

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE D'OUM EL BOUAGHI

Faculté : Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie.



Thèse

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE

Doctorat en Sciences

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thème :

**Etude de quelques problèmes fractionnaires avec des conditions
intégrales.**


Présenté Par :

Debbouche Souheyra

Thèse soutenue le 06/05/2024 devant le jury composé de :

| N° | Nom et prénom | Grade | Etablissement | Qualité |
|----|----------------------|-------|---|------------|
| 01 | Oussaeif Taki Eddine | Prof. | Univ. Larbi Ben M'hidi , Oum El Bouaghi | Président |
| 02 | Merad Ahcene | Prof. | Univ. Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi | Rapporteur |
| 03 | Mesbahi Salim | Prof. | Univ. Ferhat Abbas, Setif 1 | Examineur |
| 04 | Saoudi Khaled | Prof. | Univ . Abbès Laghrour, Khenchela | Examineur |
| 05 | Dhelis Sofiane | MCA. | Univ. Larbi Ben M'hidi , Oum El Bouaghi | Examineur |

REMERCIEMENTS

 Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse le professeur *MeradAhcene*, qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.

*J'*adresse l'expression de ma gratitude au professeur *OussaeifTakiEddine*, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

*A*insi qu'aux :

*M*esbahi Salim prof à l'université Ferhat Abbas, Setif 1,

*S*aoudi Khaled prof à l'université Abbès Laghrour, Khenchela,

*D*helis Sofiane maître de conférences à l'université Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi,

qui ont accepté d'examiner mon mémoire et faire partie de ce jury.

*J*e remercie également tous les membres de la faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

*J*e remercie aussi ma famille et mes amis pour leur soutien moral et matériel.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 9 |
| 1 Résultats préliminaires et notations | 13 |
| 1.1 Espaces fonctionnelles | 13 |
| 1.1.1 Espace de Lebesgue | 13 |
| 1.1.2 Espace des fonctions continues | 14 |
| 1.1.3 Espace des fonctions absolument continues | 14 |
| 1.2 Opérateurs linéaires | 15 |
| 1.2.1 Opérateurs fermés | 16 |
| 1.3 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert | 17 |
| 1.4 la méthode des estimations a priori | 17 |
| 1.5 Fonctions spéciales | 19 |
| 1.5.1 Fonction Bêta | 19 |
| 1.5.2 Fonction Gamma | 19 |
| 1.5.3 La fonction de Mittag-Leffler | 19 |
| 1.6 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville | 20 |
| 1.7 La dérivation fractionnaire | 21 |
| 1.7.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville | 21 |
| 1.7.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo | 23 |
| 1.7.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Fabrizio | 24 |
| 1.8 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires | 25 |
| 1.8.1 Linéarité | 25 |
| 1.8.2 Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires | 26 |
| 1.8.3 Intégration par parties | 26 |
| 1.9 Équation différentielle fractionnaire | 26 |
| 1.10 Équation de réaction-diffusion | 27 |
| 1.11 Inégalités importantes | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.11.1 | Inégalité de ϵ -Cauchy | 28 |
| 1.11.2 | Inégalité de Cauchy-Schwartz | 28 |
| 1.11.3 | Inégalité de Poincaré | 28 |
| 1.11.4 | Inégalité de Hölder | 28 |
| 1.11.5 | Lemme de Gronwall | 28 |
| 2 | Étude d'un problème différentiel fractionnaire linéaire dans N-dimension | 29 |
| 2.1 | Formulation du problème | 29 |
| 2.2 | L'unicité de la solution | 30 |
| 2.2.1 | Existence de la solution forte | 37 |
| 3 | Étude d'un problème différentiel fractionnaire non-linéaire en deux-dimensions avec condition intégrale | 43 |
| 3.1 | Position du problème | 43 |
| 3.2 | Problème linéaire associé | 45 |
| 3.2.1 | L'unicité de la solution | 45 |
| 3.2.2 | L'existence de la solution | 49 |
| 3.3 | Problème différentiel fractionnaire non-linéaire | 52 |
| 4 | Solution implicite pour l'équation logistique fractionnaire de Caputo-Fabrizio avec effet Allee | 61 |
| 4.1 | Introduction | 61 |
| 4.2 | Solution de l'équation différentielle logistique fractionnaire | 62 |
| | Bibliographie | 67 |

Notations

IN : Ensemble de nombres naturels.

IR : Ensemble de nombres réels.

H : Espace de Hilbert.

\mathcal{L} : Opérateur non borné.

$D(\mathcal{L})$: le domaine de définition de l'opérateur \mathcal{L} .

$R(\mathcal{L})$: l'image de l'opérateur \mathcal{L} .

u_t : La dérivée partielle première de u par rapport à t .

u_x : La dérivée partielle première de u par rapport à x .

$$\mathcal{J}_x u(x) = \int_0^x u(\xi) d\xi.$$

$$\mathcal{J}_x^2 u(x) = \int_0^x \int_0^\mu u(\xi) d\xi d\mu.$$

${}^C \partial_t^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens Caputo.


${}^{RL} \partial_t^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville

${}^{CF} \partial_t^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens Caputo-Fabrizio.

I_t^α : Intégrales fractionnaire au sens Riemann-Liouville.

${}^{CF} I_t^\alpha$: Intégrales fractionnaire au sens Caputo-Fabrizio.

ABSTRACT

 In this work, we study some classes of fractional differential problems by functional analysis methods.

First, based on the method of energy inequalities, we show the existence and uniqueness of a strong solution for a linear fractional differential problem with integral conditions in a space of dimension N .

The second type is a nonlinear fractional differential problem with integral conditions in a two-dimensional space. First, we establish the existence and uniqueness of a strong solution for the associated linear problem. The next step, using an iterative process based on the results previous, we prove the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear problem.

Finally, the fractional version of the logistic differential model is studied with Allee effect. It is also studied with initial conditions. The definition of the fractional derivative used in this research is Caputo-Fabrizio. Our objective here is to give an implicit solution to the problem posed, a method based on the properties of the fractional derivative is used.

Mots clés : Fractional problems, energy inequality, integral condition, Laplace transform.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on étudie quelques classes de problèmes différentiels fractionnaires par des méthodes d'analyse fonctionnelle.

Première, en se basant sur la méthode des inégalités énergétiques, on montre l'existence et l'unicité d'une solution forte pour un problème différentiel fractionnaires linéaire avec des conditions intégrales dans un espace de dimension N .

Le second type est un problème différentiel fractionnaires non-linéaire avec des conditions intégrales dans un espace de dimension deux. Tout d'abord, on établit l'existence et l'unicité d'une solution forte pour le problème linéaire associé. L'étape suivante, en utilisant un processus itératif basé sur les résultats précédents, on prouve l'existence et l'unicité de la solution du problème non-linéaire.

Finalement, la version fractionnaire du modèle différentiel logistique est étudiée avec Allee effet. Elle est également étudiée avec des conditions initiales. La définition de la dérivée fractionnaire utilisé dans cette recherche est Caputo-Fabrizio. Notre objectif ici de donner une solution implicite du problème posé, une méthode basée sur les propriétés de la dérivée fractionnaire est utilisée.

Mots clés : Problèmes fractionnaires, inégalité énergétique, condition intégrale, transformée de Laplace.

المخلص

قمنا في هذا العمل بدراسة بعض فئات المسائل التفاضلية الكسرية بطرق التحليل الدالي. أولاً، اعتماداً على طريقة التقديرات المسبقة، نبين وجود وتفرد حل قوي لمسألة تفاضلية كسرية خطية ذات شروط حدية تكاملية في فضاء ذو بعد نوني.


النوع الثاني هو مسألة تفاضلية كسرية غير خطية ذات شروط حدية تكاملية في فضاء ثنائي الأبعاد. أولاً، ثبت وجود وتفرد حل قوي للمشكلة الخطية المصاحبة باستخدام طريقة التقديرات المسبقة ثم نستخدم عملية تكرارية بناءً على النتائج السابقة لإثبات وجود وتفرد حل المشكلة غير الخطية.

أخيراً، تمت دراسة النسخة الكسرية للنموذج التفاضلي اللوجستي، ويتم دراستها أيضاً بشروط أولية. تعريف المشتق الكسري المستخدم في هذا البحث هو كابتو-فايريزيو. هدفنا هنا هو إعطاء حل ضمني للمشكلة المطروحة حيث يتم استخدام طريقة دالية تعتمد على خصائص المشتقة الكسرية.

الكلمات المفتاحية:

المسائل الكسرية، تقديرات مسبقة، شرط تكاملي، تحويل لابلاس.

INTRODUCTION

 Le calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de primitive et de dérivée d'ordre entier non nul à tout ordre réel. La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Le calcul fractionnaire apparaît de plus en plus fréquemment dans les champs de recherche non seulement mathématique mais aussi physique. Cette théorie devient le sujet de plusieurs ouvrages regroupés dans [45].

Toutefois, le calcul fractionnaire peut être considéré comme un nouveau sujet, car seulement d'un peu plus de quarante ans ([26], [25], [62], [68]), il a fait l'objet de conférences spécialisées son traitement.

L'histoire de calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire confiné historiquement à quelques correspondances datant en 1695 entre les précurseurs de l'époque, le marquis de l'Hôpital (1661 – 1704) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$ pour désigne la dérivées d'ordre n d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital. Ce fut peut être un jeu des symboles qui poussa l'Hôpital s'interroger sur la possibilité d'avoir

$n \in \mathbb{Q}$. Il posa la question dans une lettre à Leibnitz en 1695 : Et si $n = \frac{1}{2}$?

Leibniz écrivit à l'Hôpital : Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $x\sqrt{dx} : x$, un paradoxe apparent dont on tirera un jour d'utiles conséquences.

Cependant, l'étude de calcul fractionnaire n'est pas apparu dans la littérature que jusqu'à 1819, où Lacroix a présenté une définition de la dérivée fractionnaire.

Après, Le calcul fractionnaire a été construit sur des bases formelles par de nombreux mathématiciens célèbres, par exemple : Liouville, Grunwald, Riemann, Euler, Lagrange, Heaviside, Fourier, Abel ...etc. Beaucoup d'entre eux ont proposé des approches différentes pour la dérivée fractionnaire, que l'on peut retrouver dans [?].

L'absence d'interprétation physique de la dérivation fractionnaire a été abordée lors de la première conférence internationale en 1974 à New Haven ainsi lors des autres conférences qui ont suivi en 1984 en Angleterre et en 1989 à Tokyo.

Récemment, Ils ont trouvé que certains systèmes sont régis par des équations différentielles fractionnaires, on cite par exemple : systèmes thermiques [17], électrochimiques [24], viscoélastique [73].

Ces dernières années le calcul fractionnaire a été largement utilisé dans diverses applications scientifiques et techniques.

Application de calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire apparaissent de plus en plus dans les différents domaines de la recherche. Il a été trouvé dans le champs des interdisciplinaires, beaucoup de systèmes pouvant être décrits par des équations différentielles fractionnaires.

Les problème fractionnaires sont caractérisés par la propriété de mémoire longue et de dimension infinie, contrairement à dérivée entière qui ne fait intervenir qu'un nombre limité des valeurs de passées de la fonction à dériver.

On cite quelques domaines qui sont décrits par la dérivation fractionnaire :

► Mécanique :

Pour modéliser la diffusion anormale dans les milieux, l'approche de dérivation fractionnaire est adaptée, voir [53] et [74].

► Rhéologie :

La dérivée fractionnaire est un bien modélisation de mécanique des gommés et caoutchoucs, aussi elle peut sera modéliser les matériaux à mémoire de forme et aussi

l'amortissement dans les équations de mouvement, voir [13], [14].

► Automatique :

Podlubny a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Il propose une généralisation des contrôleurs traditionnels PID, voir [64].

► systèmes dynamiques :

En traitement du signal [42], clarifient parfaitement l'importance de considération et l'analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaire.

► Économie :

Quelques systèmes de la Finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire, voir [32].

De plus, on peut voir les monographies suivantes pour trouver une présentation systématique des applications des équations différentielles fractionnaires : [54], [60], [65], [67], [70].

