REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE LE L'ENSEIGNEMENT SUPEREURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL-BOUAGHI

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : ……….

Série : ……………..

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

En Mathématiques

intitulé

PROBLEME MIXTE AVEC CONDITION NON LOCALE POUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE AUX DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE QUATRE

Option :

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Présenté par :

BOUDJEDOUR ALLAOUA

Soutenu le 15/07/2009

Devant le jury

Mr Ayadi Abdelhamid	Pr	Univ. Larbi Ben M'Hidi-O.E.B	Président
Mr Bouzit Mohamed	M.C	Univ. Larbi Ben M'Hidi-O.E.B	Rapporteur
Mr Djezzar Salah	M.C	Univ. Mentouri. Constantine	Examinateur
Mr Djebarni Merzouk	M.C	Univ. Larbi Ben M'Hidi-O.E.B	Examinateur
Mr Adjroud Nacer	M.C	Univ. Khenchela	Examinateur

Table des matières

Remerciements

Au nom de Dieu le clément et le miséricordieux Tout d'abord, je tiens à remercier infiniment M. Bouzit Mohamed pour le choix passionnant et motivant du présent mémoire ainsi que pour son aide inestimable et les conseils précieux et utiles qu'il m'a apportés.

En outre, je reste et resterai fort reconnaissant à Mr Ayadi Abdelhamid qui me fera l'honneur de présider ce jury ainsi qu'à Mr Djebarni Merzouk et Mr Djezzar Salah et Mr Adjroud Nacer d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce même jury.

J'aimerais notamment remercier MM. Méziani A. et Mansouri A/K. pour avoir bien voulu corriger le présent travail ainsi que tous les collègues du lycée Mentouri, à Ain-M'lila. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude aux deux êtres les plus chers dans ma vie.

Il s'agit de mes parents qui ont tout fait pour que je sois ce que je suis. Je remercie particulièrement ma mère dont le fait de penser à elle me redonne la confiance et me rassure. Je dédie également mes remerciements particuliers à ma chère femme D.B. pour ses conseils et son soutien ainsi qu'à sa famille. Je remercie également tous les membres de ma famille : mes frères, mes soeurs et tous ceux qui comptent pour moi.

Je me permets aussi de saluer tous mes amis et les remercie pour leur soutien constant qui m' ont permis de réaliser ce rêve.

De plus, je ne voudrais pas oublier tous ceux et celles qui, tout au long de mon travail, m'ont soutenu moralement et je m'excuse de ne pas les nommer explicitement car la liste est longue.

Enfin, je dédie mon mémoire à tous mes professeurs et camarades de classe de L'ENS D'oum El Bouaghi dont les noms suivants Tarek, Imad, Mokhtar, Yazid, Ammar, Halim, et Mme Fréha.

Introduction

La méthode des inégalités énergétiques, appelée aussi méthode de l'analyse fonctionnelle, a pour origine les travaux de I. G. Petrovsky [22]. Elle a été appliquée et développée par la suite dans beaucoup de ces travaux. Pour la résolution du problème de Cauchy lié aux équations de type hyperbolique, O.A.Ladysenskaja [14], K. Fredricks [7], N. I. Yurchuk [28; 29; 31].

La méthode a connu par la suite des développements importants dus à J. Leray [11], et L. Garding [8]. Elle a été également utilisée pour la résolution de différents problèmes dans les domaines de la théorie de la conduction thermique [3, 10, 13], la physique des plasmas [25], l'électrochimie [28], et autres. Le présent travail est l'objet d'une extension de la méthode des inégalités énergétiques à de nouveaux problèmes mixtes avec conditions aux bords non locales de type intégrales. Il est aussi considéré comme prolongement des résultats obtenus dans [29]. les problèmes mixtes avec conditions intégrales prennent un intérêt de plus en plus important dont la raison fondamentale est la signification physique de base de la condition intégrale à savoir une moyenne, un flux, une énergie totale, un moment, etc. Ce sont des modèles mathématiques rencontrés en théorie de la conduction thermique [3, 12], en thermo -élasticité [24], et dans les semi-conducteurs [1]. De tels problèmes ont été étudiés dans [2, 3, 4, 5, 6, 12, 13], et [17, 19, 20, 21, 29, 30, 31], pour les équations paraboliques, dans [30], pour les équations pseudo- paraboliques dans [3, 5, 6, 12, 13] et [10, 16, 21, 28, 31], pour les équations paraboliques, dans [7, 8, 11, 14, 21], pour les équations hyperboliques et dans [3, 4, 14, 16, 17, 20, 31], pour les équations du type mixte.

Description de la méthode

La méthode des inégalités énergétiques est basée sur la recherche d'un opérateur Mu dit multiplicateur qui dépend de la fonction u, ses dérivées et certaines fonctions poids. On est ramené par la suite à effectuer des intégrations sur le domaine considéré en vue de doter E et F de normes adéquates afin de pouvoir montrer l'existence et l'unicité de la solution, dite forte, du problème considéré après d'avoir mis sous la forme

$$Lu = \mathcal{F}, \tag{1}$$

où $L : E \rightarrow F$ est l'opérateur engendré par le problème considéré, E est un espace de Banach, F est un espace de Hilbert, $u \in E$ et $\mathcal{F} \in F$.

la méthode se présente sous deux schéma.

Schéma 1

On démontre deux inégalités à priori

$$\|Lu\|_F \leq C \ \|u\|_E \qquad \forall u \ \in D(L) \tag{2}$$

$$\|u\|_E \leq c \ \|Lu\|_F \qquad \forall u \ \in D(L), \tag{3}$$

où C et c sont des constantes.

L'unicité de solution du problème considéré résulte de ces deux inégalités.

De l'inégalité (2) résulte que l'opérateur L est continu et de l'inégalité (3) résulte qu'il admet un inverse continu et que l'image $R(L)$ de L est fermée. L est donc un homéomorphisme linéaire de E dans le fermé $R(L)$, ce qui prouve l'unicité de solution. L' existence de la solution est assurée par le fait que $R(L)$ est dense dans F, chose faisable moyennant les opérateurs de régularisation que l'on choisira suivant la nature du problème considéré.

Schéma 2

On démontre l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq c \ \|Lu\|_F \qquad \forall u \ \in D(L), \tag{4}$$

où c est une constante.

Par passage à la limite, on prolonge l'inégalité (4) à $D(\bar{L})$. Etant donné que l'image $R(\bar{L})$ de l'operateur $\bar{L}$, qui joue un rôle important, est fermée dans F et que

$$R(\bar{L}) = \overline{R(L)}.$$

Il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans F.

Dans ce travail, nous utilisons le 1^{er}shéma.

La méthode des inégalités énergétiques présente des avantages et des inconvénients.

Avantages

- Elle est efficace pour beaucoup de problèmes dont on a cité un certain nombre plus haut.
- Son aspect théorique est solide et son développement est fait dans un cadre abstrait et élégant.
- L'actualité des problèmes traités par cette méthode.

Inconvénients

Beaucoup de difficultés sont rencontrées lors de la recherche

- Des espaces de solutions.
- Du multiplicateur.
- Des opérateurs de régularisation.

L'élaboration d'une technique remédiant à ces difficultés est encore prématurée, ceci est dû à la variété a l'actualité des problèmes traités par la méthode.

Actuellement, l'application de la méthode nécessite une étude spéciale pour chaque problème considéré.

Chapitre 1

Rappels

Le but de ce chapitre est de rappeler certaines notions et certains résultats de l'analyse fonctionnelle utilisés dans les chapitres ultérieurs. Pour cela on a commencé par donner les définitions de quelques espaces fonctionnels, puis un ensemble de notions fondamentales d'analyse fonctionnelle et quelques résultats auxiliaires.

1.1 Espaces vectoriels normés

Definition 1 *Soit E un espace vectoriel sur $K(K = \mathbb{R}ou\ \mathbb{C})$. Une norme sur E est une application noté $\|.\|$defnie par*

$$\|.\| : \ E \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \|x\|$$

vérifiant les axiomes suivants : x , y

1) $\|x\| = \ 0 \ \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \ \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x \in E$

3) $\|x \ + y\| \leq \ \ \|x\| \ \ + \ \ \|y\|$, $\forall x$, $y \in E$.

Definition 2 *On appelle espace vectoriel normé le couple $(E\ , \|.\|)$ formé d'un espace vectoriel et d' une norme $\|.\|$définie sur E.*

Espace de Banach.

Definition 3 *L'espace normé* $(E, \|.\|)$ *est appelé un espace de Banach si toute suite de Cauchy dans* E *converge vers un élément de* E *(pour la norme* $\|.\|$*). En d'autre mots, un espace de Banach est un espace normé complet.*

Espace de Hilbert

Definition 4 *Soit* H *un espace vectoriel sur* $K(K = \mathbb{R}ou\ \mathbb{C})$*. On appelle produit scalaire noté* $(.,.)$ *sur* H *toute application de* $H \times H \to \mathbb{R}$*, vérifiant les*

propriétés :

1) $(x, x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \ H$

2) $(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ *dans* H

3) $(x, y) \ = \ (y, x) \ \ \forall x \ , \ y \in H$

4) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \ \ \forall x \ , \ y, \ z \in H \ \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$

Remarque 1 *Tout produit scalaire introduit une norme sur l'espace* H*, notée* $\|.\|_H$ *et définie par*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)_H} \ \ , \ \forall \ \ x \in \ H$$

H *muni de cette norme est appelée espace préhilbertien.*

Definition 5 *Un espace préhilbertien complet est appelé espace de Hilbert.*

Supplémentaire orthogonal.

