



Thèse

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE

Doctorat en Sciences

Filière : Physique

Spécialité : Physique théorique

Thème :

Formulation des théories de jauge dans le cadre des algèbres déformées

Présenté Par :

Djamel Seffai

Thèse soutenue le 25/04/2024 devant le jury composé de :

N°	Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
01	Cherifa Azizi	Prof.	<i>Univ. Oum El Bouaghi</i>	Président
02	Mahmoud Merad	Prof.	<i>Univ. Oum El Bouaghi</i>	Promoteur et rapporteur
03	Abdelhafid Bounames	Prof.	<i>Univ. Jijel</i>	Examineur
04	Mekki Aouachria	Prof.	<i>Univ. Batna 1</i>	Examineur
05	Kamel Khounfais	Prof.	<i>Univ. Skikda</i>	Examineur

Remerciements

Eloge à Allah miséricordieux et aux noms des belles citations qui me comblent, lui le tout puissant qui m'a accordé la réverbération et les files de la patience et la sagesse du savoir je lui doit el hamd et mes louanges.

Dans cette même résonance et en contraste scientifique dans l'agréable et le plaisir je mets en exergue mes remerciements les plus vifs à mon directeur de thèse **Mahmoud Merad** professeur en physique à l'université d'Oum El Bouaghi. Lui qui à su m'accompagner dans mon parcours académique en préparant ma thèse, le plus frappant chez lui c'est sa dominance en podium culturel, de se fait il m'est cher de souligner qu'à travers ce libre instance et assistance de sa part m'a saisis pour autant pour réussir cette concrétisation.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté l'expertise de mon travail. Merci à Madame **Cherifa Azizi** professeur à l'université Oum Elbouaghi de m'avoir fait l'honneur de présider le jury, ainsi que Monsieur **Abdelhafid Bounames** Professeur à l'université Jijel, et Monsieur **Mekki Aouachria** professeur à l'université de Batna 1 et à **Kamel Khounfais** professeur à l'université de Skikda, qui ont bien voulu faire partie de ce jury.

Dans cette même alignée je tiens personnellement à formuler ma gratitude à mon collaborateur Dr. *B. Hamil* université de Constantine qui m'a été plus que jamais main forte et son implication directe dans nos papier.

Comme il se doit, je saisis ces noms amis collègues qui m'ont été bon entendeur de loin ou de proche, *Ahfir Maamar* université de Médéa, *Langour Omar* université de Médéa, ainsi que mes collegues de l'université de Laghouat.

Djamel SEFFAI.

ملخص

تعتبر إعادة صياغة نظرية الحقول الكمومية في وجود جبر مشوّه او بمساعدة علاقة تشتت مشوّهه ، وجهة نظر محتملة لإقتراح صياغة جديدة لنظرية لنظرية الجاذبية الكمومية.

في أطروحتنا ، ناقشنا أولا معادلات كلاين - جوردن و ديراك في فضاء الزخم بالتفاعل مع مجال كهرومغناطيسي منتظم بالإضافة إلى الكمون سلمي خطي حيث تمت الدراسة في إطار نموذج Magueiji و Smolin(MS) وداسة هزاز DKP في بعد 3D في نفس نموذج . في هذه الأطروحة ، أثبتنا أنّ عبارات أطيف الطاقة ليست متناظرة و أنّ الحالات الحدية تتوافق تماما مع نفس النتائج في الأدبيات ، و الدوال الموجية المرافقة عبّرنا عنها تحليليا و بدقة. كما ناقشنا حالة الإنتشار لمعادلة كلاين-جوردن ، ثم إشتقنا كثافة توليد الجسيمات عبر تقنية تحويلات بوجوليوبوف في سياق نموذج (MS).

بالإضافة الى ذلك ، و بشكل أكثر تحديدا ، نحن مهتمون بإعادة صياغة نظرية الحقول الكمومية في إطار نموذج Magueiji و Smolin(MS) ، هذا النموذج هو احد الاقتراحات ضمن النسبية مزدوجة الخصوصية (DSR). في هذا العمل وصفنا معادلات اويلر- لاغرونج بوجود مشتقات عليا. كما قمنا بحساب ناشر Feynman المعمم للحقل السلمي بالإضافة إلى حقل ديراك ، و نقاط تفاعل الحقول فيما بينها هي الأخرى تّماستنتاجها . لقد اقترحنا أيضا نموذجا تقريبا يتعلق بالثبات المعياري في اطار نظرية (DSR). في هذا السياق قدمنا أيضا تعميم لمعادلات ماكسويل .

كلمات مفتاحية:

ضمن النسبية مزدوجة الخصوصية (DSR) ، الجبر مشوّه ، معادلة Klein Gordon ، معادلة DKP ، معادلة Dirac .

Résumé

La reformulation de la théorie des champs dans le cadre des algèbres déformées ou sous l'aide d'une relation de dispersion modifiée est une candidate prometteuse pour proposer un nouveau raisonnement pour reformuler la théorie de la gravité quantique.

Dans notre thèse, en premier lieu, nous avons traité les équations de Klein-Gordon et de Dirac dans l'espace des impulsions en interaction avec un champ électromagnétique uniforme avec un potentiel scalaire linéaire dans le contexte de Magueijo et Smolin (MS) et ainsi le cas de l'oscillateur de DKP à 3D dans le même contexte du modèle de MS. Nous avons démontré que les expressions de spectres d'énergie ne sont pas symétriques et les cas limites coïncident exactement avec les résultats de la littérature. Les fonctions d'ondes correspondantes ont été déterminées de manière exacte et analytique. Aussi, dans le cas de l'état de diffusion pour l'équation de Klein-Gordon nous avons dérivé la densité de création des particules via la technique des transformations de Bogoliubov dans le contexte du modèle MS.

En deuxième lieu, nous nous intéressons plus précisément à la reformulation de la théorie des champs dans le cadre du modèle (MS), qui constitue l'une des propositions dans le concept de la relativité doublement restreinte (DSR). Dans ce contexte, les équations d'Euler-Lagrange sont décrites par un formalisme de dérivées d'ordre supérieur. Les propagateurs généralisés de Feynman du champ scalaire et du champ spinoriel ont été déterminés, ainsi que les sommets d'interaction des champs entre eux. Nous avons proposé un modèle approximatif pour l'invariance de jauge dans le cadre de la DSR. Dans ce cadre, une généralisation des équations de Maxwell a été réalisée.

Mots clés :

Relativité doublement restreinte (DSR), algèbre déformée, équation Klein Gordon, équation DKP, équation de Dirac.

Abstract

The reformulation of the field theory in a deformed algebra based on a modified dispersion relation, represents a possible way leading to new reasoning that will allow for thereformulation of quantum gravity theory.

In our thesis, we have treated the Klein-Gordon and Dirac equations in momentum space, which are subjected to the action of a uniform electromagnetic field and additionally a linear scalar potential in the context of MS, the study of the 3D-DKP oscillator in the context of the MS model. In this thesis, we proved that the energy spectra expressions are not symmetric and that the boundary cases coincide exactly with the same results in the literature. The wave functions are determined exactly and analytically. Additionally, for the scattering state of the Klein-Gordon equation, we have derived the density of created particle using the Bogoliubov transformation technique in the MS context

Moreover, we are more precially interested in reformulating field theory within the framework of the Magueijo and Smolin (MS) model, which constitutes one of the proposals in the concept of doubly special relativity (DSR). In this context, the Euler-Lagrange equations are described by higher-derivative formalism. As well the generalized Feynman propagators of the scalar field and the spinorial field were determined, and the vertexes of the interaction between fields. This led us to propose an approximate model for gauge invariance in the DSR framework, in this context, a generalization of Maxwell's equations has been achieved.

Key words :

doubly special relativity (DSR), deformed algebra, Klein Gordon equation, DKP equation, Dirac equation.

Table des matières

Liste de symboles	vii
Table des figures	viii
Introduction générale	1
1 Théorie de la relativité doublement restreinte	6
1.1 Introduction	6
1.2 Généralisation de la relation de dispersion	8
1.3 Le modèle de Magueijo-Smolín	11
1.4 Gravité de Rainbow	14
1.5 L'espace κ -Minkowski	17
2 Reformulation de la mécanique quantique relativiste dans le cadre DSR	20
2.1 Reformulation de l'équation de Klein-Gordon	21
2.2 Reformulation de l'équation de Dirac	30
2.3 Reformulation de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau	35
3 Extension de la DSR aux cas de la théorie quantique des champs	46
3.1 Lagrangien du champ scalaire dans le modèle (MS)	47
3.2 Etude de l'invariance relativiste de l'équation de Klein-Gordon généralisée	49

3.3	L'invariance de jauge de l'équation de Klein-Gordon généralisée	51
3.4	Règles de Feynman (I)	55
3.5	Lagrangien du champs de Dirac dans le modèle (MS)	57
3.6	Etude de l'invariance relativiste de l'équation de Dirac généralisée	59
3.7	L'invariance de jauge de l'équation de Dirac généralisée	60
3.8	Règles de Feynman (II)	64
3.9	Généralisation des équations de Maxwell	68
	Conclusion générale	71
	Bibliographie	73
	Annexe : Article Publié	84

Liste de symboles

c : la vitesse de la lumière.

\hbar : constante de Planck.

κ : énergies de Planck ; paramètre lié à l'échelle de Planck.

ℓ : longueur de Planck $\ell = \frac{1}{\kappa}$; paramètre lié à l'échelle de Planck.

G : la constante gravitationnelle.

$A_\mu = (V, A_i)$: le quadri-vecteur.

$p^\mu(E, \vec{p})$; $p^\mu(E, \mathbf{p})$: le quadri-vecteur énergie-impulsion.

Λ_μ^ν : les composantes des matrices de Lorentz.

λ_p : réel et positif lié à l'échelle de Planck.

$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$: Les coefficients de Christoffel.

$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$: Le tenseur de courbure de Riemann.

$R_{\mu\nu}$: tenseurs de Ricci.

R : le scalaire de Ricci.

$g_{\mu\nu}$: la métrique.

(x_μ, p_μ) : espace des phases non commutative.

(X_μ, P_μ) : espace de phase commutative.

$\phi(\mathbf{x}, t)$; $\tilde{\psi}(p_1)$; $F(p_1)$; Ψ ; $\varphi_s(p_1)$: les fonctions d'onde.

$H_{n-1}(u)$: polynômes d'Hermite.

$E_n(\kappa)$; E_n ; E_n^μ ; E_n^λ ; $E_{\phi,n}^\pm$; et $E_{H,n}^\pm$: les valeurs propres d'énergie.

$D_\chi(\rho)$; $D_\chi(-\rho)$; $D_{-\chi-1}(i\rho)$; $D_{-\chi-1}(-i\rho)$: les fonctions de cylindre parabolique.

\wp : la probabilité de création d'une paires de particule.

\mathcal{N} : La densité de création d'une paires de particule.

$\sigma = (\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z)$: les matrices de Pauli.

β^μ : les matrices de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP).

Y_{JM} : les harmoniques sphériques usuels de l'ordre de J .

Y_{JL1}^M : les harmoniques sphériques vectorielles.

$F_{nJ}(p)$, $G_{nJ}(p)$, $H_{nJL}(p)$ et $\phi_{nJ}(p)$: fonctions d'onde radiales.

$L_n^{(J+\frac{1}{2})}(p)$: polynômes Laguerre associés.

$N; n; J$: nombre quantique.

$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$: d'Alembertien.

$F_{\mu\nu}$: tenseur de champ électromagnétique.

\mathbf{E} : champ électrique.

\mathbf{B} : champ magnétique.

ρ : la densité de charge.

ε_0 : Permittivité électrique du vide.

μ_0 : perméabilité magnétique du vide.

$J^\mu (J^0, \mathbf{J})$: le quadri-vecteur du courant.

Table des figures

2.1	Spectre d'énergie E_n^μ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ	26
2.2	Spectre d'énergie E_n^λ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ	26
2.3	La densité \mathcal{N} de création des particules en fonction de la variable γ pour différentes valeurs de $x = \frac{E}{\kappa}$	29
2.4	Pour $s = 1/2$ (À gauche) et $s = -1/2$ (À droite), le spectre d'énergie E_n^μ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ	33
2.5	Pour $1/\kappa = 0.01$, $1/\kappa = 0$ et $1/\kappa = 0.001$ respectivement, le spectre E_n^μ en fonction de n pour différentes cas de spin $s = 0$, $s = -1/2$, $s = +1/2$	33
2.6	Pour $s = 1/2$ (\tilde{A} gauche) et $s = -1/2$ (\tilde{A} droite), le spectre d'énergie E_n^λ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ	34
2.7	Pour $1/\kappa = 0.01$, $1/\kappa = 0$ et $1/\kappa = 0.001$ respectivement, le spectre E_n^μ en fonction de n pour différentes cas de spin $s = 0$, $s = -1/2$, $s = +1/2$	34
2.8	Le rapport $\frac{E^+}{m}$ en fonction de $\frac{\omega}{m}$ pour différentes valeurs de $\frac{m}{\kappa}$ et $N = 2$	44
2.9	Le rapport $\frac{E^+}{m}$ en fonction de N pour des valeurs différentes de $\frac{m}{\kappa}$, et $\frac{\omega}{m} = 1$	45

Introduction générale

Ces dernières années, on observe un regain d'intérêt pour l'utilisation des algèbres déformées en physique et en mathématiques. Ces algèbres déformées apparaissent principalement dans le contexte de la gravité quantique. En particulier trois théories qui sont devenues des sujets de recherche très actifs.

La première est la géométrie non commutative a été proposée par A. Connes [1–3], cette théorie a permis de traiter les aspects géométriques de l'espace temps de manière compatible avec la mécanique quantique, en terme des notions algébriques $[x_i, x_j] = \theta_{ij}$, où θ_{ij} sont des paramètres réels antisymétriques [4–6]. Il est important de noter que la notion d'espace-temps non commutatif a émergé dans la théorie des champs non commutatifs et a fini par remplacer l'espace-temps ordinaire par un espace non commutatif et aussi les produits ordinaires par le produit étoile de Moyal [4–6]. De plus, cette notion de la non commutativité a émergé dans la théorie des cordes et dans la théorie des D -brane [4–10].

La deuxième est l'introduction d'une distance minimale [11–14], en mécanique quantique par Kempf et ses collaborateurs [15–19]. Elle repose sur la déformation des relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion. Cette déformation conduit à une généralisation du principe d'incertitude d'Heisenberg [15], où l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle. Cette longueur est supposée être proche de la longueur de Planck et considérée comme une limite naturelle, exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires dans le monde subatomique [17, 20], puisque les particules, qui sont considérées comme des cordes ne peuvent pas acquérir des distances plus petites que la dimension de la corde [21]. L'introduction de la longueur élémentaire dans la théorie des champs quantiques est équivalente à une régularisation. Notamment en permettant d'absorber les divergences ultraviolettes bien connues en théorie des champs quantiques [20, 22, 23]. A noter que l'algèbre de Kempf a été reformulé par Quesne et Tkachuk [24, 25] de manière covariante, préservant ainsi la symétrie de Lorentz. En effet, l'algèbre de Kempf n'est pas relativiste et ne respecte pas l'invariance sous les transformations de Lorentz.

La troisième est connue sous le nom de la relativité restreinte déformée, ou doublement restreinte (DSR). Elle a été élaborée par Amelino-Camelia sous le nom de DSR1 [26–31] dans le but de décrire efficacement la gravité quantique à l'échelle de Planck. Cette théorie a été proposée sur la base des formulations de Snyder [32], elle est liée à la géométrie non commutative, notamment le κ -espace de Minkowski [31]. Dans cette approche, la structure canonique des crochets de Poisson des variables de l'espace des phases est remplacée par une algèbre déformée. Historiquement, le développement mathématique de la théorie du DSR est basée sur la déformation de la symétrie de Poincaré, qui a été proposée au cours des années 1990 sous le nom de l'algèbre κ -Poincaré [33–37]. Plus récemment, cette algèbre κ -Poincaré a été explicitement établie comme une base mathématique pour réaliser la relativité restreinte déformée [38–42]. Cependant, une autre proposition, appelée DSR2, a été formulée pour présenter la théorie de la relativité restreinte déformée d'une manière plus simple, claire et cohérente. Ce modèle a été introduit par Magueijo et Smolin (MS) [43, 44]. On remarque également que la théorie de DSR est équivalente au concept de l'existence d'une longueur minimale [29, 30, 44].

Dans ce travail, nous nous intéressons à la théorie de la relativité spéciale déformée. Cette théorie repose sur le postulat de la nécessité de l'existence d'un autre paramètre dimensionnel indépendant de l'observateur. Ainsi, il y a deux échelles indépendantes, la vitesse de la lumière c et le paramètre (κ), qui devrait être lié à l'énergie de Planck. On peut dire que l'échelle de Planck n'est pas traitée comme une constante de couplage mais comme une échelle indépendante de l'observateur. Cette dernière est en bon accord avec la théorie des cordes [21]. Cependant, la théorie des cordes présente une contradiction avec un résultat fondamental de la relativité restreinte, connu sous le nom de la contraction des longueurs. Pour résoudre cette difficulté, Amelino-Camelia a proposé de considérer la théorie avec deux échelles indépendantes de l'observateur, qu'il a appelées la relativité doublement restreinte (DSR).

De plus, la physique des hautes énergies, en particulier celle des rayons cosmiques ultra-énergétiques (UHECR), offre un domaine d'étude qui pourrait nous permettre de découvrir des phénomènes qui violeraient la symétrie de Lorentz. Afin d'expliquer cette violation, une approche a été introduite par la théorie DSR (Double Special Relativity), qui modifie la relation de dispersion à l'échelle de Planck [26, 27]. Il est important de noter que le principe fondamental de la relativité restreinte, on parle ici de « l'invariance par changement de référentiel inertiel », est conservé et intact dans la théorie DSR. Cependant, la DSR remplace l'algèbre de Poincaré de la relativité restreinte par l'algèbre de κ -Poincaré (une algèbre quantique de Hopf). En d'autres termes, la structure des Transformations de Lorentz (LT) est modifiée aux énergies de l'échelle de Planck. Par conséquent, l'effet du paramètre κ se manifeste explicitement au sein des structures des Transformations de Lorentz de la DSR, que l'on appelle κ -LT [44–46].

Cependant, l'enjeu actuel en physique théorique réside dans la reformulation des systèmes physiques en fonction des trois constantes, G la constante gravitationnelle en plus de c et \hbar . La théorie de la relativité doublement restreinte représente un cadre théorique dans lequel un certain nombre de concepts physiques peuvent être exprimés de telle sorte d'unifier la vitesse c de la lumière et κ la masse de Planck dans le cas du DSR. Cette approche nous permet d'unifier automatiquement la constante \hbar , avec les constantes c et κ , au sein d'une même théorie lorsque l'on envisage l'extension de la théorie DSR vers la théorie des champs quantiques. Par conséquent, la reformulation de la théorie des champs quantiques dans le DSR est une étape intermédiaire pour unifier la gravité quantique et le modèle standard de la physique des particules.

Dans ce contexte, nous nous intéressons à la reformulation de la théorie des champs quantiques dans le cadre de la déformation de la relativité restreinte (DSR), ou le passage de la théorie classique des champs à la théorie quantique généralisée est décrit à l'aide d'opérateurs généralisés comme ceux introduits dans la littérature [46, 47]. L'outil conceptuel le plus récent de ces théories est le paramètre κ lié à l'échelle de Planck. Ce paramètre est devenu l'un des concepts de base de notre compréhension de la physique à très courte échelle

grâce à l'interprétation. Parmi les théories des champs possibles nous nous intéressons aux théories des champs qui sont décrites par les équations de Klein Gordon, Dirac et de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP), qui décrit la dynamique des particules scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1. Elle est covariante, du premier degré par rapport au temps et similaire à celle de Dirac. Il fournit un cadre pour comprendre les particules relativistes au-delà de celles décrites par le champ de jauge de spin 0 et 1.

Cette thèse est organisée selon la structure suivante :

- Introduction générale
- le premier chapitre concerne la présentation de la relativité doublement restreinte (DSR). Dans ce chapitre nous exposons les différents outils et techniques utilisés dans la reformulation de la relation de dispersion modifiée.
- Dans le deuxième chapitre, on présente les résultats de l'article [48]. Dans lequel on a traité le problème du confinement d'une particule de Klein-Gordon sous l'interaction d'un potentiel scalaire de Lorentz linéaire de la forme $S = \mu X$ et en présence d'un champs électromagnétique induit par le quadri-vecteur $A_\mu = (V, A_i)$; avec $A_i = \lambda(0, X, 0)$ et $V = \gamma X$. Nous avons aussi examiné l'effet de la théorie DSR dans le problème de la création de paires par la méthode de Schwinger. La dynamique d'une particule de Dirac a été étudiée dans le cadre de la (DSR) en présence d'un champ électromagnétique, et un potentiel linéaire de Lorentz. De plus, nous avons étudié le problème de l'oscillateur de DKP à trois dimensions dans le cadre de la DSR. Les solutions exactes sont obtenues et les spectres d'énergie sont déduits. Il contient également des corrections, qui dépendent du paramètre de déformation κ .
- Le troisième chapitre est réservé à la reformulation de la théorie des champs quantiques scalaires, spinoriels et leur interaction avec le champ de jauge dans le cadre de la relativité doublement restreinte (DSR). Nous nous intéressons également aux calculs des propagateurs de Feynman du champ scalaire, du champ de Dirac et du champ de jauge. Ensuite, nous proposons de traiter le problème de l'invariance sous les transformations de jauge et de Lorentz pour les équations généralisées de Klein

Gordon et de Dirac. Enfin, nous présentons les procédures suivies afin de généraliser les équations de Maxwell dans la relativité restreinte déformée (DSR).

— A la fin, nous avons présenté nos conclusions.

Théorie de la relativité doublement restreinte

Ce chapitre a pour objectif de présenter les grandes lignes de la théorie de la relativité doublement restreinte (DSR) (Doubly Special Relativity theory). En premier lieu, nous commençons par un exposé sur la relation de dispersion modifiée, suivie d'une présentation du modèle de Magueijo-Smolin. Ensuite, nous explorons la gravité de Rainbow et l'espace κ -Minkowski. En terminons ce chapitre par une discussion du scénario hypothétique d'une violation du CPT dans le modèle de Magueijo-Smolin.

1.1 Introduction

En 2002, Giovanni Amelino-Camelia a proposé une révision en profondeur des principes fondamentaux de la relativité restreinte d'Einstein (Einstein 1905). Ce physicien a élaboré une théorie connue sous le nom de théorie de la relativité doublement restreinte (DSR1) [29, 30], en y ajoutant une longueur minimale universelle à l'échelle de Planck. Sa contribution a permis d'ajouter un troisième postulat de plus pour la relativité restreinte d'Einstein. Son postulat annonce que tous les observateurs indépendamment en mouvement à l'échelle de Planck κ sont considérés comme des constantes universelles.

Ainsi, à la constante universelle absolue c qui désigne la vitesse de la lumière dans le vide et l'invariance des lois de la physique, la théorie de la relativité spéciale déformée s'ajoute

une nouvelle constante universelle absolue κ . À cause de l'existence des deux constantes universelles ($c; \kappa$) cette théorie prend le nom "relativité doublement spéciale".

La théorie de la relativité doublement spéciale est une nouvelle tentative pour aborder le problème de la gravité quantique. Cette théorie a été développée grâce à la géométrie non-commutative [31]. La théorie de la DSR est née comme une théorie valable dans le cas des basses énergies. La particularité de cette théorie réside dans sa formulation dans l'espace des impulsions au lieu de l'espace formé par les coordonnées d'espace-temps. Dans ce cadre, on note ici que la plus simple reformulation de la théorie DSR -appelée (DSR2)- a été proposée par Magueijo et Smolin [43, 44]. Parmi les résultats les plus remarquables de la théorie DSR; d'une part la modification des transformations de Lorentz et de l'autre la généralisation de la relation de dispersion énergie-impulsion.

La construction de la relations de dispersion non triviales a été proposée à l'origine par Unruh [49, 50], par analogie du trou noir sonique. Récemment, plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de cette version déformée de la relations de dispersion : la gravité quantique [51, 52], la théorie des cordes [53] et la théorie des champs non commutatif [54]. Les relations de dispersion modifiées ont été motivées aussi pour analyser le problème du trans-planckien [55–57].

Pendant des décennies, parmi les théories de la relation de dispersion généralisée qui attire l'intérêt en physique quantique se distingue la théorie des DSR. cette théorie a permis d'effectuer un raisonnement valable pour plusieurs problèmes qui demande une résolution théorique. Nous citons par exemple la coupure de Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) [26, 27]. Cette coupure propose une limite supérieure théorique de l'énergie des rayons cosmiques d'ultra haute énergie qui a été estimé à environ 5×10^{19} eV. Cependant, des observations par l'Akeno Giant Air Shower Array (AGASA) révèlent des rayons cosmiques d'énergie supérieure à cette limite. Ces observations contredisent certains points de la relativité restreinte et de la physique des particules telles que nous les connaissons aujourd'hui.