Conditions aux limites intégrales

Dans les dernières années, plusieurs phénomènes physiques ont été formulés dans des modèles mathématiques avec des conditions aux limites intégrales ([46],[61],[25]), l'importance de ce type de problèmes a également été soulignée par Samarskii ([69]). Ce type de problèmes été étudié pour les équations paraboliques, pour les équations hyperboliques et pour les équations de type mixte.

S'il est difficile de déterminer la valeur du fonction inconnue ou ses dérivées sur la frontière, on utilisons les conditions aux limites intégrales. Dans ([28]), A.Dezin a prouvé que certains problèmes ne peuvent pas être bien posés au sens d'Hadamard (la solution existe, elle est unique et elle est stable) sauf conditions aux limites non locales associées.

Ce type de conditions obtenue dans la modélisation mathématique de certains problèmes naturels comme la biotechnologie, la biologie , la théorie de la conduction thermique, dans les semi-conducteurs, en physique des plasmas...

Présentation de la thèse

Dans cette thèse nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du deux classes différentes de problèmes de réaction-diffusion fractionnaires. D'autre

part, nous prouverons l'existence d'une solution implicite à une équation différentielle fractionnaire logistique.

Cette thèse est scindée en quatre chapitres comme suit :

Chapitre 01

Dans le premier chapitre nous présentons des notions préliminaires nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, plus précisément, les outils d'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs et une base théorique du calcul fractionnaire.

Chapitre 02

L'objet du deuxième chapitre est l'étude d'une généralisation d'un problème de réaction-diffusion fractionnaire dans un espace de dimension N où la formule de la dérivée fractionnaire utilisée ici est Caputo. On va montrer que cette généralisation admet une solution forte unique en utilisant la méthode des inégalités énergétique. La preuve par récurrence joue un rôle important dans la preuve.

Chapitre 03

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème de réaction-diffusion non linéaire fractionnaire dans un espace de dimension deux. On va montrer que si le second membre de l'équation différentielle fractionnaire vérifie certaine condition, le problème admet une solution unique. La preuve se déroule en deux parties :

La première étape consiste à étudier le problème linéaire ci-joint en utilisant la méthode des inégalités énergétique, où nous prouverons l'existence d'une solution forte et unique.

La deuxième étape consiste à suivre un processus itératif basé sur les résultats obtenus dans la première étape et à établir qu'il existe une solution unique au problème non linéaire.

Chapitre 04

Dans le dernier chapitre, nous étudierons la version fractionnaire d'une équation différentielle ordinaire non linéaire appelée équation logistique. Nous visons à prouver l'existence d'une solution à l'équation proposée selon certaines conditions aux limites initiales, et au final nous obtenons une formule implicite pour la solution. La méthode fonctionnelle utilisée dans ce chapitre est basée sur les propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Fabrizio.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

CHAPITRE 1

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS



l'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail.

Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Espaces fonctionnelles

Dans cette partie, nous présentons un préliminaire dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Espace de Lebesgue

Définition 1.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on appelle espace de Lebesgue l'ensemble des fonctions :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega, \text{ et } \int_{\Omega} |f|^p dx < +\infty \right\}, \text{ pour } 1 \leq p < +\infty,$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega, \text{ et il existe } c \text{ tel que } : |f(x)| < c \text{ p.p, sur } \Omega \right\}, p = +\infty.$$

- $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

- Pour $p = 2$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert ayant le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Lemme 1.1.1. [29]. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|\mathcal{J}_x^m u\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{2^m} \|u\|_{L^2(0,1)}^2,$$

$$\text{où } \mathcal{J}_x^m u = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} u(t, \xi) d\xi.$$

1.1.2 Espace des fonctions continues

Définition 1.1.2. [40] Soit $\Omega = [0, T]$, $0 < T < +\infty$ un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par $C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme

$$\|f\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ est appelé l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

1.1.3 Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.1.3. [40] Soit $\Omega = [0, T]$, $0 < T < +\infty$ un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives f , c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \left\{ f / \exists \varphi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \varphi(s) ds \right\}$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω .

Définition 1.1.4. [40] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$AC^n(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f^k \in C(\Omega), k = (0, 1, 2, \dots, n-1), f^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\}.$$

En particulier si $n = 1$, on a

$$AC^1(\Omega) = AC(\Omega).$$

Lemme 1.1.2. [40] Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

1.2 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1. Un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de A , qui est un sous-espace vectoriel de X . L'opérateur A est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \left\{ \|Au\|_Y, u \in \mathcal{D}(A), \|u\|_X = 1 \right\}$$

est finie.

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.
- Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

- On note $\mathcal{L}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{L}(X)$) l'espace vectoriel des *opérateurs linéaires continus* de X dans Y (resp. des *endomorphismes continus* de X) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$A \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}.$$

Définition 1.2.2. On dit qu'une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est *invertible* ssi il existe une application unique $A' \in \mathcal{L}(Y, X)$ telle que

$$A' \circ A = I_X, \quad A \circ A' = I_Y.$$

On notera $A' = A^{-1}$.

Théorème 1.2.1. [Théorème des isomorphismes de Banach]

Toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ est invertible.

Définition 1.2.3. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle *ensemble résolvant* de A , l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\iff \text{bijectif}) \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On a : $\mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\} \iff \lambda \in \sigma_p(A)$, où $\sigma_p(A)$ est appelée le spectre ponctuel de A .

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A .

1.2.1 Opérateurs fermé

Définition 1.2.4. On dit qu'un opérateur A est fermée si son graphe $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans X et $Au_n \rightarrow v$ dans Y , alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe ($\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$) dans H_1 .

Théorème 1.2.2. [Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace X , alors A est borné

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = X \implies A \text{ borné}).$$

Définition 1.2.5. On dit qu'un opérateur linéaire A est formable dans X s'il admet un prolongement fermé.

1.3 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.3.1. Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F , on définit M^\perp l'orthogonal de M , par

$$M^\perp = \{f \in F : \langle f, g \rangle_F = 0, \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.3.1. Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F . Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Démonstration. Si $M^\perp = \{0\}$, on a $(M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = F$.

D'autre part, on a

$$M \subset \overline{M} \Rightarrow (\overline{M})^\perp \subset M^\perp \Rightarrow (M^\perp)^\perp \subset ((\overline{M})^\perp)^\perp.$$

Comme \overline{M} est fermé, il s'en suit que

$$((\overline{M})^\perp)^\perp = \overline{M} \Rightarrow (M^\perp)^\perp \subset \overline{M} \Rightarrow F \subset \overline{M},$$

d'où $F = \overline{M}$.

Réciproquement, si M est dense dans F , et $\{f_n\}$ une suite d'éléments de M qui converge vers $f \in M^\perp \subset F$, alors

$$\langle f, f_n \rangle_F = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite, il s'ensuit que

$$\|f\|_F = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow M^\perp = \{0\}.$$

□

1.4 la méthode des estimations a priori

la méthode des estimations a priori est appelée aussi méthode des inégalités énergétiques. Cette méthode est efficace pour montrer l'existence et l'unicité des solutions du beaucoup de problèmes de la physique mathématique. Cette méthode résulte des idées introduites par J.Leray [43], L. Garding [34], I.G. Petrovsky [63] dans leurs travaux.

Le schéma de la méthode peut être résumé dans des quatre étapes comme suit :

► **Étape 1 :**

le problème posé est réécrit sous la forme opérationnelle

$$Lu = f,$$

tel que l'opérateur L est engendré par le problème posé et est considéré d'un espace de Banach B dans un espace de Hilbert H convenablement choisi.

► **Étape 2 :**

On établit une estimation a priori de la forme :

$$\|u\|_B \leq c\|Lu\|_H, \forall u \in D(L).$$

Cette inégalité est obtenue en multipliant scalairement l'équation par u ou ses dérivées et un opérateur intégro-différentielle (contenant la fonction, ses dérivées et une certaine fonction poids), et en faisant des intégrations par parties.

► **Étape 3 :**

On montre que l'opérateur L admet une fermeture \bar{L} . La solution de l'équation :

$$\bar{L}u = F,$$

est appelée solution forte du problème considéré. Donc, l'estimation obtenue dans l'étape 1 sera prolongée à \bar{L} , c'est-à-dire :

$$\|u\|_B \leq c\|\bar{L}u\|_H, \forall u \in D(\bar{L}).$$

Alors, L'unicité de la solution forte et sa dépendance continue sont des conséquences immédiates.

► **Étape 4 :**

On montre la densité de l'ensemble $R(L)$ dans H , ce qui garantit l'existence de la solution forte du problème posé car l'opérateur L est fermé dans H et $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$.

Remarque 1.4.1. La méthode des estimations a priori est fondée sur un support théorique solide. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à difficultés, parmi lesquelles : Le choix de l'espace des solutions, le choix du multiplicateur.

1.5 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

1.5.1 Fonction Bêta

Définition 1.5.1. La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes z et w par

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad \Re(w) > 0.$$

Proposition 1.5.1. Pour tout nombres complexes z et w , nous avons les propriétés suivantes :

1. $B(z, w) = B(w, z)$, (symétrique).
2. $B(z, 1) = \frac{1}{z}$.

1.5.2 Fonction Gamma

Définition 1.5.2. On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } \Re(z) > 0.$$

Proposition 1.5.2. Nous avons les propriétés suivantes

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

Proposition 1.5.3. La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \text{avec } (z, w) \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) > 0, \quad \Re(w) > 0.$$

1.5.3 La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.5.3. Pour $z \in \mathbb{C}$ La fonction de Mittag-Leffler $E(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Proposition 1.5.4. *La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1. *La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par*

$$\frac{d^n}{dz^n} = \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha) \right) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z^\alpha).$$

2. *Intégration de la fonction de Mittag-Leffler :*

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha).$$

1.6 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann-Liouville pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire. D'autres versions seront ensuite abordées.

L'intégrale fractionnaire est une conséquence naturelle de la formule bien connue de Cauchy suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(n)} f(x) &= \int_a^x f(x_1) dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Grâce à la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, la formule de Cauchy peut s'étendre naturellement au réel α comme suit :

Définition 1.6.1. Soit $[a, b]$ un intervalle fini sur \mathbb{R} avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ et soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les intégrales

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a,$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b.$$

Sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) respectivement.

Proposition 1.6.1. Soient $f \in C([a, b])$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors, les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite possède les propriétés suivantes

1. $I_{a^+}^\alpha (I_{a^+}^\beta f) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f$.
2. $I_{b^-}^\alpha (I_{b^-}^\beta f) = I_{b^-}^{\alpha+\beta} f$.
3. $\frac{d}{dt} (I_{a^+}^\alpha f) = I_{a^+}^{\alpha-1} f$.
4. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t)$.

Exemple 1.6.1. Posons que $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$, tel que $\beta > 0$. Calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f , on a :

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a.$$

On effectue le changement de variable $t = a + s(x-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= B(\alpha, \beta) \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

d'après la proposition (1.5.3), on a

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

1.7 La dérivation fractionnaire

Dans là l'itération, il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications (la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo).

1.7.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7.1. Soient $f \in L^1([a, b])$, $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α . La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α , est définie par

$${}^{RL}\partial_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α , est définie par

$${}^{RL}\partial_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Remarque 1.7.1. La dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante en général n'est pas nulle :

$${}^{RL}\partial_{a^+}^\alpha C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.7.2. Pour $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur ${}^{RL}\partial^\alpha$ donne le même résultat que la dérivée usuelle pour les ordres entiers, tel que

$$\begin{cases} {}^{RL}\partial_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x) \\ {}^{RL}\partial_{b^-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). \end{cases}$$

Proposition 1.7.1. *Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de quelque fonctions usuelles. Soit $\beta > 0$, on a*

1. ${}^{RL}\partial_{a^+}^n (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. ${}^{RL}\partial_{b^-}^n (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$.

Remarque 1.7.3. Dans le développement de la théorie des intégrations et des dérivations fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important.

Physiquement. Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales de types fractionnaires qui sont difficiles à interpréter physiquement.

Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Ici, on observe le conduit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques.

Une certaine solution pour ce conduit a été proposée par M. Caputo dans son papier et deux ans après dans son livre .

