(2^n)^{\alpha}}.$$

وبجمع هذه المتباينات طرفا لطرف يأتي:

$$S_{2^n}<\frac{1}{1-2^{1-\alpha}}.$$

4) إنّ المتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ غير قابلة للجمع في □؛ إذ أنّ:

$$S_{2^{n+1}}-S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{2^n+k}>\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

فإذا قمنا بجمع هذه المتراجحات طرفا لطرف حصلنا على أنّ $S_{2^n}>\frac{n}{2}$، وهو ما يدلّ على أنّ المتتالية المذكورة لا تحقّق شرط المبرهنة أعلاه.

3.4.3 مبرهنة (مبدأ المقارنة)

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ و $(y_i)_{i\in I}$ عائلتين من أعداد حقيقيّة موجبة (أو معدومة) بحيث:

$$\forall\ i\in I\quad x_i\leq y_i.$$

إذا كانت $(y_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع كان الأمر كذلك بالنسبة لِ $(x_i)_{i\in I}$. وفضلا عن ذلك لدينا:

$$\sum_{i\in I}x_i\leq\sum_{i\in I}y_i.$$

إثبات

من أجلّ كلّ جزء منته J من I يكون لدينا:

$$\sum_{i\in J} x_i \le \sum_{i\in J} y_i \le \sum_{i\in I} y_i.$$

يترتّب عن هذه العلاقة أنّ شرط المبرهنة السابقة محقّق. يأتي بموجبه أنّ العائلة $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع، ويكون مجموعها مقيّدا بهذه المتباينة:

$$S = \sum_{i\in I} x_i \le \sum_{i\in I} y_i.$$

4.4.3 ملحوظتان

1) تظلّ النتيجة المحمولة على هذه المبرهنة صحيحة إذا ما طبّقت على الحالة التي يوجد فيها ثابت $0 < a$ بحيث:

$$\forall\ i \in I \quad x_i \le a y_i.$$

ويكون لدينا عندئذ:

$$S = \sum_{i\in I} x_i \le a \sum_{i\in I} y_i.$$

2) إذا وجد ثابت $0 < b$ بحيث:

$$\forall\ i \in I \quad x_i \ge b y_i,$$

وكانت العائلة $(y_i)_{i\in I}$ غير قابلة للجمع في □، أضحت العائلة $(x_i)_{i\in I}$ حينئذ غير قابلة للجمع كذلك. تكمن العلّة في كون مجموعة المجاميع الجزئيّة الملحقة بـ $(y_i)_{i\in I}$ غير محدودة من الأعلى يجعل مجموعة المجاميع الجزئية الملحقة بـ $(x_i)_{i\in I}$ غير محدودة من الأعلى وبصفة أولى.

5.4.3 مثال

ليكن a و b عددين حقيقيّين يفوقان 1 تماما. يكون لدينا عند ذلك:

$$\forall\ (p,q)\in \mathbb{N}^2\quad a^p+b^q\geq 2a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{q}{2}}.$$

ومنه:

$$\forall\ (p,q)\in \mathbb{N}^2\quad \frac{1}{a^p+b^q}\leq \frac{1}{2}a^{-\frac{p}{2}}b^{-\frac{q}{2}}.$$

إذا استندنا إلى المثال الثاني من الطائفة (2.4.3) تبيّن أنّ العائلة $\left(a^{-\frac{p}{2}}b^{-\frac{q}{2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ قابلة للجمع. نستخلص بمقتضى مبدإ المقارنة، أنّ العائلة $\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ قابلة للجمع بدورها.

6.4.3 مبرهنة

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ عائلة من أعداد حقيقيّة. تكون عندئذ القضايا الثلاث التالية متكافئة:

1) العائلة $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$.

2) العائلة $(|x_i|)_{i\in I}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$.

3) مجموعة المجاميع الجزئيّة المنتهية للعائلة $(|x_i|)_{i\in I}$ محدودة.

إثبات

1) $\Leftarrow$ 2)

لتكن I_1 مجموعة الأدلّة i، التي من أجلها يكون $x_i\geq 0$ و I_2 مجموعة الأدلّة i التي من أجلها يكون $x_i<0$. إنّ العائلتين الجزئيّتين $(x_i)_{i\in I_1}$ و $(x_i)_{i\in I_2}$ قابلتان للجمع بموجب القضية (1.3.3). ولمّا كانت I_1 و I_2 تؤلّفان تجزئة لِـ I وكان $\mathbb{R}$ بناخيّا، فإنّ المبرهنة (2.3.3) قابلة للتطبيق وعن ذلك ينجرّ المطلوب.

2) $\Leftarrow$ 1)

هذا الاستلزام نتيجة مباشرة للقضيّة (4.3.3).

2) $\Leftrightarrow$ 3)

هذا التكافؤ إعادة للمبرهنة (1.4.3) بعينها.

إنّ هذه المبرهنة تنطوي على نتيجة ملفتة للانتباه، وهي أنّ القابليّة للجمع في $\mathbb{R}$ تكافئ القابليّة للجمع مطلقا. إنّ هذا غير معهود في مفهوم التقارب عند السلاسل كما يبرزه حال السلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{n}$، المتقاربة وغير قابلة للجمع. هذه خاصيّة ليست في الواقع حكرا على عائلات الأعداد الحقيقيّة وحدها، وإنّما تتمتّع بها كلّ عائلة معرّفة في فضاء نظيميّ ذي بعد منته. سوف يأتي ذلك مفصّلا بعد حين.

7.4.3 قضية

إذا كانت $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ و $(y_\mu)_{\mu\in M}$ عائلتين قابلتين للجمع في $\mathbb{R}$ فإنّ العائلة $(x_\lambda y_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ تكون عندئذ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$. وعلاوة على ذلك لدينا:

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in L\times M} x_\lambda y_\mu = \left(\sum_{\lambda\in L} x_\lambda\right)\left(\sum_{\mu\in M} y_\mu\right).$$

إثبات

إنّ كلّ جزء منته من $L\times M$ محتوى في جزء منته من النمط $H\times K$ حيث H جزء منته من L و K جزء منته من M. من جهة أخرى، يوجد فرضا، عدد $0<\alpha$ بحيث $\sum_{\lambda\in H}|x_\lambda|\le\alpha$ و $\sum_{\mu\in K}|y_\mu|\le\alpha$، وذلك من أجل كلّ جزء منته H من L وجزء منته K من M. وعليه يأتي:

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in H\times K}\left|x_{\lambda}y_{\mu}\right| = \sum_{\lambda\in H}\left|x_{\lambda}\right| \sum_{\mu\in K}\left|y_{\mu}\right| \le \alpha^{2}.$$

يستدلّ من هذه المتباينة أنّ العائلة $(x_{\lambda}y_{\mu})$ قابلة للجمع في طبقا للمبرهنة (6.4.3). وبمقتضى التجميع، يكون لدينا:

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in L\times M} x_{\lambda}y_{\mu} = \sum_{\lambda\in L}\left(\sum_{\mu\in M} x_{\lambda}y_{\mu}\right) = \sum_{\lambda\in L} x_{\lambda}\left(\sum_{\mu\in M} y_{\mu}\right) = \left(\sum_{\lambda\in L} x_{\lambda}\right)\left(\sum_{\mu\in M} y_{\mu}\right).$$

5.3 العائلات القابلة للجمع مطلقا في فضاء بناخيّ

1.5.3 تعريف

نقول عن عائلة $(x_i)_{i\in I}$ من فضاء بناخيّ $(E,\|.\|)$ إنّها قابلة للجمع مطلقا في E إذا كانت العائلة $(\|x_i\|)_{i\in I}$ قابلة للجمع في .

2.5.3 قضية

إذا كان E فضاء بناخيّا فإنّ كلّ عائلة قابلة للجمع مطلقا فيه تكون قابلة للجمع.

إثبات

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ العائلة المعنيّة. فمن أجل كلّ جزء منته K من I يكون لدينا:

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\| \le \sum_{i\in I}\|x_i\|.$$

يتّضح جليّا أنّه لو حقّقت العائلة $(\|x_i\|)_{i\in I}$ مقياس كوشي لحقّقته العائلة $(x_i)_{i\in I}$ لزوما، وهو ما يجعل هذه الأخيرة قابلة للجمع، ذلك أنّ E بناخيّ.

3.5.3 ملحوظة

إنّ عكس هذه القضيّة خاطئ عموما.

لنعتبر، بغية تبيان ذلك، الفضاء E المؤلّف من المتتاليات الحقيقيّة المحدودة $x=(x_n)_n$ والمزوّد بالنظيم $\|x\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. نعرّف المتتالية $x_m=(x_n(m))_{m\in\mathbb{N}}$ على النحو:

$$\begin{cases} x_n(0)=0, \\ x_n(m)=0 \quad ; \quad m\neq n, \\ x_m(m)=\dfrac{1}{m} \quad ; \quad m=n. \end{cases}$$

نتحقّق دونما عناء أنّ هذه المتتالية قابلة للجمع في E وأنّ مجموعها، المرموز له بـ $a=(a_n)_n$، معرّف بِـ :

$$\begin{cases} a_0(0)=0, \\ a_n=\dfrac{1}{n} \quad ; \quad n\neq 0, \end{cases}$$

بيد أنّ هذه المتتالية ليست قابلة للجمع مطلقا، إذ أنّ $\|x_m\|=\dfrac{1}{m}$ وأنّ العائلة $\left(\dfrac{1}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ ليست قابلة للجمع في $\mathbb{R}$.

يعزى وجود مثل هذه العائلات القابلة للجمع وغير القابلة للجمع مطلقا إلى أنّ الفضاء الذي تعرّف فيه ذو بعد غير منته. إنّ الأمر خلاف ذلك في الفضاءات النظيميّة ذات أبعاد منتهية. وبالفعل لدينا:

4.5.3 قضية

إنّ مفهوم القابليّة للجمع والقابليّة للجمع مطلقا متطابقان في كلّ فضاء نظيميّ ذي بعد منته.

وبعبارة أخرى، إذا كان E فضاء نظيميّا ذا بعد منته وكانت $(x_i)_{i\in I}$ عائلة منه، فإنّه لكي تكون هذه الأخيرة قابلة للجمع يلزم ويكفي أن تكون قابلة للجمع مطلقا.

إثبات

يتعلّق الأمر، بطبيعة الحال، بإثبات لزوم الشرط فقط، ذلك أنّ كفاية الشرط واضحة.

نعلم أنّ كلّ فضاء نظيميّ ذي بعد منته n متشاكل طبولوجيّا مع K^n. يكفي أن نبيّن دعوانا في □^{n}. لتكن $(x_i)_{i\in I}$ عائلة من نقاط من □^{n} بحيث $x_i=(x_{ik})_{1\le k\le n}$. نزوّد □^{n} بالنظيم $\|.\|_1$. إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع في □^{n} فإنّه من أجل كلّ k من $\{1,2,\dots,n\}$ تكون العائلة $(x_{ik})_{i\in I}$ من أعداد حقيقيّة قابلة للجمع في □؛ وعليه، تكون العائلة $(|x_{ik}|)_{i\in I}$ كذلك. ولمّا كان:

$$\|x_i\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_{ik}|,$$

فإنّ العائلة $(\|x_i\|_1)_{i\in I}$ التي هي مجموع لِـ n عائلة قابلة للجمع، قابلةٌ للجمع.

6.3 عائلات الدوال القابلة للجمع

1.6.3 تعريف

ليكن F فضاء نظيميّا على K ولتكن E مجموعة غير خالية و $(f_i)_{i\in I}$ عائلة من دوال منطلقها E ومستقرّها F.

نقول عن العائلة $(f_i)_{i\in I}$ إنّها قابلة للجمع بانتظام على E ومجموعها f إذا حقّقت:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J_0(\varepsilon) \in \Lambda / \forall J \in \Lambda :$$
$$J_0 \subseteq J \quad \Rightarrow \quad \left\| S_J(x) - f(x) \right\| \le \varepsilon,\ \forall x \in E.$$

2.6.3 تعريف

نقول عن العائلة $(f_i)_{i\in I}$ إنّها تحقّق مقياس كوشي المنتظم إذا امتلكت الخاصيّة الموالية:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J_0(\varepsilon) \in \Lambda / \forall K \in \Lambda :$$
$$J_0 \cap K = \phi \quad \Rightarrow \quad \left\| S_K(x) \right\| \le \varepsilon,\ \forall x \in E.$$

(للرمز Λ نفس المدلول الممنوح له في مطلع هذا الفصل.)

إذا تمعنّا في هذين التعريفين تبيّن لنا دونما عناء أنّ كلّ عائلة $(f_i)_{i\in I}$ت حقّق مقياس كوشيّ المنتظم بمجرّد أن تكون قابلة للجمع بانتظام.

وبالعكس، لنفترض توفّر مقياس كوشي المنتظم وأنّ F بناخيّ. في هذه الحالة، ومن أجل كلّ عنصر x من E تكون العائلة $(f_i(x))_{i\in I}$ قابلة للجمع في F. ولكن لدينا فرضا:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J_0(\varepsilon) \in \Lambda / \forall J, J' \in \Lambda :$$
$$J_0 \subseteq J, J_0 \subseteq J' \quad \Rightarrow \quad \left\| S_J(x) - S_{J'}(x) \right\| \le \varepsilon.$$

لنثبّت J. من أجل كلّ x من E تكون $S(x)$ عندئذ نهاية للمجاميع $S_{J'}(x)$. ومنه:

$$\left\| S_J(x) - S(x) \right\| \le \varepsilon,$$

من أجل كلّ جزء J من Λ بحيث $J_0 \subseteq J$. إنّ هذا يدلّ على أنّ العائلة $(f_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع بانتظام على E .

نلخّص هذه النتيجة على النحو الموالي:

3.6.3 مبرهنة (مقياس كوشي)

لتكن $(f_i)_{i\in I}$ عائلة من دوال منطلقة من مجموعة E نحو فضاء بناخيّ F . تكون العائلة $(f_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع بانتظام على E إذا وفقط إذا حقّقت مقياس كوشي المنتظم.

4.6.3 قضية

لتكن $(f_i)_{i\in I}$ عائلة من دوال منطلقها فضاء طبولوجيّ E ومستقرّها فضاء نظيميّ F .

إذا كانت كلّ واحدة من الدوال f_i مستمرّة وكانت العائلة $(f_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع بانتظام كان مجموعها S عندئذ مستمرّا كذلك.

إثبات

وبالفعل، فإنّ المجموع S هو نهاية منتظمة للدوال المستمرّة S_J . وعليه، فإنّ S يضحى مستمرّا كذلك.

5.6.3 تعريف (القابليّة للجمع ناظميّا)

لتكن $(f_i)_{i\in I}$ عائلة من دوال من مجموعة E نحو فضاء نظيميّ F . نقول عن هذه العائلة إنّها قابلة للجمع ناظميّا في E إذا وجدت عائلة قابلة للجمع $(\alpha_i)_{i\in I}$ من أعداد موجبة بحيث:

$$\forall i \in I \ \ \forall x \in E \ \ \|f_i(x)\| \le \alpha_i .$$

من الواضح أنّ هذا الشرط يفيد أنّ العائلة $(f_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع مطلقا

في الفضاء $\mathscr{B}(E,F)$، المؤلّف من الدوال المحدودة من E نحو F والمزوّد بنظيم التقارب المنتظم.

6.6.3 قضية

إذا كانت $(f_i)_{i\in I}$ عائلة من دوال، منطلقها مجموعة E ومصبّها فضاء بناخيّ F قابلة للجمع ناظميّا فإنّها تكون عندئذ قابلة للجمع بانتظام.

إثبات

إنّ المتباينة:

$$\left\|\sum_{i\in K} f_i(x)\right\| \le \sum_{i\in K}\alpha_i,$$

تبيّن أنّ العائلة $(f_i)_{i\in I}$ تحقّق مقياس كوشي المنتظم. إنّها قابلة للجمع بانتظام بمقتضى ذلك.

7.3 مسائل محلولة

1) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ عائلة من أعداد ناطقة بحيث:

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!} & ;\ n>0,\\ 4 & ;\ n=0,\\ \dfrac{-1}{(-n)!} & ;\ n<0.\end{cases}$$

نضع $I_1=\mathbb{N}$ و $I_2=\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$

1) اثبت أنّ $(u_n)_{n\in I_1}$ و $(u_n)_{n\in I_2}$ قابلتان للجمع في $\mathbb{Q}$ واحسب مجموعيهما.

2) استنتج أنّ هاتين العائلتين ليستا قابلتين للجمع في $\mathbb{Q}$.

3) اثبت أنّ العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$ واحسب مجموعها.

4) إلى أيّة نتيجة وصلنا ؟

2) ليكن $I=[1,+\infty[$. ادرس طبيعة العائلة $U_x=\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in I}$ في الحالتين:

أ. $I=[1,+\infty[$

ب. $I=]0,1]\cap\mathbb{Q}$

3) ليكن $I=[1,+\infty[\cap\mathbb{Q}$. ادرس طبيعة العائلة $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in I}$.

4) ليكن α عددا حقيقيّا موجبا أو معدوما. نرمز بِ E_α لمجموعة المتتاليات u من E التي من أجلها تكون السلسلة ذات الحدّ العام $(n+1)^\alpha u(n)$ متقاربة مطلقا. إذا كان u عنصرا من E_α وضعنا:

$$N_\alpha(u)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^\alpha\|u(n)\|.$$

1) أ. اثبت أنّ E_α فضاء شعاعيّ وأنّ N_α نظيم على E_α.

ب. ما هي علاقة الاحتواء الموجودة بين E_α و E_β إذا ما ارتبط α و β بالعلاقة $0\le\alpha<\beta$.

نفترض أنّ $E=\mathbb{R}$ في كلّ ما تبقّي من المسألة.

ج. نضع :

$$u(n)=a^n,$$

حيث a عدد حقيقيّ كيفيّ. ميّز مجموعة قيم a التي من أجلها تضحى المتتالية u عنصرا من E_α.

د . نعرّف على مجموعة المتتاليات الحقيقيّة قانون تركيب داخليّ مرموز له بِ Δ على النحو التالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u\Delta v)(n) = u(0)v(n) + u(1)v(n-1) + ... + u(n)v(0).$$

اثبت أنّه إذا كان u و v منتميين إلى E_α فإنّ $u\Delta v$ يضحى منتميا إلى E_α كذلك. وفضلا عن ذلك لدينا:

$$N_\alpha(u\Delta v) \leq N_\alpha(u)\, N_\alpha(v).$$

هـ. لتكن $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر من E_α بحيث تكون السلسلة ذات الحدّ العام u_p متقاربة مطلقا في الفضاء النظيميّ (E_α, N_α).

برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعيّ k فإنّ السلسلة $\sum_{p\geq 0} u_p(k)$ تكون متقاربة.

و. استخلص أنّ السلسلة ذات الحدّ العامّ u_p متقاربة في الفضاء النظيميّ (E_α, N_α) وأنّ:

$$\sum_{p\geq 0} u_p = v,$$

حيث:

$$v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$k \mapsto v(k) = \sum_{p\geq 0} u_p(k).$$

2) نحتفظ بترميزة الجزء (1) أعلاه. نرفق بكلّ عنصر u من E_0 دالّة مستمرّة f على المجال $[0,\pi]$ ومعرّفة وفق الصيغة التالية:

$$\forall x \in [0,\pi] \;\; f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n) \cos nx.$$

نرمز بِ A للتطبيق المعرّف من E_0 نحو مجموعة الدوال المستمرّة على $[0,\pi]$ التي سبق وصفها. من أجل كلّ $0 \leq \alpha$ نضع $A_\alpha = A(E_\alpha)$.

أ. اثبت أنّ A تطبيق خطيّ ومتباين على E_α وأنّ التشاكل العكسيّ على E_0 معطى بواسطة الدستور:

$$\begin{cases} u(0)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx, \\ u(n)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;\ n\geq 1. \end{cases}$$

ب. استنتج أنّه من أجل كلّ $0\leq\alpha$ يكون A_α فضاء شعاعيّا على $\mathbb{R}$ وأنّ التطبيق:

$$f\mapsto \|f\|_\alpha = N_\alpha\left(A^{-1}(f)\right),$$

نظيم على A_α يحقّق الشرط:

$$\sup_{0\leq x\leq\pi}|f(x)|\leq\|f\|_\alpha .$$

ج. لتكن $(f_n)_n=(A(u_n))_n$ متتالية من A_α (حيث (u_n) من E_α).

اثبت أنّه إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا في (E_α,N_α) كانت السلسلة $\sum f_n(x)$ متقاربة بانتظام نحو $f(x)$ على $[0,\pi]$، حيث:

$$f=A(u),\ \ u=\sum_{n\geq 0}u_n.$$

(يمكنك استخدام البنود أ . هـ . و).

د. ليكن n و p عددين طبيعيّين بحيث $n\geq p$ وليكن α عددا حقيقيّا غير معدوم. اثبت أنّ الدالّة:

$$x\mapsto\cos px\cos(n-p)x=g(x),$$

ينتمي إلى A_α وأنّ نظيمه في A_α أصغر من $(n+1)^\alpha$.

هـ. ليكن $0\leq\alpha$ و f و g عنصرين من A_α. اثبت أنّ $f.g$ ينتمي إلى A_α وأنّ:

$$\|fg\|_\alpha\leq\|f\|_\alpha\|g\|_\alpha .$$

(يمكنك من أجل ذلك أن تضع:

$$f(x)=\sum_{p\in\mathbb{N}}u(p)\cos px,\ \ g(x)=\sum_{q\in\mathbb{N}}v(q)\cos qx,$$

$$h_n(x) = \sum_{p\in □} u(p)\,v(n-p)\,\cos px\,\cos(n-p)x;$$

ثمّ بيّن عندئذ صحّة العلاقتين:

$$\|h_n\| \le (n+1)^{\alpha}\left(|u|\Delta|v|\right)(n),$$
$$\sum_{n\in □}\|h_n\| \le N_{\alpha}(u)N_{\alpha}(v)$$

واستخدم الفرع 2.ج).

8.3 حلول

1) 1) العائلة الجزئيّة $(u_n)_{n\in I_1}$ ذات حدود موجبة. تتطابق قابليّتها للجمع مع تقارب السلسلة التي تعرّفها. هذه السلسلة واضح تقاربها في □ إذ أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_n = 4+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n!} = 4+e-1 = 3+e.$$

بوضع:

$$: v_n = -u_n,\ n\in I_2,$$

تصبح العائلة الجزئيّة $(v_n)_n$ ذات حدود موجبة وتحقّق:

يترتّب عن هذا الحساب أنّ العائلة الجزئيّة الابتدائيّة $(u_n)_{n\in I_2}$ قابلة للجمع وأنّ مجموعها هو $1-e$.

2) العددان $3+e$ و $1-e$ الممثّلان لمجموعي العائلتين الجزئيّتين ليسا ناطقين. ولمّا كانا وحيدين تبيّن أنّه لا يمكن لهاتين العائلتين أن تتقاربا في □.

3) العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع مطلقا في $\mathbb{R}$. نستخلص أنّها قابلة للجمع. نحصل بمقتضى مبرهنة التجميع على:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in I_2} u_n + \sum_{n\in I_1} u_n = 4.$$

نستنتج أنّ العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$ وأنّ مجموعها يساوي 4.

4) يقدّم التمرين الحاضر عائلة قابلة للجمع من دون أن تكون عائلتان جزئيّتان منها كذلك. يبرز هذا أنّ النتيجة المحمولة في القضية (1.3.3) خاطئة إن لم يكن الفضاء المرجعيّ E بناخيّا.

2) أ. نقترح طريقتين.

الأولى:

نلاحظ أنّ العائلة المقترحة ذات حدود موجبة. لكي تكون قابلة للجمع يلزم ويكفي أن تكون مجموعة مجاميعها الجزئيّة $\left\{\sum_{x\in J} u_x,\ J\in\mathscr{F}(I)\right\}$ محدودة. (ترمز $\mathscr{F}(I)$ لعائلة أجزاء I المنتهية). من أجل كلّ عدد طبيعيّ n نضع:

$$J_n = \left\{k\in\mathbb{N}^* / k\le n\right\}.$$

يأتي عندئذ أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad J_n\subset I.$$

وفضلا عن ذلك:

$$\sum_{x\in J_n}\frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

وبما أنّ السلسلة الريمانيّة $\sum \frac{1}{x}$ متباعدة و $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$ فإنّ مجموعة مجاميعها الجزئيّة $\sum_{x\in J_n}\frac{1}{x}$ ليست محدودة. نستخلص إذن أنّ العائلة $\sum_{x\in I}\frac{1}{x}$ ليست قابلة للجمع.

الثانية:

إنّ العائلة $\sum_{x\in I}\frac{1}{x}$ ليست قابلة للجمع. لو حصل العكس لأضحت المجموعة $\left\{x\in I / \frac{1}{x}>0\right\}$ قابلة للعدّ، وهو أمر مستبعد.

ب. من أجل كلّ عدد طبيعيّ n نضع:

$$J_n=\left\{\frac{1}{k}\in\square \ / k\le n\right\}.$$

لدينا:

$$\forall n\in\square^{*}\quad J_n\subset I.$$

وزيادة على ذلك:

$$\sum_{x\in J_n}\frac{1}{x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

نخلص من هذا إلى أنّ المجموعة $\left\{\sum_{x\in J_n}\frac{1}{x},\ n\in\square^{*}\right\}$ ليست محدودة، وهو ما يضمن عدم قابلية الجماعة $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in I}$ للجمع.

3) نعلم أنّ:

$$(u_x)_{x\in I} \text{ قابلة للجمع } \Leftrightarrow \left\{\sum_{x\in J}u_x,\ J\in\mathscr{F}(I)\right\} \text{ محدودة.}$$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع:

$$J_n = \left\{ \frac{k+1}{k} / 0 < k \leq n \right\}.$$

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n \subset I.$$

وعلاوة على ذلك:

$$\sum_{x \in J_n} \frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1} \right)^2.$$

ولمّا كانت السلسلة $\sum \left(\frac{k}{k+1} \right)^2$ متباعدة (الشرط اللازم غير متوفّر)

حصلنا على:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 = +\infty.$$

نستنتج أنّ مجموعة مجاميعها الجزئيّة ليست محدودة. هكذا، تكون العائلة المطروحة غير قابلة للجمع.

4) 1) أ. إنّ العلاقتين:

$$(n+1)^\alpha \|u(n)+v(n)\| \leq (n+1)^\alpha \|u(n)\| + (n+1)^\alpha \|v(n)\|,$$
$$(n+1)^\alpha \|\lambda u(n)\| = |\lambda| (n+1)^\alpha \|u(n)\|,$$

تبيّنان أنّه إذا كان u و v عنصرين من E_α و λ عنصرا من K أضحى $u+v$ و λu عندئذ عنصرين من E_α، وهو ما يجعل هذا الأخير فضاء شعاعيّا جزئيّا من فضاء متتاليات E الشعاعيّ. ومن جهة أخرى تسمح هاتان العلاقتان بالحصول كذلك على:

$$\forall\ u,v \in E_\alpha \quad N_\alpha(u+v) \leq N_\alpha(u) + N_\alpha(v),$$
$$\forall\ \lambda \in \mathrm{K} \quad \forall u \in E_\alpha \quad N_\alpha(\lambda u) = |\lambda| N_\alpha(u).$$

وإذا أضفنا إلى هذا، العلاقة البائنة الموالية:

$$N_\alpha(u)=0 \iff u=0.$$

اتّضح جليّا أنّ N_α نظيم على E_α.

ب. إذا كان α و β عددين مقيّدين بالشرط $0\le\alpha<\beta$ جاء توّا:

$$(n+1)^\alpha\|u(n)\|\le(n+1)^\beta\|u(n)\|.$$

وعلى ضوء هذه المتباينة يأتي على الفور أنّ E_β محتوى في E_α.

وبالخصوص لدينا:

$$E_\beta\subset E_0 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}_+.$$

ج. لندرس السلسلة ذات الحدّ العامّ $u(n)=a^n$. نميّز حالتين:

إذا كان $|a|\ge 1$ فإنّ المقدار $(n+1)^\alpha|a|^n$ لا يؤول إلى الصفر مهما تغيّر α في $\mathbb{R}_+$. وعليه:

$$\forall\alpha\ge 0 \quad u\notin E_\alpha.$$

إذا كان $|a|<1$ فإنّ قاعدة دالامبير[1] تبيّن، تبعا للنسبة:

$$\left|\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{u(n+1)}{u(n)}\right|=\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha|a|,\ (n+1)^\alpha|a|^n$$

التي تؤول إلى $|a|$، لمّا يؤول n إلى $+\infty$، أنّ u تنتمي إلى E_α، وهذا من أجل كلّ $0\le\alpha$.

د. إذا كان u و v عنصرين من E_α فإنّ:

21. Jean Le Rond d'Alembert : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 17 نوفمبر 1717 بباريس ومات بها في 29 أكتوبر 1783. انشغل بالعديد من التخصّصات: علم الأصول، الفلسفة، الطبّ، الميكانيكا، غير أنّه كان مستقطبا أكثر من قبل الرياضيّات. نشر عام 1744 مؤلّفا حول توازن وحركة السوائل.

$$N_\alpha(u)N_\alpha(v)=\left(\sum_{k\geq 0}(k+1)^\alpha\left|u(k)\right|\right)\left(\sum_{k\geq 0}(k+1)^\alpha\left|v(k)\right|\right).$$

وإذا استحضرنا خاصية ضرب السلاسل المتقاربة مطلقا أمكننا عندئذ أن نكتب:

$$N_\alpha(u)N_\alpha(v)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{n}(p+1)^\alpha(n-p+1)^\alpha\left|u(p)\right|\left|v(n-p)\right|\right)$$
$$\geq\sum_{n\geq 0}(n+1)^\alpha\left(\sum_{p=0}^{n}\left|u(p)\right|\left|v(n-p)\right|\right).$$

(ذلك لأنّ $(p+1)(n-p+1)\geq(n+1)$). نستخلص من هذه المتباينة أنّ $u\Delta v$ عنصر من E_α و:

$$N_\alpha(u\Delta v)\leq N_\alpha(u)N_\alpha(v).$$

ه. إنّ المتراجحة :

$$\left|u_p(k)\right|\leq N_\alpha(u_p),$$

الصحيحة من أجل كلّ عدد طبيعيّ k، تستلزم التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{p\in\mathbb{N}}u_p(k)$، وهو الأمر الذي يقتضي تقارب السلسلة المذكورة.

و. لنعتبر العائلة $\left((k+1)^\alpha u_p(k)\right)_{(p,k)\in\mathbb{N}^2}$. إنّ المتباينة:

$$(k+1)^\alpha\left|u_p(k)\right|\leq N_\alpha(u_p),$$

تبيّن أنّ العائلة المذكورة قابلة للجمع مطلقا وأنّ:

$$\sum_{p=k}(k+1)^\alpha\left|u_p(k)\right|\leq\sum_{p\in\mathbb{N}}N_\alpha(u_p).$$

يمكن والحال هذه، تطبيق مبرهنة التجميع لكتابة:

$$\sum_{p,k}(k+1)^{\alpha}\left|u_p(k)\right| = \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(k+1)^{\alpha}\left|u_p(k)\right|\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}(k+1)^{\alpha}\left|u_p(k)\right|\right)$$

$$\geq \sum_{k\in\mathbb{N}}(k+1)^{\alpha}\left|\sum_{p\in\mathbb{N}}u_p(k)\right| \geq \sum_{k\in\mathbb{N}}(k+1)^{\alpha}\left|v_k\right|,$$

وهو ما يضمن انتماء v إلى E_α. ومن جهة أخرى، إذا كان M عددا طبيعيّا فإنّ:

$$\sum_{k=0}^{M}(k+1)^{\alpha}\left|v_k-\sum_{p=0}^{n}u_p(k)\right| \leq \sum_{k=0}^{M}(k+1)^{\alpha}\left|\sum_{p=n}^{+\infty}u_p(k)\right|.$$

إنّ الطرف الأيمن من هذه المتباينة يمكن جعله صغيرا بالقدر المرغوب فيه بمجرّد أن يكون n كبيرا بقدر كاف. نستخلص إذن:

$$\lim_{n\to\infty} N_\alpha\left(v-\sum_{p=0}^{n}u_p\right)=0,$$

أي أنّ السلسلة $\sum u_p$ متقاربة نحو v في (E_α, N_α).

2) أ. إنّ A واضح الخطيّة والتباين وأنّ السلسلة $\sum u(n)\cos nx$ متقاربة ناظميّا. يضحى من المشروع تبعا لذلك القيام بمكاملتها حدّا حدّا. تسفر هذه العملية عن:

$$u_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad n=0,$$

$$u(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx, \quad n\geq 1.$$

نستنتج من هاتين المساواتين أنّ A غامر وهو ما يجعل A^{-1} معرّفا بالمساواتين نفسيهما.

ب. نتحقّق بسهولة من أنّ $\|\cdot\|_\alpha$ نظيم على A_α وأنّ A_α متشاكل مع E_α. ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\forall x\in[0,\pi]\ \ |f(x)|\le\sum_{n\in\mathbb{N}}|u(n)\cos nx|\le\sum_{n\in\mathbb{N}}|u(n)|\le N_\alpha(u)=\|f\|_\alpha .$$

ومنه:

$$\sup_{0\le x\le\pi}|f(x)|\le\|f\|_\alpha .$$

ج. لنضع $\|f\|_\infty=\sup_{0\le x\le\pi}|f(x)|$. إنّ العلاقة:

$$\|f_n\|_\infty\le\|f_n\|_\alpha=N_\alpha(u_n)$$

تبرز أنّ تقارب السلسلة $\sum u_n$ في (E_α,N_α) يقتضى التقارب المنتظم للسلسلة $\sum f_n$. وعليه، فإنّ العلاقة:

$$\left\|f-\sum_{n=0}^{p}f_n\right\|_\alpha=N_\alpha\left(u-\sum_{n=0}^{p}u_n\right).$$

تبيّن أنّه إذا كان $f=\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ و $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ كان لدينا $f=A(u)$.

د. لنكتب الدالّة g على هذا النحو:

$$g(x)=\cos px\cos(n-p)x=\frac{1}{2}(\cos nx+\cos qx),$$

حيث $q=|n-2p|$.

إذا كان $0<p<n$ فإنّ $q<n$. وعليه، يأتي أنّ العنصر:

$$u=A^{-1}(g)=(0,0,\dots,\underset{\underset{(q)}{\uparrow}}{\frac{1}{2}},0,\dots,\underset{\underset{(n)}{\uparrow}}{\frac{1}{2}},0,\dots)$$

ينتمي إلى E_α وأنّ:

$$\|g\|_\alpha=N_\alpha(u)=\frac{1}{2}\left((q+1)^\alpha+(n+1)^\alpha\right)\le(n+1)^\alpha .$$

وإذا كان $p=n$ أو $p=0$ فإنّ $g(x)=\cos x$ و $\|g\|_\alpha=(n+1)^\alpha$.

نستخلص في الأخير أنّ g عنصر من A_α وأنّ نظيمه يحقّق، في كلّ الحالات، المتباينة المطلوبة.

هـ. لنضع:

$$f(x)g(x)=\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}u(p)\cos px\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}}v(q)\cos qx\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}h_n(x).$$

إنّ السلسلتين الواردتين في هذا الجداء متقاربتان مطلقا. ومن جهة أخرى، لدينا:

$$h_n(x)=\sum_{p=0}^{n}u(p)v(n-p)\ \cos px\ \cos(n-p)x\in A_\alpha;$$

$$\left\|h_n\right\|_\alpha\leq\sum_{p=0}^{n}(n+1)^\alpha\left|u(p)\right|\left|v(n-p)\right|=(n+1)^\alpha\left(\left|u\right|\Delta\left|v\right|\right)(n).$$

وعليه:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left\|h_n\right\|_\alpha\leq N_\alpha(u)N_\alpha(v).$$

نستخلص أنّ السلسلة $\sum h_n$ متقاربة في A_α نحو عنصر h وأنّ $h=fg$ عنصر من A_α. يأتي هكذا أنّ A_α جبر نظيميّ.

9.3 مسائل للبحث

5) لتكن العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ المعرّفة بِـ :

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{z^n}{n!} & ;\ n\geq 0,\\[2mm] \dfrac{z^n}{(-n)!} & ;\ n<0.\end{cases}$$

1) اثبت أنّها قابلة للجمع أيّا كان z من $\mathbb{C}$.

2) احسب مجموعها.

6) لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين ناطقتين معرّفتين بِـ :

$$u_n = \frac{1}{n!}, \qquad v_n = \begin{cases} 3 & ; \ n=0, \\ -\dfrac{1}{n!} & ; \ n\neq 0. \end{cases}$$

نضع:

$$w_{2n} = u_n ;\ w_{2n+1} = -v_n ,$$

1) تأكّد من أنّ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ناطقة.

2) اثبت أنّ $(|w_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$.

3) اثبت أنّ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$.

4) هل $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للجمع في $\mathbb{Q}$؟ اعط تأويلا لذلك.

7) لتكن $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ متتاليتين حقيقيّتين. نفترض أنّ السلسلتين $\sum x_n^2$ و $\sum y_n^2$ متقاربتان. اثبت عندئذ أنّ السلسلة $\sum x_n y_n$ متقاربة مطلقا.

8) لتكن $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ و $(y_\mu)_{\mu\in M}$ عائلتين قابلتين للجمع من أعداد عقديّة.
اثبت عندئذ أنّ العائلة $(x_\lambda y_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ قابلة للجمع وأنّ:

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in L\times M} x_\lambda y_\mu = \left(\sum_{\lambda\in L} x_\lambda\right)\left(\sum_{\mu\in M} y_\mu\right).$$

9) ليكن E و F فضاءين نطيميّين و G فضاء بناخيّا. وليكن f من

ولتكن $\mathscr{L}(E\times F,G)$ ولتكن $(a_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع في E و S مجموعها ولتكن $(b_i)_{i\in I}$ عائلة قابلة للجمع في F و S' مجموعها.

اثبت أنّه إذا كانت $(a_i)_{i\in I}$ و $(b_i)_{i\in I}$ قابلتين للجمع مطلقا كانت العائلة $(f(a_i,b_i))_{i\in I}$ كذلك، ومجموعها يساوي $f(S,S')$.

(10 ليكن f عنصرا من $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ بحيث $f(0)=0$. ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة. اثبت أنّه إذا كانت السلسلتان $\sum x_n$ و $\sum x_n^2$ متقاربتين

أضحت السلسلة $\sum f(x_n)$ كذلك.

(11 ليكن E و F فضاءين نظيميّين و G فضاء بناخيّا. وليكن f من $\mathscr{L}(E\times F,G)$ و $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متتاليتين من E و F على الترتيب.

اثبت أنّه إذا كانت السلسلتان $\sum a_n$ و $\sum\|b_n-b_{n+1}\|$ متقاربتين فإنّ السلسلة $\sum f(a_n,b_n)$ تكون كذلك.

(12 لتكن I و J مجموعتين غير خاليتين و $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ عائلة قابلة للجمع من فضاء بناخيّ E.

1) اثبت عندئذ أنّه من أجل كلّ i من I تكون العائلة $(x_{i,j})_{i,j}$ قابلة للجمع. نرمز لمجموعها بـ S_i.

2) بيّن أنّ العائلة $(S_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع وأنّ:

$$\sum_{i\in I}S_i=\sum_{(i,j)\in I\times J}x_{i,j}.$$

13) ليكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$. نفترض أنّ مشتقّها f' رتيب وأنّ السلسلة $\sum f'$ متقاربة. اثبت عندئذ أنّ المتتالية:

$$u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) - \int_1^n f(t)dt,$$

متقاربة.

(إرشاد: يمكن تبيين أنّ f تقبل نهاية لمّا x يؤول إلى $+\infty$.)

4

الفضاءات الهيلبرتيّة

نتناول هنا الفضاءات الهيلبرتيّة التي **تعدّ ضربا هامّا آخر من ضروب الفضاءات النظيميّة**، المؤلّفة دراستها هدف بابنا الثالث هذا.

1.4 الجداء السلّميّ وخصائصه

1.1.4 تعريف

ليكن E و F فضاءين شعاعيّين على K ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$).

نسمّي **شكلا شبه ثنائي الخطّيّة** معرّفا من E^2 نحو K، كلّ تطبيق u منبعه E^2 ومصبّه K، يكون خطّيّا بالنسبة إلى ا لمتغيّر الأوّل و**نصف خطّي** بالنسبة إلى المتغيّر الثاني.

وبعبارة أخرى، نكتب:

من أجل كلّ y مثبّت في E يكون التطبيق الجزئيّ $x \mapsto u(x,y)$ خطّيّا؛

ومن أجل كلّ x مثبّت في E يكون التطبيق الجزئيّ $y \mapsto u(x,y)$ نصف خطّيّ. يمكن تلخيص ما سبق على هذا النحو:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}, \forall\ x, x', x'', y, y', y'' \in E:$$
$$u(\alpha x' + \beta x'', y) = \alpha u(x', y) + \beta u(x'', y),$$
$$u(x, \alpha y' + \beta y'') = \overline{\alpha} u(x', y) + \overline{\beta} u(x, y'').$$

يتّضح من خلال هذا التعريف أنّه إذا كان $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ غدا u آنئذ شكلا ثنائي الخطّيّة.

2.1.4 تعريف

نقول عن الشكل شبه ثنائي الخطّيّة u إنّه **هيرميتيّ** إذا حقّق:

$$\forall\ x, y \in E \quad u(y, x) = \overline{u(x, y)}.$$

وإذا كان $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ قيل عن u في هذه الحالة إنّه **متناظر!**

3.1.4 مثالان

$$u_1:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C} \qquad (1$$

$$(x,y)\mapsto u_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}.$$

$$u_2:\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{C}\big)\times\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{C}\big)\to\mathbb{C} \qquad (2$$

$$(f,g)\mapsto u_2(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

(تأكّد من أنّ هذين التطبيقين يحقّقان التعريفين أعلاه.)

4.1.4 قضية

إذا كان u شكلا هيرميتيّا فإنّه من أجل كلّ x و y من E يكون لدينا:

$$u(x+y,x+y)+u(x-y,x-y)=2\big(u(x,x)+u(y,y)\big), \quad (1$$

$$u(x+y,x+y)-u(x-y,x-y)=4\,\mathrm{Re}\,u(x,y).\,^{\downarrow} \quad (2$$

إثبات

يكفي استخدام خطّيّة u وكونه هيرميتيّا!

إنّ العلاقة الأولى من هذه القضيّة مشهورة تحت تسمية **متطابقة متوازي الأضلاع** سوف نعلّل ذلك بعد حين.

5.1.4 قضية

إذا كان u شكلا شبه ثنائي الخطّيّة على E^2 فإنّه يكون لدينا عندئذ:

↓ يرمز $\mathrm{Re}\,u(x,y)$ للجزء الحقيقيّ من العدد $u(x,y)$.

$$u \text{ هيرميتيّ } \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in E \;\; u(x,x) \in \mathbb{R}$$

إثبات

إنّ لزوم الشرط واضح، ذلك لأنّ العدد $u(x,x)$ حقيقيّ بموجب كون u هيرميتيّا، أي أنّ:

$$\overline{u(x,x)} = u(x,x).$$

بخصوص كفاية الشرط، نعتبر العلاقتين التاليتين:

$$u(x+y, x+y) = u(x,x) + u(y,y) + u(x,y) + u(y,x), \qquad (1)$$

$$u(i\;x+y, i\;x+y) = u(x,x) + u(y,y) + i\left[u(x,y) - u(y,x)\right]. \qquad (2)$$

نلاحظ في العلاقتين (1) و (2) أنّ العناصر:

$$u(x,x);\; u(y,y);\; u(x+y, x+y);\; u(ix+y, ix+y),$$

أعداد حقيقيّة فرضا. نستخلص من (1) أن:

$$\alpha = u(x,y) + u(y,x) \in \mathbb{R};$$

ومن (2):

$$\beta = i\left[u(x,y) - u(y,x)\right] \in \mathbb{R};$$

وعليه:

$$u(y,x) = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \;\; \text{و} \;\; u(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta);$$

ومنه:

$$\overline{u(y,x)} = u(x,y).$$

(أي أنّ u هيرميتيّ).

6.1.4 قضية

إذا كان $\mathrm{K} = \mathbb{C}$، فإنّ كلّ شكل شبه ثنائي الخطّيّة على E^2 يكون معرّفا بالقيم التي يأخذها على قطر E^2.

إثبات

وبالفعل لدينا:

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\left[u(x+y,x+y)-u(x-y,x-y)\right]+$$
$$+\frac{1}{4}\left[i\ u(x+iy,x+iy)-i\ u(x-iy,x-iy)\right]. \qquad (*)$$

7.1.4 ملحوظتان

1) القضية السابقة تصبح خاطئة في حالة كون $K=\mathbb{R}$ و u غير متناظر. نستدلّ على ذلك بالمثال الموالي:

$$u:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$\left((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\right)\mapsto x_1y_2+y_1z_2+z_1x_2-x_2y_1-y_2z_1-z_2x_1.$$

واضح أنّ u ينعدم على القطر بيد أنّه لا يطابق الصفر على $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ كلّه.