1.2 Généralisation de la relation de dispersion

On rappelle que les lois de Newton sont invariantes sous les transformations de Galilei, tandis que les équations de Maxwell ne respectent pas cette invariance, mais plutôt celle des transformations de Lorentz. À l'origine, la théorie de la Relativité Restreinte était destinée à résoudre le problème de la théorie de l'électrodynamique. De plus, Einstein a introduit la première échelle relativiste indépendante de l'observateur (l'échelle de la vitesse c). Sa relation de dispersion prend la forme

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + c^4 m^2. \quad (1.1)$$

D'autre part, le phénomène des rayons cosmiques à ultra haute énergie indique que la relativité restreinte ordinaire nécessite une extension. On parle ici des rayons cosmiques qui arrivent sur la Terre avec des énergies trop hautes comparativement à la limite GZK. Pour fournir une solution à l'anomalie des rayons cosmiques à ultra haute énergie, la recherche en gravitation quantique propose un scénario des relations de dispersion déformées de type général

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + c^4 m^2 + f(E, \vec{p}^2, E_p), \quad (1.2)$$

où E_p est une énergie à l'échelle de Planck. L'intérêt des relations de dispersion déformées réside également dans leur capacité à résoudre l'anomalie des rayons cosmiques GZK. Dans la formulation habituelle de la DSR, on évoque un ensemble de relations de dispersion déformées. [47]

$$E^2 f^2(E, p_i^2) - p_i^2 g^2(E, p_i^2) = m^2. \quad (1.3)$$

Pour trouver la nouvelle relation de dispersion (1.3), on doit présenter une simple méthode, commençons par les transformations de Lorentz dans l'espace des impulsions qui sont

$$p'_\mu = \Lambda_\mu^\nu p_\nu, \quad (1.4)$$

où Λ_μ^ν sont les composantes des matrices de Lorentz, p'_μ sont les composantes d'énergie et d'impulsion d'une particule dans le référentiel inertiel mobile qui se déplace à la vitesse v

par rapport au référentiel inertiel fixe, où p'_μ est exprimé en fonction des coordonnées p_ν de la même particule. Ainsi la transformation de Lorentz pour le quadri-vecteur $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, et donnée par

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad (1.5)$$

où $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Ces transformations sont représentées par des matrices de la forme

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi & 0 & 0 \\ \sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

dans la relativité restreinte ordinaire, on définitons,

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ avec } \beta = \tanh \chi \in [0; 1], \quad (1.7)$$

Il est intéressant d'utiliser un autre paramétrage

$$\cosh \chi = \frac{E}{m}, \quad \sinh \chi = \frac{|\vec{p}|}{m}, \quad \hat{\chi} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (1.8)$$

donc, en utilisant la relation $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$, on aboutis la "relation de dispersion"

$$E^2 = p_i^2 + m^2. \quad (1.9)$$

L'idée majeure de la théorie du DSR pour construire une relation de dispersion déformée est de remplacer la paramétrisation linéaire du boost par une fonction dépendant du paramètre de longueur de Planck. Sachant que ces relations sont non linéaires en énergie et en impulsion, cette paramétrisation garde la forme de l'algèbre du groupe de Lorentz sans changement. Parmi ces paramétrisations, celle d'Amelino-Camelia (DSR1) du boost non linéaire qui s'écrit sous la forme

$$\cosh \chi = \frac{e^{\lambda_p E} - \cosh \lambda_p m}{\sinh \lambda_p m}, \quad \sinh \chi = \frac{\lambda_p |\vec{p}| e^{\lambda_p E}}{\sinh \lambda_p m}. \quad (1.10)$$

Alors, la relation de dispersion énergie-impulsion déformée de la paramétrisation du (DSR1) est donnée par

$$2 \cosh \lambda_p E - \lambda_p^2 \vec{p}^2 e^{\lambda_p E} = 2 \cosh \lambda_p m. \quad (1.11)$$

Dans un esprit similaire, Smolin et Magueijo (DSR2) ont proposé dans la Réf. [43] une paramétrisation de boost différente qui prend la forme suivante

$$\cosh \chi = \frac{E(1 - \lambda_p m)}{m(1 - \lambda_p E)}, \quad \sinh \chi = \frac{|\vec{p}|(1 - \lambda_p m)}{m(1 - \lambda_p E)}. \quad (1.12)$$

Il est important de noter que le paramètre λ_p est réel et positif [43]. Les paramétrisations de l'Eq. (1.8) se réduisent à des relations de dispersions déformées de Smolin et Magueijo données par le modèle

$$E^2 \frac{(1 - \lambda_p m)^2}{(1 - \lambda_p E)^2} - \vec{p}^2 \frac{(1 - \lambda_p m)^2}{(1 - \lambda_p E)^2} = m^2. \quad (1.13)$$

L'approche la plus générale consiste à construire une relation de dispersion déformée pour la théorie du DSR, où la structure de l'algèbre des générateurs de boost est remplacée par des boosts déformés de manière non linéaire. Plus précisément, dans le DSR, le paramètre de boost χ est reformulé par

$$\cosh \chi = \frac{Ef(E, p_i^2)}{m}, \quad \sinh \chi = \frac{pg(E, p_i^2)}{m}, \quad \hat{\chi} = \frac{\mathbf{p}g(E, p_i^2)}{m}. \quad (1.14)$$

Ainsi, on déduit l'expression de la relation de dispersion Eq. (1.3) non linéaire, qui s'écrit [47]

$$E^2 f^2(E, p_i^2) - p_i^2 g^2(E, p_i^2) = m^2.$$

les relations de dispersion (1.3) sont formulées dans un espace des impulsions. Maintenant, essayons de présenter quelques exemples, comme mentionné dans la Réf. [58]

1) La théorie DSR1 d'Amelino-Camelia [29], qui s'obtient en reliant les fonctions f et g à la théorie de κ -déformée [58]

$$f(E, p_i^2) = \sinh \frac{E}{\kappa} + \frac{p_i^2}{2\kappa^2} e^{\frac{E}{\kappa}}; \quad g(E, p_i^2) = e^{\frac{E}{\kappa}}. \quad (1.15)$$

2) D'autres part, la théorie (DSR2) de Magueijo et Smolin est obtenue, l'orsque les fonctions f et g sont exprimées comme suit

$$f(E) = g(E) = \frac{1}{\left(1 - \frac{E}{\kappa}\right)}. \quad (1.16)$$

dans cette proposition les fonctions f et g admettent une singularité pour $E = \kappa$, par conséquent, nous avons une gamme d'énergies qui appartiennent à l'intervalle fini $0 < E < \kappa$ [40].

3) Le modèle de Herrantz est défini par les fonctions [59]

$$f(E, p_i^2) = \kappa \left(e^{\frac{E}{\kappa}} - 1 \right) ; \quad g(E) = 1. \quad (1.17)$$

4) Le modèle Heuson a été introduit dans les réf. [43, 47, 60]. Ce modèle est défini par la relation

$$f(E) = g(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{\kappa^2}}}. \quad (1.18)$$

1.3 Le modèle de Magueijo-Smolin

Les propositions de la relativité doublement restreinte (DSR) [26–31] visent à modifier la relativité restreinte dans le cadre de la déformation du groupe de Lorentz, mais avec des prédictions cinématiques différentes de celle de la relativité restreinte. En particulier, la suggestion de Magueijo-Smolin (MS) [43, 44] consiste à prendre une réalisation du groupe de transformation dans l'espace des impulsions sous la forme $\Lambda_U = U^{-1}\Lambda U$, où Λ représente la transformation de Lorentz ordinaire et $U(p_\mu)$ est un opérateur. Il est donc possible de modifier la relation de dispersion $p_\mu^2 = m^2$ par la relation $[U(p_\mu)]^2 = m^2$. L'opérateur U introduit une transformation donnée par [47]

$$U_a(E, p_i) = (U_0, U_i) = (Ef(E), p_i g(E)), \quad (1.19)$$

qui mène à la relation de dispersion modifiée, laquelle prend la forme suivante (1.3)

$$E^2 f^2(E, p_i^2) - p_i^2 g^2(E, p_i^2) = m^2.$$

On note ici, que l'opérateur U associée à l'équation (1.19) est une application de linéarisation. Pour établir une théorie des champs suffisante dans le cadre du DSR, en choisissant les champs scalaires comme des fonctions d'ondes planes, alors, on cherche une contraction linéaire qui fournissent la phase des champs scalaires qui doit être également un scalaire $p_a x^a$. c'est-à-dire le fait que nous exigeons que x et p soient des grandeurs physiques, la transformation $U^a(x)$ doit se contracter linéairement avec $U_a(p)$ par [47]

$$U_a(p)U^a(x) = p_a x^a. \quad (1.20)$$

Par conséquent, l'opérateur U agit sur les coordonnées de position sous la forme [47]

$$U^a(x) = (U^0, U^i) = \left(\frac{t}{f(E)}, \frac{x^i}{g(E)} \right). \quad (1.21)$$

On déduit directement les transformations déformées de Lorentz selon l'axe (Ox) à partir de l'application directe de l'opérateur U sur les transformations habituelles de Lorentz [47]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t'}{f(E')} = \frac{\gamma}{f(E)} \left(t - vx \frac{f(E)}{g(E)} \right) \\ \frac{x'}{g(E')} = \frac{\gamma}{g(E)} \left(x - vt \frac{g(E)}{f(E)} \right) \\ \frac{y'}{g(E')} = \frac{y}{g(E)} \\ \frac{z'}{g(E')} = \frac{z}{g(E)} \end{array} \right. . \quad (1.22)$$

Par conséquent, les transformations de Lorentz de l'espace-temps dépendent maintenant de l'énergie, et l'espace-temps est devenu intrinsèquement mélangé à l'énergie-impulsion. Les transformations (1.22) ont pour invariant [47]

$$s^2 = \eta_{ab} U^a(x) U^b(x) = -\frac{t^2}{f^2} + \frac{x^2}{g^2}. \quad (1.23)$$

Maintenant, la métrique de l'espace est donnée par [47]

$$g_{ab}(E) = \text{diag} \left[-\frac{1}{f^2(E)}, \frac{1}{g^2(E)}, \frac{1}{g^2(E)}, \frac{1}{g^2(E)} \right]. \quad (1.24)$$

En utilisant l'expression $g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c$, également nous devrions avoir la métrique inverse [47]

$$g^{ab}(E) = \text{diag}[-f^2(E), g^2(E), g^2(E), g^2(E)].$$

La transformation de Lorentz déformée permet de calculer l'intervalle de temps propre par rapport aux temps impropre [47]

$$\Delta t' = \gamma \frac{f(E')}{f(E)} \Delta t, \quad (1.25)$$

et la longueur propre s'écrit en fonction de la longueur impropre par [47]

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma} \frac{f(E')}{f(E)} \Delta x. \quad (1.26)$$

On remarque que la notions de contraction ou de dilatation dépend de l'étude du facteur $\frac{1}{\gamma} \frac{f(E')}{f(E)}$, Ainsi, il est possible d'avoir des longueurs (/temps) qui subissent une contraction ou une dilatation selon que le facteur $\frac{1}{\gamma} \frac{f(E')}{f(E)}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Rappelons ici qu'ils existent plusieurs travaux concernant les différentes transformation, citons par exemples : [43, 61–65]. Dans le présent travail, nous avons choisis la forme de U proposée par Magueijo-Smolin donnée par

$$U^a(x) = (U^0, U^i) = \left(\frac{t}{\frac{1}{(1-\ell E)}}, \frac{x^i}{\frac{1}{(1-\ell E)}} \right). \quad (1.27)$$

Dans ce cas, il a été constaté que les transformations Eq. (1.22) du quadrivecteur d'énergie-impulsion selon la direction x prennent la forme

$$\begin{cases} E' = \frac{\gamma(E-vp_x)}{1+(\gamma-1)\ell E-\gamma\ell v p_x} \\ p'_x = \frac{\gamma(p_x-vE)}{1+(\gamma-1)\ell E-\gamma\ell v p_x} \\ p'_y = \frac{p_y}{1+(\gamma-1)\ell E-\gamma\ell v p_x} \\ p'_z = \frac{p_z}{1+(\gamma-1)\ell E-\gamma\ell v p_x} \end{cases}, \quad (1.28)$$

où $\ell = \frac{1}{\kappa}$ est la longueur de Planck (κ est l'énergie de Planck). Ces transformations contiennent les invariantes de la vitesse de la lumière " c " et la longueur de Planck " ℓ ". Lorsque $\ell \rightarrow 0$, cette transformations se rédui à celle de la relativité restreinte. On déduit ainsi, un invariant modifié

$$\|p\|^2 = \frac{\eta_{ab}p^a p^b}{(1-\ell E)^2}. \quad (1.29)$$

En regardant de plus près ces transformations, nous arrivons au changement quadrivecteur-impulsion p_μ suivante

$$P_\mu = \frac{p_\mu}{(1 - \ell p_0)}, \quad (1.30)$$

alors les transformations MS deviennent

$$\begin{cases} P'_0 = \gamma(P_0 - vP_x) \\ P'_x = \gamma(P_x - vP_0) \\ P'_y = P_y \\ P'_z = P_z \end{cases}. \quad (1.31)$$

Ces dernières équations décrivent les mêmes transformations de Lorentz ordinaires pour l'espace des impulsions. Par conséquent, les transformations MS sont probablement une re-description des transformations de Lorentz habituelles dans les coordonnées non conventionnelles [66, 67]. Ainsi, on trouve les transformations déformées de Lorentz selon l'axe (Ox)

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) [1 + (\gamma - 1)\ell E - \gamma\ell v p_x] \\ x' = \gamma(x - vt) [1 + (\gamma - 1)\ell E - \gamma\ell v p_x] \\ y' = y [1 + (\gamma - 1)\ell E - \gamma\ell v p_x] \\ z' = z [1 + (\gamma - 1)\ell E - \gamma\ell v p_x] \end{cases}. \quad (1.32)$$

On utilise les relations (1.27) et (1.23) pour déduire l'invariant suivant :

$$s^2 = \eta_{ab} U^a(x) U^b(x) = \frac{-t^2 + x_i^2}{(1 - \ell E)^2}. \quad (1.33)$$

1.4 Gravité de Rainbow

Pour incorporer la relativité générale dans le cadre de la DSR, Magueijo et Smolin ont proposé un modèle de gravité dans [68], où la métrique est remplacée par une famille de métriques dépendant d'un paramètre lié à l'énergie de Planck et dépendant de l'énergie de la particule étudiée. Ainsi, si nous changeons le système de coordonnée d'une quadrivecteur

x_μ ou p_μ à une autre quadrivecteur (1.27) ou (1.19), ce changement conduit au modelage du métrique. Cet article [68], expose une application de cette théorie sur les solutions modifiées de l'Univers de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

La métrique de Friedmann Robertson- Walker (FRW) est une métrique à la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (1.34)$$

qui permet de décrire un univers homogène et isotrope sur des échelles cosmologiques. Alors, pour la description de l'évolution de l'univers dans le cadre du DSR en exige la symétrie usuelles et selon l'Eq. (1.24), Donc la métrique de FRW donnée par

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{f^2(E)} + \frac{a^2(t)}{g^2(E)} [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (1.35)$$

où $a^2(t)$ est le facteur d'échelle qui indique la taille de l'univers à chaque instant. Maintenant, la projection des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie des sections spatiales de l'univers permet d'écrire l'élément de longueur d'espace-temps en fonction des coordonnées sphérique sous la forme de FRW[68]

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{f^2(E)} + \frac{a^2(t)}{g^2(E)} \left[\frac{dr^2}{1-Kr} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (1.36)$$

le terme $\frac{a^2(t)}{1-Kr}$ est incluse la courbure de l'espace, $a(t)$ le facteur d'échelle qui indique la taille de l'univers à chaque instant et K est un entier exprimant la courbure spatiale. $K = +1$ correspond au modèle isotrope, décrivant un espace courbe fermé de géométrie sphérique et de volume fini. $K = 0$ correspond au modèle isotrope euclidien décrivant un espace plat infini. $K = -1$ correspond au modèle isotrope décrivant un espace courbe ouvert de géométrie hyperbolique et de volume infini.

Les coefficients de Christoffel s'écrivent à partir du tenseur métrique de la forme (1.36)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (1.37)$$

On deduit les symboles de Christoffel non nuls[68]

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{f^2(E)}{g^2(E)} a \dot{a} \gamma_{ij}, \quad (1.38)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.39)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2} \gamma^{im} (\partial \gamma_{km,j} + \partial \gamma_{mj,k} - \partial \gamma_{jk,m}), \quad (1.40)$$

avec

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-Kr} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Le tenseur de courbure de Riemann est donné par

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\mu. \quad (1.42)$$

Cela conduit aux composants du tenseur de Riemann [68]

$$R_{i0j}^0 = \frac{f^2(E)}{g^2(E)} a \ddot{a} \gamma_{ij}, \quad (1.43)$$

$$R_{00j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.44)$$

$$R_{jkm}^i = \tilde{R}_{jkm}^i + \frac{f^2(E)}{g^2(E)} \dot{a}^2 (\delta_k^i \gamma_{jm} - \delta_m^i \gamma_{jk}), \quad (1.45)$$

avec

$$\tilde{R}_{jkm}^i = \tilde{\Gamma}_{jm,k}^i - \tilde{\Gamma}_{jk,m}^i + \tilde{\Gamma}_{nk}^i \tilde{\Gamma}_{jm}^n - \tilde{\Gamma}_{nm}^i \tilde{\Gamma}_{jk}^n. \quad (1.46)$$

Les tenseurs de Ricci, $R_{\mu\nu}$, sont

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.47)$$

$$R_{ij} = \gamma_{ij} \left(\frac{f^2(E)}{g^2(E)} (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2) + 2K \right). \quad (1.48)$$

Par contraction du tenseur de Ricci, $R_{\mu\nu}$, avec la métrique $g_{\mu\nu}$, on aura le scalaire de Ricci

R , avec $g_{ij} = a^2 \gamma_{ij}$

$$R = 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3f^2(E) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + 6g^2(E) \frac{K}{a^2}. \quad (1.49)$$

1.5 L'espace κ -Minkowski

Dans cette section, nous allons présenter un nouvel ensemble de variables d'espace des phases qui obéissent aux crochets de Poisson canoniques (commutateurs). Ces variables, introduites par l'espace des phases κ -Minkowski [34, 36], sont transformées de manière conventionnelle sous les transformations de Lorentz. Le κ -Minkowski est un espace-temps non commutatif associé à l'algèbre de Lie [5], dont les coordonnées satisfont les relations de commutation suivantes

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [x_i, x_0] = \frac{i}{\kappa} x_i = i\ell x_i. \quad (1.50)$$

L'importance de κ -Minkowski réside dans l'homogénéité de l'espace de la déformation de l'algèbre quantique de Poincaré en $D = 4$ [69]. Le choix des générateurs de l'algèbre de Poincaré déformé n'est pas unique. En exprimant ses générateurs dans la base des biproducts croisés [34], il est possible de voir que κ -Poincaré agit de manière covariante comme une algèbre de Hopf sur un espace non commutatif. A la limite $\kappa \rightarrow \infty$ ($\ell \rightarrow 0$) on retrouve l'espace de Minkowski standard, avec le groupe de Poincaré ordinaire.

Dans l'espace de κ -Minkowski, la représentation de l'algèbre Heisenberg dans l'espace des phases non commutative (x_μ, p_μ) , s'écrit sous la forme

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [E, p_i] = [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, E] = 0, \quad (1.51)$$

$$[x_i, x_0] = i\ell x_i, \quad [p_i, x_0] = -i\ell p_i, \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad [x_0, E] = -i(1 - \ell E). \quad (1.52)$$

Dans le cadre classique, l'algèbre de l'espace des phases non commutative (x_μ, p_μ) est interprétée comme des crochets de Poisson. On peut les réécrire sous la forme condensée suivante [39–42] [46][70, 71]

$$[x_\mu, x_\nu] = \ell (x_\mu \eta_\nu - x_\nu \eta_\mu), \quad [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [x_\mu, p_\nu] = -g_{\mu\nu} + \ell \eta_\mu p_\nu, \quad (1.53)$$

où $\eta_0 = 1$, $\eta_i = 0$, et la métrique $g_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Il est très important de noter qu'il existe une transformation entre les coordonnées (x_μ, p_μ) de l'espace des phases non commutative vers d'autres coordonnées d'espace de phase commutative notées par (X_μ, P_μ)

[46],

$$X_\mu = (1 - \ell p_0)x_\mu, \quad P_\mu = \frac{p_\mu}{(1 - \ell p_0)}. \quad (1.54)$$

Rappelons que ces variables sont associés aux lois de groupe de Lorentz classique, ils satisfont l'ensemble des relations de commutations suivant :

$$[X_\mu, X_\nu] = 0, \quad [P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [X_\mu, P_\nu] = -g_{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

dans l'espace des phases (X_μ, P_μ) les coordonnées ne sont pas physiques. Alors, pour dériver leur inverse en termes de coordonnées physiques x_μ, p_μ dans le modèle MS il suffit de écrire.

$$x_\mu = (1 + \ell P_0)X_\mu, \quad p_\mu = \frac{P_\mu}{(1 + \ell P_0)}, \quad (1.56)$$

$$X_\mu = (1 - \ell p_0)x_\mu, \quad P_\mu = \frac{p_\mu}{(1 - \ell p_0)}. \quad (1.57)$$

Ensuite, nous considérons qu'une particule de masse m dans le modèle MS, la relation de dispersion est représentée en fonction de l'énergie de Planck κ , de la quantité de mouvement P_μ et de l'énergie E par :

$$m^2 = P_0^2 - P_i^2 = \frac{p_0^2 - p_i^2}{(1 - \ell p_0)^2} = \frac{E^2 - p_i^2}{(1 - \ell E^2)^2}, \quad \ell = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.58)$$

En résolvant (1.58), on obtient deux valeurs différentes pour l'énergie E : [72]

$$E^\pm = \frac{-\ell m^2 \pm \sqrt{(1 - \ell^2 m^2) \mathbf{p}^2 + m^2}}{(1 - \ell^2 m^2)}, \quad (1.59)$$

l'énergie positive de la particule s'écrit [72]

$$E^+ \sim \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{(1 + \ell m)} = E^{NR} + \frac{m}{(1 + \ell m)}, \quad (1.60)$$

où $E^{NR} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ est l'énergie non relativiste. L'énergie négative de la particule est [72]

$$E^- \sim - \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{(1 - \ell m)} \right) = - \left(E^{NR} + \frac{m}{(1 - \ell m)} \right). \quad (1.61)$$

L'expression (1.59) est non-symétrique, il serait intéressant de voir une discussion sur la violation de la symétrie C, P et T dans ce cadre de déformation, étant donné que c'est un sujet actuellement débattu dans la littérature. En relativité restreinte ordinaire, l'énergie est donnée par $E^\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ et sous l'inversion temporelle, nous considérons la transformation discrète $t \xrightarrow{\Lambda} -t$, appliquée à un champ de Klein-Gordon classique $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(x)$.

$$\phi'(x') = \Lambda\phi(x). \quad (1.62)$$

Considérons

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt}\Phi(\mathbf{x}). \quad (1.63)$$

L'application de (1.62) conduit à

$$\phi'(\mathbf{x}, -t) = \Lambda e^{-iEt}\Phi(\mathbf{x}) = e^{+iE't}\Lambda\Phi(\mathbf{x}). \quad (1.64)$$

Les équations (1.64) sont en accord avec la condition

$$\Lambda e^{-iEt} = e^{+iE't}\Lambda. \quad (1.65)$$

L'invariance de la fonction d'onde exige que Λ soit choisi tel que $E' = -E$. Cette condition conduit à l'invariance des relations de dispersion, exprimée par $E' = -E$. Cependant, en appliquant ce résultat à la DSR, les relations de dispersion (1.59) se transforment différemment, comme le montre

$$(E^\pm)' = -\left(\frac{\ell m^2 \mp \sqrt{(1 - \ell^2 m^2)\mathbf{p}^2 + m^2}}{(1 - \ell^2 m^2)}\right) \neq -E^\pm. \quad (1.66)$$

On remarque que, contrairement à la relativité restreinte, la relation de dispersion n'est pas invariante pour la transformation $E \rightarrow -E$. Ainsi, la violation de la symétrie par la transformation discrète $t \xrightarrow{\Lambda} -t$ est très claire, selon ce raisonnement, la violation de la symétrie CPT semble inévitable dans le cadre de la DSR.

Reformulation de la mécanique quantique relativiste dans le cadre DSR

La mécanique quantique relativiste constitue une branche essentielle de la physique moderne. Elle s'appuie sur les équations relativistes de Klein-Gordon (KG), de Dirac et de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Ainsi, l'étude et les applications de ces équations ont joué un rôle majeur dans le développement et la compréhension des phénomènes fondamentaux de l'univers. D'un autre côté, il convient de noter que les problèmes de la physique à hautes énergies qui sont traités dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, où les interactions entre particules élémentaires sont considérées comme des potentiel.

Dans la littérature, l'oscillateur harmonique quantique est un modèle important en physique, car il est applicable à une grande variété de systèmes physiques, tels que les molécules et les phonons. Le potentiel scalaire de Lorentz joue un rôle majeur dans le modèle de sac, ainsi que l'explication du phénomène de confinement des quarks dans les hadrons [73], autrement dit, le potentiel scalaire peut être interprété comme un terme de masse efficace en physique des solides pour décrire les impuretés dans les cristaux [74].

On peut dire que les équations relativistes de Klein-Gordon (KG), de Dirac et de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) décrivent bien le comportement des particules subatomiques dans des conditions relativistes. Cependant, ces équations ne prennent pas en compte les

effets quantiques de la gravitation, qui peuvent entraîner des écarts mineurs par rapport aux résultats expérimentaux. Récemment, l'étude de ces équations dans une algèbre déformée est devenue un domaine de recherche actif. En outre, cette algèbre déformée est perturbée la structure de l'espace-temps. Cela conduit à l'idée d'incorporer la gravité dans l'étude des systèmes quantiques. Dans le cas de la mécanique quantique relativiste, divers problèmes ont été traités : le rôle de la modification du principe d'incertitude de Heisenberg à la généralisation du champ électromagnétique [75] ; l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau avec l'algèbre de Snyder-de Sitter [76] ; les particules relativistes dans le cadre du principe d'incertitude généralisé en interaction avec un mélange de potentiel linéaire scalaire et vectoriel [77].

L'objectif de ce chapitre est de résoudre de manière exacte l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac à $(3 + 1)$ dimensions, où la particule est soumise à un mélange de potentiel scalaire de confinement et à un champ électromagnétique uniforme. Nous examinons également les effets du DSR dans le problème de la création des paires. Dans la dernière section de ce chapitre, nous discutons l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [78–80], qui est une équation relativiste du premier ordre, cette équation modélise les particules de spin 0 et 1. Alors, nous reformulons le problème de l'oscillateur harmonique de DKP à 3-dimensions, dans le cadre de la théorie du DSR.

2.1 Reformulation de l'équation de Klein-Gordon

2.1.1 États liés

En présence d'un champ électromagnétique représenté par le quadrivecteur $A_\mu(V, A_i)$ et en présence d'un potentiel scalaire $S(X)$, la dynamique de la particule de Klein-Gordon en $(3 + 1)$ dimensions est décrite par l'équation suivante :

$$[(P_i - eA_i(X))^2 + (m + S(X))^2 - (P_0 - V(X))^2] \psi = 0. \quad (2.1)$$

Avant d'entamer l'étude de l'équation ci-dessus dans le cadre de la théorie DSR, il est

important de noter que certaines études classiques et quantiques ont été effectuée en utilisant ce modèle dans une série de travaux [45, 81] qui approuve une équivalence entre la relation de dispersion et celle de l'équation de Klein-Gordon libre déformée dans le cadre DSR.

Cela se traduit par la formulation d'action du κ -particule libre déformée. Il est également démontré que les solutions correspondent à la définition de la relation de dispersion correcte. Nous nous intéressons au choix suivant :

$$A_i = \lambda(0, X, 0); \quad S = \mu X; \quad V = \gamma X, \quad (2.2)$$

où A_i , S et V varient linéairement avec x . A_i est le potentiel électromagnétique qui décrit un champ magnétique uniforme \vec{B} suivant l'axe z . Le potentiel linéaire est un modèle important en mécanique quantique, il permet de décrire le mouvement et le confinement des quarks dans un champ gravitationnel ou électrique uniforme [82].