1.7.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.7.2. Soient $f \in Ac^n([a, b])$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, tel que $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α . La dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche d'ordre α , est définie par

$${}^C \partial_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à droite d'ordre α , est définie par

$${}^C \partial_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Remarque 1.7.4. La dérivée au sens Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :

$${}^C \partial_{a^+}^\alpha C = 0, C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.7.1. Soit $f(x) = (x-a)^n$, alors on

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n}.$$

D'où

$${}^C \partial_{a^+}^\alpha (x-a)^n = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt,$$

en effectuant le changement de variable $t = a + s(x-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}^C \partial_{a^+}^\alpha (x-a)^n &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Enfin, d'après la proposition (1.5.3), on a

$${}^C \partial_{a^+}^\alpha (x-a)^n = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Lemme 1.7.1. [6] Soient $T \in \mathbb{R}^+$ et $P(t)$ une fonction positive et absolument continue dans l'intervalle $[0, T]$, tel que

$${}^C \partial_t^{\alpha+1} P(t) \leq k_1 P(t) + k_2(t), t > 0, \alpha \in (0, 1).$$

où k_1 est un constante positif et $k_2(t)$ est une fonction positive et intégrable dans $[0, T]$. Alors,

$$P(t) \leq P(0)E_\alpha(k_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(k_1 t^\alpha)I_t^{-\alpha}k_2(t),$$

avec

$$E_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\lambda n + 1)}, \quad E_{\lambda,\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)},$$

est une fonction de Mittag-Leffler.

Lemme 1.7.2. [51] Pour chaque fonction absolument continue $\gamma(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$, avec $T > 0$ on a

$$2\gamma(t)({}^C\partial_t^\alpha \gamma(t)) \geq ({}^C\partial_t^\alpha \gamma^2(t)), \alpha \in (0, 1).$$

Lemme 1.7.3. [39] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} . Pour chaque fonction absolument continue $\gamma(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$, avec $T > 0$ on a

$$\int_0^T ({}^C\partial_t^\alpha \|\gamma_t\|_{L^2(\Omega)}^2) dt = I_T^{\alpha-1} \|\gamma_T\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\gamma_T(0, x)\|_{L^2(\Omega)}^2, \forall x \in \Omega.$$

Proposition 1.7.2. Les relations entre la dérivée au sens de Caputo à gauche et la dérivée au sens de Riemann-Liouville à gauche est donnée par

$${}^C\partial_{a^+}^\alpha f(x) = {}^{RL}\partial_{a^+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right],$$

et pour les dérivées à droite, la relation comme suit

$${}^C\partial_{a^+}^\alpha f(x) = {}^{RL}\partial_b^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right].$$

1.7.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Fabrizio

Définition 1.7.3. [23] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Fabrizio d'une fonction $\varphi \in L^2([0, T])$ est donnée par :

$${}^{CF}\partial_t^{\alpha+1} \varphi(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t e^{\frac{-\alpha(t-s)}{1-\alpha}} \varphi'(s) ds, \alpha \in [0, 1].$$

Définition 1.7.4. [23] L'intégrale fractionnaire de Caputo-Fabrizio d'ordre α , d'une fonction $\varphi : [a, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$, est :

$${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = (1 - \alpha)[\varphi(t) - \varphi(0)] + \alpha \int_0^t \varphi(s) ds,$$

avec

$$\varphi(0) = \int_a^0 e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}s} \varphi'(s) ds.$$

Lemme 1.7.4. [23] Soit $\varphi \in L^2([0, T])$. La solution de l'équation différentielle

$${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = 0,$$

est seulement la fonction constante.

Lemme 1.7.5. [23] La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio et l'intégrale de Caputo-Fabrizio est donnée par :

$${}^{CF}I_t^\alpha \left({}^{CF}\partial_t^{\alpha+1} \varphi(t) \right) = \varphi(t) - \varphi(0), \quad t > 0, \alpha \in (0, 1).$$

Lemme 1.7.6. [16] On suppose que :

$${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = \xi(t), \quad t > 0, \alpha \in (0, 1).$$

Alors, on a :

$$\varphi(t) = (1 - \alpha)[\xi(t) - \xi(0)] + \alpha \int_0^t \xi(s) ds + \varphi(0).$$

1.8 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous intéressons aux propriétés de dérivation et d'intégration fractionnaire, qui sont utilisées à la suite de cette thèse.

1.8.1 Linéarité

La dérivation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires :

$$\partial^\alpha (\gamma f(x) + \delta g(x)) = \gamma \partial^\alpha f(x) + \delta \partial^\alpha g(x)$$

où ∂^α désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans cette thèse.

1.8.2 Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Soient $f(t)$ est continue dans $[a; x]$ et $g(t)$ possède $(n + 1)$ dérivées continues sur $[a; x]$, alors la règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires est comme suit :

$$\partial^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) \partial^{(\alpha-k)} g(x) - R_n^\alpha(x),$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt \int_t^x (t-\tau)^n g^{(n+1)}(\tau) d\tau.$$

1.8.3 Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions.

Proposition 1.8.1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, tel que $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α , $f \in C^n[(a, b)]$ et $g \in C^n[(a, b)]$. Alors

$$\int_a^b f(x) \partial_{a^+}^\alpha g(x) dx = \int_a^b \partial_{b^-}^\alpha f(x) g(x) dx,$$

et

$$\int_a^b f(x) \partial_{b^-}^\alpha g(x) dx = \int_a^b \partial_{a^+}^\alpha f(x) g(x) dx.$$

1.9 Équation différentielle fractionnaire

Dans cette section, on va donner la définition d'une équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville et de type Caputo.

Définition 1.9.1. Soient f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, tel que $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α . L'équation

$${}^{RL}\partial^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville, dans ce cas les conditions initiales est de la forme :

$${}^{RL}\partial^{\alpha-k} y(0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} ({}^{RL}\partial^{\alpha-n} y(t)) = c_n,$$

où c_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$, sont des constantes.

Définition 1.9.2. Soient f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, tel que $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α . L'équation

$${}^C\partial^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo, dans ce cas les conditions initiales est de la forme :

$$y^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

où c_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$, sont des constantes.

1.10 Équation de réaction-diffusion

Rappelant q'une équation de réaction-diffusion standard est représentée par des équations aux dérivées partielles de la forme :

$$u_t - a\Delta u = f(u), \quad t \geq 0,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{R}$, Δu est le laplacien de u et a désigne la concentration des substances ou bien les individus selon le phénomène modélisé. Ces équations interviennent dans la description de phénomènes non linéaires dans lesquels la dépendance en espace introduit une évolution de type mouvement brownien. On les rencontre dans la modélisation des réactions chimiques, et, en particulier, dans les phénomènes de combustion. On les rencontre aussi dans l'analyse des facteurs intervenant dans la propagation de l'influx nerveux et dans la dynamique des populations, voir [55] pour plus de détails.

L'équation de diffusion fractionnaire a été introduite en physique par Nigmatullin pour décrire la diffusion dans un cas particulier de milieux poreux, [58] et [59].

L'équation de réaction-diffusion est un exemple de base de calcul fractionnaire, voir [4], [66], [72], [51].

1.11 Inégalités importantes

Pour cette section, voir ([21],[22]).

1.11.1 Inégalité de ϵ -Cauchy

Pour a et b arbitraires, et tout $\epsilon > 0$, on a :

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2.$$

1.11.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit ω un ouvert de \mathbb{R} , on a :

$$\forall f, g \in L^2(\omega) : \|fg\|_{L^1(\omega)} \leq \|f\|_{L^2(\omega)} \|g\|_{L^2(\omega)}.$$

1.11.3 Inégalité de Poincaré

Soit $f \in W_2^1(\Omega)$, tel que Ω est un ouvert de \mathbb{R} , et $f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$. Donc, on a :

$$\int_{\Omega} f^2(x) dx \leq c_{\Omega}^2 \int_{\Omega} f_x^2(x) dx,$$

où c_{Ω} est une constante dépendante de Ω .

1.11.4 Inégalité de Hölder

Soit ω un ouvert de \mathbb{R} , on a :

$$\forall f \in L^p(\omega), \forall g \in L^q(\omega) : \|fg\|_{L^1(\omega)} \leq \|f\|_{L^p(\omega)} \|g\|_{L^q(\omega)},$$

pour tout $p, q > 0$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.11.5 Lemme de Gronwall

Si $f; g$ sont deux fonctions non négatives et intégrables sur $(0; T)$, la fonction b soit non-décroissante sur $(0; T)$, et $h \in L^1(0; T); h > 0$, tel que :

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s)a(s)ds,$$

alors :

$$f(t) \leq g(t)e^{\int_0^t h(s)ds}.$$

CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DIFFÉRENTIEL FRACTIONNAIRE LINÉAIRE DANS N -DIMENSION

Cet chapitre est consacré à étudier un classe de problème différentiel fractionnaire linéaire dans un espace de N -dimension. En va utiliser la méthode des inégalités énergétiques pour montrer l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration par récurrence j'ou un rôle important dans la suite.

2.1 Formulation du problème

Soit $Q^n = (0, 1)^n \times (0, T)$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. On pose l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante :

$$(2.1.1) \quad Lu = {}^C \partial_t^{\alpha+1} u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2} = f(t, X),$$

avec les conditions initiales

$$(2.1.2) \quad \ell u(0, X) = \varphi(X), u_t(0, X) = 0$$

les conditions aux bords

$$(2.1.3) \quad \frac{\partial u(t, 1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(t, x_1, 1, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial u(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)}{\partial x_n} = 0,$$

et les conditions intégrales

$$(2.1.4) \quad \int_0^1 u(t, x_k) dx_k = 0, \forall t(0, T) \text{ et } \forall k \in [0, n],$$

où ${}^C \partial_t^{\alpha+1}$ la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1]$, f et φ sont des fonctions continues connues.

Notations

Soient T un nombre positif fixé, Ω un ouvert de IR^n et H est un espace de Hilbert.

On note par $L^2(0, T; H)$ l'espace de Hilbert muni par la norme

$$\|u\|_{L^2(0, T; H)}^2 = \int_0^T \|u(t, \dots, \dots)\|_H dt.$$

Soit $C(0, T; H)$ l'espace de toutes fonctions continues u de $(0, T)$ dans H tel que

$$\|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H < \infty.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Sobolev muni par la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

2.2 L'unicité de la solution

Dans cette section, on va établir des estimations a priori, l'unicité de la solution et sa stabilité sont des conséquences immédiates .

Soit $\Omega^n = (0, 1)^n$.

On écrivant le problème (2.1.1) –(2.1.4) sous la forme suivante

$$\mathcal{E}u = (f, \varphi),$$

où $\mathcal{E}u = (L, \ell)$ est un opérateur non borné de E dans F tel que E est un espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q^n)$ muni de la norme

$$\|u\|_E = \sup_{0 \leq t \leq T} (I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n,$$

F est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|\mathcal{E}u\|_F = \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(Q^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(Q^n)}^2$$

et

$$D(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{l} h \in L^2(Q^n) \text{ such that : } {}^C \partial_t^{\alpha+1} h, \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}, \frac{\partial h}{\partial x_k}, \frac{\partial h}{\partial t} \in L^2(Q^n), \\ h(0, X) = 0, h_t(0, X) = 0, \\ \frac{\partial h(t, 1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial h(t, x_1, 1, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial h(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)}{\partial x_n} = 0, \\ \int_0^1 h(t, x_k) dx_k = 0. \end{array} \right.$$

Définition 2.2.1. La solution de l'équation $\bar{\mathcal{E}}u = (f, \varphi)$ est appelée solution forte du problème (2.1.1)–(2.1.4).