Definition 6 *Soit* E *un espace muni d'un produit scalaire. Chaque fois que* $(x, y) = 0$*, nous diront que les éléments* x *et* y *sont orthogonaux et nous le noterons* $x \perp y$*. De toute évidence, l'élément nul de* E *est orthogonal à tout élément de* E*.*

Definition 7 *Soit* L *une variété linéaire dans* H*. L'ensemble des éléments de* H *orthogonaux à* L *est appelé supplémentaire orthogonal de* L *et noté* $L^{\perp}$*.*

Théorème 1 $L^{\perp}$*est un sous-espace dans* H*. (Démenstration : On peut consulter* [26] *page 65).*

Théorème 2 *Soit L une variété linéaire dans un espace de Hilbert H. Alors,*

pour que L soit dense dans H, il faut et il suffit que $L^{\perp} = \{0\}$*. (Démenstration : On peut consulter* [26] *page 66).*

L'espace $L^2(\Omega)$

Definition 8 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière lipchitzienne* Γ. *On pose*

$$L^2(\mathbf{\Omega}) = \left\{ f : \mathbf{\Omega} \ \rightarrow \mathbb{R} \ ; \ \int_{\mathbf{\Omega}} |f(x)|^2 \, dx \ < \infty \right\}.$$

$L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(f, g) = \int_{\mathbf{\Omega}} f(x) g(x) dx.$$

On munit $L^2(\Omega)$ *de la norme*

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\mathbf{\Omega}} |f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Espace de Sobolev

Definition 9 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur* Ω *l'ensemble*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\mathbf{\Omega}) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbf{\Omega}), \ 1 \leq i \ \leq n \ \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$(u, v)_{1,\mathbf{\Omega}} = \int_{\mathbf{\Omega}} \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial xi} \frac{\partial v}{\partial xi} \right) dx$$

et on note $\|u\|_{1,\mathbf{\Omega}} = (u, u)_{1,\mathbf{\Omega}}^{1/2}$ *la norme correspondante.*

Théorème 3 *L'espace* $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u, v)_{1,\mathbf{\Omega}} = \int_{\mathbf{\Omega}} \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial xi} \frac{\partial v}{\partial xi} \right) dx$$

Théorème 4 *L'espace* $H^1(\Omega)$ *est séparable, i. e, il existe une partie dénombrable dense dans* $H^1(\Omega)$.

1.2 Quelques Inégalités

Inégalité de Young

Soit $1 < p, q < +\infty$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall\ a\ ,\ b\ \in \mathbb{R}_+^*.$

Cette inégalité est appelée inégalité de Young. Elle est largement utiliseé dans ce travail.

Théorème 5 (Inégalité de Cauchy Schwarz) Soit f et g deux éléments

de $L^2(\mathbf{\Omega})$, alors

$$f\ .\ g \in L^1(\mathbf{\Omega}) \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbf{\Omega}} |f\ .g| \leq \|f\|_{L^2(\mathbf{\Omega}).} \|g\|_{L^2(\mathbf{\Omega}).}$$

1.3 les opérateurs

Soient E et F deux espaces normés $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $K(K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C})$

Definition 10 *i) Une application A definie par*

$$A : E \to F$$

$$x \longmapsto A(x) = Ax$$

est dite opérateur.

ii) $D(A) = \{x \in E\ ;\ Ax \in F\ \} \subseteq E$ *est dit domaine de définition de l'operateur A.*

iii) L'opérateur A est linéaire ssi

$$\forall \alpha\ ;\ \beta \in K,\ \forall x,\ x' \in D(A) : A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax'$$

Definition 11 *i) L'opérateur A est dit continu au point $x_0 \in\ E$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0\ \ ;\ \exists \eta > 0,\ \ \|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_F < \varepsilon$$

ii) A est dit continu dans E s'il est continu en tout point de E.

Proposition 1 *Un opérateur linéaire est continu dans E s'il est continue à l'origine (. i . e. continue en 0).*

Definition 12 *On dit que l'opérateur A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$\|Ax\|_F \leq c\,\|x\|_E \qquad \forall x \in D(A)$$

Definition 13 *(Graphe,Image,Noyau de A)*

i) *Graphe de*$A = G(A) = \cup [x, Ax] = \{(x, Ax)/x \in D(A)\} \subset E \times F$

ii) *Image de* $A = R(A) = \cup \{Ax\} \subset F$

iii) *Noyau de* $A = \ker A = N(A) = \{x \in D(A); Ax = 0\} \subset E$

Definition 14 *On dit que l'opérateur A est fermé ssi*

$$G(A) = \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D(A)\}$$

est fermé dans $E \times F$ *. Ceci équivaut à dire si une suite (x_n) dans $D(A)$ telle que*

$$x_n \to x \text{ dans } D(A) \textit{ et } Ax_n \to f \quad \text{dans } F.$$

Alors

$$f = Ax,\ x \in D(A).$$

Remarque 2 *Si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé.*

Théorème 6 *L'opérateur A^{-1} existe et en méme temps est borné sur $R(A)$ si et seulement si $\|Ax\| \geq m \|x\|$, pour un m constant, $m \geq 0$, et pour tout $x \in D(A)$.*

Théorème 7 *Soient deux espaces de Banach X et Y et un operateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $R(A) = Y$. Si A est inversible, il est aussi continûment inversible.*

L'opérateur adjoint

Soit

$$A : D(A) \subset E \to F,$$

un opérateur non borné à domaine dense, on définit un opérateur non borné

$$A^* : D(A^*) \subset F^* \to E^*$$

comme suite,

on pose

$$D(A^*) = \{y \in F^*;\ \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle y, Ax\rangle| \leq c \|x\| \, \forall x \in D(A)\}$$

Il est claire que $D(A^*)$ est un sous espace vectoriel de F^*.

On définit également A^*y pour $y \in D(A^*)$, étant donné $y \in D(A^*)$.

On considère l'application

$$g : D(A) \to \mathbb{R} \text{ défini par : } g(x) = \langle y, Ax \rangle, \ x \in D(A).$$

On a par conséquent la relation fondamantale suivante qui lie A et A^*

$$\langle y, Ax \rangle_{\mathrm{F}' \times F} = \langle A^*, x \rangle_{\mathrm{E}' \times E}$$

On a

$$|g(x)| \leq c \|x\|, \ \forall x \in D(A); \forall y \in D(A^*).$$

Grâce au théorème (Hanh-banach forme analytique) on sait que g peut être prolongé en un application linéaire

$$f : E \to \mathbb{R} \ \text{ telque } \ |f(x)| \leq c \|x\|, \ \forall x \in D(A)$$

par suite $f \in E$.

On remarque que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E est que $D(A)$ est dense dans E .

On pose $A^*y = f$.

Il est clair que l'opérateur A^* est linéaire.

l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset \mathrm{F}' \to \mathrm{E}'$ est appelé l'adjoint de A.

Proposition 2 *Soit*

$$A : D(A) \subset E \to F \ ,$$

un opérateur non borné à domaine dense, alors A^* *est fermé (i.e.*$G(A^*)$ *est fermé dans* $F' \times E'$*)*

Théorème 8 *Soit*

$$A : D(A) \subset E \to F$$

un opérateur non borné fermé avec $\overline{D(A)} = E$*, alors les propriétés suivantes sont équivalantes*

i) $D(A) = E$,

ii) A *est borné,*

iii) $D(A^*) = F'$,

iv) A^* *est borne.*

Definition 15 *Soit H un espace de Hilbert. L'opérateur*

$$A : D(A) \subset H \longrightarrow H$$

est dit auto-adjoint ssi

$$A = A^*, \text{i.e. } D(A) = D(A^*) \text{ et } (Au, v) = (u, Av), \forall u, v \in D(A).$$

Théorème 9 *A est symetrique ssi $(y, Ax) = (Ay, x)$, $\forall x, y \in D(A)$*

Théorème 10 *Si A est auto-adjoint, le mombre (Au, u) reste réel pour tout $u \in H$.*

1.4 Les opérateurs de trace

Un théorème de trace

Soit $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω. Etant donné une fonction v de $H^n(\Omega)$, on cherche à définir sa‹‹valeur au bord›› $v|_\Gamma$. Ceci n'est pas évident car pour $n \geq 2$ les fonctions de de $H^n(\Omega)$ ne sont pas en général continues. Cependant dans le cas particulier $n = 1$, on peut montrer qu'une fonction v de $H^1(\Omega)$, avec $\Omega =]a, b[$ intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, est égale (presque partout) à une fonction continue sur $[a, b]$.