Donc, en dérivant maintenant l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'une particule de Klein-Gordon de masse m , en substituant l'expression de $A_\nu(V, A)$, $S(X)$ dans l'équation (2.1), et en utilisant la représentation (1.54) pour X_ν eq.(2) et pour P_ν . Alors, on obtient dans l'espace des impulsions l'équation différentielle suivante :

$$\left[(e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{dp_1^2} - 2i(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2) \frac{d}{dp_1} - \varpi^4 p_1^2 + \mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 \right] \psi = 0, \quad (2.3)$$

en utilisant l'ansatz suivant $\psi = \tilde{\psi}(p_1) \exp[i(p_2 y - p_3 z)]$, donc p_2 et p_3 deviennent des constantes de mouvement. Où les coefficients \mathcal{M} , \hat{p}_2 , \hat{p}_3 , et \mathcal{E} sont donnés par :

$$\mathcal{E} = \frac{E}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})^2}; \quad \hat{p}_2 = \frac{p_2}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})^2}; \quad \hat{p}_3 \rightarrow \frac{p_3}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})^2}; \quad \mathcal{M} = \frac{m}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})}; \quad \varpi = \frac{1}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})}. \quad (2.4)$$

Pour le cas particulier $e^2 \lambda^2 + \mu^2 = \gamma^2$, l'équation (2.3) sera réduite à une équation différentielle du premier ordre :

$$\left[2i(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2) \frac{d}{dp_1} + \varpi^4 p_1^2 - (\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2) \right] \tilde{\psi} = 0, \quad (2.5)$$

La solution est donnée par

$$\tilde{\psi}(p_1) = \tilde{\psi}(0) \exp \left[ip_1 \frac{\varpi^4 p_1^2 - 3(\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2)}{6(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2)} \right], \quad (2.6)$$

Quand on prend la limite ($\kappa \rightarrow \infty$), on obtient

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(p_1) = \tilde{\psi}(0) \exp \left[ip_1 \frac{p_1^2 + 3(p_3^2 + p_2^2 + m^2 - E^2)}{6(m\mu + E\gamma - e\lambda p_2)} \right], \quad (2.7)$$

ce qui est exactement le résultat ordinaire [83]. Et dans le cas où $e^2\lambda^2 + \mu^2 > \gamma^2$, le potentiel électrostatique devient faible devant les potentiels scalaire et magnétique. En introduisant le changement de variables suivant

$$u = \frac{\varpi}{(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/4}} p_1. \quad (2.8)$$

L'équation (2.3) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left[\frac{d^2}{du^2} - 2i\zeta \frac{d}{du} - u^2 + \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2}{\varpi^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/2}} \right] \tilde{\psi}(u) = 0, \quad (2.9)$$

avec $\zeta = \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)}{\varpi(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/4}}$. Pour résoudre cette dernière équation (2.9), on fait la substitution suivante,

$$\tilde{\psi}(u) = e^{i\zeta u - \frac{u^2}{2}} \Phi(u), \quad (2.10)$$

et par un simple calcul on obtient l'équation différentielle suivante

$$\left[\frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d}{du} + \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2}{\varpi^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/2}} + \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)^2}{\varpi^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/2}} - 1 \right] \Phi = 0. \quad (2.11)$$

Nous identifions cette équation différentielle avec l'équation d'Hermite,

$$\left[\frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d}{du} + 2n \right] H_n = 0, \quad (2.12)$$

selon la procédure présentée en [84], la solution peut être exprimée en termes de polynômes d'Hermite

$$\Phi = H_{n-1}(u), \quad (2.13)$$

avec n est un entier non négatif qui remplit la condition

$$2n - 2 = \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2}{\varpi^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/2}} + \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)^2}{\varpi^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/2}} - 1, \quad (2.14)$$

Ensuite, en résolvant l'équation (2.14) pour les valeurs propres de l'énergie, nous obtenons l'expression de l'énergie comme suit

$$E_n(\kappa) = \frac{\Delta_0}{\kappa^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2) + 2\kappa m\mu\gamma - m^2 (e^2\lambda^2 - \gamma^2) - (2n - 1) \Omega^{\frac{3}{2}}} \quad (2.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & \kappa \left[m^2 (e^2 \lambda^2 - \gamma^2) + m \mu e \lambda p_2 + (2n - 1) \Omega^{\frac{3}{2}} \right] \\ & - \kappa^2 \gamma (m \mu - e \lambda p_2) \pm \sqrt{\Omega} \sqrt{\kappa^4 \Delta_1 + \kappa^3 \Delta_2 + \kappa^2 \Delta_3}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

et les termes Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 , Ω sont donnés par

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (m e \lambda + \mu p_2)^2 + (e^2 \lambda^2 + \mu^2) \left[p_3^2 + (2n - 1) \sqrt{\Omega} \right], \\ \Delta_2 &= 2m \mu \gamma (p_2^2 + p_3^2) + 2\gamma e \lambda p_2 \left[m^2 + (2n - 1) \sqrt{\Omega} \right], \\ \Delta_3 &= p_2^2 \left[\gamma^2 m^2 - (\mu^2 - \gamma^2) (2n - 1) \sqrt{\Omega} \right] + p_3^2 \left[m^2 (e^2 \lambda^2 - \gamma^2) + (2n - 1) \Omega^{\frac{3}{2}} \right], \\ \Omega &= e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Où les valeurs propres de l'énergie dépendent des paramètres κ, λ, γ et μ . En plus le nombre quantique principal est représenté par n . Il faut souligner que le spectre d'énergie contient un terme de correction supplémentaire qui dépend du paramètre κ de la déformation, On note que l'expression de l'énergie n'est pas symétrique. Cet effet est dû à la modification de la relations de dispersion, et de la déformation de l'algèbre standard de Heisenberg. Ainsi, pour $n \rightarrow \infty$ on remarque que le spectre d'énergie devient borné ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(\kappa) = -\kappa, \quad (2.18)$$

Ainsi, l'énergie du spectre dans le modèle MS est bornée, et s'approche a une valeur finie. Cependant, si on néglige la déformation en posant $\kappa \rightarrow \infty$, danc, le spectre d'énergie pour que n devient grand est donnée par $E_n = \infty$.

De plus, dans le cas limite $\kappa \rightarrow \infty$; comparant l'expression du spectre d'énergie

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} E_n(\kappa) = E_n = \frac{-\gamma(m\mu - e\lambda p_2) \pm \sqrt{\Omega} \sqrt{(me\lambda + \mu p_2)^2 + (e^2\lambda^2 + \mu^2) \left[p_3^2 + (2n-1)\sqrt{\Omega} \right]}}{(e^2\lambda^2 + \mu^2)}, \quad (2.19)$$

ce résultat coïncide exactement avec le résultat de Dominguez dans le cas ordinaire [84]. En développant l'équation (2.15) au premier ordre de $\frac{1}{\kappa}$ on obtient

$$E_n(\kappa) = E_n + \frac{1}{\kappa} (\Delta E_n). \quad (2.20)$$

Le premier terme peut être obtenu à partir de l'équation (2.19), le second terme représente la correction due à l'effet de DSR, il prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \frac{m^2(e^2\lambda^2 - \gamma^2) + m\mu e\lambda p_2 + (2n-1)\Omega^{\frac{3}{2}}}{e^2\lambda^2 + \mu^2} + \frac{2m\mu\gamma^2(m\mu - e\lambda p_2)}{(e^2\lambda^2 + \mu^2)^2} \\ &\pm \left[\frac{\sqrt{\Omega}\Delta_2}{2\sqrt{\Delta_1}(e^2\lambda^2 + \mu^2)} - \frac{2m\mu\gamma^2\sqrt{\Omega}\Delta_1}{(e^2\lambda^2 + \mu^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

On peut analyser l'équation (2.15) selon différentes bornes prises par les paramètres (μ, λ, γ) :

1. En l'absence de champs électromagnétiques, $\lambda = \gamma = 0$, le spectre d'énergie est reliée aux potentiel scalaire par

$$E_n^\mu(\kappa) = \frac{\frac{(2n-1)}{\kappa} \pm \sqrt{p_2^2 + p_3^2 + \left(1 + \frac{p_3^2 - p_2^2}{\kappa^2}\right) (2n-1)|\mu|}}{1 - \frac{(2n-1)}{\kappa^2} |\mu|}, \quad (2.22)$$

on note ici que les niveaux d'énergie deviennent indépendants de la masse des particules.

Si on néglige la déformation du spectre,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} E_n^\mu(\kappa) = E_n^\mu = \pm \sqrt{p_2^2 + p_3^2 + (2n-1)|\mu|},$$

on obtient exactement le même spectre d'énergie dans [84].

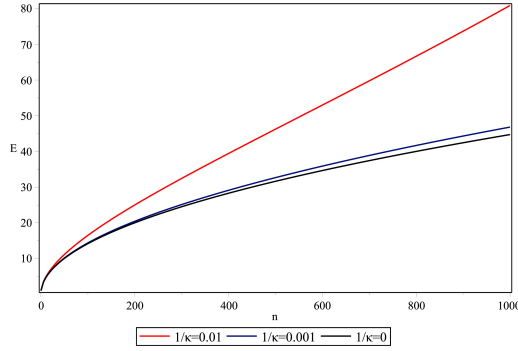


FIGURE 2.1 – Spectre d'énergie E_n^μ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ .

2. En présence d'un champ magnétique uniforme, $\lambda \neq 0$, l'équation (2.15) se réduit à

$$E_n^\lambda(\kappa) = \frac{\frac{m^2 + (2n-1)|e\lambda|}{\kappa} \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 \left(1 + \frac{m^2}{\kappa^2}\right) + \left(1 + \frac{p_3^2}{\kappa^2}\right) (2n-1)|e\lambda|}}{1 - \frac{m^2 + (2n-1)|e\lambda|}{\kappa^2}}, \quad (2.23)$$

dans le cas où $\kappa \rightarrow \infty$ le spectre d'énergie devient

$$E_n^\lambda = \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 + (2n-1)|e\lambda|} \quad (2.24)$$

Le résultat exprimé par la dernière équation (2.24) coïncide exactement avec le résultat ordinaire [84] comme mentionné précédemment.

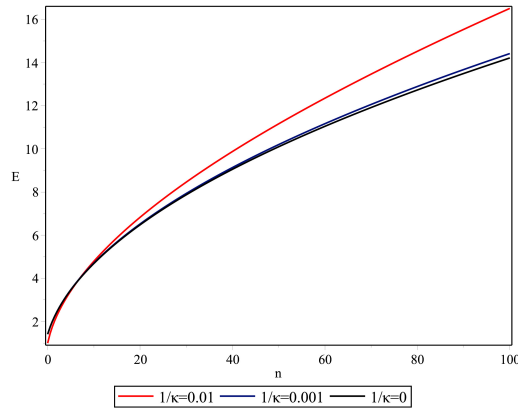


FIGURE 2.2 – Spectre d'énergie E_n^λ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ .

Les figures (2.1) et (2.2) présentent les résultats numériques des énergies positives exprimées par les deux équations. (2.22) et (2.23), en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ . D'après les résultats présentés à la figure (2.1), on observe que les valeurs propres d'énergie $(E_n^\mu)^+$ augmentent d'une manière monotone si n augmente pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ . On remarque également que pour des valeurs fixes de n les niveaux d'énergie augmentent lorsque le paramètre de déformation κ diminue. Cette tendance est également observée dans la figure (2.2), car les valeurs propres de l'énergie à l'état lié varient avec n pour différentes valeurs de κ .

2.1.2 Création des paires de particules

Pour calculer le taux de création des paires de particules il y a de plusieurs méthodes différentes, nous citons par exemple la méthode des intégrales de chemin de Feynman [83, 85], la technique de diagonalisation hamiltonienne [86, 87], la méthode de Schwinger [88, 89] et le formalisme "in" et "out" de Narozhny et Nikishov [90] qui est utilisé dans cette sous-section.

Dans le cas de $\gamma^2 > e^2\lambda^2 + \mu^2$, la situation est complètement différente, par conséquent, l'équation de Klein Gordon peut s'écrire sous la forme :

$$\left[\frac{d^2}{dp_1^2} + \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^2} + \frac{\varpi^4}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)p_1^2} - \frac{(\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2)}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)} \right] F(p_1) = 0 \quad (2.25)$$

où nous avons utilisé

$$\psi = e^{ip_1 \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)}} F. \quad (2.26)$$

Maintenant, pour réduire l'équation (2.25) à une classe d'équations différentielles connues; un changement de variable est introduit comme suit

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{i}} \frac{\varpi}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/4}} p_1, \quad (2.27)$$

ainsi, la nouvelle forme de l'équation (2.25) est la suivante

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\rho^2 + \chi + \frac{1}{2} \right] F = 0, \quad (2.28)$$

avec

$$\chi = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\varpi^2} \left[\frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{\mathcal{M}^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 - \mathcal{E}^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.29)$$

Les solutions exactes de l'équation différentielle ci-dessus peuvent être écrites en termes de fonctions de cylindre parabolique comme [91]

$$F(\rho) = D_\chi(\rho); \quad D_\chi(-\rho); \quad D_{-\chi-1}(i\rho); \quad D_{-\chi-1}(-i\rho). \quad (2.30)$$

Ces quatre solutions sont linéairement indépendantes. Les états de fréquence négative et positive se comporte à $\pm\infty$ comme les solutions semi-classiques, et à partir le comportement asymptotique de la fonctions $D_\chi(\rho)$ pour $\rho \rightarrow \infty$ et pour χ fix [91].

$$D_\chi(\rho) = \rho^\chi \left\{ -\frac{\rho^2}{4} \right\} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-\frac{1}{2}\chi)_n (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\chi)_n}{n! (-\frac{1}{2}\chi^2)^n} + O(|\rho^2|^{-N-1}) \right); |\rho| < \frac{3}{4}\pi$$

Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out" qui sont donné par [92]

$$\psi_{in}^+ = D_\chi(\rho), \quad (2.31)$$

$$\psi_{in}^- = D_{-\chi-1}(i\rho), \quad (2.32)$$

$$\psi_{out}^+ = D_\chi(-i\rho), \quad (2.33)$$

$$\psi_{out}^- = D_{-\chi-1}(-\rho). \quad (2.34)$$

Donc, on peut exprimer le mode de fréquence positive ψ_{in}^+ en termes positif ψ_{out}^+ et négatif ψ_{out}^- par la transformation de Bogoliubov [92]

$$\begin{cases} \psi_{in}^+ = \alpha\psi_{out}^+ + \beta\psi_{out}^- \\ \psi_{in}^- = \alpha^*\psi_{out}^- + \beta^*\psi_{out}^+ \end{cases}, \quad (2.35)$$

où les coefficients de Bogoliubov α et β sont vérifient la condition.

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (2.36)$$

Afin de trouver la relation entre les états ψ_{in}^\pm et ψ_{out}^\pm , nous utilisons la relation entre les fonctions de cylindre parabolique

$$D_\chi(\rho) = e^{i\pi\chi} D_\chi(-\rho) + \frac{\sqrt{\pi 2}}{\Gamma(-\chi)} e^{\frac{i\pi}{2}(\chi+1)} D_{-\chi-1}(-i\rho), \quad (2.37)$$

ce qui se traduit par :

$$\psi_{in}^+ = e^{i\pi\chi} \psi_{out}^- + \frac{\sqrt{\pi 2}}{\Gamma(-\chi)} e^{\frac{i\pi}{2}(\chi+1)} \psi_{out}^+. \quad (2.38)$$

Sur cette base, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\beta = e^{i\pi\chi}; \quad \alpha = \frac{\sqrt{\pi 2}}{\Gamma(-\chi)} e^{\frac{i\pi}{2}(\chi+1)}. \quad (2.39)$$

Nous obtenons la probabilité de création d'une paires

$$\wp = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = \frac{\exp \left\{ -\frac{\pi}{\varpi^2} \left[\frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2 - \mathcal{E}^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right] \right\}}{1 + \exp \left\{ -\frac{\pi}{\varpi^2} \left[\frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2 - \mathcal{E}^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right] \right\}} \quad (2.40)$$

La densité de création des particules est s'écrire par :

$$\mathcal{N} = |\beta|^2 = \exp \left\{ -\frac{\pi}{\varpi^2} \left[\frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2 - \mathcal{E}^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (2.41)$$

On voit que l'expression de la densité des particules créées dépend des paramètres κ de la déformation, en plus de cela, quand $\kappa \rightarrow \infty$, on obtient le résultat associé au champ électromagnétique constant

$$\mathcal{N}_{\kappa \rightarrow \infty} = \exp \left\{ -\pi \left[\frac{(\mu m + \gamma E - \lambda e p_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{m^2 + p_2^2 + p_3^2 - E^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (2.42)$$

on remarque que les effets de la déformation a disparu, c-à-d, quand $\gamma = 0$, $\mathcal{N}=0$. Autrement dit, la densité de création des particules sera égale à zéro quand γ est égal à zéro. Cela confirme que les champs magnétiques ne peuvent pas influencer sur la création des particules.

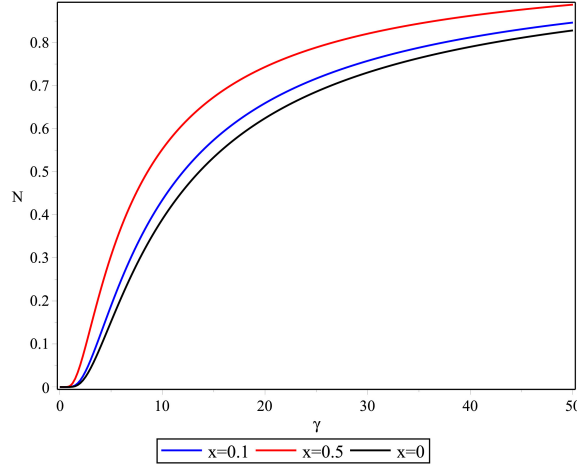


FIGURE 2.3 – La densité \mathcal{N} de création des particules en fonction de la variable γ pour différentes valeurs de $x = \frac{E}{\kappa}$.

De plus, en présence d'un champs électriques constants, la densité de création des particules est réduite à

$$\mathcal{N} = \exp \left\{ -\pi \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2}{\gamma \varpi^2} \right\}. \quad (2.43)$$

A la limite $\kappa \rightarrow \infty$, on obtient le résultat usuel associé au champ électrique constant ;

$$\mathcal{N}_{\kappa \rightarrow \infty} = \exp \left\{ -\pi \frac{m^2 + p_2^2 + p_3^2}{\gamma} \right\}. \quad (2.44)$$

La figure (2.3) illustre la variation de la densité de création des particules en fonction de la variable γ pour différentes valeurs de $x = \frac{E}{\kappa}$. Selon la figure, on observe que la densité de création des particules augmente de façon monotone avec la variable γ dans tous les valeurs de x . De plus, pour une valeur fixe de κ la fonction d'énergie libre diminue lorsque le paramètre de déformation κ croît.

2.2 Reformulation de l'équation de Dirac

Dans le cadre de l'examen de l'effet du modèle MS sur une particule de Dirac soumise à un champ électromagnétique et un potentiel scalaire constants, nous suivons les mêmes démarches déjà utilisés dans le cas de l'équation KG. Ainsi, l'équation de Dirac stationnaire est donnée par

$$[\alpha_i (P_i - eA_i) + \beta (m + S) - (P_0 - eA_0)] \psi = 0, \quad (2.45)$$

où les matrices α et β sont représentées par

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

avec I_2 indique la matrice d'identité 2×2 , et les matrices $\sigma = (\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli. Pour résoudre l'équation (2.45), il est plus pratique d'utiliser la quadrature de l'équation de Dirac

$$\left[(e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{dp_1^2} - 2i (\mathcal{M}\mu + \gamma \mathcal{E} - \lambda e \widehat{p}_2) \frac{d}{dp_1} - \varpi^4 p_1^2 + \mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \widehat{p}_2^2 - \widehat{p}_3^2 - \Xi \right] \Psi = 0, \quad (2.47)$$

où le champ de fermions ψ , est écrit comme suit

$$\psi = [\alpha_i (P_i - eA_i) + \beta (m + S) + (P_0 - V)] \Psi, \quad (2.48)$$

et la matrice Ξ est une matrice 4×4 donnée par

$$\Xi = i\alpha_1\alpha_2e\lambda - i\alpha_1\gamma + \beta\alpha_1i\mu = i \begin{pmatrix} ie\lambda & 0 & 0 & \gamma + \mu \\ 0 & -ie\lambda & \gamma + \mu & 0 \\ 0 & \gamma - \mu & ie\lambda & 0 \\ \gamma - \mu & 0 & 0 & -ie\lambda \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

et ses valeurs propres sont : $s\sqrt{e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2}$ avec $s = \pm 1$, ce qui permet d'aboutir aux expressions des fonctions d'ondes

$$\Psi = v_s \varphi_s(p_1), \quad (2.50)$$

où

$$v_+ = \begin{pmatrix} i\frac{\lambda e + s\sqrt{\Omega}}{\gamma - \mu} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}; \quad v_- = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda e - s\sqrt{\Omega}}{\gamma - \mu} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}; \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s = \pm 1 \quad (2.51)$$

et φ_s satisfait l'équation différentielle suivante

$$\left[\frac{d^2}{dp_1^2} - 2i \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)}{(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)} \frac{d}{dp_1} + \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - \varpi^4 p_1^2}{(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)} - \frac{s}{\sqrt{e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2}} \right] \varphi_s = 0. \quad (2.52)$$

Cette équation est similaire au cas discuté dans la section précédente. Par conséquent, les résultats obtenus sont les mêmes que ceux de l'équation (2.9). Ainsi, la solution de l'équation (2.47) peut s'écrire

$$\Psi \sim e^{i\zeta u - \frac{u^2}{2}} H_{n-1}(u) v_s, \quad (2.53)$$

et le spectre d'énergie correspondant est donné par

$$E_n(\kappa) = \frac{\tilde{\Delta}_0}{\kappa^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2) + 2\kappa m\mu\gamma - m^2 (e^2\lambda^2 - \gamma^2) - (2n + 1 - s) \Omega^{\frac{3}{2}}} \quad (2.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_0 &= \kappa \left[m^2 (e^2\lambda^2 - \gamma^2) + m\mu e\lambda p_2 + (2n + 1 - s) \Omega^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad - \kappa^2 \gamma (m\mu - e\lambda p_2) \pm \sqrt{\Omega} \left(\kappa^4 \tilde{\Delta}_1 + \kappa^3 \tilde{\Delta}_2 + \kappa^2 \tilde{\Delta}_3 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_1 &= (me\lambda + \mu p_2)^2 + (e^2\lambda^2 + \mu^2) \left[p_3^2 + (2n + 1 - s) \Omega^{\frac{1}{2}} \right], \\
\tilde{\Delta}_2 &= 2m\mu\gamma (p_2^2 + p_3^2) + 2\gamma e\lambda p_2 \left[m^2 + (2n + 1 - s) \Omega^{\frac{1}{2}} \right], \\
\tilde{\Delta}_3 &= p_2^2 \left[\gamma^2 m^2 - (\mu^2 - \gamma^2) (2n + 1 - s) \Omega^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\quad + p_3^2 \left[m^2 (e^2\lambda^2 - \gamma^2) + (2n + 1 - s) \Omega^{\frac{3}{2}} \right].
\end{aligned} \tag{2.56}$$

On remarque que les corrections du premier ordre en $\frac{1}{\kappa}$, sur le spectre d'énergie, prennent la même forme que la correction à l'expression du spectre de Klein Gordon (2.19), (2.20) et (2.21), le seul changement est que le nombre quantique n sera remplacé par $(n - \frac{s}{2})$. A la limite $\kappa \rightarrow \infty$, on récupère les résultats de [84]. Ainsi, l'expression (2.54) du spectre d'énergie s'écrit comme suit

$$2 \left(n + \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \right) \Omega^{\frac{3}{2}} = (Ee\lambda - \gamma p_2)^2 + (E\mu + m\gamma)^2 - (e\lambda m + \mu p_2)^2 - p_3^2 \Omega \tag{2.57}$$

alors, pour $n \rightarrow \infty$, on obtient le spectre d'énergie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(\kappa) = -\kappa \tag{2.58}$$

Considérons les cas particuliers suivants :

1. En l'absence des champs électromagnétiques, $\lambda = \gamma = 0$, le spectre d'énergie est reliée aux potentiel scalaire par :

$$E_n^\mu(\kappa) = \frac{\frac{|\mu|}{\kappa} (2n + 1 - s) \pm \sqrt{p_3^2 + p_2^2 + (2n + 1 - s) |\mu| + \frac{1}{\kappa^2} (p_3^2 - p_2^2) (2n + 1 - s) |\mu|}}{1 - \frac{|\mu|}{\kappa^2} (2n + 1 - s)},$$

à la limite $\kappa \rightarrow \infty$, on retrouve les résultats de [84],

$$E_n^\mu = \pm \sqrt{p_3^2 + p_2^2 + (2n + 1 - s) |\mu|},$$

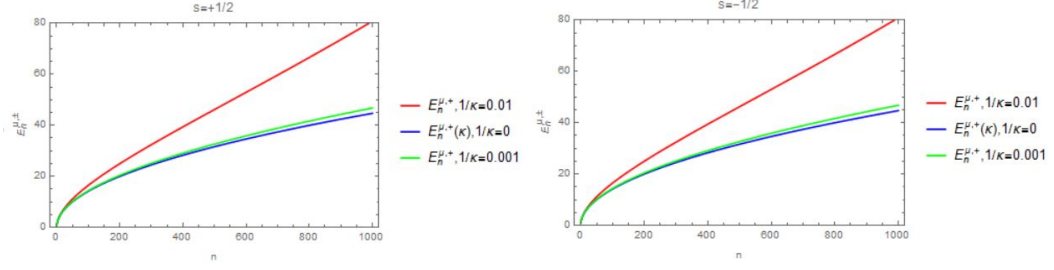


FIGURE 2.4 – Pour $s = 1/2$ (À gauche) et $s = -1/2$ (À droite), le spectre d'énergie E_n^μ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ .

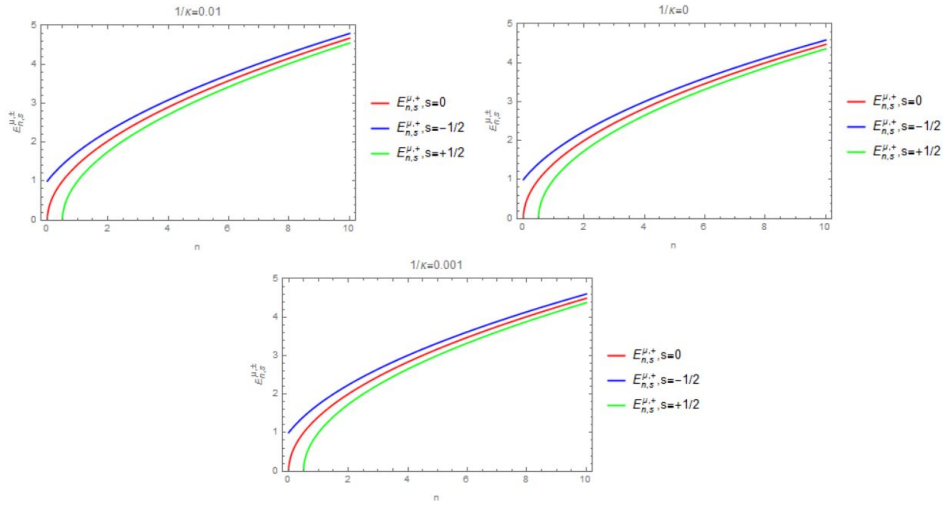


FIGURE 2.5 – Pour $1/\kappa = 0.01$, $1/\kappa = 0$ et $1/\kappa = 0.001$ respectivement, le spectre E_n^μ en fonction de n pour différents cas de spin $s = 0$, $s = -1/2$, $s = +1/2$.

2. Dans le cas de la particule dans un champ magnétique uniforme ($\lambda \neq 0$ and $\mu = \gamma = 0$), le spectre d'énergie devient

$$E_n^\lambda(\kappa) = \frac{\frac{m^2 + (2n+1-s)|e\lambda|}{\kappa} \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 + (2n+1-s)|e\lambda| + \frac{p_3^2}{\kappa^2} [m^2 + (2n+1-s)|e\lambda]}}{1 - \frac{m^2 + (2n+1-s)|e\lambda|}{\kappa^2}}, \quad (2.59)$$

à la limite $\kappa \rightarrow \infty$, on a

$$E_n^\lambda = \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 + (2n+1-s)|e\lambda|}. \quad (2.60)$$

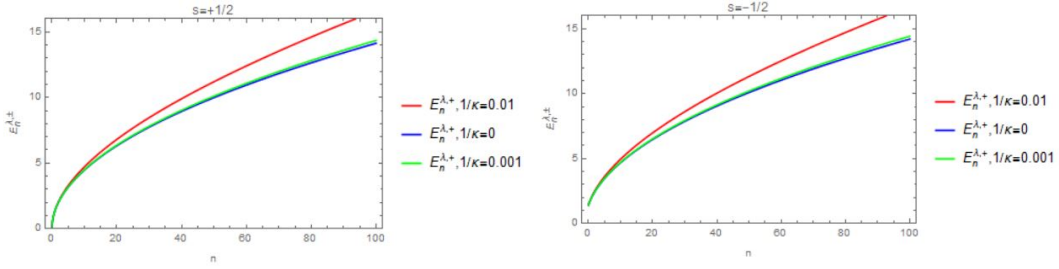


FIGURE 2.6 – Pour $s = 1/2$ (\tilde{A} gauche) et $s = -1/2$ (\tilde{A} droite), le spectre d'énergie E_n^λ en fonction du nombre quantique n , pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ .

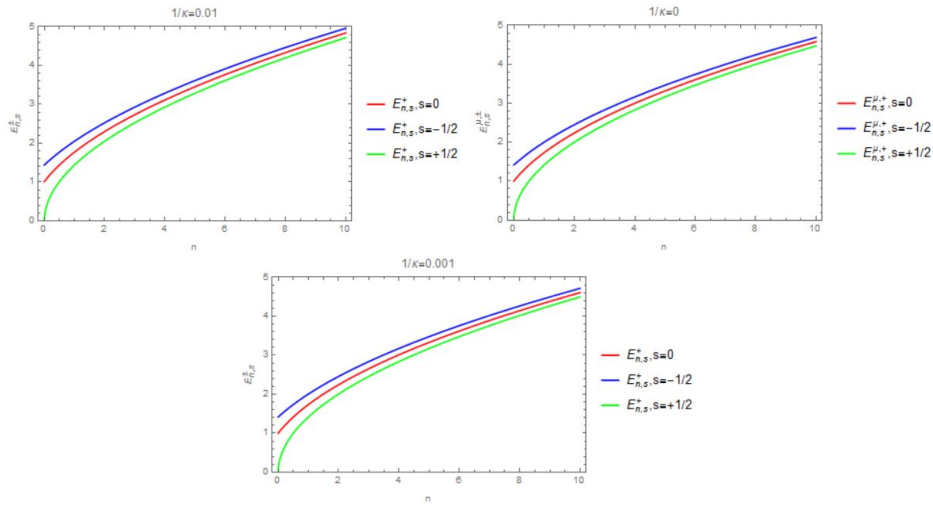


FIGURE 2.7 – Pour $1/\kappa = 0.01$, $1/\kappa = 0$ et $1/\kappa = 0.001$ respectivement, le spectre E_n^μ en fonction de n pour différents cas de spin $s = 0$, $s = -1/2$, $s = +1/2$.

Les énergies positives, eqs. (1) et (2.59), des état de spin : $-1/2$ et $+1/2$, sont illustrées dans les figures (2.4) et (2.6) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ . Les figures (2.5) et (2.7) obtenues en fixant $\frac{1}{\kappa}$, on montrent que les valeurs propres d'énergie (E_n^μ et E_n^λ) augmentent de façon monotone lorsque n augmente, pour différentes valeurs du paramètre de déformation κ . Dans tous les cas : $s = 0$, $s = -1/2$ et $s = +1/2$, on remarque également que l'effet du spin clairement visible et similaire à celui observé dans le cas ordinaire où le paramètre de déformation $\frac{1}{\kappa}$ est nul.

Dans cette contribution, nous avons résolu exactement et analytiquement l'équation

relativiste de Dirac soumise à l'action d'un champ électromagnétique uniforme en plus d'un potentiel scalaire linéaire dans le contexte de Magueijo-Smolín (MS). Dans la représentation des moments p , la fonction d'onde est exprimée par les polynômes d'Hermite, les expressions des spectres d'énergie dans le modèle MS ne sont pas symétriques, varient avec le nombre quantique n et en fonction de $(\frac{1}{\kappa})$. Elles contiennent des termes additionnels due à la présence de l'effet du DSR. Nous avons discuté certains cas limites, notamment, le cas de l'absence du champ électrique et le champ magnétique. Dans la limite $\kappa \rightarrow \infty$, nous retrouvons exactement le même résultat qui a été obtenu par Dominguez-Adame et Méndez [84]. De plus, nous avons noté que dans le cas où $e^2\lambda^2 + \mu^2 = \gamma^2$, il n'y a pas de confinement et cet état n'est pas lié.

2.3 Reformulation de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

La densité lagrangienne qui décrit le boson libre de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) de masse m , est définie par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\Psi}\beta^\mu (\partial_\mu\Psi) - (\partial_\mu\bar{\Psi})\beta^\mu\Psi] - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (2.61)$$

où la fonction d'onde Ψ est un spineur de DKP et β^μ sont les matrices de DKP qui satisfont la relation algébrique

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\lambda + g^{\nu\lambda}\beta^\mu. \quad (2.62)$$

L'algèbre DKP (2.62) admet trois représentations irréductibles [78–80] d'ordre 1, 5 et 10. La représentation d'ordre 1 est triviale, la représentation d'ordre 5 décrit les particules de spin-0 et la représentation d'ordre 10 décrit les particules de spin 1. Avec $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ étant le tenseur métrique dans l'espace de Minkowski. Pour la représentation du spin 0, les matrices β^μ sont des matrices 5×5 définies comme la suite

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \vartheta & \tilde{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \rho^i \\ -\rho_T^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.63)$$

où $\mathbf{0}$, $\tilde{0}$, $\hat{0}$ sont des matrices nulles, respectivement définies comme 3×3 , 2×3 , 2×2 . Et l'autres matrices ρ^i et ϑ , sont données comme suit :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Pour le cas du spin 1, la forme explicite de β^μ sont des matrices 10×10 , données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.65)$$

où les matrices s_i sont les matrices standard 3×3 du spin 1. Et I désigne la matrice unitaire 3×3 . Les matrices $\bar{0}$ et e_i sont données par

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Comme il est bien connu, le champ conjugué de la théorie fermionique de Dirac est caractérisé par $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, alors que le champ conjugué de DKP est défini comme $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta^0$, où $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$, dont $(\eta^0)^2 = 1$. Pour une particule libre de masse m , l'équation de DKP dans le cadre du modèle de MS est donnée dans la représentation (X_μ, P_μ) par :

$$\left[\vec{\beta} \cdot \vec{P} + m \right] \Psi = \beta^0 P_0 \Psi. \quad (2.67)$$

En substituant la représentation de (1.54) dans (2.67), on obtient l'équation DKP suivante dans la représentation (x_μ, p_μ)

$$\left(\frac{\beta^\mu p_\mu}{(1 + \frac{E}{\kappa})} + m \right) \Psi = 0. \quad (2.68)$$

2.3.1 L'oscillateur de DKP de spin 0 dans le modèle (MS)

Nous nous intéressons à étudier l'oscillateur DKP de spin 0 dans le modèle Magueijo-Smolin (MS). En coordonnées (X_μ, P_μ) , la substitution non minimale $\vec{P} \rightarrow \vec{P} - iM\omega\eta^0\vec{R}$, dans l'éq. (2.67) nous permet d'obtenir l'équation de l'oscillateur de DKP

$$\left[\vec{\beta} \cdot \left(\vec{P} - im\omega\eta^0\vec{R} \right) + m \right] \Psi = \beta^0 P_0 \Psi, \quad (2.69)$$

où ω est la fréquence de l'oscillateur.

En insérant les expressions de la correspondance (la représentation (1.54)) entre les coordonnées commutatives (X_μ, P_μ) et les coordonnées non-commutatives (x_μ, p_μ) , dans l'équation (2.69), on obtient l'équation DKP dans la représentation (x_μ, p_μ) comme suit

$$\left[\beta^i \cdot \left(\frac{p_i}{(1 + \frac{E}{\kappa})} - im\omega\eta^0 \left[\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right) x_i \right] \right) + m \right] \Psi = \beta^0 \frac{E}{(1 + \frac{E}{\kappa})} \Psi. \quad (2.70)$$

Dans cette section, nous étudions l'effet du modèle (MS) sur le spectre de l'oscillateur DKP en 3 dimensions. Maintenant, on cherche la solution exacte de l'éq. (2.70). Pour ce faire, nous introduisons les coordonnées sphériques dans l'espace des impulsions, et notons l'état stationnaire $\Psi_{nJM}(p)$ par la forme [93]

$$\Psi_{nJM}(p) = \begin{pmatrix} f_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega_p) \\ g_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega_p) \\ i \sum_L h_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega_p) \end{pmatrix} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} F_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega_p) \\ G_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega_p) \\ i \sum_L H_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega_p) \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Où : $Y_{JM}(\Omega)$ sont les harmoniques sphériques usuels de l'ordre de J , les $Y_{JL1}^M(\Omega_p)$ sont les harmoniques sphériques vectorielles normalisées et $F_{nJ}(p)$, $G_{nJ}(p)$ et $H_{nJL}(p)$ sont des fonctions d'onde radiales. Ensuite en utilisant la notation

$$F_{nJ}(p) = F(p); \quad G_{nJ}(p) = G(p); \quad H_{nJJ\pm 1}(p) = H_{\pm 1}(p). \quad (2.72)$$

Avec les propriétés des harmoniques sphériques vectorielles [93, 94] sont données par

$$\begin{aligned} Y_{JL1}^M(\Omega) &= \sum_{\lambda, \mu} \langle JM | L\lambda 1\mu \rangle Y_{L\lambda}(\Omega) \chi_{1\mu}, \\ \frac{\vec{r}}{r} Y_{JM}(\Omega) &= -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} Y_{J,J+1,1}^M(\Omega) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} Y_{J,J-1,1}^M(\Omega), \\ \nabla Y_{JM}(\Omega) &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \frac{J}{r} Y_{J,J+1,1}^M(\Omega) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \frac{J+1}{r} Y_{J,J-1,1}^M(\Omega). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Lorsqu'on insère la forme Ψ_{nJM} éq.(2.71) dans l'éq. (2.70), et en utilisant les propriétés des harmoniques sphériques vectorielles (2.73), on obtient le système d'équations différentielles suivant

$$mG = \left[\frac{E}{(1+\frac{E}{\kappa})} \right] F. \quad (2.74)$$

$$mH_{+1} = -\xi_J \left[m\omega(1 + \frac{E}{\kappa}) \left[\frac{d}{dp} - \frac{J+1}{p} \right] + \frac{p}{(1+\frac{E}{\kappa})} \right] F. \quad (2.75)$$

$$mH_{-1} = \zeta_J \left[m\omega(1 + \frac{E}{\kappa}) \left[\frac{d}{dp} + \frac{J}{p} \right] + \frac{p}{(1+\frac{E}{\kappa})} \right] F. \quad (2.76)$$

$$mF = \left[\frac{E}{(1+\frac{E}{\kappa})} \right] G_0 - \zeta_J \left[m\omega(1 + \frac{E}{\kappa}) \left[\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right] + \frac{p}{(1+\frac{E}{\kappa})} \right] H_{-1} + \xi_J \left[m\omega(1 + \frac{E}{\kappa}) \left[\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right] + \frac{p}{(1+\frac{E}{\kappa})} \right] H_{+1}. \quad (2.77)$$

Avec $\xi_J = \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}$ et $\zeta_J = \sqrt{\frac{J}{2J+1}}$, en combinant les éqs. (2.74), (2.75), (2.76) dans l'éq.(2.77), nous aurons une équation du second ordre à la composante F qui est décrite par

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\rho}{2} \frac{d}{d\rho} - \frac{J(J+1)}{4\rho} - \frac{\rho}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\widehat{\mathcal{E}}^2 - m^2}{4m\omega} \right] F(\rho) = 0, \quad (2.78)$$

où

$$\widehat{\mathcal{E}} = \frac{E}{(1+\frac{E}{\kappa})} \text{ et } p^2 = m\omega(1 + \frac{E}{\kappa})^2 \rho. \quad (2.79)$$

Maintenant, pour simplifier l'équation (2.78), on utilise la transformation suivante

$$F(\rho) = \rho^{\frac{J+1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} f(\rho). \quad (2.80)$$

l'équation différentielle (2.78) se réduit comme suit :

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(\frac{3}{2} + J - \rho \right) \frac{d}{d\rho} - \frac{J}{2} + \frac{\widehat{\mathcal{E}}^2 - m^2}{4m\omega} \right] f(\rho) = 0. \quad (2.81)$$

Nous identifions cette équation différentielle avec l'équation du polynômes associés de Laguerre,

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (\alpha + 1 - \rho) \frac{d}{d\rho} + n \right] f(\rho) = 0, \quad (2.82)$$

avec

$$\alpha = J + \frac{1}{2} \text{ et } n = \frac{\widehat{\mathcal{E}}^2 - m^2}{4m\omega} - \frac{J}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.83)$$

Maintenant, pour déterminer le spectre d'énergie, en utilisant la condition (2.83), nous obtenons finalement le résultat suivant

$$\frac{E^2}{(1 + \frac{E}{\kappa})^2} - m^2 = 2m\omega N, \quad \text{avec } N = 2n + J. \quad (2.84)$$

Ensuite, la résolution de l'équation (2.84) pour les valeurs propres de l'énergie donne

$$E_{N,\kappa}^{\pm} = \frac{\pm\kappa E_N}{\kappa \mp E_N} = \frac{\pm E_N}{1 \mp \frac{E_N}{\kappa}} \quad (2.85)$$

où $E_N = \pm\sqrt{2m\omega N + m^2}$, et le même résultat associé à l'équation radiale de l'oscillateur harmonique ordinaire à 3d dans [93], et $E_{N,\kappa}^{\pm}$ décrit l'oscillateur harmonique isotrope dans le contexte du modèle MS [95]. Pour $N \rightarrow \infty$ l'énergie est $E = -\kappa$ et pour $\kappa \rightarrow \infty$ les niveaux d'énergie (2.85) deviennent égale à E_N . La fonction d'onde peut être exprimer en termes de polynômes Laguerre associés

$$F(p) = A \left[\frac{p^2}{m\omega(1 + \frac{E}{\kappa})^2} \right]^{\frac{J+1}{2}} L_n^{(J+\frac{1}{2})} \left(\frac{p^2}{m\omega(1 + \frac{E}{\kappa})^2} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2m\omega(1 + \frac{E}{\kappa})^2} \right). \quad (2.86)$$

2.3.2 L'oscillateur de DKP de spin 1 dans le modèle MS

Afin d'obtenir une solution exacte de l'éq.(2.70) dans le cas du spin 1 nous suivant le même procédé dont nous avons fait avec le spin 0. Dans ce cas, nous utilisons la fonction d'onde stationnaire qui est un vecteur à dix composants notée par [93]

$$\Psi_{JM} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} i\phi_{nJ}(p) Y_{JM}(\Omega_p) \\ \sum_L F_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega_p) \\ \sum_L G_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega_p) \\ \sum_L H_{nJL}(p) Y_{JL1}^M(\Omega_p) \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

d'où $Y_{JL1}^M(\Omega_p)$ est le vecteur harmoniques sphériques normalisé et $Y_{JM}(\Omega_p)$ sont les harmoniques sphériques d'ordre J . $F_{nJL}(p)$, $G_{nJL}(p)$, $H_{nJL}(p)$ et $\phi_{nJ}(p)$ sont des fonctions d'onde radiales. Nous remplaçons (2.87) dans (2.69) ce qui conduit à un système de dix équations différentielles. Deux classes associées à la parités $(-1)^J$ et $(-1)^{J+1}$, les solutions $(-1)^J$ correspondent aux états de parité naturelle, et les solutions $(-1)^{J+1}$ qui se traduisent comme des états de parité non naturelle. Afin de faciliter les calculs, on pose

$$\begin{aligned} F_{nJJ}(p) &= F, & G_{nJJ}(p) &= G, & H_{nJJ}(p) &= H, \\ F_{nJJ\pm 1}(p) &= F_{\pm 1}, & G_{nJJ\pm 1}(p) &= G_{\pm 1}, & H_{nJJ\pm 1}(p) &= H_{\pm 1}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Les équations différentielles radiales associées à la parité $(-1)^J$ sont

$$mG - \mathcal{E}F = 0, \quad (2.89)$$

$$mH_{+1} = -i\xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right) \left[\frac{d}{dp} - \frac{J+1}{p} \right] + \frac{p}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)} \right] F, \quad (2.90)$$

$$mH_{-1} = -i\xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right) \left[\frac{d}{dp} + \frac{J}{p} \right] + \frac{p}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)} \right] F, \quad (2.91)$$

$$mF = \mathcal{E}G + i\xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right) \left[\frac{d}{dp} - \frac{J}{p} \right] - \frac{p}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)} \right] H_{-1} + i\xi_J \left(m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right) \left[\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p} \right] - \frac{p}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)} \right) H_{+1}. \quad (2.92)$$

Pour obtenir une solution exacte où les états de parité est naturelle, en éliminant G , et $H_{\pm 1}$ par l'utilisation de la composante F , on obtient

$$\left[m^2 \omega^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dp^2} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right] + m\omega + \mathcal{E}^2 - \frac{p^2}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2} - m^2 \right] F = 0. \quad (2.93)$$

Pour obtenir la fonction d'onde dans le cas de la parité $(-1)^J$, en suivant la même méthode dans le cas du spin 0 qui se présente dans l'équation radiale (2.78), alors l'expression de la composante F de l'éq.(2.93), s'écrit comme suit

$$F(p) = A \left[\frac{p^2}{m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2} \right]^{\frac{J+1}{2}} L_n^{(J+\frac{1}{2})} \left(\frac{p^2}{m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2m\omega \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2} \right), \quad (2.94)$$

Maintenant, le spectre d'énergie est donné par

$$E_{N,\kappa}^{\pm} = \frac{-\frac{2m\omega(N+1)+m^2}{\kappa} \pm \sqrt{2m\omega(N+1)+m^2}}{\frac{2m\omega(N+1)+m^2}{\kappa^2} - 1} = \frac{\pm\kappa E_N}{\kappa \mp E_N} \quad (2.95)$$

Dans ce cas $E_N = \sqrt{2m\omega(N+1)+m^2}$, pour $\kappa \rightarrow \infty$, on en déduit le résultat ordinaire [93], de plus pour $N \rightarrow \infty$ l'énergie est $E_{N,\kappa}^{\pm} = -\kappa$. Pour les états de parité non naturels $(-1)^{J+1}$, le système contient les équations différentielles radiales suivantes

$$(mF_{+1} - \mathcal{E}G_{+1}) = i\zeta_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J+1}{p}\right) - \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] H, \quad (2.96)$$

$$(mF_{-1} - \mathcal{E}G_{-1}) = i\xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J}{p}\right) - \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] H, \quad (2.97)$$

$$(mG_{+1} - \mathcal{E}F_{+1}) = -i\xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J+1}{p}\right) - \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] \phi, \quad (2.98)$$

$$(mG_{-1} - \mathcal{E}F_{-1}) = i\zeta_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J}{p}\right) - \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] \phi, \quad (2.99)$$

$$mH = -i\zeta_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p}\right) + \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] F_1 - i\xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p}\right) + \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] F_{-1}, \quad (2.100)$$

$$-im\phi = \xi_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J+1}{p}\right) + \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] G_1 - \zeta_J \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J}{p}\right) + \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] G_{-1}. \quad (2.101)$$

Pour détermine les solutions exactes des équations différentielles radiales associées aux états de parités $(-1)^{J+1}$, On peut transformer les éqs. (2.96), (2.97), (2.98) et (2.99), (2.100), (2.101) comme suit

$$\begin{pmatrix} F_{+1} \\ G_{+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{E}^2 - m^2} \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} - \frac{J+1}{p}\right) - \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] \begin{pmatrix} i\xi_J \mathcal{E} & -i\zeta_J m \\ i\xi_J m & -i\zeta_J \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ H \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

$$\begin{pmatrix} F_{-1} \\ G_{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{E}^2 - m^2} \left[m\omega \left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right) \left(\frac{d}{dp} + \frac{J}{p}\right) - \frac{p}{\left(1 + \frac{p_0}{\kappa}\right)} \right] \begin{pmatrix} -i\zeta_J \mathcal{E} & -i\xi_J m \\ -i\zeta_J m & -i\xi_J \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ H \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

selon la procédure de diagonalisation, pour le cas $J > 0$, on obtient

$$\begin{pmatrix} \phi \\ H \end{pmatrix} = \frac{-1}{(1+\gamma)^2 + \tau^2} \begin{pmatrix} 1+\gamma & \tau \\ \tau & -1-\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_+ \\ R_- \end{pmatrix}, \quad (2.104)$$

avec

$$\gamma = \sqrt{1 + \tau^2} \quad , \text{ et } \tau = 2\sqrt{J(J+1)} \frac{\mathcal{E}}{m}. \quad (2.105)$$

Les deux équations différentielles radiales (2.102) et (2.103) peuvent être découpler en équations radiales :

$$\left[m^2 \omega^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dp^2} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right] - \frac{p^2}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2} - 2m\omega - \omega \sqrt{m^2 + 4J(J+1)\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^2 - m^2} \right] R_+ = 0, \quad (2.106)$$

$$\left[m^2 \omega^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dp^2} - \frac{J(J+1)}{p^2} \right] - \frac{p^2}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)^2} - 2m\omega + \omega \sqrt{m^2 + 4J(J+1)\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^2 - m^2} \right] R_- = 0. \quad (2.107)$$

en suivant la même méthode présenté dans l'équation (2.78), alors les spectres d'énergies pour les équations (2.106) et (2.107), sont donnés par

$$\left(\frac{E_{R+}}{\left(1 + \frac{E_{R+}}{\kappa}\right)} \right)^2 - m^2 - \omega \sqrt{m^2 + 4J(J+1) \left(\frac{E_{R+}}{\left(1 + \frac{E_{R+}}{\kappa}\right)} \right)^2} = (2N+3)m\omega, \quad (2.108)$$

$$\left(\frac{E_{R-}}{\left(1 + \frac{E_{R-}}{\kappa}\right)} \right)^2 - m^2 + \omega \sqrt{m^2 + 4J(J+1) \left(\frac{E_{R-}}{\left(1 + \frac{E_{R-}}{\kappa}\right)} \right)^2} = (2N+3)m\omega, \quad (2.109)$$

Pour le cas $J = 0$, nous remarquons que ces dernière expressions (2.104) et (2.105) sont équivalente au comportement des composantes ϕ et H , Nous effectuons le même travail que celui présenté pour l'équation (2.78), les spectres d'énergie $E_{\phi,n}^{\pm}$ et $E_{H,n}^{\pm}$ prennent la forme

$$E_{\phi,n}^{\pm} = \frac{-\frac{2m\omega(2n+2)+m^2}{\kappa} \pm \sqrt{2m\omega(2n+2) + m^2}}{\frac{2m\omega(2n+2)+m^2}{\kappa^2} - 1}. \quad (2.110)$$

$$E_{H,n}^{\pm} = \frac{-\frac{2m\omega(2n+1)+m^2}{\kappa} \pm \sqrt{2m\omega(2n+1) + m^2}}{\frac{2m\omega(2n+1)+m^2}{\kappa^2} - 1}. \quad (2.111)$$

Les spectres d'énergie (2.95), (2.110) et (2.111), correspondent respectivement aux états de parités naturelles $(-1)^J$ et aux états de parités non naturelles $(-1)^{J+1}$, dans le cas des équations de l'oscillateur de DKP de spin 1 dans le modèle DSR. Il est clair que cette énergie dépend du nombre quantique n , et dépend du paramètre de déformation κ qui représente

l'effet du modèle DSR sur le spectre de l'oscillateur de DKP. Enfin, si nous choisissons $\kappa \rightarrow \infty$ le spectre d'énergie dans le modèle DSR sera convertira en un spectre d'énergie habituel [93].

2.3.3 Discussions du spectres de l'oscillateurs de DKP

Dans cette dernière section, nous avons exposé un calcul explicite de l'équation de l'oscillateur DKP pour les spins 1 et 0 dans l'espace des impulsions, dans le contexte du modèle MS. Le spectre d'énergie des particules dépend du nombre quantique principal défini comme $N = 2n + J = 0, 1, \dots$, et dépend du paramètre κ .

Pour mieux comprendre comment le spectre d'énergie des oscillateurs DKP est affecté par les paramètres de l'algèbre DSR, nous avons initialement réécrit les équations des valeurs propres (2.95) comme suit :

$$\frac{E_{N,\kappa}^{\pm}}{m} = \pm \frac{\sqrt{\frac{2\omega}{m}(N+1)+1}}{1 \mp \frac{m}{\kappa} \sqrt{\frac{2\omega}{m}(N+1)+1}}. \quad (2.112)$$

Dans ce cas, l'oscillateur continue à osciller même lorsqu'il atteint l'état fondamental. L'énergie relativiste du boson vectoriel de spin-1 devient $E_{N,\kappa}^{\pm} = \pm \frac{m}{1 \mp \frac{m}{\kappa}}$ lorsque $\omega \rightarrow 0$. De plus, il est clair que dans le cas standard lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, nous pouvons facilement montrer que l'équation précédente prend l'expression ordinaire du spectre de l'oscillateur DKP habituel [93] :

$$\frac{E_N^{\pm}}{m} = \pm \sqrt{\frac{2\omega}{m}(N+1)+1}. \quad (2.113)$$

Le développement de l'équation (2.112) aux premier ordre par rapport à $\frac{m}{\kappa}$, donne l'expression suivante :

$$\frac{E_{N,\kappa}^{\pm}}{m} = \pm \sqrt{\frac{2\omega}{m}(N+1)+1} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2\omega}{m}(N+1)+1} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\kappa^2}\right) \right). \quad (2.114)$$

Le spectre d'énergie de l'oscillateur régulier DKP (1+3)d est représenté par le premier terme, tandis que le deuxième terme représente la correction due à la présence de l'effet DSR. Ensuite, nous avons illustré graphiquement nos résultats pour quelques valeurs numériques qui

correspondent à des paramètres physiques. Étant donné que les valeurs propres de l'énergie de l'oscillateur scalaire sont similaires à celles du cas vectoriel, concentrons-nous uniquement sur l'équation (2.112).

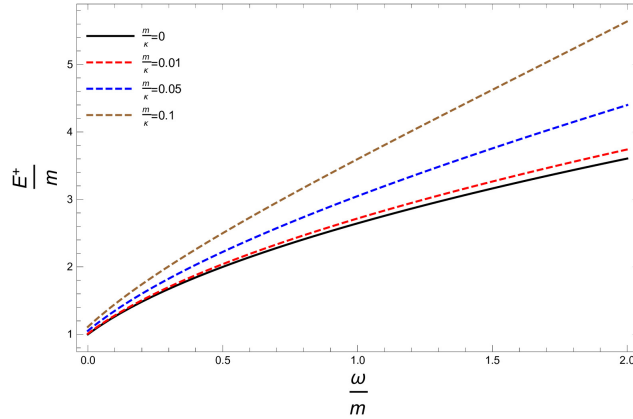


FIGURE 2.8 – Le rapport $\frac{E^+}{m}$ en fonction de $\frac{\omega}{m}$ pour différentes valeurs de $\frac{m}{\kappa}$ et $N = 2$

Dans la figure (2.8), on peut clairement voir que le rapport de l'énergie par rapport à la masse $\frac{E^+}{m}$ est représenté en fonction de $\frac{\omega}{m}$ pour plusieurs valeurs de $\frac{m}{\kappa}$, cela uniquement pour N fixe. La fonction du spectre est strictement croissante, et l'effet de la relativité restreinte doublement spéciale n'est pas significatif pour des petites valeurs de $\frac{m}{\kappa}$, ce qui comprime pratiquement le spectre. En revanche, cet effet devient important avec l'augmentation de la valeur de $\frac{m}{\kappa}$ (c-à-d diminution de κ) et le spectre est étendu. Cette situation rappelle l'effet du champ magnétique sur le système, accompagné par une levée de dégénérescence des niveaux d'énergie, semblable à l'effet Zeeman, ainsi que les états collectifs pairs-pairs des noyaux atomiques dans le modèle de Bohr-Mottelson.

Dans la figure (2.9), le rapport de l'énergie par rapport à la masse $\frac{E^+}{m}$ est présenté en fonction de N pour des valeurs différentes de $\frac{m}{\kappa}$, en fixant $\frac{\omega}{m}$. Comme on peut le constater, la fonction du spectre d'énergie est également strictement croissante, et les effets de relativité double spéciale ne se manifestent pas pour des petites valeurs de $\frac{m}{\kappa}$.