Théorème 2.2.1. Pour tout fonction $u \in D(\mathcal{E})$, il existe $C > 0$ tel que

$$(2.2.1) \quad \|u\|_E \leq C \|\mathcal{E}u\|_F,$$

où

$$C = \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(T^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)}.$$

Démonstration. Soient $Q_\tau^n = (0, 1)^n \times (0, \tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ et l'opérateur intégro-différentiel

$$\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \int_0^{\varepsilon_1} \dots \int_0^{\varepsilon_n} u_t(t, \eta_1, \dots, \eta_n) d\eta_n \dots d\eta_1 d\varepsilon_n \dots d\varepsilon_1.$$

Nous expliquons ici, pour $n = 1$:

$$\mathcal{J}_x^2 u_t = \int_0^x \int_0^\varepsilon u_t(t, \eta) d\eta d\varepsilon,$$

pour $n = 2$:

$$\mathcal{J}_{x_1 x_2}^2 u_t = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_2} u_t(t, \eta_1, \eta_2) d\eta_2 d\eta_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_1,$$

pour $n = 3$:

$$\mathcal{J}_{x_1 x_2 x_3}^2 u_t = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_2} \int_0^{\varepsilon_3} u_t(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_3 d\eta_2 d\eta_1 d\varepsilon_3 d\varepsilon_2 d\varepsilon_1,$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que nous puissions déterminer la valeur de $\mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t$, qui joue un rôle important dans la preuve.

Calculons le produit scalaire dans $L^2(Q_\tau^n)$ de l'équation (2.1.1) et le multiplicateur

$$Mu = \begin{cases} \mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le premier cas : si n est pair,

$$(2.2.2) \quad \int_{Q_\tau^n} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} u) \mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n - \sum_{k=1}^n \int_{Q_\tau^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n \\ = \int_{Q_\tau^n} f(t, X) \mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n.$$

Intégrons par partie chaque terme de le coté gauche de l'équation(2.2.2), et utilisons les conditions (2.1.2) – (2.1.4), on obtient

$$(2.2.3) \quad \int_{Q_\tau^n} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} u) (\mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_n \\ = \int_{Q_\tau^n} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n.$$

On va montrer l'équation (2.2.3) par récurrence. Pour $n = 1$, on a

$$\int_{Q_\tau} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} u) (\mathcal{J}_{x_1}^2 u_t) dt dx_1 = ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{x_1} u_t) (\mathcal{J}_{x_1}^2 u_t) \Big|_0^1 \\ - \int_{Q_\tau} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{x_1} u_t) (\mathcal{J}_{x_1} u_t) dt dx_1.$$

On pose que l'équation est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$:

$$\int_{Q_\tau^{n+1}} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} u) (\mathcal{J}_{\prod_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_{n+1} \\ = \int_0^1 \int_{Q_\tau^n} ({}^C \partial_t^\alpha u_t) \mathcal{J}_{\prod_{k=1}^n x_k}^2 (\mathcal{J}_{x_{n+1}}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_n dx_{n+1},$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_{Q_\tau^n} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) \mathcal{J}_{x_{n+1}}^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n dx_{n+1}, \\
&= \int_{Q_\tau^n} \int_0^1 ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{x_{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) \mathcal{J}_{x_{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n dx_{n+1}, \\
&= \int_{Q_\tau^{n+1}} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

Pour le second terme de (2.2.2) on a

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n \int_{Q_\tau^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \\
(2.2.4) \quad & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2.
\end{aligned}$$

En effet pour $n = 1$,

$$- \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} (-\mathcal{J}_{x_1}^2 u_t) dt dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dx_1.$$

For $n = 2$,

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u (\mathcal{J}_{x_1 x_2}^2 u_t) dt dx_1 dx_2 - \int_{Q_\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u (\mathcal{J}_{x_1 x_2}^2 u_t) dt dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_2} u)^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_1} u)^2 dx_1 dx_2, \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_2} \varphi)^2 dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_1} \varphi)^2 dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{Q_\tau^{n+1}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_{n+1} = - \sum_{i=1}^n \int_{Q_\tau^{n+1}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_{n+1} \\
& \quad - \int_{Q_\tau^{n+1}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_{n+1} \\
&= - \int_0^1 \sum_{i=1}^n \int_{Q_\tau^n} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{J}_{x_{n+1}} u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 (\mathcal{J}_{x_{n+1}} u_t) dt dx_1 \dots dx_{n+1} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u)^2 dx_1 \dots dx_{n+1} \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \varphi)^2 dx_1 \dots dx_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_{n+1} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k/x_{n+1}} u)^2 dx_1 \dots dx_{n+1} \\
&- \int_0^1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi)^2 dx_1 \dots dx_{n+1} - \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k/x_{n+1}} \varphi)^2 dx_1 \dots dx_{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k/x_i} \varphi)^2 dx_1 \dots dx_{n+1}
\end{aligned}$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de ε -Cauchy avec $\varepsilon = 1$, au le coté droit de (2.2.2), il s'ensuite que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau^n} f(t, X) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t dt dx_1 \dots dx_n = \int_{Q_\tau^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n \\
(2.2.5) \quad &\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

En utilisant les lemmes (1.7.2) et (1.7.3), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau^n} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n \geq \frac{1}{2} \int_0^\tau ({}^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2) dt \\
&= \frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 - \frac{1}{2} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau(0, X)\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \\
(2.2.6) \quad &= \frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2.
\end{aligned}$$

En substituant (2.2.3) – (2.2.6) dans (2.2.2), on trouve que

$$\begin{aligned}
&I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \\
&\leq \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n \\
(2.2.7) \quad &+ \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2.
\end{aligned}$$

En éliminant le dernier terme dans le coté gauche de (2.2.7), on a

$$I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \leq \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n$$

$$(2.2.8) \quad + \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2.$$

En appliquant le Lemme (2) avec

$$g(t) = \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n,$$

$${}^C \partial_t^\alpha g(t) = I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2,$$

on a

$$(2.2.9) \quad \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n \leq$$

$$\Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha) I_\tau^{-\alpha} \left(\int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \right),$$

ensuite

$$(2.2.10) \quad \int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n \leq$$

$$\Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \right).$$

Donc (2.2.7) sera

$$I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \leq$$

$$(2.2.11) \quad C \left(\int_{Q_\tau^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \right),$$

où

$$C = \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)}.$$

Finalement, passant à le sup dans (2.2.11) par rapport τ entre $[0, T]$.

Le deuxième cas : si n est impair. On obtient les mêmes résultats car le signal négatif dans l'opérateur $\mathcal{M}u$ évite de tomber dans un signal négatif dans la norme précédemment choisie. Ceci est lié à la corrélation des intégrales utilisées pour prouver les relations précédentes avec la dimension de l'espace. \square

Corollaire 2.2.1. *S'il existe la solution de problème (2.1.1)–(2.1.4), elle est unique.*

Démonstration. Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.1.1)–(2.1.4), alors $\mathcal{E}u_1 = \mathcal{E}u_2 = f$

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq C\|\mathcal{E}(u_1 - u_2)\|_F,$$

ensuite

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq 0,$$

donc

$$u_1 = u_2.$$

□

Corollaire 2.2.2. *Posons que les conditions du théorème (2.2.1) sont satisfaites . Alors, \mathcal{E} admet les propriétés suivantes*

(1) \mathcal{E} admet une fermeture $\bar{\mathcal{E}}$ tel que $R(\bar{\mathcal{E}}) = \overline{R(\mathcal{E})}$.

(2) \mathcal{E} admet un inverse $\mathcal{E}^{-1} : F \rightarrow R(\mathcal{E})$ avec $\bar{\mathcal{E}}^{-1} = \overline{\mathcal{E}^{-1}}$.

Démonstration. 1) Posons que $(u_n) \in D(\mathcal{E})$ une suite convergente dans E tel que $\lim u_n = 0$ et $(\mathcal{E}u_n)$ converge vers (f, φ) dans F . Il faut montrer que :

$$f(t, X) = 0, \text{ et } \varphi(X) = 0, \forall t, X \in Q^n.$$

Comme (u_n) converge vers 0 dans $D(\mathcal{E})$, donc u_n converge vers 0 dans $D'(\mathcal{E})$. D'après la continuité de l'application dérivée de $D'(\mathcal{E})$ dans $D'(\mathcal{E})$, on conclut que (Lu_n) converge vers 0, dans $D'(\mathcal{E})$. D'autre part d'après l'hypothèse on a (Lu_n) converge vers f dans F , donc (Lu_n) converge vers f , dans $D'(\mathcal{E})$. Comme la limite est unique dans $D(\mathcal{E})$, on a $f = 0$.

Montrons que $\varphi(X) = 0$. On a (u_n) converge vers 0 dans E , et (ℓu_n) converge vers φ dans F , d'autre part, remarquons que :

$$\|\ell u_n\|_{L^2(Q^n)} \leq \|u_n\|_F,$$

alors, (ℓu_n) converge vers 0 dans $L^2(Q^n)$, ce qui montre que $\varphi(X) = 0, \forall X \in \Omega^n$. Enfin, \mathcal{E} admet une fermeture.

Montrons que : $R(\bar{\mathcal{E}}) = \overline{R(\mathcal{E})}$. Premièrement d'après la définition de $R(\bar{\mathcal{E}}) \subset \overline{R(\mathcal{E})}$.

D'autre part, soient $v \in \overline{R(\mathcal{L})}$ et $(v_n) \in R(\mathcal{L})$ une suite converge vers v . Donc, il existe une suite $u_n \in D(\mathcal{L})$ tel que

$$\mathcal{L}u_n = v_n.$$

En utilisant l'estimation (2.2.1), on a

$$\|u_n - u_m\|_E \leq C\|\mathcal{L}u_n - \mathcal{L}u_m\|_F, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Si n, m tend vers $+\infty$, on peut déduire que (u_n) est une suite de Cauchy dans E , qui est un espace de Banach donc elle est convergente tel que $\lim u_n = u \in E$, ce qui montre que $\bar{\mathcal{L}}u = v$.

2) D'après l'estimation (2.2.1), on a l'opérateur \mathcal{L} est injectif donc il admet un inverse borné \mathcal{L}^{-1} dans $R(\mathcal{L})$. D'autre part, par définition, on a $\bar{\mathcal{L}}$ et aussi admet un inverse $\bar{\mathcal{L}}^{-1}$. \square

Corollaire 2.2.3. *Par passage à la limite, l'estimations (2.2.1) est prolongée aux solutions fortes, i.e., on a*

$$(2.2.12) \quad \|u\|_E \leq C\|\bar{\mathcal{L}}u\|_F, \forall u \in D(\bar{\mathcal{L}}).$$

Alors, la solution forte de (2.1.1)–(2.1.4) est unique si elle existe.

2.2.1 Existence de la solution forte

Cette section est consacrée pour montrer l'existence d'une solution forte de problème (2.1.1)–(2.1.4), ce qui ramenée à montrer la densité de $R(\mathcal{L})$ dans F . La preuve décompose en trois étapes.

Étape 1. On va montrer que $R(\mathcal{L})$ est dense dans F pour $D(\mathcal{L})$ est réduite à $D_0(\mathcal{L})$ où

$$D_0(\mathcal{L}) = \{u, u \in D(\mathcal{L}) : \ell u = 0\}.$$

Théorème 2.2.2. *On pose que les conditions du théorème (2.2.1) sont satisfaites et il existe $\Psi \in L^2(Q^n)$, $\forall \Phi \in D_0(\mathcal{L})$ vérifie la condition (2.1.2) tel que*

$$(2.2.13) \quad \langle \mathcal{L}\Phi, \Psi \rangle_{L^2(Q^n)} = 0,$$

alors $\Psi \equiv 0$ dans Q^n .