2) إذا كان $K=\mathbb{R}$ و u متناظرا فإنّ النتيجة المنقولة عبر القضية أعلاه تظلّ صحيحة. وعلاوة على ذلك لدينا:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[u(x+y,x+y)-u(x,x)-u(y,y)\right],$$

وهو ما يعيّن u في E^2 كلّه.

8.1.4 تعريف

نقول عن الشكل الهيرميتيّ u إنّه **موجب** إذا حقّق:

$$\forall\ x\in E\quad u(x,x)\geq 0;$$

ويكون u **معرّفا موجبا** إذا حقّق:

$$\forall\ x\in E\setminus\{0\}\quad u(x,x)>0.$$

9.1.4 تعريف

نسمّي **جداء سلّميّا** على E كلّ شكل شبه ثنائي الخطّيّة هيرميتيّ ومعرّف موجب u.

نرمز له عادة بِ $\langle , \rangle$. نكتب عندئذ:

$$\begin{gathered} E \times E \to \mathrm{K} \\ (x, y) \mapsto u(x, y) = \langle x, y \rangle . \end{gathered}$$

يمكن التأكّد، دونما عناء، من أنّ التطبيقين الواردين في (3.1.3) يعرّفان جداء سلّميّا، كلّ على فضاء تعريفه!

10.1.4 قضية (متباينة كوشي . شوارز[1])

إذا كان u شكلا هيرميتيّا موجبا فإنّ:

$$\forall x, y \in E \quad |u(x, y)|^2 \leq u(x, x).u(y, y)$$

إثبات

من أجل كلّ λ من K نكتب:

$$0 \leq u(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda\bar{\lambda} u(x, x) + u(y, y) + \lambda u(x, y) + \bar{\lambda} u(y, x). \ (*)$$

لنضع:

$$u(x, x) = a, \quad u(x, y) = b, \quad u(y, y) = c.$$

تأخذ العلاقة (*) بذلك الشكل التالي:

$$a\lambda\bar{\lambda} + \lambda b + \bar{b}\bar{\lambda} + c \geq 0. \qquad (**)$$

إذا كان $a = c = 0$ حصلنا من (**) على:

$$-b\bar{b} - b\bar{b} = -2|b|^2 \geq 0.$$

وعليه، $b = 0$. العلاقة المدروسة صحيحة في هذه الحالة.

---

22. Hermann Amandus Schwarz: رياضيّاتيّ نمساويّ. ولد في 25 جانفي 1843بهرمسدورف (بولونيا الحالية) ومات في 30 نوفمبر 1921 ببرلين. درس الكيمياء ثمّ الرياضيّات تحت تأثير فيرشتراس. يحتفظ له التاريخ بمتراجحته في التكاملات.

إذا كان $a \neq 0$ حصلنا من أجل $\lambda = -\frac{\bar{b}}{a}$ على:

$$a\left(-\frac{\bar{b}}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{\bar{b}}{a}b-\frac{\overline{b\bar{b}}}{a}+c \geq 0,$$

أي:

$$-\frac{|b|^2}{a}+c \geq 0.$$

وعليه:

$$|b|^2 \leq ac.$$

11.1.4 قضية (متباينة مينكوفسكي)

إذا كان u جداء سلّميّا على E كان لدينا عندئذ:

$$\forall\ x, y \in E \quad [u(x+y, x+y)]^{\frac{1}{2}} \leq [u(x,x)]^{\frac{1}{2}} + [u(y,y)]^{\frac{1}{2}}.$$

إثبات

نعلم أنّ:

$$u(x+y, x+y) = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle,$$

$$\operatorname{Re}\langle x,y \rangle \leq |\langle x,y \rangle| \leq \sqrt{\langle x,x \rangle}\sqrt{\langle y,y \rangle}.$$

إذن:

$$\langle x+y, x+y \rangle \leq \left(\sqrt{\langle x,x \rangle}+\sqrt{\langle y,y \rangle}\right)^2,$$

أي:

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x,x \rangle}+\sqrt{\langle y,y \rangle}.$$

12.1.4 قضية . تعريف

إذا كان u جداء سلّميّا على E فإنّ التطبيق:

$$x \mapsto N(x) = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{u(x, x)},$$

يعرّف نظيما على E .

إثبات

يكفي استخدام متباينة مينكوفسكي لضمان متباينة المثلّث.

نستخدم، بطبيعة الحال، نفس الرمز المألوف بخصوص النظيم؛ فنكتب:

$$N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|.$$

13.1.4 تعريف

نسمّي **فضاء شبه هيلبرتيّ**[1] كلّ فضاء شعاعيّ E يكون مزوّدا بنظيم ملحق بجداء سلّميّ.

14.1.4 مثالان

1) $E = \mathbb{C}^n$ المزوّد بالجداء السلّميّ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ فضاء شبه هيلبرتيّ.

2) $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{C}\right)$ المزوّد بالجداء السلّميّ:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, \overline{g(t)}\, dt,$$

فضاء شبه هيلبرتيّ كذلك.

23. David Hilbert : رياضيّاتيّ ألمانيّ من أبرز رياضيّاتيّي القرن العشرين. ولد في 23 جانفي 1862 بكونيسبيرڤ (روسيا الحالية) ومات في 14 فيفري 1943 بڤوتينڤان. له تركة علميّة ثقيلة. من ضمنها المسائل الثلاث والعشرين التي أعلن عنها يوم 8 أوت 1900 في مؤتمر الرياضيّات العالميّ الثاني بباريس والتي كانت المحرّك الأساسيّ لكثير من البحوث طيلة القرن الماضي. اقترن اسمه بالفضاءات التي أدخلها في غضون 1909 من خلال عمله على معادلات تكامليّة.

من المهمّ التوقّف هنا للإشارة إلى أنّ **كلّ فضاء شبه هيلبرتيّ فضاء نظيميّ. فهو إذن فضاء طبولوجيّ**. تسحب عليه تبعا لذلك كلّ الخصائص التي سبقت دراستها في الفصول الماضيّة. ومن المشروع أن يتبادر إلى الذهن التساؤل حول ما يميّز إذن، الفضاءات شبه الهيلبرتيّة عن الفضاءات النظيميّة العامّة. ومن الطبيعي أن نرتقب خصائص مميّزة لنظيم الفضاء شبه الهيلبرتيّ مادام هذا الأخير يمثّل نمطا خاصّا من الفضاءات النظيميّة كما أسلفنا. نستهلّ هذه الخصائص بمتطابقة متوازي الأضلاع السابق ذكرها والتي وعدنا بالعودة إليها.

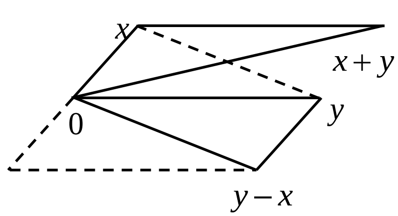
15.1.4 قضية (متطابقة متوازي الأضلاع)

من أجل كلّ شعاعين x و y من فضاء شبه هيلبرتيّ E تكون لدينا المساواة التالية:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

(ونقرأها على النحو التالي:

إنّ **مجموع مربّعي طولي القطرين في متوازي أضلاع يساوي مجموع مربّعات أطوال أضلاعه**).



إثبات

يكفي القيام بالتبسيط التالي:

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle,$$
$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.$$

وبجمع هاتين المساواتين نحصل على النتيجة المطلوبة.

تحمل هذه المتطابقة أيضا تسمية **مساواة أبولونيوس**[1]. تكمن أهميّها بالدرجة الأولى في كونها تسمح بالتأكّد من أنّ نظيما ما ملحق بجداء سلّميّ أو لا؛ أي أنّها تسمح بفرز الفضاءات شبه الهيلبرتيّة من الفضاءات النظيميّة العامّة. فإذا حقّق نظيم المتطابقة المذكورة كان ملحقا بجداء سلّميّ. والعكس بطبيعة الحال واضح. نصوغ هذه النتيجة الهامّة هكذا:

16.1.4 مبرهنة

لكي يكون فضاءٌ نظيميّ $(E, \|.\|)$ فضاءً شبه هيلبرتيّ يلزم ويكفي أن يحقّق نظيمه متطابقة متوازي الأضلاع.

إثبات

نشير بادئ ذي بدء، إلى أنّنا سنبرهن هذه النتيجة في حالة $\mathrm{K} =$ □ ونترك تعميمها إلى الحالة $\mathrm{K} =$ □ تمرينا للقارئ المستزيد.

إنّ لزوم الشرط واضح. لنضع، بخصوص كفاية الشرط:

$$u(x,y) = \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right); \quad x, y \in E, \qquad (1)$$

ولنبيّن أنّه إذا تحقّقت متطابقة متوازي الأضلاع فإنّ العبارة (1) تقدّم تطبيقا u يحقّق جميع شروط الجداء السلّميّ.

إذا كان $y = x$ ، فإنّنا نستخلص من العلاقة (1) أنّ:

$$u(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2\right) = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle;$$

---

24. Apollonius: رياضيّاتيّ يونانيّ. ولد في 262 قبل الميلاد في بيرج بتركيا الحالية، ومات في 190 قبل الميلاد. حاز بفضل أعماله على لقب "المهندس الكبير" من قبل معاصريه اليونانيّين. من أهمّ أعماله "المخروطات "، كان قد وضعها في ثمانية أجزاء. أوصل العرب إلى البشريّة السبعة الأولى منها مترجمة، في حين كان مآل الأخير الضياع.

وهو بالضبط النظيم الذي يولّده جداء سلّميّ على E . وعلاوة على ذلك نلاحظ أنّ:

$$u(x,x)=\|x\|^2=\langle x,x\rangle>0,\quad \forall\, x\in E\setminus\{0\},$$

وهو ما يدلّ على أنّ u معرّف موجب.

ومن جهة أخرى، يأتي من (1) أنّ:

$$\forall\, x,y\in E \quad u(x,y)=u(y,x),$$

أي أنّ التطبيق u متناظر.

نعتني حاليّا بثنائيّة خطّيّة u.

نعتبر من أجل ذلك الدالّة φ المعرّفة على هذا المنوال:

$$\varphi(x,y,z)=4\big(\langle x+y,z\rangle-\langle x,z\rangle-\langle y,z\rangle\big),\quad x,y,z\in E;$$

أي أنّ:

$$\varphi(x,y,z)=\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+ \\ +\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2. \qquad (2)$$

لنبيّن أنّ φ معدومة. طبقا لمتطابقة متوازي الأضلاع نكتب:

$$\|x\pm z+y\|^2=2\left(\|x\pm z\|^2+\|y\|^2\right)-\|x\pm z-y\|^2.$$

وبالتعويض في (2) يأتي:

$$\varphi(x,y,z)=-\|x+z-y\|^2+\|x-z-y\|^2+\|x+z\|^2- \\ -\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2. \qquad (3)$$

بجمع (2) و(3) طرفا طرفا نحصل على:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(\|x+z+y\|^2+\|y+z-x\|^2\right)- \\ -\frac{1}{2}\left(\|y-z+x\|^2+\|y-z-x\|^2\right)-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.$$

بموجب متطابقة متوازي الأضلاع يكون الحدّ الأوّل الوارد بين قوسين في طرف هذه المساواة الأيمن مساويا $\|y+z\|^2+\|x\|^2$، في حين يكون الحدّ الثاني (الوارد بين قوسين) مساويا $-\|y-z\|^2-\|x\|^2$، وهو ما يفضي في الأخير إلى أنّ $\varphi(x,y,z)=0$. بهذا نكون قد بيّنا أنّ:

$$\forall x,y,z\in E \quad u(x+y,z)=u(x,z)+u(y,z).$$

بقي أن نبرهن أنّ:

$$\forall \lambda\in\mathbb{R} \quad \forall x,y\in E \quad u(\lambda x,y)=\lambda u(x,y).$$

نعتبر، قصد ذلك، الدالّة ψ التالية:

$$\psi(\lambda)=\langle \lambda x,y\rangle-\lambda\langle x,y\rangle; \quad x,y\in E,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

من (1) يأتي على التوّ:

$$\psi(0)=\frac{1}{4}\left(\|y\|^2-\|y\|^2\right)=0,$$

$$\psi(-1)=0;$$

الأمر الذي يرخّص لنا بالحصول على:

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{Z} \quad \langle nx,y\rangle &=\langle(\operatorname{sgn} n)(x+x+\ldots+x+x),y\rangle\\ &=(\operatorname{sgn} n)\langle x+x+\ldots+x+x,y\rangle\\ &=(\operatorname{sgn} n)\left(\langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle+\ldots+\langle x,y\rangle\right)\\ &=|n|(\operatorname{sgn} x)\langle x,y\rangle=n\langle x,y\rangle;\end{aligned}$$

(يرمز sgn لإشارة n) أي:

$$\psi(n)=0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

إذا كان p و q عنصرين من $\mathbb{Z}$ بحيث $q\neq 0$ فإنّ:

$$\langle\frac{p}{q}x,y\rangle=p\langle\frac{1}{q}x,y\rangle=\frac{p}{q}q\langle\frac{1}{q}x,y\rangle=\frac{p}{q}\langle x,y\rangle,$$

وهو ما يضمن:

$$\psi(\lambda)=0 \quad \forall \lambda\in\mathbb{Q}.$$

ولمّا كانت ψ مستمرّة (تأكّد من ذلك) ختمنا بأنّ:

$$\psi(\lambda)=0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ممّا يجعل u متمتّعا بكافّة شروط الجداء السلّميّ وينهي البرهان.

17.1.4 ملحوظة

بالإمكان الحصول في هذا المضمار على النتيجة الهامّة التالية:

إذا كان E فضاء شعاعيّا حقيقيّا و $x \mapsto \|x\|$ تطبيقا حقيقيّا على E بحيث:

1) $\|x\| \geq 0$ ؛ $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0,$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,$

3) $\forall x,y,z,t \in E \ \|x-z\|\|y-t\| \leq \|x-y\|\|z-t\|+\|y-z\|\|x-t\|,$

فإنّ التطبيق $\|.\|$ يعرّف نظيما على E ، يكون ملحقا بجداء سلّميّ.

نشير هنا إلى أنّ المتباينة الواردة في البند الثالث تحمل إسم **متباينة بطوليمي**[1].

18.1.4 أمثلة

1) إنّ نظيم التقارب المنتظم في $\mathbb{R}^n$ غير ملحق بجداء سلّميّ. وبالفعل نلاحظ أنّ الشعاعين $x=(1,0,\ldots,0)$ و $y=(0,1,0,\ldots,0)$ لا يحقّقان متطابقة متوازي الأضلاع، إذ لدينا:

$$\|x\|=\|y\|=\|x-y\|=\|x+y\|=1,$$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2;\ 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4,$$

25. Claudius Ptolemaeus (Ptolémée, Ptolémaïs): فلكيّ يونانيّ، عاش في الإسكندرية بمصر. يعتبر أحد الرواد في الجغرافيا. له العديد من الانجازات العلميّة، كان لبعضها التأثير الكبير على العلوم الإسلاميّة والأوروبيّة.

2) الوحيد من الفضاءات النظيميّة $L^p\left([a,b]\right)$ الملحق نظيمُه بجداء سلّميّ هو الفضاء $L^2\left([a,b]\right)$. فإذا اخترنا، على سبيل المثال، الدالّتين:

$$f(x)=1;\ x\in[-1,1];\ g(x)=\begin{cases}-1\ ;\ -1\le x\le 0\\ x\quad ;\ \ 0\le x\le 1\end{cases}$$

في $L^1\left([-1,1]\right)$ تأكّدنا من أنّهما لا يحقّقان متطابقة متوازي الأضلاع، وهو ما يدلّ على أنّ الفضاء النظيميّ $L^1\left([-1,1]\right)$ ليس شبه هيلبرتي. ها هو الحساب:

$$\|f\|=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}dx=2,$$

$$\|g\|=\int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{1}x\,dx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\|f+g\|=\int_{-1}^{1}|f(x)+g(x)|\,dx=\int_{0}^{1}(1+x)\,dx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\|f-g\|=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}2\,dx+\int_{0}^{1}(1-x)\,dx=2+1-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}\neq 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=\frac{25}{2}.$$

3) إنّ الفضاء $\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ ليس شبه هيلبرتي إذا ما زوّد، على سبيل المثال، بنظيم التقارب المنتظم. تمكن الاستعانة بالدالّتين $f(x)=1$ و $g(x)=x$ حيث x من $[0,1]$، للاستدلال على ذلك. نجد في هذا الصدد:

$$\|f\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|=1,$$

$$\|g\|=\sup_{0\le x\le 1}|g(x)|=1,$$

$$\|f+g\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)+g(x)|=\sup_{0\le x\le 1}(1+x)=2,$$

$$\|f-g\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|=\sup_{0\le x\le 1}(1-x)=1,$$

$$\| f+g\|^2+\| f-g\|^2=5\neq 2\left(\| f\|^2+\|g\|^2\right)=4.$$

19.1.4 تعريف

نسمّي فضاء **هيلبرتيّا** كلّ فضاء شبه هيلبرتيّ تامّ.

يترتّب عن هذا التعريف بالخصوص أنّ كلّ فضاء هيلبرتيّ فضاء بناخيّ متميّز. نستخلص ممّا سبق أنّ الفضاءات $L^p([a,b])$، $1\leq p$، فضاءات بناخيّة في حين لا يكون منها هيلبرتيّا سوى $\boldsymbol{L}^2([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$.

20.1.4 أمثلة

1) إنّ الفضاء $\mathbb{K}^n$ هيلبرتيّ إذا ما زوّد بجداءهالسلّميّ التقليديّ:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}.$$

2) إنّ الفضاء $\ell^2(\mathrm{K})$، المؤلّف من متتاليات الأعداد $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من K التي يكون من أجلها المجموع $\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ منتهيا، فضاء هيلبرتيّ إذا ما زوّدناه بالجداء السلّميّ $\langle x,y\rangle=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\overline{y_n}$.

وبصفة أعمّ لدينا:

3) نرمز بِ $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ لمجموعة العائلات $(x_i)_{i\in I}$ ذات العناصر من K والتي من أجلها تكون العائلة $\left(|x_i|^2\right)_{i\in I}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}$. (I، هنا، مجموعة أدلّة غير خالية اعتدناها في الفصل الثالث). إنّ الفضاء $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ فضاء هيلبرتيّ إذا ما زوّد بالجداء السلّميّ الموالي:

$$\langle x,y\rangle=\langle(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}x_i\overline{y_i}.$$

نترك للقارئ مهمّة التأكّد من أنّ هذه العبارة تعرّف جيّدا جداء سلّميّا على $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ ولنثبت أنّ هذا الأخير تامّ.

لتكن $x^n=(x_i^n)_{i\in I}$ متتالية كوشيّة من $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$. نكتب عند ذلك:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ /\ \forall\, p,q\in\mathbb{N}:$$

$$p>q\ge n_0 \quad\Rightarrow\quad \left\|x^p-x^q\right\|^2=\sum_{i\in I}\left|x_i^p-x_i^q\right|^2\le\varepsilon^2. \quad (*)$$

نستنتج أنّه:

$$\left|x_i^p-x_i^q\right|\le\varepsilon,\quad \forall i\in I\ \ \forall p\ge n_0\ \ \forall q\ge n_0.$$

وعليه، فإنّه من أجل كلّ i من I تكون المتتالية $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشيّة في K. ولمّا كان هذا الأخير تامّا ضمنّا فيه تقارب المتتالية $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$. لنرمز لنهايتها بِـ x_i ولنضع $x=(x_i)_{i\in I}$.

نقوم حاليا بإثبات أنّ x عنصر من $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ وأنّه نهاية للمتتالية $x^n=(x_i^n)_{i\in I}$ في $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$.

من أجل كلّ جزء منته غير خال J من I يمكننا أن نكتب، استنادا إلى (*):

$$p>q\ge n_0 \quad\Rightarrow\quad \left\|x^p-x^q\right\|^2=\sum_{i\in J}\left|x_i^p-x_i^q\right|^2\le\varepsilon^2.$$

وبتثبيت $n_0\le q$ و J وجعل p يؤول نحو $+\infty$ نحصل على:

$$\sum_{i\in J}\left|x_i-x_i^q\right|^2\le\varepsilon^2. \qquad (**)$$

يترتّب عن هذه العلاقة الأخيرة أنّ العائلة $\left(\left|x_i-x_i^q\right|^2\right)_{i\in I}$ قابلة للجمع وأنّ مجموعها يحقّق المتباينة:

$$\sum_{i\in I}\left|x_i-x_i^q\right|^2\le\varepsilon^2; \qquad (***)$$

(حيث $n_0 \leq q$) وذلك طبقا للمبرهنة (1.4.3). نستخلص من النتيجة (***) أنّ العنصر $x - x^q = (x_i)_{i\in I} - (x_i^q)_{i\in I}$ ينتمي إلى الفضاء الشعاعيّ $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ من أجل $n_0 \leq q$. ولمّا كان x^q عنصرا من $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ أضحى x عنصرا من $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ كذلك. هكذا، يمكننا أن نعيد كتابة العلاقة (***) على القالب التالي:

$$\left\| x - x^q \right\|^2 \leq \varepsilon^2, \quad q \geq n_0;$$

وهو ما يعبّر عن كون $x = \lim_{n\to\infty} x^n$ في $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ وأنّ هذا الأخير تامّ.

حريّ بنا أن نشير إلى أن للفضاء $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$ دورا هامّا في عائلة الفضاءات الهيلبرتية. فهو منها مثل الفضاء K^n إزاء الفضاءات النظيميّة ذات بعد منته n. وبعبارة أفصح، تستقي الفضاءات الهيلبرتية خصائصها الطبولوجيّة من الفضاء $\ell^2{}_I(\mathrm{K})$.

قبل الانتقال إلى الفقرة الموالية، يجدر بنا أن نشير إلى أنّ **الجداء السلّميّ تطبيق مستمرّ بانتظام**، ذلك نابع من متباينة كوشي . شوارتز (مثلا). قد يحلو للبعض امتحان ذلك بالحساب المباشر (نشجّعه على ذلك).

2.4 التعامد

إنّ الجداء السلّميّ لا يسمح، في حالة الفضاء شبه الهيلبرتيّ الحقيقيّ، من تعيين طول (نظيم) شعاع فحسب بل والزاوية المحصورة بين شعاعين أيضا.

وبعبارة أوضح، تكون الزاويّة θ المحصورة بين شعاعين x و y معرّفة بواسطة الدستور الموالي:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}. \qquad (*)$$

وبمقتضى متباينة كوشي. شوارتز تكون للطرف الثاني من العلاقة $(*)$ قيمة مطلقة لا تتعدّى 1، ممّا يجعل العلاقة المذكورة تعرّف زاوية θ محصورة بين 0 و π، وذلك مهما يكن الشعاعان x و y غير المعدومين. فإذا كان $0=\langle x, y\rangle$ نتج على التوّ أنّ $\theta=\frac{\pi}{2}$ وهو ما يجعل الشعاعين x و y متعامدين. في الحالة العقديّة نفقد مفهوم الزاويّة إلاّ أنّ مفهوم التعامد يظلّ محتفظا به.

1.2.4 تعريف

ليكن x و y عنصرين من فضاء شبه هيلبرتي E. نقول عنهما إنّهما **متعامدان** إذا كان جداؤهما السلّميّ معدوما. ونكتب:

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\perp y$$

2.2.4 مثالان

1) نأخذ $E=\mathbb{C}^n$ مزوّدا بجدائه السلّميّ التقليديّ $\langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ ونعتبر عائلة الأشعّة:

$$(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}=((0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha}}{1},0,\dots,0)).$$

من أجل كلّ سلّميّين مختلفين α و β لدينا $e_\alpha\perp e_\beta$؛ ذلك لأنّ $0=\langle e_\alpha, e_\beta\rangle$.

2) نضع $E=\mathscr{C}\left([-\pi,\pi],\mathbb{C}\right)$، مع $\langle f, g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt$. نعتبر في E العائلة $(f_n)_n$ بحيث:

$$f_n(t) = \cos nt;\ n \geq 0.$$

من أجل عددين طبيعيّين مختلفين m و n لدينا:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\ \cos mt\ dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m+n)t + \cos(m-n)t\right] dt = 0.$$

3.2.4 خصائص أوليّة

1) $\forall x \in E\ \ x \perp 0$

2) $\forall x, y \in E\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}^*\quad x \perp y \ \Leftrightarrow\ \alpha x \perp \beta y$

3) $\forall x, y_i \in E\ \ \forall \alpha_i \in \mathrm{K}\quad x \perp y_i \ \Leftrightarrow\ x \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i;\ (1 \leq i \leq n)$

4.2.4 تعريف

ليكن F جزءا غير خال من فضاء شبه هيلبرتيّ E. نقول عن عنصر x من E إنّه **عموديّ** على F إذا كان عموديّا على كلّ عنصر y من F. ونكتب:

$$x \perp F \ \Leftrightarrow\ \langle x, y \rangle = 0,\ \forall\ y \in F.$$

يأتي على التوّ من هذا التعريف أنّ الشعاع المعدوم عموديّ على كلّ جزء غير خال من E.

5.2.4 قضية

إذا كان x عموديّا على جزء F من E فـإنّه يظلّ عموديّا على الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ $[F]$ المولّد بواسطة F.

إثبات

نتيجة مباشرة للخاصيّة (3) أعلاه.

6.2.4 تعريف

ليكن F_1 و F_2 جزأين غير خاليين من فضاء شبه هيلبرتيّ E.
نقول عنهما إنّهما **متعامدان** إذا كان كلّ عنصر من أحدهما عموديّا على كلّ عنصر من الآخر. ونكتب:

$$\forall x \in F_1, \forall y \in F_2 \ \ \langle x, y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \perp F_2$$

ونسمّي **عمودي جزء** F من E مجموعة العناصر من E العموديّة على F، ونرمز له بِ $F^{\perp}$. نكتب عندئذ:

$$F^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in F\}.$$

7.2.4 نتيجتان

1) $E^{\perp} = \{0\}$

2) إذا كان F جزءا غير خال من E فإنّ:

$$F \cap F^{\perp} = \begin{cases} \{0\} \\ \text{أو} \\ \phi \end{cases}$$

ليس صعبا التأكّد من صحّة هاتين النتيجتين. يمكن القيام بذلك بحساب مباشر. علينا أن نشير فقط، إلى أنّ الاحتمال الثاني الوارد في النتيجة الأخيرة ليس له محلّ من الوقوع إلاّ في حالة عدم انتماء العنصر 0 إلى F، وهو أمر يكاد يكون بديهيّا.

8.2.4 قضية

ليكن a عنصرا من فضاء شبه هيلبرتيّ E. يكون عندئذ العمودي $\{a\}^{\perp}$ فومستويّا مغلقا.

إثبات

لنعتبر التطبيق $\varphi: E \rightarrow \mathrm{K}$:

$$x \mapsto \varphi(x) = \langle x, a \rangle.$$

إنّه شكل خطّيّ مستمرّ. إذن نواته مغلقة. $\{a\}^{\perp}$ هي هذه النواة بالضبط.

9.2.4 نتيجة

من أجل كلّ جزء غير خال F من E يكون العمودي $F^{\perp}$ فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا.

إثبات

وفعلا، لدينا:

$$F^{\perp} = \bigcap_{a \in F} \{a\}^{\perp}.$$

ولمّا كان $\{a\}^{\perp}$ مغلقة تبيّن أنّ $F^{\perp}$ مغلق بدوره.

10.2.4 قضية

إذا كان A و B جزأين من E، بحيث $A \subset B$، كان لدينا عندئذ:

$$B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

إثبات

لدينا:

$$x \in B^{\perp} \iff \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in B.$$

ولمّا كان B حاويا A جاء بوضوح:

$$\langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in A.$$

إذن x من $A^{\perp}$.

11.2.4 قضية

إذا كان F جزءا غير خال من فضاء شبه هيلبرتيّ E فإنّ:

$$F^{\perp}=[F]^{\perp}=\overline{[F]}^{\perp}$$

حيث $[F]$ يرمز للفضاء الشعاعيّ المولّد بواسطة F.

إثبات

إذا استحضرنا القضية السابقة حقّ لنا أن نكتب على التوّ:

$$\overline{[F]}^{\perp}\subseteq[F]^{\perp}\subseteq F^{\perp}.$$

من جهة أخرى، تسمح الخاصية (3) من (3.2.4) بالحصول على:

$$F^{\perp}\subseteq[F]^{\perp}.$$

أخيرا، نعلم أنّ كلّ عنصر y من $\overline{[F]}$ نهاية لمتتالية $(y_n)_n$ من $[F]$. ولمّا كان الجداء السلميّ مستمرّا جاز لنا أن نكتب من أجل كلّ x من $[F]^{\perp}$ و y من $\overline{[F]}$:

$$\langle x,y\rangle=\langle x,\lim_{n\to\infty}y_n\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,y_n\rangle=0.$$

ومنه:

$$[F]^{\perp}\subseteq\overline{[F]}^{\perp}.$$

12.2.4 مبرهنة (فيثاغورس[1])

ليكن E فضاء شبه هيلبرتي على □ يكون لدينا عندئذ:

---

26. Pythagore: من الأوجه المثيرة في اليونان العتيق. عاش في القرن السادس قبل الميلاد. تدور أعمال مدرسته حول الأعداد الزوجيّة والفرديّة والأعداد الأولية والمربّعة. أمّا في الهندسة، فقد كان الاكتشاف الشهير متمثّلا في مبرهنة الوتر أو ما اشتهر تحت تسمية مبرهنة فيثاغورس.

$$x, y \in E \quad x \perp y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2, \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+iy\|^2. \end{cases}$$

إثبات

يكفي التمعّن في النشرين المواليين:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle,$$
$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Im}\langle x, y\rangle.$$ ↓

تبسّط النتيجة أعلاه في الحالة الحقيقيّة $\mathrm{K} =$ □ إلى الشكل التالي:

$$x \perp y \;\Leftrightarrow\; \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ونقرأها كما كان ذلك مشهودا في الهندسة الأوليّة:

يكون مثلّث قائمَ الزاوية إذا وفقط إذا كان مربّع طول الوتر فيه يساوي مجموع مربّعي طوليْ الضلعين المجاورين.

يمكن، بطبيعة الحال، أن نصوغ تعميما لهذه النتيجة إلى عدد كبير من الأشعّة. وبعبارة أوضح، إذا كانت $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ عائلة من أشعّة متعامدة مثنى مثنى فإنّ:

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2.$$

13.2.4 قضية

إذا كانت $(x_i)_{i\le 1\le p}$ عائلة من أشعّة متعامدة مثنى مثنى في فضاء شبه هيلبرتيّ كانت عندئذ مستقلّة خطّيّا.

إثبات

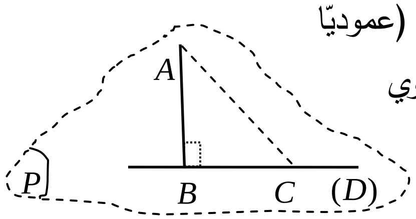
↓ يرمز $\operatorname{Im} u(x, y)$ للجزء التخيّليّ من العدد $u(x, y)$.

وبالفعل، لدينا:

$$\sum_{i=\&}^{p}\alpha_i x_i = 0 \;\Rightarrow\; \langle\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\langle x_i, x_j\rangle = \alpha_j\langle x_j, x_j\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \alpha_j = 0.$$

3.4 الإسقاط

تنطوي هذه الفقرة على إحدى أهمّ مزايا الفضاءات الهيلبرتيّة. إنّها **تعميم لمفهوم الإسقاط الشائع استخدامه في الهندسة الإقليديّة الأوليّة.**



لا ريب أنّك تتذكّر أنّه إذا أسقطنا (عموديّا على سبيل المثال) نقطة A من المستوي (P) على مستقيم (D) وجدنا نقطة وحيدة B على (D) تتميّز بكونها الأقرب مسافة إلى A ؛ أي أنّ طول AB أصغر (من) أو يساوي طول AC ، مهما تكن النقطة C من (D). ننطلق من هذا التمهيد لنضع:

1.3.4 تعريف

ليكن (E,d) فضاء متريّا و F جزء مغلقا منه. ولتكن a نقطة من E.
نسمّي **مسقط** النقطة a على F كلّ نقطة b من F تحقّق:

$$d(a,b) = d(a,F) = \inf_{y\in F} d(a,y).$$

من البديهيّ أنّه إذا كانت a نقطة من F حصلنا على التوّ على أنّ $b = a$. وعموما، إذا كان F مغلقا فحسب، فإنّ وجود b غير أكيد، وإن وجدت فقد تكون غير وحيدة، كما هو شأن المركز a بالنسبة لنقاط غلاف

كرويّ $S(a,r)$. أمّا إذا كان F متراصّا فإنّ b تضحى عندئذ مضمونة الوجود غير أنّها قد لا تكون وحيدة كما هو حال مركز الغلاف الكرويّ المذكور. يقودنا هذا العرض إلى الجزم بأنّ التمتّع بمسقط لا تتأتّاه أيّة نقطة، بل لا بدّ من توفّر شروط في E و F لضمان ذلك يتولّى هذا المقطع وضع إطار لذلك. نرجئ هذا الأمر قليلا لنأتي بِـ:

2.3.4 مثالان

1) تحدّثنا سابقا عن أنّه يحدث أن يكون F مغلقا وألاّ تتمتّع نقطة ما من E بأيّ مسقط على F. هذا مثال لذلك!

نعتبر في الفضاء الهيلبرتيّ $\ell^2(\mathbb{N})$ الجزء F المؤلّف من العناصر a_n بحيث:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e_n \ ; \ n \geq 1,$$

مع $e_n = (0,\ldots,0,\underset{\overset{\uparrow}{n}}{1},0,\ldots)$. سوف نبيّن أن لا مسقط للصفر على F.

وبالفعل، من أجل كلّ $n \geq 1$ يكون لدينا:

$$d(0,F) = \inf_{n\geq 1} \|a_n\| = 1 \neq 1+\frac{1}{n} = \|0-a_n\|.$$

لنبيّن حاليّا أنّ F مغلق في $\ell^2(\mathbb{N})$. لدينا في البداية:

$$\forall\, n \neq m \ \ \|a_n - a_n\|^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{m}\right)^2 > 1. \qquad (*)$$

من جهة أخرى، ليكن z عنصرا غير منتم إلى F. سنثبت أنّ z لا ينتمي إلى $\overline{F}$، وهو ما يكفي لأن يكون F مغلقا. من أجل ذلك نبيّن أنّ $0 < d(z,F)$. إذا لم تقطع الكرة $B\left(z,\frac{1}{2}\right)$ الجزء F كان لدينا حينئذ:

$$d(z,F) \geq \frac{1}{2} > 0.$$

وإذا قطعت $B\left(z,\frac{1}{2}\right)$ نفسها الجزء F فإنّها لا تضمّ عندئذ سوى نقطة واحدة (على الأكثر) a_n من F، إذ أنّ عكس ذلك يؤدّي إلى تناقض مع العلاقة (*). نحصل، إذن، والحال هذه، على أنّ:

$$\begin{cases} z \neq a_n \\ d(z,F) = \|z-a_n\| > 0; \end{cases}$$

وهو المبتغى.

2) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و $B_f(0,1)=F$ كرة الوحدة المغلقة فيه.

نجزم عندئذ أنّ لكلّ عنصر x من E مسقطا x' على F بحيث:

$$x' = \begin{cases} x & ; \ x \in F, \\ \frac{1}{\|x\|}x & ; \ x \notin F. \end{cases}$$

وبالفعل، إذا كان x منتميا إلى F فواضح تعريفا أنّ $x=x'$، إذ أنّ:

$$d(x,F) = d(x,x') = 0.$$

إذا كان x غير منتم إلى F قمنا بإثبات المساواة:

$$d(x,F) = \|x-x'\|.$$

لدينا في البداية:

$$\|x-x'\| = \left\|x - \frac{1}{\|x\|}x\right\| = \left\|\frac{\|x\|-1}{\|x\|}x\right\| = \|x\|-1.$$

يكفي أن نبيّن إذن أنّ:

$$d(x,F) = \|x\|-1.$$

من أجل كلّ y من F، لدينا:

$$\|x\|-1 \leq \|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|,$$

ومنه:

$$\|x\|-1\leq d(x,F).$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$f(x,F)\leq\left\|x-\frac{1}{\|x\|}x\right\|=\|x\|-1,$$

وهو ما يضمن المساواة المطلوبة.

نستهلّ الإطار المذكور منذ حين بإدراج هذه النتيجة المساعدة الهامّة والمشهورة باسم متطابقة المتوسّط في مثلّث.

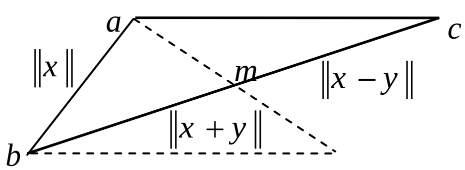
3.3.4 توطئة

لتكن a و b و c ثلاث نقاط من فضاء شبه هيلبرتيّ H و m منتصف القطعة المستقيمة $[bc]$ يكون لدينا عندئذ:

$$\|a-b\|^2+\|a-c\|^2=2\|a-m\|^2+\frac{1}{2}\|b-c\|^2.$$

إثبات

نضع:



$$\|a-b\|=\|x\|\ ;\ \|a-c\|=\|y\|$$

$$\|b-c\|=\|x-y\|;$$

$$2\|a-m\|=\|x+y\|.$$

إنّنا نعلم أنّ:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

وبالتعويض يأتي:

$$4\|a-m\|^2+\|b-c\|^2=2\left(\|a-b\|^2+\|a-c\|^2\right);$$

وبالقسمة على 2 يأتي المطلوب.

نصل، الآن، إلى نسج بعض من الشروط الضامنة لوجود ووحدانيّة المسقط.

4.3.4 مبرهنة (الإسقاط)

إذا كان H فضاء شبه هيلبرتي على K و F فضاء شعاعيّا جزئيّا تامّا فإنّ:

1) لكلّ نقطة a من H مسقطا وحيدا b من F.

2) b هي النقطة الوحيدة التي تجعل الشعاع $a-b$ عموديّا على F؛ أي أنّ:

$$\forall x \in F \ \ \langle a-b, x\rangle = 0.$$

إثبات

1) إذا وضعنا:

$$r = \inf_{y\in F} \|a-y\| = d(a,F),$$

فإنّه يكون من الممكن إيجاد متتالية نقاط $(x_n)_n$ من F تحقّق:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r \le \|a-x_n\| < r+\frac{1}{n},$$

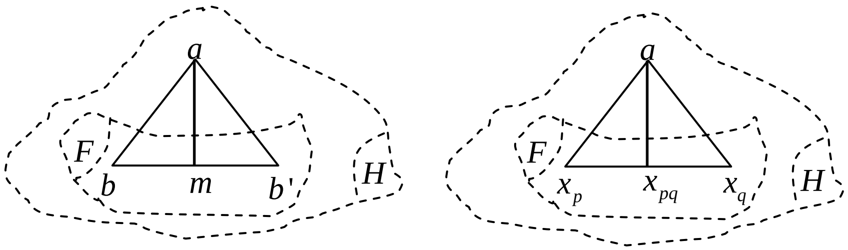
وهو ما يسمح بالحصول على:

$$\lim_{n\to\infty}\|a-x_n\| = r.$$

إنّ المتتالية $(x_n)_n$ المنشأة بهذه الصورة كوشيّة. وبالفعل، إذا كان x_p و x_q عنصرين منها، مدّتنا متطابقة المتوسّط السابقة، المطبّقة على النقاط a و x_p و x_q بـِ:

$$\frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2 + 2\|a-x_{pq}\|^2 = \|a-x_q\|^2 + \|a-x_q\|^2;$$

x_{pq} هو منتصف القطعة $[x_p x_q]$). (الشكل (1)).



الشكل (2) الشكل (1)

ومنه:

$$\frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2 + 2\|a - x_{pq}\|^2 = \|a - x_q\|^2 + \|a - x_q\|^2 ;$$

ولكن العنصر $x_{pq} = \frac{1}{2}(x_p + x_q)$ ينتمي إلى F، إذن:

$$\|a - x_{pq}\|^2 \geq r^2.$$

ولمّا كان $\|a - x_p\|^2$ و $\|a - x_q\|^2$ يؤولان إلى r^2 عندما يؤول p و q إلى $+\infty$، وجب على المقدار $\|x_p - x_q\|^2$ أن يؤول إلى الصفر في الوقت ذاته. يظهر هكذا أنّ $(x_n)_n$ كوشيّة في F التامّ. يخوّل ذلك لهذه المتتالية التمتّع بنهاية وحيدة b. وما دام النظيم تطبيقا مستمرّا كتبنا بموجب ذلك:

$$d(a, F) = r = \lim_{n\to\infty}\|a - x_n\| = \left\|a - \lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \|a - b\|.$$

لنهتم بوحدانيّة b.

إنّ استخداما ثانيّا لمتطابقة المتوسّط يعطي وحدانيّة b أيضا. وبالفعل إذا افترضنا وجود نقطة b' تحقّق:

$$d(a, F) = \inf_{y\in F}\|a - y\| = \|a - b'\| = r,$$

أمكننا الحصول على:

$$0 \le \frac{1}{2}\|b-b'\|^2 + 2\|a-m\|^2 = \|a-b\|^2 + \|a-b'\|^2 .$$

ومنه:

$$\frac{1}{2}\|b-b'\|^2 = \|a-b\|^2 + \|a-b'\|^2 - 2\|a-m\|^2 = r^2 + r^2 - 2(r^2+\alpha),$$

حيث α عدد حقيقي موجب ملائم. (الشكل (2)). يترتّب عن ذلك أنّ:

$$0 \le \frac{1}{2}\|b-b'\|^2 \le 0.$$

إذن، $b'=b$.

2) إثبات أنّ $a-b$ عموديّ على F وأنّه وحيد.

لتكن c نقطة من F. إنّ العنصر $b-\lambda c$ ينتمي إلى F من أجل كلّ λ حقيقيّ. وعليه، فإنّ:

$$\|a-(b-\lambda c)\|^2 = \|a-b+\lambda c\|^2 \ge \|a-b\|^2 .$$

ومنه:

$$\|a-b+\lambda c\|^2 = \|a-b\|^2 + \lambda^2\|c\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}\langle a-b, c\rangle \ge \|a-b\|^2 .$$

نستخلص أنّ:

$$\lambda^2\|c\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}\langle a-b, c\rangle \ge 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

وعليه:

$$\operatorname{Re}\langle a-b, c\rangle = 0. \qquad (*)$$

(وإلاّ غيّر المقدار إشارته !).

لنضع بالمثل ic مكان c في العبارة السابقة. يأتي تبعا لذلك:

$$\|a-(b-i\lambda c)\|^2 = \|a-b+i\lambda c\|^2 \ge \|a-b\|^2 .$$

ومنه:

$$\|a-b\|^2 + \lambda^2\|c\|^2 + 2\lambda \operatorname{Im}\langle a-b, c\rangle \ge \|a-b\|^2 .$$

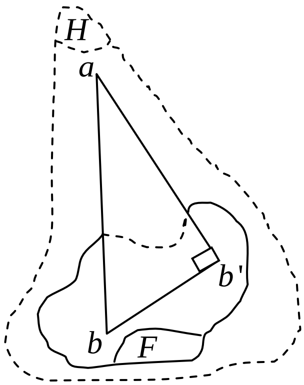
إذن:

$$\lambda^2\|c\|^2+2\lambda\,\mathrm{Im}\langle a-b,c\rangle\geq 0,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

وعليه:

$$\mathrm{Im}\langle a-b,c\rangle=0. \qquad (**)$$

إذا أقرنّا النتيجتين $(*)$ و$(**)$ حصلنا على $\langle a-b,c\rangle=0$، أي أنّ $a-b$ عنصر من $F^{\perp}$.



وحدانيّة الشعاع $a-b$.

لتكن b' نقطة ثانية تحقّق:

$$a-b'\in F^{\perp}.$$

بمقتضي مبرهنة فيثاغورس المطبّقة على النقاط a و b و b' نكتب:

$$\|a-b\|^2=\|a-b'\|^2+\|b-b'\|^2.$$

ومنه:

$$\|a-b\|^2>\|a-b'\|^2;$$

وهذا غير ممكن لتعارضه مع كون b مسقطا لِ a فرضا. إذن $b'=b$ وبه ينتهي البرهان.

5.3.4 ملحوظة

يمكن في الواقع الحصول على هذه المبرهنة ببنديها إذا ما اعتبرنا H هيلبرتيّا و F فضاء شعاعيّا جزئيا مغلقا. والأمر هنا واضح! وأكثر من هذا، فإنّ المبرهنة تظلّ صحيحة (مع تعديل فرعها الثاني) إذا اعتبرنا F جزءا محدّبا تامّا و H شبه هيلبرتي (أو F جزءا محدّبا مغلقا و H فضاء هيلبرتيّا). وإليك الأمر مفصّلا.

6.3.4 مبرهنة

ليكن F جزءا محدّبا وتامّا من فضاء شبه هيلبرتي H. يكون لدينا عندئذ:

1) لكلّ نقطة a من H مسقط وحيد b على F.

2) لكي تكون نقطة b من F مسقطا لعنصر a من H يلزم ويكفي أن تتحقّق المتباينة الموالية:

$$\forall\ x \in F\ \ \mathrm{Re}\langle a-b, x-b\rangle \leq 0.$$

إثبات

1) ارجع إلى الجزء (1) من المبرهنة (4.3.4).