Il s'agit de la même situation que précédemment, et ces effets deviennent significatifs

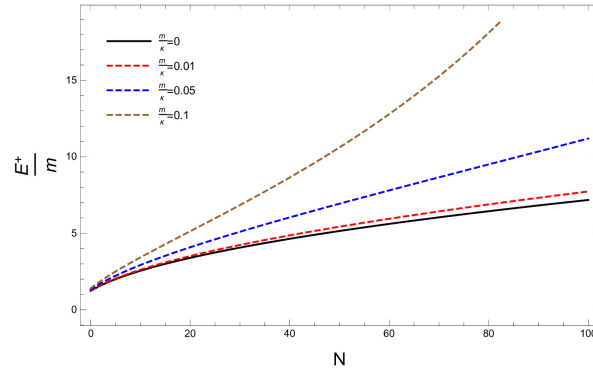


FIGURE 2.9 – Le rapport $\frac{E^+}{m}$ en fonction de N pour des valeurs différentes de $\frac{m}{\kappa}$, et $\frac{\omega}{m} = 1$ pour des valeurs élevées de $\frac{m}{\kappa}$. Ce comportement indique que les effets de relativité restreinte double spéciale, caractérisé par le paramètre κ de l'ordre de l'énergie de Planck, jouent un rôle prépondérant par rapport au système en interaction avec les champs de gravitation et par rapport au modèle de topologie non commutative.

Enfin, l'impact du modèle DSR sur les valeurs propres est bien établi, et les résultats obtenues ont été comparés avec les travaux d'autres auteurs [93, 95]. Dans l'article [95] les valeurs propres d'énergie des oscillateur de Klein-Gordon dans le contexte du modèle de Magueijo-Smolin, est déterminée sous la même forme d'expression (2.85).

Extension de la DSR aux cas de la théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs offre une description précise des phénomènes à l'échelle subatomique et constitue un progrès vers l'unification des interactions électromagnétiques, faibles et fortes conformément au modèle standard. Cependant, la théorie quantique des champs n'est pas directement applicable à l'échelle gravitationnelle, pour laquelle la relativité générale doit être utilisée. Par conséquent, il n'existe pas seulement de modèle prédictif suffisant, mais également de modèle mathématiquement satisfaisant. La reformulation standard de la théorie quantique des champs en présence de l'effet gravitationnel nécessite une description mathématique cohérente. À ce niveau, de nombreuses théories ont été développées, pour étudier le problème de la formulation de la mécanique quantique à l'échelle gravitationnelle, telles que la géométrie non commutative et le principe d'incertitude généralisé (GUP).

Comme il est bien connu que la gravité quantique se définit comme l'hypothétique d'unification des deux théories, la mécanique quantique d'une part et d'une autre la théorie de la relativité générale. Son objectif est d'unifier trois constantes fondamentales : la vitesse de la lumière c , la constante de Planck \hbar , et la constante de gravitation universelle de Newton G . Dans ce cadre, on peut considérer que l'ensemble de l'interaction gravitationnelle est

encodé dans la déformation de la relation de dispersion d'Einstein. Il est important de noter qu'il existe diverses approches pour aborder cette problématique, par exemple, la relativité doublement restreinte (DSR).

À ce niveau, la principale problématique théorique réside dans la description quantique de la force gravitationnelle. Il est important de préciser que les descriptions fournies par les théories effectives ne sont pas exactes, mais elles sont valides jusqu'à un certain degré d'approximation. La théorie des champs quantique nécessite une reformulation à l'échelle de Planck. Dans ce contexte, nous nous concentrons particulièrement sur la déformation de la relation de dispersion d'Einstein, qui nous permet de reformuler les phénomènes physiques à l'échelle de Planck au moyen d'une lagrangienne effective.

Grâce à la motivation de la relation de dispersion généralisée, dans ce chapitre nous reformulons l'équation Klien-Gordon dans le cadre de la relativité doublement spéciale, en nous appuyant sur le modèle de Magueijo et Smolin. Pour nous, cette approche représente la bonne direction pour parvenir à l'unification des constantes fondamentales G , c et \hbar . En d'autres termes, elle vise à construire une théorie de la gravité quantique allant au-delà du Modèle Standard de la physique des particules.

Comme on l'a déjà mentionné, la théorie DSR entraîne une modification des équations fondamentales de la théorie quantique des champs. Par conséquent, nous devons généraliser l'équation d'Euler-Lagrange en utilisant la théorie des champs à dérivées d'ordre supérieur. Nous tentons de résoudre le problème de l'invariance sous la transformation de jauge et la transformation de Lorentz. Ensuite, nous présentons la reformulation des propagateurs de Feynman dans le cadre du DSR.

3.1 Lagrangien du champ scalaire dans le modèle (MS)

Maintenant, nous allons construire une densité de lagrangienne à dérivées d'ordre supérieur pour le champ scalaire dans le modèle de MS[43, 44]. Dans le contexte de la relativité doublement restreinte (DSR), nous sommes amenés à remplacer la notion d'observables non-physiques qui décrit l'espace commutatif (X_μ, P_μ) par la notion d'observables physiques de

l'espace non commutative (x_μ, p_μ) . Ainsi, pour définir une théorie de champs scalaire en DSR, nous pouvons considérer le cas des champs scalaires ϕ dans l'espace d'impulsion et de masse m , défini par l'équation de Klein Gordon

$$[P_\mu P^\mu - m^2] \phi(P) = 0. \quad (3.1)$$

Pratiquement, pour généraliser l'équation (3.1) qui décrit un boson de spin 0, on va simplement remplacer l'équation (1.54) dans l'équation (3.1), ce qui conduit à écrire

$$\left[\frac{p_\mu p^\mu}{(1 + \ell p_0)^2} - m^2 \right] \phi(p) = 0. \quad (3.2)$$

L'utilisation du principe de correspondance $p_\mu \rightarrow -i\hbar\partial_\mu$, nous permet d'écrire

$$\left[\frac{\partial_\mu \partial^\mu}{(1 - i\ell\partial_0)^2} + m^2 \right] \phi(x) = 0, \quad (3.3)$$

l'équation (3.3) conduit à la construction de la densité Lagrangienne généralisée du champ scalaire ϕ comme suit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (3.4)$$

avec

$$\tilde{\nabla}_\mu \rightarrow \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (i\ell\partial_0)^n \partial_\mu \phi, \text{ et } \lim_{\ell \rightarrow 0} \tilde{\nabla}_\mu \rightarrow \partial_\mu, \quad (3.5)$$

on peut écrire la densité lagrangienne des champs scalaires sous la forme quadratique en dérivées partielles

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu, \partial_0 \partial_\mu \phi, \partial_0^2 \partial_\mu \phi, \dots, (\partial_0)^n \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (i\ell\partial_0)^n \partial_\mu \phi \sum_{n=0}^N (i\ell\partial_0)^n \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.6)$$

Dans la théorie des champs classique, la dynamique d'un champ scalaire ϕ est décrite par l'équation d'Euler-Lagrange fournie par sa densité lagrangienne \mathcal{L} . Nous faisons brièvement une revue sur la généralisation de l'équation d'Euler-Lagrange pour les densités lagrangiennes dépendant des dérivées d'ordre supérieur [96–98]. Pour simplifier, nous supposons comme exemple une densité lagrangienne d'un champ scalaire qui dépend d'un nombre fini $N + 1$ de dérivées

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu_1} \phi, \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi, \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \phi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_N} \phi). \quad (3.7)$$

De plus, nous allons définir l'action S pour un espace-temps à quatre dimensions par

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

maintenant, considérons une variation de champ ϕ et une variation des coordonnées x

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \end{cases} \quad (3.9)$$

qui s'annule $\delta\phi(x) = 0$, $\delta x^\mu = 0$, sur le bord de S . Par une application du principe de moindre action $\delta S = 0$,

$$\delta S = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \sum_{n=0}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ((\partial_0)^n \partial_\mu \phi)} \delta((\partial_0)^n \partial_\mu \phi) \right) = 0 \quad (3.10)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{n=0}^N (-1)^n \left[(\partial_0)^n \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ((\partial_0)^n \partial_\mu \phi)} \right] \right) \delta\phi = 0, \quad (3.11)$$

nous pouvons déduire les équations du mouvement pour le champ [96–98]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{n=0}^N (-1)^n (\partial_0)^n \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ((\partial_0)^n \partial_\mu \phi)} = 0. \quad (3.12)$$

Les équations du Klein-Gordon généralisées dans le cadre du DSR s'obtiennent par la substitution de l'équation (3.6) dans l'équation (3.12) et par simple manipulation, on obtient

$$\frac{\square}{(1 - i\ell\partial_0)^2} \phi + m^2 \phi = 0, \quad (3.13)$$

où le d'alembertien est donné par : $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

3.2 Etude de l'invariance relativiste de l'équation de Klein-Gordon généralisée

Notre objectif est d'examiner le principe de la relativité restreinte dans le cadre de la relativité spéciale déformée, à savoir que toutes les équations dynamiques d'un système prennent la même forme lorsqu'elles sont décrites par deux observateurs se déplaçant l'un par

rapport à l'autre à une vitesse constante. Pour étudier l'invariance de l'équation de Klein-Gordon par rapport aux transformations de Lorentz modifiées, voir par exemple [99, 100], il est facile de dire que les coordonnées P_μ satisfont les mêmes transformations de Lorentz ordinaires pour l'espace des impulsions [99]. En reprenant l'équation de Klein-Gordon (3.1)

$$(P_\mu^2 - M^2) \phi = 0. \quad (3.14)$$

Il est bien connu que cette équation est invariante de Lorentz. Si nous remplaçons les coordonnées non commutatives (X_μ, P_μ) par des coordonnées commutatives (x_μ, p_μ) , l'équation de Klein-Gordon généralisée (3.2) s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{p_\mu^2}{(1 + \ell E)^2} - M^2 \right) \phi = 0. \quad (3.15)$$

Nous tournons maintenant notre attention vers la discussion de l'invariance de l'équation de Klein-Gordon généralisée (3.15) sous les transformations de Lorentz modifiées. En substituons $f(E)$ et $g(E)$ par leurs expressions données dans l'équation (1.22), les transformations de Lorentz modifiées Eq.(1.22) peuvent s'écrire comme suit :

$$\left(\frac{p_\mu}{1 + \ell E} \right)' = \Lambda_{\mu\nu} \left(\frac{p^\nu}{1 + \ell E} \right), \quad (3.16)$$

où $\Lambda_{\mu\nu}$ est l'opérateur de Lorentz, nous pouvons montrer que l'invariance de l'équation (3.15) prend la forme :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{p_\mu}{1 + \ell E} \right)' \left(\frac{p^\mu}{1 + \ell E} \right)' - M^2 \right] \phi' (p') = \\ & \left[\left(\Lambda_\mu^\nu \left(\frac{p_\nu}{1 + \ell E} \right) \right) \left(\Lambda^{\rho\mu} \left(\frac{p_\rho}{1 + \ell E} \right) \right) - M^2 \right] \phi (\Lambda p) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nous pouvons noter que $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$ et $\Lambda_\rho^\mu \Lambda^{\nu\rho} = g^{\mu\nu}$. Nous aimerions également mentionner ici que ℓ est une échelle universelle indépendante de l'observateur. En suivant les procédures décrites ci-dessus, nous obtenons le résultat requis.

Dans les transformations de Lorentz habituelles, nous avons les transformations suivantes : $p'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} p^\nu$. En utilisant cette relation, l'équation de Klein-Gordon généralisée Eq.(3.15) peut être transformée de la manière suivante :

$$\left[\frac{p'_\mu}{(1 + \ell E')} \frac{p'^\mu}{(1 + \ell E')} - M^2 \right] \phi(p') = 0. \quad (3.18)$$

Cette équation n'est pas invariante sous les transformations de Lorentz, en raison de la présence du terme $\frac{1}{1+\ell E}$. En théorie quantique des champs, l'invariance de Lorentz est considérée comme une application du premier postulat de la relativité restreinte. Cependant, quelques modèles proposés en gravité quantique [101] et [102–105] permettent la violation de l'invariance de Lorentz, tout en essayant d'unifier les interactions fondamentales à l'échelle de Planck. Par conséquent, cette non-invariance n'est pas considérée comme un défaut de la théorie.

3.3 L'invariance de jauge de l'équation de Klein-Gordon généralisée

Nous abordons maintenant la discussion de la théorie de jauge la plus simple et la plus familière en présence de l'effet (DSR). Cependant, nous examinerons également les effets du (DSR) sur la symétrie $U(1)$ et d'autres conséquences importantes, telles que les règles de Feynman et le concept de couplage minimal. Du point de vue technique, il est nécessaire de prendre en compte la structure de l'algèbre Eqs.(1.51) et (1.52). Cette structure diffère de celle des espaces non commutatifs [106, 107], ce qui signifie qu'elle peut être utilisée dans la théorie de jauge ordinaire. Sur cette lumière, la carte Seiberg-Witten (SW) [106, 107], n'est pas nécessaire (on peut utiliser la technique ordinaire).

3.3.1 La première approche : un modèle approximatif

Considérons la théorie des champs scalaires complexes. Dans l'espace des phases (x_μ, p_μ) basée sur la DSR, nous avons défini l'action suivante en unités naturelles ($\hbar = c = 1$) :

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi^* + M^2 \phi \phi^*. \quad (3.19)$$

Le lagrangien (3.19), est clairement invariante sous la transformation

$$\phi \rightarrow e^{-i\theta(x)}\phi; \phi^* \rightarrow e^{i\theta(x)}\phi^*, \quad (3.20)$$

où $\theta(x)$ est paramètre arbitraire et infinitésimales $\theta(x) \ll 1$, le terme de masse reste invariant

$$M^2\phi\phi^* \rightarrow M^2e^{-i\theta(x)}\phi e^{i\theta(x)}\phi^* = M^2\phi\phi^*. \quad (3.21)$$

La partie cinétique de Lagrangian (3.19), peut être écrite comme une expansion en un paramètre formel ℓ , nous l'exprimons sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu\phi\tilde{\nabla}_\nu\phi^* &\rightarrow \tilde{\nabla}_\mu e^{-i\theta(x)}\phi\tilde{\nabla}_\nu e^{i\theta(x)}\phi^* = \\ &\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (i\ell\partial_0)^n \partial_\mu e^{-i\theta(x)}\phi \right] \left[\sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} (i\ell\partial_0)^{n'} \partial_\nu e^{i\theta(x)}\phi^* \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En négligeant les termes de dérivées d'ordre supérieur de $\partial_\mu\theta(x)$, et nous négligeons également les autres termes multipliés par $\partial_\mu\theta(x)$, car $\theta \ll 1$, de sorte que le terme cinétique peut être écrit

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu e^{-i\theta(x)}\phi\tilde{\nabla}_\nu e^{i\theta(x)}\phi^* &= \\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (i\ell\partial_0)^n \partial_\mu - i\partial_\mu\theta(x) + \dots \right] \phi &\left[\sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} (i\ell\partial_0)^{n'} \partial_\nu + i\partial_\nu\theta(x) + \dots \right] \phi^*, \end{aligned} \quad (3.23)$$

il est facile d'obtenir la forme finale du terme cinétique aux premier ordre de θ

$$\tilde{\nabla}_\mu\phi\tilde{\nabla}_\nu\phi^* \rightarrow \tilde{\nabla}_\mu e^{-i\theta(x)}\phi\tilde{\nabla}_\nu e^{i\theta(x)}\phi^* = \left[\tilde{\nabla}_\mu - i\partial_\mu\theta(x) \right] \phi \left[\tilde{\nabla}_\nu + i\partial_\nu\theta(x) \right] \phi^*, \quad (3.24)$$

en comparant le terme cinétique (3.24) avec (3.19), nous notons que $\tilde{\nabla}_\mu\phi$ est remplacé par le dérivé covariant \tilde{D}_μ , et donc, par analogie avec le couplage minimal ordinaire, nous obtenons

$$\tilde{D}_\mu = \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - ieA_\mu; \quad (3.25)$$

où e est la constante de couplage, et A_μ est invariant sous les transformations de jauge locales

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \quad (3.26)$$

Il faut également définir un tenseur de champ généralisé pour le champ de jauge, ce qui se fait comme suit

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\frac{i}{e} [\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu] = \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} A_\nu - \frac{\partial_\nu}{(1 - i\ell\partial_0)} A_\mu. \quad (3.27)$$

Le lagrangienne générale de Klein-Gordon contenant le couplage du champ de matière au champ de jauge est donnée par

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - ieA_\mu \right) \phi \left(\frac{\partial_\nu}{(1 - i\ell\partial_0)} + ieA_\nu \right) \phi^* + M^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

c'est une idée générale de la formulation d'une invariance de jauge avec une DSR. Nous pouvons exprimer le couplage minimal généralisé en termes de ℓ , comme suit

$$\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} \rightarrow \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - ieA_\mu. \quad (3.29)$$

Par conséquent, en espace des phases (x_μ, p_μ) , l'Eq.(3.15) peut être réécrite comme suit

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{p_\mu}{(1 + \ell E)} - eA_\mu \right) \left(\frac{p_\nu}{(1 + \ell E)} + ieA_\nu \right) \phi - M^2 \phi = 0, \quad (3.30)$$

et dans l'espace des phases (X_μ, P_μ)

$$g^{\mu\nu} (P_\mu - eA_\mu) (P_\nu + ieA_\nu) \phi - M^2 \phi = 0. \quad (3.31)$$

De plus, toute conséquence physique dérivée de la structure de l'équation (3.29) est compatible avec une théorie de jauge ordinaire complète à la limite $\lim_{\ell \rightarrow 0} \left(\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - ieA_\mu \right) \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Ce couplage minimal généralisé peut être utilisé en mécanique quantique relativiste, où nous l'avons utilisé pour étudier les particules relativistes dans un champ électromagnétique avec un potentiel scalaire confinant en relativité doublement spéciale [48].

3.3.2 La deuxième approche : une considération globale

Pour réécrire (3.22) dans cette sous-section, nous ne négligeons aucun terme, nous considérons que tous les termes ont un impact. Dans ce cas, nous suggérons d'utiliser le

raisonnement suivant : pour $n = 0$, le terme cinétique est transformé comme

$$[\partial_\mu e^{-i\theta(x)}\phi + \dots] [\partial_\mu e^{i\theta(x)}\phi^* + \dots] \rightarrow [D_\mu\psi + \dots] [\bar{D}_\nu\phi^* + \dots], \quad (3.32)$$

et pour $n = 1$

$$\begin{aligned} & [\dots + (-1)(i\ell\partial_0)\partial_\mu e^{-i\theta(x)}\phi + \dots] [\dots + (-1)(i\ell\partial_0)\partial_\mu e^{i\theta(x)}\phi^* + \dots] \rightarrow \\ & [\dots + (-1)(i\ell)\partial_0\{e^{-i\theta(x)}D_\mu\phi\} + \dots] [\dots + (-1)(i\ell)\partial_0\{e^{i\theta(x)}\bar{D}_\nu\phi^*\} + \dots], \end{aligned} \quad (3.33)$$

ou bien

$$[\dots + (-1)(i\ell)D_0D_\mu\phi + \dots] [\dots + (-1)(i\ell)\bar{D}_0\bar{D}_\nu\phi^* + \dots], \quad (3.34)$$

... ..

jusqu'à l'ordre du nième terme n

$$\begin{aligned} & [\dots + (-1)^n(i\ell\partial_0)^n\partial_\mu e^{-i\theta(x)}\phi + \dots] [\dots + (-1)^{n'}(i\ell\partial_0)^{n'}\partial_\mu e^{i\theta(x)}\phi^* + \dots] \rightarrow \\ & [\dots + \{(-1)^n(i\ell)^n(D_0)^n\}D_\mu\phi + \dots] [\dots + \{(-1)^{n'}(i\ell)^{n'}(\bar{D}_0)^{n'}\}\bar{D}_\nu\phi^* + \dots], \end{aligned} \quad (3.35)$$

donc nous obtenons

$$\tilde{\nabla}_\mu e^{-i\theta(x)}\phi\tilde{\nabla}_\nu e^{i\theta(x)}\phi^* = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(i\ell)^n(D_0)^n \right] D_\mu\phi \left[\sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'}(i\ell)^{n'}(\bar{D}_0)^{n'} \right] \bar{D}_\nu\phi^*, \quad (3.36)$$

Nous réécrivons le lagrangien (3.19) comme

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \left[\frac{D_\mu}{(1 - i\ell D_0)} \right] \phi \left[\frac{\bar{D}_\nu}{(1 - i\ell \bar{D}_0)} \right] \phi^* + M^2\phi\phi^*, \quad (3.37)$$

Les lois physiques sont postulées comme étant invariantes sous les transformations de jauge. Dans la première approche que nous avons présentée, nous avons préservé dans une certaine mesure, la forme du lagrangien (3.19), où le couplage minimal est défini par $\tilde{D}_\mu = \tilde{\nabla}_\mu - ieA_\mu$. En ce qui concerne la deuxième approche, évident que le lagrangien (3.37) peut être obtenu en injectant directement $p_\mu \rightarrow p_\mu - ieA_\mu$ du couplage minimal ordinaire dans le lagrangien (3.19). En conclusion, notre avis est que le lagrangien(3.37) n'est pas

invariant sous les transformations de jauge, en raison de l'apparition du champ de jauge A_μ dans le dénominateur de l'expression du couplage minimal, comme suit :

$$\tilde{\nabla}_\mu \rightarrow \frac{\partial_\mu - ieA_\mu}{(1 - i\ell\partial_0 + e\ell A_0)}, \quad (3.38)$$

Ce nouveau couplage décrit une structure d'interaction nettement plus complexe entre le champ de matière et le champ de jauge. Nous avons présenté ce modèle principalement pour permettre au lecteur de comprendre clairement pourquoi nous préférons le premier modèle au second. Cependant, il convient de noter que ce modèle est une bonne preuve à proximité du couplage minimal ordinaire et il est utilisé dans certains articles de recherche sans mention explicite, comme [108], où le couplage minimal ordinaire a été utilisé dans des algèbres déformées par injection directe.

3.4 Règles de Feynman (I)

Suivant la procédure standard dans [109], nous calculons le propagateur de Feynman pour les champs scalaires, champs spineur et les champs vectoriels dans le cadre du DSR. Afin de discuter des fonctions de Green, nous considérons l'ajout d'une source $J(x)$ au côté droit de l'équation inhomogène généralisée (3.3) qui devient

$$\left[\frac{\partial_\mu \partial^\mu}{(1 - i\ell\partial_0)^2} + m^2 \right] \phi(x) = J(x), \quad (3.39)$$

la solution de l'équation d'onde (3.39) est donnée par

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int \Delta_F^M(x-y) J(y) d^4y,$$

où $\phi_0(x)$ est une fonction d'onde qui satisfait l'équation homogène

$$\left[\frac{\partial_\mu \partial^\mu}{(1 - i\ell\partial_0)^2} + m^2 \right] \phi_0(x) = 0, \quad (3.40)$$

et $\Delta_F^M(x-y)$ est le propagateur de Feynman modifié du champs scalaire défini par

$$\left[\frac{\partial_{x\mu} \partial_x^\mu}{(1 - i\ell\partial_{x0})^2} + m^2 \right] \Delta_F^M(x-y) = -\delta^4(x-y), \quad (3.41)$$

en faisant la transformée de Fourier

$$\Delta_F^M(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k D_F^M(k) e^{-ik^\mu \cdot (x-y)_\mu}, \quad (3.42)$$

où $D_F^M(k)$ est le propagateur modifié dans l'espace des impulsions. Par un calcul direct, à partir des relations (3.41) et (3.42); nous trouvons

$$D_F^M(k) = \frac{1}{\frac{k_\mu k^\mu}{(1+\ell k_0)^2} - m^2} = \frac{(1+\ell k_0)^2}{k_\mu k^\mu - (1+\ell k_0)^2 m^2}, \quad (3.43)$$

dans la limite $\ell \rightarrow 0$, le propagateur généralisé $D_F^M(k)$ dans (3.43) devient progressivement le propagateur conventionnel $D_F(k)$, c'est-à-dire,

$$D_F(k) = \frac{1}{k_\mu k^\mu - m^2}. \quad (3.44)$$

Nous passons maintenant à l'étude des champs d'interaction, en électrodynamique quantique scalaire (SQED). Les interactions entre les champs scalaires et les champs électromagnétiques sont décrites par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial_\mu}{(1-i\ell\partial_0)} - ieA_\mu \right) \phi \left(\frac{\partial_\nu}{(1-i\ell\partial_0)} + ieA_\nu \right) \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

avec $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est défini par l'équation (3.27), et la densité lagrangienne du champ libre s'écrit

$$\mathcal{L}_0 = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial_\mu}{(1-i\ell\partial_0)} \right) \phi \left(\frac{\partial_\nu}{(1-i\ell\partial_0)} \right) \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

et la densité lagrangienne d'interaction

$$\mathcal{L}_{int} = -ieA^\mu \left(\phi^* \frac{\partial_\mu}{(1-i\ell\partial_0)} \phi - \phi \frac{\partial_\mu}{(1-i\ell\partial_0)} \phi^* \right) - e^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^*. \quad (3.47)$$

On définit le vertex à trois points $\langle \phi^*(p_1) \phi(p_2) A(p_3) \rangle$ qui correspond à l'interaction entre deux champs de matière et un champ électromagnétique par

$$\Gamma_{QEDS}^\mu(p_1, p_2) = e \left(\frac{p_2}{(1-\ell E_2)} + \frac{p_1}{(1+\ell E_1)} \right)^\mu, \quad (3.48)$$

et le vertex à quatre points pour le $\langle \phi^*(p_1) \phi(p_2) A(p_3) A(p_4) \rangle$ des deux photons interagissent avec la particule de matière. Cela s'écrit

$$\Gamma_{QEDS}^{\mu\nu} = 2ie^2 g^{\mu\nu}, \quad (3.49)$$

3.5 Lagrangien du champs de Dirac dans le modèle (MS)

La densité lagrangienne de Dirac pour un champ de spineur (spin - $\frac{1}{2}$) est

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar c}{2} [\bar{\Psi}\gamma^\mu (\partial_\mu\Psi) - (\partial_\mu\bar{\Psi}) \gamma^\mu\Psi] - mc^2\bar{\Psi}\Psi, \quad (3.50)$$

avec Ψ représente le spineur de Dirac, et γ^μ sont les matrices de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

où σ_i sont les matrices de Pauli 2×2 , I est la matrice unitaire 2×2 et 0 est la matrice nulle 2×2 . Le spineur adjoint $\bar{\Psi}$ définis par $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$. L'équation d'Euler-Lagrange pour Ψ est :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} = 0, \quad (3.52)$$

en substituons la densité lagrangienne (3.50) dans l'équation d'Euler-Lagrange (3.52), nous obtenons

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0, \quad (3.53)$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange à $\bar{\Psi}$, on obtient l'équation de Dirac pour le spineur adjoint

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu + mc\bar{\Psi} = 0. \quad (3.54)$$

Maintenant, nous voulons obtenir la densité lagrangienne pour le champ de Dirac en présence de déformation du DSR. Pour cela, en utilise les représentations (1.54), c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow (1 - ilp_0)x_\mu, \\ \partial_\mu &\rightarrow \frac{\partial_\mu}{(1 - il\partial_0)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

la densité lagrangienne de Dirac (3.50) est écrite comme

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar c}{2} \left[\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\frac{\partial_\mu}{(1 - il\partial_0)} \Psi \right) - \left(\frac{\partial_\mu}{(1 - il\partial_0)} \bar{\Psi} \right) \gamma^\mu \Psi \right] - mc^2\bar{\Psi}\Psi, \quad (3.56)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar c}{2} \left[\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\sum_0^\infty (il)^n (\partial_0)^n \partial_\mu \Psi \right) - \left(\sum_0^\infty (il)^n (\partial_0)^n \partial_\mu \bar{\Psi} \right) \gamma^\mu \Psi \right] - mc^2\bar{\Psi}\Psi, \quad (3.57)$$