Démonstration. En substituant Φ et Ψ dans l'équation (2.1.1), on écrit (2.2.13) comme suit

$$(2.2.14) \quad \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} \Phi(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(t, X)}{\partial x_k^2}, \Psi \rangle_{L^2(Q^n)} = 0$$

Soit $\mathfrak{N}(x, t)$ une fonction vérifie (2.1.2)-(2.1.4) tel que pour tout $k \in [0, n]$, on a

$$K, \mathfrak{N}_{x_k}, \mathfrak{N}_{x_k x_k}, (\mathfrak{N}_{x_k})_t, {}^C \partial_t^{\alpha+1} \mathfrak{N} \in L^2(Q^n).$$

Posons que

$$\begin{aligned} \Phi(t, X) &= \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}(t, X) \\ &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \mathfrak{N}(t, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n, \end{aligned}$$

et

$$\Psi(t, X) = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t(t, X)$$

alors (2.2.14) sera

$$(2.2.15) \quad \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}(t, X) - \sum_{k=i}^n \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}(t, X))}{\partial x_i^2}, \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t(t, X) \rangle_{L^2(Q^n)} = 0.$$

Intégrons par partie chaque terme de (2.2.14) avec \mathfrak{N} vérifie les conditions (2.1.2) – (2.1.4)

$$(2.2.16) \quad \begin{aligned} &\int_{Q^n} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N})(\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t) dt dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{Q^n} ({}^C \partial_t^{\alpha} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t)) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t) dt dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Le deuxième terme

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} &-\sum_{i=1}^n \int_{Q^n} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}(t, X))}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k \setminus x_i} \mathfrak{N}(T, X) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que l'équation (2.2.17) est vraie. Pour $n = 1$

$$-\int_{Q^1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mathcal{J}_{x_1} \mathfrak{N})(\mathcal{J}_{x_1} \mathfrak{N}_t) dt dx_1 = -\int_{Q^1} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x_1} (\mathcal{J}_{x_1} \mathfrak{N})_t dt dx_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \aleph^2 dx_1.$$

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^2 x_k} \aleph) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^2 x_k} \aleph_t) dt dx_1 dx_2 - \int_{Q^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^2 x_k} \aleph) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^2 x_k} \aleph_t) dt dx_1 dx_2 \\ & = - \int_{Q^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{J}_{x_2} \aleph) (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \aleph_t) dt dx_1 dx_2 - \int_{Q^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{J}_{x_1} \aleph) (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \aleph_t) dt dx_1 dx_2 \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_{x_2} \aleph(T, X))^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_{x_1} \aleph(T, X))^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

L'étape de récurrence

$$\begin{aligned} & = - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{Q^{n+1}} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \aleph(t, X))}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \aleph_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} \\ & = \int_0^1 \left(- \sum_{i=1}^n \int_{Q^n} \frac{\partial^2 \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} (\mathcal{J}_{x_{n+1}} \aleph)}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{J}_{x_{n+1}} \aleph) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ & \quad + \int_0^1 \left(\int_{Q^n} \frac{\partial (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \aleph(t, X))}{\partial x_{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_{n+1}} \aleph_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ & = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k \setminus x_i} (\mathcal{J}_{x_{n+1}} \aleph) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega^n} \int_0^1 \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \aleph(T, X) dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k \setminus x_i} \aleph(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k \setminus x_{n+1}} \aleph(T, X) dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega^{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k \setminus x_i} \aleph(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1}. \end{aligned}$$

En substituant les équation (2.2.16) et (2.2.17) dans (2.2.15), on obtient

$$2 \int_{Q^n} \left({}^C \partial_t^\alpha (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \aleph_t) \right) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \aleph_t) dt dx_1 \dots dx_n$$

$$(2.2.18) \quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k \setminus x_i} \mathfrak{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0.$$

En utilisant l'inégalité (2.2.6), on a

$$(2.2.19) \quad \int_0^T \left({}^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t\|_{L^2(\Omega)} \right) dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k \setminus x_i} \mathfrak{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq 0,$$

ensuite

$$I_T^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathfrak{N}_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k \setminus x_i} \mathfrak{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq 0,$$

ce qui implique

$$\|\mathfrak{N}\|_E = 0 \Rightarrow \Psi = 0.$$

□

Étape 2. On va montrer le théorème suivant.

Théorème 2.2.3. *Pour tout $(f, \varphi) \in F$; le problème (2.1.1–2.1.4) admet une solution forte unique u tel que $u = \overline{\mathcal{E}^{-1}}(f, \varphi)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer $\overline{R(\mathcal{E})} = F$. Posons $W = (w, w_0) \in R(\mathcal{E})^\perp$ et pour tout $u \in D(\mathcal{E})$ on a

$$(2.2.20) \quad \langle \mathcal{E}u, W \rangle_F = \langle Lu, w \rangle_{L^2(Q)} + \langle \ell u, w_0 \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Il faut montrer que $W = 0$. Si $u \in D_0$, on a

$$(2.2.21) \quad \langle Lu, w \rangle_{L^2(Q)} = 0.$$

Ici le théorème (8) implique $w = 0$. Alors (2.2.20) sera

$$\langle \ell u, w_0 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Comme l'image de l'opérateur ℓ partout dense dans l'espace de Hilbert F , on conclut que $w_0 = 0$, donc $W = 0$ et

$$\overline{R(\mathcal{E})} = F, \forall u \in D_0(\mathcal{E}).$$

Étape 3. Considérons le cas général. Soit L_0 la partie principale de L i.e.

$$L_0 u = {}^C \partial_t^{\alpha+1} u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2},$$

avec le domaine $D_0(\mathcal{E}_0) = D_0(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}_0 = (L_0, \ell)$. On note que l'opérateur $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (L - L_0, \ell)$ de E dans F , est continu, donc on peut montrer $\overline{R(\mathcal{E})} = F, \forall u \in D(\mathcal{E})$ par une méthode de continuation dépend du paramètre, il est analogue à la méthode utilisée dans [19]. On introduit l'opérateur \mathcal{E}_μ tel que

$$D(\mathcal{E}_\mu) = D(\mathcal{E}_\mu),$$

$$\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}, \text{ pour } \mu = 1.$$

D'après la définition de \mathcal{E}_μ , on peut dire que :

$$\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_{\mu_0} + (\mu - \mu_0)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0), \forall \mu, \mu_0 \in \mathbb{R}.$$

Premièrement, on va montrer que $\overline{\mathcal{E}u} = (f, \ell)$ admet une solution dans E . Pour se but, on considère l'équation :

$$\overline{\mathcal{E}_\mu u} = (f, \ell),$$

donc, on a

$$\overline{\mathcal{E}_{\mu_0} u} + (\mu - \mu_0) \overline{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) u} = (f, \ell),$$

ensuite

$$(2.2.22) \quad u + (\mu - \mu_0) \overline{\mathcal{E}_{\mu_0}^{-1}} (\overline{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}) u = \overline{\mathcal{E}_{\mu_0}^{-1}} (f, \ell).$$

Soit

$$B = (\mu - \mu_0) \overline{\mathcal{E}_{\mu_0}^{-1}} (\overline{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}).$$

On a : $\|B\| < 1$, voir [19], alors l'équation (2.2.22) admet une solution donnée par

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} (-B)^k \overline{\mathcal{E}_{\mu_0}^{-1}} (f, \ell),$$

On déduit que : $R(\overline{\mathcal{E}_{\mu_0}}) = F$, ce qui donne : $\overline{R(\mathcal{E})} = F$. □

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DIFFÉRENTIEL FRACTIONNAIRE NON-LINÉAIRE EN DEUX-DIMENSIONS AVEC CONDITION INTÉGRALE

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution forte du problème différentiel fractionnaire non-linéaire dans un espace de dimension deux pour une réaction-diffusion équation avec une condition intégrale.

Le chapitre se décompose de la façon suivante :

Dans la première partie, on utilisera la méthode d'estimations a priori pour montrer que le problème linéaire associé admet une unique solution forte.

Finalement, la résolution de le problème non-linéaire se fait par un processus itératif.

3.1 Position du problème

Soit $Q = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, T)$, nous considérons l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire suivante :

$$(3.1.1) \quad Lu = {}^C \partial_t^{\alpha+1} u(t, x, y) - \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} = f(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}),$$

avec les conditions initiales

$$(3.1.2) \quad \ell_1 u = u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad \ell_2 u = u_t(0, x, y) = 0,$$

les conditions aux bords

$$(3.1.3) \quad u_x(t, 1, y) = 0, \quad u_y(t, x, 1) = 0,$$

avec u vérifiant les conditions intégrales

$$(3.1.4) \quad \int_0^1 u(t, x, y) dx = 0, \quad \int_0^1 u(t, x, y) dy = 0, \quad \forall t(0, T),$$

où ${}^C \partial_t^{\alpha+1}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo tel que l'ordre $\alpha \in (0, 1]$, f et φ sont des fonctions continues et connues.

Nous rappelons que l'équation de réaction-diffusion classique est

$$\partial_t u(t, x) - d \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x),$$

où d est la coefficient de diffusion qui est utilisée dans les modèles des population du biologie.

En raison de son intérêt pratique, le problème différentiel fractionnaire a été intensivement étudié ses dernières années, parmi les travaux établis, on cite les problèmes suivants :

Haili Qiao et Aijie Cheng [66] ont étudié le cas linéaire de l'équation de réaction et diffusion de dimension deux par la méthode de différence fini.

Sakhri Aicha et Ahcene Merad [68]] ont montré que le problème différentiel fractionnaire non-linéaire de dimension un admet une solution forte unique.

Said Mesloub et Faten Aldosari [51] ont étudié un classe de problème différentiel fractionnaire non linéaire de dimension deux.

Notant ici que dans la littérature mathématique et contrairement au cas linéaire, on ne trouve pas beaucoup de travaux concernant le cas non-linéaire. Ceci est dû à la complexité que soulève cette classe de problèmes, ce qui souligne l'importance de cette étude.

3.2 Problème linéaire associé

Soit $Q = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, T)$, nous considérons l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante :

$$(3.2.1) \quad Lu = {}^C \partial_t^{\alpha+1} u(t, x, y) - \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} = f(t, x, y),$$

avec les conditions initiales (3.1.2), les conditions aux bords (3.1.3) et les conditions intégrales (3.1.4).

Le but de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de la solution forte du problème linéaire associé par la méthode d'estimation a priori. Notons que cet problème est un exemple illustratif de chapitre précédent avec $N = 2$.

Notations

Soient T un nombre positif fixé, Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et H un Hilbert.

Notons $L^2(0, T; H)$ l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(0, T; H)}^2 = \int_0^T \|u(t, \cdot, \cdot)\|_H^2 dt.$$

Soit $C(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues u de $(0, T)$ à valeur dans H tel que

$$\|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Sobolev muni par la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_y\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

3.2.1 L'unicité de la solution

Premièrement, on établit un théorème d'unicité de la solution forte, sa dépendance continue par rapport aux données (f, φ) . Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des estimations a priori.

Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

D'abord, on écrit le problème linéaire associé posé sous la forme opérationnelle suivante :

$$\mathcal{L}u = (f, \varphi),$$

tel que $\mathcal{E}u = (L, \ell_1, \ell_2)$ est un opérateur non borné de E dans F , où E est un espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q)$ avec la norme finie :

$$\|u\|_E = \sup_{0 \leq t \leq T} (I_t^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy} u_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|\mathcal{J}_x u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{J}_y u\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

F est espace de Hilbert muni par la norme :

$$\|\mathcal{E}u\|_F = \|\mathcal{J}_{xy} f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\mathcal{J}_x \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{J}_y \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et

$$D(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{l} h \in L^2(Q) \text{ such that : } {}^C \partial_t^{\alpha+1} h, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial t} \in L^2(Q) \\ h(0, x, y) = \varphi(x, y), h_t(0, x, y) = 0, \\ h_x(t, 1, y) = 0, h_y(t, x, 1) = 0, \\ \int_0^1 h(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 h(t, x, y) dy = 0. \end{array} \right.$$

Définition 3.2.1. La solution de l'équation opérateur $\bar{L}u = F$ est appelée solution forte du problème (3.2.1) avec les conditions (3.1.2)–(3.1.4).