2) إنّ الشرط لازم. وبالفعل، لو افترضنا أنّ b مسقط لـ a على F لكتبنا:

$$\forall t \in [0,1]\ \ \forall x \in F \setminus \{b\}\quad \|a-b-t(x-b)\|^2 \geq \|a-b\|^2.$$

وبما أنّ:

$$\|a-b-t(x-b)\|^2 = \|a-b\|^2 + t^2\|x-b\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle a-b, x-b\rangle$$

إذن:

$$t^2\|x-b\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle a-b, x-b\rangle \geq 0,\ \ \forall t \in [0,1].$$

وهو ما يؤدّي إلى:

$$\mathrm{Re}\langle a-b, x-b\rangle \leq 0.$$

وبالمثل، فإنّ الشرط كاف، ذلك أنّه من أجل كلّ x من F لدينا:

$$\begin{aligned}\|a-x\|^2 &= \|a-b-(x-b)\|^2 = \|a-b\|^2 + \|x-b\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle a-b, x-b\rangle \\ &\geq \|a-b\|^2.\end{aligned}$$

نستخلص على التوّ أنّ b مسقط لـ a.

7.3.4 مثال

لهذه المبرهنة ميادين تطبيق كثيرة يسمح المثال الموالي بإبراز أهميّتها. يتعلّق الأمر بحلّ نمط من مسائل التقريب. لتوضيح الفكرة نسوق هذه المسألة:

جد أفضل تقريب للدالّة $\cos x = f(x)$ بكثير حدود ذي درجة لا تفوق 2 في $L^2([0,\pi])$.

إذا رمزنا بِـ F لمجموعة كثيرات الحدود التي لا تتعدّى درجتها 2 تبيّن لنا أنّ حلّ مسألتنا يُردّ إلى وجود مسقط P لِـ f على F. وبالطبع، فإنّ إطارنا السابق وصفُه يضمن وجود P ووحدانيّته وذلك لكون F فضاء شعاعيّا مغلقا مولّدا بالأشعّة 1 و x و x^2. لإيجاد P نقوم بحلّ هذه الجملة

من المعادلات البسيطة:

$$\begin{cases} \langle f-P,1\rangle = 0 & \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x - ax^2 - bx - c)dx = 0 \\ \langle f-P,x\rangle = 0 & \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} (x\cos x - ax^3 - bx^2 - c\,x)dx = 0 \\ \langle f-P,x^2\rangle = 0 & \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} (x^2\cos - ax^4 - bx^3 - c\,x^2)dx = 0 \end{cases}$$

حيث وضعنا:

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

إنّ حلّ هذه الجملة يوصل إلى أنّ:

$$P(x) = -\frac{24}{\pi^3}x + \frac{12}{\pi^2}.$$

يمكن بطبيعة الحال أن نعيد السؤال برفع درجة P (وهو ما ننصح ملحّين بالقيام به).

ينبغي أن نثير الانتباه إلى أنّ مفهوم التعامد غير معرّف، في العموم،في فضاء نظيميّ. ومع ذلك، لدينا هذه النتيجة:

8.3.4 مبرهنة (فريدريك ريس)

ليكن E فضاء شعاعيّا نظيميّا و F فضاء جزئيّا مغلقا، لا يطابقه. توجد عندئذ، من أجل كلّ ε من $]0,1[$ ، نقطة a_ε من E بحيث $\|a_\varepsilon\|=1$ و :

$$d(a_\varepsilon,F)=\inf_{x\in F}\|a_\varepsilon-x\|\geq 1-\varepsilon.$$

إثبات

ليكن y عنصرا من $E\setminus F$. بما أنّ F مغلق، إذن:

$$d(y,F)=\inf_{x\in F}\|y-x\|=\alpha>0.$$

يوجد تبعا لذلك عنصر b_ε من F بحيث:

$$\|y-b_\varepsilon\|\leq\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)=\frac{\alpha}{1-\varepsilon}.$$

إنّ الشعاع $(y-b_\varepsilon)$ $a_\varepsilon=\frac{1}{\|y-b_\varepsilon\|}(y-b_\varepsilon)$ يحقّق مطلوبنا. وبالفعل، لدينا $\|a_\varepsilon\|=1$

وأيا كان x من F:

$$\|a_\varepsilon-x\|=\left\|\frac{1}{\|y-b_\varepsilon\|}(y-b_\varepsilon)-x\right\|=\frac{1}{\|y-b_\varepsilon\|}\left(\|y-b_\varepsilon-\|y-b_\varepsilon\|x\|\right)$$
$$\geq\frac{1-\varepsilon}{\alpha}\alpha=1-\varepsilon.$$

وبالتالي:

$$d(a_\varepsilon,F)\geq 1-\varepsilon.$$

9.3.4 قضية

ليكن H فضاء هيلبرتيّا و F جزءا غير خال منه. يكون لدينا عندئذ:

$$F^{\perp}=\{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{[F]}=H$$

أي:

يكون F كليّا في H إذا وفقط إذا كان عموديّه مطابقا $\{0\}$.

إثبات

إذا استندنا إلى القضية (11.2.4) كتبنا $F^{\perp}=\overline{[F]}^{\perp}$. وعليه:

$$x\in F^{\perp} \;\Rightarrow\; x\in\overline{[F]}^{\perp} \;\Rightarrow\; x\in H^{\perp} \;\Rightarrow\; x=0.$$

ومنه $F^{\perp}=\{0\}$، وبه يتحقّق لزوم الشرط.

لنفترض، بالعكس، أنّ $\overline{[F]}\neq H$ مع كون $F^{\perp}=\{0\}$. يترتّب عن ذلك وجود عنصر a في H لا ينتمي إلى $\overline{[F]}$. إنّ مبرهنة الإسقاط السابقة تخوّل لِـ a التمتّع بمسقط وحيد b على $\overline{[F]}$. وتجعل، أيضا، الشعاع $a-b$ غير المعدوم منتميا إلى $\overline{[F]}^{\perp}$ المبسّط فرضا، إلى $\{0\}$. يأتي من هذا أنّ $a-b$ معدوم؛ أي أنّ $a=b$ وهذا غير ممكن.

10.3.4 نتيجة

إذا كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ F من H مولّدا بواسطة عائلة $(a_i)_{i\in I}$ فإنّ:

$$\left[(a_i)_{i\in I}\right]^{\perp}=F^{\perp}=\{0\} \;\Leftrightarrow\; H \text{ كلّية في } (a_i)_{i\in I}$$

إثبات

واضح.

نرمز فيما سيلي، وكلّما توفّرت الشروط، للتطبيق المعرّف من H نحو F والذي يربط كلّ عنصر x من H بمسقطه x' من F بِـ P_F وندعوه

بتطبيق الإسقاط. تقدّم المبرهنة المواليّة أهمّ مزايا هذا التطبيق. وبالضبط، لدينا:

11.3.4 مبرهنة

ليكن H فضاء هيلبرتيّا و F فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا. يكون لدينا عندئذ:

1) $F=\{x\in H : P_F(x)=x\}$

2) P_F خطيّ ومستمرّ وذو نظيم يساوي 1.

3) $F^{\perp}=KerP_F$

4) $H=F\oplus F^{\perp}$

5) $\forall x\in H \ \ \|x\|^2=\|P_F(x)\|^2=\|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$

إثبات

1) لنضع:

$$L=\{x\in H : P_F(x)=x\}.$$

يأتي على التوّ أنّ L محتوى في F. نلاحظ من جهة أخرى، أنّ مقصور P_F على F هو التطبيق المطابق id_F. ومنه $F\subseteq L$.

2) ليكن x و y عنصرين من H و λ و μ عنصرين من K. نضع:

$$x'=P_F(x), \quad y'=P_F(y).$$

من أجل كلّ z من F يكون لدينا:

$$\langle x-x',z\rangle=0, \quad \langle y-y',z\rangle=0,$$

وذلك طبقا للبند الثاني من مبرهنة الإسقاط السابقة. يمكننا والحال هذه، أن نكتب:

$$\langle(\lambda x+\mu y)-(\lambda x'+\mu y'),z\rangle=\lambda\langle x-x',z\rangle+\mu\langle y-y',z\rangle=0.$$

يتجلّى من هذه العلاقة، وطبقا لنفس البند المذكور، أنّ $\lambda x'+\mu y'$ هو مسقط الشعاع $\lambda x+\mu y$ على F. وبصورة أخرى، لدينا:

$$P_F(\lambda x+\mu y)=\lambda P_F(x)+\mu P_F(y).$$

أي أنّ P_F خطّيّ.

باستخدام علاقة فيثاغورس المطبّقة على النقاط x' و x و 0 نكتب:

$$\|x\|^2=\|x'\|^2+\|x-x'\|^2.$$

وعليه:

$$\|P_F(x)\|^2\le\|x\|^2.$$

ومنه:

$$\|P_F\|\le 1,$$

وهو ما يضمن استمرار P_F.

لقد جاء سابقا أنّه من أجل x من F لدينا $P_F(x)=x$. وعليه:

$$\|P_F\|\ge 1.$$

نستخلص إذن أنّ $\|P_F\|=1$.

3) لدينا:

$$x\in F^{\perp}\ \Leftrightarrow\ x-0\in F^{\perp}\ \Leftrightarrow\ P_F(x)=0\ \Leftrightarrow\ x\in Ker\,P_F.$$

ومنه المساواة المطلوبة.

4) من أجل كلّ x من H لدينا $x=x'+x-x'$، حيث $x'=P_F(x)$ و $x-x'$ عنصر من $F^{\perp}$. ولمّا كان $F\cap F^{\perp}=\{0\}$ ختمنا بأنّ:

$$H=F\oplus F^{\perp}.$$

5) بمقتضى مبرهنة فيثاغورس يأتي:

$$\|x\|^2=\|x'\|^2+\|x-x'\|^2=\|P_F(x)\|^2+\|P_{F^{\perp}}(x)\|^2.$$

12.3.4 قضية

إذا كان F جزءا من فضاء هيلبرتيّ H فإنّ $F^{\perp}$ عموديّ (أي $F^{\perp\perp}=(F^{\perp})^{\perp}$) هو:

$\left[\overline{F}\right]$ إذا كان F جزءا كيفيّا من H،

$\overline{F}$ إذا كان F فضاء شعاعيّا جزئيّا من H،

F إذا كان F فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا من H.

إثبات

إذا استحضرنا أنّ عموديّ أيّ جزء F فضاءٌ شعاعيّ جزئيّ مغلقٌ سمح لنا ذلك بالاكتفاء بإثبات الحالة الثالثة فقط.

لدينا بطبيعة الحال $F \subseteq F^{\perp\perp}$. وبالفعل:

$$x \in F \;\Rightarrow\; \forall\, y \in F^{\perp}\; \langle x; y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; x \in F^{\perp\perp}.$$

ومن جهة أخرى، نعلم أنّ:

$$H = F^{\perp\perp} \oplus F^{\perp} = F \oplus F^{\perp}.$$

ومنه :

$$F = F^{\perp\perp}.$$

نعتزم في سياق نتائج مبرهنة الإسقاط، دراسة عكس القضية (13.2.4).

من المهمّ أن نشير إلى أنّه ليس كلّ عائلة مستقلّة خطيّا متعامدة؛ غير أنّه يكون من الممكن إنشاء عائلة متعامدة انطلاقا من عائلة مستقلّة خطيّا؛

بل ويمكن جعل العائلة المنشأة **متعامدة ومتجانسة**↓. إنّ لهذه الطريقة الموصوفة بهذا التمهيد إسما هو منهاج **المعامدة لـقْرام**[1] **. شميدت**[2].

نعمد قبل صياغتها إلى وضع أمثلة لعائلات متعامدة متجانسة.

13.3.4 أمثلة

1) إنّ الأساس القانونيّ $(e_i)_{1\le i\le n}=((0,\dots,0,\underset{\overset{\uparrow}{i}}{1},0,\dots,0))_{1\le i\le n}$ يشكّل، بكلّ تأكيد، جملة متعامدة متجانسة في $\mathbb{C}^n$ المزوّد بالجداء السلّميّ:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y}_i.$$

2) $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ مع $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ العائلة $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ من E، المعرّفة هكذا:

$$e_n(x)=e^{2i\pi nx};\ \ x\in[0,1],n\in\mathbb{Z}$$

متعامدة متجانسة.

3) نعرّف في الفضاء $E=\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ المزوّد بالجداء السلّميّ:

$$\langle f,g\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)\,g(t)dt,$$

↓ نسمّي عائلة متعامدة متجانسة كل عائلة مؤلّفة من عناصر متعامدة مثنى مثنى، يكون نظيم كلّ واحد منها مساويا 1.

27. Jorgen Pedersen Gram: رياضيّاتيّ دانماركيّ. ولد في 27 جوان 1850 بنوستروب ومات في 29 أفريل 1916 بكوبنهاڤان. اشتغل بالاحتمالات والتحليل العدديّ ونظرية الأعداد. ترك بصمات مشهودة في المعادلات التكامليّة.

28. Erhard Schmidt: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 13 جوان 1876 بدوبره (ترتوبإستونيا الحالية) ومات في 6 ديسمبر 1959 ببرلين. ناقش عام 1905 رسالة دكتوراه تحت إشراف هيلبرت. كان موضوعها يتمحور حول المعادلات التكامليّة، وهي الحقل المفضّل لديه. يرجع إليه فضل إنشاء معهد الرياضيات التطبيقيّة في برلين.

(تأكّد من أنّه جداء سلّميّ فعلا !) عائلة $(T_n)_{n\geq 0}$ بِـ:

$$T_n(x)=\cos(n\ Arc\cos\ x),\ \ x\in[-1,1].$$

(هذه العائلة مشهورة بتسميّة **كثيرات حدود تشيبيشاف**[1]).

إنّ العائلة $(T_n)_n$ متعامدة متجانسة. لنبيّن ذلك. من أجل كلّ عددين طبيعيّين مختلفين p و q نكتب:

$$\begin{aligned}\langle T_p,T_q\rangle &=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(p\,Arc\cos x).\cos(q\,Arc\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos py\cos qy\,dy\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(p+q)y+\cos(p-q)y\right]dy=0.\end{aligned}$$

ومن أجل $p=q$ يأتي:

$$\langle T_p,T_p\rangle=\left\|T_p\right\|^2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\cos p\,Arc\cos x)^2}{\sqrt{1-x_2}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos\ p\,y)^2\,dy=1.$$

نصل الآن، إلى وضع منهاج المعامدة الذي أفصحنا عنه أعلاه والذي نصوغه على النحو التالي:

14.3.4 مبرهنة (ڤرام . شميدت)

29. Pafnuty Lvovich Chebyshev: رياضيّاتيّ روسيّ. ولد في 16 ماي 1821 بأوكاتوفو ومات في 8 ديسمبر 1894 بسان بترسبورڨ. ناقش عام 1846 رسالة دكتوراه حول نظرية التوفيقات. يعتبر مؤسّس المدرسة الروسيّة في نظرية المقاربة.

ليكن H فضاء شبه هيلبرتيّ و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عائلة مستقلّة خطيّا. يمكن عند ذلك إنشاء عائلة متعامدة متجانسة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تولّد نفس الفضاء الذي تولّده $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

إثبات

لنشر بادئ ذي بدء، إلى أنّ الأمر يتعلّق أساسا بإنشاء عائلة متعامدة $(b_n)_n$. فإن لم تكن هذه الأخيرة متجانسة أخذنا بدلها العائلة المتجانسة $\left(\frac{b_n}{\|b_n\|}\right)_n$ التي تولّد، هي بدورها وبوضوح، نفس الفضاء الذي تولّده $(b_n)_n$

نعرّف العائلة $(b_n)_n$ بالعلاقة التدريجيّة هذه:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \neq 0 \\ b_n = a_n - P_{F_{n-1}}(a_n), \end{cases}$$

حيث رمزنا بِ F_{n-1} للفضاء الشعاعيّ المولد بِ $(a_i)_{1\le i\le n-1}$ و بِ $P_{F_{n-1}}$ لتطبيق الإسقاط على F_{n-1}. إنّ العائلة $(b_n)_n$ متعامدة. وبالفعل، من أجل دليلين m و n بحيث $n > m$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \langle b_n, b_m\rangle &= \langle a_n - P_{F_{n-1}}(a_n), a_m - P_{F_{m-1}}(a_m)\rangle \\ &= \langle a_n - P_{F_{n-1}}(a_n), a_m\rangle - \langle a_n - P_{F_{n-1}}(a_n), P_{F_{m-1}}(a_m)\rangle. \end{aligned}$$

إذا استندنا إلى البند الثاني من مبرهنة الإسقاط (4.3.4) تبيّن لنا أنّ الحدّين الواردين في الطرف الأيمن من هذه المساواة معدومان، ذلك لأنّ العنصرين a_m من أجل الأوّل و $P_{F_{m-1}}(a_m)$ من أجل الثاني، ينتميان إلى F_{n-1}. إذن:

$$\forall \underset{n\neq m}{n, m} \in \mathbb{N} \quad \langle b_n, b_m\rangle = 0;$$

وهو ما نستدلّ به للجزم بأنّ العائلة $(b_n)_n$ متعامدة.

من السهل، في الأخير، أن نرى أنّ العائلة $(b_n)_n$ تولّد نفس الفضاء الذي تولّده العائلة $(a_n)_n$؛ وكيف لا وقد جاء كلّ b_n إنشاء، مزجا خطّيّا للعناصر من $(a_n)_n$.

15.3.4 أمثلة

نعطي $(t^i)_{i=0,1,...} = \left(a_i(t)\right)_{i=0,1,...}$ في $H = \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$، حيث I مجال من $\mathbb{R}$ نحدّده حسب الحالات الموالية.

1) إذا كان $I = [-1,1]$ وزوّدنا H بالجداء السلّميّ:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt,$$

فإنّ منهاج المعامدة لغرام . شميدت السابق يسمح لنا بالحصول على كثيرات حدود مشهورة باسم **كثيرات حدود لوجاندر**[1].

2) إذا كان $I =]-\infty, +\infty[$ و $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{t^2} dt$ تحصّلنا على كثيرات حدود تدعى **كثيرات حدود هيرميت**[2].

3) إذا كان $I = [0, +\infty[$ و $\langle f, g\rangle = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t} dt$ تحصّلنا على **كثيرات حدود لاقير**[3].

30. Adrien-Marie Legendre: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 18 سبتمبر 1752 بباريس ومات بها في 10 جانفي 1833. كان أهمّ أعماله حول الدوال الناقصيّة، وقد نشره في ثلاثة مجلّدات تحت عنوان " تمارين الحساب التكامليّ"، في الأعوام 1811 و 1817 و1819.

31. Charles Hermite: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 24 ديسمبر 1822 بديوز ومات في 14 جانفي 1901 بباريس. له مساهمة هامّة في نظرية الأعداد وكثيرات الحدود المتعامدة والدوال الناقصيّة.

32. Edmond Laguerre: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 9 أفريل 1834 ببار لودوك ومات بها في 14 أوت 1886. اشتغل بالخصوص في حقلي التحليل والهندسة.

لنقم بحساب العناصر الثلاثة الأولى b_0 و b_1 و b_2 في الحالات الثلاث.
لنضع الإطار المشترك لها. لدينا:

$$b_0 = a_0 = 1,$$
$$\langle b_1, a_0 \rangle = \langle a_1 - P_{F_0}(a_1), a_0 \rangle = \langle x - \lambda, 1 \rangle = 0,$$
$$\begin{cases} b_2(x) = x^2 - (\alpha x + \beta), \\ \langle b_2, a_0 \rangle = 0, \\ \langle b_2, a_1 \rangle = 0, \end{cases}$$

حيث α و β و λ أعداد ينبغي تعيينها في كلّ حالة.

1) الحالة (1)

نعلم أنّ:

$$\langle b_1, a_0 \rangle = 0 \iff \int_{-1}^{1} (x - \lambda)\, dx = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

ومنه، $b_1(x) = x$.

وبالمثل لدينا:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} (x^2 - \alpha x - \beta)\, dx = 0, \\ \int_{-1}^{1} (x^2 - \alpha x - \beta) x\, dx = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

وعليه:

$$b_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

2) الحالة (2)

لنتذكّر أوّلا أنّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

هكذا يأتي:

$$\langle b_1, a_0\rangle = 0 \iff \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\lambda)e^{-x^2}dx = 0 \Rightarrow -\sqrt{\pi}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

ومنه، $b_1(x) = x$.

وبالمثل لدينا:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2-\alpha x-\beta)e^{-x^2}dx = 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2-\alpha x-\beta)xe^{-x^2}dx = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}\beta = 0 \\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\alpha = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta = \dfrac{1}{2}, \\ \alpha = 0.\end{cases}$$

وعليه:

$$b_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

3) الحالة (3)

لدينا:

$$\langle b_1, a_0\rangle = 0 \iff \int_{0}^{+\infty}(x-\lambda)e^{-x}dx = 0 \Rightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

ومنه:

$$b_1(x) = x - 1.$$

وبالمثل، لدينا أخيرا:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}(x^2-\alpha x-\beta)e^{-x}dx = 0, \\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty}(x^2-\alpha x-\beta)xe^{-x}dx = 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 4, \\ \beta = -2.\end{cases}$$

وهو ما يفضي إلى أنّ:

$$b_2(x) = x^2 - 4x + 2.$$

نقدم في ختام هذا المقطع على الإتيان بتمييز هامّ ومثير لثنوي فضاء هيلبرتيّ. سوف نبيّن أنّ **كلّ شكل خطيّ ومستمرًّ على فضاء هيلبرتيّ تمكن كتابته بدلالة جدائه السلميّ**. هذا توضيح وتفصيل للفكرة.

16.3.4 مبرهنة (فريدريك ريس)

ليكن H فضاء هيلبرتيّا و H' ثنويه الطبولوجيّ. وليكن a عنصرا من H.

1) يكون عندئذ التطبيق $\varphi_a : H \to \mathbb{K}$:

$$x \mapsto \varphi_a(x) = \langle x, a \rangle$$

شكلا خطيّا مستمرّا وذا نظيم يساوي $\|a\|$.

2) يكون التطبيق

$$\psi : H \to H'$$

$$a \mapsto \psi(a) = \varphi_a ,$$

تشاكلا تقايسيّا نصف خطّيّ.

إثبات

1) نستهلّه بالإشارة إلى أنّهإذا كان a معدوما بات واضحا أنّ $\varphi_a \equiv 0$ يحقّق القيود الموضوعة. وبالمثل، إذا كان a غير معدوم كان φ_a خطيّا؛ وهو مستمرّ كذلك، إذ أنّ:

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \le \|a\| \, \|x\|.$$

وفضلا عن ذلك لدينا:

$$\|\varphi_a\| \le \|a\|.$$

نلاحظ من جهة أخرى أنّه من أجل العنصر $x_0 = \frac{1}{\|a\|} a$ يأتي:

$$|\varphi_a(x_0)| = \left|\langle \frac{1}{\|a\|} a, a\rangle\right| = \frac{1}{\|a\|}\langle a, a\rangle = \frac{1}{\|a\|}\|a\|^2 = \|a\|;$$

وهو ما يضمن المساواة المطلوبة $\|\varphi_a\| = \|a\|$، وبهذا يكون برهان الجزء الأوّل قد تمّ.

2) بخصوص الجزء الثاني، يظهر توّا أنّ ψ نصف خطيّ وذلك نابع من كون الجداء السلميّ نصف خطيّ بالنسبة للمتغيّر الثاني. أمّا أن يكون ψ متباينا فذلك ما يبرزه هذا الحساب:

$$\psi(a) = 0 = \varphi_a \;\Leftrightarrow\; \|\psi(a)\| = \|\varphi_a\| = \|a\| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0.$$

إنّ غمر ψ هو الذي يستدعي منّا عناية خاصّة. يطلب من أجل كلّ عنصر f من H' إيجاد شعاع a من H بحيث يمكن أن نكتب $f = \varphi_a$ ؛ أي:

$$f(x) = \varphi_a(x) = \langle x, a\rangle,\; x \in H.$$

إذا كان $f \equiv 0$ فإنّ $a = 0$ يلبّي المطلوب. أمّا إذا كان $f \neq 0$ ، فإنّنا نعتبر حينئذ النواة $Kerf = F$. إنّها فضاء شعاعيّ جزئيّ مغلق من H .

ولمّا كان $F \neq H$ (لكون $f \neq 0$) و $H = F \oplus F^{\perp}$ وجب وجود عنصر b من $F^{\perp}$ بحيث $f(b) \neq 0$.

لنعتبر الآن، العنصر:

$$y = x - \frac{f(x)}{f(b)} b,\;\; x \in H.$$

نلاحظ أنّ y ينتمي إلى F ويحقّق:

$$\langle y, b\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle x - \frac{f(x)}{f(b)} b, b\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle x, b\rangle = \langle \frac{f(x)}{f(b)} b, b\rangle.$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{f(b)}{\|b\|^2}\langle x, b\rangle = \langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b\rangle.$$

وبأخذ $a=\frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2}b$ نكون قد أنهينا البرهان.

17.3.4 مثال

إذا اعتبرنا $H=\mathbb{C}^n$ مزوّدا بجدائه السلّميّ التقليديّ $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$ كتبنا من أجل كلّ f من $(\mathbb{C}^n)'$:

$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(e_i)=\langle x,\overline{f(e_i)}_{1\le i\le n}\rangle=\langle x,a\rangle,$$

حيث $a=(a_i)_{1\le i\le n}=\left(\overline{f(e_i)}\right)_{1\le i\le n}$ (رمزنا هنا بِ $(e_i)_{1\le i\le n}$ لأساس $\mathbb{C}^n$ القانونيّ و بِ $(x_i)_{1\le i\le n}$ لمركّبات الشعاع x وفق هذا الأساس).

4.4 الأسس الهيلبرتيّة

1.4.4 تعريف

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ عائلة متعامدة متجانسة من فضاء شبه هيلبرتي H. وليكن x شعاعا من H نسمّي **مركّبة** x من الرتبة i بالنسبة لهذه الجملة العدد َ ξ_i من K المعرّف بِ $\xi_i=\langle x,a_i\rangle$.

يسمّى هذا العدد **معامل فوريي**[1] لِ x وفق العائلة $(a_i)_{i\in I}$. إذا كانت $I=\mathbb{N}$ سمّيت السلسلة $\sum_{i\in\mathbb{N}}\xi_ia_i$ **بسلسلة فوريي** للعنصر x بالنسبة للعائلة $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

---

33. Joseph Fourier: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 مارس 1768 بأُكسير ومات في 16 ماي 1830 بباريس. درس بمدرسة باريس العليا للأساتذة بأيدي لاڤرانج ولابلاس. بدأ بالتدريس بالمدرسة المتعدّدة التقنيات قبل أن يشارك في حملة نابليون على مصر. نشر عددا هامّا من البحوث في الرياضيّات الصرفة والتطبيقيّة.

2.4.4 قضية

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ عائلة متعامدة متجانسة في فضاء شبه هيلبرتيّ H. إذا كان J جزءا منتهيا من I وكان $x=\sum_{i\in J}\xi_i a_i$ فإنّ:

إثبات

لدينا وضوحا:

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\langle\sum_{i\in J}\xi_i a_i\,,\sum_{m\in J}\xi_m a_m\rangle=\sum_{I\in J}\sum_{m\in J}\xi_i\overline{\xi_m}\langle a_i,a_j\rangle=\sum_{i\in J}\|\xi_i\|^2.$$

3.4.4 قضية (متباينة بيسال[1])

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ جملة متعامدة متجانسة في فضاء شبه هيلبرتيّ H تكون عند ذلك العائلة:

$$\left(|\xi_i|^2\right)_{i\in I}=\left(|<x,a_i>|^2\right)_{i\in I},$$

قابلة للجمع، ويحقّق مجموعها:

$$\sum_{i\in I}|\xi_i|^2\leq\|x\|^2.$$

1. Friedrich Wilhelm Bessel: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 جويلية 1784 بمندن ومات في 17 مارس 1846 بكونيسبيرڤ (بروسيا الحالية). اشتغل بالفلك والميكانيكا السماوية والرياضيّات. أدخل في أحد أبحاثه عام 1736 دالّته التي تحمل اليوم اسمه.

إثبات

ليكن J جزءا منتهيا من I ولنضع:

$$E_J = \left[(a_i)_{i \in J} \right];$$
$$x_J = \sum_{\alpha \in J} \langle x, a_\alpha \rangle a_\alpha .$$

إنّ الشعاع $x - x_J$ عموديّ على E_J. وعليه، فهو عموديّ على x_J.

وطبقا لمبرهنة فيثاغورس يأتي أنّ:

$$\|x - x_J\|^2 + \|x_J\|^2 = \|x\|^2 .$$

ومنه:

$$\|x_J\|^2 \le \|x\|^2 .$$

ولمّا كان:

$$\|x_J\|^2 = \langle \sum_{\alpha \in J} \langle x, a_\alpha \rangle a_\alpha , \sum_{\beta \in J} \langle x, a_\beta \rangle a_\beta \rangle = \sum_{\alpha \in J} |\langle x, a_\alpha \rangle|^2 = \sum_{\alpha \in J} |\xi_i|^2 ,$$

جاء المطلوب؛ أي:

$$\sum_{i \in I} |\xi_i|^2 \le \|x\|^2 ,$$

(مستندين بالطبع إلى المبرهنة (4.1.4).

4.4.4 تعريف

لتكن $(a_i)_{i \in I}$ عائلة متعامدة متجانسة من فضاء شبه هيلبرتيّ H.

نقول عن العائلة إنّها **أساس (هيلبرتيّ)** لِـ H إذا كانت كليّة فيه.

وبعبارة أخرى، تكون العائلة $(a_i)_{i \in I}$ أساسا متعامدا متجانسا لِـ H إذا حقّقت ما يلي:

1) $\forall i \ne j \in I \quad \langle a_i , a_j \rangle = 0$

2) $\forall i \in I \quad \langle a_i , a_i \rangle = 1$

3) $H = \overline{\left[(a_i)_{i \in I} \right]}$

نكتب حينئذ :

$$\forall\ x \in H\ \ \exists (\lambda_i)_{i\in I} \subset \mathrm{K} : x = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i .$$

إنّ القضايا الموالية تقدّم تمييزا للأساس.

5.4.4 قضية

تكون العائلة المتعامدة المتجانسة $(a_i)_{i\in I}$ أساسا لفضاء شبه هيلبرتيّ H إذا وفقط إذا ألّفت جملة **أعظميّة**↓.

إثبات

إنّ لزوم الشرط واضح، إذ أنّ:

$$x \perp a_{i(i\in I)} \ \ \Rightarrow\ \ x \in \left[(a_i)_{i\in I}\right]^{\perp} \ \Rightarrow\ x \in H^{\perp} \ \Rightarrow\ x = 0;$$

أمّا بخصوص كفاية الشرط، فلدينا:

$$\left[(a_i)_{i\in I}\right]^{\perp} = \{0\} \ \Leftrightarrow\ \overline{\left[(a_i)_{i\in I}\right]}^{\perp} = \{0\}$$

وبالانتقال إلى عمودي الطرفين نأتي المساواة $H = \overline{\left[(a_i)_{i\in I}\right]}$.

6.4.4 مبرهنة

ليكن H فضاء شبه هيلبرتيّا ولتكن $(a_i)_{i\in I}$ عائلة متعامدة متجانسة. تكون عند ذلك القضايا التالية متكافئة:

1) من أجل كلّ x و y من H ذوي مركّبات $(\xi_i)_{i\in I}$ و $(\eta_i)_{i\in I}$ على الترتيب تكون العائلة $(\xi_i \eta_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع ويساوي مجموعها $\langle x, y\rangle$.

2) من أجل كلّ x من H يكون لدينا:

↓ أي لا يوجد شعاع غير معدوم يكون عموديّا على كلّ عنصر من العائلة $(a_i)_{i\in I}$.

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\xi_i|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, a_i\rangle|^2 .$$

هذه المساواة مشهورة **بمساواة بارسفال**[1].

3) من أجل كلّ x من H تكون العائلة $(\xi_i a_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع ويساوي مجموعها x، أي:

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, a_i\rangle a_i .$$

4) العائلة $(a_i)_{i\in I}$ كليّة في H.

إثبات

1) ⇐ 2)

يكفي أخذ $y = x$.

2) ⇐ 3)

العائلة $\left(|\xi_i|^2\right)_{i\in I}$ قابلة للجمع ومجموعها هو $\|x\|^2$. نكتب من أجل ذلك أنّه مهما يكن $\varepsilon > 0$ يوجد جزء منته J_ε من I بحيث:

$$\forall \underset{finie}{K} \subset I : J_\varepsilon \subseteq K \ \Rightarrow\ \|x\|^2 - \sum_{i\in K} |\xi_i|^2 \le \varepsilon .$$

ولكن:

$$\left\| x - \sum_{i\in K} \xi_i a_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in K} |\xi_i|^2 \le \varepsilon ,$$

نستخلص إذن، أنّ العائلة $(\xi_i\, a_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع وأنّ مجموعها يساوي x.

3) ⇐ 4)

---

2. Marc Antoine Des Chênes Parseval: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 27 أفريل 1755 بروزيير أسلين ومات في 16 أوت 1836 بباريس. اشتهر بالأعمال المعروفة تحت تسمية مساواة بارسفال، التي تعدّ دستورا أساسيّا في نظرية سلاسل فوريي.

بما أنّ كلّ شعاع x من H يكتب تحت الشكل:

$$x = \sum_{i\in I} \xi_i a_i,$$

فإنّ x يكون بذلك نهاية للمجاميع المنتهية من العناصر $(\xi_i a_i)$. وعليه، تكون العائلة $(a_i)_{i\in I}$ كليّة في H.

4) $\Leftarrow$ 1)

ليكن x شعاعا من H و $\varepsilon > 0$. يوجد، فرضا، مزج خطّيّ منته $y = \sum_{i\in J} \alpha_i a_i$ يتقارب نحو x، أي أنّ:

$$\|x - y\| \le \varepsilon.$$

وإذا كان x' هو مسقط x على الفضاء $[(a_i)_{i\in J}]$ فإنّ x' يحقّق كذلك:

$$\|x - x'\| \le \varepsilon.$$

ولكن الشعاع $x - \sum_{i\in J} \xi_i a_i$ عموديّ على $[(a_i)_{i\in J}]$. إذن نستخلص أنّ:

$$x' = \sum_{i\in J} \xi_i a_i,$$

وهذا لوحدانيّة x'. يترتّب عن ذلك:

$$\left\| x - \sum_{i\in J} \xi_i a_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |\xi_i|^2 \le \varepsilon^2.$$

ولمّا كان:

$$\|x\|^2 - \sum_{i\in J} |\xi_i|^2 \ge 0,$$

حسب بيسال، تبيّن أنّ العائلة $\left(|\xi_i|^2\right)_{i\in I}$ قابلة للجمع ومجموعها يطابق:

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\xi_i|^2 = \sum_{i\in I} \xi_i \overline{\xi_i} = \langle x, x\rangle.$$

ليكن الآن x و y عنصرين من H و $(\xi_i)_{i\in I}$ و $(\eta_i)_{i\in I}$ مركّباتهما على الترتيب. نعلم أنّه إذا كانت $\left(|\xi_i|^2\right)_{i\in I}$ و $\left(|\eta_i|^2\right)_{i\in I}$ قابلتين للجمع كان الأمر كذلك بالنسبة إلى العائلتين $\left(\overline{\xi_i}\,\eta_i\right)_{i\in I}$ و $\left(\xi_i\,\overline{\eta_i}\right)_{i\in I}$. هكذا، إذا عبّرنا عن جميع حدود المتطابقة (*) الواردة في إثبات القضية (6.1.4) بدلالة ξ_i و η_i وصلنا إلى العلاقة المنشودة:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \xi_i\,\eta_i .$$

لا بأس أن نعيد، ترسيخا للمعنى، صوغ هذه النتيجة على هذا النحو:

كلّ جملة متعامدة متجانسة $(a_i)_{i\in I}$ تؤلّف أساسا هيلبرتيّا لِـ H كلّما تحقّقت إحدى الدعاوى الأربع السابقة.

7.4.4 قضية

إذا كان H فضاء شبه هيلبرتيّ قابلا للفصل، فإنّ كلّ جملة متعامدة ومتجانسة فيه تكون حينئذ قابلة للعدّ.

إثبات

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ الجملة المعنيّة. يمكننا أن نفترضها متجانسة أيضا، ولا يضرّ ذلك في شيء إذ يكفي استبدالها في حالة العكس بالجملة $\left(\dfrac{1}{\|a_i\|}a_i\right)_{i\in I}$.

من أجل كلّ دليلين مختلفين i و j نكتب:

$$\|a_i - a_j\|^2 = \|a_i\|^2 + \|a_j\|^2 = 2.$$

وعليه، $\|a_i - a_j\| = \sqrt{2}$.

لنعتبر عائلة الكرات $\left(B\left(a_i,\frac{1}{2}\right)\right)_{i\in I}$. من أجل كلّ دليل i مختلف عن j وكلّ x من $B\left(a_i,\frac{1}{2}\right)$ نكتب:

$$\left\|\left\|a_j-a_i\right\|-\left\|x-a_i\right\|\right\| \le \left\|x-a_j\right\|.$$

وعليه:

$$\left\|x-a_j\right\| > \frac{1}{2}.$$

نستخلص أنّ الكرات $\left(B\left(a_i,\frac{1}{2}\right)\right)_{i\in I}$ غير متقاطعة مثنى مثنى.

لتكن $(b_n)_n$ مجموعة قابلة للعدّ وكثيفة في H . إنّ كلّ كرة $B\left(a_i,\frac{1}{2}\right)$ تضمّ على الأقلّ عنصرا من هذه المجموعة. يترتّب عن هذا أنّ عائلة هذه الكرات قابلة للعدّ، وهو ما يؤدّي إلى أنّ مجموعة المراكز $(a_i)_i$ قابلة للعدّ كذلك.

8.4.4 نتيجة

كلّ فضاء شبه هيلبرتيّ قابل للفصل متمتّع بأساس متعامد متجانس قابل للعدّ.

إثبات

لتكن $\{b_1,b_2,...,b_n,...\}$ مجموعة قابلة للعدّ وكثيفة في H . نختار من هذه المجموعة جملة كليّة من عناصر مستقلّة خطّيّا $(a_n)_n$. يكفي من أجل ذلك إقصاء كلّ عنصر b_k من $(b_n)_n$ يكون مزجا خطّيّا للعناصر b_i مع $k>i$. تتولّى طريقة المعامدة لڤرام. شميدت، المطبّقة على $(a_n)_n$، الحصول على أساس متعامد متجانس وقابل للعدّ.

9.4.4 مثال

ليكن $H = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ مزوّدا بجداءه السلّميّ المألوف:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

نلاحظ أنّ:

$$\| f\|^2 = \int_{-1}^{1} (f(t))^2 \; dt \le 2 \sup_{-1\le t\le 1} (f(t))^2 \le 2\left(\sup_{-1\le t\le 1} |f(t)|\right)^2 .$$

وعليه، فإنّ التقارب المنتظم يستلزم التقارب في H. ومن جهة أخرى، نعلم أنّ المتتالية المؤلّفة من وحيدات الحدود $\left(a_n(t)=t^n\right)_n$ مستقلّة خطيّا وأنّها كلّيّة في H طبقا لمبرهنة ستون[1]. فيرشتراس. لتكن المتتالية $(P_n)_n$ المتتالية المتعامدة المتجانسة التي تعرّفها $(a_n)_n$ طبقا لمنهاج ڤرام. شميدت. يأتي أنّ $P_n(t)$ كثير حدود درجته n. وبوضع $P_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$، يمكن تعيين $(P_n)_n$ بالتدريج. (قم بذلك !) تؤلّف عندئذ أساسا لـ H.

10.4.4 مبرهنة

كلّ فضاء هيلبرتيّ H متمتّع بأساس متعامد متجانس.

إثبات

نستخدم مسلّمة زورن.

لتكن $\mathscr{F}$ مجموعة العائلات المتعامدة المتجانسة في H. إنّها غير خالية، ذلك أنّه من أجل كلّ عنصر a من H، ذي نظيم 1 تكون العائلة

3. Marshall Harvey Stone: رياضيّاتيّ أمريكيّ. ولد في 8 أفريل 1903 بنيويورك ومات في 9 جانفي 1989 بمدراس (الهند). تشعّبت أبحاثه. أصدر عام 1932 المؤلّف "التحويلات الخطيّة في فضاء هيلبرتيّ وتطبيقاتها على التحليل"، ضمّنه نتائجه حول المؤثّرات الذاتية القرين.

المنحلّة $(\{a\})$ متعامدة متجانسة. وتفاديا لاستخدام مفرط للأدلّة سوف نرمز لعائلات H المتعامدة المتجانسة كما نرمز لأجزاء H كأن نقول:

A جزء من H متعامد متجانس إذا كان نظيم كلّ عنصر من A مساويا 1 وكان كلّ عنصرين مختلفين منه متعامدين.

لنثبت أنّ المجموعة $\mathscr{F}$ المرتّبة بالإحتواء استقرائيّة. لتكن $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة جزئيّة مرتّبة جيّدا من عناصر من $\mathscr{F}$. لنضع $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$ ولنتأكّد من أنّ A ينتمي إلى $\mathscr{F}$. إنّ كلّ شعاع من A ينتمي إلى جزء ما A_λ. وعليه، فنظيمه يساوي 1. ليكن x و y عنصرين مختلفين من A. يوجد عندئذ دليلان λ و μ من Λ بحيث يكون x من A_λ و y من A_μ. وبما أنّ الأجزاء (A_λ) مرتّبة جيّدا يكون لدينا على سبيل المثال $A_\lambda\subset A_\mu$. يصبح العنصران x و y ينتميان معا إلى A_μ، ممّا يجعلهما متعامدين. هكذا، تكون $\mathscr{F}$ استقرائيّة.

ليكن B عنصرا أعظميّا من $\mathscr{F}$ (تضمن مسلّمة زورن وجوده). وليكن F الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ من H المولّد بواسطة العائلة B. فإذا كان $\overline{F}=H$ كان B كلّيًا في H؛ وعليه، فهو أساس متعامد متجانس له. وإذا كان $\overline{F}\neq H$ استخلصنا أنّ $F^\perp\neq\{0\}$ (القضية (9.3.4)). يوجد، تبعا لذلك عنصر a من $F^\perp$ بحيث $\|a\|=1$ (نأخذ $\frac{1}{\|a\|}a$ في حالة $\|a\|\neq 1$). إنّ العائلة $B\cup\{a\}$ متعامدة متجانسة وهذا غير ممكن لتعارضه مع كون B أعظميًا. إذن B أساس متعامد متجانس لِـ H.

حريّ بنا أن ننبّه عقب هذه المبرهنة إلى **أنّ أساسا** هيلبرتيّا ليس، على العموم، أساسا جبريّا. فالمزوج الخطّيّة المنتهية لعناصر من مثل هذا الأساس تؤلّف فضاء شعاعيّا جزئيّا كثيفا في H.

11.4.4 تعريف

ليكن H_1 و H_2 فضاءين شبه هيلبرتيّين على حقل واحد K.

نسمّي **تشاكلا هيلبرتيّا** من H_1 على H_2، كلّ تشاكل u من H_1 على H_2 يحافظ على الجداءات السلّميّة؛ أي:

$$\langle u(x), u(y)\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1} \quad \forall x, y \in H_1.$$

12.4.4 مثال

ليكن $(a_i)_{i\in I}$ أساسا متعامدا متجانسا لفضاء شبه هيلبرتيّ H. إنّ التطبيق $u : H \to \ell_I^2(\mathrm{K})$:

$$x \mapsto u(x) = \left(\langle x, a_i\rangle\right)_{i\in I},$$

يشكّل تشاكلا هيلبرتيّا من H نحو جزء كثيف في الفضاء $\ell_I^2(\mathrm{K})$ (الذي جاء تعريفه في المثال الثالث من (20.1.4)).

التطبيق u خطّيّ بطبيعة الحال. وفضلا عن ذلك، فهو تقايس من H على $u(H)$، إذ أنّ:

$$\|u(x)\| = \left\|\left(\langle x, a_i\rangle\right)_{i\in I}\right\| = \sqrt{\sum_{i\in I} |\langle x, a_i\rangle|^2} = \|x\|.$$

ولمّا كانت $u(H)$ تضمّ العائلة القانونيّة $(e_i)_{i\in I}$ جاءنا $\overline{u(H)} = \ell_I^2(\mathrm{K})$.

13.4.4 ملحوظة

نخلص مما سبق إلى أنّ الفضاءات الهيلبرتيّة متشاكلة طبولوجيّا فيما بينها. وأكثر من هذا، يمكن القول بأنّه لا يوجد، بتقريب تشاكل هيلبرتيّ، سوى فضاء هيلبرتيّ واحد، يمكن للفضاء $\ell_I^2(\mathrm{K})$ أن يكون ممثّلا لهذه الفضاءات ...

5.4 مسائل محلولة

1) ليكن E فضاء شبه هيلبرتيّ على $\mathbb{R}$.