Dans ce cas, il n'y a donc aucune difficulté à définir $v(a)$ et $v(b)$, pour tout

$v \in H^1(\Omega)$. Par contre, dans le cas général $n \geq 2$, il va falloir utiliser des arguments plus sophistiqués pour définir la valeur au bord $v|_\Gamma$ d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$.

On introduit d'abord quelques notations.

On désigne par $\mathbf{C}^m(\overline{\Omega})$, m entier ≥ 0, l'espace des fonctions m fois continument différentiables dans $\overline{\Omega}$ et par $D(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\overline{\Omega}$.

Ceci signifie qu'une fonction appartient à $\mathbf{C}^m(\overline{\Omega})$ (resp. à $D(\overline{\Omega})$) si elle est la restriction à Ω d'une fonction de $\mathbf{C}^m(\theta)$(resp. à $D(\theta)$), où θ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\overline{\Omega}$.

Considérons, pour commencer, le cas très simple où $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ avec

$$\mathbb{R}^n_+ = x = \{x = (\mathrm{x}', x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n > 0 \ \} .$$

Dans ce cas, la frontière de Ω est l'hyperplan

$$\Gamma = \left\{x = (\mathrm{x}', 0) \ ; \ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\right\}$$

Lemme 1 *L'espace $D\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ est dense dans $H(\mathbb{R}^n_+)$.*

Lemme 2 *Pour toute fonction v de $D\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, on a $\|v(.,0)\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \leq \|v\|_{1,\mathbb{R}^n_+}$.*

Il résulte des lemmes précédents que l'application linéaire

$$v \longmapsto v(.,0) \text{ de D } \left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right) \text{ dans } D(\mathbb{R}^{n-1}),$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ encore notée $v \longmapsto v(.,0)$. De plus l'inégalité a lieu pour toute fonction v de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Ainsi, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, on peut définir la valeur au bord $v|_\Gamma$ d'une fonction v de $H^1(\Omega)$ en tant que fonction de $L^2(\Gamma)$.

Les résultats précédents vont pouvoir se généraliser en cas d'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ à condition de faire des hypothèses convenables, sur la régularité de frontière Γ de Ω.

Enonçons d'abord le résultat que nous avons en vue sous la forme .

Théorème 11 *On supopose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ ‹‹ assez régulière ››, alors $D\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application*

$$\gamma_0 : v \longmapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma$$

de $D\left(\overline{\Omega}\right)$ dans $C^0(\Gamma)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ encore notée γ_0.

L'application γ_0 ainsi définie appelée application trace et sa valeur $\gamma_0 v$ pour une fonction v de $H^1(\Omega)$ est appelée trace de v sur Γ.

Signalons que l'image $\gamma_0\left(H^1(\Omega)\right)$ est un sous-espace propre de $L^2(\Gamma)$, i.e., l'application γ_0 n'est pas une surjection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Definition 16 Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dit 1-régulier si Ω est borné et si sa frontière Γ est une variété de classe $\mathbf{C}^1$ de dimension $n-1$, Ω étant localement d'un seul coté de Γ

Lemme 3 *Si Ω est 1-régulier, il existe un opérateur p linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\forall v \in H^1(\Omega)$, $Pv = v$ presque partout dans Ω. Un tel opérateur p est dit de 1-prolongement.*

Lemme 4 *Si $\overline{\Omega}$ est 1-régulier, $D(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$*

Lemme 5 *Si $\overline{\Omega}$ est 1-régulier, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall v \in D(\Omega), \; \|\gamma_0 v\|_{o,\Gamma} \leq \; c \; \|v\|_{1,\Omega}.$$

Théorème 12 *On suppose que l'ouvert Ω est 1-régulier, alors $D\big(\overline{\Omega}\big)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, et l'application*

$$\gamma_0 : v \to \gamma_0 v = v|_\Gamma \text{ de } D(\Omega) \text{ dans } L^2(\Gamma)$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ encore notée γ_0.

1.5 Les opérateurs abstraits de regularisation

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur défini de $D(A) \subset H \to H$ avec $\overline{D(A)} = H$.

Definition 17 *On dit que A est un opérateur dissipatif ssi*

$$Re \langle A(u), u \rangle_H \leq 0, \forall \; u \in D(A).$$

Definition 18 *On dit que A est un opérateur accrétif si $(-A)$ est un opérateur dissipatif, i.e.*

$$\mathrm{Re} \langle A(u), u \rangle_H \geq 0, \forall \; u \in D(A)$$

Definition 19 *Un opérateur dissipatif A est dit maximal si son extention est lui même.*

Proposition 3 *Soit A un opérateur*

$$D(A) \subset H \to H \text{ avec } \overline{D(A)} = H,$$

alors les les proprietés suivantes sont équivalentes

i) A *est un opérateur dissipatif,*

ii) $\|(A-\lambda I)u\| \geq \ A \ \operatorname{Re}\lambda \|u\|, \forall\, u \in D(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$,

iii) $\|(A-\lambda I)u\| \geq \ \lambda \ \operatorname{Re}\lambda \|u\|, \forall\, u \in D(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda > 0$.

Démonstration . *Supposons que (i) est vérifiée .*

Soit $u \in D(A)$ *et* $\operatorname{Re}\lambda > 0$, *alors*

$$\operatorname{Re}\langle Au - \lambda u \ , u\rangle = \ \operatorname{Re}\langle Au \ , u\rangle - \operatorname{Re}\lambda \|u\|^2 \leq -\operatorname{Re}\lambda \|u\|^2 ,$$

donc

$$\|Au - \lambda u \ \| \, \|u\| \geq -\operatorname{Re}\langle Au - \lambda u \ , u\rangle \geq \operatorname{Re}\lambda \|u\|^2 .$$

Ce qui implique (ii).

Il est clair que (ii) implique (i)

Supposons que (iii)est vraie. Pour tout $u \in D(A)$ *et* $\lambda > 0$, *on a :*

$$\|Au\|^2 - 2\lambda \ \operatorname{Re}\langle Au \ , u\rangle = \|Au - u \ \|^2 - \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0,$$

donc

$$2\lambda \ \operatorname{Re}\langle Au \ , u\rangle \leq \|Au\|^2 .$$

Comme $\lambda > 0$ *est arbitraire, il résulte que* $\operatorname{Re}\langle Au \ , u\rangle \leq 0$.

Théorème 13 *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.*

Corollaire 1 *Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.*

Théorème 14 *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif .*

Proposition 4 *Soit* $A : D(A) \subset H \to H$ *avec* $\overline{D(A)} = H$,

alors les les proprietés suivantes sont équivalentes :

i) A *est un opérateur maximal dissipatif.*

ii) $Im(A-\lambda) = H$ *pour certains* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

iii) $Im(A-\lambda) = H$ *pour certains* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Théorème 15 *Soit*

$$A : D(A) \subset H \to H \text{ avec } \overline{D(A)} = H,$$

un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) *A est un opérateur dissipatif maximal.*

ii) *A est fermé* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ *et de plus on a :*

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Théorème 16 *Soit*

$$A : D(A) \subset H \to H \text{ avec } \overline{D(A)} = H,$$

un opérateur dissipatif maximal, alors

i) $A_{\varepsilon}^{-1} \in L(H)$,

ii) $\|A_{\varepsilon}^{-1}\| \leq 1$,

iii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_{\varepsilon}^{-1}u = u$ *pour tout* $u \in H$, *où* $A_{\varepsilon}^{-1}u = (I-\varepsilon A)^{-1}$ *;* $\varepsilon > 0$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\{\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \rho(A),$$

donc $(I-\lambda A)$ est continument inversible. D'où $(I-\lambda A)^{-1}$existe et borné.

Il est défini sur H tout entier puisque

$$\frac{1}{\varepsilon} \in \{\varepsilon \ : \varepsilon > 0\}.$$

Et on dédui que

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} \in L(H),$$

mais

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I) = -\frac{1}{\varepsilon}(I-\varepsilon A),$$

d'où

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} = -\varepsilon(I-\varepsilon A)^{-1}.$$

On pose

$$A_{\varepsilon}^{-1} = (I-\varepsilon A)^{-1},$$

en déduit

$$A_{\varepsilon}^{-1} \in L(H).$$

En utilisant le théorème 14, on déduit que

$$\left\|(A-\frac{1}{\varepsilon}I)^{-1}\right\| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = \varepsilon.$$

Donc

$$\left\|A_{\varepsilon}^{-1}\right\| \leq 1.$$

Supposons que $u \in D(A)$, on a

$$\left\|A_{\varepsilon}^{-1}u-u\right\| = \left\|(I-\varepsilon A)^{-1}u-u\right\| = \left\|\varepsilon(I-\varepsilon A)^{-1}Au\right\| \leq \varepsilon \left\|Au\right\|.$$

Ainsi, par passage à la limite, lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_{\varepsilon}^{-1}u = u \quad \text{pour tout } u \in D(A),$$

et on a

$$\overline{D(A)} = H,$$

alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_{\varepsilon}^{-1}u = u \quad \text{pour tout } u \in H$$

Exemple 1 Soit A $= \frac{\partial}{\partial t}$ où

$$D(A) = \left\{u \in L^2(Q) \ / u(0,t) = 0\right\},$$

et

$$Q = (0,1) \times (0,T),$$

alors A est un opérateur accrétif.