Théorème 3.2.1. Pour tout fonctions $u \in D(\mathcal{E})$, il existe $C > 0$ tel que

$$(3.2.2) \quad \|u\|_E \leq C \|\mathcal{E}u\|_F,$$

avec

$$C = \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(T^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)}.$$

Démonstration. Soient $Q^\tau = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ et l'opérateur intégrale

$$\mathcal{J}_{xy}^2 u_t = \int_0^x \int_0^y \int_0^{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_2} u_t(t, \eta_1, \eta_2) d\eta_2 d\eta_1 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$$

Calculant le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation (1) et $\mathcal{J}_{xy}^2 u$,

$$(3.2.3) \quad \begin{aligned} \int_{Q^\tau} Lu \mathcal{J}_{xy}^2 u_t dt dx dy &= \int_{Q^\tau} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} u) \mathcal{J}_{xy}^2 u_t dt dx dy - \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \mathcal{J}_{xy}^2 u_t dt dx dy \\ &- \int_{Q^\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u \right) \mathcal{J}_{xy}^2 u_t dt dx dy = \int_{Q^\tau} f(t, x, y) \mathcal{J}_{xy}^2 u_t dt dx dy, \end{aligned}$$

Intégrons par partie chaque terme de coté gauche de (3.2.3), et en utilisant les conditions (3.1.2) et (3.1.4), on obtient

$$(3.2.4) \quad \int_{Q^\tau} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} u)(\mathcal{J}_{xy}^2 u_t) dt dx dy = \int_{Q^\tau} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{xy} u_t)(\mathcal{J}_{xy} u_t) dt dx dy,$$

$$\int_{Q^\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, y)(\mathcal{J}_{xy}^2 u_t) dt dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y \varphi)^2 dx dy$$

$$(3.2.5) \quad -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y u)^2 dx dy,$$

$$\int_{Q^\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, y)(\mathcal{J}_{xy}^2 u_t) dt dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x \varphi)^2 dx dy$$

$$(3.2.6) \quad -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x u)^2 dx dy.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy- ε avec $\varepsilon = 1$, sur le coté droit de (3.2.3), on obtient

$$\int_{Q^\tau} f(t, x, y) \mathcal{J}_{xy}^2 u_t dt dx dy = \int_{Q^\tau} (\mathcal{J}_{xy} f)(\mathcal{J}_{xy} u_t) dt dx dy$$

$$(3.2.7) \quad \leq \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy} f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy + \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy} u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy$$

D'après le lemme (1.7.3), on a

$$\int_{Q^\tau} ({}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{xy} u_t)(\mathcal{J}_{xy} u_t) dt dx dy \geq \frac{1}{2} \int_0^\tau ({}^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{xy} u_t\|_{L^2(\Omega)}^2) dt$$

$$= I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy} u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\mathcal{J}_{xy} u_\tau(0, x, y)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$(3.2.8) \quad = I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy} u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2$$

En substituant (3.2.4) – (3.2.8) dans (3.2.3), on obtient

$$I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy} u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y u)^2 dt dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x u)^2 dt dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy + \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy \\
 (3.2.9) \quad &+ \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y\varphi)^2 dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x\varphi)^2 dx dy
 \end{aligned}$$

Maintenant, en éliminant les deux dernier termes de le coté gauche de (3.2.9), on trouve

$$\begin{aligned}
 I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy}u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy + \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy \\
 (3.2.10) \quad &+ \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y\varphi)^2 dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x\varphi)^2 dx dy.
 \end{aligned}$$

En appliquant le lemme (1.7.1) avec

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy, \\
 {}^C\partial_t^\alpha g(t) &= I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy}u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

il s'ensuite que

$$\begin{aligned}
 \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy &\leq \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha) I_\tau^{-\alpha} \left(\int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy \right. \\
 (3.2.11) \quad &+ \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y\varphi)^2 dt dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x\varphi)^2 dt dx dy)
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy &\leq \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_{xy}f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy \right. \\
 (3.2.12) \quad &+ \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y\varphi)^2 dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x\varphi)^2 dx dy)
 \end{aligned}$$

donc (3.2.9) devient

$$I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy}u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y u)^2 dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x u)^2 dx dy$$

$$(3.2.13) \quad \leq C \left(\int_Q \|\mathcal{J}_{xy} f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_x \varphi)^2 dx dy + \int_{\Omega} (\mathcal{J}_y \varphi)^2 dx dy \right)$$

tel que

$$C = \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(T^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)}.$$

Comme le coté droit de l'inégalité (3.2.13) est indépendant de τ , on peut passer au sup de τ entre $[0, T]$. \square

3.2.2 L'existence de la solution

Dans la suite on va montrer l'existence d'une solution forte du problème linéaire associé. Il reste à montrer la densité de $R(L)$ dans F .

Corollaire 3.2.1. *Soit les conditions du théorème (3.2.1) satisfaites. Alors, \mathcal{E} admet les propriétés suivantes :*

- (1) \mathcal{E} admet un fermé $\bar{\mathcal{E}}$ tel que $R(\bar{\mathcal{E}}) = \overline{R(\mathcal{E})}$.
- (2) \mathcal{E} admet un inverse $\mathcal{E}^{-1} : F \rightarrow R(\mathcal{E})$ avec $\overline{\mathcal{E}^{-1}} = \overline{\mathcal{E}}^{-1}$.

Démonstration. la preuve est analogue à la preuve de corollaire 2.2.2. \square

Corollaire 3.2.2. *L'inégalité (3.2.2) peut être étendue comme suit :*

$$(3.2.14) \quad \|u\|_E \leq C \|\bar{\mathcal{E}}u\|_F, \forall u \in D(\bar{\mathcal{E}}).$$

Alors, s'elle existe la solution forte de problème (3.2.1) et (3.1.2)–(3.1.4) est une unique.

Théorème 3.2.2. *On pose que les conditions du théorème (3.2.1) sont satisfaites et $\exists h \in L^2(Q), \forall g \in D(\mathcal{E})$ vérifie les conditions (3.1.2) tel que*

$$(3.2.15) \quad \langle \mathcal{E}g, h \rangle_{L^2(Q)} = 0,$$

alors $h \equiv 0$ dans Q .

Démonstration. En substituant g et h dans (3.2.1), on écrit (3.2.15) comme suit

$$(3.2.16) \quad \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} g(t, x, y) - \frac{\partial^2 g(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g(t, x, y)}{\partial y^2}, h \rangle_{L^2(Q)} = 0$$

Soit $K(t, x, y)$ une fonction satisfait les conditions (3.1.2) et (3.1.4) tel que $K, K_x, K_y, K_{xx}, K_{yy}, (K_x)_t, (K_y)_t, {}^C \partial_t^{\alpha+1} K$. Posons que

$$g(t, x, y) = \mathcal{J}_{xy} K(t, x, y) = \int_0^x \int_0^y K(t, \eta, \xi) d\xi d\eta$$

et

$$h(t, x, y) = \mathcal{J}_{xy}K_t(t, x, y),$$

alors (3.2.16) sera

$$(3.2.17) \quad \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{xy}K - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathcal{J}_{xy}K) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathcal{J}_{xy}K), \mathcal{J}_{xy}K_t \rangle_{L^2(Q)} = 0$$

Intégrons par partie chaque membre de (3.2.17), on obtient

$$(3.2.18) \quad \int_Q ({}^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{xy}K)(\mathcal{J}_{xy}K)_t dt dx dy = \int_Q ({}^C \partial_t^\alpha (\mathcal{J}_{xy}K_t))(\mathcal{J}_{xy}K_t) dt dx dy$$

$$\begin{aligned} & - \int_Q \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathcal{J}_{xy}K)(\mathcal{J}_{xy}K_t) dt dx dy = - \int_Q \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{J}_y K)(\text{Im}_{xy}K)_t dt dx dy \\ & = - \int_0^T \int_0^1 [\mathcal{J}_y K(t, 1, y) \left(\int_0^1 \mathcal{J}_y K(t, \eta, y) d\eta \right)_t - \int_0^1 \mathcal{J}_y K(\mathcal{J}_y K)_t dx] dt dy \end{aligned}$$

$$(3.2.19) \quad = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_y K(T, x, y))^2 dx dy$$

$$\begin{aligned} & - \int_Q \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathcal{J}_{xy}K)(\mathcal{J}_{xy}K_t) dt dx dy = - \int_Q \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{J}_x K)(\mathcal{J}_{xy}K)_t dt dx dy \\ & = - \int_0^T \int_0^1 [\mathcal{J}_x K(t, x, 1) \left(\int_0^1 \mathcal{J}_x K(t, x, \xi) d\xi \right)_t - \int_0^1 \mathcal{J}_x K(\mathcal{J}_x K)_t dx] dt dx \end{aligned}$$

$$(3.2.20) \quad = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_x K(T, x, y))^2 dx dy$$

Substituons les équations (3.2.18)–(3.2.20) dans (3.2.17), on trouve

$$(3.2.21) \quad \int_Q ({}^C \partial_t^\alpha (\mathcal{J}_{xy}K_t))(\mathcal{J}_{xy}K_t) dt dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_y K(T, x, y))^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_x K(T, x, y))^2 dx dy = 0$$

Then

$$2 \int_Q ({}^C \partial_t^\alpha (\mathcal{J}_{xy}K_t))(\mathcal{J}_{xy}K_t) dt dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_y K(T, x, y))^2 dx dy$$

$$(3.2.22) \quad + \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_x K(T, x, y))^2 dx dy = 0.$$

En utilisant l'inégalité (3.2.8), on a

$$(3.2.23) \quad \int_0^T \left({}^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{xy} K_t\|_{L^2(\Omega)} \right) dt + \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_y K(T, x, y))^2 dx dy \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_x K(T, x, y))^2 dx dy \leq 0,$$

ensuite

$$I_T^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{xy} K_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_y K(T, x, y))^2 dx dy \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_x K(T, x, y))^2 dx dy \leq 0,$$

qui implique

$$\|K\|_E = 0 \Rightarrow h = 0.$$

□

Théorème 3.2.3. *Pour tout $(f, \varphi) \in F$; le problème (3.2.1, 3.1.2–3.1.4) admet une solution forte unique u tel que $u = \overline{\mathcal{E}^{-1}}(f, \varphi)$*

Démonstration. On suppose que $U = (f, \varphi) \in R(\mathcal{E})^\perp$ tel que

$$(3.2.24) \quad \langle LU, f \rangle_{L^2(Q)} + \langle \ell_1 U, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

il faut montrer que $U = 0$. Si $U \in D(\mathcal{E})$, on a

$$(3.2.25) \quad \langle LU, f \rangle_{L^2(Q)} = 0.$$

Par application du théorème (3.2.2) à (3.2.25), on a $f = 0$ et (3.2.24) sera

$$\langle \ell_1 U, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Comme ℓ_1 est dense dans $L^2(\Omega)$, on conclut que $\varphi = 0$, donc $U = 0$

□

3.3 Problème différentiel fractionnaire non-linéaire

Dans cette section, en utilisant un processus itératif pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1.1)-(3.1.4).

Tout d'abord, on introduit le problème auxiliaire homogène suivant :

$$(3.3.1) \quad L\theta = {}^C \partial_t^{\alpha+1} \theta(t, x, y) - \frac{\partial^2 \theta(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta(t, x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

avec θ vérifie les conditions suivantes :

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} \ell_1 \theta = \theta(0, x, y) = \varphi(x, y), \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \ell_2 \theta = \theta_t(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \theta_x(t, 1, y) = 0, \theta_y(t, x, 1) = 0, \forall t \in (0, T), \\ \int_0^1 \theta(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 \theta(t, x, y) dy = 0, \forall t \in (0, T). \end{cases}$$

En vertu du théorème (3.2.3), on déduit que le problème (3.3.1)-(3.3.2) admet une solution forte unique.