1) اثبت أنّ:

$$\forall\ (x,y)\in E^2\ \ 1+\|x+y\|^2 \le 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

2) ليكن r و ρ عددين حقيقيّين بحيث $0<\rho<r$ و $B_f(0,r)$ و $B_f(0,r+\rho)$ الكرتين المغلقتين المتمركزتين عند 0 وذواتي نصف القطر r و $r+\rho$ على التوالي. ليكن A جزءا محدّبا من E بحيث:

$$A\subset B_f(0,r+\rho)\setminus B_f(0,r).$$

اثبت أنّ:

$$\forall\ (x,y)\in A^2\ \ \|x-y\|\le 2\sqrt{3d\delta}.$$

2) ليكن E و F فضاءين شبه هيلبرتيّين حقيقيّين و f تطبيقا غامرا من E نحو F ومحقّقا:

1) $f(0)=0,$

2) $\forall\, x,y\in E\quad \|f(x)-f(y)\|_F=\|x-y\|_E.$

اثبت أنّ f تشاكل هيلبرتيّ متقايس.

3) ليكن الفضاء $H=\mathscr{C}\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\mathbb{R}\right)$ مزوّدا بالنظيم الأساسيّ $\|.\|_1$. اثبت أنّ H ليس شبه هيلبرتيّ. (يمكنك أن تستعين بالدالّتين:

$$f(t)=\cos t;\ g(t)=\sin t.)$$

4) ليكن H فضاء هيلبرتيّا و u عنصرا من $\mathscr{L}(H)$. نفترض وجود ثابت $0 < c$ بحيث:

$$\forall x \in (Ker\, u)^{\perp} \quad \|x\| \le c\|u(x)\|.$$

برهن أنّ $u(H)$ مغلق في H.

5) احسب زوايا مثلّث رؤوسه $f_1(x) = 0$ و $f_2(x) = 1$ و $f_3(x) = x$ من الفضاء $L^2\left(\left]-1,1\right[\right)$.

6) ليكن F جزءا محدّبا وتامّا من فضاء شبه هيلبرتيّ H. برهن أنّ تطبيق الإسقاط P_F على F ليبشيتزيّ نسبته 1.

7) ليكن H فضاء شبه هيلبرتيّ و $(a_i)_{1\le i\le n}$ عائلة متعامدة متجانسة. نضع:

$$F = \left[(a_i)\right]_{1\le i\le n}.$$

1) اثبت أنّ لكلّ عنصر x من H مسقطا وحيدا x' على F.

2) اثبت أنّ:

$$x' = P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i \rangle a_i.$$

8) ليكن $H = L^2\left(\left[-1,1\right]\right)$ و $u : H \to \mathbb{R}$ تطبيقا معرّفا بـ:

$$u(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt.$$

1) اثبت أنّ u خطّيّ مستمرّ واحسب نظيمه.

2) عيّن الدالّة g من H بحيث:

$$\forall\, f \in H \;\; u(f) = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)dt.$$

3) اثبت أنّ:

$$[g]^{\perp} = Ker\, u.$$

4) احسب مسقط التطبيق المطابق id_H على $Ker\, u$.

9) ليكن $H = \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. نضع:

$$F = \left\{ x = (x_n)_n \in H \,/\, x_{2n} = -\frac{1}{2} x_{2n-1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1) اثبت أنّ F فضاء شعاعيّ جزئيّ مغلق من H .

2) ليكن $y = \left(\frac{1}{n}\right)_n$. عيّن مسقطه $P_F(y)$.

10) ليكن H فضاء هيلبرتيّا حقيقيّا. ولتكن (e_n) و (f_n) عائلتين متعامدتين متجانستين من H . ولتكن $(\alpha_n)_n$ متتالية محدودة من أعداد حقيقيّة غير معدومة. نفترض أنّه من أجل كلّ عنصر x من H تكون السلسلة $\sum \alpha_n \langle x, e_n \rangle f_n$ متقاربة ونضع:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle f_n.$$

اثبت عندئذ أنّ:

1) u خطّيّ ومستمرّ واحسب نظيمه.

2) u متباين $\Leftrightarrow$ $(e_n)_n$ كلّيّة في H

3) $H = \overline{u(H)}$ $\Leftrightarrow$ $(f_n)_n$ كلّيّة في H

6.4 حلول

1) 1) إذا استحضرنا المتباينتين الواضحتين:

$$\langle x,y\rangle \le \|x\|\|y\|,$$
$$\|x\|\|y\| \le \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),$$

تبيّن لنا:

$$1+\|x+y\|^2 = 1+\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle \le 1+\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|$$
$$< 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

2) نعلم أنّ:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle,$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$

وعليه:

$$\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2-2\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2\right).$$

الآن، إذا كان x و y من A جاءنا:

$$\|x\|^2 \le (r+\rho)^2,$$

$$\|y\|^2 \le (r+\rho)^2.$$

ولمّا كان A محدّبا ضمنّا

$\frac{1}{2}(x+y)$ في A ؛ وبالتالي:

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2 > r^2.$$

إذا لاحظنا أنّ $\rho^2 < r\rho$ حصلنا على:

$$\|x-y\|^2 < 2\left((r+\rho)^2+(r+\rho)^2-2r^2\right) = 2\left(2\rho^2+4r\rho\right) < 12r\rho.$$

ومنه النتيجة.

2) لنشر على الفور إلى أنّ الشرط (2) يضمن استمرار f . وإذا لاحظنا أنّ:

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F = \|x\|_E \,, \qquad (*)$$

وأنّ تفكيك طرفي المساواة:

$$\forall x, y \in E \quad \|f(x) - f(y)\|_F^2 = \|x - y\|_E^2 \,;$$

يوصل إلى:

$$\forall x, y \in E \quad \langle f(x), f(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E . \qquad (**)$$

كنّا قد حصرنا باقي المطلوب في إثبات خطّيّة f ؛ ذلك لأنّ العلاقة (*) والشرط (2) يضمنان تباينه واستمراره على التوالي، في حين أنّ العلاقة (**) تجعل منه تشاكلا هيلبرتيّا.

ليكن x و y عنصرين من E و α و β عنصرين من □. نكتب عندئذ:

$$\|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|_F^2 = \|f(\alpha x + \beta y)\|_F^2 +$$

$$+\alpha^2 \|f(x)\|_F^2 + \beta^2 \|f(y)\|_F^2 + 2\alpha\beta \langle f(x), f(y) \rangle_F$$
$$- 2\alpha \langle f(\alpha x + \beta y), f(x) \rangle_F - 2\beta \langle f(\alpha x + \beta y), f(y) \rangle_F$$

$$= \|\alpha x + \beta y\|_E^2 + \alpha^2 \|x\|_E^2 + \beta^2 \|y\|_E^2 + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle_E - 2\alpha \langle \alpha x + \beta y, x \rangle_E$$
$$- 2\beta \langle \alpha x + \beta y, y \rangle_E$$

$$= \left(\alpha^2 \|x\|_E^2 + \beta^2 \|y\|_E^2 + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle_E \right) + \left(\alpha^2 \|x\|_E^2 + \beta^2 \|y\|_E^2 \right) +$$
$$+2\alpha\beta \langle x, y \rangle_E - 2\alpha^2 \|x\|_E^2 - 2\alpha\beta \langle y, x \rangle_E - 2\alpha\beta \langle x, y \rangle_E - 2\beta^2 \|y\|_E^2 = 0.$$

(لاحظ أنّنا استخدمنا هنا العلاقتين (*) و(**) وكذا كون الفضاءين E و F حقيقيّين). نستخلص أنّ:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),$$

أي أنّ f خطّيّ.

3) نقوم، طبقا للمبرهنة (16.1.4)، بالتأكد من أنّ النظيم المعتبر لا يحقّق متطابقة متوازي الأضلاع. لدينا:

$$\|f\|_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1,\quad \|g\|_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1.$$

وعليه:

$$2\left(\|f\|_1^2+\|g\|_1^2\right)=4.$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\|f+g\|_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)\,dx=2,$$

$$\|f-g\|_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2.$$

وعليه:

$$\|f+g\|_1^2+\|f-g\|_1^2=4+12-8\sqrt{2}=16-8\sqrt{2}.$$

يتبيّن هكذا أنّ:

$$\|f+g\|_1^2+\|f-g\|_1^2\neq 2\left(\|f\|_1^2+\|g\|_1^2\right).$$

4) يكفي أن نبيّن أنّ:

$$\overline{u(H)}\subseteq u(H).$$

ليكن y عنصرا من $\overline{u(H)}$. توجد عندئذ متتالية $(y_n)_n$ متقاربة نحو عنصر y في $u(H)$. ولمّا كان u من $\mathscr{L}(H)$ فإنّه يمكننا أن نكتب:

$$H = \operatorname{Ker} u \oplus (\operatorname{Ker} u)^{\perp};$$

وهذا طبقا للبند الرابع من المبرهنة (10.3.4). ينجم عن ذلك أنّ:

$$\forall x \in H \quad x = x_{\operatorname{Ker} u} + x_{(\operatorname{Ker} u)^{\perp}}.$$

ومنه:

$$\forall x \in H \quad u(x) = u\left(x_{(\operatorname{Ker} u)^{\perp}}\right).$$

لنرمز لـ $x_{(\operatorname{Ker} u)^{\perp}}$ بـ $\overset{\circ}{x}$. نكتب حينئذ:

$$y_n \in u(H) \quad \Rightarrow \quad \exists \overset{\circ}{x}_n \in (\operatorname{Ker} u)^{\perp} : y_n = u\left(\overset{\circ}{x}_n\right).$$

ومن جهة أخرى، يسمح لنا الفرض بالحصول على:

$$\left\| y_p - y_q \right\| \geq \frac{1}{c} \left\| \overset{\circ}{x}_p - \overset{\circ}{x}_q \right\|;$$

وهذا، أيّا كان p و q من $\mathbb{N}$ بحيث $q < p$. ولكن المتتالية $(y_n)_n$ أخذت متقاربة، إذن فهي كوشيّة. وإذا ارتكزنا على المتباينة الأخيرة أعلاه اتّضح أنّ المتتالية $\left(\overset{\circ}{x}_n\right)_n$ كوشيّة بدورها أيضا في $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. وما دام هذا الأخير مغلقا و H تامّا فإنّه يضحى تامّا كذلك، ممّا يجعل المتتالية $\left(\overset{\circ}{x}_n\right)_n$ تتقارب في $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$، نحو نهاية نرمز لها بـ $\overset{\circ}{x}$. وعلى صعيد آخر، يمكّننا استمرار u من وضع:

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} u\left(\overset{\circ}{x}_n\right) = u\left(\lim_{n \to \infty} \overset{\circ}{x}_n\right) = u(\overset{\circ}{x}).$$

ومنه:

$$y = u(\overset{\circ}{x}) \in u(H);$$

وهو ما يوصل إلى المطلوب.

5) يرتكز حلّ هذا التمرين على الصيغة:

$$\cos\theta = \cos(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|},$$

حيث x و y عنصران غير معدومين من $L^2(]-1,1[)$ و θ هي الزاوية المحصورة بينهما. لنضع:

$$M = f_1 - f_2,\ N = f_3 - f_1,$$
$$P = f_3 - f_2.$$

من أجل كلّ x من $]-1,1[$ يكون لدينا:

$$M(x) \equiv 1,$$
$$N(x) = x,$$
$$P(x) = x - 1.$$

بعد هذا، نقوم بالحساب الموالي:

$$\|M\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2},$$

$$\|N\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\|P\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x-1)^2 dx} = 2\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\langle N, P\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - x)dx = \frac{2}{3},$$

$$\langle M, P\rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x)dx = 2,$$

$$\langle M, N\rangle = \int_{-1}^{1} -x\, dx = 0.$$

بالتعويض في الدستور أعلاه نجد:

$$\cos(M,N) = \frac{\langle M,N\rangle}{\|M\|\,\|N\|} = 0 \;\Rightarrow\; (M,N) = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(M,P) = \frac{\langle M,P\rangle}{\|M\|\,\|P\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; (M,P) = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos(N,P) = \frac{\langle N,P\rangle}{\|N\|\|P\|} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; (M,N) = \frac{\pi}{6}.$$

6) علينا أن نبرهن أنّ:

$$\forall\, x, y \in H \;\; \|P_F(x) - P_F(y)\| \le \|x - y\|.$$

إذا وضعنا:

$$\begin{aligned} x - y &= (x - P_F(x)) + (P_F(x) - P_F(y)) + (P_F(y) - y) \\ &= P_F(x) - P_F(y) + (x - P_F(x) + P_F(y) - y). \end{aligned}$$

جاءنا:

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 = \|P_F(x) - P_F(y)\|^2 + \|x - P_F(x) + P_F(y) - y\|^2 + \\ + 2\,\mathrm{Re}\langle P_F(x) - P_F(y), x - P_F(x) + P_F(y) - y\rangle. \end{aligned}$$

لنبيّن أنّ الحدّ الأخير من طرف هذه المساواة الأيمن موجب (أو معدوم). إذا استندنا إلى المبرهنة (6.3.4) جاءنا بهذا الصدد:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\langle P_F(x) - P_F(y), x - P_F(x) + P_F(y) - y\rangle = \\ &= -\mathrm{Re}\langle x - P_F(x), P_F(y) - P_F(x)\rangle - \mathrm{Re}\langle y - P_F(y), P_F(x) - P_F(y)\rangle \ge 0. \end{aligned}$$

نستخلص أنّ:

$$\|x-y\|^2 \ge \|P_F(x) - P_F(y)\|^2.$$

ومنه:

$$\|P_F(x)-P_F(y)\|\leq\|x-y\|.$$

7) 1) إنّ F فضاء شعاعيّ جزئيّ مولد بواسطة العائلة المنتهية $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. وعليه، فهو ذو بعد منته، الأمر الذي يجعله تامّا. وبمقتضى المبرهنة (4.3.4) يتبيّن أنّ كلّ عنصر x من H يتمتّع بمسقط وحيد x' على F.

2) إذا استندنا إلى البند الثاني من المبرهنة (4.3.4) حقّ لنا أن نكتب:

$$\forall y\in F\quad \langle x-x',y\rangle=0.$$

وإذا وظّفنا القضية (5.2.4) اكتفينا بالتأكّد أنّ:

$$\forall i\in\{1,2,\dots,n\}\quad \langle x-x',a_i\rangle=0.$$

من أجل كلّ i من $\{1,2,\dots,n\}$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\langle x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,a_j\rangle a_j,a_i\rangle&=\langle x,a_i\rangle-\sum_{j=1}^{n}\langle x,a_j\rangle\langle a_j,a_i\rangle\\&=\langle x,a_i\rangle-\langle x,a_i\rangle=0.\end{aligned}$$

وذلك لكون العائلة $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ متعامدة متجانسة. نستخلص إذن أنّ:

$$x'=\sum_{j=1}^{n}\langle x,a_j\rangle a_j.$$

8) 1) إنّ خطّيّة u واضحة. وفضلا عن ذلك لدينا:

$$|u(f)|=\left|\int_{-1}^{0}f(t)\,dt-\int_{0}^{1}f(t)\,dt\right|\leq\int_{-1}^{0}|f(t)|\,dt+\int_{0}^{1}|f(t)|\,dt=\int_{-1}^{1}|f(t)|\,dt.$$

باستخدام متراجحة كوشي . شوارتز نحصل على:

$$|u(f)| \leq \sqrt{\int_{-1}^{1} dt}\ \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(t)dt} = \sqrt{2}\|f\|,$$

وهو ما يبيّن أنّ u مستمرّ ويضمن المتباينة:

$$\|u\| \leq \sqrt{2}.$$

لنختر، من جهة أخرى، الدالّة g المعرّفة بـ:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & ;\ t \in [-1,0[\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & ;\ t \in [0,1] \end{cases}$$

يكون لدينا عندئذ:

$$\|g\| = \sqrt{\int_{-1}^{0} \frac{2}{4} dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{4} dt} = 1,$$

$$|u(g)| = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{2}}{4} dt + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \sqrt{2} \leq \|u\|.$$

نستخلص أنّ $\|u\| = \sqrt{2}$.

2) الدالّة المعنيّة هي:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & ;\ t \in [-1,0], \\ -1 & ;\ t \in]0,1]. \end{cases}$$

3) لدينا:

$$f \in Ker\ u \iff u(f) = 0 \iff \langle f, g \rangle = 0 \iff f \in [g]^{\perp}$$

أي:

$$Ker\ u = [g]^{\perp}.$$

4) لقد جاء في السؤال الأوّل أنّ u مستمرّ. وعليه، فإنّ $Ker\,u$ يضحى مغلقا في $L^2([-1,1])$ التامّ، ممّا يجعل المسقط المطلوب مضمون الوجود والوحدانية. لنعيّنه! إذا رمزنا له بـ h كتبنا:

$$id_H - h \in (Ker\ u)^{\perp}.$$

وبما أنّ:

$$(Ker\ u)^{\perp} = \left([g]^{\perp}\right)^{\perp} = [g],$$

فإنّه يوجد عدد λ بحيث $id_H - h = \lambda g$ ؛ أي أنّ:

$$h = id_H - \lambda g;$$

ولكن h عموديّ على g ، نكتب إذن:

$$0 = \langle h, g\rangle = \langle id_H - \lambda g, g\rangle = -\lambda\|g\|^2 + \langle id_H, g\rangle.$$

ومنه:

$$\lambda = \frac{\langle id_H, g\rangle}{\|g\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} t\, g(t)\, dt}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} t\ dt - \int_{0}^{1} t\ dt\right) = -\frac{1}{2}.$$

ويأتي في الأخير أنّ:

$$h(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}\ ; & t \in [-1,0], \\ t - \frac{1}{2}\ ; & t \in]0,1]. \end{cases}$$

9) 1) إنّ F فضاء شعاعيّ جزئيّ من H فعلا. فمن أجل كلّ x و y من F وكلّ α و β من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$z_{2n}=\alpha x_{2n}+\beta y_{2n}=\alpha\left(-\frac{1}{2}x_{2n-1}\right)+\beta\left(-\frac{1}{2}y_{2n-1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\alpha x_{2n-1}+\beta y_{2n-1}\right)=-\frac{1}{2}z_{2n-1}.$$

وعليه:

$$z=\alpha x+\beta y\in F.$$

لنبيّن أنّ F مغلق. ليكن x عنصرا من $\overline{F}$. توجد متتالية $(x^p)_p$ من F تتقارب نحو x. إنّ العنصر ينتمي في الواقع إلى F. وبالفعل:

$$\lim_{p\to+\infty} x^p=x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{p\to+\infty}\left\|x^p-x\right\|=0$$
$$\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\, p_0\in\mathbb{N}\ /\ \forall\, p\in\mathbb{N}:$$
$$p\geq p_0\ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left|x_n^p-x_n\right|\leq\varepsilon.$$

نستخلص أنّ:

$$p\geq p_0\ \Rightarrow\ \left|x_n^p-x_n\right|\leq\varepsilon,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

يأتي من ذلك بالخصوص:

$$\lim_{p\to+\infty} x_{2n}^p=x_{2n},$$

$$\lim_{p\to+\infty} x_{2n+1}^p=x_{2n+1}.$$

ولكن:

$$x_{2n}^p=-\frac{1}{2}x_{2n-1}^p,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

إذن:

$$x_{2n}=-\frac{1}{2}x_{2n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

من وحدانيّة النهاية. إنّ ذلك يعني أنّ x ينتمي إلى F، وهو ما يجعل هذا الأخير مغلقا.

2) إنّ المسقط $P_F(y)$ مضمون الوجود والوحدانيّة، ذلك أنّ H هيلبرتيّ و F فضاء جزئيّ مغلق. لنضع بغية تعيينه $P_F(y)=z$. بموجب الفرع الثاني من مبرهنة الإسقاط (4.3.4) يكون لدينا:

$$\forall x \in F \quad \langle y-z, x\rangle = 0,$$

أي:

$$\forall x \in F \quad \sum_{n\geq 1}(y_n - z_n)x_n = 0.$$

وبالخصوص، إذا اخترنا $x=(0,0,\ldots,0,\underset{\underset{2n-1}{\uparrow}}{1},\underset{\underset{2n}{\uparrow}}{-\frac{1}{2}},0,\ldots)$ جاء توّا:

$$0=\sum_{n\geq 1}(y_n - z_n)x_n = \left(\frac{1}{2n-1}-z_{2n-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-z_{2n}\right).$$

ومنه:

$$\frac{1}{2}z_{2n}-z_{2n-1}=\frac{1}{4n}-\frac{1}{2n-1}.$$

وإذا استحضرنا شرط انتماء z إلى F حصلنا حينئذ على الجملة التالية:

$$\begin{cases} z_{2n}+\dfrac{1}{2}z_{2n-1}=0, \\ \dfrac{1}{2}z_{2n}-z_{2n-1}=\dfrac{1}{4n}-\dfrac{1}{2n-1}. \end{cases}$$

وهو ما يفضي إلى:

$$\begin{cases} z_{2n-1}=\dfrac{2n+1}{5n(2n-1)}, \\ z_{2n}=-\dfrac{2n+1}{10n(2n-1)}, \end{cases} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

وينهي البرهان.

10) نستهلّ هذا الإثبات بوضع $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|=M$ والتذكير بأنّ:

$$\forall \underset{i \neq j}{i, j} \in \mathbb{N} \quad \langle e_i, e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle = 0,$$
$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \|e_i\| = \|f_i\| = 1.$$

ليكن x عنصرا من H. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ يكون لدينا:

$$\|S_n(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle x, e_i \rangle f_i \right\|^2 = \langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle x, e_i \rangle f_i, \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle x, e_j \rangle f_j \rangle$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 \|f_i\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2.$$

بالاستناد إلى متراجحة بيسال (3.4.4) نحصل على:

$$\|S_n(x)\|^2 \leq M^2 \sum_{i=0}^{n} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 \leq M^2 \|x\|^2.$$

وعليه:

$$\|S_n(x)\| \leq M \|x\|.$$

2) لنبيّن أنّ u خطّيّ. لديناً:

$$\forall x, y \in H \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$$
$$S_n(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle \lambda x + \mu y, e_i \rangle f_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \lambda \alpha_i \langle x, e_i \rangle f_i + \sum_{i=0}^{n} \mu \alpha_i \langle y, e_i \rangle f_i$$
$$= \lambda S_n(x) + \mu S_n(y).$$

وبالانتقال إلى النهاية بجعل n يؤول إلى $+\infty$ (وهي عملية مشروعة فرضا) نجد:

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y),$$

وهي علاقة تعبّر عن خطّيّة u.

وبالمثل، نلاحظ أنّ u مستمرّ؛ إذ نستخلص ممّا سبق:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in H \quad \|S_n(x)\| \le M \|x\|.$$

وبالانتقال إلى النهاية، مع مآل n إلى $+\infty$، يأتي:

$$\|u(x)\| \le M \|x\|,$$

أي أنّ u مستمرّ.

1) نعلم أنّ:

$$\text{متباين } u \quad \Leftrightarrow \quad Ker u = \{0\}$$

وعليه:

$$x \in Ker\, u = \{0\} \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|u(x)\|^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \alpha_n^2 \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2 = 0, \;\forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow\; \langle x, e_n\rangle = 0, \;\forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; x \in [(e_n)_n]^{\perp}.$$

نستنتج أنّ:

$$Ker\, u = [(e_n)_n]^{\perp}.$$

يتّضح هكذا أنّ:

$$\text{متباين } u \;\Leftrightarrow\; [(e_n)_n]^{\perp} = Ker\, u = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \overline{[(e_n)_n]} = H$$
$$\Leftrightarrow\; (e_n)_n \text{ كليّة في } H$$

(لاحظ أنّنا استخدمنا هنا النتيجة (9.3.4)).

2) وبالمثل، نكتب:

$$y \in (u(H))^{\perp} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in H \;\; \langle y, u(x)\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \forall x \in H \;\; \langle y, \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \langle x, e_i\rangle f_i\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \forall x \in H \;\; \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \langle x, e_i\rangle \langle y, f_i\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \forall i \in \mathbb{N} \;\; \langle y, f_i\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; y \in [(f_n)_n]^{\perp}.$$

وعليه:

$$(u(H))^{\perp}=\left[(f_n)_n\right]^{\perp}.$$

ومنه:

$$\overline{u(H)}=\overline{\left[(f_n)_n\right]}.$$

نستخلص في الأخير أنّ:

$$(f_n)_n \text{ كلّيّة في } H \iff H=\overline{\left[(f_n)_n\right]} \iff H=\overline{u(H)}$$

7.4 مسائل للبحث

1) ليكن $p:I\to\mathbb{R}$ دالّة مستمرّة ومتزايدة تماما على داخلية مجال مغلق I من $\mathbb{R}$. نرمز بِـ H_p لمجموعة الدوال المستمرّة المنطلقة من I والمستقرّة في $\mathbb{R}$ والمحقّقة:

$$\int_I |f(t)|^2\ p(t)\ dt<+\infty.$$

1) اثبت أنّ H_p فضاء شعاعيّ.

2) اثبت أنّ التطبيق u:

$$u:H_p\times H_p\to\mathbb{R}$$
$$(f,g)\mapsto u(f,g)=\int_I f(t)\,g(t)\,p(t)\,dt,$$

جداء سلّميّ على H_p.

2) اثبت أنّ متباينتي كوشي . شوارتز ومينكوفسكي تصيران مساواتين إذا وفقط إذا كان الشعاعان مرتبطين خطّيّا.

3) ليكن (x_n) متتالية من فضاء هيلبرتيّ H. اثبت أنّه إذا تقاربت المتتاليتان $\left(\|x_n\|\right)_n$ و $\left(\langle x_n,x\rangle\right)_n$ نحو $\|x\|$ و $\langle x,x\rangle$ على الترتيب، فإنّ

المتتالية $(x_n)_n$ تتقارب نحو x في H.

4) ليكن $H = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ فضاء الدوال القابلة للاشتقاق باستمرار، المنطلقة من $[0,1]$ والمستقرّة في $\mathbb{R}$ نعرّف التطبيق:

$$u : H \times H \to \mathbb{R}$$
$$(f,g) \mapsto u(f,g) = \int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx.$$

1) اثبت أنّ u جداء سلّميّ على H.

2) نعرّف في H متتالية $(f_n)_n$ بِـ:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & ; \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n^4}, \\ \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \dfrac{1}{3n^3} & ; \quad \dfrac{1}{n^4} \le x \le 1. \end{cases}$$

أ. اثبت أنّ f_n ينتمي إلى H مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

ب. اثبت أنّ $(f_n)_n$ كوشيّة.

ج. هل H هيلبرتيّ ؟

5) ليكن H فضاء التوابع الحقيقيّة المنطلقة من المجال $[0,+\infty[$ والمحققةّ:

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^2 \, 7^{-x} dx < +\infty.$$

نزوّد H بالجداء السلميّ:

$$\langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\; g(x)\; 7^{-x} dx,$$

ونختصّ فيه العائلة الطليقة $(a_1 = 1, a_2 = x)$.

1) تأكّد من أنّ هذه العائلة ليست متعامدة.

2) عيّن العائلة المتعامدة المتجانسة $(b_i)_{1\le i\le 2}$ ، الملحقة بها وفق منهج المعامدة لِغْرام . شميدت.

3) نرمز بـ $F=\left[(b_i)_{1\le i\le 2}\right]$ للفضاء الجزئيّ المولّد بواسطة العائلة $(b_i)_{1\le i\le 2}$. عيّن المسقط العموديّ على F للشعاع $f(x)=5^{-x}$.

6) لتكن $(H_i)_{i\in I}$ عائلة من فضاءات شبه هيلبرتيّة حقيقيّة. نرمز بِ $\langle x,y\rangle_i$ و $\|x\|_i=\sqrt{\langle x,x\rangle_i}$ للجداء السلّميّ والنظيم المرفق في الفضاء H_i ونرمز بِ H للفضاء الشعاعيّ المؤلّف من الأشعّة $x=(x_i)_{i\in I}$ ، حيث x_i من H_i . من أجل كلّ عنصر x من H نضع:

$$f(x)=\sum_{i\in I}\langle x_i,x_i\rangle=\sum_{i\in I}\|x_i\|_i^2.$$

1) اثبت أنّ المجموعة E المؤلّفة من العناصر x من H بحيث $f(x)<+\infty$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من H .

2) اثبت أنّه مهما يكن x و y من E فإنّ العائلة $(\langle x_i,y_i\rangle)_{i\in I}$ تكون حينئذ قابلة للجمع وأنّ مجموعها، المرموز له بِ $\langle x,y\rangle$، جداء سلّميّ على E .

3) اثبت أنّه لكي يكون E تامّا يلزم ويكفي أن يكون كلّ H_i كذلك.

7) ليكن $E=\mathscr{C}\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$ مزوّدا بالجداء السلّميّ:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt.$$

نضع:

$$F=\left\{f\in E:\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt\right\}.$$

1) اثبت أنّ F مغلق.

2) اثبت أنّ التطبيق المطابق id_E لا يتمتّع بمسقط على F.

(كيف تفسّر ذلك ؟)

8) جد في الفضاء الهيلبرتيّ $L^2\left(]0,1[\right)$ عموديّتي هذه المجموعات:

أ. كثيرات الحدود وفق x.

ب. كثيرات الحدود وفق x^2.

ج. كثيرات الحدود ذوات أطراف حرّة معدومة.

9) ليكن H فضاء الدوال الحقيقيّة المستمرّة على $]0,+\infty[$ والمذعنة للقيد:

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

1) اثبت أنّ التطبيق:

$$(f,g) \mapsto u(f,g) = \langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx,$$

يعرّف جداء سلّميّا على H.

2) برهن أنّ H ليس هيلبرتيّا.

3) نلحق بكل دالّة f من H الدالّة F المعرّفة على النحو:

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

اثبت أنّ التطبيق:

$$T : H \to \mathscr{C}^1\left(]0,+\infty[,\mathbb{R}\right)$$
$$f \mapsto T(f) = F$$

متباين.

4) برهن أنّه أيّا كان العددان الحقيقيّان α و β بحيث $0<\alpha<\beta$ يكون لدينا:

$$\int_{\alpha}^{\beta}(F(x))^2dx<2\left(\int_{\alpha}^{\beta}(F(x))^2dx\int_{\alpha}^{\beta}(f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+2\alpha(F(\alpha)^2.$$

5) استنتج أنّ T مستمرّ.

6) اثبت أنّ $\|T\|=1$.

(إرشاد: يمكنك استعمال المتتالية:

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & ;\ 1\le x\le n,\\ \lambda_n x+\mu_n & ;\ n\le x\le n+1,\\ 0 & ;\ n+1\le x.\end{cases}$$

حيث λ_n و μ_n سلّميّان مختاران بالكيفية التي تضمن استمرار f_n.)

10) ليكن H فضاء شبه هيلبرتيّ على $\mathbb{R}$ و x_1، x_2، ....، x_n نقاطا منه.

1) برهن أنّ:

$$\sum_{1\le i,j\le n}\left\|x_i-x_j\right\|^2=n\sum_{i=1}^{n}\left\|x_j\right\|^2-\left\|\sum_{i=i}^{n}x_i\right\|^2.$$

2) نفترض أنّ $\left\|x_i-x_j\right\|\ge 2$ كلّما كان الدليلان i و j مختلفين. لتكن B كرة مغلقة تضمّ المجموعة $\{x_1,x_2,...x_n\}$. برهن أنّ هذه الكرة تتمتّع بنصف قطر يفوق (أو يساوي) طوله $\sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n}}$.

11) نعتبر الفضاء الإقليديّ $\mathbb{R}^4$ المزوّد بأساسه القانونيّ B ونضع:

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\ ;\ x-y+z-t=0\}.$$

ما هي مصفوفة الإسقاط العموديّ على F إزاء الأساس B ؟

12) احسب $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 x^2\left|Logx-ax-b\right|^2 dx$.

13) ليكن H فضاء شبه هيلبرتيّ على $\mathbb{R}$ و F جزءا محدّبا تامّا منه.

وليكن f عنصرا من الثنوي الطبولوجيّ H' .

اثبت أنّه توجد نقطة وحيدة من F تدرك عندها الدالّة:

$$h : x\mapsto h(x)=\|x\|^2+f(x),$$

حدّها الأدنى.

14) ليكن A جزءا متراصّا من فضاء هيلبرتيّ H .

برهن أنّ الفضاء الجزئيّ $F=[A]$ قابل للفصل.

15) ليكن $H=\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ مزوّدا بالجداء السلّميّ الاعتياديّ:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

اثبت أنّ الجملة:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ldots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ldots$$

أساس هيلبرتيّ لِـ H .

16) نعتبر في الفضاء الإقليديّ $\mathbb{R}^4$ الشعاعين:

$$V=(1,2,-1,1);$$
$$W=(0,3,1,-1),$$

والفضاء الجزئيّ F الذي يولّدانه.

عيّن أساسا متعامدا وجملة معادلات للعمودي $F^{\perp}$.

17) ليكن a و b عددين حقيقيّين. برهن أنّ الفضاء $L^2\left([a,b]\right)$ يشمل جملا متعامدة متجانسة كلّيّة تتكوّن من:

أ. كثيرات حدود،

ب. دوال درجيّة

ج. كثيرات حدود مثلّثيّة.

18) ليكن H فضاء شبه هيلبرتيّ على □ و $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ جزءا منه. نفترض أنّ:

$$\forall i \in \{1,2,...,n\},\ \|e_i\|=1,$$

$$\forall x \in E\ \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle^2=\|x\|^2.$$

1) اثبت أنّ B عائلة متعامدة ومتجانسة.

2) اثبت أنّ B أساس لـ H.

5

سلاسل فوريي

1.5 تعاريف

لا شكّ أنّ الطالب قد ألف مفهوم النشر المحدود الذي سبق الاهتمام به في مرحلة ماضية من دراسته. ولعلّه يتذكّر أنّه إذا ما تمتّعت دالّة حقيقيةٌ ما بخصائص معيّنة فإنّه يمكن "استبدالها" بكثير حدود مع خطإٍ متحكّم فيه. وفي نفس الإطار، قمنا في مؤلّفنا [2] بتوسيع لهذه الفكرة طرحنا خلاله مسائل تقريبيّة.

هكذا، سقنا مبرهنة فيرشتراس التي تضمن التقريب المنتظم لأيّ دالّة حقيقيةٍ مستمرّة على مجال متراصّ بكثير حدود. ثمّ أتت مبرهنة ستون . فيرشتراس لتعمّم هذه النتيجة. لقد أصبح بمقتضى ذلك، بالخصوص، من الممكن إيجاد تقريب منتظم لكلّ دالّة حقيقيةٍ مستمرّة ودوريةٍ (دورها 2π)

على مجال متراصّ ذي طول 2π بكثير حدود مثلّثيّ. وبالطبع، التقريب مأخوذ في كلّ هذا من زاوية التقارب المنتظم، وهو شرط قويّ.

إنّ سلاسل فوريي تقدم نمطا آخر من التقريبات للدوال تحت شروط أقلّ قساوة بكثير بالنظر إلى الحالات المذكورة؛ نكرّس لها هذا الفصل الذي يتولّى وضعها وتبيانها.

لقد شرعنا بالفعل في الفقرة (4.4) في إدراج سلاسل فوريي ووضعنانتيج تين هامّتين تخصّانها، ونعني متباينة بيسال ومساواة بارسفال. لنترك هذا جانبا ولنبدأ الدراسة من أوّلها.

1.1.5 تعريف

لتكن f دالّة نابعة من $\mathbb{R}$ ومصبّة في $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{C}$) و a عنصرا من $\mathbb{R}$. نقول عن f إنّها دوريّة وذات دور a إذا حقّقت:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+a) = f(x).$$

فعلى سبيل المثال، نعلم أنّ الدوال $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ و $h(x) = e^{ix}$ دوال 2π. دوريّة وأنّ الدالّة $k(x) = x - E(x)$ دوريّة ودورها يعدل 1. (تذكّر أنّ الدالّة $E(x)$ (الجزء الصحيح) تحقّق:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x+1) = E(x) + 1.)$$

2.1.5 ملحوظة

إذا تمتّعت دالّة f بدور a تمتّعت الدالّة $g(x) = f(ax)$ عندئذ بالعدد 1 دورا لها. وبالفعل، لدينا:

$$g(x+1) = f(a(x+1)) = f(ax+a) = f(ax) = g(x).$$

فإذا ما وضعنا $f(x)=e^{ix}$ و $g(x)=e^{2i\pi x}$ وجدنا أنّ f و g تحقّقان هذه الوضعيّة بأخذ $2\pi=a$.

3.1.5 تعريف

نسمّي كثير حدود مثلّثيّ درجته أقلّ (من) أو تساوي n كلّ تطبيق P_n من □ نحو □ أو □ يتمتّع بالشكل الموالي:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\,;$$

a_k و b_k معاملات حقيقيّة أو عقديّة أيّا كان الدليل k من $\{0,1,\ldots,n\}$.

في الحالة العقديّة تسمح علاقتا أولر[1] التاليتان:

$$\cos kx=\frac{1}{2}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right),\quad \sin kx=\frac{1}{2i}\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right),$$

بإعادة صوغ $P_n(x)$ على هذا المنوال:

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{2}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)-\frac{ib_k}{2}\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{ikx}+\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-ikx}.\end{aligned}$$

وبوضع $c_k=\dfrac{a_k-ib_k}{2}$ يأتي:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_ke^{ikx}+\overline{c_k}\,e^{-ikx},$$

حيث $\overline{c_k}$ يرمز لمرافق c_k.

وبالطبع، يمكن الإتيان بشكل آخر أكثر إدغاما لكثير الحدود المثلّثيّ $P_n(x)$، وذلك أن نضع:

---

37. Leonard Euler : رياضيّاتيّ سويسريّ، ولد في 15 أفريل 1707 في بازل ومات في 18 سبتمبر 1783 بسانبترسبورف (روسيا). له تركة ضخمة في الرياضيّات. أُعترف له بأنّه أغزر الرياضيّاتيّين إنتاجا لكلّ الأوقات. يرجع إليه الفضل في إدراج الرمز $f(x)$ لدالّة (1734) و e لأساس اللوغاريتم (1727) و i لجذر 1- التربيعيّ (1777) و π للعدد پي (1755) وغيرها كثير.

$$c_0 = a_0,$$
$$c_k = \alpha_k\,,\ k > 0,$$

(سنفترض b_0 معدوما على مدار هذه الدراسة)

$$\overline{c_k} = \alpha_k\,,\ k < 0,$$

ومنه:

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx};$$

وهي صيغة مفضّلة في حالة كون المعاملات a_k و b_k عقديّة.

4.1.5 تعريف

نسمّي **سلسلة مثلّثيّة** كلّ سلسلة يكون حدّها العامّ u_n من الشكل:

$$u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx\,,\ x \in \mathbb{R};$$

حيث a_n و b_n أعداد حقيقيّة أو عقديّة.

وبالطبع نحتفظ بالرمز المألوف فنكتب سلسلتنا على هذا المنوال:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$

فعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n \cos nx + \sin\frac{1}{n}x,\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos nx}{2^n},\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \sin nx.$$

يمكن في حالة كون المعاملات a_n و b_n عقديّة، وبحساب مماثل للذي سيق أعلاه، أن نكتب:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha_k e^{ikx}.$$

يرمز H، في كلّ ما تبقّى من هذا الفصل، للفضاء الشعاعيّ المؤلّف من الدوال المنطلقة من $\mathbb{R}$ والمستقرّة في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ والتي هي محدودة و 2π . دوريّة وتقبل المكاملة على كلّ مجال متراصّ.

بعد هذا نضع:

5.1.5 تعريف

ليكن f عنصرا من H. نسمّي سلسلة فوريي لِ f السلسلة المثلّثيّة المعرّفة بِ :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx ,$$

حيث:

$$b_0(f)=0 \quad \text{(اصطلاحا)}$$

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx ,$$

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx ,\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx ,\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

هي **معاملات فوريي** لـ f المأخوذ على المجال $[0,2\pi]$.

6.1.5 مثال

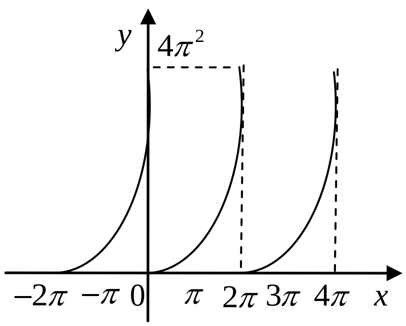
لتكن f دالّة حقيقيّة و 2π. دوريّة معرّفة بِ :

$$f(x)=x^2,\ \ x\in[0,2\pi].$$

إنّ الدالّة f تنتمي إلى الفضاء H.

لنحسب معاملاتها الفوريّة. لدينا:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx=\frac{4}{3}\pi^2,$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = -\frac{4\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

وعليه، تأتي السلسلة المطلوبة:

$$\frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\cos nx - 4\pi \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\sin nx.$$

من الأهميّة بمكان أن نثير الانتباه إلى الإشكال الذي يمكن أن توحي إليه عبارة "سلسلة فوريي". فقد يفهم من ذلك أنّ السلسلة المعنيّة متقاربة وأنّها تتمتّع بِـ f نهاية لها. إنّ هذا عديم الصحّة عموما. فقد يحدث ألاّ تتقارب السلسلة المذكورة البتّة؛ وحتّى وإن تقاربت فقد تكون نهايتها تطبيقا يختلف عن f. سوف نأتي بشروط تتحكّم في تقارب سلسلتنا نحو f أو نهاية متعلّقة بِـ f. ولكن ينبغي من الآن ألاّ نخلط بين سلسلة فوريي لِـ f وكون f مطابقة سلسلتها الفوريية. بعد إزالة هذا اللّبس، نكتب، عندما يتعلّق الأمر بوضع سلسلة فوريي لِـ f:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx.$$

يمكن لدساتير المعاملات الواردة آنفا أن تبُور لو أنّ السلسلة الموضوعة تقاربت بانتظام نحو f. ففي هذه الحالة نكتب:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx.$$

وبضرب الطرفين في $\cos px$، حيث p من $\mathbb{N}$، ثمّ مكاملتها حدّا حدّا على المجال $[0, 2\pi]$ نجد:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos px \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos px \cos nx \, dx + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \int_0^{2\pi} \cos px \sin nx \, dx.$$

وإذا ما لاحظنا أنّ:

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & ; \ p \neq n, \\ \pi & ; \ p = n \neq 0, \\ 2\pi & ; \ p = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos px \sin nx \, dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

نتج:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px \, dx = \begin{cases} 2\pi a_0 & ; \ p = 0, \\ \pi a_p & ; \ p \neq 0. \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \, dx, \\ a_p = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos px \, dx, \quad p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

لنعد العمليّة ذاتها مع استبدال $\cos px$ بِ $\sin px$. سيوصلنا الحساب نفسه إلى أنّ:

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin px \, dx = \pi b_p;$$

وهو ما يعطي في الأخير:

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin px \, dx.$$

2.5 خصائص وتطبيقات

1.2.5 قضية

إذا كانت f دالّة ω. دوريّةً وقابلة للمكاملة على كلّ مجال متراص من $\mathbb{R}$ فإنّه من أجل كلّ عدد حقيقيّ α يكون:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} f(x)\ dx = \int_{0}^{\omega} f(x)\ dx.$$

إثبات

وبالفعل، لدينا بوضوح:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{\omega} f(x)\ dx + \int_{\omega}^{\alpha+\omega} f(x)\ dx.$$

وإذا قمنا بتغيير المتغيّر $x = t+\omega$ كتبنا:

$$\int_{\omega}^{\alpha+\omega} f(x)\ dx = \int_{0}^{\alpha} f(t+\omega)\ dt = \int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt.$$

ومنه:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{\omega} f(x)\ dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\ dx = \int_{0}^{\omega} f(x)\ dx.$$

إنّ هذه النتيجة ذات فعاليّة كبيرة. إنّها تسمح بتعميم وضع دساتير معاملات فوريي لكلّ دالّة f من H على المجال $[\alpha, \alpha+2\pi]$. نكتب بالفعل:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

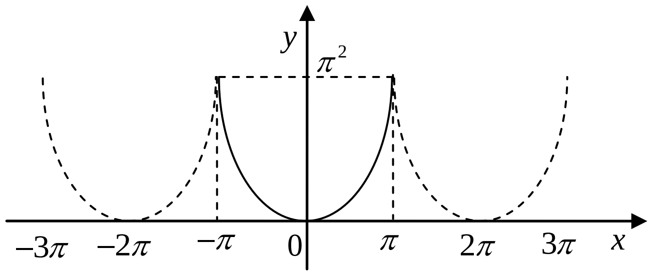
سوف تظهر أهميّة هذه الصيغ عندما يتعلّق الأمر بدوال فرديّة أو زوجيّة.
قبل ذلك، يأتي:

2.2.5 مثالان

1) نأخذ $\alpha=-\pi$ ونعتبر الدالّة الحقيقيّةَ الدوريّةَ 2π. المعرّفة بِـ :

$$f(x)=x^2,\ \ x\in[-\pi,\pi].$$

لدينا:



$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

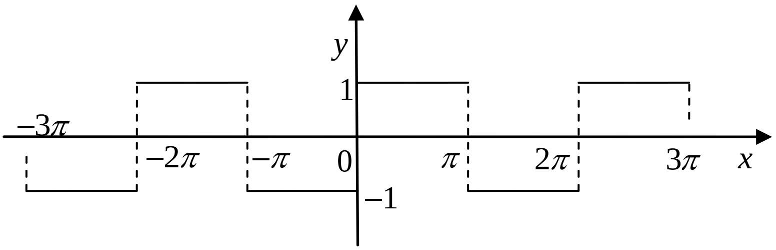
(قم بتفصيل الحساب !) السلسلة الفورييّة المطلوبة هي:

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

هذه السلسلة تختلف عن تلك الواردة في المثال (5.1.5) لنفس الدالّة؛ ومن هنا تبرز أهميّة المحافظة على مجال المكاملة جليّة.