Démonstration. Nous avons

$$\langle Au, u\rangle = \int_Q \frac{\partial u}{\partial t} u dxdt = \int_0^1 u\ \overline{u}\big|_0^T dx - \int u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dxdt,$$

donc

$$\langle Au, u\rangle + \overline{\langle Au, u\rangle} = \int_0^1 |u|^2\Big|^T dx - \int_0^1 |u|^2\Big| dx,$$

alors

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle = \int_0^1 |u(x,T)|^2 dx,$$

car

$$u(0,x) = 0,$$

d'où

$$\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle \geq 0$$

Exemple 2 On prend $A = \frac{\partial^3}{\partial t^3}$, de domaine de définition

$$D(A) = \left\{ u \in L^2(0,a) \; / \frac{\partial u}{\partial t},\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\; \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2(0,a),\; u(0) = 0,\; \frac{\partial u}{\partial t}(0),\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a) = 0 \right\},$$

alors A est un opérateur dissipatif.

Démonstration. Nous avons

$$\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle = \mathrm{Re}\int_0^a \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\,\overline{u}\,|_0^a\, dt - \mathrm{Re}\int_0^a \frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} dt = -\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 |_{t=a} \leq 0.$$

On pose

$$A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1} = (I - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3})^{-1}, \text{ pour } \; \varepsilon > 0$$

Les opérateurs A_ε^{-1} ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$g_\varepsilon - \varepsilon \frac{\partial^3 g_\varepsilon}{\partial t^3} = g \;,\;\; g_\varepsilon(0) = 0 \;,\; \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(0) = 0 \;,\; \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial t^2}(a) = 0$$

Donc le problème adjoint est

$$g_\varepsilon^* + \varepsilon \frac{\partial^3 g_\varepsilon^*}{\partial t^3} = g \;,\;\; g_\varepsilon^*(0) = 0 \;,\; \frac{\partial g_\varepsilon^*}{\partial t}(a) = 0,\; \frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial t^2}(a) = 0$$

Proposition 5 Soit $u \in L^2(0,a)$, alors

– $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|A_\varepsilon^{-1} u - u\|_{L_{2(0,a)}} = 0$

– $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\|(A_\varepsilon^{-1})^* u - u\right\|_{L_{2(0,a)}} = 0$

On note par $\Omega = [0,1] \times [0,T]$. Pour $u \in L^2(\Omega)$ on note par

$$u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} u, v_\varepsilon^* = \left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* u$$

Propriétés

On a

– $\frac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t^k} \in L^2(\Omega),\; k = \overline{0,3}$

D'autre part

– $u_\varepsilon(x,0)=0,\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,T),\ \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(x,T),\ \forall x\in[0,1]$

– $\frac{\partial^k v_\varepsilon^*}{\partial t^k}\in L^2(\Omega),\ k=\overline{0,3}$

De plus on a

– $v_\varepsilon^*(x,0)=0,\ \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}(x,T),\ \frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}(x,T),\ \forall x\in[0,1]$

– $\|A_\varepsilon^{-1}u\|_{L^2(\Omega)}\leq\|u\|_{L^2(\Omega)},\ \forall\varepsilon>0$

– $\left\|\left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* v\right\|_{L^2(\Omega)}\leq\|v\|_{L^2(\Omega)},\ \forall\varepsilon>0$

– $\langle A_\varepsilon^{-1}u,v\rangle_{L^2(\Omega)}=\left\langle u,\left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* v\right\rangle_{L^2(\Omega)}$

Si

$$u\in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x}\in L^2(\Omega),$$

alors

1. $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\in L^2(\Omega)$, de plus $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_\varepsilon$ et $u_\varepsilon(x,T)=A_\varepsilon^{-1}(u(0,T))$
2. $\dfrac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_\varepsilon^*$ et $u_\varepsilon^*(x,T)=\left(A_\varepsilon^{-1}\right)^*(u(0,T))$
3. Si $u\in L^2(\Omega)$,

alors

a- $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|A_\varepsilon^{-1}u-u\|_{L^2(\Omega)}=0$

b- $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left\|\left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* u-u\right\|_{L^2(\Omega)}=0$

Exemple 3 On prend $A=\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, de domaine de définition

$$D(A)=\left\{u\in H=L^2(0,a)/\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in L^2(0,a),\ u(0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(a)=0\right\},$$

alors A est un opérateur dissipatif .

Démonstration. Nous avons

$$\operatorname{Re}\langle Au,u\rangle=\operatorname{Re}\int_0^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}\,dt=\operatorname{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}\right|_0^a-\int_0^\alpha\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dt\leq0.$$

L'opérateur

$$u_\varepsilon=\left(A_\varepsilon^{-1}\right)u=(u-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}),$$

dont l'adjoint est

$$u_\varepsilon^*=\left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* u=-(u-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}),$$

a les mêmes propriétés que l'opérateur $A = \frac{\partial^3}{\partial t^3}$

L'$\varepsilon-$inégalité

On applique tout au long de ce travail l'$\varepsilon-$inégalité suivante :

$$\operatorname{Re}(a, b) \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \ \forall \varepsilon > 0$$

Chapitre 2

Position du problème et unicité de la solution

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème mixte pour équation aux dérivées partielles d'ordre quatre avec condition non classique. On montre l'unicité de la solution forte du problème dans un espace de Sobolev avec poids. La démonstration est basée sur deux estimations à priori.

2.2 Position du problème

Soit le rectangle

$$\Omega = (0,T) \times (0,1).$$

On considère l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f\ (t,x). \tag{2.1}$$

A l'équation (2.1) on associe la condition initiale

$$lu \ = \ u\ (0\ ,x) \ = \ \varphi(x) \quad \forall\ x \in (0,1), \tag{2.2}$$

les conditions aux bords

$$u(t,1) = 0 \qquad \forall t \in (0,T) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=0 \qquad \forall t\in(0,T) \tag{2.4}$$

$$u(t,0)=0 \qquad \forall t\in(0,T), \tag{2.5}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(t,\xi)d\xi=0 \text{ pour } t\in(0,T). \tag{2.6}$$

2.3 préliminaire

Dans ce travail, on montre l'unicité de la solution du problème $(2.1)-(2.6)$. Pour cela on ramène le problème $(2.1)-(2.6)$ à la forme opérationnelle suivante :

$$Lu=\mathcal{F},$$

où $L=(\mathcal{L},\ell)$. L'opérateur L est considéré de E dans$F$, où E un espace de Banach constitué des fonctions $u\in L^2(\Omega)$ vérifiant (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) et dont la norme est

$$\|u\|_E^2=\int_\Omega x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt+\int_\Omega\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2dxdt+\sup_{0\le t\le T}\int_0^1 x^2\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2+|u|^2\right\}dx. \tag{2.7}$$

F est un espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles $\mathcal{F}=(f,\varphi)$ obtenues comme complétées de l'espace $L^2(\Omega)\times W_2^2(0,1)$ par rapport à la norme suivante

$$\|\mathcal{F}\|_F^2=\|(f,\varphi)\|_F^2=\int_\Omega x^2\left|f(t,x)\right|^2dxdt+\int_0^1 x^2\left\{\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2+|\varphi|^2\right\}dx. \tag{2.8}$$

En utilisant la méthode des inégalités énergétiques proposées dans [31], on établit deux estimations à priori. On montre ensuite que l'opérateur L est un homéomorphisme linéaire entre l'espace E et l'espace F.

Lemme 6 *Pour toute fonction $u \in E$, on a :*

$$e^{(-ct)} \int_0^1 x^2 |u(\tau, x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 |\varphi|^2 dx + \int_0^1 \int_0^\tau x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt, \tag{2.9}$$

où la constante c vérifie $c \geq 1$.