L'équation d'Euler-Lagrange généralisée pour le spineur adjoint $\bar{\Psi}$ [97] est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \sum_{n=0}^N (-1)^n (\partial_0)^n \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ((\partial_0)^n \partial_\mu \bar{\Psi})} = 0, \quad (3.58)$$

en substituons la densité lagrangienne (3.57) dans l'équation d'Euler-Lagrange généralisée (3.58), nous obtiendrons l'équation de Dirac modifiée comme suit

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell \partial_0)} - mc \right) \Psi = 0, \quad (3.59)$$

dans la limite de $\ell \rightarrow 0$, l'équation (3.59) se transforme à l'équation de Dirac ordinaire. Puis en appliquant l'équation d'Euler-Lagrange généralisée à Ψ , c'est-à-dire,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \sum_{n=0}^N (-1)^n (\partial_0)^n \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ((\partial_0)^n \partial_\mu \Psi)} = 0, \quad (3.60)$$

nous trouvons l'équation généralisée de Dirac pour le champs adjoint

$$\left(\frac{i\hbar \partial_\mu}{(1 - i\ell \partial_0)} \bar{\Psi} \right) \gamma^\mu + mc \bar{\Psi} = 0. \quad (3.61)$$

On note que, l'équation de Dirac généralisée dans l'espace des impulsions non-commute (x_μ, p_μ) , est s'écrite comme

$$\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu}{(1 - \ell p_0)} - m \right) \Psi = 0. \quad (3.62)$$

Comme il a été déjà mentionné, en utilisant la représentation $P_\mu = \frac{p_\mu}{(1 - \ell p_0)}$, pour décrire l'équation de Dirac dans l'espace des impulsions commute (X_μ, P_μ) on aboutit à l'expression suivante :

$$(\gamma^\mu P_\mu - m) \Psi = 0. \quad (3.63)$$

3.6 Etude de l'invariance relativiste de l'équation de Dirac généralisée

Maintenant, nous sommes prêts à écrire l'équation de Dirac généralisée sous la transformation de Lorentz.

$$\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu}{(1 - \ell p_0)} - m \right) \Psi = 0 \rightarrow \left(\frac{\gamma'^\mu p'_\mu}{(1 - \ell p'_0)} - m \right) \Psi'(p') = 0 \quad (3.64)$$

cette équation n'est pas invariante sous les transformations de Lorentz, en raison de la présence du terme $\frac{1}{1 - \ell p_0}$. où $\gamma'^\mu = \Lambda_{\mu\nu} \gamma^\nu$ et $p'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} p^\nu$. Les matrices γ^μ satisfaisant les relations d'anticommutation [96]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.65)$$

nous pouvons alors immédiatement écrire [96]

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = S^{\mu\nu}, \quad (3.66)$$

en particulier, dans l'espace euclidien tridimensionnel, nous pouvons simplement écrire [96]

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij}, \quad (3.67)$$

$$\gamma^j = i\sigma^i, \quad (3.68)$$

et les matrices [96]

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

$$S^{0j} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

où S^{0j} et S^{ij} nous reconnaissons comme la représentation du groupe de rotation des générateurs de boost et de rotation. Si l'équation de Dirac doit être invariante, il faut que les transformations de Lorentz satisfait l'équation (3.16)

$$\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu}{(1 - \ell p_0)} - m \right) \Psi = 0 \rightarrow \left(\gamma^\mu \left(\frac{p_\mu}{1 - \ell p_0} \right)' - m \right) \Psi'(p') = 0. \quad (3.71)$$

Commençons par supposer que le champ Ψ est doit être transformer par

$$\Psi'(p') = S(\Lambda) \Psi(p) \rightarrow \Psi(p) = S(\Lambda^{-1}) \Psi'(p'), \quad (3.72)$$

où

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right), \quad (3.73)$$

$$\Lambda^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}, \quad (3.74)$$

et $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ un tenseur antisymétrique, avec des composante infinitésimales. Alors il doit être que :

$$\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu}{(1-\ell p_0)} - m\right) \Psi(p) = 0 \rightarrow \left(\gamma^\mu \left(\frac{p_\mu}{1-\ell p_0}\right) - m\right) S(\Lambda^{-1}) \Psi'(p') = 0, \quad (3.75)$$

$$\rightarrow \left(\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \left(\frac{p_\nu}{1-\ell p_0}\right)' - m\right) S(\Lambda^{-1}) \Psi'(p') = 0, \quad (3.76)$$

$$\rightarrow \left(S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \left(\frac{p_\nu}{1-\ell p_0}\right)' - m\right) \Psi'(p') = 0. \quad (3.77)$$

Ainsi, en comparant (3.71) avec (3.77), nous concluons que la matrice $S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1})$ doit satisfaire :

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda^{-1}) = \Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha \Rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \gamma^\alpha (\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \gamma^\nu. \quad (3.78)$$

Ainsi, comme on le voit ici, le champ spinorielle se transforme sous la transformation de Lorentz d'une manière très différente que le champ scalaire.

3.7 L'invariance de jauge de l'équation de Dirac généralisée

Le lagrangien d'un champ de Dirac généralisée pour une particule libre de masse m est considéré comme

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{\partial_\mu}{(1-i\ell\partial_0)} \Psi \right) - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (3.79)$$

Il est possible de changer la phase du champ de Dirac sans changer la physique, c'est-à-dire que le Lagrangien est invariant sous la transformation.

$$\Psi \rightarrow e^{i\theta(x)}\Psi; \bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\theta(x)}\bar{\Psi}, \quad (3.80)$$

et la dérivée dans l'équation de Dirac devient

$$\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)}\Psi \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (i\ell\partial_0)^n \partial_\mu [e^{i\theta(x)}\Psi(x)], \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)}\Psi \rightarrow e^{i\theta(x)} \left[\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} + i(\partial_\mu\theta(x)) \right] \Psi + \text{terme négligeable parce que } \theta \ll 1 \quad (3.82)$$

Cependant, l'invariance de l'équation de Dirac par la transformation de jauge locale peut être obtenue par le remplacement suivant

$$\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} \rightarrow \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} + ieA_\mu, \quad (3.83)$$

on note que, si on peut écrire l'équation de Dirac généralisée couplée au champ électromagnétique on utilise le principe de couplage minimal généralisée (3.83), nous obtenons immédiatement que

$$\left(\gamma^\mu \left(\frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} + ieA_\mu \right) - m \right) \Psi = 0. \quad (3.84)$$

3.7.1 La fonction d'onde de l'équation de Dirac généralisée

Pour résoudre l'équation généralisée (3.62) dans le cas d'une particule libre, nous cherchons des solutions simples à l'équation de Dirac généralisée. On considère la solution suivante

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t\right), \quad (3.85)$$

Le spineur à quatre composants $\psi(\mathbf{r})$ se divise en deux spineurs ϕ et χ , c'est-à-dire

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

L'équation de Dirac modifiée (3.62) est écrite comme

$$\left[\frac{i\hbar}{1 - i\hbar\ell\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\hbar c}{1 - i\hbar\ell\frac{\partial}{\partial t}} \hat{\alpha} \cdot \nabla - \hat{\beta} mc^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.87)$$

où

$$\hat{\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \hat{\alpha} = \hat{\beta} \gamma^i, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

Si nous substituons (3.85) dans (3.87), nous obtenons

$$\left[\frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} + \frac{i\hbar c}{1 - \ell\varepsilon} \hat{\alpha} \cdot \nabla - \hat{\beta} mc^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.89)$$

où ε décrit l'évolution temporelle de l'état stationnaire $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Pour simplifier l'équation (3.89), nous utilisons la forme explicite (3.88) pour les matrices $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ (3.89), nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} \phi + \frac{i\hbar c}{1 - \ell\varepsilon} \sigma_i \cdot \nabla \chi - mc^2 \phi = 0 \\ \frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} \chi + \frac{i\hbar c}{1 - \ell\varepsilon} \sigma_i \cdot \nabla \phi + mc^2 \chi = 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

Maintenant, afin de résoudre les équations (3.90), nous remplaçons l'ansatz suivant

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right), \quad (3.91)$$

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} \phi_0 - \frac{\sigma \cdot \mathbf{p} c}{1 - \ell\varepsilon} \chi_0 - mc^2 \phi_0 = 0 \\ \frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} \chi_0 - \frac{\sigma \cdot \mathbf{p} c}{1 - \ell\varepsilon} \phi_0 + mc^2 \chi_0 = 0 \end{cases} \quad (3.92)$$

Notez ici que le système (3.92) est purement algébrique et sans dérivées. Nous avons donc un système linéaire homogène d'équations pour ϕ_0 et χ_0 , et il n'a de solutions non triviales seulement dans le cas où le déterminant est nul, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} - mc^2\right) I & \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p} c}{1 - \ell\varepsilon} \\ \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p} c}{1 - \ell\varepsilon} & \left(\frac{\varepsilon}{1 - \ell\varepsilon} + mc^2\right) I \end{vmatrix} = 0, \quad (3.93)$$

on utilise l'identité suivante

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (3.94)$$

l'équation (3.93) se transforment comme :

$$\frac{\varepsilon^2 - p^2 c^2}{(1 - \ell\varepsilon)^2} = m^2 c^4, \quad (3.95)$$

En résolvant (3.95), on obtient [72] deux valeurs différentes pour l'énergie ε comme

$$\varepsilon = \frac{-\ell m^2 c^4 \pm \sqrt{(1 - \ell^2 m^2 c^4) p^2 c^2 + m^2 c^4}}{(1 - \ell^2 m^2 c^4)} = \varepsilon^{(\pm)}, \quad (3.96)$$

comme cela devrait être. Les deux signes du facteur d'évolution dans le temps $\varepsilon^{(\pm)}$ dans (3.96) correspondent respectivement aux solutions d'énergie positive et négative de l'équation de Dirac généralisée. On observe que pour $\ell \rightarrow 0$, l'équation (3.96) coïncident exactement au résultat habituel

$$\varepsilon = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (3.97)$$

Au moyen de l'équation (3.92) nous obtenons

$$\chi_0 = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p} c}{\varepsilon + (1 - \ell\varepsilon) m c^2} \phi_0 \quad (3.98)$$

Notons ici que le bi-spineur ϕ_0 prend la forme

$$\phi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

avec la condition de normalisation

$$\phi^\dagger \phi = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1. \quad (3.100)$$

et en utilisant (3.85), (3.86), (3.91) et (3.98), nous obtenons deux ensembles complets de solutions l'un pour les énergies positives et l'autre pour les énergies négatives de l'équation modifiée de Dirac comme

$$\Psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{N_{\pm}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p} c}{\varepsilon + (1 - \ell\varepsilon) m c^2} U \end{pmatrix} \exp \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \varepsilon^{(\lambda)} t), \quad (3.101)$$

ici $\lambda = \pm 1$ caractérise l'évolution des solutions dans le temps pour l'énergie positive et négative. Les facteurs de normalisation N_{\pm} sont déterminés à partir de la propriété

$$\int \Psi_{p,\lambda}^{\pm\dagger}(\mathbf{r}, t) \Psi_{p',\lambda'}^{\pm}(\mathbf{r}, t) d^3 r = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (3.102)$$

3.8 Règles de Feynman (II)

De la même manière que précédemment (Règles de Feynman (I)), nous pouvons déterminer le propagateur de Dirac. Il est bien connu dans la théorie des champs quantique ordinaire que le propagateur scalaire est perçu comme le carré du propagateur de Dirac, en effet on a

$$D_F(k) = \frac{1}{k_\mu k^\mu - m^2} = \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu - m} \times \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + m}. \quad (3.103)$$

cela signifie aussi que le propagateur scalaire apparaît naturellement dans l'expression du propagateur de Dirac

$$\tilde{D}_F(k) = D_F(k) \times (\gamma^\mu k_\mu + m), \quad (3.104)$$

où $\tilde{D}_F(k)$ est le propagateur de Dirac dans la théorie quantique ordinaire des champs et $D_F(k)$ est le propagateur scalaire, exprimés ici dans leurs formes euclidiennes.

En cherchant la forme du propagateur fermionique de l'équation de Dirac généralisée. L'équation de Dirac inhomogène s'écrit alors :

$$\left(\frac{i\gamma^\mu \partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - m \right) \Psi(x) = J(x), \quad (3.105)$$

d'où la solution générale

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) - \int S_F^M(x-y) J(y) d^4y, \quad (3.106)$$

où $\Psi_0(x)$ est la solution de l'équation de Dirac homogène

$$\left(\frac{i\gamma^\mu \partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - m \right) \Psi_0(x) = 0, \quad (3.107)$$

et le propagateur modifié $S_F^M(x-y)$ de Dirac

$$\left(\frac{i\gamma^\mu \partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} - m \right) S_F^M(x-y) = \delta^4(x-y) \cdot I_{4 \times 4} \quad (3.108)$$

satisfait l'expression

$$S_F^M(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}_F^M(p) e^{-ip^\mu \cdot (x-y)_\mu}, \quad (3.109)$$

après substitution de l'équation (3.109) dans (3.108), la représentation $\tilde{D}_F^M(p)$ en impulsion du propagateur modifié de Dirac est écrite comme suit :

$$\tilde{D}_F^M(p) = \frac{1}{\frac{\gamma^\mu p_\mu}{(1+\ell p_0)} - m}, \quad (3.110)$$

dans ce cas le propagateur vérifie la condition (3.104) et l'équation (3.110) précédente devient alors

$$\tilde{D}_F^M(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu(1 + \ell p_0) + m(1 + \ell p_0)^2}{p^\mu p_\mu - m^2(1 + \ell p_0)^2}. \quad (3.111)$$

Le propagateur de champ de jauge peut être traité de manière similaire. Dans ce cas, nous allons maintenant considérer l'interaction du champ spineur $\Psi(x)$ avec un champ de jauge $A_\mu(x)$. A cet effet, nous reprendrons la procédure réussie dans l'équation déformée de Klein-Gordon dans le schéma DSR considéré. Dans ce dernier cas, en faisant la substitution dans l'espace des phases (x_μ, p_μ) ,

$$\frac{p_\mu}{(1 + \ell E)} \rightarrow \frac{P_\mu}{(1 + \ell E)} - eA_\mu. \quad (3.112)$$

En conséquence, un tenseur de champ généralisé pour le champ de jauge doit également être défini, ce qui se fait en remplaçant la dérivée covariante habituelle par la nouvelle dérivée covariante

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -i[D_\mu, D_\nu] = \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} A_\nu - \frac{\partial_\nu}{(1 - i\ell\partial_0)} A_\mu \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (3.113)$$

Pour la théorie du champ vectoriel décrite par le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \equiv \frac{1}{2}A_\mu \mathcal{D}^{\mu\nu} A_\nu, \quad (3.114)$$

On introduit l'opérateur différentiel $\mathcal{D}^{\mu\nu}$ définis par ([112])

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \overleftarrow{\nabla}_\alpha \cdot \overrightarrow{\nabla}^\alpha + \overleftarrow{\nabla}^\mu \cdot \overrightarrow{\nabla}^\nu + m^2 g^{\mu\nu}, \quad (3.115)$$

Si nous faisons les changements $\overleftarrow{\nabla}_\alpha \rightarrow \frac{k_\alpha}{(1+\ell E)}$ et $\overrightarrow{\nabla}_\alpha \rightarrow \frac{-ik_\alpha}{(1-\ell E)}$ (équivalentes aux transformées de Fourier), cela conduit à exprimer l'opérateur différentiel dans l'espace des impulsions

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \left(\frac{k^2}{(1 - \ell E)^2} - m^2 \right) + \frac{k^\mu k^\nu}{(1 - \ell E)^2}, \quad (3.116)$$

on cherche l'inverse $\mathcal{D}_{\nu\rho}^{-1}$ de $\mathcal{D}^{\mu\nu}$, avec

$$\mathcal{D}^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu\rho}^{-1} = g_{\rho}^{\mu}, \quad (3.117)$$

le propagateur de Feynman (3.117) peut également être écrit dans l'espace des impulsions de la manière suivante

$$\mathcal{D}^{-1\mu\nu} = \frac{-\left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(1-\ell E)^2}\right)}{\frac{k^2}{(1-\ell E)^2} - m^2} = \frac{-\left(g^{\mu\nu}(1-\ell E)^2 - \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{m^2}\right)}{k^2 - m^2(1-\ell E)^2}. \quad (3.118)$$

Dans le cas du lagrangien de Maxwell (3.114) avec le terme de fixation de jauge

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{\partial_{\alpha}A^{\alpha}}{1 - i\ell\partial_0}\right)^2, \quad (3.119)$$

l'opérateur différentiel est donné par

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\overleftarrow{\nabla}_{\alpha}\cdot\overrightarrow{\nabla}^{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\overleftarrow{\nabla}^{\mu}\cdot\overrightarrow{\nabla}^{\nu}. \quad (3.120)$$

Alors, dans l'espace des impulsions nous obtenons

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = \frac{-g^{\mu\nu}k^2}{(1-\ell E)^2} + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(1-\ell E)^2}. \quad (3.121)$$

Par conséquent, le propagateur du champ de jauge s'écrit

$$\mathcal{D}^{-1\mu\nu} = \frac{(1-\ell E)^2}{k^2} \left[-g^{\mu\nu} + (\zeta - 1) \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right]. \quad (3.122)$$

Les nomenclatures particulières associées à ζ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = 1; \text{ jauge de Feynman.} \\ \zeta = 0; \text{ jauge de Landau.} \end{array} \right. \quad (3.123)$$

Pour compléter les règles de Feynman du système, il faut extraire les vertex. Partant du lagrangien d'interaction, nous introduisons le couplage minimal dans l'équation (3.56)

$$\partial_{\mu} \rightarrow \mathcal{D}_{\mu} = \frac{\partial_{\mu}}{(1 - i\ell\partial_0)} - ieA_{\mu}. \quad (3.124)$$

Ensuite, la densité lagrangienne complète du champ de Dirac en couplage minimal avec le champ de jauge s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (3.125)$$

où \mathcal{L}_0 est la densité lagrangienne du champ libre de Dirac, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi} \left(\frac{i\gamma^\mu \partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (3.126)$$

avec \mathcal{L}_{int} désigne la densité lagrangienne d'interaction

$$\mathcal{L}_{int} = -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi. \quad (3.127)$$

Le vertex à trois points $\langle \bar{\Psi}(p_1) \Psi(p_2) A_\mu(p_3) \rangle$ qui correspond à l'interaction entre le champ de Dirac et le photon, peut être obtenue à partir de \mathcal{L}_{int} , on se retrouve ainsi devant le même résultat dans le cas conventionnel [109].

$$\Gamma_{QED}^\mu = -ie\gamma^\mu. \quad (3.128)$$

En ce qui concerne la compréhension des phénomènes physiques au-delà du Modèle Standard, nous pouvons conclure que la reformulation de la théorie quantique des champs dans le cadre de la relativité doublement restreinte revêt une grande importance, car elle permet de comprendre des problèmes ouverts de la gravité quantique.

On observe que la contribution de la théorie DSR aux propagateurs dans l'Eqs. (3.43), (3.111), (3.118), (3.122) est exprimée par des termes additionnels liés à l'effet du DSR. En ce qui concerne les vertex, on constate qu'un seul vertex (3.48) a subi des modifications par rapport aux cas ordinaire. De plus, les propagateurs modifiés peuvent fournir des prédictions physiques pour expliciter les effets de la relativité doublement restreinte dans le modèle standard des particules élémentaires.

3.9 Généralisation des équations de Maxwell

La densité lagrangienne pour un champ vectoriel $A_\mu \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A} \right)$ de masse $m = 0$ avec une source externe $J_\mu \left(c\rho, \vec{J} \right)$ dans un espace-temps à 3 + 1 dimensions est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (3.129)$$

avec

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu}{(1 - i\ell\partial_0)} A_\nu - \frac{\partial_\nu}{(1 - i\ell\partial_0)} A_\mu \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu.$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ vectoriel A_μ est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \sum_{n=0}^N (-1)^n (\partial_0)^n \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ((\partial_0)^n \partial_\beta A_\alpha)} = 0. \quad (3.130)$$

Si nous substituons la densité lagrangienne (3.129) dans l'équation d'Euler-Lagrange (3.130), nous obtiendrons les équations de Maxwell inhomogènes comme suit

$$\nabla_\beta \mathcal{F}^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\alpha. \quad (3.131)$$

Si nous négligeons les termes d'ordre supérieurs à $(i\ell\partial_0)^2$ dans (3.129) et on néglige aussi les termes complexe, nous obtiendrons la densité lagrangienne suivante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\ell^2}{4\mu_0} \partial_0 F_{\mu\nu} \partial^0 F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \dots \quad (3.132)$$

Le terme $(i\ell\partial_0) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ dans (3.132) peut être considéré comme un effet de la théorie DSR.

L'équation d'Euler-Lagrange pour la densité lagrangienne généralisée (3.132) est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} + \partial_0 \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_\beta A_\alpha)} = 0. \quad (3.133)$$

Le tenseur du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ satisfait l'identité de Bianchi.

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (3.134)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dans un espace-temps à 3+1 dimensions, les composantes du tenseur de champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ peuvent être écrites comme

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.135)$$

Si nous substituons (3.132) dans (3.133),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = -J^\alpha, \quad (3.136)$$

$$-\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{1}{2} \partial_\beta F^{\mu\nu} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha) = \partial_\beta F^{\beta\alpha}, \quad (3.137)$$

$$\partial_0 \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\ell^2}{2} \partial_0 \partial^0 \partial_\beta F^{\mu\nu} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha) = (\ell)^2 \partial_0 \partial^0 \partial_\beta F^{\beta\alpha}, \quad (3.138)$$

nous obtiendrons les équations de Maxwell inhomogènes comme suit

$$(1 + \ell^2 \partial_0^2) \partial_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha, \quad (3.139)$$

si l'on utilise les équations (3.139) et (3.134), les équations de Maxwell inhomogènes peuvent être écrites sous la forme suivante

$$(1 + \ell^2 \partial_0^2) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.140)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (3.141)$$

$$(1 + \ell^2 \partial_0^2) \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + (1 + \ell^2 \partial_0^2) \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (3.142)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.143)$$

Dans la limite où $\ell \rightarrow 0$, les équations de Maxwell généralisées (3.140) et (3.142) deviennent les équations inhomogènes de Maxwell ordinaire. Nous avons reformulé la les équations de Maxwell dans le cadre de la theorie DSR. On a montré qu'il existe une similarité entre notre généralisations et le secteur magnétostatique en présence d'une longueur minimale. Les équations généralisées de Maxwell (3.140) et (3.142) ont été introduites par Tkachuk dans la référence [110], et avec une approche différente par [111] dans le cadre de l'existence d'une longueur minimale.

Nous avons examiné le problème de la construction des équations du champ électromagnétique dans le cadre de la déformation de la relativité restreinte. Un aspect important est que, dans une approximation linéaire, nous négligeons les termes d'ordre supérieurs à $(i\ell\partial_0)^2$ dans (3.129) et les termes complexes. Ainsi, dans ce cas, les champs de l'électrodynamique généralisée avec des dérivées supérieures peuvent être interprétés comme des effets gravitationnels induit par le paramètre κ .

Conclusion générale

Cette thèse concerne la reformulation de la mécanique quantique relativistique et la théorie des champs dans le cadre de la déformation de la relativité restreinte, connue sous le nom de « relativité doublement restreinte » (DSR). On s'est intéressé particulièrement à l'étude de l'effet gravitationnel induit par le paramètre κ du modèle de Magueijo – Smolin sur les équations fondamentales de la théorie des champs quantiques.

À ce niveau, l'approche par la théorie DSR est très intéressante, en particulier les aspects techniques, qui s'approprient le mieux pour pouvoir inclure l'effet du champ gravitationnel dans l'étude des systèmes de la théorie quantique relativiste. Dans un premier temps, nous avons exposé dans le premier chapitre le point de vue mathématique, c'est-à-dire la théorie des déformations formelles des structures algébriques de la DSR, nous avons exposé comment la déformation de la transformation de Lorentz et la notion de l'algèbre déformée pouvaient servir à reformuler une généralisation de la relation de dispersion. Cette approche propose une reformulation de la relativité restreinte, ce qui a permis de fournir un outil technique nécessaire pour formuler la DSR d'une manière claire et cohérente. Nous avons exposé en bref le modèle de Magueijo et Smolin, et sa généralisation de la relation de dispersion à l'échelle de Planck.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes tracé plusieurs objectifs visant à élaborer une approche pour traiter certains problèmes relatifs à la mécanique quantique relativiste. Dans le deuxième chapitre, nous avons réussi à résoudre exactement et analytiquement les équations relativistes de Klein-Gordon (KG) et de Dirac soumises à l'influence d'un champ électromagnétique uniforme, en plus d'un potentiel scalaire linéaire, dans le cadre du modèle Magueijo-Smolin (MS) dans l'espace des impulsions. Pour les états liés, nous avons pu déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde associées. Les solutions obtenues s'expriment en termes de polynômes d'Hermite dans l'espace des impulsions pour les deux équations de KG et de Dirac. De plus, nous avons obtenu les expressions déformées des spectres d'énergie

dans le modèle MS, qui ne sont pas symétriques et contiennent des corrections d'ordre $(\frac{1}{\kappa})$ variant en fonction du nombre quantique n .

Nous avons également examiné certains cas limites. Par exemple, lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, nous retrouvons exactement les mêmes résultats obtenus précédemment par Dominguez-Adame [84]. En outre, dans le cas où $e^2\lambda^2 + \mu^2 = \gamma^2$, il n'y a pas d'état lié ni de confinement. Dans cet état de diffusion nous avons dérivé la densité de création de particules via la technique des transformations de Bogoliubov. De plus, nous avons mené une étude numérique de l'énergie $E_{n,\kappa}^\mu$ et avons tracé la variation de la densité de création de particules \mathcal{N} pour différentes valeurs de κ .

En outre, il convient de mentionner que la relation reliant les principes de relativité à l'invariance de jauge dans les équations de Klein-Gordon (2.1) et Dirac (2.45) n'ont pas été suffisamment explorés dans la littérature dans le cadre de la théorie DSR. Notre travail consiste donc à résoudre le problème en question dans la limite d'un modèle d'approximation. Autrement dit, nous avons présenté une reformulation de la prescription du couplage minimal, $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$ et cette reformulation nous conduit à la substitution $\frac{p_\mu}{(1+\frac{E}{\kappa})} \rightarrow \frac{p_\mu}{(1+\frac{E}{\kappa})} - eA_\mu$.

D'autre part, nous avons généralisé l'oscillateur bosonique de DKP dans le cadre du modèle de Magueijo-Smolin. Plus précisément, nous avons examiné les cas particuliers des particules de spin 1 et 0 dans l'espace des impulsions. Cette généralisation de l'oscillateur habituel de DKP au sein de la théorie DSR a été réalisée de manière similaire à d'autres travaux cités dans les références [113], [95].

Afin d'étudier l'effet du paramètre κ sur nos résultats, nous avons déterminé de manière exacte et analytique les fonctions d'onde pour les deux cas des particules de spin 1 et 0. Ces fonctions d'onde sont exprimées en termes de polynômes de Laguerre associés. De plus, nous avons obtenu des expressions analytiques des spectres d'énergie dans le cadre du modèle Magueijo-Smolin. Ces spectres d'énergie sont explicitement formulés en fonction du paramètre κ , et dans le cas où $\kappa \rightarrow \infty$ on retrouve exactement les spectres traditionnels donnés dans [93]. À noter que ces expressions des spectres d'énergie ne sont pas symétriques,

et cette asymétrie pourrait être interprétée par la rupture possible de la symétrie CPT [72].