2) لنعيّن سلسلة فوريي للدالّة 2π . الدوريّة والمعرّفة بِـ :

$$g(x)=\begin{cases}-1 & ; \ -\pi<x<0,\\ 1 & ; \ 0\le x<\pi.\end{cases}$$



حساب المعاملات يمدّنا بِـ :

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=0,\ \ n\in\mathbb{N}^*,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$=\begin{cases}0 & ; \ \ n=2p,\\ \dfrac{4}{(2p+1)\pi} & ; \ \ n=2p+1.\end{cases}$$

في الأخير، نحصل على:

$$g(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)x.$$

نستغلّ حاليا القضية السابقة لتبسيط واختزال الحسابات عندما نتعرّض لمعالجة السلاسل الفورييّة للدوال الزوجيّة أو الفرديّة. فمن المحبّذ أن تعطى

الدوال المذكورة معرّفة على المجال $(-\pi,\pi)^{\downarrow}$؛ أي بأخذ $\alpha=-\pi$ في الدساتير الواردة في القضيّة المذكورة. هذا تعليل لذلك:

3.2.5 قضية

إذا كانت f دالّة زوجيّة من H كان لدينا عندئذ:

$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

$$b_n(f)=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

وإذا كانت f دالّة فرديّة أتى على التوّ:

$$a_n(f)=0,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

$$b_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

إثبات

نكتفي بطبيعة الحال بمعالجة إحدى الحالتين. لنفترض أنّ الدالّة f فرديّة. نكتب حينئذ:

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx+\int_0^{\pi} f(x)\,dx\right).$$

بوضع $x=-t$ يأتي:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx=-\int_{\pi}^{0} f(-t)\,dt=\int_{\pi}^{0} f(t)\,dt=-\int_0^{\pi} f(t)\,dt.$$

وبالتعويض في عبارة $a_0(f)$ نجد أنّ هذا الأخير معدوم. لنحسب بالمثل:

$\downarrow$ أدرجت هذه الترميزة للدلالة على أنّ المجال المذكور قد يؤتى به مغلقا أو مفتوحا أو غير ذلك.

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right).$$

بوضع $x=-t$ نكتب:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx=-\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(-nt)\,dt=\int_{\pi}^{0} f(t)\cos nt\,dt,$$

وعليه، ينتج:

$$a_n(f)=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

في الأخير، يأتي، باستحضار العمليّة السابقة نفسها أنّ:

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

إنّ المثالين (2.2.5) السابقين يوضّحان هذه الوضعيّة. فالأوّل قدّم دالّة زوجيّ، معاملاته الفورييّة معدومة، والآخر استعرض دالّة فرديّ أعطت الحسابات انعدام معاملاته a_n الفوريّة.

4.2.5 ملحوظتان

1) أُصطلح على إطلاق تسميّة السلاسل الفورييّة غير الكاملة للسلاسل التي تأتي مبتورة من المقادير الجيبيّة أو التجيبيّة. إنّه حال الدوال الفرديّة أو الزوجيّة من H. وفي هذا المضمار، يمكن لدالّة من H معطاة في المجال $(0,\pi)$ أن تمدّد إلى المجال $(-\pi,\pi)$ بكيفيّة زوجيّة أو فرديّة.

وعليه، يكون ممكنا نشرها على المجال $(0,\pi)$ وفق سلسلة فورييّة غير كاملة حسب دوال جيبيّة أو تجيبيّة تبعا لكونها فرديّة أو زوجيّة. وتوضيحا لذلك نسوق هذين المثالين:

أ. هب أنّه طُلب نشر الدالّة 2π. الدوريّة $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ في المجال $(0,\pi)$ وفق دوال جيبيّة. نفهم من هذا السؤال أنّه ينبغي تمديد f إلى المجال $(-\pi,\pi)$، بدالّة فرديّة $\tilde{f}$. نضع إذن:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4} & ;\quad -\pi<x<0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{4} & ;\quad 0\le x<\pi.\end{cases}$$

بالاستناد إلى القضية (3.2.5) نكتب:

$$a_n=0,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=\frac{1}{2n}\left((-1)^{n+1}+1\right)=\begin{cases}0 & ;\quad n=2p,\\[2mm] \dfrac{1}{2n+1} & ;\quad n=2p+1.\end{cases}$$

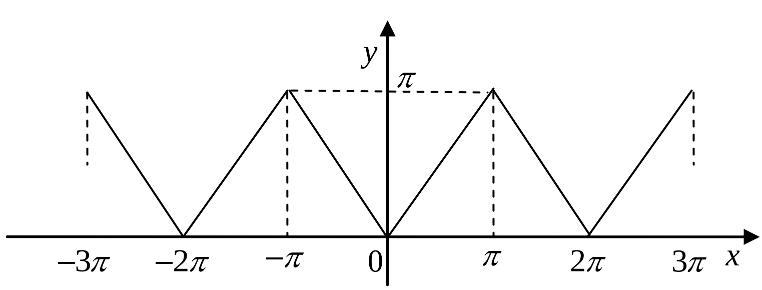
وعليه:

$$f(x)\sim\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)x.$$

ب. نريد، الآن، الحصول على نشر للدالّة 2π. الدوريّة:

$$g(x)=x,$$

في المجال $(0,\pi)$ وفق دوال تجيبيّة.



إنّ زوجيّة الدالّة المطلوب نشرها تسمح بالحصول على:

$$a_0 = \frac{1}{\pi};\; b_n = 0,\;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & ;\;\; n = 2p, \\ \dfrac{-4}{\pi(2p+1)^2} & ;\;\; n = 2p+1. \end{cases}$$

وعليه:

$$x = g(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x.$$

2) يمكن استبدال الدور 2π في الفضاء H بدور كيفيّ 2ω والمجال $(-\pi,\pi)$ بالمجال $(-\omega,\omega)$. يمكن عندئذ حساب المعاملات الفوريّة بواسطة الصيغ التالية:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\,dx,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx,\;\; n \in \mathbb{N}^*,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\omega}\right)dx,\;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

وبذلك نضع:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\cos\frac{n\pi}{\omega}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\omega}x.$$

لنجسّد هذه الملحوظة في هذين المثالين التاليّين.

1) لننشر وفق سلسلة فوريّية الدالّة 2 . الدوريّة المعرّفة بـ :

$$f\ (x\ ) = \begin{cases} -1\ ; & -1 < x < 0, \\ 1\ \ ; & 0 < x < 1. \end{cases}$$

بما أنّ الدالّة f فرديّة فإنّ السلسلة المنشودة تكون سلسلة جيبيّة. لدينا:

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = 2\int_0^1 \sin n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right) = \begin{cases} 0 & ;\ n = 2p, \\ \dfrac{4}{(2n+1)\pi} & ;\ n = 2p+1. \end{cases}$$

وعليه:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\pi x.$$

2) لننشر وفق سلسلة فوريّية تجيبيّة ثمّ جيبيّة الدالّة $2h$ الدوريّة المعرّفة بـ :

$$f(x) = x, \quad 0 < x < h; \quad h \in \mathbb{R}_+^*.$$

أ. لدينا في الحالة الأولى:

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{1}{h}\int_0^h x\, dx = \frac{h}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{h}\int_0^h x\cos\frac{n\pi}{h}x\, dx = \begin{cases} 0 & ;\ n = 2p, \\ -\dfrac{4h}{\pi^2}\dfrac{1}{(2n+1)^2} & ;\ n = 2p+1. \end{cases}$$

وعليه:

$$f(x) \sim \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2}\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{h}\right)x.$$

ب. في الحالة الثانية، لدينا:

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{h}\int_0^h x \sin\frac{n\pi}{h} x\, dx = \frac{2h}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

وبالتالي:

$$f(x) \sim \frac{2h}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{h}x.$$

وبالطبع، إذا طلب نشر دالّة f وفق سلسلة فورييّة في مجال كيفيّ $(\alpha, \alpha+2\omega)$ طوله 2ω، فينبغي استبدال حدود المكاملة الواردة في الدساتير السابقة بِ α و $\alpha+2\omega$ على الترتيب.

نشرع حاليّا، في وضع قاعدة تشمل قيودا تضمن تقارب سلسلة فورييّة ما وتوضيح النهاية التي تؤول إليها هذه السّلسلة. إنّها قاعدة ديريكليه[1]. وبالطبع، نترك (حاثّين) القارئ لتناول هذا النمط من السلاسل في إطار الدراسة العامّة للسلاسل واستخدام المقاييس والقواعد التي يعرفها في هذا السياق.

5.2.5 مبرهنة (قاعدة ديريكليه)

لتكن f دالّة من H و x_0 عددا حقيقيّا. ولنفترض أنّ النهايتين:

$$\ell_1 = \lim_{x\to x_0^-} f(x); \; \ell_2 = \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

موجودتان. فلكي تتقارب سلسلة f الفورييّة عند x_0 نحو $\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)$ يكفي أن يكون المقدار:

38. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet : رياضيّاتيّ ألمانيّ من أصل بلجيكيّ. ولد في 13 فيفري 1805 بدوران ومات في 5 ماي 1859 بـغوتنغن. ترك أعمالا في التحليل والجبر والميكانيكا.

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)-\ell_1-\ell_2\right),$$

محدودا في جوار $t=0$.

إثبات

نستعين من أجل ذلك بتوطئتين نرجئ برهانهما قليلا.

التوطئة الأولى:

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ يكون لدينا:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

التوطئة الثانية:

إذا كان f قابلة للمكاملة على المجال $[a,b]$ فإنّ:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)e^{i\alpha x}dx=0.$$

لنعد إلى المبرهنة.

لتكن $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$ سلسلة فوريي لِـ f. نرمز للمجموع الجزئيّ الذي رتبته n من هذه السلسلة بِـ $S_n(x)$. ومن أجل x_0 نكتب:

$$S_n(x_0)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0.$$

بتعويض المعاملات بقيمها نجد:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx_0\cos kx+\sin kx_0\sin kx\right)f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(x-x_0)\right)f(x)\,dx.$$

وبالاستعانة بالتوطئة الأولى يأتي:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}f(x)\,dx.$$

وإذا ما وضعنا $x-x_0=u$ نتج:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}f(u+x_0)\,du.$$

ولمّا كانت الدالّتان f و $\sin x$ دوريّتين 2π . استخلصنا:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}f(u+x_0)\,du.$$

نلاحظ من جهة أخرى، أنّه يمكن أن نكتب:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}f(u+x_0)\,du+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}f(u+x_0)\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(u+x_0)\,du + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(-u+x_0)\,du \right).$$

نتوقّف قليلا عند هذا الحدّ. نلاحظ أنّه لو كان $f \equiv 1$ لنتج:

$$a_0 = 1,$$

$$a_n = b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

ومنه $S_n(x_0) = 1$. نستخلص من ذلك أنّ:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du = \pi.$$

نستغلّ هذه العلاقة لنحصل، من أجل كلّ عنصر y من $\mathbb{R}$، على الصيغة التالية:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2y \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du.$$

وعليه، يأتي:

$$S_n(x_0) - y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y \right] du.$$

وباختيار $y = \frac{1}{2}(\ell_1 - \ell_2)$ نصل إلى:

$$S_n(x_0)-\frac{1}{2}(\ell_1-\ell_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}[f(x_0+u)+$$
$$+f(x_0-u)-\ell_1-\ell_2]du.$$

يتّضح، طبقا لمعطيات المبرهنة، أنّ الدالّة:

$$u\mapsto\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-\ell_1-\ell_2}{\sin\frac{u}{2}}$$

محدودة في جوار $u=0$، فهي تقبل المكاملة على $(0,\pi)$. وبموجب التوطئة الثانية نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)-\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)=0.$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2).$$

إنّه المبتغى.

لنهتمّ الآن بالتوطئتين المساعدتين السابقتين. بخصوص الأولى، نلاحظ أنّه إذا كان x غير منتمٍ إلى 2π كان e^{ix} مختلفا عن 1، وتتحقّق به المساواة الموالية:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\frac{1}{2}+\frac{e^{i(n+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}=\frac{2e^{i(n+1)x}-e^{ix}-1}{2(e^{ix}-1)}=\frac{2e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}-2\cos\frac{x}{2}}{4i\sin\frac{x}{2}}.$$

وبأخذ الجزء الحقيقيّ من هذه العبارة نجد:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}};$$

وهو ما يختم تبرير التوطئة الأولى.

أمّا بالنسبة للثانية، التي تجزم بأنّ $\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)e^{i\alpha x}dx=0$ ، مع كون f قابلة للمكاملة على $[a,b]$، فإنّه يكفي أن نبيّن صحّة العلاقتين:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx=0;$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\alpha x\,dx=0.$$

وبالطبع، فإنّ التحقّق من صدق إحداهما يغني. إذا اخترنا الأولى، لاحظنا من أجلها أنّه إذا كانت f ثابتة مساوية C وجدنا أنّ النتيجة المطلوبة واضحة وتأخذ الشكل الموالي:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b C\sin\alpha x\,dx=C\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{\cos\alpha a-\cos\alpha b}{\alpha}\right)=0.$$

أمّا إذا لم تكن f ثابتة، وهي المحدودة والقابلة للمكاملة على $[a,b]$، فإنّه من أجل كلّ $0<\varepsilon$ توجد تجزئة منتهية للمجال $[a,b]$ وفق مجالات $[x_i,x_{i+1}]$ وتوجد دالّة درجية g ملازمة لهذه التجزئة وتحقّق:

$$\forall x\in[a,b]\quad |f(x)-g(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

وعليه:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx-\int_a^b g(x)\sin\alpha x\,dx\right|=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\sin\alpha x\,dx\right|$$

$$\leq\int_a^b |f(x)-g(x)||\sin\alpha x|\,dx\leq\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\leq\frac{\varepsilon}{2}.\qquad(*)$$

ولمّا كانت g ثابتة على كلّ مجال جزئيّ $[x_i, x_{i+1}]$، تحصّلنا حسبما سبق على أنّ:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\sin\alpha x\,dx = 0.$$

وبمقتضى كون التجزئة المذكورة منتهية يأتي:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\alpha x\,dx = 0.$$

وإذا أقرنّا هذه النتيجة بِ (*) استخلصنا أنّ:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx = 0.$$

6.2.5 ملحوظات

1) كثيرا ما يكون الفضاء H الذي لازمنا منذ مستهلّ هذا الفصل، مكوّنا من دوال عدديّة 2π. دوريّة ومستمرّة بتقطّع على كلّ مجال طوله 2π، حيث تكون نقاط التقطّع هذه من **النوع الأوّل**↓.

2) تسمح مبرهنة ديريكليه بالجزم بتقارب السلسلة الفوريّة لدالّة f نحو $f(x)$ كلّما كانت f مستمرّة عند x. وتتقارب نحو المتوسّط الحسابيّ لنهايتيها اليمنى واليسرى إذا كانت x نقطة تقطّع من النوع الأوّل.

3) أمّا بخصوص طرفي مجال الدراسة $(\alpha,\alpha+2\pi)$ فإنّ السلسلة الفوريّة، في حالة تقاربها، تتمتّع بالعدد $\ell=\frac{1}{2}(\ell_1'+\ell_2')$ نهاية لها حيث:

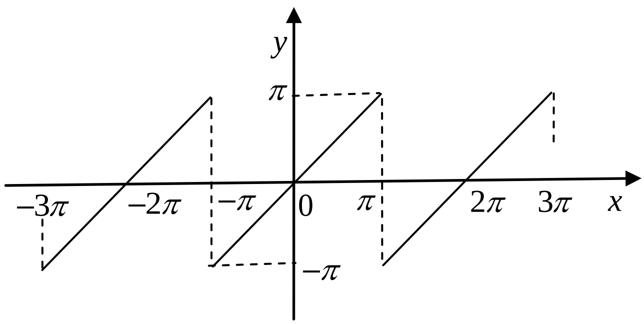
$$\ell_1' = \lim_{x\to(\alpha+2\pi)^-} f(x);\ \ell_2' = \lim_{x\to\alpha^+} f(x).$$

إذا تمتّعت عند هذه x_0 إنّها تقبل تقطّعا من النوع الأوّل عند نقطة f نقول عن ↓
بنهاية (منتهية) من اليمين وبأخرى من اليسار مخالفة للأولى. الأخيرة

4) إذا تمتّعت f بمشتقّ من اليمين وبآخر من اليسار عند نقطة a فإنّ مبرهنة ديريكليه تكون قابلة للتطبيق، ومن باب أولى !

7.2.5 أمثلة

1) لندرس تقارب السلسلة الفورييّة للدالّة الدوريّة 2π . المعرّفة على المجال $]-\pi,\pi[$ بِـ $f(x)=x$ ، والممثّلة في الرسم أدناه.



إنّ فرديّة f تؤدّي إلى أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

السلسلة المطلوبة هي:

$$x\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

نلاحظ أنّ الدالّة f مستمرّة عند كلّ نقطة x من $]-\pi,\pi[$. وعليه، تكون السلسلة المذكورة متقاربة نحو $f(x)$ في $]-\pi,\pi[$ ونكتب:

$$f(x)=x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in\,]-\pi,\pi[.$$

ومن أجل $x=\pm\pi$ لدينا:

$$\frac{1}{2}(\pi-\pi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi=0.$$

2) أ. في المثال (6.1.5) نشرنا، وفق سلسلة فورييّة، الدالّة:

$$f(x)=x^2,\ \ x\in(0,2\pi);$$

ووجدنا:

$$x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

بديهيّ أنّ f مستمرّة عند كلّ نقطة x من $]0,2\pi[$. نكتب إذن:

$$x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

وعند طرفي المجال نحصل على:

$$\frac{1}{2}(0+4\pi^2)=2\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

وهو ما يسمح بالحصول على:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2.$$

وهي متطابقة شهيرة.

في الواقع، تلعب سلاسل فوريي دورا مثيرا في حساب بعض المجاميع الشهيرة. ويمثّل ذلك جزءا من ميادينها التطبيقيّة الكثيرة. فإذا احتفظنا بهذه السلسلة وأخذنا $x=\pi$ نتج لدينا:

$$\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n.$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{1}{12}\pi^2.$$

وفي الخلاصة نكون قد حصلنا على:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

ب. لنستعن بالمثال (1) من (4.2.5) لإيجاد المجموعين التاليَيْن:

$$S_1=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots$$

$$S_2=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

إذا استندنا إلى مبرهنة ديريكليه استطعنا أن نكتب:

$$\forall x\in\left]0,\pi\right[\quad \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)x=\frac{\pi}{4}. \qquad (*)$$

من أجل $x_0=\frac{\pi}{2}$ تمكّننا العلاقة (*) من وضع:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

ولكن:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin3\frac{\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin5\frac{\pi}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots=S_2.$$

إذن:

$$S_2=\frac{\pi}{4}.$$

وبالمثل، إذا أخذنا $x=\frac{\pi}{3}$ استخلصنا من (*) أنّ:

$$\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{3}+\frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{3}+...+\frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\frac{\pi}{3}+...=\frac{\pi}{4};$$

أي أنّ:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{1}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{7}\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{1}{11}\frac{\sqrt{3}}{2}+...=\frac{\pi}{4}.$$

بضرب الطرفين في $\frac{2}{\sqrt{3}}$ نجد المطلوب:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+...=S_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}.$$

3) لإيجاد المجموع:

$$S=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}+...$$

نستعين بنشر الدالّة $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ وفق سلسلة فوريّة تجيبيّة في المجال $(0,\pi)$. يتعلّق الأمر في هذه الحالة بتمديد f إلى $(-\pi,\pi)$ بكيفيّة تجعله زوجيّ. لدينا على التوّ:

$$b_n=0,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\cos nx-\frac{x}{2}\cos nx\right)dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)\right)=\begin{cases}0 & ;\ n=2p,\\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2p+1)^2} & ;\ n=2p+1,\end{cases};\ p\neq 0.$$

السلسلة المطلوبة هي:

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x.$$

وبمقتضي مبرهنة ديريكليه نكتب:

$$\forall x \in [0,\pi[\quad \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x;$$

ومن أجل $x=0$ يأتي:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2};$$

وهو ما يؤدّي إلى أنّ:

$$S=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

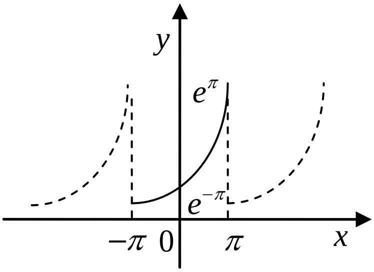
4) نبقى في هذا المرتع ونسوق هذا المثال.

هب أنّه طلب منا حساب المجموعين:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1};$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

نلجأ بغية ذلك إلى استحضار الدالّة 2π . الدوريّة المعطاة على المجال $[-\pi,\pi]$ بـ:



$$f(x)=e^x;$$

ثمّ نقوم بإيجاد سلسلتها الفورييّة. لدينا في هذا الخضمّ (مستعملين الترميزة السابقة):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=\frac{1}{\pi}sh\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(e^x \cos nx + ne^x \sin nx\right)_{-\pi}^{\pi} - n^2 a_n$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n sh\pi - n^2 a_n.$$

وعليه:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2+1} sh\pi.$$

وبالمثل، يأتي:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(e^x \sin nx\right)_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx$$
$$= -n\, a_n = \frac{2}{\pi} sh\pi (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}.$$

تسمح قاعدة ديريكليه بالحصول على النشر المنشود:

$$e^x = \frac{2}{\pi} sh\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx + (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\sin nx\right).$$

من أجل $x=\pi$ نجد بفضل القاعدة نفسها:

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = ch\pi = \frac{2}{\pi} sh\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2+1}\right) = \frac{2}{\pi} sh\pi\left(\frac{1}{2}+S_1\right).$$

ومنه:

$$S_1 = \frac{\pi}{2th\pi} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - th\pi}{2th\pi}.$$

وبالمثل، نكتب من أجل $x=0$:

$$e^0 = 1 = \frac{2}{\pi} sh\pi\left(\frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right) = \frac{2}{\pi} sh\pi\left(\frac{1}{2}+S_2\right).$$

وعليه:

$$S_2 = \frac{\pi - sh\pi}{2sh\pi}.$$

8.2.5 ملحوظة

نرمز بـ E للفضاء الشعاعيّ المؤلّف من الدوال العقديّة المستمرّة 2π الدوريّة المنطلقة من $(0,2\pi)$، ونزودّه بالجداء السلّميّ:

$$\langle f , g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt ,$$

الذي يجعل منه فضاء شبه هيلبرتيّ. نعتبر في E العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بحيث:

$$u_n(x) = e^{inx},\ \ x \in (0,2\pi).$$

وهي عائلة متعامدة متجانسة (راجع المثال الثاني من (13.3.4)). إذا استندنا إلى مبرهنة ستون . فيرشتراس وجدنا أنّ هذه العائلة كلّيّة في E المزوّد بنظيم التقارب المنتظم. ولكن نلاحظ أنّ (المثال (9.4.4)):

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \le \left(\sup_{0\le t\le 2\pi} |f(t)|\right)^2 .$$

وعليه، يتبيّن أنّ العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ تظلّ كلّيّة إزاء نظيم المتوسّط التربيعيّ (وهو نظيم E شبه الهيلبرتيّ)، ذلك أنّ التقارب وفق نظيم التقارب المنتظم يستلزم التقارب وفق النظيم الهيلبرتيّ لِـ E. هكذا، وبمقتضى المبرهنة (6.4.4) فإنّ العائلة المذكورة تؤلّف أساسا هيلبرتيّا لِـ E.

إذا كان f عنصرا من E كتبنا سلسلته الفورييّة بالنسبة للعائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ على هذا النحو (التعريف (1.4.4)):

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, u_n\rangle u_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n u_n .$$

حيث:

$$\xi_n = \langle f, u_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_n^{2\pi} f(t) e^{-\text{int}} dt$$

يمثّل معامل فوريي رتبته n لِـ f.

وبالمناسبة، نعيد صوغ مساواة بارسفال على هذا النحو:

$$\frac{1}{2\pi} \int_n^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \| f \|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, u_n \rangle|^2 .$$

في بعض المواطن، يستحسن استبدال العائلة $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بالعائلة $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ المكوّنة من العناصر $(\cos nx)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\sin nx)_{n\in\mathbb{N}}$، وهي كلّيّة، بكلّ وضوح، في E بالمثل. إنّها أساس هيلبرتيّ لِـ E. في هذه الحالة، وبحساب مستوحى من ذاك الوارد في التعريف (3.1.5) يمكن وضع سلسلة فوريي لدالّة f من E على القالب المألوف:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

حيث:

$$a_0 = \xi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} a_n = \xi_n + \overline{\xi_n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \\ b_n = i\left(\xi_n - \overline{\xi_n}\right) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt. \end{cases}$$

تأخذ مساواة بارسفال، والحال هذه، الصيغة الهامّة التالية:

$$\| f \|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_n^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = |\xi_0|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(|\xi_n|^2 + |\overline{\xi_n}|^2 \right)$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n^2 + b_n^2).$$

ومنه:

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n^2 + b_n^2) = \int_{n}^{2\pi} |\, f(t)|^2 \, dt.$$

إنّ هذه العلاقة كثيرة الاستخدام في حساب مجاميع شهيرة كما سبق.

لنضرب لذلك مثلا. هب أنّه طُلب حساب المجموع S:

$$S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

نستعين على ذلك بالمثال (ب) من (4.2.5). لدينا:

$$f(x) = x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2p+1)x.$$

وعليه، يأتي بمقتضى العلاقة أعلاه:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \right).$$

ومنه:

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi} S.$$

إذن:

$$S = \frac{1}{96}\pi^4.$$

3.5. مسائل محلولة

1) لتكن f دالّة عدديّة دوريّة 2π ومستمرّة.

1) بيّن أنّه إذا حقّقت f العلاقة:

$$\forall x \in (-\pi,\pi) \quad f(x+\pi) = -f(x), \qquad (*)$$

فإنّ معاملاتها الفوريّة الزوجيّة تكون عندئذ معدومة.

2) بيّن بالمثل أنّه إذا حقّقت f العلاقة:

$$\forall x \in (-\pi,\pi) \quad f(x+\pi) = f(x), \qquad (**)$$

فإنّ معاملاتها الفوريّة الفرديّة تكون عندئذ معدومة.

3) استخلص أنّه إذا كانت f زوجيّةً ومحقّقة (*) فإنّ معاملاتها الفوريّة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقّق:

$$a_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

4) استخلص أنّه إذا كانت f فرديّةً ومحقّقة (**) فإنّ معاملاتها

الفوريّة تحقّق:

$$a_n = 0 = b_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) 1) انشر وفق سلسلة فوريّة جيبيّة في المجال $(0,\pi)$ الدالّة:

$$f(x) = x(\pi - x).$$

2) استنتج المجموع:

$$S = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \ldots$$

3) لتكن الدالّة 2π . الدوريّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بحيث يتمتّع مقصورها على المجال $]-\pi,\pi]$ بالشكل:

$$f(x) = \pi - |x|.$$

1) انشر f وفق سلسلة فوريّة.

2) هل سلسلة f الفوريّة متقاربة، وإن نعم، فإلى أيّة نهاية؟

3) استخلص المجموعين:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2};\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

4) 1) انشر وفق سلسلة فورييّة الدالّة 2π . الدوريّة:

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in[0,2\pi[.$$

2) عيّن المجموع $\sum_{n=1}^{n}\frac{\sin n}{n}$.

5) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الدالّة 2π . الدوريّة بحيث:

$$f(x)=x^2-2\pi x,\ x\in[0,2\pi].$$

احسب، مستعينا بنشر f وفق سلسلة فورييّة، المجاميع الثلاثة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2};\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2};\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

6) 1) هات نشر فوريي للدالّة 2π . الدوريّة المعطاة على المجال $]0,2\pi[$ بـ $f(x)=e^{ax}$ ، حيث a عدد حقيقيّ غير معدوم.

2) احسب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.

3) استنتج المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) ماذا تساوي النهاية $\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$ ؟

7) نعتبر الدالّة الحقيقيّة 2π . الدوريّة المعرّفة بـ:

$$f(x)=x\sin\frac{x}{2},\quad 0\le x<2\pi.$$

1) احسب معاملات f الفورييّة.

2) ما هي طبيعة سلسلة f الفورييّة؟

3) استنتج مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

8) استعمل النشر وفق سلسلة تجيبيّة على المجال $(0,\pi)$ للدالّتين x و x^2 لإثبات المساواة التالية:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}\cos nx=\frac{1}{12}\left(3x^2-6\pi x+2\pi^2\right),\ 0\le x\le\pi.$$

9) 1) انشر الدالّة $f(x)=|\sin x|$ وفق سلسلة فوريّة.

2) احسب مجموع السلسلة $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4n^2-1}$.

3) استخلص العلاقة:

$$|\sin x|=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}.$$

4) اثبت أنّ المعادلة التفاضليّة:

$$y^{(4)}+y''+y=|\sin x|,$$

تقبل حلاّ π . دوريّا وحيدا.

10) ليكن a عددا حقيقيّا غير صحيح.

1) انشر وفق سلسلة فوريّة الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $[-\pi,\pi]$ بـ

$$f(x)=\cos ax.$$

2) احسب المجموع $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}$.

3) نضع:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

برّر قابليّة g للاشتقاق ثمّ احسب مشتقّها.

4) برهن أنّ:

أ. $$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cot g\, t = \frac{1}{t} + 2t\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}\right);$$

ب. $$\forall x \in \left]-\pi, \pi\right[, \ \sin x = x \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

11) لتكن g دالّة زوجيّة و 2π. دوريّة معرّفة بـ:

$$g(x) = \pi - 2x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

1) اعط g على المجال $[-\pi, 0]$ ثمّ ارسم منحناها.

2) اثبت أنّ g تقبل نشرا فورييّا، يطلب تعيينه.

3) اثبت أنّ سلسلة g الفورييّة تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ نحو g.

4) استخلص بالمكاملة سلسلة فوريي للدالّة الفرديّة 2π. الدوريّة المعرّفة بـ:

$$f(x) = x(\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi.$$

5) ما هي العلاقة المحصّل عليها بواسطة دستور بارسفال؟

12) ليكن $L = [0, \pi] \times [0, \pi]$ ولتكن K دالّة حقيقيّة معرّفة على L ب:

$$K(x, y) = \begin{cases} x(\pi - y) & ; x \le y, \\ y(\pi - x) & ; y \le x. \end{cases}$$

نربط كلّ دالّة حقيقيّة مستمرّة φ على $[0, \pi]$ بالدالّة ψ المعرّفة على $[0, \pi]$ بِـ :

$$\psi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K(x, y)\, \varphi(x)\, dx.$$

1) اثبت أنّ لِـ ψ مشتقّا ثانيّا ψ'' بحيث:

$$\psi''(y) = -\varphi(y),$$

وأنّ ψ معرّفة تماما بالشرطين:

$$\begin{cases} \psi(0) = \psi(\pi), \\ \psi''(y) = -\varphi(y). \end{cases}$$

2) عيّن عبارة ψ لمّا يكون:

$$\varphi(x) = \sin nx,\ n \in \mathbb{N}.$$

3) من أجل كلّ y مثبّت في $[0,\pi]$، نعتبر الدالّة الحقيقيّة f_y الفرديّة، الدوريّة المعرّفة بِ 2π :

$$f_y = K(x,y),\ \ x \in [0,\pi].$$

اعط معاملات f_y الفورييّة واثبت أنّ السلسلة الموافقة متقاربة نحو $f_y(x)$، من أجل كلّ x حقيقيّ. استخلص قيمتي هذين المجموعين:

$$S_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2};$$

$$S_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(\sin nx)^2}{n^2}.$$

13) احسب مستعينا بالدالّة 2π . الدوريّة f المعطاة تحت الشكل:

$$x \in [-\pi,\pi]\ \ f(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)},$$

المجموعين:

(1 $$\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right);$$

(2 $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{j=n+1}^{+\infty} (-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right)\right]^2.$$

14) اثبت أنّ السلسلة المثلّثيّة:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \sin ny\ \sin nx,\ \ 0 < \alpha \le \frac{1}{2},$$

ليست سلسلة فوريّة لأيّ دالّة قابلة للمكاملة.

4.5 حلول

1) 1) إذا تبنّينا الترميزة المعهودة للمعاملات الفوريّة كتبنا تبعا لذلك:

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx+\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\,dt\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx-\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt\right]=0.$$

وبالمثل لدينا:

$$a_{2n}(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,dx,+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,dx,+\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos 2n(t+\pi)\,dt\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,dx-\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos 2nt\,dt\right]=0.$$

وأخيرا يأتي بالحساب نفسه أنّ:

$$b_{2n}(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx=0,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

(لاحظ أنّنا استخدمنا، إلى جانب الشرط (*)، التحويل $x=t+\pi$).

2) إذا انتهجنا الطريقة نفسها بيّنّا دونما عناء أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{2n+1}(f)=b_{2n+1}(f)=0.$$

3) إنّ إقران النتيجة (1) بالقضيّة (3.2.5) يثبت أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{2n}(f)=0;\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\quad b_n(f)=0.$$

4) وبالمثل، فإنّ القضيّة (3.2.5) و (2) يضمنان:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad b_{2n+1}(f)=0=a_n.$$

2) 1) لدينا على التوّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=0,$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}\right)=\begin{cases}0 & ;\ n=2p,\\ \dfrac{8}{\pi}\dfrac{1}{(2p+1)^3} & ;\ n=2p+1.\end{cases}$$

السلسلة المطلوبة هي:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x.$$

2) نلاحظ بغية حساب المجموع S أنّ الدالّة f مستمرّة عند $\frac{\pi}{2}$.

يأتي بموجب قاعدة ديريكليه:

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}+\ldots\right)=\frac{8}{\pi}S.$$

ومنه، $S=\frac{\pi^3}{32}$.

3) 1) لدينا بسهولة:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad b_n=0,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = 2\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & ;\ n = 2p, \\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2p+1)^2} & ;\ n = 2p+1; \end{cases}$$

وهو ما يعطي:

$$\pi - |x| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

2) الدالّة f مستمرّة. تسمح قاعدة ديريكليه بالجزم بأنّ f تتطابق مع سلسلتها الفوريّة عند كلّ نقطة من ميدان تعريفها.

3) في المجال $[0,\pi]$ يمكن أن نكتب:

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x. \qquad (*)$$

ومن أجل $x = 0$ نحصل على:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

ومنه:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

من جهة أخرى، تمكّننا مكاملة مضاعفة لطرفي (*) مع أخذ $x = \pi$ ، من الحصول على:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{48}.$$

4) 1) لدينا:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

ومنه:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

2) المجموع المعني يساوي $f(1) = \frac{\pi - 1}{2}$.

5) لنبيّن بادئ ذي بدء أنّ الدالّة f زوجيّة. تسمح دوريّتها (وفق 2π) بقصر البحث على المجال $[-2\pi, 2\pi]$. ليكن x من $[-2\pi, 0]$. يأتي

عندئذ:

$$\begin{cases} f(x + 2\pi) = f(x), \\ f(x + 2\pi) = (x + 2\pi)^2 - 2\pi(x + 2\pi) = x^2 + 2\pi x = f(-x). \end{cases}$$

وعليه:

$$\forall x \in [-2\pi, 0], \; f(x) = f(-x),$$

وهذه نتيجة تمدّد ببداهة إلى المجال $[-2\pi, 2\pi]$. نرى هكذا أنّ f زوجيّة.

نخلص من هنا إلى أنّ:

$$\forall n \geq 1, \; b_n = 0,$$

$$\forall n \geq 0, \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2 - 2\pi x)\cos(nx)dx.$$

- إذا كان n غير معدوم جاءنا:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[(x^2 - 2\pi x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(2x - 2\pi)\sin nx\, dx$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\left[-(2x - 2\pi)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{2}{n}\cos nx\, dx\right) = \frac{4}{n^2}$$

- إذا كان n معدوما جاءنا:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2 - 2\pi x)dx = -\frac{4\pi^2}{3}.$$

نلاحظ أنّ f دالّة 2π. دوريّة ومستمرّة على $\mathbb{R}$ ومن الصنف $\mathscr{C}^1$ بالقطع على $\mathbb{R}$. تسمح مبرهنة التقارب الناظميّ بضمان تقارب السلسلة الفورييّة الناظميّ على $\mathbb{R}$ وقبولها f مجموعا لها. نكتب إذن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2\pi x = -\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}. \qquad (1)$$

إذا أخذنا $x = 0$ في العلاقة (1) حصلنا من جديد على المطابقة التقليديّة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ولكن لدينا:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2};$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6},$$

أي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

لنأخذ في الأخير $x=\pi$ في العلاقة (1). نحصل على:

$$-\pi^2=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2};$$

وعليه:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

6) 1) لدينا:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ax}dx=\frac{1}{2\pi a}(e^{2\pi a}-1).$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi a}-\frac{n^2}{a^2}a_n.$$

ومنه:

$$a_n=\frac{a}{\pi}\frac{e^{2\pi a}-1}{a^2+n^2}.$$

وبالمثل، لدينا:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{ax}\sin nx\,dx=-n\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi a^2}-\frac{n^2}{a^2}b_n.$$

إذن:

$$b_n = \frac{-n}{\pi}\frac{e^{2\pi a}-1}{a^2+n^2}.$$

النشر المطلوب هو:

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx - \frac{n}{a^2+n^2}\sin nx\right).$$

2) يمكن بموجب قاعدة ديريكليه أن نكتب عند الصفر:

$$\frac{1+e^{2\pi a}}{2} = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a}{a^2+n^2}.$$

ومنه:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{e^{2\pi a}-1}\left(\frac{1+e^{2\pi a}}{2} - \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a}.$$

3) لدينا:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a^2}.$$

وبالتالي:

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a^2}\right)\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2a}\frac{1}{th\pi a} - \frac{1}{2a^2}\right).$$

نذكّر بأنّ:

$$\frac{1}{th\pi a} = \frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{3} + a\varepsilon(a);\quad \lim_{a\to 0}\varepsilon(a) = 0.$$

وعليه:

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2a}\left(\frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{3} + a\varepsilon(a)\right) - \frac{1}{2a^2}\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi^2}{6} + \varepsilon(a)\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4) لدينا:

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a}{a^2+n^2}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}-\frac{1}{2a}\right)=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\frac{1+\frac{1}{e^{2\pi a}}}{1-\frac{1}{e^{2\pi a}}}-\frac{1}{2a}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

7) 1) لدينا:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{x}{2}\,dx=2.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{x}{2}\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\left(\frac{1}{2}-n\right)x\,dx=-\frac{4}{4n^2-1}.$$

وبالمثل لدينا:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos\left(\frac{1}{2}-n\right)x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos\left(\frac{1}{2}+n\right)x\,dx=-\frac{32n}{\pi(4n^2-1)^2}.$$

سلسلة f الفوريّة هي:

$$2-4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx+\frac{8n}{\pi(4n^2-1)^2}\sin nx.$$

2) هذه السلسلة متقاربة نحو f على $]0,2\pi[$.

3) من أجل $x=\pi$ نكتب:

$$\pi=2+4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}.$$

ومنه:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=\frac{\pi-2}{4}.$$

8) لنبدأ بالدالّة f . لدينا بشأنها:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \ n = 2p, \\ -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2p+1)^2} & ; \ n = 2p+1. \end{cases}$$

ومنه:

$$x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

لنعتن بالمثل بالدالّة g . لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

ومنه:

$$x^2 \approx \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

لتبيان المساواة المطروحة نلاحظ أنّ الدالّتين f و g مستمرّتان على المجال $(0,\pi)$. يترتّب عن ذلك بفضل قاعدة ديريكليه أنّ الدالّتين تتطابقان مع نهايتي سلسلتيهما الفورييّتين. هكذا يأتي:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, \qquad (1)$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx. \qquad (2)$$

نلاحظ من جهة أخرى أنّ السلسلة $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}\cos nx$ متقاربة ناظميّا.

يمكن تبعا لذلك أن نغيّر في ترتيب حدودها. نكتبها على سبيل المثال تحت الشكل:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}\cos nx=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx. \qquad (3)$$

من العلاقة (1) نستخرج:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x=-\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

ومن العلاقة (2) نستخرج:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right). \qquad (5)$$

السلسلة الواردة في الطرف الأيسر من هذه العلاقة الأخيرة متقاربة ناظميّا.

يمكن وضعها جراء ذلك تحت الشكل:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx-\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$
$$=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right). \qquad (6)$$

تكأكأ العلاقتين (4) و(6) يفضي إلى:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (7)$$

إذا قمنا بجمع العلاقتين (4) و(7) طرفا لطرف وأخذنا العلاقة (3) في الحسبان توصلنا في النهاية إلى أنّ:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}\cos nx=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2).$$

9) 1) الدالّة f زوجيّة، إذن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad b_n=0,$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right)=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin x|\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x+\sin(1-n)x)dx-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(\sin(n+1)x+\sin(1-n)x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n+1}{n+1}+\frac{(-1)^n+1}{1-n}\right)=-\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{4p^2-1} & ;\ n=2p,\\ 0 & ;\ n=2p+1.\end{cases}$$

ولمّا كانت f مستمرّة على $(0,2\pi)$ تطابقت عند كلّ نقطة من هذا المجال مع سلسلتها الفوريّة:

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

2) يمكن أن نكتب عند الصفر:

$$|\sin 0|=0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4n^2-1}.$$

ومنه:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$$

3) إذا ما أخذنا هذا المجموع في الحسبان جاءنا:

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2\sin^2 nx}{4n^2-1}.$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}.$$

4) لنضع $y=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos 2nx$. يسمح التعويض في المعادلة المعطاة بالحصول على:

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1-4n^2-16n^4)c_n\cos 2nx=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1)}\cos 2nx.$$

وبالمطابقة يأتي:

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{2}{\pi}, \\ c_n=-\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(4n^2-1)(-16n^4-4n^2+1)}, \quad n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

هكذا نجد:

$$y=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(-16n^4-4n^2+1)}.$$

هذه السلسلة تتقارب وتعرّف دالّة من الصنف $\mathscr{C}^4$ هي حلّ لمعادلتنا.

نلاحظ من جهة أخرى، أنّ حلول المعادلة المتجانسة هي عبارة عن مزوج للدوال e^{jx} و e^{-jx} و e^{j^2x} و e^{-j^2x}، التي ليست π . دوريّة. إنّ هذا ضامن لوحدانيّة y.

10) 1) لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ b_n=0;$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax dx=\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a+n)x+\cos(a-n)x)dx=\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

الدالّة f 2π . دوريّة ومستمرّة على □ ومن الصنف $\mathscr{C}^1$ بالقطع على □. تضمن مبرهنة التقارب الناظميّ تقارب سلسلة f الفوريّة الناظميّ على □ وتجعلها تقبل f_α مجموعا لها. هكذا، نكتب:

$$\cos ax=\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\frac{2a\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}. \qquad (*)$$

2) من أجل $x=\pi$ نحصل على:

$$\cos a\pi=\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\frac{\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}=\pi\frac{\cos a\pi}{\sin\pi a}-\frac{1}{a}.$$

3) يمكّننا اشتقاق g الشكليّ من الحصول على:

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$

وبأخذ $a=x$ في السؤال الثاني نجد:

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}=\pi\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}-\frac{1}{x}.$$

نستخلص أنّ الدالّة g قابلة للاشتقاق.

لتعيين g نقوم بحلّ المسألة الكوشيّة:

$$\begin{cases} g'(x) = \pi \dfrac{\cos \pi x}{\sin \pi x} - \dfrac{1}{x}, \\ g(0) = 0; \end{cases}$$

وهو ما يمدّنا على التوّ بـ:

$$\begin{cases} g(x) = Log\left(\dfrac{\sin \pi x}{x}\right) + C, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

وعليه، $C = Log\dfrac{1}{\pi}$. إذن:

$$g(x) = \begin{cases} Log\left(\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}\right) & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

4) أ. لنضع $t = \pi$ ولنقسم طرفي العلاقة (*) على $\sin \alpha\pi$ حيث α من $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. نحصل على:

$$cotg\ \pi\alpha = \frac{1}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

ولمّا كان α حقيقيّا غير صحيح كان $t = \alpha\pi$ كذلك وهو ما يخوّل لنا الحصول على المتطابقة المنشودة:

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ cotg\, t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

ب. لنثبت x في $]0, \pi[$ ولندخل الدالّة h المعرّفة بـ:

$$h(t) = \begin{cases} cotg\ t - \dfrac{1}{t} & ; t \in]0, x] \\ 0 & ; t = 0 \end{cases}$$

يأتي على ضوء العلاقة السابقة في (أ) أنّ:

$$\forall t \in [0,x],\ h(t) = 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

لنكامل هذه المتطابقة بين 0 و x ولنبادل بين الرمزين $\int_0^x$ و $\sum_{n=1}^{+\infty}$ (وهو أمر مشروع، لأنّ التقارب ناظميّ على وبالتالي منتظم على $[0,x]$).