Démonstration

En intégrant par partie l'expression

$$\int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dxdt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dxdt &= \int_0^1 x^2 \left[e^{(-ct)} u\bar{u} \right]_0^\tau dx + c \int_0^1 x^2 \int_0^\tau e^{(-ct)} \, u\bar{u} dx \, dt \\
&\quad - \int_0^1 x^2 \int_0^\tau e^{(-ct)} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
&= \int_0^1 x^2 \left[e^{(-ct)} |u|^2 \right]_0^\tau dx + c \int_0^1 x^2 \int_0^\tau e^{(-ct)} |u|^2 dxdt \\
&\quad - \int_0^1 x^2 \int_0^\tau e^{(-ct)} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt \\
&= \int_0^1 x^2 \left[e^{(-ct)} |u(\tau, x)|^2 - |u(0, x)|^2 \right] dx \\
&\quad + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 |u|^2 dxdt - \int_0^1 x^2 \int_0^\tau e^{(-ct)} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt.
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 e^{(-ct)} |u(\tau, x)|^2 dx - \int_0^1 x^2 |\varphi|^2 dx + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 |u|^2 dxdt \\
= \; &\int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dxdt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 \overline{u} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{(-c\tau)} x^2 |u|^2 dx - \int_0^1 x^2 |\varphi|^2 dx + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{(-c\tau)} x^2 |u|^2 dxdt \\
\leq \; &\int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 \left| u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \right| dxdt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{(-ct)} x^2 \left| \overline{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right| dxdt \, .
\end{aligned}$$

Mais

$$\left| u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \right| = \left| \overline{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right| .$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{(-c\tau)}x^2\left|u\right|^2 dx-\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx+c\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|u\right|^2 dxdt\\
\leq\ & 2\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|\overline{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right| dxdt\\
\leq\ & \int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|u\right|^2 dxdt+\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{(-c\tau)}x^2\left|u\right|^2 dx-\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx\\
\leq\ & (1-c)\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right| dxdt+\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 e^{(-c\tau)}x^2\left|u\right|^2 dx\leq\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx+\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right| dxdt.$$

Ce qui résulte

$$\int_0^1 e^{(-cT)}x^2\left|u\right|^2 dx\leq\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx+\int_0^1\int_0^\tau e^{(-ct)}x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dxdt.$$

Théorème 17 *Pour toute fonction $u\in E$, on a l'estimation à priori*

$$\left\|Lu\right\|_F\leq\ c\left\|u\right\|_E\qquad\text{où c est une constante.}\tag{2.10}$$

Démonstration

En utilisant (2.1) et la condition initiale (2.2), on obtient :

$$\mathcal{L}u=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{2}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=f\ (t,x).$$

On a

$$x\mathcal{L}u=x\frac{\partial u}{\partial t}+x\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=xf\ (t,x)=x\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}),$$

donc

$$\left|x\mathcal{L}u\right|\quad\leq\quad\left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right|\quad+\quad\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|.$$

D'où

$$x^2 \left|\mathcal{L}u\right|^2 \leq \quad \left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|^2 + 2\left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right| \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})\right|,$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$x^2 \left|\mathcal{L}u\right|^2 \leq \quad \left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \quad + \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})\right|^2 + \left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|^2,$$

d'où

$$x^2 \left|\mathcal{L}u\right|^2 \leq 2 \quad \left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \quad + \; 2\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|^2.$$

On obtient

$$\int\limits_{\Omega} x^2 \left|\mathcal{L}u\right|^2 dx\ dt \leq 2 \int\limits_{\Omega} \left[x^2 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \quad + \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|^2\right] dx\ dt. \tag{2.11}$$

En utilisant la condition (2.2), on obtient

$$\frac{\partial^2(lu)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(0.x)}{\partial x^2},$$

ce qui donne

$$x^2\left|\frac{\partial^2(lu)}{\partial x^2}\right|^2 = x^2\left|\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2}\right|^2,$$

donc

$$\int\limits_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2(lu)}{\partial x^2}\right|^2 dx = \int\limits_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(0.x)}{\partial x^2}\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq\ t\ \leq\ T}\int\limits_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial x^2}\right|^2 dx,$$

d'où

$$\int\limits_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2(lu)}{\partial x^2}\right|^2 dx \leq 2 \sup_{0\leq\ t\ \leq\ T}\int\limits_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx. \tag{2.12}$$

De la même condition (2.2), on a

$$\int\limits_0^1 x^2 \left|lu\right|^2 dx \;\; = \int\limits_0^1 x^2 \left|\ u\ (0\ ,x)\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq\ t\ \leq\ T}\int\limits_0^1 x^2 \left|\ u\ (t\ ,x)\right|^2 dx.$$

Ce qui résulte

$$\int\limits_0^1 x^2 \left|lu\right|^2 dx \;\; \leq 2\sup_{0\leq\ t\ \leq\ T}\int\limits_0^1 x^2 \left|\ u\ (t\ ,x)\right|^2 dx. \tag{2.13}$$

De (2.11), (2.12), (2.13), on obtient

$$\int_\Omega x^2 \left|\mathcal{L}u\right|^2 dx\ dt + \int_0^1 x^2 \left|\frac{\partial^2(lu)}{\partial x^2}\right|^2 dx + \int_0^1 x^2 \left|lu\right|^2 dx$$

$$\leq\ 2\ \int_\Omega \left[x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\ +\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|^2\right] dx\ dt$$

$$+2 \sup_{0\leq\ t\ \leq\ T}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx + \ 2\sup_{0\leq\ t\ \leq\ T}\int_0^1 x^2 \left|\ u\ (t\ ,x)\right|^2 dx.$$

Donc on a

$$\int_\Omega x^2 \left|f\right|^2 dx\ dt + \int_0^1 x^2 \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| dx + \int_0^1 x^2 \left|f\right|^2 dx$$

$$\leq\ 2\ \int_\Omega \left[x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\ +\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\right|^2\right] dx\ dt + 2\ \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x^2\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|u\right|^2\right\}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\left\|Lu\right\|_F^2 \leq\ 2\left\|u\right\|_E^2,$$

d'où

$$\left\|Lu\right\|_F \leq\ \sqrt{2}\ \ \left\|u\right\|_E\ .$$

Ce qui achève la démonstration.

Théorème 18 Pour toute fonction $u\ \in E$, on a l'estimation à priori

$$\left\|u\right\|_E \leq C\left\|Lu\right\|_F\ , \tag{2.14}$$

où la constante

$$C = \frac{14}{\inf(3\ , e^{-cT})}$$

Démonstration

Soit

$$J_g = \int_x^1 g(t,\xi)\ d\xi \quad \text{et} \quad Mu\ = x^2\frac{\partial u}{\partial t} + 2x\ J\frac{\partial u}{\partial t}.$$

On considère la forme quadratique

$$\mathrm{Re}\int_0^1\int_0^\tau \mathcal{L}u\ M\overline{u}\ \ dx\ dt \tag{2.15}$$

En multipliant (2.1) par

$$\overline{Mu} \quad \left(\text{on a } \overline{Mu} = M\overline{u} \right),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u \ M\overline{u} &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]\left(x^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + 2x \ J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right) \\
&= \left[x\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]\left(x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + 2J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right) \\
&= \left[x\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]\left(x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + 2J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathcal{L}u \ M\overline{u} \ dx &= \int_0^1 x^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + \int_0^1 2x\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&+ \int_0^1 x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + \int_0^1 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

d'où

$$\int_0^1 x^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \tag{2.17}$$

En intégrant par parties le deuxième terme de (2.16) et on prenant en considération les conditions aux limites, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\int_x^1 \frac{\partial u(t \ ,\xi)}{\partial t}d\xi = -\frac{\partial u(t \ ,x)}{\partial t}.$$

On a aussi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2x\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx &= -\int_0^1 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial u}{\partial t}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \\
&= -\left[2x\left(J\frac{\partial u}{\partial t}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right]_0^1 + 2\int_0^1\left(J\frac{\partial u}{\partial t}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + 2\int_0^1 xJ\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx \\
&= 2\int_0^1 J\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)J\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx + 2\int_0^1 xJ\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx \\
&= 2\int_0^1 xJ\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)J\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx - 2\int_0^1 xJ\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx \\
&= 2\int_0^1 J\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx - 2\int_0^1 J\frac{\partial u}{\partial t}x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$2\int_0^1 xJ\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx+2\int_0^1 x\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = \ 2\int_0^1 J\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

alors

$$Re\left(\int_0^1 x\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\right) = \ \frac{1}{2}\int_0^1 J\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx. \qquad (2.18)$$

Pour le troisième terme de (2.16), on a

$$\int_0^1 x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx=\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx$$

En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(x\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)\right]_0^1-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\\
&\quad -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx\\
&= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx\\
&= \left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right]_0^1+\int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx-\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)\right)\right]_0^1\\
&\quad +\int_0^1 \left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx\\
&= \int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+\int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}\right)dx\\
&= \int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+\int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dx\\
&= 2\int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dx
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^1 x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx=2\int_0^1 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dx. \qquad (2.19)$$

En intégrant par parties le quatrième terme de (2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx &= \left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right)dx\\
&= \int_0^1 2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\\
&= \left[2\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right]_0^1 - \int_0^1 2\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\\
&= -\int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^1 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)J\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -\int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx. \tag{2.20}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Re\left(\int_0^1 \mathcal{L}u\ M\overline{u}\ \ dx\right) &= \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_0^1 J\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + 2Re\left(\int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right)\\
&\quad -2Re\left(\int_0^1 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx\right) + Re\left(\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dx\right).
\end{aligned}$$

On a alors

$$Re\left(\int_0^1 \mathcal{L}u\ M\overline{u}\ \ dx\right) = \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_0^1 J\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + Re\left(\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dx\right). \tag{2.21}$$