On pose que $v = u - \theta$, donc v vérifie

$$(3.3.3) \quad {}^C \partial_t^{\alpha+1} v - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = M(t, x, y, v, v_x, v_y),$$

avec les conditions

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} \ell_1 v = v(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \ell_2 v = v_t(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ v_x(t, 1, y) = 0, v_y(t, x, 1) = 0, \\ \int_0^1 v(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 v(t, x, y) dy = 0, \end{cases}$$

tel que

$$M(t, x, y, v, v_x, v_y) = f(t, x, y, v + \theta, (v + \theta)_x, (v + \theta)_y).$$

Pour la fonction M , on introduit la condition suivante :

Condition A

Pour tout $(t, x, y) \in Q$, on a

$$M(t, x, y, v_1, v_2, v_3) - M(t, x, y, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \leq \mu(|v_1 - \omega_1| + |v_2 - \omega_2| + |v_3 - \omega_3|).$$

Dans la suite, on va montrer que le problème (3.3.3)-(3.3.4) admet une solution faible unique. Soit v et $w \in C^1(Q)$ tel que

$$v(0, x, y) = 0, v_t(0, x, y) = 0, v_x(t, 1, y) = 0, v_y(t, x, 1) = 0,$$

$$\int_0^1 w(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 w(t, x, y) dy = 0.$$

Multipliant (3.3.3) par $\mathcal{J}_{xy}w$, on a

$$\langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} v(t, x, y) - \frac{\partial^2 v(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v(t, x, y)}{\partial y^2}, \mathcal{J}_{xy}w \rangle_{L^2(Q)}$$

$$(3.3.5) \quad = \langle M(t, x, y, v, v_x, v_y), \mathcal{J}_{xy}w \rangle_{L^2(Q)},$$

Intégrons par partie chaque membre de (3.3.5), utilisant les propriétés de v et w , on obtient

$$(3.3.6) \quad \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} v, \mathcal{J}_{xy}w \rangle_{L^2(Q)} = \langle {}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{xy}v_t, w \rangle_{L^2(Q)}$$

$$(3.3.7) \quad \langle -\frac{\partial^2 v(t, x, y)}{\partial x^2}, \mathcal{J}_{xy}w \rangle_{L^2(Q)} = -\langle \mathcal{J}_y v_x(t, x, y), w \rangle_{L^2(Q)}.$$

$$(3.3.8) \quad \langle -\frac{\partial^2 v(t, x, y)}{\partial y^2}, \mathcal{J}_{xy}w \rangle_{L^2(Q)} = -\langle \mathcal{J}_x v_y(t, x, y), w \rangle_{L^2(Q)}.$$

$$(3.3.9) \quad \langle M(t, x, y, v, v_x, v_y), \mathcal{J}_{xy}w \rangle_{L^2(Q)} = \langle \mathcal{J}_{xy}M(t, x, y, v, v_x, v_y), w \rangle_{L^2(Q)}.$$

En substituant (3.3.6)–(3.3.9) dans (3.3.5), on trouve

$$R(v, w) = \langle {}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{xy}v_t, w \rangle_{L^2(Q)} - \langle \mathcal{J}_x v_y(t, x, y), w \rangle_{L^2(Q)}$$

$$(3.3.10) \quad -\langle \mathcal{J}_y v_x(t, x, y), w \rangle_{L^2(Q)} = \langle \mathcal{J}_{xy}M(t, x, y, v, v_x, v_y), w \rangle_{L^2(Q)}$$

Définition 3.3.1. On appelle solution faible du problème (3.3.3)-(3.3.4), tout fonctions $v \in L^2(Q)$ vérifies (3.3.10) et

$$\int_0^1 v(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 v(t, x, y) dy = 0.$$

Dans l'étape suivant, on définit une méthode itérative pour étudier le problème (3.3.3)-(3.3.4).

On définit la suite $v^{(n)}$ par : $v^{(0)} = 0$ tel que pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v^{(n)}$ est une solution du problème

$$(3.3.11) \quad {}^C \partial_t^{\alpha+1} v^{(n)} - \frac{\partial^2 v^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v^{(n)}}{\partial y^2} = M(t, x, y, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}, v_y^{(n-1)}),$$

avec les conditions suivantes

$$(3.3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 v^{(n)} = v^{(n)}(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \ell_2 v^{(n)} = v_t^{(n)}(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ v_x^{(n)}(t, 1, y) = 0, v_y^{(n)}(t, x, 1) = 0, \\ \int_0^1 v^{(n)}(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 v^{(n)}(t, x, y) dy = 0, \end{array} \right.$$

Soit $V = v^{(n+1)} - v^{(n)}$, donc on obtient le problème linéarisé

$$(3.3.13) \quad {}^C \partial_t^{\alpha+1} V^{(n)} - \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2} = Z^{(n-1)}(t, x, y),$$

avec les conditions

$$(3.3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 V^{(n)} = V^{(n)}(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \ell_2 V^{(n)} = V_t^{(n)}(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ V_x^{(n)}(t, 1, y) = 0, V_y^{(n)}(t, x, 1) = 0, \\ \int_0^1 V^{(n)}(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 V^{(n)}(t, x, y) dy = 0, \end{array} \right.$$

tel que

$$Z^{(n-1)}(t, x, y) = M(t, x, y, v^{(n)}, v_x^{(n)}, v_y^{(n)}) - M(t, x, y, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}, v_y^{(n-1)})$$

Théorème 3.3.1. *Soit la condition (A) satisfaite et*

$$V_x^{(n)}(t, 0, y) = 0,$$

alors

$$(3.3.15) \quad \int_0^T \|V^{(n)}\|_{H^1(\Omega)} dt \leq k \int_0^T \|V^{(n-1)}\|_{H^1(\Omega)} dt$$

Démonstration. Calculons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ de l'équation (3.3.13) et l'opérateur

$$PV^{(n)}(t, x, y) = V_t^{(n)}(t, x, y) - \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)},$$

on obtient

$$(3.3.16) \quad \begin{aligned} & \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} V^{(n)}(t, x, y) - \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2}, V_t^{(n)} - \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} \\ & = \langle Z^{(n-1)}(t, x, y), V_t^{(n)}(t, x, y) - \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} \end{aligned}$$

Intégrons par partie chaque membre de (3.3.16) on a

$$(3.3.17) \quad \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} V^{(n)}, V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} = \int_0^\tau \langle {}^C \partial_t^\alpha V_t^{(n)}, V_t^{(n)} \rangle_{L^2(\Omega)} dt$$

$$(3.3.18) \quad - \langle \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x^2}, V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2} \|V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$(3.3.19) \quad - \langle \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2}, V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2} \|V_y^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$(3.3.20) \quad - \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} V^{(n)}, \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} = \int_0^\tau \langle {}^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_y V_t^{(n)}, \mathcal{J}_y V_t^{(n)} \rangle_{L^2(\Omega)} dt$$

$$(3.3.21) \quad \langle \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x^2}, \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2} \|\mathcal{J}_y V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$(3.3.22) \quad \left\langle \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2}, \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)} \right\rangle_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2} \|V^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'après l'inégalité de ε -Cauchy, on conclut que

$$(3.3.23) \quad \langle Z^{(n-1)}, V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|Z^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

$$(3.3.24) \quad -\langle Z^{(n-1)}, \mathcal{J}_y^2 V_t^{(n)} \rangle_{L^2(Q^\tau)} \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_y Z^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

En substituant les équations (3.3.17)–(3.3.24) dans (3.3.16) et en utilisant le lemme (3.7.1), on trouve que

$$(3.3.25) \quad \begin{aligned} & I_\tau^{\alpha-1} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_y^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{J}_y V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{3}{2} \int_0^\tau \|Z^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^\tau \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^\tau \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

En vertu de la condition (A), on conclut que

$$(3.3.26) \quad \int_0^\tau \|Z^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{3}{2} \mu^2 (\|V^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_x^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_y^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2),$$

alors, l'équation (3.3.25) devient

$$(3.3.27) \quad \begin{aligned} & I_\tau^{\alpha-1} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_y^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{J}_y V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq k_1 (\|V^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_x^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_y^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2) \\ & \quad + \int_0^\tau \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^\tau \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

tel que $k_1 = \max(1, \frac{9}{4}\mu^2)$.

En éliminant les deux derniers termes de le coté gauche de (3.3.27), on a

$$(3.3.28) \quad \begin{aligned} & I_\tau^{\alpha-1} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k_1 (\|V^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_x^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2) \\ & \quad + \|V_y^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^\tau \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^\tau \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme (3.7.1) à (3.3.28) avec

$$G(t) = \int_{Q^\tau} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

$${}^C \partial_t^\alpha G(t) = I_\tau^{\alpha-1} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{Q^\tau} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{Q^\tau} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(k_1 \tau^\alpha) I_\tau^{-\alpha} (\|V^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|V_x^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_y^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2) \\ &\leq \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(k_1 \tau^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\tau \|V^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right. \\ (3.3.29) \quad &\quad \left. + \int_0^\tau \|V_x^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^\tau \|V_y^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

En substituant l'équation (3.3.29) dans (3.3.27), on trouve que

$$\begin{aligned} I_\tau^{\alpha-1} \|V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_y V_t^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{J}_y V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_y^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_x^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ (3.3.30) \quad \leq k \left(\|V^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_x^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 + \|V_y^{(n-1)}\|_{L^2(Q)}^2 \right), \end{aligned}$$

tel que $k = k_1 (1 + \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(k_1 \tau^\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)})$.

En éliminant les trois terme de le coté gauche de (3.3.30), il s'ensuite que

$$(3.3.31) \quad \|V^{(n)}\|_{H^2(Q^\tau)}^2 \leq k_2 \|V^{(n-1)}\|_{H^2(Q^\tau)}^2$$

□

D'après les résultat précédent, on a conclut le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. Soient la condition (A) satisfait et $k < 1$ alors le problème (3.3.3)- (3.3.4) admet une solution faible unique dans $H^1(Q)$.

Démonstration. D'après le critère de convergence d'Alembert et comme $k < 1$, on conclut que la série $\sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}$ est convergente.

D'autre part

$$(3.3.32) \quad \sum_{i=0}^{n-1} V^{(i)} + v^{(0)} = \sum_{i=0}^{n-1} (v^{(i+1)} - v^{(i)}) + v^{(0)} = v^{(n)}(t, x, y),$$

alors la suite $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $v \in H^1(Q)$.

L'étape suivante, est de montrer que v est une solution de problème (3.3.3)-(3.3.4), donc il faut montrer que v vérifie la définition (3.3.1).

D'après (3.3.3) on a

$$(3.3.33) \quad \begin{aligned} & R(v^{(n)} - v, h) + R(v, h) = \\ & \langle \text{Im}_{xy} M(t, x, y, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}, v_y^{(n-1)}) - M(t, x, y, v, v_x, v_y), h \rangle_{L^2(Q)} \\ & + \langle \text{Im}_{xy} M(t, x, y, v, v_x, v_y), h \rangle_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

avec

$$(3.3.34) \quad \begin{aligned} R(v^{(n)} - v, h) &= \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{xy}(v^{(n)} - v) - \mathcal{J}_{xy}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v^{(n)} - v) - \mathcal{J}_{xy}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} v^{(n)} - v), h \rangle_{L^2(Q)} \\ &= \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_{xy} h \rangle_{L^2(Q)} - \langle \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}_y (v^{(n)} - v), h \rangle_{L^2(Q)} \\ &\quad - \langle \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{J}_x (v^{(n)} - v), h \rangle_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

En intégrant par partie chaque membre de la coté gauche, on a

$$(3.3.35) \quad \begin{aligned} R(v^{(n)} - v, h) &= \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_{xy} h \rangle_{L^2(Q)} + \langle \frac{\partial}{\partial x} (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_y h \rangle_{L^2(Q)} + \langle \frac{\partial}{\partial y} (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_x h \rangle_{L^2(Q)} \\ &= \langle {}^C \partial_t^{\alpha+1} (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_{xy} h \rangle_{L^2(Q)} + \langle (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_y h_x \rangle_{L^2(Q)}, \\ &\quad + \langle (v^{(n)} - v), \mathcal{J}_x h_y \rangle_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy l'équation (3.3.35) sera

$$R(v^{(n)} - v, h) \leq \| (v^{(n)} - v) \|_{L^2(Q)} \| \mathcal{J}_{xy} ({}^C \partial_t^{\alpha+1} h) \|_{L^2(Q)}$$

$$(3.3.36) \quad + \|v^{(n)} - v\|_{L^2(Q)} \|\mathcal{J}_y h_x\|_{L^2(Q)} + \|v^{(n)} - v\|_{L^2(Q)} \|\mathcal{J}_x h_y\|_{L^2(Q)}.$$

On a (3.3.36) devient

$$(3.3.37) \quad R(v^{(n)} - v, h) \leq \|v^{(n)} - v\|_{L^2(Q)} \left(\|{}^C \partial_t^{\alpha+1} h\|_{L^2(Q)} + 2\|h\|_{H^1(Q)} \right).$$

D'après la condition (A) on a

$$(3.3.38) \quad \begin{aligned} & \langle \mathcal{J}_{xy} \left(M(t, x, y, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}, v_y^{(n-1)}) - M(t, x, y, v, v_x, v_y) \right), h \rangle_{L^2(Q)} \\ & \leq \mu \|v^{(n)} - v\|_{H^1(Q)} \|h\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans (3.3.33) et en utilisant (3.3.37) et (3.3.38), on trouve que

$$(3.3.39) \quad R(v, h) = \langle \mathcal{J}_{xy} M(t, x, y, v, v_x, v_y), h \rangle_{L^2(Q)}.$$

Comme $v \in C(Q)$ on déduit que la définition (3.3.1) est satisfaite.