نحصل على:

$$\int_0^x\left(cotg\,t - \frac{1}{t}\right)dt = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^x\frac{2t\,dt}{t^2 - n^2\pi^2};$$

وبالتالي:

$$Log\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}Log\left(\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|\right).$$

ولمّا كان x عنصرا من $]0,\pi[$ جاءنا:

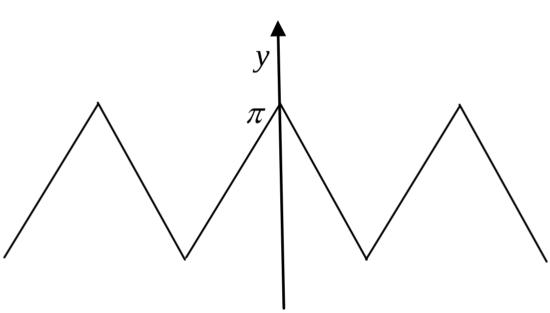
$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

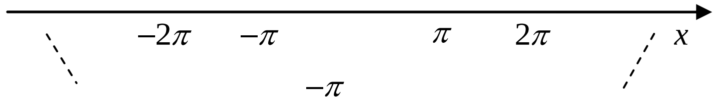
تسمح الشفعيّة والتأكّد البعديّ من صحّة العلاقة من أجل $x=0$ بالحصول على:

$$\forall x\in\,]-\pi,\pi[,\ \sin x = x\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

11) 1) لدينا على الفور:

$$g(x) = \begin{cases}\pi - 2x & ;\quad 0\le x\le\pi,\\ \pi + 2x & ;\quad -\pi\le x\le 0.\end{cases}$$





2) g دالّة حقيقيّة 2π. دوريّة ومستمرّة على المجال $[-\pi,\pi]$. إنّها قابلة للنشر وفق سلسلة فوريّة. تعيّن سلسلتها على النسق المعهود:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad b_n=0,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\,dx=0,$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx\,dx=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}=\begin{cases}0 & ;\ \mathrm{n}=2p,\\ \dfrac{8}{\pi}\dfrac{1}{(2p+1)^2} & ;\ \mathrm{n}=2p+1.\end{cases}$$

ومنه:

$$g(x)\approx\frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

3) من أجل كلّ عدد حقيقيّ x وكلّ عدد طبيعيّ n لدينا:

$$\left|\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x\right|\le\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

ولمّا كانت السلسلة $\sum\frac{1}{(2n+1)^2}$ متقاربة كانت سلسلة g الفوريّة متقاربة ناظميّا. نستخلص أنّ هذه السلسلة متقاربة بانتظام. يمكننا والحال هذه أن نضع:

$$g(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

4) التقارب المنتظم لسلسلة g الفوريّة ضامن لمشروعية مكاملتها حدّا حدّا. نجد في هذا الصدد:

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x.$$

5) دستور بارسفال الذي تحقّقه معاملات f الفوريّة هو:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

إذن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4)\, dx = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+n)^6}.$$

يعطي إجماليّ الحسابات:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+n)^6} = \frac{16}{15}\pi^4.$$

12) 1) لنوضّح الدالّة ψ:

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K(x,y)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{y} (\pi x - xy)\,\varphi(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_y^{\pi} (\pi y - xy)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \int_0^{y} x\,\varphi(x)\,dx - \frac{y}{\pi}\int_0^{y} x\,\varphi(x)\,dx - \int_{\pi}^{y} y\,\varphi(x)\,dx + \frac{y}{\pi}\int_{\pi}^{y} x\,\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

ينجرّ عن خصائص الدوال المعرّفة بواسطة تكاملات أنّ ψ قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$. وفضلا عن ذلك لدينا:

$$\psi'(y) = y\varphi(y) - \frac{1}{\pi}\int_0^y x\varphi(x)\,dx - \frac{1}{\pi}y^2\varphi(y) -$$
$$-\int_\pi^y \varphi(x)\,dx - y\varphi(y) + \frac{1}{\pi}\int_\pi^y x\varphi(x)\,dx + \frac{1}{\pi}y^2\varphi(y)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_\pi^y x\varphi(x)\,dx - \int_0^y x\varphi(x)\,dx\right) - \int_\pi^y \varphi(x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\varphi(x)\,dx - \int_\pi^y \varphi(x)\,dx.$$

وبالمثل، ψ' قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$ ويحقّق مشتقّها ψ'':

$$\psi''(y) = 0 - \varphi(y) = -\varphi(y).$$

نستخلص على التوّ أنّ الدالّة ψ قابلة للاشتقاق باستمرار مرّتين. وعليه، فإنّ مكاملة المسألة:

$$\psi''(y) = -\varphi(y), \qquad (*)$$
$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \qquad (**)$$

تعيّنه جيّدا.

2) لدينا:

$$\psi''(x) = -\sin nx \;\Rightarrow\; \psi'(x) = \frac{1}{n}\cos nx + A$$
$$\Rightarrow\; \psi(x) = \frac{1}{n^2}\sin nx + Ax + B,$$

حيث A و B ثابتان حقيقيّان نعيّنهما على هذا النحو. الشرط (**) يعطي:

$$\psi(0) = 0 = B,$$
$$\psi(\pi) = 0 = A\pi.$$

ومنه $A = B = 0$. هكذا نجد:

$$\psi(x) = \frac{1}{n^2}\sin nx.$$

3) الدالّة f_y فرديّة، إذن:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_y(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K(x,y)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{y} x(\pi - y)\sin nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_y^{\pi} y(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{n^2}\sin ny.$$

السلسلة المنشودة هي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_y(x) \approx 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}\sin ny\,\sin nx.$$

إلى جانب هذا، نلاحظ أنّ هذه السلسلة متقاربة ناظميّا على $\mathbb{R}$. ولمّا كانت f_y دالّة 2π . دوريّة ومستمرّة على $[-\pi,\pi]$ استنتجنا أنّ f_y تتطابق عند كلّ x من $\mathbb{R}$ مع سلسلتها الفورييّة.

4) لدينا توّا:

$$S_1 = \frac{1}{2}f_y(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}(\pi - y) & ; \quad x \le y, \\ \frac{y}{2}(\pi - x) & ; \quad y \le x. \end{cases}$$

وفي الأخير، إذا ما أخذنا $x = y$ حصلنا على:

$$S_2 = \frac{1}{2}f_x(x) = \frac{x}{2}(\pi - x).$$

13) 1) لنحسب المعاملات الفورييّة المثلّثيّة للدالّة f . يمكن على ضوء كون هذه الأخيرة زوجيّة أن نكتب:

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \ b_n = 0; \\ \forall n \geq 0, \ a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos nt}{\cos \frac{t}{4}} dt. \end{cases}$$

لنثبّت $0 \leq n$. يأتي بوضع $u = \dfrac{t}{4}$:

$$a_n = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4nu)}{\cos u} du.$$

لنبحث بعد هذا عن علاقة تراجعيّة على المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (حساب هذه المعاملات المباشر عسير):

$$\forall n \geq 1, \ a_n - a_{n-1} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4nu) - \cos(4(n-1)u)}{\cos u} du$$

$$= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin((4n-2)u)\sin 2u}{\cos u} du$$

$$= -\frac{32}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin((4n-2)u)\sin u du$$

$$= -\frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos((4n-3)u) - \cos((4n-1)u\right] du$$

$$= -\frac{16}{\pi} \left(\frac{\sin\left((4n-3)\frac{\pi}{4}\right)}{4n-3} - \frac{\sin\left((4n-1)\frac{\pi}{4}\right)}{4n-1} \right)$$

$$= \frac{8\sqrt{2}(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right).$$

إذن:

$$\forall n \geq 0,\ a_n = a_0(f) + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right).$$

بقي لنا أن نحسب a_0. لدينا بشأنه:

$$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{du}{\cos u} = \frac{8}{\pi}\left[Log\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{\pi}Log\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{8}{\pi}Log(1+\sqrt{2})$$

إذن:

$$\forall n \geq 0,\ a_n = \frac{8}{\pi}Log(1+\sqrt{2}) + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right) \qquad (1)$$

f دالّة 2π. دوريّة ومستمرّة على □. نخلص من هذا إلى أنّ فرضيات علاقة بارسفال متوفّرة. وعليه، فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n{}^2$ متقاربة، وهو ما يضمن $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. تسمح لنا العلاقة (1) الآن بالحصول على:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right) = \frac{Log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

2) نلجأ من جديد إلى علاقة بارسفال لنكتب:

$$\frac{16}{\pi^2}\left(Log(1+\sqrt{2})\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2(\frac{t}{4})}. \qquad (3)$$

من جهة أخرى، تسمح العلاقتان (1) و(2) باستنتاج:

$$a_n = \frac{8}{\pi}Log(1+\sqrt{2}) +$$

$$+\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(-\frac{Log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{j=n+1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right)\right)$$

وعليه:

$$\forall n \geq 0,\ a_n^2 = \frac{128}{\pi^2}\left(\sum_{j=n+1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3}-\frac{1}{4j-1}\right)^2\right).$$

من العلاقة (3) نستقي:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=n+1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3}-\frac{1}{4j-1}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{128}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2(\frac{t}{4})} - \frac{32}{\pi^2}\left(Log(1+\sqrt{2})\right)^2\right].$$

ولكن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\frac{t}{4}} = \left[4\tan\frac{t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8,$$

إذن:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=n+1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3}-\frac{1}{4j-1}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{16} - \frac{\left(Log(1+\sqrt{2})\right)^2}{4}.$$

(14 بمقتضى قاعدة آبل[1]، تكون السلسلة المعتبرة متقاربة مهما يكن العدد الحقيقيّ x. ومع ذلك، فهي ليست سلسلة فوريّة لأيّة دالّة قابلة للمكاملة. وفعلا، فلو افترضنا جدلا أنّها سلسلة فوريّة لدالّة قابلة للمكاملة f أمكننا، بفضل متراجحة بيسال، الحصول على:

$$\frac{1}{1^{2\alpha}}+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\frac{1}{3^{2\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{2\alpha}}+\ldots \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx.$$

---

39. Niels Henrik Abel: رياضيّاتيّ نرويجيّ، ولد في 5 أوت 1802 بفريندو ومات في 6 أفريل 1829 بفرولاند. بحث في المعادلات الدالّية والتكامليّة.

ولمّا كانت f قابلة للمكاملة أضحت f^2 كذلك. يترتّب عن ذلك أنّ طرف هذه المتراجحة الأيمن منته بينما طرفها الأيسر ليس كذلك من أجل $0 < 2\alpha \le 1$. إنّه التناقض المرتقب.

5.5 مسائل للبحث

15) هات سلاسل فوريي للدوال 2π . الدوريّة أدناه، في المجال $(-\pi, \pi)$

ثمّ عيّن مجاميع السلاسل الموافقة عند نقاط التقطّع وكذا طرفي المجال:

$$f_1(x) = \begin{cases} ax & ; \ -\pi < x \le 0, \\ bx & ; \ 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

(اعتبر الحالتين الخاصّتين: $(a,b) = (0,1)$ و $(a,b) = (1,2)$)؛

$$f_2(x) = e^{ax}; \ f_3(x) = \sin ax; \ f_4(x) = chax.$$

حيث a من $\mathbb{R}$.

16) عيّن النشرين وفق سلسلة فوريّة للدالّتين f و g المعطاتين على النحو:

$$f(x) = |\sin x|^3; \ g(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}.$$

17) هات السلاسل الفوريّة غير الكاملة وفق دوال جيبيّة للدالّتين التاليتين:

$$f_1(x) = x^2, \ 0 \le x < \pi;$$

$$f_2(x) = x^3, \ -\pi < x < \pi.$$

18) اثبت أنّه إذا كانت f دالّة من الصنف و 2π .
دوريّةٌ فإنّ معاملاتها
الفورييّة تؤول نحو الصفر في ما لا نهاية.

19) انشر وفق سلسلة تجيبيّة، الدالّة f المعرّفة على المجال $(0,\pi)$
بِـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}x & ;\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi}{4}x & ;\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

20) انشر وفق سلاسل تجيبيّة، على المجال $(-\pi,\pi)$ ، الدوال التالية:

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0<x\le h,\\ -1 & ;\ h<x<\pi,\end{cases},$$

$$f_2(x)=x\sin x,$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\cos x & ;\ 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -\cos x & ;\ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

21) نعتبر الدالّة:

$$f(x)=(\pi^2-x^2)^2,\ x\in(-\pi,\pi).$$

1) تأكّد من أنّ:

$$f(-\pi)=f(\pi)\ ؛\ f'(-\pi)=f'(\pi)\ ؛\ f''(-\pi)=f''(\pi).$$

2) هات نشر فوريي للدالّة f على $(-\pi,\pi)$.

3) احسب المجموع:

$$S=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(n+1)^4}+\ldots$$

22) 1) هات سلاسل فوريي على المجالات الموافقة للدالّتين الدوريّتين:

$$f_1(x)=|x|,\ x\in\left]-1,1\right[,$$

$$f_2(x)=e^x,\ x\in\left]-h,h\right[,\ (h\in\mathbb{R}_+^*).$$

2) هات سلاسل فوريي التجيبيّة في الحالتين المواليتين:

$$f_1(x)=1,\ 0<x<1;\ f_2(x)=x^3,\ 0<x<1.$$

23) 1) هات النشر وفق سلسلة فوريّة تجيبيّة للدالّة f المعرّفة على هذا المنوال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3} & ;\ 0\le x<\dfrac{\pi}{3},\\ 0 & ;\ \dfrac{\pi}{3}\le x<\dfrac{2\pi}{3},\\ -\dfrac{\pi}{3} & ;\ \dfrac{2\pi}{3}\le x\le\pi.\end{cases}$$

2) ادرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم للسلسلة المطلوبة.

24) لتكن f دالّة 2π . دوريّةً بحيث:

$$f(x)=\frac{(\pi-x)^2}{4},\ 0\le x\le 2\pi.$$

1) ارسم منحنى f البيانيّ.

2) عيّن سلسلة f الفوريّة.

3) احسب مجاميع هذه السلاسل:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2};\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2};\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4}.$$

25) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة 2π . دوريّةً وزوجيّة بحيث:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & ;\ x=\dfrac{\pi}{2},\\ -1 & ;\ \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

1) احسب معاملات f الفورييّة.

2) ادرس تقارب سلسلة f الفورييّة.

3) استنتج مجاميع السلاسل التالية:

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^p}{2p+1};\ \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2p+1)^2}\ ;\ \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}.$$

26) ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة 2π . دوريّةٍ وفرديّة بحيث:

$$f(x)=\begin{cases}x & ;\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x & ;\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

1) احسب معاملات f الفورييّة.

2) ادرس تقارب سلسلة f الفورييّة.

3) استنتج مجاميع السلاسل التالية:

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2p+1)^2};\ \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2};\ \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2p+1)^4};\ \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^4}.$$

27) ليكن f دالّة 2π . دوريّةٍ قابلة للاشتقاق في $(-\pi,\pi)$ ومحقّقة $f(-\pi)=f(\pi)$. نفترض أنّ المشتقّ f' مستمرّ على $(-\pi,\pi)$.

1) اثبت وجود ثابت $0<C_1$ يحقّق:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} |a_n| \leq \dfrac{C_1}{n}, \\ |b_n| \leq \dfrac{C_1}{n}, \end{cases}$$

حيث a_n و b_n تمثّل معاملات فوريي لِـ f.

2) إذا افترضنا أنّ f'' موجودة ومستمرّ ة على المجال $(-\pi,\pi)$ فاثبت حينئذ وجود ثابت $0<C_2$ يحقّق:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} |a_n| \leq \dfrac{C_2}{n^2}, \\ |b_n| \leq \dfrac{C_2}{n^2}. \end{cases}$$

3) استخلص أنّه إذا كانت f دالّة 2π . دوريّةٌ ومتمتّعة بمشتقّ ثان مستمرّ ، فإنّ سلسلتها الفورييّة تكون عندئذ متقاربة ناظميّا.

28) 1) انشر وفق سلسلة فورييّة الدالّة الفرديّة و 2π .الدوريّة المعرّفة بـ:

$$f(x)=x,\ x\in[0,\pi[.$$

2) استخلص بالمكاملة النشر الفورييّ للدالّة الزوجيّة و 2π .الدوريّة المعطاة بـ:

$$g(x)=x^2,\ x\in[0,\pi].$$

3) برهن أنّه إذا كانت النقطة (x,y) داخل المربّع المحاط بالمستقيمات $\pm x \pm y = \pm\pi$ فإنّ:

$$\frac{xy}{2}=\sin x\sin y-\frac{\sin 2x\sin 2y}{2^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin nx\sin ny}{n^2}\ldots$$

29) ليكن a عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$ و f دالّة حقيقيّة 2π . دوريّة بحيث:

$$f(x)=\begin{cases} sh(ax) & ;\ -\pi<x<\pi, \\ 0 & ;\ x=\pi. \end{cases}$$

1) احسب معاملات f الفورييّة.

2) استخلص أنّ:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+a^2}=\frac{\pi}{4ch\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

3) برهن أنّ:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{chx}dx=\frac{\pi}{2ch\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

30) ليكن a عددا حقيقيّا موجبا تماما و f دالّة حقيقيّة 2π . دوريّة معطاة على النحو $f(t)=\dfrac{1}{cha+\cos t}$.

1) احسب معاملات f الفورييّة.

2) استنتج أنّ:

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{cha+\cos t}dt=(-1)^n\pi\frac{e^{-na}}{sha}.$$

31) ليكن k عددا حقيقيّا. حل المعادلة التفاضليّة:

$$y''+k^2y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

32) حل، مستعملا حلاّ خاصّا تحت شكل سلسلة فورييّة، المعادلتين التفاضليّتين:

أ. $y^{(4)}+5y''+4y=|\sin 2x|,$

ب. $y''+y=\max(\sin x,0).$

6

مدخل إلى نظرية المؤثّرات

نستهلّ هذا الفصل بالإشارة إلى أنّ الأمر يتعلّق بالتطبيقات الخطّيّة أساسا. سوف تكون منطلقاتها ومستقرّاتها فضاءات نظيميّة عموما وهيلبرتيّة خصوصا. فإذا كان E و F فضاءين نظيميّين على حقل K، فإنّنا نعني بالمصطلح "مؤثّر" كلّ تطبيق خطّيّ من E نحو F. وبعبارة أخرى، نطلق لفظ مؤثّر على كلّ عنصر من $L(E,F)$.

سنحصر هذه الدراسة على $\mathscr{L}(E,F)$. وسوف يسمح ذلك، على سبيل المثال، باستغلال تطابق مفهومي الاستمرار والمحدوديّة لدى مثل هذه التطبيقات، كما فصّلنا ذلك في الفصل الثاني. لا بأس أن نذكّر بأنّ عنصرا من $L(E,F)$ يكون محدودا إذا نقل كلّ جزء محدود من E إلى جزء محدود من F. وإذا استحضرنا أنّ كلّ جزء محدود محتوى في كرة فإنّ تطبيقا خطّيّا ما u يكون محدودا إذا حوّل كلّ كرة من E إلى جزء محدود في F. يترجم هذا المفهوم عمليّا بواسطة الصيغة الموالية:

u محدود على E $\Leftrightarrow \quad \exists C>0 / \forall x \in E : \|u(x)\| \leq C\|x\|$

وهو بالضبط ما يفيد استمرار u.

1.6 مقلوب مؤثّر والقابليّة للقلب

1.1.6 تعريف

ليكن E و F فضاءين بناخيّين على حقل K ($\mathrm{K}=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) و u تطبيقا خطّيّا. نقول عن u إنّه **قابل للقلب** إذا كان تقابليّا وكان عكسه مستمرّا. نرمز لمقلوب u كالمعتاد بِـ u^{-1}.

إنّ هذا التعريف يستدعي أن نعيره اهتماما خاصّا؛ ذلك لأ نّ تمتّع u بمقلوب u^{-1} لا يخوّل له امتلاك خاصيّة القابليّة للقلب. فهذه الأخيرة تفرض أن يكون u^{-1} منتميّا إلى $\mathscr{L}(F,E)$. وبتعبير أوضح، فإنّ تطبيقا خطّيّا u لا يكون قابلا للقلب إمّا لعدم كونه تقابليّا وإمّا لكونه تقابليّا ذا مقلوب غير مستمرّ.

2.1.6 مثالان

1) إذا كان E فضاء نظيميّا كان التطبيق المطابق id_E عندئذ قابلا للقلب بكلّ بداهة.

2) ليكن $E=\ell^2_{\square}(\square)$ و u تطبيقا معرّفا من E نحو E بـ :

$$u(x)=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{2^2}x_3,\dots,\frac{1}{2^{n-1}}x_n,\dots\right),$$

حيث $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$. من الواضح أنّ u تقابليّ. فهو خطّيّ، نواته مبسّطة إلى $\{0\}$، ممّا يجعله متباينا. وتتمتّع المعادلة $u(x)=y$ بالحلّ $x=\left(y_1,2y_2,2^2y_3,\dots,2^{n-1}y_n,\dots\right)$، وهو ما يضمن غمر u. ولدينا من جهة أخرى:

$$u^{-1}(x)=\left(x_1,2x_2,2^2x_3,\dots,2^{n-1}x_n,\dots\right);$$

وهو ما يظهر أن u^{-1} دالّة غير محدودة على E. إنّه غير مستمرّ إذن. نستخلص أنّ u غير قابل للقلب.

إذا استندنا إلى مبرهنة التشاكل لبناخ (3.4.2) اتّضح لنا أنّ:

3.1.6 نتيجة

إذا كان E و F فضاءين بناخيّين و u تقابلا من $\mathscr{L}(E,F)$، فإنّ u يضحى عندئذ قابلا للقلب.

وبالفعل، فإنّ المبرهنة المشار إليها تضمن وجود المقلوب واستمراره.

4.1.6 مبرهنة

إذا كان E بناخيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ بحيث $\|u\|<1$ فإنّ المؤثّر $id_E - u$ يقبل القلب ويكون مقلوبه معطى بِ :

$$(id_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k.$$

يرمز id_E هنا، للتطبيق المطابق في الجبر البناخيّ $\mathscr{L}(E)$.

إثبات

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ يكون لدينا:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|u\|^k.$$

وعليه، فإنّ القيد $\|u\|<1$ يضمن تقارب السلسلة $\sum_k \|u\|^k$، ممّا ينجرّ عنه تقارب السلسلة $\sum_k \|u^k\|$ كذلك. وبما أنّ E بناخيّ فإنّ تقارب السلسلة الأخيرة يستلزم أنّ مجموع السلسلة $\sum_k u^k$ مؤثّر خطّيّ مستمرّ. ومن جهة أخرى، من أجل كلّ عدد طبيعيّ n نكتب:

$$(id_E - u)\sum_{k=0}^{n} u^k = \sum_{k=0}^{n} u^k (id_E - u) = id_E - u^{n+1}.$$

بالانتقال إلى النهاية لمّا يؤول n إلى $+\infty$، وعلما بأنّ:

$$\|u^{n+1}\| \le \|u\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

نصل إلى أنّ:

$$(id_E - u)\sum_{k=0}^{\infty} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} u^k (id_E - u) = id_E.$$

ومنه:

$$(id_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k.$$

5.1.6 مبرهنة

ليكن E و F فضاءين بناخيّين و u عنصرا قابلا للقلب من $\mathscr{L}(E,F)$.
إذا كان v مؤثّرا من $\mathscr{L}(E,F)$ بحيث:

$$\|v\| < \|u^{-1}\|^{-1},$$

فإنّ المؤثّر $u+v$ يقبل القلب.

إثبات

نلاحظ في البداية أنّ:

$$u + v = u(id_E + u^{-1}v).$$

وعليه، يكفي أن نبيّن أنّ $id_E + u^{-1}v$ قابل للقلب لضمان المطلوب. إذا استندنا إلى المبرهنة السابقة، حصلنا على القابليّة للقلب للمؤثّر $id_E + u^{-1}v$ بمجرّد أن يكون $\|u^{-1}v\| < 1$. إنّ هذا الشرط متوفّر. وبالفعل، لدينا:

$$\|u^{-1}v\| \le \|u^{-1}\|\,\|v\| < 1.$$

6.1.6 نتيجة

إنّ مجموعة المؤثّرات القابلة للقلب تؤلّف جزءا مفتوحا من $\mathscr{L}(E,F)$.

إثبات

لنرمز لهذه المجموعة بِ $\mathscr{I}_{\mathscr{L}(E,F)}$. فلكي تكون هذه الأخيرة مفتوحة يكفي أن نبيّن أنّها جوار لكلّ عناصرها بالنسبة للطبولوجيا الاعتيادية الملحقة بالنظيم $\|.\|_{\mathscr{L}(E,F)}$.

ليكن u مؤثّرا من $\mathscr{I}_{\mathscr{L}(E,F)}$. تكون الكرة المفتوحة $B\left(u,\left\|u^{-1}\right\|^{-1}\right)$ عندئذ مشكّلة من عناصر قابلة للقلب. وفعلا، إذا كان v عنصرا من هذه الكرة كتبنا من أجله:

$$\|u-v\| \leq \left\|u^{-1}\right\|^{-1}.$$

وطبقا للمبرهنة أعلاه يتبيّن أنّ المؤثّر $u-v$ قابل للقلب. وعليه، يكون $v=v-u+u$ قابلا للقلب. نستخلص أنّ:

$$\forall u \in \mathscr{I}_{\mathscr{L}(E,F)} \quad B\left(u,\left\|u^{-1}\right\|^{-1}\right) \subset \mathscr{I}_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

إذن $\mathscr{I}_{\mathscr{L}(E,F)}$ جوار لكلّ نقاطه، وبالتالي فهو مفتوح.

2.6 المؤثّر القرين

1.2.6 تعريف

ليكن E و F فضاءين هيلبرتيّين و u تطبيقا خطّيّا من E نحو F.
نسمّي **قرين** u التطبيق v المعرّف من F نحو E بِ :

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, v(y)\rangle_E.$$

نرمز لِ v بِ u^* وبـ $\langle,\rangle_E$ و $\langle,\rangle_F$ للجداءين السلّميّين المعرّفين على E و F على التوالي. سوف نحتفظ بخصوص الجداءين السلّميّين برمز واحد $\langle,\rangle$ للإثنين ويكون على القارئ التعرّف على المعني منهما في كلّ حالة

وحين!

2.2.6 قضية

إنّ القرين u^* تطبيق خطّيّ.

إثبات

من أجلّ كلّ y و z من F و x من E نكتب:

$$\langle x,u^*(y+z)\rangle=\langle u(x),y+z\rangle=\langle u(x),y\rangle+\langle u(x),z\rangle$$
$$=\langle x,u^*(y)\rangle+\langle x,u^*(z)\rangle=\langle x,u^*(y)+u^*(z)\rangle.$$

ومنه:

$$u^*(y+z)=u^*(y)+u^*(z).$$

وبالطريقة نفسها، نكتب من أجل كلّ λ من K :

$$\langle x,u^*(\lambda y)\rangle=\langle u(x),\lambda y\rangle=\overline{\lambda}\langle u(x),y\rangle=\overline{\lambda}\langle x,u^*(y)\rangle=\langle x,\lambda u^*(y)\rangle.$$

وعليه:

$$u^*(\lambda y)=\lambda u^*(y).$$

إذن u^* خطّيّ.

من الخصائص الكثيرة والهامّة التي يتمتّع بها القرين نذكر جملة منها في هذه الـ :

3.2.6 قضية

ليكن E فضاء هيلبرتيّا. فمن أجل كلّ u و v من $\mathscr{L}(E)$ وكلّ λ من من K يكون لدينا:

1) $(u+v)^*=u^*+v^*,$

2) $(\lambda u)^*=\overline{\lambda}\,u^*,$

3) $(u\circ v)^*=v^*\circ u^*,$

4) $id_E{}^*=id_E.$

وإذا كان u قابلا للقلب فإنّ قرينه يكون كذلك، وبالخصوص لدينا:

5) $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*,$

6) $(u^*)^* = u,$

7) $\|u^*\| = \|u\|.$

إثبات

1) من أجل كلّ x و y من E. يكون لدينا عندئذ:

$$\langle x,(u+v)^*(y)\rangle = \langle (u+v)(x),y\rangle = \langle u(x),y\rangle + \langle v(x),y\rangle$$
$$= \langle x,u^*(y)\rangle + \langle x,v^*(y)\rangle = \langle x,u^*(y)+v^*(y)\rangle.$$

ومنه:

$$(u+v)^*(y) = u^*(y)+v^*(y), \quad \forall y \in E,$$

وهو ما يردّ على التساؤل الأوّل.

لنعجّل بالإشارة هنا إلى أنّنا غضضنا الطرف عن مسألة وجود القرين. فالقضية الحاضرة تفترض وجود كلّ القرائن الوارد فيها. سوف نهتمّ بهذا الجانب في المبرهنة الآتية.

2) لدينا بالمثل:

$$\langle x,(\lambda u)^*(y)\rangle = \langle (\lambda u)(x),y\rangle = \lambda\langle u(x),y\rangle = \lambda\langle x,u^*(y)\rangle = \langle x,\overline{\lambda}u^*(y)\rangle.$$

ومنه:

$$(\lambda u)^*(y) = \overline{\lambda}u^*(y), \quad \forall y \in E,$$

وهو ما يضمن (2).

3) لدينا:

$$\langle x,(u\circ v)^*(y)\rangle = \langle (u\circ v)(x),y\rangle = \langle v(x),u^*(y)\rangle = \langle x,v^*\left(u^*(y)\right)\rangle$$
$$= \langle x,(v^*\circ u^*)(y)\rangle.$$

ومنه:

$$(u\circ v)^*(y)=(v^*\circ u^*)(y),\quad \forall y\in E,$$

أي أنّ $(u\circ v)^*=v^*\circ u^*$.

4) لدينا:

$$\langle x,(id_E)^*(y)\rangle=\langle id_E(x),y\rangle=\langle x,id_E(y)\rangle.$$

ومنه:

$$(id_E)^*(y)=id_E(y),\ \ \forall y\in E,$$

وهو ما ينهي (4).

5) نستخلص هذه النتيجة باستخدام (3) و(4). وبالفعل، إذا وضعنا $v=u^{-1}$ في (3) واستعنّا بـ (4) حصلنا على:

$$\left(u^{-1}\right)^*\circ u^*=(u\circ u^{-1})^*=(id_E)^*=id_E.$$

ومنه:

$$(u^*)^{-1}=(u^{-1})^*.$$

6) كما كان الشأن سابقا نكتب من أجل كل x و y من E:

$$\langle\left((u)^*\right)^*(x),(y)\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle=\langle u(x),y\rangle.$$

وعليه:

$$\left((u)^*\right)^*(x)=u(x),\ \ \forall x\in E,$$

وهو ما يختم (6).

أمّا البند (7) فإنّ المبرهنة التالية تتضمّنه.

4.2.6 مبرهنة

ليكن E و F فضاءين هيلبرتيّين. يكون لدينا عندئذ:

1) لكلّ عنصر u من $\mathscr{L}(E,F)$

قرين وحيد في $\mathscr{L}(F,E)$.

2) التطبيق $\psi:\mathscr{L}(E,F)\to\mathscr{L}(F,E)$ المعرّف بـ :

$$\psi(u)=u^*,$$

تقايس نصف خطّيّ.

إثبات

1) ليكن y عنصرا من F و $\varphi:E\to\mathrm{K}$ تطبيقا معرّفا بـ :

$$\varphi(x)=\langle u(x),y\rangle.$$

من السهل الجزم بأنّ φ عنصر من الثنوي الطبولوجيّ E'. فهو واضح الخطّيّة، كما أنّه مستمرّ إذ أنّ:

$$|\varphi(x)|=|\langle u(x),y\rangle|\le\|u(x)\|_F\,\|y\|_F\le\|u\|_{\mathrm{L}(E,F)}\,\|y\|\|x\|.$$

يوجد عندئذ، وبمقتضى مبرهنة ريس (16.3.4)، عنصر وحيد a في E بحيث:

$$\varphi(x)=\langle u(x),y\rangle=\langle x,a\rangle.$$

لنضع $a=u^*(y)$. نكتب حينئذ:

$$\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle.$$

يأتي على الفور أنّ u^* تطبيق خطّيّ كما سبق ذلك في القضية (2.2.6)، وهو مستمرّ كذلك إذ أنّ:

$$\|u^*(y)\|_E=\|a\|_E=\|\varphi\|_{E'}=\sup_{\|x\|_E\le1}|\langle u(x),y\rangle_F|\le\sup_{\|x\|_E\le1}\|u(x)\|_F\,\|y\|_F\,.$$

ومنه:

$$\|u^*(y)\|_E\le\|u\|_{\mathrm{L}(E,F)}\,\|y\|_F\,.$$

2) إنّ البندين الأوّل والثاني من القضية أعلاه يفيدان بالضبط أنّ ψ نصف خطّيّ. كما أنّ البند الثالث من القضية ذاتها يجعله غامرا. وفعلا، إذا كان v مؤثّرا من $\mathscr{L}(F,E)$ فإنّه يوجد مؤثّر $u\ (=v^*)$ من $\mathscr{L}(E,F)$ بحيث:

$$\psi(u)=u^*=(v^*)^*=v.$$

ختاما لهذا البرهان نبيّن أنّ $\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}=\|u^*\|_{\mathscr{L}(F,E)}$، وهو ما يضمن لنا كون ψ متباينا ومتقايسا؛ وبذلك يتحقّق الفرع السابع من القضية السابقة.

لدينا آنفا:

$$\forall\, y\in F\quad \|u^*(y)\|_E\le \|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|y\|_F\,.$$

ومنه:

$$\|u^*\|_{\mathscr{L}(F,E)}\le \|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}\,. \qquad (*)$$

لنضع من جهة أخرى:

$$y_0=\frac{1}{\|u(x)\|_F}u(x),$$

حيث x عنصر من كرة الوحدة لِـ E مع $u(x)\neq 0$. يمكن أن نكتب عند ذلك:

$$\|u^*\|_{\mathscr{L}(F,E)}=\sup_{\|y\|_F\le 1}\|u^*(y)\|_E=\sup_{\|y\|_F\le 1}\left(\sup_{\|x\|_E\le 1}\left|\langle u(x),y\rangle_F\right|\right)\ge \|u^*(y_0)\|_E\,.$$

أي أنّ:

$$\|u^*\|_{\mathscr{L}(F,E)}\ge \sup_{\|x\|_E\le 1}\left|\langle u(x),\frac{1}{\|u(x)\|_F}u(x)\rangle\right|\ge \sup_{\|x\|_E\le 1}\|u(x)\|_F=\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}\,.(**)$$

وإذا أقرنّا النتيجتين $(*)$ و $(**)$ حصلنا على المساواة المنشودة.

5.2.6 أمثلة

1) التطبيق المطابق id_E من $\mathscr{L}(E)$ يتمتّع بنفسه قرينا له.

2) ليكن a من E و b من F ولنبحث عن قرين المؤثّر :

$$u : x \mapsto u(x) = \langle x, a \rangle b.$$

واضح أنّ u عنصر من $\mathscr{L}(E,F)$. إذن، فهو يتمتّع بقرين وحيد. لنعيّنه. لدينا تعريفا:

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

وعليه:

$$\begin{aligned}\langle u(x), y \rangle &= \langle \langle x, a \rangle_E b, y \rangle = \langle x, a \rangle_E \langle b, y \rangle \\ &= \langle x, \overline{\langle b, y \rangle}\, a \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.\end{aligned}$$

إذن:

$$u^*(y) = \overline{\langle b, y \rangle}\, a.$$

3) ليكن $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{C}\right)$ مزوّدا بالجداء السلّميّ:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

ولتكن K دالّة من $\mathscr{C}\left([0,1] \times [0,1], \mathbb{C}\right)$ المزوّد بنظيم التقارب المنتظم. نعرّف التطبيق:

$$\begin{aligned}&u : E \to E : \\ &\quad f \mapsto u(f) / u(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt.\end{aligned}$$

من السهل التأكّد من أنّ u عنصر من $\mathscr{L}(E)$. فهو يرث خطّيّته عن التكامل واستمراره نابع من هذا الحساب:

$$\|u(f)\|_E=\sqrt{\int_0^1|u(f)(x)|^2\,dx}=\sqrt{\int_0^1\left(\left|\int_0^1 K(x,t)f(t)dt\right|^2\right)dx}$$
$$\le\sqrt{\int_0^1\left(\left(\int_0^1|K(x,t)||f(t)|dt\right)^2\right)dx}$$
$$\le\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,1]}|K(x,t)|\sqrt{\int_0^1\left(\left(\int_0^1|f(t)|dt\right)^2\right)dx}$$
$$\le\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,1]}|K(x,t)|\sqrt{\int_0^1\left(\int_0^1|f(t)|^2\,dt\right)dx}\le\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,1]}|K(x,t)|\,\|f\|_E\,.$$

لنعيّن قرينه. من أجل f و g من E نكتب:

$$\langle u(f),g\rangle=\langle (f),u^*(g)\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{u^*(g)(t)}\,dt=\int_0^1 u(f)(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$
$$=\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)f(t)dt\right)\overline{g(x)}\,dx.$$

وبمقتضى مبرهنة فوبيني[1] المتعلّقة بالتكاملات المضاعفة يأتي:

$$\langle u(f),g\rangle=\int_0^1\int_0^1\left(K(x,t)\,\overline{g(x)}\,dx\right)f(t)dt$$
$$=\int_0^1 f(t)\left(\overline{\int_0^1 K(x,t)g(x)dx}\right)dt=\int_0^1 f(t)\overline{u^*(g)(t)}\;dt.$$

يتبيّن من هذا الحساب أنّ القرين u^* معرّف بِـ :

$$g\mapsto u^*(g)/u(g)(t)=\int_0^1\overline{K(x,t)}\,g(x)\,dx.$$

6.2.6 قضية

---

19) Guido Fubini : رياضيّاتيّ إيطاليّ، ولد في 19 جانفي 1879 في بنيسيا ومات في 6 جوان 1943 بنيويورك. شرع تحت تأثير من قبل ديني في بحوث في الهندسة ثمّ وسّع حقل اهتمامه ليشمل الهندسة التفاضليّة والمعادلات التفاضليّة والدوال لتحليليّة.

إذا كان E و F فضاءين هيلبرتيّين و u عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$ ، فإنّ:

$$(\operatorname{Im} u)^{\perp} = Ker\, u^{*}, \qquad (1$$

$$(\operatorname{Im} u^{*})^{\perp} = Ker\, u. \qquad (2$$

إثبات

لدينا:

$$\begin{aligned} y \in (\operatorname{Im} u)^{\perp} &\Leftrightarrow \langle u(x), y\rangle = 0 \quad \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x, u^{*}(y)\rangle = 0 \quad \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow u^{*}(y) = 0 \Leftrightarrow y \in Ker\, u^{*}. \end{aligned}$$

ومنه المساواة (1).

تعالج المساواة الثانية بالطريقة نفسها.

7.2.6 نتيجة

ليكن E و F فضاءين هيلبرتيّين و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E,F)$.

يكون $\operatorname{Im} u$ ($\operatorname{Im} u^{*}$ على التوالي) كثيفا في F (في E على التوالي) إذا وفقط إذا كان u^{*} (u على التوالي) متباينا.

إثبات

وبالفعل، إذا كان u^{*} متباينا فإنّ نواته تضحى مساوية $\{0\}$. وبذلك تصبح المساواة الأولى أعلاه:

$$(\operatorname{Im} u)^{\perp} = \{0\}.$$

وعليه:

$$(\operatorname{Im} u)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} u} = \{0\}^{\perp} = F.$$

وبالعكس، إذا كان $\operatorname{Im} u$ كثيفا في F كتبنا:

$$\overline{\mathrm{Im}\,u}=F \;\Rightarrow\; \overline{\mathrm{Im}\,u}^{\perp}=(\mathrm{Im}\,u)^{\perp}=F^{\perp}=\{0\}.$$

يكفي استحضار العلاقة الأولى في (6.2.6) للختم.

8.2.6 تعريف

ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$. نقول عن u إنّه **هيرميتيّ** (أو قرين نفسه) إذا طابق قرينه؛ ونقول عن u إنّه **ضد هيرميتيّ** إذا حقّق:

$$u^*=-u.$$

وفي الأخير، نقول عن u إنّه هيرميتيّ موجب إذا كان هيرميتيّا ومحقّقا:

$$\forall x\in E \quad \langle u(x),x\rangle \geq 0.$$

9.2.6 أمثلة

1) المؤثّر المطابق id_E في $\mathscr{L}(E)$ هيرميتيّ موجب ذلك لأنّ $id^*=id$ و:

$$\forall x\in E \quad \langle id(x),x\rangle=\langle x,x\rangle \geq 0.$$

2) كلّ تحاك u ذي نسبة حقيقيّة λ هيرميتيّ. ويكون هيرميتيّا موجبا إذا كان $0\leq\lambda$. وفعلا، لدينا $u^*=u$ و:

$$\forall x\in E \quad \langle u(x),x\rangle=\langle \lambda x,x\rangle=\lambda\langle x,x\rangle \geq 0.$$

3) المؤثّر الوارد في المثال الثالث من الطائفة (6.2.6) يكون هيرميتيّا إذا كانت الدالّة K حقيقيةً.

4) إذا كان u من $\mathscr{L}(E)$ كانت المؤثّرات:

$$u+u^*;\; i(u-u^*);\; u\circ u^*,$$

حينئذ هيرميتيّة. لدينا بداهة:

$$(u+u^*)^* = u^* + u^{**} = u^* + u,$$
$$(i(u-u^*))^* = -i(u^* - u^{**}) = i(u-u^*),$$
$$(u \circ u^*)^* = u^{**} \circ u^* = u \circ u^*.$$

5) إذا كان F فضاء شعاعيّا مغلقا من فضاء هيلبرتيّ E فإنّ الإسقاط العموديّ P_F على F يكون مؤثّرا هيرميتيّا.

وبالفعل، نعلم أنّه مهما يكن x و y من E يكون:

$$x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x);\ y = P_F(y) + P_{F^\perp}(y).$$

وعليه:

$$\langle P_F(x), y\rangle = \langle P_F(x), P_F(y) + P_{F^\perp}(y)\rangle = \langle P_F(x), P_F(y)\rangle,$$
$$\langle x, P_F(y)\rangle = \langle P_F(x) + P_{F^\perp}(x), P_F(y)\rangle = \langle P_F(x), P_F(y)\rangle.$$

ومنه:

$$\langle P_F(x), y\rangle = \langle x, P_F(y)\rangle = \langle x, P_F^*(y)\rangle.$$

إذن:

$$\forall\, y \in E \quad P_F(y) = P_F^*(y).$$

أي $P_F = P_F^*$.

10.2.6 قضية

ليكن E هيلبرتيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$. يكون u هيرميتيّا إذا وفقط إذا كان العدد $\langle u(x), x\rangle$ حقيقيّا من أجل كلّ x من E.

إثبات

هذه النتيجة مستوحاة من القضية (6.1.4). فإذا كان u هيرميتيّا كتبنا:

$$\forall x \in E \ \ \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\langle u(x), x\rangle}.$$

ومنه:

$$\langle u(x), x\rangle \in \mathbb{R}.$$

وبالعكس، إذا كان $\langle u(x), x\rangle$ حقيقيّا من أجل كلّ x من E فإنّه من أجل كلّ y من E نكتب:

$$\begin{aligned}\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x), x\rangle - \langle u(y), y\rangle &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle \\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle y, u^*(x)\rangle \\ &= \langle u(x), y\rangle + \overline{\langle u^*(x), y\rangle} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

وباستبدال y بِـ iy نحصل، بالمثل، على:

$$i\left(-\langle u(x), y\rangle + \overline{\langle u^*(x), y\rangle}\right) \in \mathbb{R}.$$

لنضع:

(1) $$\alpha = \langle u(x), y\rangle + \overline{\langle u^*(x), y\rangle} \in \mathbb{R},$$

(2) $$\beta = i\left(-\langle u(x), y\rangle + \overline{\langle u^*(x), y\rangle}\right) \in \mathbb{R}.$$

بضرب العلاقة (2) في i ينتج:

(3) $$i\beta = \langle u(x), y\rangle - \overline{\langle u^*(x), y\rangle}$$

نستخلص من هذه العلاقات أنّ:

$$\langle u(x), y\rangle = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta); \quad \overline{\langle u^*(x), y\rangle} = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) = \overline{\langle u(x), y\rangle}.$$

ومنه:

$$\langle u(x), y\rangle = \langle u^*(x), y\rangle \quad \forall\, x, y \in E.$$

إذن:

$$u(x) = u^*(x) \quad \forall\, x \in E;$$

أي:

$$u = u^*.$$

11.2.6 قضية

إذا كان u هيرميتيّا موجبا من $\mathscr{L}(E)$ فإنّ:

$$\forall\, x, y \in E \quad \left|\langle u(x), y\rangle\right| \le \sqrt{\langle u(x), x\rangle}\sqrt{\langle u(y), y\rangle}.$$

تمثّل هذه العلاقة متباينة كوشي . شوارز المعمّمة، لا يخرج برهانها عمّا كان عليه برهان القضيّة (10.1.4).

12.2.6 تعريف

نقول عن المؤثّر u من $\mathscr{L}(E)$ إنّه واحديّ إذا حقّق الشرطين التاليين:

1) $\forall x, y \in E \ \ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$

2) u غامر.