En parallèle de cette ligne de recherche, notre travail a également abordé une reformulation plus conventionnelle de la théorie des champs dans le modèle de Magueijo – Smolin. Grâce à cette nouvelle généralisation de la relation de dispersion, certains éléments deviennent plus facilement manipulables, ce qui permet une reformulation plus directe de la théorie des champs. Cela se reflète, par exemple, dans le troisième chapitre de notre travail, où nous avons traité les équations du mouvement (les équations d'Euler-Lagrange) dans le contexte de la théorie des champs à dérivées d'ordre supérieur. Nous avons exposé les règles de Feynman qui en résultent, principalement les vertex d'interactions des champs entre eux, ainsi que les propagateurs généralisés pour les champs scalaires et spinoriels. Ce travail fournit un formalisme pour incorporer l'effet gravitationnel dans les équations fondamentales de la théorie des champs, en particulier à travers les règles de Feynman généralisées. De plus, nous nous sommes penchés sur la question de l'invariance de jauge dans le contexte de la DSR (Déformation de l'Espace-temps relativiste). Pour ce faire, nous avons proposé un modèle approximatif de cette dernière, ce qui a conduit à l'adaptation et à la généralisation de la notion de couplage minimal. De plus, nous présentons une approche pour construire les équations de Maxwell dans le cadre de la relativité doublement restreinte. Il est intéressant de noter que ces équations obtenues coïncident de manière similaire avec celles de électrodynamique généralisée à algèbre déformée [110, 111].

Ce travail est une contribution modeste à la formulation de la théorie des champs dans le concept de la relativité doublement restreinte (DSR). Notre objectif se limite à la formulation classique. À cet effet, une question qui se pose : pourquoi nos résultats ne peuvent-ils pas être utilisés dans le cadre du processus de collision ? La raison en est que la cinématique de la relativité spéciale déformée est incohérente. Par conséquent, les prédictions de la théorie de la DSR concernant les futurs collisionneurs sont loin d'être testables par des méthodes expérimentales. D'autre part, la relation de dispersion déformée avec un paramètre κ qui représente l'échelle de Planck, est un dispositif supplémentaire pour poursuivre des études profondes dans le cadre de la gravité quantique.

Bibliographie

- [1] A. Connes, *Essay on Physics and Non-Commutative Geometry*, Clarendon Press, Oxford, (1990).
- [2] T. Schucker, J.M. Zylinski. *J.Geom.Phys.* 16, 207 (1995). <https://doi.org/10.1016/0393-0440%2894%2900026-Z>.
- [3] D. Kastler, T. Schucker. *J.Geom.Phys*, 24 61 (1997). <https://doi.org/10.1016/S0393-0440%2896%2900031-9>.
- [4] K. Farid, Thèse Doctorat. University of Arizona (2007).
- [5] J. Madore, et al. *Eur. Phys. J. C* 16, 161 (2000). <https://doi.org/10.1007/s100520050012>.
- [6] B. Jurco, et al. *Eur.Phys. J.C* 17, 521 (2000). <https://doi.org/10.1007/s100520000487>.
- [7] X. Calmet, et al. *Eur. Phys. J. C* 23. 363 (2002). <https://doi.org/10.1007/s100520100873>.
- [8] B. Jurco, et al. *Eur. Phys. J. C* 21, 383 (2001). <https://doi.org/10.1007/s100520100731>.

- [9] X. Calmet, A. Kobakhidze. Phys.Rev.D72 :045010, (2005). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.045010>.
- [10] S. Duplij, J. Wess , NATO, Advanced Research Workshop (Proc.Kiev, 2000). <https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-010-0836-5>.
- [11] D.J. Gross, P.F. Mende. Nucl. Phys. B 303 407 (1988). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90390-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90390-2).
- [12] F. Girelli, E.R. Livine. D. Oriti, Nucl. Phys. B 708 411 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2004.11.026>.
- [13] X. Calmet, M. Graesser and S. D. H. Hsu. Phys. Rev. Lett. 93, 211101 (2004). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.211101>.
- [14] K. Nozari and T. Azizi, Gen. Relativ. Gravit. 38, 735 (2006). <https://doi.org/10.1007/s10714-006-0262-9>.
- [15] A. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994). <https://doi.org/10.1063/1.530798>.
- [16] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann. Phys. Rev. D 52, 1108 (1995). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1108>.
- [17] A. Kempf. J. Phys. A : Math. Gen. 30, 2093 (1997). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/30/6/030>.
- [18] H. Hinrichsen and A. Kempf. J. Math. Phys. 37, 2121 (1996). <https://doi.org/10.1063/1.531501>.
- [19] Betrouche Malika, thèse Doctorat, universite de Setif -1 (2014).
- [20] Falek mokhtar, thèse Doctorat, universite de jijel (2011).
- [21] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano. Phys. Lett. B 213, 41 (1989). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(89\)91366-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)91366-X).

- [22] A. Kempf. J. Math. Phys. 38, 1347 (1997). <https://doi.org/10.1063/1.531814>.
- [23] A. Kempf. Phys. Rev. D 55, (1997) 7909. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.7909>.
- [24] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A 39, 10909 (2006). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/39/34/021>.
- [25] C. Quesne and V. M. Tkachuk, Czech. Phys. 56, 1269 (2006). <https://doi.org/10.1007/s10582-006-0436-4>.
- [26] G.Amelino-Camelia, T.Piran, Phys.Lett. B497 (2001) 265 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(00\)01337-X](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)01337-X).
- [27] G.Amelino-Camelia, T.Piran, Phys.Rev.D64 :036005,2001 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.036005>.
- [28] G.Amelino-Camelia, M.Arzano, Phys.Rev.D65 : 084044,2002 (2001). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.084044>.
- [29] G.Amelino-Camelia, Int.J.Mod.Phys. D11 1643 (2002). <https://doi.org/10.1142/S021827180200302X>.
- [30] G.Amelino-Camelia, Nature 418 34 (2002). <https://doi.org/10.1038/418034a>.
- [31] A. Agostini, G.Amelino-Camelia, M.Arzano. Class.Quant.Grav. 21 2179 (2004). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/21/8/018>.
- [32] H.S. Snyder. Phys. Rev. 71, 38 (1947). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.38>.
- [33] J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg and V.N. Tolstoy, Phys. Lett. B264, 331 (1991). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90358-W](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90358-W).
- [34] S. Majid and H. Ruegg, Phys. Lett. B334, 348 (1994). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)90699-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90699-8).

- [35] J. Lukierski, H. Ruegg and V.N. Tolstoy, Proceedings of XXX Karpacz School, February 1994, “Quantum Groups : Formalism and Applications”, Eds. J. Lukierski, Z. Popowicz and J. Sobczyk, Polish Scientific Publishers PWN, p. 359 (1995).
- [36] J. Lukierski, H. Ruegg and W.J. Zakrzewski, Ann. Phys. 243, 90 (1995). <https://doi.org/10.1006/aphy.1995.1092>.
- [37] J. Lukierski and A. Nowicki, Proceedings of Quantum Group Symposium at Group 21, (July 1996, Goslar) Eds. H.-D. Doebner and V.K. Dobrev, Heron Press, Sofia, 1997, p. 186.
- [38] N.R. Bruno, G. Amelino-Camelia, and J. Kowalski-Glikman, Phys. Lett. B 522, 133 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(01\)01264-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)01264-3).
- [39] J. Kowalski-Glikman, Phys. Lett. A 286, 391 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(01\)00465-0](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00465-0).
- [40] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, Phys. Lett. B 539 126 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)02063-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02063-4).
- [41] J.Kowalski-Glikman and S.Nowak, Class.Quant.Grav. 20 4799 (2003). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/20/22/006>.
- [42] J.M.Romero and A.Zamora,Phys.Rev. D70 105006 (2004). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.105006>.
- [43] J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. 88 : 190403, (2002). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.190403>.
- [44] J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.D67 :044017, (2003). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.044017>.
- [45] D. Kimberly, J. Magueijo and J. Medeiros, Phys.Rev. D70 084007 (2004). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.084007>.

- [46] Subir Ghosh and Probir Pal, Phys.Rev.D75 :105021 (2007). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.105021>.
- [47] D. Kimberly, J. Magueijo and J. Medeiros. Phys.Rev. D70 084007 (2004). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.084007>.
- [48] D. Seffai, M Merad and B Hamil, Indian J. Phys.96, 2211(2022). <https://doi.org/10.1007/s12648-022-02345-9>.
- [49] W. G. Unruh, “Notes on black hole evaporation,” Phys. Rev. D 12, 870 (1976). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.870>.
- [50] W. G. Unruh, “Experimental black hole evaporation,” Phys. Rev. Lett. 46, 1351 (1981). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.46.1351>.
- [51] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, Phys. Rev. Lett. 84, 2318 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2318>.
- [52] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D 65, 103509 (2002). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.103509>.
- [53] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Rev. D 39, 683 (1989). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.39.683>.
- [54] S. M. Carroll, et al, Phys. Rev. Lett. 87, 141601 (2001). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.141601>.
- [55] T. Jacobson, Phys. Rev. D 44, 1731 (1991). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.1731>.
- [56] T. Jacobson, Phys. Rev. D 48, 728 (1993). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.728>.
- [57] T. Jacobson, Prog. Theor. Phys. Suppl. 136, 1–17 (1999). <https://doi.org/10.1143/PTPS.136.1>.

- [58] J. Lukierski, A. Nowicki. *Int.J.Mod.Phys.A*18 :7-18, (2003). <https://doi.org/10.1142/S0217751X03013600>.
- [59] F.J. Herranz, *Phys. Lett. B* 543, 89 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)02452-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02452-8).
- [60] C. Heuson, gr-qc/0305015. <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0305015>.
- [61] S. N. Manida, gr-qc/9905046 (1999). <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/9905046>.
- [62] S. S. Stepanov, *Phys.Rev. D*62 023507 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.023507>.
- [63] E.H Kerner, *Proc. Nati. Acad. Sci.* V73 N5 1418 (1976). <https://doi.org/10.1073/pnas.73.5.1418>.
- [64] A. Bouda, T. Foughali, *Modern Physics Letters A*, V 27, N 6 1250036 (2012). <https://doi.org/10.1142/S0217732312500368>.
- [65] T. Foughali, A. Bouda, *Can. J. Phys.* 93, 734 (2015). <https://doi.org/10.1139/cjp-2014-0458>.
- [66] N. Jafari and A. Shariati, *Int. J. Mod. Phys. D*13 709 (2004). <https://doi.org/10.1142/S0218271804004803>.
- [67] D. V. Ahluwalia-Khalilova, [gr-qc/0207004]. Beyond the desert. Proceedings, 4th International Conference, Particle physics beyond the standard model, BEYOND 2003, Castle Ringberg, Tegernsee, Germany, June 9-14, 2003, 503-511
- [68] J. Magueijo and L. Smolin, gr-qc/0305055v2. *Class.Quant.Grav.* 21 1725 (2004). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/21/7/001>.
- [69] S. Zakrzewski, *J. of Phys.* A27 2075 (1994). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/27/6/030>.

- [70] S. Mignemi, Phys. Rev. D68, 065029 (2003) <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.065029>.
- [71] S. Mignemi, Phys. Rev. D72, 087703 (2005). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.087703>.
- [72] M. Corradu and S. Mignemi, EPL, 91 51002 (2010). <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/91/51002>.
- [73] A. Chodos, et al. Phys. Rev. D 9 3471(1974). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>.
- [74] G. H. Wannier, Phys. Rev. 52, 191 (1937). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.52.191>.
- [75] A. Camacho. Gen. Relativ. Gravit. 35 1153 (2003). <https://doi.org/10.1023/A:1024437522212>.
- [76] M. Falek, M. Merad, T. Birkandan. J. Math. Phys. 58, 023501 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.4975137>.
- [77] M. Merad. F. Zeroual and M. Falek. Mod Phy Lett A. 2 V 27, N 15 1250080 (2012). <https://doi.org/10.1142/S0217732312500800>.
- [78] R.J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114 (1938). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.54.1114>.
- [79] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A 173, 91 (1939). <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0131>.
- [80] G. Petiau, Mém. Cl. Sci., Acad. R. Belg. Coll. 8 16(2) (1936).
- [81] S. Ghosh, P. Pal *Phys. Rev. D* 75 105021 (2007). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.105021>.

- [82] V. P. Iyer and L. K. Sharma *Phys. Lett. B* **102** 154 (1981). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)91052-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)91052-2).
- [83] S. W. Hawking and J. B. Hartle *Phys. Rev. D* **13** 2188 (1976). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.2188>.
- [84] A. Dominguez and B. Mendez *IL Nuovo Cimento B* **05** 489 (1992). http://valbuena.fis.ucm.es/adame/pdf/ncb_489.pdf.
- [85] D. M. Chitre and J. B. Hartle *Phys. Rev. D* **16** 251 (1977). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.16.251>.
- [86] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko *Gen. Rel. Grav.* **7** 535 (1976). <https://doi.org/10.1007/BF00766413>.
- [87] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (Friedmann Lab. Publ. St. Petersburg) (1994).
- [88] J. Schwinger *Phys. Rev.* **82** 664 (1951). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.664>.
- [89] E. Bresin and C. Itzykson *Phys. Rev. D* **2** 1191 (1970). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.2.1191>.
- [90] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov. The Simplist processes in the pair creating electric field. *Sov. J. Nucl. Phys.* **11** 596 (1970). http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_038_03_0427.pdf.
- [91] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik *Table of Integrals, Series and Products* (New York; 1979).
- [92] S. Haouat and K. Nouicer *Phys. Rev. D* **89** 105030 (2014). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.105030>.

- [93] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, J. Phys. A 27, 4301(1994). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/27/12/033>.
- [94] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, J. Phys. A31, 6717 (1998). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/31/31/016>.
- [95] B. Hamil , A. Merad and M. Merad, EPL 131, 10003 (2020). <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/131/10003>.
- [96] M. E. Peskin et D. V. Schroeder ; An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley (1995).
- [97] J. Magueijo. Phys.Rev. D73 124020 (2006). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.124020>.
- [98] F.J. de Urries and J.Julve. J.Phys.A31 :6949-6964 (1998). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/31/33/006>.
- [99] A. Granik, hep-th/0207113. <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0207113>.
- [100] N. Jafari and A. Shariati. AIP Conf. Proc. 841, 462–465 (2006). [arXiv :gr-qc/0602075]. <https://doi.org/10.1063/1.2218214>.
- [101] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys.Lett. A 17 899 (2002). <https://doi.org/10.1142/S0217732302007612>.
- [102] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D39 683 (1989). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.39.683>.
- [103] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. 63 224 (1989). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.63.224>.
- [104] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D59 124021 (1999). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.124021>.

- [105] Y. J. Ng, Mod. Phys. Lett. A18 (2003). <https://doi.org/10.1142/S0217732303010934>.
- [106] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909 032 (1999). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/1999/09/032>.
- [107] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov. Rev.Mod.Phys.73 977 (2001). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.977>.
- [108] Chargui, Y. and Cherifc, B. Chinese Journal of Physics **65**, 235 (2020) . <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2020.02.026>.
- [109] Claude Itzykson and Jean Claude Zuber, Quantum Field Theory, 2nd ed. (New York,1984).
- [110] S. K. Moayedi, M. R. Setare and B. Khosropour, Adv. High Energy Phys. 2013, 657870 (2013). <https://doi.org/10.1155/2013/657870>.
- [111] V. M. Tkachuk, J. Phys. Stud. 11, 41 (2007). <https://doi.org/10.30970/jps.11.041>.
- [112] Walter Greiner , Joachim Reinhardt, FIELD QUANTIZATION ,(Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996).
- [113] M. Falek, M. Merad, J. Math. Phys. 51, 033516 (2010). <https://doi.org/10.1063/1.3326236>.
- [114] M. Coraddu, and S. Mignemi, EPL, 91, 51002 (2010). <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/91/51002>.

APPENDIX

Published Paper

Relativistic particles in electromagnetic field with confining scalar potential in doubly special relativity

D Seffai^{1,2}, M Merad^{1*} and B Hamil³

¹Faculté des sciences exactes, Université de Oum El Bouaghi, 04000 Oum El Bouaghi, Algeria

²Département of Material Science, Faculty of Science, University of Amar Telidji, BP 37G, 03000 Laghouat, Algeria

³Département de TC de SNV, Université Hassiba Benbouali, Chlef, Algeria

Received: 02 May 2021 / Accepted: 08 March 2022

Abstract: The present research paper attempts to study the relativistic Klein–Gordon and Dirac equations which are subjected to the action of a uniform electromagnetic field which is added to a confining scalar potential within the context Magueijo–Smolin model and in momentum space. In both cases, the energy spectrum of the mentioned equations and their corresponding eigenfunctions are obtained. The limiting cases are then deduced for a small parameter of deformation; in addition to that, a numerical study of the energy is presented.

Keywords: Bound states; Scattering states; MS Model

1. Introduction

All approaches that are allowed to construct the deformed algebra theory in physics have been continuously developed and became of great interest to prospect of research principally in physics and mathematical physics. Consequently, a considerable amount of literature and a class of models have been presented in this regard. Among which: Snyder model, the latter is proposed as the first example of a noncommutative geometry [1, 2]. Furthermore, the generalized uncertainty principle GUP has been proposed to incorporate gravity into quantum mechanics [3–6]. Another specific model is called the (anti)-de Sitter background, and it is associated with the topology of the physical space used for this purpose. This approach is known as the Extended Uncertainty Principle EUP [7–14]. Following that, it is important in this regard to highlight that these models are conducted through a deformed algebra that is characterized by certain physical parameters, and defined in their associated commutation relation and reflecting the effects of certain phenomena observed at different scales in the physical world.

Approximately ten years ago, Amelino-Camelia [15] followed by Magueijo–Smolin [16] suggested a new theory

with two observed independent parameters: the speed of light c and an energy scale identified with Planck energy κ . This proposal is motivated by the consideration that the Planck energy sets a limit above which causes quantum gravity effects to become important, alongside and its rate. Therefore, it must not depend on the specific observer, and the same goes for special relativity case. On that account, this postulate should be introduced in such a manner that the relativity principle, i.e., the equivalence of all inertial observers, stays valid. The idea based on this supposition is called doubly special relativity (DSR). The majority of the work on the DSR has been performed in the context of algebraic construction based on the deformation of the standard Poincaré algebra of special relativity, and their principal physical effects are the modification of the standard dispersion relations and the existence of a nonlinear addition law for the momenta.

DSR is closely related to noncommutative (NC) geometry [17], where the standard Poisson brackets of phase space variables is replaced by a more complicated algebra. This is satisfying due to the existence of a fundamental length scale needed to deal with quantum gravity theory. This fundamental length scale can be introduced by an NC space-time via generalized uncertainty relation [3–5]. The study of theoretical and physical implications of the DSR is still a controversial topic. Various problems with great physical interest have been studied in connection with the

*Corresponding author, E-mail: meradm@gmail.com

DSR. As examples, we can mention quantum uncertainty in DSR [18], noncommutative space-time of DSR [19], the Magueijo–Smolin model of DSR from five dimensions [20], DSR and photons at the Planck scale [21] and cosmological constant and Planck scale phenomenology [22], the black hole thermodynamics in DSR-GUP [23, 24] and the relativistic oscillators in the context of DSR noncommutative model [25, 26].

In relativistic and nonrelativistic quantum mechanics, the solutions of the wave equation with external fields play a central role in various domains of physics, since they contain all the necessary information to understand the quantum behavior of physical models [27–31]. Moreover, the solutions of the wave equations have been used to study the behavior and dynamics of some physical systems such as thermodynamic properties [32, 33], Shannon entropy and Fisher information [34, 35].

Based on the above, the present research paper aims to study the relativistic Klein–Gordon KG and Dirac particles within the context of the DSR model in the presence of orthogonal electric and magnetic fields with confining scalar potentials. Additionally, it is worth noting that the same current work in the ordinary case without DSR was reviewed in [36].

This paper is organized as follows: Sect. 2 contains a review of the MS model and some relations necessary to the calculation. Section 3 is devoted to the determination of the energy eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the KG equation in the momentum space within the framework of the MS model in the presence of orthogonal electric and magnetic fields with confining scalar potentials. Following the same method, in Sect. 4, the exact solutions of the Dirac equation are determined. Section 5 is given to results and discussion. Finally, in Sect. 6, conclusions are going to be presented.

2. Review of MS model

The modified dispersion relation in the DSR model can be collectively expressed in the following form :

$$f_1^2 E^2 - f_2^2 P_i^2 = M^2 \quad (1)$$

in which functions f_1 and f_2 are specified by various DSR models [16, 37–39]:

DSR model	Function f_1	Function f_2
κ -Poincaré [37]	$f_1^2 = \frac{2\kappa^2 \cosh(E/\kappa)}{E^2}$	$f_2^2 = \exp(E/\kappa)$
Magueijo–Smolin [16]	$f_1 = (1 - E/\kappa)^{-1}$	$f_2 = (1 - E/\kappa)^{-1}$
Herranz [38]	$f_1 = \frac{\kappa(\exp(E/\kappa)-1)}{E}$	$f_2 = 1$

DSR model	Function f_1	Function f_2
Heuson [39]	$f_1 = (1 - P_i^2/\kappa^2)^{-1/2}$	$f_2 = (1 - P_i^2/\kappa^2)^{-1/2}$

where κ is the Planck energy ($\frac{1}{\kappa} \sim 10^{-35}m$) and the special relativity is recovered in the limit $\kappa \rightarrow \infty$. Recently, Ghosh and Pal [40] have shown that the operators of the position X_μ and the momentum P_μ in the MS model can be represented on a standard Hilbert space of functions of a canonical momentum variable as

$$X_\mu = \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)x_\mu = i \left(1 + \frac{E}{\kappa}\right) \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad (2)$$

$$P_\mu = \frac{p_\mu}{\left(1 + \frac{E}{\kappa}\right)}, \quad (3)$$

where the operators x_μ, p_μ abide by the usual canonical commutation relations $[x_\mu, p_\mu] = i\eta_{\mu\nu}$. This representation leads to the following commutation relations [41, 42]:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= 0, & [P_0, P_i] &= [P_i, P_j] = 0, & [X_i, P_0] &= 0, \\ [X_i, X_0] &= \frac{i}{\kappa} X_i, & [P_i, X_0] &= -\frac{i}{\kappa} P_i, & [X_i, P_j] &= i\delta_{ij}, \\ [X_0, P_0] &= -i \left(1 - \frac{P_0}{\kappa}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

In this model, the measure for which the operators X_μ are symmetric is given by

$$D_p = \frac{dp}{1 + \frac{p_0}{\kappa}}. \quad (5)$$

3. Solution of Klein–Gordon equation

3.1. Bound states

The movement of charged KG particles in $(3+1)$ dimensions in the presence of an electromagnetic field represented by the four-vector $A_\mu(V, A_i)$ and the scalar potential $S(X)$, is described by the following equation :

$$\left[(P_i - eA_i(X))^2 + (m + S(X))^2 - (P_0 - V(X))^2 \right] \psi = 0. \quad (6)$$

Preliminary to proceeding with studying the equation above in the framework of DSR theory, which advocates Planck scale modifications of the energy–momentum dispersion relation, it is worth noting that the classical and quantum studies are established on this model in a series of papers [40, 43] that prove the equivalence between the dispersion relation and the deformed free Klein–Gordon

equation in the considered DSR scheme. It is shown through the action formulation of the deformed free particle κ . It is also demonstrated that the solutions meet the set expectations of the correct dispersion relation. Previous studies can be extended to include interactions directly following different approaches.

On the same line of thought, we are interested in the following choice:

$$A_i = \lambda(0, X, 0); \quad S = \mu X; \quad V = \gamma X, \quad (7)$$

where A_i , S and V vary linearly (with) in x . A_i is the electromagnetic potential describing a uniform magnetic field \vec{B} along the z axis. The linear potential is an important quantum mechanical model, it allows a quark-confining as it describes motion in a uniform gravitational or electrical field [44].

Now to derive the differential equation governing the motion of a system in question, this could be done by substituting the expression of $A_\nu(V, A)$, $S(X)$ in Eq. (6), using the representation for X_ν Eq. (2) and P_ν Eq. (3), as it has been mentioned before. We then obtain the following differential equation in momentum space:

$$\left[(e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{dp_1^2} - 2i(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2) \frac{d}{dp_1} - \varpi^4 p_1^2 + \mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 \right] \psi = 0, \quad (8)$$

using the following ansatz $\psi = \tilde{\psi}(p_1) \exp[i(p_2 y - p_3 z)]$; hence, both p_2 and p_3 become constants of motion, where the coefficients \mathcal{M} , \hat{p}_2 , \hat{p}_3 , and \mathcal{E} are given by:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{E}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})^2}; & \hat{p}_2 &= \frac{p_2}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})^2}; & \hat{p}_3 &\rightarrow \frac{p_3}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})^2}; \\ \mathcal{M} &= \frac{m}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})}; & \varpi &= \frac{1}{(1 + \frac{p_0}{\kappa})}. \end{aligned} \quad (9)$$

For the particular case $e^2 \lambda^2 + \mu^2 = \gamma^2$, Eq. refsps8) will be reduced to a differential equation of the first order:

$$\left[2i(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2) \frac{d}{dp_1} + \varpi^4 p_1^2 - (\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2) \right] \tilde{\psi} = 0, \quad (10)$$

whose solution is

$$\tilde{\psi}(p_1) = \tilde{\psi}(0) \exp \left[ip_1 \frac{\varpi^4 p_1^2 - 3(\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2)}{6(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2)} \right], \quad (11)$$

when we take the limit ($\kappa \rightarrow \infty$), we obtain,

$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(p_1) = \tilde{\psi}(0) e^{ip_1 \frac{p_1^2 + 3(p_2^2 + p_3^2 + m^2 - E^2)}{6(m\mu + E\gamma - e\lambda p_2)}}$, which is exactly the ordinary result [45]. Now, in the case when $e^2 \lambda^2 + \mu^2 > \gamma^2$, the electrostatic potential becomes weak compared to the scalar and the magnetic potentials.

By introducing the following change of variables:

$$u = \frac{\varpi}{(e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/4}} p_1. \quad (12)$$

Equation (8) can be written in the following new form:

$$\left[\frac{d^2}{du^2} - 2i\zeta \frac{d}{du} - u^2 + \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2}{\varpi^2 (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/2}} \right] \tilde{\psi}(u) = 0, \quad (13)$$

where $\zeta = \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2)}{\varpi (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/4}}$.