En intégrant le troisième terme de (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dxdt &= \int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right)dxdt\\
&= \left[\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}dx\right]_0^\tau - \int_0^\tau\int_0^1 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2\partial t}dxdt + \int_0^\tau\int_0^1 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdt\\
=\ &\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}(\tau,x)}{\partial x^2}dx - \int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u}(0,x)}{\partial x^2}dx,
\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x^2\partial t}dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdt\right)\\
=&\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{u}(\tau,x)}{\partial x^2}dx-\int_0^1 x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}dx,
\end{aligned}$$

ce qui résulte

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^\tau\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}\right)dxdt\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{u}(\tau,x)}{\partial x^2}dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\int_0^\tau\int_0^1\mathcal{L}u\ M\overline{u}\ \ dxdt\right) &= \int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2dx.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des modules et l'ε- inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\int_0^\tau\int_0^1\mathcal{L}u\ M\overline{u}\ \ dxdt\right) &\leq \left|\int_0^\tau\int_0^1\mathcal{L}u\ M\overline{u}dxdt\right|\\
&\leq \int_0^\tau\int_0^1|\mathcal{L}u|\ \ |M\overline{u}|\,dxdt\\
&\leq \int_0^\tau\int_0^1|\mathcal{L}u|\ \ \left|x^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+2xJ\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|dxdt\\
&\leq \int_0^\tau\int_0^1|\mathcal{L}u|\,x^2\ \left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|dxdt\\
&\quad+2\int_0^\tau\int_0^1|\mathcal{L}u|\ \ |x|\left|J\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|dxdt\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\ \left(|\mathcal{L}u|^2+\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2\right)dxdt\\
&\quad+\int_0^\tau\int_0^1 x^2\,|\mathcal{L}u|^2\,dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2dxdt\\
&\leq \frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\,|\mathcal{L}u|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\ \left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2dxdt\\
&\quad+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2dxdt
\end{aligned}$$

donc on a

$$\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx.$$

$$\leq\ \frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\ \left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|J\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

d'où

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx\\ \leq\ &\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Pour$c\geq 1$, en utilisant le lemme 6, on obtient

$$\frac{e^{(-cT)}}{8}\int_0^1 x^2\left|u(\tau,x)\right|^2 dx\leq\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\varphi\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^1\int_0^\tau x^2 e^{-ct}\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dxdt\tag{2.23}$$

De l'équation (2.1), on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2\ &\leq\ x^2\left|\mathcal{L}u-\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\\ &\leq\ x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2+x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\\ &\leq\ 2x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2+2x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt\leq\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt\tag{2.24}$$

En additionnant membre à membre(2.22),(2.23)et(2.24), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt-\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt-\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\ e^{-ct}\ \left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|^2 dx\ dt\\ &+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx+\frac{e^{-c\tau}}{8}\int_0^1 x^2 e^{-c\tau}\left|u(\tau,x)\right|^2 dx+\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt\\ \leq\ &\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\ \varphi^2\right| dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx\\ \leq\ &\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx+\frac{e^{-c\tau}}{8}\int_0^1 x^2 e^{-c\tau}\left|u(\tau,x)\right|^2 dx\\ &+\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}.\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt\\ \leq\ &\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\ \varphi^2\right| dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx+\frac{e^{-c\tau}}{8}\int_0^1 x^2e^{-c\tau}\left|u(\tau,x)\right|^2 dx\\
&+\frac{1}{8}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}.\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt\\
\leq\ &\frac{7}{4}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\left|\ \varphi^2\right|dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
&e^{-c\tau}\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+e^{-c\tau}\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx+e^{-c\tau}\int_0^1 x^2\left|u(\tau,x)\right|^2 dx\\
&+e^{-c\tau}\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt\\
\leq\ &14\left(\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left|\ \varphi^2\right|dx+\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx+\int_0^1 x^2\left|u(\tau,x)\right|^2 dx\right)\\
\leq\ &\frac{14}{e^{-c\tau}}\left(\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|f(t,x)\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left|\ \varphi^2\right|dx+\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_0^\tau\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|^2 dxdt+\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 x^2\left\{\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2+\left|u(\tau,x)\right|^2\right\}dx\\
\leq\ &\frac{14}{e^{-c\tau}}\left(\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|f(t,x)\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left\{\left|\ \varphi^2\right|+\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2\right\}dx\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left\|u\right\|_E^2\leq\frac{14}{e^{-c\tau}}\left\|f\ \right\|_F^2,$$

d'où

$$\left\|u\right\|_E\leq\sqrt{\frac{14}{e^{-c\tau}}}\left\|f\ \right\|_F.$$

Ce qui achève la démonstration

2.4 Unicité de la solution

Théorème 19 *La solution du problème (2.1)-(2.6) est unique.*

Démonstration

De l'inégalité (2.10) on déduit que l'opérateur L est continu, et de l'inégalité (2.14) résulte qu'il admet un inverse L^{-1}continu et que l'ensemble des valeurs $R(L)$ est fermé, i.e : L est un homéomorphisme linéaire de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)$, ce qui prouve l'unicité de la solution.

Chapitre 3

Résolvabilité du problème

Pour montrer que le problème possède une solution unique, il suffit de montrer la densité de l'ensemble fermé $R(L)$ dans F. Pour cela, on montre le lemme suivant.

Lemme 7 *Soit*

$$D_0(L) = \{u \ / \ \ u \ \in D(L) : lu = 0 \ \}$$

Si pour tout $u \in D_0(L)$ et pour tout $\omega \in L^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega x^2 \mathcal{L}u \, \overline{\omega} dx \ dt \ = 0,$$

alors

$$\omega = 0$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega x^2 \mathcal{L}u \, \overline{\omega} dx \ dt \quad &= \quad 0 \Leftrightarrow \int_\Omega x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \overline{\omega} dx \ dt \ = 0 \\ &\Leftrightarrow \ -\int_\Omega x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \, \overline{\omega} dx \ dt = \ \int_\Omega x^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \overline{\omega} dx \ dt, \end{aligned}$$

D'où

$$-\int_\Omega x^2 \frac{\partial u}{\partial t} \, \overline{\omega} dx \ dt = \ \int_\Omega x \frac{\partial^2}{dx^2} \left(x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \, \overline{\omega} dx \ dt \tag{3.1}$$

Pour $\omega(x,t)$ donnée, on introduit la fonction suivante :

$$v(x,t) = \ x\int_1^x \frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} d\xi + \ x\int_1^x \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} d\xi.$$

On a

$$\int_0^1 v(x,t)dx = 0. \tag{3.2}$$

En intégrant par parties et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v(x,t)dx &= \int_0^1 x\int_1^x \left(\frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} \right) d\xi dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 \int_1^x \left(\frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} \right) d\xi \right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \left(\frac{\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x}}{x} + \frac{\omega(x,t)}{x^2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} + \omega(x,t) \right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[x\ \omega(x,t) \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\omega(1,t) = 0.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$x^2\omega = \ x^2 v + 2xJv = Nv. \tag{3.3}$$

En effet

$$J_g = \int_x^1 g(t,\xi)\ d\xi \qquad \text{et} \ \ v(y,t) = \ \left(y\int_1^y \frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} d\xi + \ y\int_1^y \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} d\xi \right)$$

Donc on a

$$J_v = \int_x^1 v(y,t)\ dy = \ \int_x^1 \left(y\int_1^y \frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} d\xi + \ y\int_1^y \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} d\xi \right) dy$$

En intégrant par parties en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\begin{aligned}
x^2 v + 2xJv &= x^2 v + 2x\int_x^1 y\int_1^y \left(\frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} \right) d\xi dy \\
&= x^2 v + 2x\left[\frac{1}{2}y^2 \int_1^y \left(\frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} \right) d\xi \right]_x^1 - 2x\left[\frac{1}{2}\int_x^1 y^2 \left(\frac{\frac{\partial \omega(y,t)}{\partial y}}{y} + \frac{\omega(y,t)}{y^2} \right) dy \right] \\
&= x^2 v - x^2\left[x\int_1^x \left(\frac{\frac{\partial \omega(\xi,t)}{\partial \xi}}{\xi} + \frac{\omega(\xi,t)}{\xi^2} \right) d\xi \right] - x\left[\int_x^1 \left(y\frac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} d\xi + \omega(y,t) \right) dy \right] \\
&= x^2 v - x^2 v - x\ \left[y\ \omega(y,t) \right]_x^1 = -x\left[\omega(1,t) - x\ \omega(x,t) \right] = x^2\omega.
\end{aligned}$$

De l'égalité (3.3), on a

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N\overline{v}\ dxdt &= \int_\Omega \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\left(x^2\overline{v} + 2xJ\overline{v}\right)\ dxdt \\
&= \int_\Omega \left(x\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\left(x\overline{v} + 2J\overline{v}\right)\ dxdt \\
&= \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(x\overline{v} + 2J\overline{v}\right)\ dxdt \\
&= \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ x\ \overline{v}dxdt + 2\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ J\ \overline{v}dxdt.
\end{aligned}$$

Donc

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N\overline{v}\ dxdt = \int_\Omega \frac{\partial^2}{dx^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ x\ \overline{v}dxdt + 2\int_\Omega \frac{\partial^2}{dx^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ J\ \overline{v}dxdt. \qquad (3.4)$$