وبقراءة أخرى، يكون u واحديّا إذا كان غامرا ومحافظا على الجداءات السلّميّة. نستشفّ من هذا التعريف، أنّ كلّ مؤثّر واحديّ تقايس إذ أنّ:

$$\forall x \in E \ \ \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2 .$$

ومنه $\|u(x)\| = \|x\|$، وهو ما يضمن، كذلك، كون u متباينا ويجعله في الأخير تقابليّا.

13.2.6 قضية

يكون عنصر u من $\mathscr{L}(E)$ واحديّا إذا وفقط إذا تحقّق:

$$u^* = u^{-1}.$$

إثبات

إذا كان u واحديّا كتبنا:

$$\forall x, y \in E \ \ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^*(u(y))\rangle = \langle x, y\rangle.$$

ومنه $u^* u = id_E$؛ ولما كان u تقابليّا نتج $u^{-1} u = id_E$، ومنه $u^* = u^{-1}$.

وبالعكس، إذا كان $u^* = u^{-1}$، فإنّ:

$$\forall x, y \in E \ \ \langle x, y\rangle = \langle u^* u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle.$$

ولمّا كان u^{-1} موجودا تبيّن أنّ u غامر. إذن، u واحديّ.

14.2.6 نتيجة

مقلوب مؤثّر واحديٍّ في $\mathscr{L}(E)$ واحديٌّ مثله.

وبالفعل، لدينا $\left(u^{*}\right)^{-1}=\left(u^{-1}\right)^{*}$، ولكن $u^{*}=u^{-1}$، إذن:

$$\left(u^{-1}\right)^{*}=\left(u^{-1}\right)^{-1}=u.$$

15.2.6 تعريف

نقول عن مؤثّر u من $\mathscr{L}(E)$ إنّه مُسقط إذا تمتّع بالخاصيّتين التاليتين:

1) $u^{*}=u,$

2) $u^{2}=u.$

16.2.6 أمثلة

1) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و F فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا منه. يكون مؤثّر الإسقاط العموديّ P_F عندئذ مُسقطا. وبالفعل، علمنا من قبل أنّ P_F هيرميتيّ وأنّه إذا اقتصر على F طابق التطبيق المطابق.

2) نعتبر على الفضاء الهيلبرتيّ E فضاءين شعاعيّين جزئيّين مغلقين F و G وكذا المُسقطين P_F و P_G الملحقين بهما.

يكون المؤثّر $P_FP_G=P_F\circ P_G$ مُسقطا إذا وفقط إذا تحقّق:

$$P_FP_G=P_GP_F.$$

وبالفعل، لدينا:

$$P_FP_G=(P_FP_G)^{*}=P_G{}^{*}P_F{}^{*}=P_GP_F.$$

وبالعكس، لدينا:

$$\begin{aligned}(P_FP_G)(P_FP_G)&=(P_FP_G)(P_GP_F)=P_FP_GP_GP_F\\&=P_FP_GP_F=P_FP_FP_G=P_FP_G.\end{aligned}$$

$$(P_F P_G)^* = P_G{}^* P_F{}^* = P_G P_F = P_F P_G.$$

3) إذا كان u مُسقطا من $\mathscr{L}(E)$ أضحى التطبيق $id_E - u$ مسقطا كذلك. لدينا بهذا الشأن:

$$(id_E - u)^* = id_E{}^* - u^* = id_E - u,$$

$$(id_E - u)^2 = id_E - 2u\, id_E + u^2 = id_E - 2u + u = id_E - u.$$

17.2.6 تعريف

نقول عن مؤثّر u من $\mathscr{L}(E)$ إنّه **ناظميّ** إذا تبادل مع قرينه، أي:

$$u^* u = u u^*.$$

من الواضح أنّ المؤثّرات الهيرميتيّة وضدّ الهيرميتيّة والواحديّة أنماط لمؤثّرات ناظميّة.

3.6 طيف مؤثّر

1.3.6 تعريف

ليكن E فضاء نظيميّا ذا بعد منته و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$. نقول عن عدد عقديّ λ إنّه **قيمة ذاتيّة** لِـ u إذا كانت للمعادلة $u(x) = \lambda x$ حلول غير معدومة.

إذا رمزنا لمجموعة هذه الحلول بِـ S_λ تبيّن لنا من هذا التعريف أنّ:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{x \in E : u(x) = \lambda x\} = \{x \in E : (u - \lambda id_E)(x) = 0\} \\ &= Ker(u - \lambda\, id_E). \end{aligned}$$

ويسمّي كلّ عنصر من S_λ شعاعا ذاتيّا ملحقا بِ λ، بينما يسمّى الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ الذاتيّ الملحق بِ λ.

تسمّى مجموعة القيم الذاتيّة الملحقة بالمؤثّر u **طيف** u. وتسمّى القيم الأخرى، أي تلك التي لا تتمتّع من أجلها المعادلة السابقة بأيّ حلّ غير معدوم، بالقيم النظاميّة للمؤثّر u.

وبعبارة أخرى، تكون λ قيمة نظاميّة إذا كان المؤثّر $u-\lambda id_E$ قابلا للقلب؛ وهو ما يجعل المؤثّر المقلوب $(u-\lambda id_E)^{-1}$ معرّفا ومستمرّا على E كلّه. في الخلاصة لدينا:

1) إذا كان u من $\mathscr{L}(E)$، حيث بعد E منته، وكان ت λ قيمة ذاتي لِ u فإنّ المؤثّر $u-\lambda id_E$ لا يقبل القلب.

2) وإذا كان $u-\lambda id_E$ موجودا ومعرّفا على E كلّه خلصنا إلى أنّ λ قيمة نظاميّة؛ إذن، كلّ قيمة λ تكون إمّا ذاتيّة وإمّا نظاميّة بالنسبة لِ u.

إنّ الأمر خلاف ما تقدّم في حالة كون بعد E غير منته. فإلى جانب الحالتيْن الموصوفتين يوجد هناك احتمال ثالث وهو:

3) المؤثّر المقلوب $(u-\lambda id_E)^{-1}$ موجود (أي أنّ المعادلة $u(x)=\lambda x$ لا تتمتّع بحلّ غير معدوم) بيد أنّه غير معرّف على E كلّه (وقد لا يكون مستمرّا).

لنعتمد الترميزة الموالية. نقول عن λ إنّه **نظاميّ** بالنسبة للمؤثّر u المعرّف على فضاء بناخيّ E إذا كان المؤثّر $R_\lambda=(u-\lambda id_E)^{-1}$ المسمّى **حالّة** u، معرّفا ومستمرّا على الفضاء E كلّه. تسمّي مجموعة جميع القيم الأخرى لِ λ بطيف u.

إنّ طيف u يضمّ كلّ القيم الذاتية، ذلك أنّه إذا كان $u(x)-\lambda x=0$ من أجل عنصر غير معدوم x فإنّه لن يكون هناك وجود للمؤثّر $(u-\lambda id_E)^{-1}$. تسمّى مجموعة القيم الذاتيّة لِـ u **بالطيف النقطيّ**، في حين يسمّي الجزء الباقي من الطيف، أي الجزء المؤلّف من العناصر λ التي من أجلها يكون المؤثّر $(u-\lambda id_E)^{-1}$ موجودا وغير معرّف على كامل E، **بالطيف المستمرّ**.

هكذا، **تكون كلّ نقطة λ من $\mathbb{C}$ إمّا قيمة نظاميّة وإمّا قيمة ذاتية وإمّا نقطة من الطيف المستمرّ**.

إنّ امتلاك طيف مستمرّ من قبل مؤثّر هي التي تجعل نظرية المؤثّرات في فضاء ذي بعد غير منته تختلف في مجملها عن مثيلتها في فضاء ذي بعد منته. ففي هذه الأخيرة تتطابق مجموعة القيم الذاتية مع الطيف المستمرّ؛ أي أنّ نقطة λ تكون إمّا قيمة نظاميّة وإمّا قيمة ذاتية.

2.3.6 أمثلة

1) للمؤثّر المطابق id_E من $\mathscr{L}(E)$ قيمة ذاتيّة واحدة وهي $\lambda=1$.

وبالفعل، فالمعادلة:

$$id_E(x)=\lambda x,$$

تقبل حلولا غير معدومة.

2) لنعتبر في $\mathscr{L}(\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ المؤثّر u المعرّف على هذا النحو:

$$u(x)=(0,x_1,\dots,x_n,\dots);$$

حيث $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$.

من الواضح أنّه مهما يكن λ من $\mathbb{C}$ ومهما يكن $x \neq 0$، لدينا:

$$u(x) = (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \neq \lambda(x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots).$$

وعليه، فهذا المؤثّر لا يتمتّع بأيّة قيمة ذاتيّة. ومع ذلك فإنّ طيفه غير خال إذ توجد عناصر λ التي من أجلها لا يكون المؤثّر $u - \lambda id_E$ قابلا للقلب. فعلى سبيل المثال، إذا اعتبرنا $\lambda = 0$ وجدنا أنّ المقلوب u^{-1} مستمرّ غير أنّه لا يكون معرّفا على $\mathscr{L}(\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ كلّه. إنّه معرّف على الفضاء الجزئيّ $x_1 = 0$. نستخلص أنّ $\lambda = 0$ نقطة من الطيف المستمرّ لِـ u.

3) نزوّد الفضاء $E = \mathscr{C}\left([a,b], \mathbb{C}\right)$ بنظيم التقارب المنتظم ونعرّف عليه المؤثّر $u : E \to E$:

$$f \mapsto u(f) / u(f)(x) = x\, f(x).$$

نكتب عندئذ:

$$(u - \lambda\, id_E)(f)(x) = (x - \lambda)\, f(x) = 0.$$

إنّ المؤثّر $u - \lambda id_E$ قابل للقلب، ذلك لأنّ المساواة $(x - \lambda)\, f(x) = 0$ تستدعي أن تكون الدالّة المستمرّة f مطابقة الصفر؛ غير أنّه من أجل كلّ λ من $[a,b]$ يكون المقلوب $(u - \lambda\, id_E)^{-1}$ المعطى بواسطة الصيغة:

$$(u - \lambda\, id_E)^{-1}(f)(x) = \frac{1}{x - \lambda}\, f(x),$$

غير معرّف على كلّ E ولا يكون مستمرّا. هكذا يكون المؤثّر u متمتّعا بطيف مستمرّ يطابق المجال $[a,b]$ كلّه في حين لا يتمتّع بأيّة قيمة ذاتية.

3.3.6 مبرهنة

إذا كان E فضاء بناخيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ فإنّ مجموعة قيم u

النظاميّة تشكّل عندئذ جزءا مفتوحا من .

إثبات

إذا كانت λ قيمة نظاميّة فإنّ المؤثّر المقلوب $(u-\lambda\, id_E)^{-1}$ يكون معرّفا ومستمرّا على E كلّه. فمن أجل $0<\varepsilon$ (نفترضه صغرا بقدر كاف) يكون المؤثّر $(u-(\lambda+\varepsilon)id_E)^{-1}$ معرّفا ومستمرّا على E كلّه، وهذا، طبقا للمبرهنة (5.1.6). وعليه، يكون العدد $\lambda+\varepsilon$ قيمة نظاميّة كذلك. نستخلص أنّ الكرة المفتوحة $B(\lambda,\varepsilon)$ من مكوّنة من قيم نظاميّة لِـ u. وعليه، فإنّ المجموعة المذكورة جوار لكلّ نقاطها. إنّها مفتوحة إذن.

4.3.6 نتيجة

إذا كان E فضاء بناخيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ فإنّ طيف u يكون عندئذ جزءا مغلقا من (بل متراصّا).

وبالفعل، فالطيف المذكور متمّمة لمجموعة القيم النظاميّة المفتوحة. إنّه مغلق إذن.

5.3.6 مبرهنة

ليكن E فضاء بناخيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$. إذا كان λ عددا مقيّدا بالشرط $|\lambda|<\|u\|$، فإنّه يكون حينئذ قيمة نظاميّة لِـ u.

إثبات

من الواضح أنّ:

$$u-\lambda\, id_E=-\lambda\left(id_E-\frac{1}{\lambda}u\right).$$

وعليه:

$$(u-\lambda\, id_E)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(id_E-\frac{1}{\lambda}u\right)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}u^k.$$

وذلك طبقا للمبرهنة (4.1.6). بما أنّ $|\lambda|<\|u\|$ فإنّ السلسلة $-\frac{1}{\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda^k}u^k$ تكون متقاربة في $\mathscr{L}(E)$ وتعرّف مؤثّرا مستمرّا على E بأكمله. إذن، $u-\lambda id_E$ قابل للقلب، أي أنّ λ قيمة نظاميّة.

6.3.6 نتيجة

إنّ طيف مؤثّر u من $\mathscr{L}(E)$ محتوى في القرص $B(0,\|u\|)$ ذي المركز 0 ونصف القطر $\|u\|$ في $\mathbb{C}$.

وبالطبع، فالطيف المذكور يشكّل متمّمة لمجموعة القيم النظاميّة التي بيّنت المبرهنة السابقة أنّها مفتوحة.

7.3.6 قضية

إذا كان E فضاء هيلبرتياً و u من $\mathscr{L}(E)$ وكانت λ قيمة ذاتية لِ u فإنّ $\overline{\lambda}$ تضحى قيمة ذاتية لقرينه.

إثبات

لدينا:

$$\lambda\langle x,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\langle u(x),x\rangle=\langle x,u^*(x)\rangle=\langle x,\overline{\lambda}x\rangle.$$

ومنه:

$$u^*(x)=\overline{\lambda}x.$$

8.3.6 نتيجة

إذا كان E فضاء هيلبرتيّا و u هيرميتيّا من $\mathscr{L}(E)$ فإنّ القيم الذاتية لِـ u تكون حقيقيّة.

إثبات

ليكن u هيرميتيّا و λ قيمة ذاتيّة له. نكتب عندئذ:

$$\lambda\langle x,x\rangle=\langle u(x),x\rangle=\langle x,u(x)\rangle=\langle x,\lambda x\rangle=\overline{\lambda}\langle x,x\rangle.$$

ولمّا كان x غير معدوم نتجت المساواة المنتظرة $\lambda=\overline{\lambda}$.

9.3.6 قضية

إنّ الأشعّة الذاتية الملحقة بقيم ذاتية متمايزة لمؤثّر هيرميتيّ u من $\mathscr{L}(E)$ متعامدة.

إثبات

لتكن λ و μ قيمتين ذاتيّتين مختلفتين لِـ u وليكن x و y شعاعين ذاتيّين ملحقين بهما على التوالي. نكتب عندئذ:

$$\lambda\langle x,y\rangle=\langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle=\langle x,\mu x\rangle=\mu\langle x,y\rangle.$$

ومنه:

$$(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle=0.$$

ولمّا كان $\lambda\neq\mu$ اتّضح أنّ $\langle x,y\rangle=0$ أي أنّ x و y متعامدان.

4.6 المؤثّرات المتراصّة

1.4.6 تعريف

ليكن E و F فضاءين نظيميّين و u مؤثّر من $\mathscr{L}(E,F)$. نقول عن u إنّه ذو **مرتبة منتهيّة** إذا كان بعدُ صورته $\operatorname{Im} u$ منتهيا.

نستخلص من هذا التعريف أنّه إذا كان بعد F منتهيّا فإنّ كلّ مؤثّر من $\mathscr{L}(E,F)$ يضحى ذا مرتبة منتهية.

2.4.6 قضية

إنّ لمجموعة المؤثّرات ذات مرتبات منتهية بنية فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathscr{L}(E,F)$.

إثبات

ليكن u و v مؤثّرين ذوي مرتبتين منتهيتين m و n على التوالي. وليكن λ سلّميّا من K؛ لدينا بكلّ وضوح:

$$\dim((u+v)(E)) \le n+m,$$
$$\dim((\lambda u)(E)) \le n.$$

وهو ما ينهي الردّ. نذكّر بأنّنا رمزنا بِـ dim للفظ " بُعد ".

3.4.6 قضية

ليكن E و F فضاءين هيلبرتيّين. إنّ لقرين مؤثّر ذي مرتبة منتهية من $\mathscr{L}(E,F)$ نفس المرتبة المنتهية.

إثبات

ليكن u مؤثّرا مرتبته n. إنّ مقصوره على الجزء $(Ker\, u)^{\perp}$ يشكّل تقابلا على $\operatorname{Im} u$. وبالفعل، فهو واضح التباين وإنّه غامر لأنّ:

$$E = Ker\,u \oplus (Ker\,u)^{\perp}.$$

ولمّا كان $(Ker\,u)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,u^*}$ (القضية (6.2.6)) فإنّ $\overline{\mathrm{Im}\,u^*}$ يضحى ذا بعد n. وعليه، يكون:

$$\dim \mathrm{Im}\,u^* \leq n = \dim \mathrm{Im}\,u.$$

يترتّب عن هذه النتيجة أنّ:

$$n = \dim \mathrm{Im}\,u = \dim \mathrm{Im}\,u^{**} \leq \dim \mathrm{Im}\,u^* \leq n.$$

إذن:

$$\dim \mathrm{Im}\,u = \dim \mathrm{Im}\,u^* = n.$$

4.4.6 تعريف

ليكن E و F فضاءين نظيميّين و u تطبيقا خطّيّا من E نحو F. نقول عن u إنّه **مؤثّر متراصّ** إذا حوّل كلّ جزء محدود من E إلى جزء متراصّ نسبيّا من F.

إذا استحضرنا أنّ كلّ جزء محدود A من E محتوى في كرة Ω فإنّ التراصّ النسبيّ للجزء $u(\Omega)$ يستلزم التراصّ النسبيّ للجزء $u(A)$. ولمّا كان يُحصل على كلّ كرة Ω انطلاقا من كرة الوحدة $B(0,1)$ بانسحاب وتحاك، وهما تطبيقان مستمرّان يحفظان التراصّ، فإنّ التعريف أعلاه يأخذ الصيغة الأبهى التالية:

5.4.6 تعريف

يكون مؤثّر u من $L(E,F)$ متراصّا إذا كانت صورة كرة الوحدة لِـ E متراصّة نسبيّا في F.

إذا وظفنا إحدى خصائص التراص الأساسية أمكننا وضع هذا التعريف المكافئ:

6.4.6 تعريف

يكون u من $L(E,F)$ متراصّا إذا حقّق الخاصيّة " خ " الموالية:

(خ): من أجل كلّ متتالية $(x_n)_n$ من كرة الوحدة $B(0,1)$ من E يمكن استخراج متتالية $(x_{n_k})_k$ يحوّلها u إلى متتالية متقاربة $(u(x_{n_k}))_k$ في F.

7.4.6 أمثلة

1) إذا كان بعد E منتهيا فإنّ التطبيق المطابق id_E من $\mathscr{L}(E)$ يشكّل مؤثّرا متراصّا؛ ذلك لأنّ كرة الوحدة متراصّة نسبيّا (أو متراصّة إن كانت مغلقة). أمّا إذا كان بعد E غير منته فإنّ نفس التطبيق المطابق id_E يضحى غير متراصّ (مبرهنة ريس).

وبالطبع، فالحكم الأوّل ينطبق على كلّ تطبيق مستمرّ آخر من $\mathscr{L}(E,F)$.

2) إذا كان u مؤثّر ذا مرتبة منتهيّة من $\mathscr{L}(E,F)$ فإنّه يكون متراصّا؛ ذلك أنّ صورة كرة الوحدة $B(0,1)$ وفق u تكون محدودة في $\operatorname{Im}u$ ذي البعد المنتهي. إنّها متراصّة نسبيّا إذن في $\operatorname{Im}u$. وعليه، فهي تظلّ كذلك في F، فضاء الاستقرار.

نستخلص أنّه إذا كان F فضاء ذا بعد منته كان كلّ عنصر من $\mathscr{L}(E,F)$ متراصّا.

3) إذا كان E هيلبرتيّا و F فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا فإنّ مؤثّر الإسقاط P_F يكون متراصّا إذا وفقط إذا كان F ذا بعد منته. (وضح ذلك.)

8.4.6 قضية

كلّ مؤثّر متراصّ مستمرّ.

إثبات

إذا كان u مؤثّرا متراصّا على فضاء نظيميّ E وكانت $B(0,1)$ كرة الوحدة المفتوحة لهذا الأخير، وجب أن تكون الملاصقة متراصّا. وعليه، تكون الصورة $u\left(B(0,1)\right)$ محدودة؛ أي:

$$\exists C > 0 / \forall x \in B(0,1) \ \ \|u(x)\| \leq C.$$

إذن u مستمرّ.

9.4.6 قضية

ليكن E و F فضاءين بناخيّين و σ مجموعة كلّ المؤثّرات المتراصّة من E نحو F. تكون σ عندئذ فضاء شعاعيّا جزئيّا مغلقا من $\mathscr{L}(E,F)$.

إثبات

لنبيّن أنّ σ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathscr{L}(E,F)$. ليكن u و v عنصرين من σ و B كرة الوحدة من E. يكون الجزءان $u(B)$ و $v(B)$ عندئذ متراصّين نسبيّا في F. لتكن $(x_n)_n$ متتالية من B. يمكن عند ذلك أن نستخرج منها متتالية جزئيّة $(x_n^{'})_n$ بحيث تكون من أجلها المتتالية $(u(x_n^{'}))_n$ متقاربة في F. ويمكن بالمثل استخراج متتالية $(x_n^{''})_n$ من $(x_n^{'})_n$ بحيث تكون المتتالية $(v(x_n^{''}))_n$ متقاربة كذلك. يترتّب عن هذا أنّ المتتالية $(u(x_n^{''}))_n + (v(x_n^{''}))_n$ متقاربة في F.

هكذا، يكون من أجل كلّ متتالية $(x_n)_n$ من B ، ممكنا استخراج متتالية $(x_n^{''})_n$ بحيث تكون المتتالية $((u+v)(x_n^{''}))_n$ متقاربة في F . إذن، $u+v$ مؤثّر متراصّ.

وبالمثل، يتبيّن أنّه من أجل كلّ λ من K يكون المؤثّر λu متراصّا، وهو ما يختم الجزء الأوّل من المطلوب.

لنبيّن حاليّا أنّ σ مغلقة.

نعتبر من أجل ذلك متتالية متقاربة $(u_n)_n$ من مؤثّرات متراصّة من σ ولتكن u نهايتها في $\mathscr{L}(E,F)$. يكفي أن نبيّن أنّ المؤثّر النهاويّ u متراصّ. لتكن متتالية $(x_n)_n$ من كرة الوحدة B لـ E . نحاول أن نستخرج منها متتالية جزئيّة يحوّلها u إلى متتالية متقاربة في F .

بما أنّ u_1 متراصّ فإنّه يمكن استخراج متتالية $(x_n^1)_n$ من $(x_n)_n$ بحيث تكون المتتالية $(u_1(x_n^1))_n$ متقاربة في F .

وبالمثل يخوّل لنا تراص u_2 استخراج متتالية $(x_n^2)_n$ من $(x_n^1)_n$ بحيث تكون المتتالية $(u_2(x_n^2))_n$ متقاربة في F . وبالطريقة نفسها، نختار من $(x_n^2)_n$ متتالية جزئيّة $(x_n^3)_n$ يحوّلها u_3 المتراص إلى متتالية متقاربة $(u_2(x_n^3))_n$ في F .

يمكن هكذا، وشيئا فشيئا، أن نواصل العمليّة لتصبح لدينا متتالية من متتاليات مستخرجة:

$$
\begin{array}{l}
x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots \\
x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots \\
\vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\
x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n, \ldots \\
\vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots
\end{array}
$$

لنعتبر في الأخير، المتتالية القطريّة $(x_n^n)_n = (x_1^1, x_2^2, ..., x_n^n, ...)$. إنّ كلّ واحد من المؤثّرات u_1، u_2، ...، u_n، ... يحوّلها إلى متتالية متقاربة. لنبيّن أنّ u يحوّلها، بدوره، إلى متتالية متقاربة. ولمّا كان F بناخيّا اكتفينا بإثبات أنّ $(u(x_n^n))_n$ متتالية كوشيّة. لدينا:

$$\|u(x_n^n) - u(x_m^m)\| \leq \|u(x_n^n) - u_k(x_n^n)\| + \|u_k(x_n^n) - u_k(x_m^m)\| + \\ + \|u_k(x_m^m) - u(x_m^m)\|. \qquad (*)$$

لنختر k بحيث:

$$\|u - u_k\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

ثمّ لنختر n_0 بحيث تكون لدينا، من أجل كلّ دليلين m و n يفوقان n_0، هذه المتباينة:

$$\|u_k(x_n^n) - u_k(x_m^m)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

إنّ هذا أمر مشروع لكون المتتالية $(u_k(x_n^n))_n$ متقاربة. تحت هذه الشروط نستخلص من المتباينة (*) أعلاه أنّ:

$$\|u(x_n^n) - u(x_m^m)\| \leq \varepsilon,$$

من أجل عناصر m و n كبيرة بقدر كاف. إنّه المطلوب.

10.4.6 نتيجة

إذا كان E و F فضاءين بناخيّين فإنّ كلّ نهاية في $\mathscr{L}(E,F)$ لمتتالية من مؤثّرات ذات مرتبات منتهية مؤثّر متراصٌّ.

إثبات

واضح ! كلّ مؤثّر ذي مرتبة منتهية متراصّ.

11.4.6 مبرهنة

ليكن E فضاء بناخيّا و F فضاء هيلبرتيّا. فلكي يكون مؤثّر u من $\mathscr{L}(E,F)$ متراصّا يلزم ويكفي أن يكون نهاية لمؤثّرات ذات مرتبات منتهية.

إثبات

تفيد هذه المبرهنة أنّ عكس النتيجة السابقة صحيح في حالة كون F هيلبرتيّا. وبالطبع، فإنّ كفاية الشرط واضحة. نكتفي بإماطة الغطاء عن لزوم الشرط.

ليكن u مؤثّرا متراصّا من $\mathscr{L}(E,F)$ حيث E فضاء بناخيّ و F فضاء هيلبرتيّ ولتكن B كرة الوحدة من E. يأتي أنّ $u(B)$ محدود كليّا في F. وعليه، فإنّ $u(B)$ يقبل تغطية منتهية مؤلّفة من كرات مراكزها $u(x_i)_{1\le i\le m}$ وذات نصف قطر $\frac{\varepsilon}{2}$.

ليكن M_ε الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ المولّد بواسطة العناصر $(y_i = u(x_i))_{1\le i\le m}$. إنّه مغلق. وليكن P_{M_ε} مؤثّر الإسقاط العموديّ على M_ε. إن P_{M_ε} ذو مرتبة منتهية بكلّ تأكيد. لنضع:

$$\varepsilon = \frac{1}{n}, \quad P_{M_\varepsilon} = P_{M_n}, \quad u_n = P_{M_n} u.$$

يتّضح لنا أنّ u_n مؤثّر ذو مرتبة منتهية. لنقيّم الفرق $\|u-u_n\|$. لدينا:

$$\|u-u_n\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|u(x)-u_n(x)\|.$$

ولمّا كان $u(x)$ عنصرا من $u(B)$ فإنّه يوجد عنصر y_i $(i=1,2,\ldots,m)$ بحيث:

$$\|u(x)-y_i\| \leq \frac{1}{2n}.$$

من جهة أخرى، نكتب:

$$u(x)-u_n(x)=u(x)-u(x_i)+u(x_i)-u_n(x_i)+u_n(x_i)-u_n(x).$$

ولكن:

$$u(x_i)-u_n(x_i)=u(x_i)-P_{M_n}(u(x_i))=u(x_i)-u(x_i)=0,$$

إذن:

$$\begin{aligned}\|u(x)-u_n(x)\| &\leq \|u(x)-u(x_i)\|+\|u_n(x_i)-u_n(x)\|\\ &\leq \frac{1}{2n}+\|P_{M_n}\|\|u(x_i)-u(x)\| \leq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

يترتّب عن ذلك أنّ:

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\|u(x)-u_n(x)\|=\|u-u_n\|\leq \frac{1}{n}.$$

وعليه، $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ ؛ وهو ما يختم البرهان.

12.4.6 نتيجة

قرين كلّ مؤثّر متراصّ متراصّ.

إثبات

بيّنت المبرهنة أعلاه أنّ كلّ مؤثّر متراصّ نهاية لمتتالية من مؤثّرات ذات مرتبات منتهية. إنّ الأمر يظلّ كذلك بالنسبة للقرين u^*، ويردّ ذلك إلي أنّ u و u^* يتمتّعان بنظيمين متساويّين.

13.4.6 قضية

إذا كان u و v مؤثّرين من $\mathscr{L}(E)$، أحدهما محدود والآخر متراصّ، كان $u\circ v$ و $v\circ u$ عندئذ متراصّين.

إثبات

لنفترض u محدودا و v متراصّا. تكون صورة كرة الوحدة B وفق u محدودة. ولمّا كان v متراصا حوّل $u(B)$ إلى جزء متراص نسبيّا. نخلص من ذلك إلى أنّ $v\circ u$ مؤثّر متراص.

وبالطبع، فإنّ $u\circ v$ يعالج بالمثل.

14.4.6 نتيجة

إنّ مقلوب مؤثّر متراصّ u من $\mathscr{L}(E)$ لا يمكن أن يكون مستمرّا في فضاء ذي بعد غير منته.

إثبات

لو كان العكس ممكنا لكان $u\circ u^{-1}=id_E$ مؤثّرا متراصّا، تبعا للقضية السابقة؛ غير أنّ هذا مستبعد الوقوع بمقتضى مبرهنة ريس.

15.4.6 مبرهنة

ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا هيرميتيّا متراصّا من $\mathscr{L}(E)$. إنّ أحد العددين $\|u\|$ أو $-\|u\|$ يكون عندئذ قيمة ذاتية لـ u.

إثبات

نذكّر بأنّ:

$$\sup_{\|x\|\le 1}\|u(x)\| = \|u\| = \sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|.$$

يسمح لنا تعريف الحدّ الأعلى بالجزم بوجود متتالية $(x_n)_n$ من E، مع $\|x_n\|=1$ بحيث:

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty}\|u(x_n)\|.$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|, \quad \forall\, x \in E.$$

وعليه:

$$\|u(x)\|^2 - \|u\|^2\,\|x\|^2 \leq 0, \quad \forall\, x \in E;$$

أو بكتابة أخرى:

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 - \|u\|^2\,\|x\|^2 &= \langle u(x), u(x)\rangle - \|u\|^2\,\langle x, x\rangle \\ &= \langle x, u^2(x)\rangle - \|u\|^2\,\langle x, x\rangle \\ &= \langle x, \left(u^2 - \|u\|^2\right)(x)\rangle \leq 0, \quad \forall\, x \in E;\end{aligned}$$

وإذا اعتبرنا التطبيق $\varphi : E \times E \to \mathrm{K}$:

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = -\langle x, \left(u^2 - \|u\|^2\right)(y)\rangle \leq 0,$$

وجدناه شكلا هيرميتيّا موجبا. نستعين بمتباينة كوشي ـ شوارز للحصول على:

$$\left|\langle x, \left(u^2 - \|u\|^2\right)(x_n)\rangle\right|^2 \leq \left(\langle x, (u^2 - \|u\|^2)(x)\rangle\right)\left(\langle x_n, (u^2 - \|u\|^2)(x_n)\rangle\right).$$

إذا توقّفنا هنا قليلا وتمعنّا في المقدار $\langle x_n, (u^2 - \|u\|^2)(x_n)\rangle$ وجدناه ينتهي إلى الصفر لمّا يؤول n إلى $+\infty$. وبالفعل:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle x_n, (u^2 - \|u\|^2)(x_n)\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left(\langle x_n, u^2(x_n)\rangle - \langle x_n, x_n\rangle\,\|u\|^2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\langle u(x_n), u(x_n)\rangle - \|u\|^2\,\|x_n\|^2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\|u(x_n)\|^2 - \|u\|^2\,\|x_n\|^2\right) = 0.\end{aligned}$$

يأتي إذن:

$$\lim_{n\to\infty}\langle x, (u^2 - \|u\|^2)(x_n)\rangle = 0, \quad \forall\, x \in E.$$

وبالطبع، فهذه النتيجة تظلّ صحيحة إذا ما استبدلنا x بـ $u(x)$، أي:

$$\lim_{n\to\infty}\langle u(x),(u^2-\|u\|^2)(x_n)\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,(u^2-\|u\|^2)u(x_n)\rangle=0. \qquad (*)$$

إنّ كون u متراصّا والمتتالية $(x_n)_n$ من غلاف الوحدة الكرويّ يضمنان وجود متتالية مستخرجة $(x_n^{'})_n$ من $(x_n)_n$ بحيث:

$$\lim_{n\to\infty}u(x_n^{'})=y\neq 0.$$

وإذا عدنا بهذا إلى المتباينة (*) كتبنا أيضا:

$$\langle x,(u^2-\|u\|^2)(y)\rangle=0, \quad \forall\, x\in E.$$

وعليه:

$$(u^2-\|u\|^2)(y)=0,$$

أي أنّ:

$$\left(u-\|u\|\right)\left(u-\|u\|\right)(y)=0.$$

ولمّا كان y غير معدوم تبيّن أنّ:

$$\begin{cases} u(y)-\|u\|\,y=0, \\ \text{أ} \quad \text{و} \\ u(y)+\|u\|\,y=0; \end{cases}$$

وهو ما يعني أنّ $\|u\|$ أو $-\|u\|$ قيمة ذاتية لـ u.

نختم هذا الفصل بمبرهنة هامّة تحمل عادة تسمية المبرهنة الطيفيّة. تفيد هذه المبرهنة أنّ عائلة الفضاءات الجزئيّة الذاتية الملحقة بمؤثّر هيرميتيّ متراصّ يمكن أن تكون كلّيّة في الفضاء الهيلبرتيّ E. قبل أن نأخذ في تفصيل هذا الأمر، لابأس أن نستحضر بعضا من المزايا السابقة التي تتمتّع بها المؤثّرات الهيرميتيّة المتراصّة. فمجموعة القيم الذاتية الملحقة بهذا الصنف من المؤثّرات غير خالية، وكلّ عنصر منها حقيقيّ.

وعلاوة على ذلك، فإنّ عائلة الأشعّة الذاتية متعامدة مثنى مثنى.

16.4.6 مبرهنة

ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا هيرميتيّا متراصّا من $\mathscr{L}(E)$ ولتكن Λ مجموعة القيم الذاتية لـ u و $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة الفضاءات الجزئيّة الذاتية الملحقة بها. يكون لدينا عندئذ:

1) $$\forall\lambda\in\Lambda \quad u(E_\lambda)\subset E_\lambda,$$

2) $$E=\overline{[(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]}.$$

إثبات

إنّ البند الأوّل واضح. وبالفعل، إذا كان x عنصرا من E_λ، فإنّ:

$$u(u(x))=u(\lambda x)=\lambda u(x).$$

وعليه، فالعنصر $u(x)$ ينتمي إلى E_λ.

لنتوقّف عند البند الثاني. لنشر للفضاء الشعاعيّ المولّد بواسطة العائلة $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ بـ $M=[(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$. يتّضح ممّا سبق أنّ:

$$u(M)\subset M.$$

ومنه:

$$u(\overline{M})\subset\overline{M}.$$

من جهة أخرى لدينا:

$$E=\overline{M}\oplus M^\perp.$$

يكفي إذن أن نبيّن أنّ $M^\perp=\{0\}$. نلاحظ في البداية أنّ:

$$u(M^\perp)\subset M^\perp.$$

وبالفعل، إذا كان x من $M^\perp$ و y من M فإنّ:

$$\langle x,u(y)\rangle=\langle u(x),y\rangle=0.$$

ومنه، $u(x)$ عنصر من $M^{\perp}$.

إذا افترضنا الآن، أنّ $M^{\perp} \neq \{0\}$ وجدنا أنّ مقصور u على $M^{\perp}$ مؤثّر هيرميتيّ متراصّ كذلك. وطبقا للقضية السابقة يكون هذا المقصور متمتّعا بقيمة ذاتيّة غير معدومة. وعليه، فهو يمتلك إذن، شعاعا ذاتيّا x من $M^{\perp}$. ولكن الأشعّة الذاتية للمقصور هي، بكلّ تأكيد، أشعّة لـ u كذلك. نخلص من هذا إلى أنّ x عنصر من التقاطع $M \cap M^{\perp} = \{0\}$، أي أنّ x معدوم، وهذا يتنافى مع كون x غير معدوم تعريفا.

يمكن في الواقع الذهاب إلى أبعد من هذا. سوف يكون مشروعا انتقاء عائلة متعامدة متجانسة من أشعّة ذاتية $(e_{\alpha})_{\alpha \in L \subset \Lambda}$ تسمح بكتابة كلّ عنصر x من الفضاء E على الشكل $x = \sum_{\alpha \in L} a_{\alpha} e_{\alpha} + y$، حيث y عنصر من الفضاء الجزئيّ:

$$S = \left[(e_{\alpha})_{\alpha \in L} \right]^{\perp} \subset Ker\, u.$$

وبأخذ صورة x وفق u الهيرميتيّ المتراصّ نجد:

$$u(x) = \sum_{\alpha \in L} a_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha}.$$

تفيد هذه النتيجة، في الخلاصة، أنّه من أجل كلّ مؤثّر هيرميتيّ متراصّ على فضاء هيلبرتيّ E يوجد أساس متعامد متجانس لـ E يكون مؤلّفا من الأشعّة الذاتيّة للمؤثّر المذكور. وبالفعل، فلكي يتمّ الحصول على مثل هذا الأساس يكفي إتمام جملة الأشعّة الذاتية $(e_{\alpha})_{\alpha \in L}$ بأساس متعامد متجانس للفضاء الجزئيّ $S = \left[(e_{\alpha})_{\alpha \in L} \right]^{\perp}$، الذي يحوّله u إلى $\{0\}$.

إنّ هذه النتيجة شبيهة بالمبرهنة المتعلّقة بتبسيط مصفوفة مؤثّر هيرميتيّ في فضاء نظيميّ ذي بعد منته إلى الشكل القطريّ في أساس متعامد متجانس كما هو متداول ومدوّن في مراجع الجبر القاعديّة.

انتهى بفضل وحمد الله ربّ العالمين، هذا المساء من يوم 22 أوت 2010 .

5.6 مسائل محلولة

1) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ يحقّق:

1) $u - iid_E$ قابل للقلب؛

2) $(u + i\,id_E)(u - i\,id_E)^{-1}$ واحديّ.

اثبت عندئذ أنّ u هيرميتيّ.

2) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا هيرميتيّا موجبا من $\mathscr{L}(E)$.

1) برهن أنّ:

$$\forall\, x \in E \quad \|u(x)\|^4 \le \langle u(x), x\rangle \langle u^2(x), u(x)\rangle.$$

2) استخلص أنّ:

$$\|u\|_{\mathrm{L}(E)} \le \sup_{\|x\|\le 1} \langle u(x), x\rangle.$$

3) (مبرهنة فون نومان [1]) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ بحيث $\|u\| \leq 1$. نعتبر المجموعة:

$$E_1 = \{x \in E / u(x) = x\}.$$

1) اثبت أنّ E_1 فضاء شعاعيّ جزئيّ مغلق من E.

2) ليكن x عنصرا من E_1. تأكّد من أنّ:

$$\|x\|^2 = \langle x, u^*(x) \rangle.$$

3) استنتج أنّ:

أ. $\forall x \in E_1 \quad \|u^*(x)\| = \|x\|,$

ب. $\forall x \in E_1 \quad u^*(x) = x,$

ج. $E_1 = Ker(id - u^*).$

4) بيّن أنّ:

أ. $E_1 = ((id - u)(E))^{\perp},$

ب. $E = E_1 \oplus \overline{(id - u)(E)}.$

5) من أجل كلّ x من E نضع:

$$v_n(x) = \frac{1}{n+1}(x + u(x) + u^2(x) + \ldots + u^n(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

أ. اثبت أنّه أيّا كان الدليل الطبيعيّ n فإنّ:

$$v_n(P_{E_1}(x)) = P_{E_1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

حيث يرمز P_{E_1} لمؤثّر الإسقاط العموديّ على E_1.

ب. ليكن y عنصرا من $(id_E - u)(E)$. اثبت عندئذ أنّ:

---

41. John Von Neumann : رياضيّاتيّ أمريكيّ من أصل مجريّ. ولد في 28 ديسمبر 1903 في بودابيست ومات في 8 فيفري 1957 بواشنطن. كرّس بداية مسيرته للأسس المنطقيّة للرياضيّات والقواعد الرياضيّاتيّة للميكانيكا. شارك بفعّالية كبيرة في صنع القنبلة الذريّة الأولى بلوس ألاموس؛ وساهم بصورة قطعيّة في انطلاق أولى الحواسيب.

$$\lim_{n\to\infty} v_n(y) = 0.$$

ج. بيّن أنّ $\lim_{n\to\infty} v_n(y) = 0$ من أجل كلّ y من $\overline{(id-u)(E)}$.

د. استخلص أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = P_{E_1}(x), \quad \forall x \in E.$$

4) 1) ليكن E فضاء هيلبرتيّا حقيقيّا و u شكلا ثنائي الخطّيّة مستمرّا على $E \times E$. برهن أنّه يوجد عنصر وحيد v في $\mathscr{L}(E)$ بحيث:

$$u(x,y) = \langle v(x), y \rangle, \quad \forall (x,y) \in E \times E.$$

2) نفترض في ما يلي أنّ u مؤثّر هيرميتيّ من $\mathscr{L}(E)$ ونضع:

$$M = \sup_{\|x\|\le 1, \|y\|\le 1} \left|\langle u(x), y\rangle\right|, \quad M' = \sup_{\|x\|\le 1} \left|\langle u(x), x\rangle\right|.$$

برهن أنّ:

$$M = M' = \|u\|.$$

3) نفترض أنّ E ذو بعد منته n ونرمز لمجموعة قيم u الذاتية بـ:

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}.$$

برهن عندئذ أنّ:

$$\|u\| = \max_{i\le i\le n} |\lambda_i|.$$

(يمكن اعتبار أساس لـ E يكون مشكّلا من أشعّة ذاتيّة ثمّ إثبات أنّه من أجل كلّ عنصر x من غلاف الوحدة الكرويّ لدينا:

$$\left|\langle u(x), x\rangle\right| \le \max_{i\le i\le n} |\lambda_i|).)$$

5) لتكن K دالّة حقيقيّة مستمرّة على $[0,1]\times[0,1]$ و $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ مزوّدا بالجداء السلّميّ الاعتياديّ:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

1) اثبت أنّ المؤثّر:

$$u : E \to E :$$
$$f \mapsto u(f) / u(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt$$

هيرميتيّ.

2) إذا كان E مزوّدا بنظيم التقارب المنتظم فاثبت عندئذ أنّ u متراص.

6) ليكن $E = \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ و α عددا حقيقيّا يفوق $\frac{1}{2}$ تماما. وليكن التطبيق $u : E \to E$ المعرّف على النحو:

$$u(x) = \left(\frac{x_n}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} .$$

1) اثبت أنّ u عنصر من $\mathscr{L}(E)$.

2) نعرّف على E التطبيق:

$$x \mapsto u_n(x) = \left(\frac{x_1}{1^\alpha}, \frac{x_2}{2^\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{n^\alpha}, 0, 0, \ldots \right).$$

برهن أنّ u_n ذو مرتبة منتهية.

3) قدّر النهاية $\lim\limits_{n \to \infty} \| u - u_n \|$ ثمّ استخلص أنّ u متراص.

6.6 حلول

1) لنبرهن أنّ $u=u^*$.

تفيد الفرضية (2) أنّه من أجل كلّ x و y من E يكون لدينا:

$$\langle (u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}(x),(u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}(y)\rangle=\langle x,y\rangle. \qquad (*)$$

المؤثّر $(u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}$ ينتمي إلى $\mathscr{L}(E)$. وعليه، فهو يقبل قرينا. تصبح العلاقة (*):

$$\langle x,\left((u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}\right)^*(u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}(y)\rangle=\langle x,y\rangle.$$

ومنه:

$$\left((u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}\right)^*(u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}=id_E. \qquad (**)$$

يمكن بفضل القضية (3.2.6) الحصول انطلاقا من (**) على:

$$(u^*+i\,id_E)^{-1}(u^*-i\,id_E)(u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}=id_E.$$

وبالتالي:

$$(u^*-i\,id_E)(u+i\,id_E)=(u^*+i\,id_E)(u-i\,id_E),$$

وهو ما يفضي إلى:

$$u^*u+i(u^*-u)+id_E=u^*u+i(u-u^*)+id_E.$$

أي $u=u^*$.

2) 1) نقوم بتعريف تطبيق T على هذه الصورة::

$$T:E\times E\to \mathrm{K}:$$
$$(x,y)\mapsto T(x.y)=\langle u(x),y\rangle.$$

من السهل التأكّد من أنّ T شكل شبه ثنائي الخطّيّة موجب. إذا استعنّا بمتباينة كوشي . شوارز حصلنا على:

$$|T(x.y)|^2=|\langle u(x),y\rangle|^2\le\langle u(x),x\rangle\langle u(y),y\rangle.$$

وبأخذ $y=u(x)$ نجد:

$$(\langle u(x),u(x)\rangle)^2=\|u(x)\|^4\le\langle u(x),x\rangle\langle u^2(x),u(x)\rangle;$$

وهو ما ينهي السؤال.