In order to solve Eq. (13), we make the following substitution,

$$\tilde{\psi}(u) = e^{i\zeta u - \frac{u^2}{2}} \Phi(u), \quad (14)$$

and a straightforward calculation gives the following differential equation:

$$\left[\frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d}{du} + \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2}{\varpi^2 (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/2}} + \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2)^2}{\varpi^2 (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/2}} - 1 \right] \Phi = 0. \quad (15)$$

We identify this differential equation as the Hermite equation whose solution can be expressed in terms of the Hermite polynomials

$$\Phi = H_{n-1}(u), \quad (16)$$

with n which is a nonnegative integer:

$$2n - 2 = \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2}{\varpi^2 (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{1/2}} + \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e \hat{p}_2)^2}{\varpi^2 (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/2}} - 1, \quad (17)$$

or, equivalently:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}e\lambda - \hat{p}_2\gamma)^2 + (\mathcal{E}\mu + \mathcal{M}\gamma)^2 - (\mathcal{M}e\lambda + \hat{p}_2\mu)^2 \\ - (e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2) \hat{p}_3^2 = (2n - 1)(e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Then, solving Eq. (18) for the energy eigenvalues, we obtain the following:

$$E_n = \frac{\kappa \left[m^2 (e^2 \lambda^2 - \gamma^2) + m\mu e \lambda p_2 + (2n-1)\Omega^{\frac{3}{2}} \right] - \kappa^2 \gamma (m\mu - e \lambda p_2) \pm \sqrt{\Omega \sqrt{\kappa^4 \Delta_1 + \kappa^3 \Delta_2 + \kappa^2 \Delta_3}}}{\kappa^2 (e^2 \lambda^2 + \mu^2) + 2\kappa m \mu \gamma - m^2 (e^2 \lambda^2 - \gamma^2) - (2n-1)\Omega^{\frac{3}{2}}}, \quad (19)$$

which the terms Δ_1 , Δ_2 and Δ_3 , Ω are given by:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (m e \lambda + \mu p_2)^2 + (e^2 \lambda^2 + \mu^2) \left[p_3^2 + (2n-1)\sqrt{\Omega} \right], \\ \Delta_2 &= 2m\mu\gamma(p_2^2 + p_3^2) + 2\gamma e \lambda p_2 \left[m^2 + (2n-1)\sqrt{\Omega} \right], \\ \Delta_3 &= p_2^2 \left[\gamma^2 m^2 - (\mu^2 - \gamma^2)(2n-1)\sqrt{\Omega} \right] + p_3^2 \\ &\quad \left[m^2 (e^2 \lambda^2 - \gamma^2) + (2n-1)\Omega^{\frac{3}{2}} \right], \\ \Omega &= e^2 \lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2, \end{aligned} \quad (20)$$

where the eigenvalues of energy depend on the parameters λ , γ and μ , in addition to the index n which represents the principal quantum number. It must be emphasized that the energy spectrum contains an additional correction term that depends on the deformation parameter κ and is not symmetrical. This effect is due to the modification of the standard Heisenberg algebra. So, for $n \rightarrow \infty$, it is remarked that the energy spectrum becomes bounded:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = -\kappa. \quad (21)$$

Thus, the spectrum energy in the MS model is not allowed to decrease indefinitely, but approaches a finite value. However, if we remove the deformation by setting $\kappa \rightarrow \infty$, the energy in the large n becomes $E_n = \infty$.

In addition, in the limit case $\kappa \rightarrow \infty$, comparing the expression of the energy spectrum

$$E_n = \frac{-\gamma(m\mu - e \lambda p_2) \pm \sqrt{\Omega \sqrt{(m e \lambda + \mu p_2)^2 + (e^2 \lambda^2 + \mu^2) \left[p_3^2 + (2n-1)\sqrt{\Omega} \right]}}}{(e^2 \lambda^2 + \mu^2)} \quad (22)$$

it goes hand in hand with Dominguez findings [36]. By expanding (19) to the first order in $\frac{1}{\kappa}$, we get

$$E_n = E_n + \frac{1}{\kappa} (\Delta E)_n \quad (23)$$

The first term can be obtained from Eq. (22), while the second term represents the correction due to the DSR effect, it takes the following form:

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \frac{m^2 (e^2 \lambda^2 - \gamma^2) + m\mu e \lambda p_2 + (2n-1)\Omega^{\frac{3}{2}}}{e^2 \lambda^2 + \mu^2} \\ &\quad + \frac{2m\mu\gamma^2(m\mu - e \lambda p_2)}{(e^2 \lambda^2 + \mu^2)^2} \\ &\quad \pm \left[\frac{\sqrt{\Omega} \Delta_2}{2\sqrt{\Delta_1} (e^2 \lambda^2 + \mu^2)} - \frac{2m\mu\gamma^2 \sqrt{\Omega} \Delta_1}{(e^2 \lambda^2 + \mu^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

We can analyze the Eq. (19) according to different limits taken by the parameters (μ, λ, γ) .

1. In the absence of electromagnetic fields, $\lambda = \gamma = 0$, the energy level for a linear scalar potential is

$$E_n^\mu = \frac{\frac{(2n-1)}{\kappa} \pm \sqrt{p_2^2 + p_3^2 + \left(1 + \frac{p_3^2 - p_2^2}{\kappa^2}\right) (2n-1) |\mu|}}{1 - \frac{(2n-1)}{\kappa^2} |\mu|}, \quad (25)$$

note that the energy levels become independent of particle mass. If we remove the deformation of the spectrum, $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} E_n^\mu = \pm \sqrt{p_2^2 + p_3^2 + (2n-1) |\mu|}$, it can be noticed that the same result given in [36], is obtained.

2. In the presence of a uniform magnetic field, $\lambda \neq 0$, Eq. (19) is reduced to:

$$E_n^\lambda = \frac{\frac{m^2 + (2n-1)|e\lambda|}{\kappa} \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 \left(1 + \frac{m^2}{\kappa^2}\right) + \left(1 + \frac{p_3^2}{\kappa^2}\right) (2n-1) |e\lambda|}}{1 - \frac{m^2 + (2n-1)|e\lambda|}{\kappa^2}}, \quad (26)$$

in the case of $\kappa \rightarrow \infty$ the energy level becomes

$$E_n^\lambda \rightarrow \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 + (2n-1) |e\lambda|} \quad (27)$$

the result expressed by the last Eq. (27) seems to be corresponding with the results given in [36] as mentioned earlier.

3.2. Scattering states

In order to calculate the pair creation rate, we have at our disposal many different methods at our disposal such as the Feynman path-integral method [45, 46], the Hamiltonian diagonalization technique [47, 48], the Schwinger method [49, 50] and the “in” and “out” formalism [51] which is used in this subsection.

In the case of $\gamma^2 > e^2\lambda^2 + \mu^2$, the situation is quite different, and therefore, the Klein–Gordon equation can be written as:

$$\left[\frac{d^2}{dp_1^2} + \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^2} + \frac{\varpi^4}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^2} p_1^2 - \frac{(\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \widehat{p}_2^2 - \widehat{p}_3^2)}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)} \right] F(p_1) = 0, \quad (28)$$

where we have used

$$\psi = e^{ip_1 \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)}} F. \quad (29)$$

Now, to reduce the Eq. (28) to a class of known differential equations, the change of variable is introduced as follows:

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{i}} \frac{\varpi}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/4}} p_1, \quad (30)$$

Then, the new form of Eq. (28) is

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\rho^2 + \chi + \frac{1}{2} \right] F = 0, \quad (31)$$

where

$$\chi = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\varpi^2} \left[\frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2 - \mathcal{E}^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right]. \quad (32)$$

According to [52], the exact solutions of the above differential equation can be written in terms of parabolic cylinder functions as

$$F(\rho) = D_\chi(\rho); \quad D_\chi(-\rho); \quad D_{-\chi-1}(i\rho); \quad D_{-\chi-1}(-i\rho). \quad (33)$$

These four solutions are linearly dependent. Now, according to [53] the classification of these solutions as “in” and “out” states is as follows

$$\psi_{\text{in}}^+ = D_\chi(\rho), \quad (34)$$

$$\psi_{\text{in}}^- = D_{-\chi-1}(i\rho), \quad (35)$$

$$\psi_{\text{out}}^+ = D_\chi(-i\rho), \quad (36)$$

$$\psi_{\text{out}}^- = D_{-\chi-1}(-\rho). \quad (37)$$

The positive frequency mode ψ_{in}^+ can be expressed in terms of the positive ψ_{out}^+ and negative ψ_{out}^- frequency modes via the Bogoliubov transformation

$$\begin{cases} \psi_{\text{in}}^+ = \alpha\psi_{\text{out}}^+ + \beta\psi_{\text{out}}^- \\ \psi_{\text{in}}^- = \alpha^*\psi_{\text{out}}^- + \beta^*\psi_{\text{out}}^+ \end{cases}, \quad (38)$$

where α and β are the Bogoliubov coefficients. In order to find the relation between ψ_{in}^\pm and ψ_{out}^\pm states, we use the relation between parabolic cylinder functions

$$D_\chi(\rho) = e^{i\pi\chi} D_\chi(-\rho) + \frac{\sqrt{\pi 2}}{\Gamma(-\chi)} e^{\frac{i\pi}{2}(\chi+1)} D_{-\chi-1}(-i\rho), \quad (39)$$

which results in:

$$\psi_{\text{in}}^+ = e^{i\pi\chi} \psi_{\text{out}}^- + \frac{\sqrt{\pi 2}}{\Gamma(-\chi)} e^{\frac{i\pi}{2}(\chi+1)} \psi_{\text{out}}^+. \quad (40)$$

On this basis, the Bogoliubov coefficients are then

$$\beta = e^{i\pi\chi}; \quad \alpha = \frac{\sqrt{\pi 2}}{\Gamma(-\chi)} e^{\frac{i\pi}{2}(\chi+1)}. \quad (41)$$

We can derive the density of created particles as

$$\mathcal{N} = |\beta|^2 = \exp \left\{ -\frac{\pi}{\varpi^2} \left[\frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\widehat{p}_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2 - \mathcal{E}^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (42)$$

We see that the expression of the density of created particles depends on the deformation parameters κ ; in addition to that, when $\kappa \rightarrow \infty$, we obtain the result associated with the constant electromagnetic field:

$$\mathcal{N}_{\kappa \rightarrow \infty} = \exp \left\{ -\pi \left[\frac{(\mu m + \gamma E - \lambda e p_2)^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{3/2}} + \frac{m^2 + p_2^2 + p_3^2 - E^2}{(\gamma^2 - e^2\lambda^2 - \mu^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (43)$$

as it has been noticed, the effects of deformation have disappeared. When $\gamma = 0$, we have $\mathcal{N} = 0$. On the other hand, the density of created particles will be equal to zero when γ is equal to zero. This confirms that the magnetic fields cannot influence the creation of the particles. In addition, in the presence of constant electric fields, the density of the created particles is reduced to

$$\mathcal{N} = \exp \left\{ -\pi \frac{\mathcal{M}^2 + \widehat{p}_2^2 + \widehat{p}_3^2}{\gamma\varpi^2} \right\}. \quad (44)$$

In the limit $\kappa \rightarrow \infty$, we obtain the usual result associated with the constant electric field:

$$\mathcal{N}_{\kappa \rightarrow \infty} = e^{-\pi \frac{m^2 + p_2^2 + p_3^2}{\gamma}}. \quad (45)$$

Mathematically, the Klein–Gordon equation case study is the easiest model, which opens the way for the study of the Dirac equation, where the results of the latter lead to similar results to the case of the former equation. In the next section, we will discuss the Dirac equation in the effect of the MS model.

4. Solution of Dirac equation

In order to illustrate the effect of the MS model on the Dirac particle in a constant electromagnetic field and scalar potential, we will proceed in the same way as in the case of the KG equation. The stationary Dirac equation is given by

$$[\alpha_i(P_i - eA_i) + \beta(m + S) - (P_0 - eA_0)]\psi = 0, \quad (46)$$

where the matrices α and β are represented by:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

And I_2 indicates the 2×2 identity matrix and $\sigma = (\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z)$ are the Pauli matrices. In order to solve Eq. (46), it is more convenient to use the squared Dirac equation

$$\left[(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2) \frac{d^2}{dp_1^2} - 2i(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2) \frac{d}{dp_1} - \varpi^4 p_1^2 + \mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - \Xi \right] \Psi = 0 \quad (48)$$

where the fermion field ψ can be obtained as

$$\psi = [\alpha_i(P_i - eA_i) + \beta(m + S) + (P_0 - V)]\Psi, \quad (49)$$

and Ξ is a 4×4 matrix defined as:

$$\begin{aligned} \Xi &= i\alpha_1\alpha_2e\lambda - i\alpha_1\gamma + \beta\alpha_1i\mu \\ &= i \begin{pmatrix} ie\lambda & 0 & 0 & \gamma + \mu \\ 0 & -ie\lambda & \gamma + \mu & 0 \\ 0 & \gamma - \mu & ie\lambda & 0 \\ \gamma - \mu & 0 & 0 & -ie\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (50)$$

whose eigenvalues are $s\sqrt{e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2}$ with $s = \pm 1$. So, Ψ can be decomposed as

$$\Psi = v_s \varphi_s(p_1), \quad (51)$$

where

$$\begin{aligned} v_+ &= \begin{pmatrix} i \frac{\lambda e + s\sqrt{\Omega}}{\gamma - \mu} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}; \quad v_- = \begin{pmatrix} -i \frac{\lambda e - s\sqrt{\Omega}}{\gamma - \mu} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}; \\ \chi_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s = \pm 1 \end{aligned} \quad (52)$$

and φ_s meet the goals of the equations

$$\left[\frac{d^2}{dp_1^2} - 2i \frac{(\mathcal{M}\mu + \gamma\mathcal{E} - \lambda e\hat{p}_2)}{(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)} \frac{d}{dp_1} + \frac{\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - \varpi^4 p_1^2}{(e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2)} - \frac{s}{\sqrt{e^2\lambda^2 + \mu^2 - \gamma^2}} \right] \varphi_s = 0. \quad (53)$$

This equation is similar to the case discussed in Sect. 3, and consequently, the obtained results are the same as those of Eq. (13); then, the solution of Eq. (48) can be written

$$\Psi \sim e^{i\kappa u - \frac{\mu^2}{2}} H_n(u) v_s, \quad (54)$$

and the corresponding energy spectrum is

$$E_n = \frac{\kappa \left[m^2 (e^2\lambda^2 - \gamma^2) + m\mu e\lambda p_2 + (2n + 1 - s)\Omega^{\frac{3}{2}} \right] - \kappa^2 \gamma (m\mu - e\lambda p_2) \pm \sqrt{\Omega} \left(\kappa^4 \tilde{\Delta}_1 + \kappa^3 \tilde{\Delta}_2 + \kappa^2 \tilde{\Delta}_3 \right)^{\frac{1}{2}}}{\kappa^2 (e^2\lambda^2 + \mu^2) + 2\kappa m\mu\gamma - m^2 (e^2\lambda^2 - \gamma^2) - (2n + 1 - s)\Omega^{\frac{3}{2}}} \quad (55)$$

where

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Delta}_1 &= (m\epsilon\lambda + \mu p_2)^2 + (e^2\lambda^2 + \mu^2) \left[p_3^2 + (2n+1-s)\Omega^{\frac{1}{2}} \right], \\
 \tilde{\Delta}_2 &= 2m\mu\gamma(p_2^2 + p_3^2) + 2\gamma e\lambda p_2 \left[m^2 + (2n+1-s)\Omega^{\frac{1}{2}} \right], \\
 \tilde{\Delta}_3 &= p_2^2 \left[\gamma^2 m^2 - (\mu^2 - \gamma^2)(2n+1-s)\Omega^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\quad + p_3^2 \left[m^2(e^2\lambda^2 - \gamma^2) + (2n+1-s)\Omega^{\frac{3}{2}} \right].
 \end{aligned} \tag{56}$$

The following remark can be applied to the Dirac equations, and the first-order corrections in $\frac{1}{\kappa}$, on the energy spectrum, take the same form as the corrections to the Klein–Gordon spectrum Eqs. (22), (23) and (24). Only the quantum number n will be changed by $n - \frac{s}{2}$. In the limit $\kappa \rightarrow \infty$, one recovers the results of [36]. So, the expression (55) of the energy spectrum is written by:

$$\begin{aligned}
 2 \left(n + \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \right) \Omega^{\frac{3}{2}} &= (E\epsilon\lambda - \gamma p_2)^2 + (E\mu + m\gamma)^2 \\
 &\quad - (e\lambda m + \mu p_2)^2 - p_3^2 \Omega
 \end{aligned} \tag{57}$$

and is independent of particle mass, whereas for $n \rightarrow \infty$, one obtains the energy spectrum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = -\kappa \tag{58}$$

Let us consider the following particular cases:

1. In the absence of electromagnetic fields, $\lambda = \gamma = 0$, the energy levels for a linear scalar potential are:

$$E_n = \frac{\frac{|\mu|}{\kappa} (2n+1-s) \pm \sqrt{p_3^2 + p_2^2 + (2n+1-s)|\mu| + \frac{1}{\kappa^2} (p_3^2 - p_2^2)(2n+1-s)|\mu|}}{1 - \frac{|\mu|}{\kappa^2} (2n+1-s)}, \tag{59}$$

in the limit $\kappa \rightarrow \infty$, one recovers the results of [36],

$$E_n = \pm \sqrt{p_3^2 + p_2^2 + (2n+1-s)|\mu|}, \tag{60}$$

2. In the case of the particle in a uniform magnetic field ($\lambda \neq 0$ and $\mu = \gamma = 0$), the energy spectrum becomes:

$$E_n = \frac{\frac{m^2 + (2n+1-s)|e\lambda|}{\kappa} \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 + (2n+1-s)|e\lambda| + \frac{p_3^2}{\kappa^2} [m^2 + (2n+1-s)|e\lambda|]}}{1 - \frac{m^2 + (2n+1-s)|e\lambda|}{\kappa^2}}$$

3. In the limit $\kappa \rightarrow \infty$, we have

$$E_n = \pm \sqrt{m^2 + p_3^2 + (2n+1-s)|e\lambda|}. \tag{61}$$

5. Results and discussion

In the present research paper, we study the Klein–Gordon and Dirac equations in the electromagnetic field with confining scalar potential in doubly special relativity and in momentum space. The analytical expressions for the relativistic energy eigenvalues and the corresponding eigenfunctions are given in Eqs. (25) and (26), respectively. Numerical results of the positive energies corresponding to positive particles with arbitrary quantum numbers are presented.

The effects of quantum number n on the bound state energy eigenvalues for the particle are given in Figs. 1 and 2. In Fig. 1, we plot the energy levels for a linear scalar potential Eq. (25) with quantum numbers n for different values of deformation parameters κ . From the results shown in Fig. 1, it is seen that the energy eigenvalues $(E_n^\mu)^+$ increase monotonically as n increases for various values of deformation parameters κ . We also note that for a fixed value of n , the energy levels increase when the deformation parameter κ decreases. This trend is also shown in Fig. 2, as the bound state energy eigenvalues vary with n for various values of κ .

Furthermore, Fig. 3 shows the variation of the density of

created particles as a function of the variable γ for various values of $x = \frac{E}{\kappa}$. As a result, we observe that the density of created particles increases monotonically with variable γ in all cases. Moreover, for a fixed value of κ , the free energy function decreases when the deformation parameter κ grows.

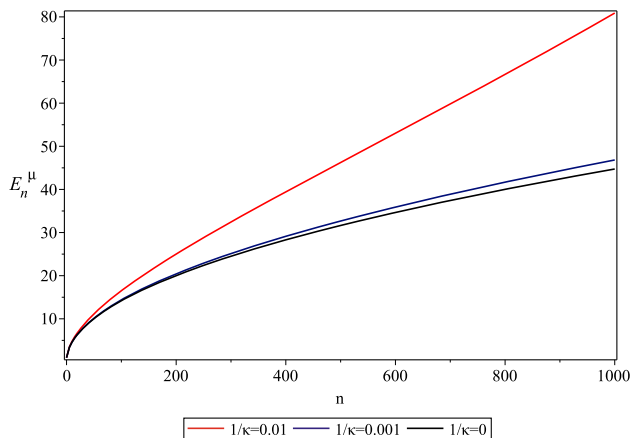


Fig. 1 E_n^μ vs n for some κ value

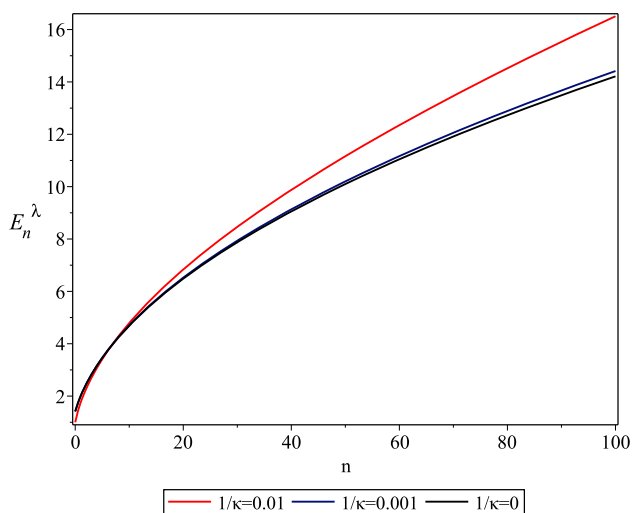


Fig. 2 E_n^λ vs n for some κ value

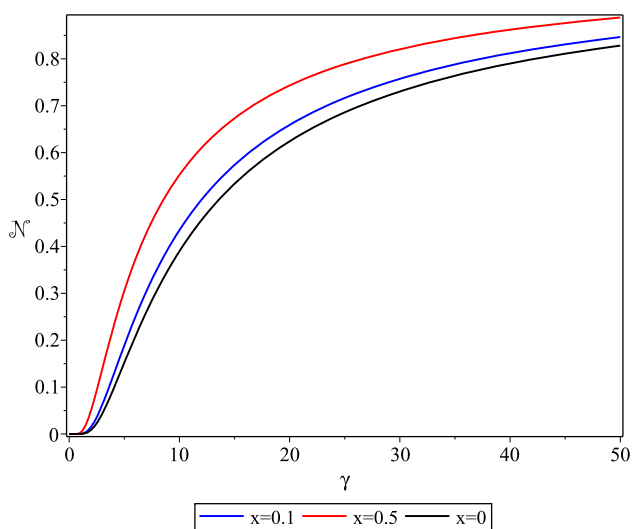


Fig. 3 \mathcal{N} vs γ for various values of $x = \frac{E}{\kappa}$

As a general result, we observed that the effect of the DSR model is very significant, and in the limit $\kappa \rightarrow \infty$, all curves agree with the standard case.

6. Conclusions

Based on the aforementioned, we have solved exactly and analytically the relativistic KG and Dirac equations subjected to the action of a uniform electromagnetic field in addition to a linear scalar potential in the context of MS in the momentum space. For the KG equation case, the solutions for bound and states are determined. By using these scattering states we derived the density of created particles via the Bogoliubov transformations technique and by using these bound states the solution obtained is expressed by Hermite polynomials. Following the same method, the Dirac equation case is established. For both cases, the deformed expressions of energy spectra in the MS model are deduced and are not symmetrical, they contained corrections of all orders of $(\frac{1}{\kappa})$ and vary with the power of n . Some limiting cases are evaluated: For example, in the case when $e^2\lambda^2 + \mu^2 = \gamma^2$ there are no bound state and no confining; for $\kappa \rightarrow \infty$ we recover exactly the same result without deformed uncertainty relation, which has been done by Dominguez-Adame and Méndez [36]. Moreover, we mention that the close relation connecting the principles of relativity to the gauge invariance in the Klein–Gordon (6) and Dirac (46) equations have not been explored sufficiently in the existing literature and the difficulties and the ambiguities remain. Therefore, our work lies in the solution of the problem in question within the limit of an approximation model. Finally, the numerical study of the energy $E_{n,\kappa}^\mu$ and the density of created particles N for some κ value is exposed.

References

- [1] H. S. Snyder *Phys. Rev.* **71** 38 (1947)
- [2] H. S. Snyder *Phys. Rev.* **72** 68 (1947)
- [3] A. Kempf *J. Math. Phys.* **35** 4483 (1994)
- [4] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann *Phys. Rev. D* **52** 1108 (1995)
- [5] A. Kempf and G. Mangano *Phys. Rev. D* **55** 7909 (1997)
- [6] L. J. Garay *Int. J. Mod. Phys. A* **10** 145 (1995)
- [7] S. Mignemi *Mod. Phys. Lett. A* **25** 1697 (2010)
- [8] S. Mignemi *Phys. Rev. D* **84** 025021 (2011)
- [9] W.S. Chung and H. Hassanabadi *J. Korean Phys. Soc.* **71** 1 (2017)
- [10] W.S. Chung and H. Hassanabadi *Mod. Phys. Lett. A* **32** 26 (2017)
- [11] B. Hamil, M. Merad and T. Birkandan *Eur. Phys. J. Plus* **134** 278 (2019)
- [12] B. Hamil and M. Merad *Int. J. Mod. Phys.* **30** 1850177 (2018)

- [13] B. Hamil *Indian J. Phys.* **93** 1319 (2019)
- [14] B. Hamil and M. Merad *Indian J. Phys.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s12648-020-01807-2>
- [15] G. Amelino-Camelia and T. Piran *Phys. Rev. D* **64** 036005 (2001)
- [16] J. Magueijo and L. Smolin *Phys. Rev. Lett.* **88** 190403 (2002)
- [17] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov *Rev. Mod. Phys.* **73** 977 (2001)
- [18] J. L. Cortés and J. Gamboa *Phys. Rev. D* **71** 065015 (2005)
- [19] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak *Int. J. Mod. Phys. D* **12** 299 (2003)
- [20] S. Mignemi, [arXiv:0711.4053](https://arxiv.org/abs/0711.4053)
- [21] W. S. Chung, A. M. Gavrilik, and A. V. Nazarenko *Physica A* **533** 121928 (2019)
- [22] G. Amelino-Camelia, L. Smolin, and A. Starodubtsev *Class. Quantum Grav.* **21** 3095 (2004)
- [23] W. S. Chung and H. Hassanabadi *Prog. Theor. Exp. Phys.* **12** 123E01 (2019)
- [24] N. Farahani, H. Hassanabadi, J. Kříž, et al. *Eur. Phys. J. C* **80** 696 (2020)
- [25] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W. S. Chung *Commun. Theor. Phys.* **71** 1301 (2019)
- [26] B. Hamil A. Merad and M. Merad *EPL* **131** 10003 (2020)
- [27] O. J. Abebe et al. *Pramana - J Phys.* **95** 126 (2021)
- [28] A.N. Ikot et al. *Heliyon* **6** e03738 (2020)
- [29] U.S. Okorie, A. Taş, A.N. Ikot et al. *Indian J. Phys.* (2021). <https://doi.org/10.1007/s12648-020-01908-y>
- [30] B. Hamil and L. Chetouani *Pramana - J Phys.* **86** 746 (2016)
- [31] O. Langueur, M. Merad and B. Hamil *Commun. Theor. Phys.* **71** 1069 (2019)
- [32] C.O. Edet et al. *J. Low Temp. Phys.* **202** 105 (2021)
- [33] C.O. Edet and A.N. Ikot *J. Low Temp. Phys.* **203** 111 (2021)
- [34] C.O. Edet and A.N. Ikot *Eur. Phys. J. Plus* **136** 432 (2021)
- [35] A. Boumali and M. Labidi *Mod. Phys. Lett. A* **33** 1850033 (2018)
- [36] A. Dominguez and B. Mendez *IL Nuovo Cimento B* **05** 489 (1992)
- [37] J. Lukierski and A. Nowicki H. Ruegg *Phys. Lett. B* **293** 344 (1992)
- [38] F.J. Herranz *Phys. Lett. B* **543** 89 (2002)
- [39] C. Heuson [arXiv:gr-qc/0305015](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0305015)
- [40] S. Ghosh P. Pal *Phys. Rev. D* **75** 105021 (2007)
- [41] S. Mignemi *Phys. Rev. D* **68** 065029 (2005)
- [42] S. Mignemi *Annals of Physics* **522** 924 (2010)
- [43] D. Kimberly, J. Magueijo and J. Medeiros *Phys. Rev. D* **70** 084007 (2004)
- [44] V. P. Iyer and L. K. Sharma *Phys. Lett. B* **102** 154 (1981)
- [45] S. W. Hawking and J. B. Hartle *Phys. Rev. D* **13** 2188 (1976)
- [46] D. M. Chitre and J. B. Hartle *Phys. Rev. D* **16** 251 (1977)
- [47] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko *Gen. Rel. Grav.* **7** 535 (1976)
- [48] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (Friedmann Lab. Publ. St. Petersburg) (1994)
- [49] J. Schwinger *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
- [50] E. Bresin and C. Itzykson *Phys. Rev. D* **2** 1191 (1970)
- [51] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov *Sov. J. Nucl. Phys.* **11** 596 (1970)
- [52] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York) (1979)
- [53] S. Haouat and K. Nouicer *Phys. Rev. D* **89** 105030 (2014)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.