En intégrant par partie le deuxième terme de membre gauche de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ x\ \overline{v}dx\ dt + 2\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) J\ \overline{v}dx\ dt \\
=\ & \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ x\ \overline{v}dxdt + 2\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ J\ \overline{v}\ dt\right]_0^1 - 2\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(J\ \overline{v}\right) dxdt \\
=\ & \int_\Omega \frac{\partial^2}{dx^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) x\ \overline{v}dxdt + 2\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\overline{v}dxdt \\
=\ & \int_\Omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) x\ + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)\overline{v}dxdt \\
=\ & \int_\Omega \left(0 + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ x\ \right)\overline{v}dxdt \\
=\ & \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]\overline{v}dxdt = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\overline{v}dxdt \\
=\ & \int_\Omega Au\ \overline{v}dxdt\ \ .
\end{aligned}$$

Donc

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N\overline{\overline{v}}\ dxdt = \int_\Omega Au\ \overline{\overline{v}}dx\ dt, \qquad (3.5)$$

où

$$Au = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de régularisation

$$J_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t})^{-1}\text{et}\ \ (J_\varepsilon^{-1})^*,$$

qui sont les solutions du problème

$$\begin{cases} \varepsilon \ \frac{dg_\varepsilon(t)}{dt} + g_\varepsilon(t) = g(t) \\ \\ \qquad g_\varepsilon(t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

et

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{dg_\varepsilon^*(t)}{dt} + g_\varepsilon^*(t) = g(t) \\ \\ \qquad g_\varepsilon^*(t)|_{t=T} = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

la solution a les propriétés suivantes :

Pour $g \in L^2(0,T)$, on a

$$g_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})g \ \in W_2^1(0,T) \ et \ g_\varepsilon^* = (J_\varepsilon^{-1})^* g \quad \in W_2^1(0,T).$$

On a aussi

$$g_\varepsilon(t)|_{t=0} = 0 \ \ et \ \ g_\varepsilon^*(t)|_{t=T} = 0.$$

Comme (J_ε^{-1}) commutative avec $\frac{\partial}{dt}$,

on a

$$\int_0^T |g_\varepsilon - g|^2 \, dt \to 0 \quad et \quad \int_0^T |g_\varepsilon^* - g|^2 \, dt \to 0 \quad pour \ \varepsilon \to 0.$$

En remplaçant dans l'équation(3.5) u par la fonction régulatrice $(J_\varepsilon^{-1})u$ et en utilisant la relation

$$AJ_\varepsilon^{-1} = J_\varepsilon^{-1}A,$$

on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N \overline{v}_\varepsilon^* \ dxdt = \int_\Omega Au \ \overline{v_\varepsilon^*} dx \ dt.$$

Donc

$$-\int_\Omega uN \overline{\frac{\partial}{\partial t} v_\varepsilon^*} \ dxdt = \int_\Omega Au \ \overline{v_\varepsilon^*} dx \ dt. \tag{3.8}$$

En passant à la limite, (3.8) est vérifiée pour toute fonction vérifiant les conditions $(2.2) - (2.6)$ telle que :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \in L^2(\Omega).$$

Le membre gauche de l'égalité (3.8), est une fonction linéaire continue en u, alors la fonction v_ε^* a pour dérivées

$$\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x},\ \frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial x^2} \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial x^2}\right),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial x^2}\right) \in L^2(\Omega),$$

et les conditions suivantes sont verifiées

$$v_\varepsilon^*|_{x=0} = \left.\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|_{x=0} = v_\varepsilon^*|_{x=1} = \left.\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|_{x=1} = 0. \tag{3.9}$$

De plus v_ε^* vérifie la condition intégrale (2.6). En remplaçant

$$u = \int_0^t v_\varepsilon^*(x,\tau)d\tau,$$

dans (3.5) et en utilisant (3.7), on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t v_\varepsilon^*(x,\tau)d\tau\right) N\overline{v}\ dxdt = \int_\Omega Au\ \overline{\overline{v}}dx\ dt\ ,$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega v_\varepsilon^* N\overline{\overline{v}}\ dxdt &= \int_\Omega A\overline{u\left(v_\varepsilon^* - \varepsilon\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}\right)}\ \overline{v}dx\ dt \\
&= \int_\Omega Au\overline{v_\varepsilon^*}dx\ dt\ - \varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dx\ dt \\
&= \int_\Omega Au\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\ dt\ - \varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dx\ dt\ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$-\int_\Omega v_\varepsilon^*\overline{Nu}\ dxdt = \int_\Omega Au\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx\ dt\ - \varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dx\ dt\ . \tag{3.10}$$

On a

$$
\begin{aligned}
\int_0^\tau \int_0^1 Au\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\ dt &= \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx\ dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\overline{u}\right]_0^\tau dx\ - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\overline{u}dx\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\overline{u(\tau,x)}dx\ - \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2}\right)\overline{u(0,x)}dx \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\overline{u}dx\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\overline{u(\tau,x)}dx\ - \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2}\right)\overline{lu}dx \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\overline{u}dx\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\overline{u(\tau,x)}dx\ - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\overline{u}dx\ dt.
\end{aligned}
$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\overline{u(\tau,x)}dx &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\overline{u(\tau,x)}\right]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u(\tau,x)}}{\partial x}dx \\
&= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right)\frac{\partial \overline{u(\tau,x)}}{\partial x}dx \\
&= -\left[x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{u(\tau,x)}}{\partial x}\right]_0^1 + \int_0^1 x^2\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{u(\tau,x)}}{\partial x^2}dx \\
&= \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2}\right|^2 dx
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \overline{u} dx\ dt \\
= & -\int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \overline{u}\right]_0^1 dt \\
& +\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} dx\ dt \\
= & \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} dx\ dt \\
= & \int_0^\tau \left[x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right]_0^1 dt-\int_0^\tau \int_0^1 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} dx\ dt \\
= & -\int_0^\tau \int_0^1\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx\ dt \\
= & -\int_0^\tau \left[\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]_0^1 dt+\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx\ dt \\
= & \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx\ dt \\
= & \int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]_0^1 dt-\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right) \frac{\partial u}{\partial t} dx\ dt \\
= & -\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right) \frac{\partial u}{\partial t} dx\ dt \\
= & -\int_0^\tau \int_0^1 A \overline{u} \frac{\partial u}{\partial t} dx\ dt.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\int_0^\tau \int_0^1 A u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx\ dt=\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2}\right|^2 dx-\int_0^\tau \int_0^1 A \overline{u} \frac{\partial u}{\partial t} dx\ dt.$$

Ce qui donne

$$\int_0^\tau \int_0^1 A u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx\ dt+\int_0^\tau \int_0^1 A \overline{u} \frac{\partial u}{\partial t} dx\ dt=\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2}\right|^2 dx,$$

d'où

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\Omega A u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx\ dt\right\}=\frac{1}{2} \int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2}\right|^2 dx.$$

On déduit que

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\Omega A u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx\ dt\right\} \geq 0. \tag{3.11}$$

En intégrant par partie le deuxième terme de membre gauche de (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dx\ dt &= -\varepsilon\int_0^\tau\int_0^1 Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dx\ dt\\
&= -\varepsilon\int_0^1 \left[Au\overline{v_\varepsilon^*}\ \right]_0^T\ dx+\varepsilon\int_0^\tau\int_0^1 A\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v_\varepsilon^*}dx\ dt\\
&= \varepsilon\int_0^\tau\int_0^1 A\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v_\varepsilon^*}dx\ dt\\
&= \varepsilon\int_0^\tau\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right)\overline{v_\varepsilon^*}dx\ dt\\
&= \varepsilon\int_0^\tau\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right)\overline{v_\varepsilon^*}\right]_0^1 dt-\varepsilon\int_0^\tau\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x}dx\ dt\\
&= -\varepsilon\int_0^\tau\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x}dx\ dt\\
&= -\varepsilon\int_0^\tau\left[\left(x^2\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x}\right]_0^1 dx\ dt\ +\varepsilon\int_0^\tau\int_0^1\left(x^2\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}dx\ dt\\
&= \varepsilon\int_0^\tau\int_0^1 x^2\left|\frac{\partial^2\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial x^2}\right|^2 dx\ dt\ .
\end{aligned}$$

D'où

$$\operatorname{Re}\left\{-\varepsilon\int_\Omega Au\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dx\ dt\ \right\}\geq 0. \tag{3.12}$$

En remplaçant (3.11) et (3.12) dans (3.10), on déduit que

$$\int_\Omega v_\varepsilon^*\overline{Nv}\ dxdt\leq 0.$$

Pour $\varepsilon\longrightarrow 0$, on déduit que

$$\int_\Omega vN\overline{v}\ dxdt\leq 0. \tag{3.13}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega vN\overline{v}\ dxdt=\int_\Omega v\left(x^2\overline{v}+2xJ\overline{v}\right)dxdt,$$

donc

$$\int_\Omega vN\overline{v}\ dxdt=\int_\Omega x^2\left|v\right|^2 dxdt+\int_\Omega 2xvJ\overline{v}dxdt. \tag{3.14}$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
2\int_{\Omega} xvJ\overline{v}dxdt &= 2\int_0^{\tau}\int_0^1 v\left(xJ\overline{v}\right)dxdt \\
&= 2\int_0^{\tau}\left[-2xJvJ\overline{v}\right]_0^1 dt + 2\int_0^{\tau}\int_0^1 JvJ\overline{v}dxdt - 2\int_0^{\tau}\int_0^1 x\overline{v}Jvdxdt \\
&= 2\int_0^{\tau}\int_0^1 JvJ\overline{v}dxdt - 2\int_0^{\tau}\int_0^1 x\overline{v}Jvdxdt \\
&= 2\int_{\Omega}\left|Jv\right|^2 dxdt - 2\int_0^{\tau}\int_0^1 x\overline{v}Jvdxdt.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$2\int_{\Omega} xvJ\overline{v}dxdt + 2\int_0^{\tau}\int_0^1 x\overline{v}Jvdxdt = 2\int_{\Omega}\left|Jv\right|^2 dxdt,$$

d'où

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{\Omega} 2xvJ\overline{v}dxdt\right\} = \int_{\Omega}\left|Jv\right|^2 dxdt. \tag{3.15}$$