2) لنضع $\alpha = \sup_{\|x\|\le 1} \langle u(x), x\rangle$. لدينا من جهة:

$$\forall x \in E \quad \langle u(x), x\rangle \le \|u(x)\| \, \|x\| \le \|u\| \, \|x\|^2 .$$

وعليه:

$$\alpha \le \|u\|. \tag{1}$$

ومن جهة أخرى، جاء أعلاه أنّ:

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\|^4 \le \langle u(x), x\rangle \, \langle u^2(x), u(x)\rangle .$$

ومنه:

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\|^4 \le \langle u(x), x\rangle \, \|u^2(x)\| \, \|u(x)\| \le \langle u(x), x\rangle \|u(x)\|^3 .$$

وبالتالي:

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \le \langle u(x), x\rangle.$$

نستخلص هكذا أنّ:

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|u(x)\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \langle u(x), x\rangle;$$

أي:

$$\|u\| \le \alpha . \tag{2}$$

وبتكأكإ النتيجتين (1) و(2) نكون بذلك قد توصّلنا إلى المساواة المنشودة.

3) 1) لنبيّن أنّ E_1 فضاء جزئيّ مغلق من E . من أجل ذلك نلاحظ أنّ:

$$E_1 = \{x \in E \,/\, u(x) = x\} = \{x \in E \,/\, u(x) - x = 0\} = Ker(u - id_E).$$

ولمّا كان $u - id_E$ من $\mathscr{L}(E)$ تبيّن أنّ E_1 فضاء شعاعيّ جزئيّ مغلق من E .

2) لدينا بوضوح:

$$\forall\, x \in E_1 \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u^*(x)\rangle.$$

3) أ. نلاحظ من جهة أنّ:

$$\|x\|^2 = \langle x, u^*(x)\rangle \le \|x\|\,\|u^*(x)\|.$$

ومنه:

$$\|x\| \le \|u^*(x)\|.$$

ومن جهة أخرى، يسمح استمرار القرين u^* بوضع:

$$\forall\, x \in E_1 \quad \|u^*(x)\| \le \|u^*\|\,\|x\|.$$

ولكن:

$$\|u^*\| = \|u\| \le 1,$$

إذن:

$$\forall\, x \in E_1 \quad \|u^*(x)\| \le \|x\|.$$

يأتي في الأخير أنّ:

$$\forall\, x \in E_1 \quad \|u^*(x)\| = \|x\|.$$

ب. من أجل كلّ x من E_1 يكون لدينا:

$$\|u^*(x) - x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - \langle u^*(x), x\rangle - \langle x, u^*(x)\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

ومنه:

$$\forall\, x \in E_1 \quad u^*(x) = x.$$

ج. من البند (ب) نستقي:

$$E_1 \subset Ker(id - u^*).$$

إلى جانب هذا، نلاحظ أنّ الخاصّة $\|u^*\| = \|u\| \le 1$ تسمح بالحصول على جميع النتائج السابقة إذا ما استبدلنا u بـ u^* و E_1 بـ $Ker(id_E - u^*)$. وبالخصوص فإنّ مثيلة (3. ب) تعطي:

$$\forall x \in Ker(id - u^*) \quad u^{**}(x) = x,$$

أي $u(x) = x$. وعليه:

$$Ker(id_E - u^*) \subset E_1.$$

وهو ما يضمن المساواة المطلوبة.

4) أ. بمقتضى البند الأوّل من القضية (6.2.6) يكون لدينا:

$$((id_E - u)(E))^{\perp} = (\mathrm{Im}(id_E - u))^{\perp} = Ker(id_E - u)^*$$
$$= Ker(id_E - u) = E_1.$$

ب. تسمح المبرهنة (11.3.4)، بفضل فرعها الرابع، بوضع:

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}.$$

وبتوظيف النتيجة (أ) مع التذكير بأنّ $E_1^{\perp} = \overline{(id - u)(E)}$، نكتب:

$$E = E_1 \oplus \overline{(id_E - u)(E)}.$$

5) أ. من الواضح أنّ:

$$\forall x \in E_1 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u^n(x) = x.$$

وعليه:

$$v_n(P_{E_1}(x)) = \frac{1}{n+1}\left(\underbrace{P_{E_1}(x) + P_{E_1}(x) + \ldots + P_{E_1}(x)}_{n+1\ fois}\right) = \frac{n+1}{n+1} P_{E_1}(x)$$
$$= P_{E_1}(x).$$

ب. من السهل أن نرى أنّ v_n خطيّ ومستمرّ و:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \|v_n\| \leq 1.$$

وإذا كان y عنصرا من $\mathrm{Im}(id_E - u)$ وجد عنصر x من E بحيث:

$$y = x - u(x).$$

وعليه:

$$\begin{aligned} v_n(y) &= v_n(x-u(x)) = v_n(x) - v_n(u(x)) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x+u(x)+...+u^n(x)\right) - \frac{1}{n+1}\left(u(x)+u^2(x)+...+u^{n+1}(x)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x-u^{n+1}(x)\right). \end{aligned}$$

وإذا وظّفنا الملاحظة التي استهللنا بها هذا السؤال حقّ لنا أن نكتب عندئذ:

$$\begin{aligned} \|v_n(y)\| &= \frac{1}{n+1}\|x-u^{n+1}(x)\| \le \frac{1}{n+1}\left(\|x\|+\|u^{n+1}(x)\|\right) \\ &\le \frac{1}{n+1}\left(\|x\|+\|u\|^{n+1}\|x\|\right) \le \frac{2}{n+1}\|x\|. \end{aligned}$$

يترتّب عن هذه المتراجحة أنّ $\lim_{n\to\infty}\|v_n(y)\| = 0$ ؛ ومنه $\lim_{n\to\infty} v_n(y) = 0$.

ج. إذا كان y عنصرا من $\overline{(id_E - u)(E)}$ فإنّه من أجل $0 < \varepsilon$ يوجد عنصران y_1 و y_2 من E بحيث $y = y_1 + y_2$ و:

$$y_1 \in \mathrm{Im}(id - u), \quad \|y_2\| \le \varepsilon$$

وبما أنّ y_1 عنصر من $\mathrm{Im}(id_E - u)$ فإنّه يوجد عنصر x_1 من E بحيث $y_1 = x_1 - u(x_1)$. وعليه:

$$v_n(y) = v_n(x_1 - u(x_1)) + v_n(y_2).$$

ومنه:

$$\|v_n(y)\| \le \|v_n(x_1 - u(x_1))\| + \|v_n(y_2)\| \le \frac{2}{n+1}\|x_1\| + \|y_2\|.$$

ومن أجل n كبير بقدر كاف نحصل على:

$$\|v_n(y)\| \le \|v_n(x_1 - u(x_1))\| + \|v_n(y_2)\| \le 2\varepsilon,$$

أي $\lim_{n\to\infty}\|v_n(y)\| = 0$.

د. إذا كان x عنصرا من E فإنّه بإمكاننا كتابته، تبعا للجزء

(ب) من (3) على النحو $x=P_{E_1}(x)+y$ ، حيث y عنصر من $\overline{\operatorname{Im}(id_E-u)}$. وعليه:

$$v_n(x)=v_n(P_{E_1}(x)+y)=v_n(P_{E_1}(x))+v_n(y).$$

وإذا استعنّا بالبندين (أ) و (ج) وجدنا:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x)=\lim_{n\to\infty} v_n\left(P_{E_1}(x)\right)+\lim_{n\to\infty} v_n(y)=P_{E_1}(x)+0,$$

أي:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x)=P_{E_1}(x).$$

(4 (1

من أجل كلّ عنصر y من E نعرّف تطبيقا $\varphi_y : E\to\mathbb{R}$ بـ :

$$x\mapsto \varphi_y(x)=u(x,y).$$

من السهل التأكد من أنّ φ_y شكل خطّيّ على E . يوجد عندئذ بمقتضى مبرهنة ريس (16.3.4) عنصر وحيد a_y من E بحيث:

$$\forall x\in E\ \ \varphi_y(x)=\langle x,a_y\rangle=u(x,y).$$

وبوضع $a_y=v(y)$ نكون قد حصلنا على تطبيق خطّيّ ومستمرّ v على E . وبالفعل، من أجل كلّ x و y_1 و y_2 من E لدينا:

$$\begin{aligned}\langle x,v(y_1+y_2)\rangle&=u(x,y_1+y_2)=u(x,y_1)+u(x,y_2)\\&=\langle x,v(y_1)\rangle+\langle x,v(y_2)\rangle=\langle x,v(y_1)+v(y_2)\rangle.\end{aligned}$$

ومنه:

$$v(y_1+y_2)=v(y_1)+v(y_2).$$

وبالطريقة نفسها نجد:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in E\ \ v(\lambda y)=\lambda v(y).$$

أمّا بخصوص استمرار v فلدينا:

$$\|\varphi_y\|=\|a_y\|=\|v(y)\|=\sup_{\|x\|\le 1}|u(x,y)|\le\|u\|\|y\|.$$

2) تمكّن المبرهنة (4.2.6) من خلال فرعها الثاني من وضع:

$$\|u\| = \|u^*\| = \sup_{\|x\|\le 1, \|y\|\le 1} |\langle u(x), y\rangle| = M.$$

لدينا بطبيعة الحال $M' \le M$. بقي التأكّد من أنّ $M \le M'$. لهذا نضع:

$$\forall x \in E \ \ q(x) = \langle u(x), x\rangle.$$

ينجم عن هذا أنّ:

$$|q(x)| = |\langle u(x), x\rangle| \le M',$$

كلّما كان x من كرة الوحدة المغلقة، و:

$$|q(x)| \le M'\|x\|^2,$$

كلّما كان x خارج كرة الوحدة المغلقة.

نلاحظ من جهة أخرى أنّ:

$$\forall x, y \in E \ \ \langle u(x), y\rangle = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big).$$

ومنه:

$$|\langle u(x), y\rangle| = \frac{1}{4}\big(|q(x+y) + q(x-y)|\big) \le \frac{1}{4}M'\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$
$$\le \frac{1}{4}M'\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right).$$

إذن:

$$M = \sup_{\|x\|\le 1, \ \|y\|\le 1} |\langle u(x), y\rangle| \le \frac{1}{4}M'(2+2) = M',$$

وهو ما يختم الردّ على (2).

3) بما أنّ E فضاء ذو بعد منته n فإنّ كلّ عنصر من $\mathscr{L}(E)$ يضحى متراصّا. يتّضح هكذا أنّ u مؤثّر متراصّ. إذا استندنا إلى المبرهنة (16.4.6) حقّ لنا أن نعتبر أساسا متعامدا متجانسا مؤلّفا من أشعّة ذاتيّة $(e_i)_{1\le i\le n}$ لـ u. فإذا كان x عنصرا من E وضعنا عندئذ:

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ x_i\in\mathbb{C},\ i=1,2,...,n.$$

وعليه:

$$\left|\langle u(x),x\rangle\right|=\left|\langle u\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right),\sum_{j=1}^{n}x_je_j\rangle\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\langle u(e_i),e_j\rangle\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\langle\lambda_ie_i,e_j\rangle\right|.$$

حيث λ_i قيمة ذاتيّة ملحقة بـ e_i. وإذا لاحظنا أنّ العائلة $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ متعامدة متجانسة ووضعنا $\left|\lambda_{i_0}\right|=\max_{i\leq x\leq n}\left|\lambda_i\right|$ حصلنا على:

$$\left|\langle u(x),x\rangle\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2\right|\leq\left|\lambda_{i_0}\right|\,\|x\|^2.$$

ومنه:

$$\|u\|=M'=\sup_{\|x\|\leq1}\left|\langle u(x),x\rangle\right|\leq\left|\lambda_{i_0}\right|.$$

ولكن لدينا:

$$\|u\|\geq\left\|u(e_{i_0})\right\|=\left\|\lambda_{i_0}e_{i_0}\right\|=\left|\lambda_{i_0}\right|\left\|e_{i_0}\right\|=\left|\lambda_{i_0}\right|,$$

إذن:

$$\|u\|=\left|\lambda_{i_0}\right|=\max_{1\leq i\leq n}\left|\lambda_i\right|.$$

5) 1) في المثال (3) الوارد في الطائفة (5.2.6) عرّفنا قرين u بـ :

$$g\mapsto u^*(g)/u(g)(t)=\int_0^1\overline{K(x,t)}\,g(x)\,dx.$$

ولمّا كانت K حقيقيّة تبيّن أنّ $u=u^*$.

2) لنرمز بـ B لكرة الوحدة ولنضع $H=u(B)$. إذا استندنا إلى مبرهنة أسكولي اكتفينا بإثبات أنّ:

أ. H متساوي الاستمرار

ب. المجموعة $H_x = \{ f(x),\ f \in u(B) \}$ متراصّة نسبيّا، أيّا كان x من المجال $[0,1]$.

نلاحظ في البداية أنّ K مستمرّة بانتظام على $[0,1]\times[0,1]$. فإذا كان f عنصرا من B و x و x' من $[0,1]$ كتبنا:

$$\begin{aligned}|u(f)(x)-u(f)(x')| &= \left|\int_0^1 (K(x,t)-K(x',t))\, f(t)\, dt\right| \\ &\le \int_0^1 |K(x,t)-K(x',t)|\,|f(t)|\, dt \\ &\le \|f\| \int_0^1 |K(x,t)-K(x',t)|\, dt \le \int_0^1 |K(x,t)-K(x',t)|\, dt.\end{aligned}$$

وبما أنّ K مستمرّة بانتظام على البلاطة $[0,1]\times[0,1]$، فإنّه من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $0 < \rho_\varepsilon$ بحيث:

$$|x-x'| \le \rho_\varepsilon \ \Rightarrow\ |K(x,t)-K(x',t)| \le \varepsilon.$$

وعليه:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \rho_\varepsilon > 0 / \forall x, x' \in [0,1]:$$
$$|x-x'| \le \rho_\varepsilon \ \Rightarrow\ |u(f)(x)-u(f)(x)| \le \varepsilon,\quad \forall f \in B.$$

وهو ما يبيّن أنّ H متساوي الاستمرار.

لننتقل إلى الشرط الثاني.

لكي يكون الجزء:

$$H_x = \{ g(x) = u(f)(x),\ \ f \in B \},$$

متراصّا نسبيّا يكفي أن يكون الجزء ذاته محدودا. وبغية ذلك نحسب:

$$|u(f)(x)| = |g(x)| = \left|\int_0^1 (K(x,t) f(t)\,dt\right| \leq \|f\| \int_0^1 \sup_{0\leq t\leq 1, 0\leq x\leq 1} |K(x,t)|\,dt$$
$$\leq \sup_{0\leq t\leq 1, 0\leq x\leq 1} |K(x,t)|.$$

يتبيّن هكذا أنّ H_x محدود، وبه يختتم البرهان.

6) 1) إنّ التطبيق u

واضح الخطيّة؛ وهو مستمرّ كذلك، إذ لدينا:

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|x_n|^2}{n^{2\alpha}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

ومنه:

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

(لاحظ أنّ $2\alpha > 1$).

2) إنّ الجزء $u_n(E)$ يتمتّع بالعائلة المنتهية $(e_i)_{1\leq i\leq n}$، حيث:

$$e_i = \left(0, 0, \ldots, \frac{1}{i^\alpha}, 0, \ldots\right),$$

أساسا جبريّا له. وعليه، فهو ذو بعد منته، الأمر الذي يجعل u_n ذا مرتبة منتهية. (لاشك أنّك لاحظت أنّ u_n عنصر من $\mathscr{L}(E)$).

3) من أجل كلّ عنصر x من كرة الوحدة يكون لدينا:

$$\|u(x) - u_n(x)\|^2 = \sum_{i\geq n+1} \frac{x_i^2}{i^{2\alpha}} \leq \sum_{i\geq n+1} \frac{1}{i^{2\alpha}}.$$

ولكن العبارة $R_n = \sum_{i\geq n+1} \frac{1}{i^{2\alpha}}$ تمثّل باقي سلسلة ريمان $R_n = \sum \frac{1}{i^{2\alpha}}$ المتقاربة من أجل $2\alpha > 1$. وعليه، فإنّ $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. نستخلص أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x) - u_n(x)\| = 0;$$

أي:

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|=0.$$

إنّ E فضاء هيلبرتيّ. فإذا استندنا إلى المبرهنة (11.4.6) تبيّن أنّ u مؤثّر متراصّ لكونه نهاية لمتتالية من مؤثّرات ذات مرتبات منتهية.

7.6 مسائل للبحث

1) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ يحقّق:

1) u واحديّ،

2) $u-id_E$ قابل للقلب.

اثبت عندئذ أنّ المؤثّر $v=i(u+id_E)(u-id_E)^{-1}$ هيرميتيّ.

2) ليكن u مؤثّرا هيرميتيّا من $\mathscr{L}(E)$ ، حيث E فضاء هيلبرتيّ.

1) اثبت أنّ المؤثّر $v=(u+i\,id_E)(u-i\,id_E)^{-1}$ واحديّ.

2) اثبت أنّ $Ker(v-id)=\{0\}$.

3) اثبت أنّه إذا كان u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$ فإنّ $Ker\,u=Ker\,u^*u$.

4) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا هيرميتيّا واحديّا من $\mathscr{L}(E)$.

تأكّد من أنّ:

أ. $u^2=id_E$

ب. المؤثّر $v=\frac{1}{2}(u+id_E)$ مسقط.

5) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u عنصرا ناظميّا من $\mathscr{L}(E)$.

1) اثبت أنّ:

$$\forall x \in E \ \ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|.$$

2) اثبت أنّ الجزء F المؤلّف من مؤثّرات $\mathscr{L}(E)$ الناظميّة فضاء شعاعيّ جزئيّ مغلق من $\mathscr{L}(E)$.

3) اثبت أنّ:

$$\|u\|^2 = \|u^2\| = \|u^*u\|.$$

6) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و u مؤثّرا من $\mathscr{L}(E)$. برهن أنّ:

$$Keru = Keru^*u.$$

7) ليكن E فضاء هيلبرتيّا و $(u_n)_n$ متتالية متناقصة من مؤثّرات هيرميتيّة موجبة على E. برهن أنّه يوجد مؤثّر موجب u بحيث:

$$\forall x \in E \ \ \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

8) برهن أنّ طيف مؤثّر واحديّ موجود في قرص الوحدة (من $\mathbb{C}$).

9) ليكن E فضاء بناخيّا. هل المؤثّر المطابق id_E على E متراص؟

10) ليكن $E = \ell^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ و u عنصرا من $\mathscr{L}(E)$ بحيث:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mapsto u(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, ..., \frac{x_n}{2^{n-1}}, ...\right).$$

برهن أنّ u مؤثّر متراص.

11) ليكن الفضاء:

$$E = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ x_n \in \mathbb{C} \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

نزوّده بالنظيم $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ونعتبر متتالية حقيقيّة محدودة $(\lambda_n)_n$ وتطبيقا $u : E \to E$ معرّفا بِ :

$$x \mapsto u(x) / = (u(x))_n = \lambda_n x_n.$$

اثبت عند ذلك أنّ:

$$u \text{ مؤثّر متراص } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

12) ليكن $E = \ell^2_{□}(□)$ و $u, v : E \to E$ تطبيقين معرّفين بِـ :

$$x \mapsto u(x) / (u(x))_n = \begin{cases} x_{n-1} & ; \ n \geq 1, \\ 0 & ; \ n = 0, \end{cases}$$

$$x \mapsto v(x) / (v(x))_n = \frac{x_n}{n+1}, \ n \geq 1.$$

نضع $w = v \circ u$.

1) اثبت أنّ:

أ. w متراصّ؛

ب. w لا يتمتّع بأيّة قيمة ذاتيّة؛

ج. طيف w مبسّط إلى $\{0\}$.

2) احسب:

أ. $\|w^n\|$,

ب. $\lim_{n\to\infty} \|w^n\|^{\frac{1}{n}}$.

13) لتكن $(a_n)_n$ متتالية حقيقيّة محدودة و T المؤثّر المعرّف على الفضاء $\ell^p_{□}(□)$ $(1 \leq p < +\infty)$ بهذه الكيفيّة:

$$(Tx)_n = a_n x_n, \quad \forall n \in □, \quad x = (x_n)_n \in \ell^p_{□}(□).$$

1) اثبت أنّ T مؤثّر مستمرّ.

2) عيّن نظيمه.

3) عيّن قيمه الذاتيّة وطيفه.

4) صف قرينه T^*.

5) برهن أنّ T يكون متراصّا إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية $(a_n)_n$ نحو الصفر.

14) ليكن A مؤثّرا من $\mathscr{L}\left(L^2\left([0,1]\right)\right)$ معرّفا بـ:

$$A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt.$$

1) برهن أنّ A متراص.

2) عيّن قرين A.

3) برهن أنّ A^*A مؤثر ذاتي القرين ومتراصّ ثمّ عيّن طيفه.

4) استخلص نظيم A^*A ثمّ نظيم A.

دليل المصطلحات

انتهجنا إرجاع القارئ في هذا الصدد إلى المقطع الذي يظهر فيه المصطلح المذكور للمرّة الأولى في كلّ فصل.

أ

أساس		Base
[... قانونيّ	4.1	... canonique]
[... هيلبرتيّ	4.4	... hilbertienne]
استقرائيّة	4.2	inductive
إسقاط	3.4	Projection
انسحاب	4.1	Translation

ب

بعد		Dimension
[... منته	5.1	... finie]
[... مرافق	9.1	co ...]

ت

تحاك	4.1	homothétie
تعامد	2.4	Orthogonalité
تشاكل		Isomorphisme
[... جبريّ	2.1	… algébrique]

… hilbertien]	4.4	[... هيلبرتي]
Application		تطبيق
… réciproque]	2.1	[... عكسيّ
… ouverte]	4.2	[... مفتوح
… de projection]	4.2	[... الإسقاط
Isométrie	2.6	تقايس
Equivalence		تكافؤ
... topologique]	2.1	[... طبولوجيّ
... métrique]	2.1	[... متريّ
Classe d’...]	3.1	[صفّ ...

ث

Dual		ثنوي
... algébrique]	1.2	[... جبريّ
... topologique]	2.2	[... طبولوجيّ

ج

Algèbre		جبر
... de Banach]	6.1	[... بناخيّ
sous-…]	6.1	[... جزئيّ
Produit		جداء
... scalaire]	1.4	[... سلّميّ
... matriciel]	8.1	[... مصفوفيّ

ح

Résolvante	3.6	حالّة
	د	
Fonction		دالّة
... Primitive]	6.2	[... أصليّة
... vectorielle]	4.3	[... شعاعيّة
... cosinus]	2.5	[... تجيبيّة
... sinus]	2.5	[... جيبيّة
... limite]	8.1	[... نهاويّة
Période	1.5	دور
	ذ	
Propre		ذاتيّ
Vecteur …]	3.6	[شعاع ...
Valeur …]	3.6	[قيمة ...(ة)
	ر	
Rang	7.1	رتبة
	س	
Série	1.3	سلسلة
... numérique]	1.3	[... عدديّة
... trigonométrique]	1.5	[... مثلّثيّة
... de Fourier]	4.4	[... فوريّة
... de sinus]	2.5	[... جيبيّة
... de cosinus]	2.5	[... تجيبيّة

ش

Forme		شكل
... semi-linéaire]	1.2	[... نصف خطّيّ
... linéaire]	1.2	[... خطّيّ
… sesquilinéaire]	1.4	[... شبه ثنائي الخطّيّة
… multilinéaire]	1.2	[... متعدّد الخطّيّة
... positive]	1.4	[... موجب
... définie positive]	1.4	[... معرّف موجب

ط

Spectre		طيف
… continu]	3.6	[... مستمرّ
… ponctuel]	3.6	[... نقطيّ

ع

Famille	4.2	عائلة
… sommable]	1.3	[... قابلة للجمع
… absolument sommable]	5.3	[... قابلة للجمع مطلقا
… normalement sommable]	6.3	[... قابلة للجمع ناظميّا
… orthonormale]	4.4	[... متعامدة متجانسة
… libre]	5.4	[... طليقة
Orthogonal [… d'une partie]	2.4	عمودي [... جزء]

غ

Surjection canonique	3.1	غمر قانونيّ
	ف	
Espace		فضاء
… vectoriel]	1.0	…] شعاعيّ
… semi- normé]	1.1	…] نصف نظيميّ
… normé]	1.1	…] نظيميّ
… préhilbertien]	4.1	**…] شبه هيلبرتي**
Hyperplan affine	3.1	فومستوي تآلفيّ
	ق	
Adjoint	2.6	قرين
Inversible	9.1	قابل للقلب
Inversibilité	1.6	قابلية للقلب
Mesure	4.1	قياس
	ك	
Polynôme trigonométrique	1.5	كثير حدود مثلثيّ
Total	3.1	كلّيّ
	م	
Opérateur	1.6	مؤثّر
... compact]	4.6	…] متراص
... normal]	2.6	…] ناظميّ

دليل العلماء المذكورين

عمدنا في وضع هذا الدليل إلى الإتيان بصور الرياضيّاتيّين لمحض الاستئناس، وتمّ إرجاع القارئ إلى أوّل صفحة ذكر فيها العالم.


ريمان (10)

الصورة غير متوفّرة
أقليدس (13)


هولدر (13)

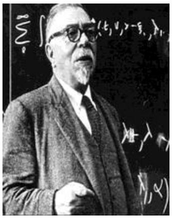

مينكوفسكي (14)


ليبشيتز (20)


فيرشتراس (28)


بناخ (33)


كوشي (33)


فينر (33)

بير (33)

ريس (46)

بيكار (66)

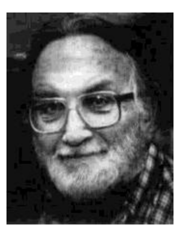
شتاينهوس (117)

الصورة غير متوفرة

أسكولي (119)

أرزيلا (119)

هان (120)



زورن (121)

الصورة غير متوفرة

أرخميدس (148)

برنشتاين (152)

دالامبير (187)

شوارز (199)


هيلبرت (201)

الصورة غير متوفرة
أبولونيوس (203)

الصورة غير متوفرة
بطوليمي (207)

الصورة غير متوفرة
فيثاغورس (216)


ڨرام (232)


شميدت (232)


تشيبتشاف (233)


لوجاندر (236)


هرميت (236)


لاڨير (236)


فوريي (241)


بيسال (242)

الصورة غير متوفرة

بارسفال (244)

ستون (249)

أولر (277)

ديريكليه (290)

آبل (333)

فوبيني (357)

فون نومان (378)

مراجع

[1] م. حازي: مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة، ديوان المطبوعات الجامعيّة؛ 2012.

[2] م. حازي: الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة، ديوان المطبوعات الجامعيّة (قيد الطبع)..

[3] A. Bouvier: Théorie élémentaire des séries; Hermann, 1971.

[4] H. Brézis : Analyse fonctionnelle, Théorie et applications; Dunod, 1998.

[5] A. Faisant: TP et TD de topologie générale; Hermann, 1977

[6] S. Gonnord - N. Tosel: Thèmes d'analyse pour l'agrégation Topologie et analyse Fonctionnelle; Ellipses, 1996

[7] M. Hazi: Topologie: Au delà des travaux dirigés; tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques, O.P.U, 2009.

[8] M. Hazi: Topologie: Au-delà des travaux dirigés; tome 3: Visite guidée dans les espaces normés, O.P.U, 2009.

[9] A. Kirilov - A. Gvchiani: Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle; Mir, 1982.

[10] A. Mostefai: Cours de topologie; O.P.U, 1989.

[11] W. Rudin: Functional Analysis; McGraw-Hill, 1991.

[12] L. Schwartz: Analyse Hilbertienne; Hermann, 1979.

[13] G. Skandalis: Topologie et analyse; Dunod, 2001.

[14] C. Tisseron: Notions de topologie, introduction aux espaces fonctionnels; Hermann, 1996.

الفهرس

0. تصدير

الفصل الأوّل: الفضاء النظيميّ: تعاريف وخصائص عامّة

الفصل الثاني: فضاء التطبيقات الخطيّة الشعاعيّ

الفصل الثالث: العائلات القابلة للجمع

الفصل الرابع: الفضاءات الهيلبرتيّة

الفصل الخامس: سلاسل فوريي

الفصل السادس: مدخل إلى نظرية المؤثّرات

*** كلمة د.محمد العربي ولد خليفة**

رئيس المجلس الأعلى للغة العربية*

خلال ندوة "التعدد اللساني واللغة الجامعة" أيام 10-11-12 أبريل 2012

أصحاب المعالي والسعادة والفضيلة

السيدات والسادة العلماء الكرام

أيها الجمع الموقر

أرحب بكم جميعا وأشكركم على قَبول الدعوة للمشاركة في هذه الندوة التي حظيت برعاية فخامة رئيس الجمهورية السيد عبد العزيز بوتفليقة، وتجمع نخبةً من أهل الاختصاص في شؤون اللسان وشجونه ودراية بسبل تدبيره حول قطب جامع هو العربية الفصحى أو الوسيطة الحديثة والحرْص على تخطيط وظائف اللغات الأخرى التي تدور حول ذلك القطب ولا تزاحمه أو تطغى عليه سواء أكانت لغات الأم بتراثها التاريخي المشترك أم كانت أجنبية تستفيد منها اللغة الجامعة في كثير من مجالات البحث العلمي والاتصال والتواصل مع الموكب الذي يقود التقدمَ وحداثة العصر، وهناك مؤشرات تدعو للتفاؤل بمستقبل العربية، فقد تضاعف عددُ مستعمليها في الشابكة أو الأنترنيت عشرات المرات خلال العقد الأول من هذا القرن، وهي في الجزائر اللغة الأولى الأكثر تداولا في وسائل الاتصال الاجتماعي بين الشباب، ويرجع ذلك إلى المدرسة الجزائرية وجهود الدولة للنشر الأفقي للتعليم بسخاء كبير والإصلاح المتواصل لأدائه.

السيدات والسادة الأساتذة الأفاضل

أيها الجمع الموقر

تحتل العربيةُ المرتبةَ السادسة بين اللغات الأكثر تداولا في العالم، ويزيد عدد الناطقين بها داخل أوطانها على 300 مليون نسمة، ونعرف أنها من اللغات الرسمية في بعض المحافل الدولية مثل منظمة الأمم المتحدة واليونسكو، ويزيد تراثها العلمي والأدبي حتى القرن الرابع عشر على مجموع ما أنتجته الحضارتان الهلينية باليونانية القديمة والرومانية باللاتينية الذي يحتاج إلى ترجمة إلى اللغات المتفرّعة عن اللغة اللاتينية، بينما يمكن الأٌطلاع على تراث العربية من العصر الجاهلي، وعلى كل ما أنتجته الحضارةُ العربية والإسلامية لأكثر من ألف عام، ضاع الكثيرُ منه، أو اُنتقل إلى خزائن خارج المنطقة.

لقد اُرتبطت العربية بالقرآن وعلومه وهي اللغة الوحيدة التي لها نصٌّ مقدس واحد ومحل إجماع المنتمين إلى الدين الحنيف، تمّ بفضله توحيد لهجاتها في فصحى واحدة وموحّدة للناطقين بها لغة أولى في أوطانها أو لغة ثانية بين الشعوب الإسلامية، ولا بد أن نشير إلى أن المسيحيينَ العرب ساهموا بجهد كبير في خدمة العربية وخاصة بالسبق في وضع المعاجم والقواميس، وبالترجمة وتحْديث لغة الصحافة، كما قدم علماء الاستشراق خدمات هامة للعربية وتراثها ، بعضها لأهداف علمية، وبعضها الآخر لأغراض أخرى.

أيها السادة الأفاضل

لقد تحالفت ضد العربية في عصرها الوسيط والراهن ثلاثةُ عوامل عطّلت تقدمَها وأضعفت إشعاعَها وأفقرت رصيدَها الإبداعي في العلوم والفنون والآداب، **أولها** ما حاق بأهلها من تخلف وجمود وفتن، **والعامل الثاني** يرجع إلى الغزو والاحتلال الكولونيالي الذي اُستفاد من حالة الضعف وزاد من استفحالها وغرس عقد النقص والدّونية والتقبل الطوعي للتبعية، أما **ثالث العوامل** فهو تخاذل وغفلة الكثير من نخبها وأولي الأمر في أوطانها عن تحريك الإرادات وإطلاق النهضة التي تحرر العقلَ وتطور مجتمعاتِنا بقيادة نخب عالمة تبنى مجتمعَ المعرفة والحرية والتنمية الحقيقية.

لقد أثبتت تجارب الأمم القديمة والمعاصرة أن تحقيق التنمية والتقدم العلمي والتكنولوجي والحد من التبعية يتطلب اُستيعابَ المعرفة وتوطينها والإبداع فيها باللغة الوطنية الجامعة، حتى ولو كان عددُ مستعمليها قليلا، وما حققته كوريا الجنوبية وفيلندة وإسرائيل على سبيل المثال يؤكد المقولة السابقة.

نصِف العربية باللغة الجامعة بحكم حضورها التاريخي وتقبلها الطوْعي بين الأغلبية من ساكنة المنطقة العربية، إن اُعتبارَها في مجالها الطبيعي لغة وطنية ورسمية، ليس أكثر من ممارسة للديموقراطية اللسانية كما هو الحال في كثير من بلدان العالم التي لا يصل فيها الجدلُ حول قضايا اللغة الرسمية إلى إنْكار دورها وأهميتها في إسناد التجانس المجتمعي والثقافي، يسمي البعض ذلك الحرص بالاُستثناء الثقافي للتغطية على اليعقوبية وإضعاف التنوع اللساني وفرْض أحادية لغوية مستبدة، وهو ما تتحاشاه لغتُنا الجامعة.

السادة الأفاضل

اللغة ظاهرة اجتماعية لا تنفصل عن واقع الأمة التي تستعملها ومنزلتها من حيث ثوابت القوّة في عصرها، وما حققته من تراكم معرفي يدافع عن أمجادها ويعلي من مكانتِها في موكب الأمم، وإذا كان للعربية مساهمات حضارية لا ينكرها إلا جاحد، فإن ما قدمته في السابق ليس هو المعرفة كما هي عليه اليوم.

وإذا تعلق الأمر بالجزائر وهي البلد العربي المغاربي الأول الذي تعرض لمحنة الاحتلال الاستيطاني الذي أقصى العربيةَ وٱعتبرها لغة أجنبية وفرض الفرنسية لغة رسمية – وهي لغة أقليةٍ من الغزاة الأروبيين القادمين من وراء البحر– فرضها في الإدارة والتجارة والتعليم والإعلام، وبهدف ٱستبْعاد الفصحى سعى إلى تعويضها بالعاميات في المدارس القليلة التي لم يتخرج منها سنة 1954 سوى 12.4% من الجزائريين، الكثير منهم لم يتجاوز مرحلة التعليم الابتدائي، والقلة منهم درسوا بالفرنسية إلى جانب العربية، والجدير بالذكر أن الفرنسية كانت سلاحا في يد قسم من النخب الوطنية للدفاع عن حق الشعب الجزائري في الحرية والكرامة على العكس مما خططت له سلطاتُ الاحتلال وخبراؤه، ولا زال بعض النوستالجيين يراهنون على تفعيله.

والحقيقة أنه لولا جهود الزوايا والكتاتيب التي كانت أشبه بمخابئ وحصون للإسلام والعربية، ثم نضالات الحركة الوطنية، وخاصة حزب الشعب وجمعية العلماء المسلمين الجزائريين، لما بقي في الجزائر سوى عاميات مشوّهة وهجينة تذكر بأسطورة برج بابل، ومن المؤسف أن تعود الدعوة إلى العاميات المحلية عندنا وفي كثير من بلداننا كبديل عن الفصحى في خصومة وأحيانا عداء للغة الجامعة المكتوبة، ومن المفارقة أن وسائل الاتصال المرئية والمسموعة في البلدان الأجنبية تستعمل الفصحى

لتبليغ رسائلها إلى المنطقة العربية منذ أمد بعيد، بينما يصفها البعضُ في بلداننا باللغة المحنّطة أو الميتة، وكأن اللغات الأخرى بما فيها أكثرها اُنتشارا ليس لها عاميات، وكأن شعوبا بأكملها من العلماء والأدباء وفقهاء اللغة.

لقد لحق بالعربية الكثيرُ من التلوّث والتهجين يزيد كثيرا عما كان عليه الحال قبل التحرير من الحماية والاحتلال، وقد أساء ذلك إلى متْنها وجمالياتها التعبيرية في الخطاب اليومي وفي بعض وسائط الإعلام، وهو أمر يختلف عن الاقتراض الطبيعي بين اللغات، فلا وجود لنقاء لساني محض، وخاصة في حوض المتوسط الذي كان ولا يزال من الساحات الكبرى للتبادل والتعارف والصراع منذ أقدم العصور وإلى اليوم.

السادة الحضور الكرام

بالنظر إلى واقع الأمس في الجزائر، يمكن القول بموضوعية أن العربية اُستعادت الكثير من مواقعها الطبيعية، فهي لغة التدريس في كل مراحل النظام التربوي وفي عدد من مرافق الإدارة، وهي اللغة الوحيدة المعتمدة في الوثائق الرسمية التي توقّعُ باُسم الدولة إلخ...ولا يزال أمامها أشواط لتشمل كلَّ مرافق الإدارة العمومية، وبوجه خاص بعض المعاهد وكليات العلوم والتكنولوجيا والعلوم الطبية، وعلى الأخص النشر بها في المجلات العلمية المحكّمة على المستوى الدولي، وظهور مجموعة علمية من أعلى طراز في مختلف مجالات البحث والاُختراع، تعيد الثقة في العربية لغة للعلم والإبداع، كما كان حالُها في "دار الحكمة" في بغداد وقرطبة الأندلس ومنارات الحضارة الإسلامية الأخرى.

لقد تمت دسترة الأمازيغية لغة وطنية بمبادرة من السيد رئيس الجمهورية سنة 2002 إلى جانب العربية اللغة الرسمية المشتركة والجامعة لكل المواطنين، وعلى أي حال فإن كلا من العربية والأمازيغية هما لسان

وتراث وليسا عرقا أو سلالة، فكل الجزائريين بل كل الفضاء المغاربي تعرّب بفضل الإسلام وأصبحت العربية لسانَهم الجامع مهما كانت لغة الأم، ولا يوجد في بلادنا سوى عدد قليل ممن لا يستعملون العربية في حياتهم اليومية، والبعض منهم لا يرغبون في اُستعمالها لأسباب ذاتية وإيديولوجية، وأحيانا بتحريض من مركز الفرانكوفونية الذي يعاني من اُكتساح الانكليزية في عقر داره.

السيدات والسادة

إن التعددية اللغوية ثروة ينبغي الحرْص عليها، إذا كانت تدور حول اللغة القطب، ولا تزاحمها أو تنتزع عنها وظيفتها الجامعة، وقد كان هذا شأنُ العرب والمسلمين في عصرهم الزاهر، فقد كانت مجامع العلم من ثنائي وثلاثي اللغة وإتقان لغات الحضارات الأخرى مثل فارس واليونان والهند هو الذي مكّنهم من نقل تراثها وتوطينه بالعربية الفصحى المشتركة وأوصلوه إلى أروبا بعد أن أضافوا إليه الكثيرَ، وصنعوا بذلك حداثة عصرهم بالتفوّق في كثير من العلوم، ومنها علوم اللّسان، واُبتكار المناهج، وليست بالتفاخر اللفظي والرِّثاء.

إن اللغة الجامعة لا تقصي اللغاتِ الأخرى، ونحن نعمل في هذه الهيئة لتكون العربية لغة جاذبة وليست طاردة، فهي من أُسس الهوية الفردية والجماعية، ولعلها من أهم، إن لم يكن من آخر ما يجمع شعوب المنطقة، ومن هذا المنظور يعمل المجلسُ وفْق منهجية علمية بمنأًى عن أدْلجة اللغة ويسعى في كل منابره وندواته بتشجيع من فخامة رئيس الجمهورية لفتح حوار ديموقراطي حول كل القضايا التي تشغل الرأيَ العام الثقافي والعلمي كما تشهد على ذلك مدوّناته ودليل وثائقه المسجلة والمنشورة.

نحن بلا شك في حاجة إلى إتقان لغاتِ البلدان المتقدمة والاستفادة من ذخائرها في العلوم والفنون والتكنولوجيات لتدارك الفجْوة التي تفصلنا عنها ووضع تخطيط وسياسة للغات الأجنبية تضمن قطبية العربية بلا ضرائر من الداخل، وتساعد على نقل المفيد والجيد من تراثها العلمي والأدبي الذي يتزايد بسرعة هائلة، ولا شك أن نقلَ ما تراكم منه إلى العربية أمر حيوي لأنعاش الفكر العلمي والإبداعي، فالترجمة هي الأكسجين الذي يثري ثقافَتنا وينمّي رصيدها، وخاصة في مجالات البحث العلمي والتعليم العالي، فنقص المراجع بالعربية يمثل عائقا أمام الطلاب في المرحلة الجامعية وما بعدها، وأحيانا يُستعمل ذريعة لبقاء الوضع على ما هو عليه.

السادة الأساتذة الأفاضل

الحضور الكرام

تطرح الورقةُ موضوع ندوتنا، مجموعةً من القضايا في صيغة تساؤلات ومحاور تتعلق بمستجدّات الأدبيات العلمية الحديثة في مسألة

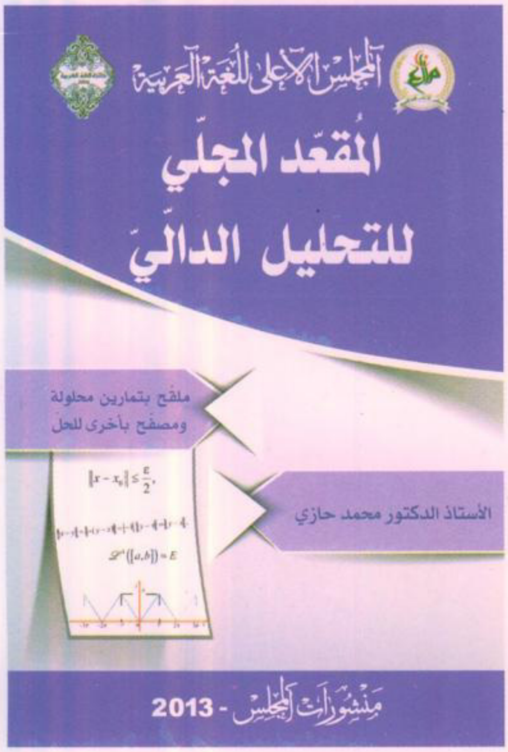
التدبير اللساني وتجارب الأمم الأخرى ومقاربة علمية لعدد من المفاهيم المتداوَلة في الأدبيات اللسانية، مثل الأحادية اللغوية والثنائية والازدواجية ومواصفات ومؤهلات اللغة الجامعة على مستوى البلد الواحد والعبْر قطرية كما هو الحال بالنسبة للعربية.

نحن سعداء بمشاركة هذه النخبة من الأساتذة من أهل الدِّراية والاختصاص الذين لهم سجل علمي مشهود في مختلف المنابر الأكاديمية العالمية، فهناك في هذا المحفل العلمي أساتذة من 24 جامعة جزائرية وعدد من مخابرها العاملة في البحث الأساسي والتطبيقي وضيوف كرام من البلدان المغاربية والعربية الشقيقة من المغرب وتونس والسعودية وقطر والإمارات والسودان ومدير مكتب تنسيق التعريب في الرباط ومن النيجر والهند ومن ألمانيا، تجشّموا مشكورين مشاق السفر إلى الجزائر وهي تواصل تشييد وترسيخ بنائها الديمقراطي الذي يصنعه شعبُها في ثقة واُطمئنان.

أجدد الترحاب بكم وأتمنى لكم طيب المقام

أشكركم على حسن إصغائكم

والسلام عليكم



إنّ أولى ميزة تحتاج إليها الفضاءات التي نحن مقبلون على دراستها هي أن تكون متمتّعة ببنية فضاء شعاعيّ. لا شكّ أنّه لم يذهب عنك أنّنا أهملنا هذه الطبيعة الجبريّة ولم نكن في حاجة إليها فيما سبق من أنماط الفضاءات (الطبولوجيّة والمتريّة).

سنسلك في تقديم هذه الفضاءات نفس النهج والنسق الذي انتهجناه من قبل في الفضاءات المتريّة، ذلك لأنّ الفضاءات النظيميّة فضاءات متريّة خاصّة.

بعد أن أخذنا بيدك في جولة، تفسّحنا خلالها عبر شعاب المفاهيم الطبولوجيّة العامّة وميزاتها، مرورا بروضة الفضاءات المتريّة وتطبيقاتها ها نحن نحطّ الرحال بموطن الفضاءات النظيميّة، التي تعدّ الأرضيّة الأكثر خصوبة للتحليل الداليّ. إنّها المحطّة الأخيرة المكمّلة للمشروع المستعرض للطبولوجيا الذي أطلقناه من قبل عبر مؤلّفينا 1 و2.

-من تصدير الكتاب -

المجلس الأعلى للغة العربية
شارع فرنكلين روزفلت الجزائر
الهاتف: 25/ 213 021.23.07.24 الفاكس: 213 021.23.07.07
ص.ب: 575 الجزائر - ديدوش مراد
www.csla.dz