En remplaçant (3.15) dans (3.14), on obtient

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{\Omega} vN\overline{v}\ dxdt\right\} = \int_{\Omega} x^2\left|v\right|^2 dxdt + \int_{\Omega}\left|Jv\right|^2 dxdt,$$

d'où

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{\Omega} vN\overline{v}\ dxdt\right\} \geq 0.$$

Ce qui donne

$$\int_{\Omega} x^2\left|v\right|^2 dxdt = 0 \text{ et } \int_{\Omega}\left|Jv\right|^2 dxdt = 0,$$

d'où

$$v = 0.$$

Ce qui implique que

$$x^2 v + 2xJv = 0$$

et par conséquent

$$x^2\omega = 0,$$

d'où

$$\omega = 0.$$

Théorème 20 *L'image $R(L)$de L coïncide avec F.*

Démonstration. Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si l'implication suivante est vraie.

$$\int_{\Omega} x^2 \mathcal{L}u\overline{f}\, dxdt + \int_0^1 x^2 \left(\frac{\partial^2 lu}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x^2} + lu\overline{\varphi} \right) dx = 0, \tag{3.16}$$

pour $u \in E$ arbitraire et $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in E$, implique que f et φ sont nulles.

En effet, en prenant $u \in D_0(L)$ dans (3.16), on obtient

$$\int_{\Omega} x^2 \mathcal{L}u\overline{f}\, dxdt = 0,$$

en utilisant le lemme 7, on a $f = 0$ et par conéquent on a

$$\int_0^1 x^2 \left(\frac{\partial^2 lu}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x^2} + lu\overline{\varphi} \right) dx = 0.$$

L'image de l'opérateur de trace l est partout dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\left[\int_0^1 x^2 \left(\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|^2 + |\varphi|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

et par conséquent $\varphi = 0$.

Donc $\varphi = 0$ et $f = 0$, et la présente démonstration est achevée.

Résumé

Dans ce travail on étudie un problème mixte avec condition intégrale pour une équation aux dérivées partielles. On démontre l'éxistence et l'unicité de la solution dans un espace de Sobolev avec poids. La démonstration est basée sur deux estimations à priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Mots Clés. Equation parabolique, inégalité énergétique, espace de Sobolev avec poids, condition intégrale.

Abstract

In this work, we study a mixed problem with an integral condition for a differential equation. The existence and uniqueness of the solution in Sobolev space are proved. The proof is based on two sides a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the considered problem.

Key words : Parabolic equation, Three-point boundary condition, Integral space variable condition, Energy inequalities, weighted Sobolev Space.

Bibliographie

[1] Allegretto W. Lin. and Zhou A. *Abox shememe for coupled systemes resulting from microsensor thermistor problemrs*, Dynam. Contin. DisceteImpuls.Systems, 5(1999), 1-4, 573-578.

[2] Bouziani A.and Benouar N.E : *Mixed Problem with an integral condition for a third order parabolic*, Kobe J.Math. 15, pp. 47-58(1998).

[3] Bouziani A.and Benouar N.E : *Problèm mixte avec condition intégrales pour une classe d'èquation parabolique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série1 321(1995), 1182.

[4] Benouar N.E ;Yurchuk, N.I. : *Mixed Problem with an integral condition for parabolic equation with the Bessel operator*, Differ. Equation, 27, N°12, pp. 1482-1487(1991).

[5] Cahlon B, Kulkarni D. M. and Shi P : *Stepwisestability for the heat equation with non local constrain*, SIAM J. Numer. Anal., 32(1995), 2, 571-593.

[6] Dezin A. A., *Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels.* Usp. Math. Naouk, T. 14(1987), n°, 22-73.

[7] Friderichs K : S*ymetric hyperbolic linear differential equation*, Comm. pure appl.math.7, N°2(1954), 345-392.

[8] Garding L., *Cauchy's problem for hyprbolic equations*, University of chicago, lecture notes, 1957.

[9] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et application.*

[10] Ionkin N. I, *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat condition with a non classical boundary condition*, Differ Uravn, 13(2)(1977), 294-304.

[11] J.Leray, *Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficient.Princeton, Just for adv.* Stydy, 1952.

[12] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math. 21(1963), 155-160.

[13] J. R.Cannon, *The one-dimensional heat equation* , in encyclopedia of mathematics and its applications23, Addison-Wesly, Mento Park, Ca(1984).

[14] Ladyzhenskaya O. A., *Mixed problem for hyperbolic equations,* Edition Mir nauka, 1974. difféeretielles opérationnells dans lerectangle, doklady akad. bssr (en russe), T. 30 $N^0$1 pp. 1061-1063.

[15] M.Denche, A. Memou, *boundary value problem with integral condition for alinear third-order equation* . J .Appl. Math. (2003), n°11, 553-567.

[16] M. Denche and A. L. Marhoune : *High-order mixed type differential equations with weighted integral boundary conditions.* Electronic journal of differential equation, vol. 2000(200), n°60, pp. 1-10.

[17] M. Denche and A. L. Marhoune, *Mixed Problem with non local boundary condition for a third-order partial differential equation of mixed type* .IJMMS 26 : 7(2001)417-426.

[18] M. Bouzit and N .Teyar, *High Order Mixed Type Differential Equations with Integral Boundary Condition.* Journal of Math. Analysis, vol. 3, 2009, no. 14, 681-687.

[19] M. Bouzit and N .Teyar, *A Class of Third Order Parabolic Equations with Integral Conditions.* Journal of Math. Analysis, vol. 3, 2009, no. 18, 871-877.

[20] N. I. Kamynin, *A boundary value problem in the theory of the condition with non classical boundry condition*, Th. Vychist. Mat. Fiz. 43(6)(1964), 1006-1024.

[21] Pulkina L. S, *A non local problem with integral condition for hyperbolic equations*, Electronic Journal of differential Equations, 45(1999), pp. 1-6.

[22] P. A.Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles.*

[23] Petrovsky I. G., *Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentilgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen*, bull. Univ d'etat, moscow, 1938, $N^0 7$, 1-74.

[24] P. Shiweak, *Solution to evolution problem with a nonlocal constraint*, Siam J.Anal, 24(1993), 46-58.

[25] S.Mesloub, A. Bouziani, *Mixed problemwith a weighted integral condition for a parabolic equation with the bessel operator*. Journal of Applied Mathematics and Stocstic Analysis, 15:3(2002), 277-286.

[26] Samarskii, A. A : *Some broblem in differential equations teory*, differentsial'nye uravnenya, 16 $N^0 11$, pp. 1221-1228 (1980).

[27] V.Trénoguine, Analyse fonctionnelle.

[28] Yurchuk N. I., *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form*$(\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}})+A$, Differetial Equations, 10, $N^0 5$ (1974), pp. 735-737.

[29] Yurchuk N. I., *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form*$(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}})+A$, Differetial Equations, 10, $N^0 4$ (1974), pp. 589-592.

[30] Y. S : Choi and K.Y. Chan, *A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising.* from electochemistry, Nonlinear Anal, 18(1992), 468-475.

[31] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an itegral condition for certain parabolic equations*, Differetial Equations, 22, pp. 1457-1463.

ملخص

ندرس في هذا العمل مسألة مختلطة بشرط تكاملي لمعادلة تفاضلية جزئية . نبرهن على وجود و وحدانية الحل في فضاء صوبليف بعيار . يعتمد البرهان على متراجحتين مسبقتين و على كثافة صورة المؤثر المولد بالمسألة المعتبرة.

الكلمات المفتاحية : معادلة مكافئة ، متراجحة طاقوية ، فضاء صوبليف بعيار ، شرط تكاملي

Résumé

Dans ce travail on étudie un problème mixte avec condition intégrale pour une équation aux dérivées partielles. On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace de Sobolev avec poids. La démonstration est basée sur deux estimations à priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Mots Clés. Equation parabolique, inégalité énergétique, espace de Sobolev avec poids, condition intégrale.

Abstract

In this work, we study a mixed problem with an integral condition for a differential equation. The existence and uniqueness of the solution in Sobolev space are proved. The proof is based on two sides a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the considered problem.

Key words : Parabolic equation, Three-point boundary condition, Integral space variable condition, Energy inequalities, weighted Sobolev Space.