Dans un dernier étape, on va montrer l'unicité de la solution. Si v_1 et v_2 sont deux solution du problème 3.1.1 – 3.1.4, alors $w = v_1 - v_2$ satisfie

$$(3.3.40) \quad {}^C \partial_t^{\alpha+1} w(t, x, y) - \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} = \Lambda(t, x, y, w, w_x, w_y),$$

avec les conditions

$$(3.3.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 w = w(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \ell_2 w = w_t(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ w_x(t, 1, y) = 0, w_y(t, x, 1) = 0, \\ \int_0^1 w(t, x, y) dx = 0, \int_0^1 w(t, x, y) dy = 0, \end{array} \right.$$

où

$$\Lambda(t, x, y, w, w_x, w_y) = M(t, x, y, v_1, (v_1)_x, (v_1)_y) - M(t, x, y, v_2, (v_2)_x, (v_2)_y).$$

D'après le théorème (3.3.1), on a

$$\|w\|_{H^1(Q)} \leq k \|w\|_{H^1(Q)}.$$

Comme $1 - k > 0$, alors $\|w\|_{H^1(Q)} = 0$ donc $v_1 = v_2$. □

CHAPITRE 4

SOLUTION IMPLICITE POUR L'ÉQUATION LOGISTIQUE FRACTIONNAIRE DE CAPUTO-FABRIZIO AVEC EFFET ALLEE

4.1 Introduction

L'effet Allee est un principe nommé d'après Walter Clyde Allee en 1931. Ce principe repose sur l'idée suivante : les individus d'une population sont corrélés sous leur société pour survivre et se reproduire [8]. Par conséquent, il ne peut y avoir de taux de croissance positif d'une population si sa taille est trop petite, certains exemples sont présentés par des animaux qui chassent ou se défendent en groupe [15]-[71].

Les équations classiques du modèle de croissance de la population générale étudiées avec l'effet Allee sont formalisées par la généralisation de l'équation différentielle ordinaire logistique de Verhulst connue [8].

$$x'(t) = -rx(t)\left[1 - \frac{x(t)}{\mathcal{T}}\right]\left[1 - \frac{x(t)}{\mathcal{K}}\right],$$

avec $x(t)$ est la taille de la population au temps $t \geq 0$, \mathcal{T} est le seuil critique, \mathcal{K} est la capacité de charge et r est appelé le taux de croissance intrinsèque.

La version fractionnaire d'équation logistique est étudié par J. Nioto sous la forme suivante [57] :

$${}^{CF}\partial_t^\alpha x(t) = x(t)\left[1 - x(t)\right],$$

où ${}^{CF}\partial_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio avec $\alpha \in (0, 1)$.

Cet chapitre étudie l'équation différentielle logistique fractionnaire de Verhulst avec effet Allee :

$$(4.1.1) \quad {}^{CF}\partial_t^\alpha X(t) = -rX(t)\left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{T}}\right]\left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{K}}\right],$$

et la condition initiale

$$(4.1.2) \quad X(0) = X_0,$$

où $r, \mathcal{T}, \mathcal{K}$ and X_0 sont des constantes positifs avec $\mathcal{T} < \mathcal{K}$ et ${}^{CF}\partial_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio avec $\alpha \in (0, 1)$.

4.2 Solution de l'équation différentielle logistique fractionnaire

Dans cette section, nous commencerons par prouver ce résultat concernant la décomposition d'une fraction algébrique en éléments simples.

Lemma 4.2.1 Soit $X(t) : D_X \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Pour tout \mathcal{T} et \mathcal{K} , on a :

$$\frac{1}{X(t)\left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{T}}\right]\left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{K}}\right]} = \frac{1}{X(t)} + \frac{\mathcal{T}B}{\mathcal{T} - X(t)} + \frac{\mathcal{K}C}{\mathcal{K} - X(t)},$$

avec

$$B = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}\mathcal{T} - \mathcal{T}^2},$$

et

$$C = \frac{1}{\mathcal{K}} + \frac{1}{\mathcal{T}} - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}\mathcal{T} - \mathcal{T}^2}.$$

Démonstration. Soit A, B et C des constantes, alors l'équation suivante

$$\frac{1}{X(t)\left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{T}}\right]\left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{K}}\right]} = \frac{A}{X(t)} + \frac{B}{1 - \frac{X(t)}{\mathcal{T}}} + \frac{C}{1 - \frac{X(t)}{\mathcal{K}}},$$

est équivalent au système :

$$\begin{cases} A = 1, \\ B + C - \frac{1}{\mathcal{K}} - \frac{1}{\mathcal{T}} = 0, \\ \frac{A}{\mathcal{K}\mathcal{T}} - \frac{B}{\mathcal{K}} - \frac{C}{\mathcal{T}} = 0. \end{cases}$$

La résolution du système précédent par méthode de substitution donne les valeurs requises. \square

Nous avons donc conclu ce théorème :

Théorème 4.2.1. *Pour tout $r, \mathcal{T}, \mathcal{K}$ et X_0 constantes positives avec $\mathcal{T} < \mathcal{K}$, l'équation différentielle logistique de Verhulst avec effet Allee (4.1.1) – (4.1.2) admet une solution donnée par une forme implicite :*

$$(4.2.1) \quad \frac{\left(X(t)^{\frac{1}{\alpha r}}\right) \left(\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - (\mathcal{K} + \mathcal{T})X^2(t) + X^3(t)\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\left(\mathcal{T} - X(t)\right)^{\frac{\mathcal{T}B}{\alpha r}} \left(\mathcal{K} - X(t)\right)^{\frac{\mathcal{K}C}{\alpha r}}} = ke^{-t},$$

avec

$$k = \frac{\left(X_0^{\frac{1}{\alpha r}}\right) \left(\mathcal{T}\mathcal{K}X_0 - (\mathcal{K} + \mathcal{T})X_0^2 + X_0^3\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\left(\mathcal{T} - X_0\right)^{\frac{\mathcal{T}B}{\alpha r}} \left(\mathcal{K} - X_0\right)^{\frac{\mathcal{K}C}{\alpha r}}}.$$

Démonstration. Nous appliquons d'abord l'intégrale de Caputo-Fabrizio $\left({}^{CF}I_{\alpha}\right)$ à (4.1.1), on a :

$$(4.2.2) \quad {}^{CF}I_t^{\alpha} \left({}^{CF}\partial_t^{\alpha} X(t) \right) = \left({}^{CF}I_t^{\alpha} \xi(t) \right),$$

avec

$$\xi(t) = -rX(t) \left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{T}} \right] \left[1 - \frac{X(t)}{\mathcal{K}} \right].$$

En utilisant les lemmes (1.7.4) et (1.7.5), nous avons

$$(4.2.3) \quad X(t) - X(0) = (1 - \alpha) \left[\xi(t) - \xi(0) \right] + \alpha \int_0^t \xi(s) ds.$$

En prenant la dérivée première de l'équation (4.2.3), on obtient :

$$(4.2.4) \quad X'(t) = (1 - \alpha) \xi'(t) + \alpha \xi(t).$$

Remplacer $\xi(t)$ par (4.2.4), puis :

$$X'(t) = -(1 - \alpha)r \left[X'(t) - \frac{2X'(t)X(t)}{\mathcal{T}} - \frac{2X'(t)X(t)}{\mathcal{K}} + \frac{3X'(t)X^2(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}} \right] - \alpha r \left[X(t) - \frac{X^2(t)}{\mathcal{T}} - \frac{X^2(t)}{\mathcal{K}} + \frac{X^3(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}} \right],$$

donc :

$$X'(t) + (1 - \alpha)r \left[X'(t) - \frac{2X'(t)X(t)}{\mathcal{T}} - \frac{2X'(t)X(t)}{\mathcal{K}} + \frac{3X'(t)X^2(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}} \right] = -\alpha r \left[X(t) - \frac{X^2(t)}{\mathcal{T}} - \frac{X^2(t)}{\mathcal{K}} + \frac{X^3(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}} \right],$$

alors

$$(4.2.5) \quad \frac{X'(t)}{\alpha r \left[X(t) - \frac{X^2(t)}{\mathcal{T}} - \frac{X^2(t)}{\mathcal{K}} + \frac{X^3(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}} \right]} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left(\frac{\mathcal{T}\mathcal{K}X'(t) - 2\mathcal{K}X'(t)X(t) - 2\mathcal{T}X'(t)X(t) + 3X'(t)X^2(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - \mathcal{K}X^2(t) - \mathcal{T}X^2(t) + X^3(t)} \right) = -1.$$

On utilise le lemme (4.2.1), on a :

$$(4.2.6) \quad \frac{1}{\alpha r} \left[\frac{X'(t)}{X(t)} + \frac{\mathcal{T}BX'(t)}{\mathcal{T} - X(t)} + \frac{\mathcal{K}CX'(t)}{\mathcal{K} - X(t)} \right] + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left(\frac{\mathcal{T}\mathcal{K}X'(t) - 2\mathcal{K}X'(t)X(t) - 2\mathcal{T}X'(t)X(t) + 3X'(t)X^2(t)}{\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - (\mathcal{K} + \mathcal{T})X^2(t) + X^3(t)} \right) = -1.$$

En intégrant les deux côtés de l'équation (4.2.6), nous avons :

$$(4.2.7) \quad \frac{1}{\alpha r} \left[\ln|X(t)| - \mathcal{T}B \ln|\mathcal{T} - X(t)| - \mathcal{K}C \ln|\mathcal{K} - X(t)| \right] + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left(\ln|\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - \mathcal{K}X^2(t) - \mathcal{T}X^2(t) + X^3(t)| \right) = -t + c,$$

alors :

$$\ln \left(|X(t)|^{\frac{1}{\alpha r}} \right) - \ln \left(|\mathcal{T} - X(t)|^{\frac{\mathcal{T}B}{\alpha r}} \right) - \ln \left(|\mathcal{K} - X(t)|^{\frac{\mathcal{K}C}{\alpha r}} \right)$$

$$+ \ln\left(|\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - (\mathcal{K} + \mathcal{T})X^2(t) + X^3(t)|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) = -t + c,$$

donc

$$\ln\left[\left(|X(t)|^{\frac{1}{\alpha r}}\right)\left(|\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - (\mathcal{K} + \mathcal{T})X^2(t) + X^3(t)|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)\right]$$

$$- \ln\left[\left(|\mathcal{T} - X(t)|^{\frac{\mathcal{T}B}{\alpha r}}\right)\left(|\mathcal{K} - X(t)|^{\frac{\mathcal{K}C}{\alpha r}}\right)\right] = -t + c,$$

on obtient :

$$(4.2.8) \quad \ln \frac{\left(|X(t)|^{\frac{1}{\alpha r}}\right)\left(|\mathcal{T}\mathcal{K}X(t) - (\mathcal{K} + \mathcal{T})X^2(t) + X^3(t)|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)}{\left(|\mathcal{T} - X(t)|^{\frac{\mathcal{T}B}{\alpha r}}\right)\left(|\mathcal{K} - X(t)|^{\frac{\mathcal{K}C}{\alpha r}}\right)} = -t + c.$$

Nous avons donc obtenu la solution (4.2.1). □

Exemple. Nous avons fixé les paramètres suivants :

$$r = 1, \mathcal{T} = 2, \mathcal{K} = 3, \alpha = \frac{1}{2}.$$

Alors, le problème (4.1.1)-(4.1.2) devient le suivant :

$$(4.2.9) \quad {}^{CF}\partial_t^{\frac{1}{2}} X(t) = -X(t) \left[1 - \frac{X(t)}{2}\right] \left[1 - \frac{X(t)}{3}\right],$$

avec la condition initiale :

$$(4.2.10) \quad X(0) = 1.$$

Ici, les valeurs de B et C , qui sont calculées dans le lemme (4.2.1), sont :

$$B = \frac{3}{2}, C = \frac{-2}{3}.$$

Finalement, la solution implicite de cet exemple est la suivante :

$$\frac{X(t)^2(6X(t) - 5X^2(t) + X^3(t))}{(2 - X(t))^6(3 - X(t))^{-4}} = 32e^{-t}.$$

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous avons généralisé certains types d'équations différentielles partielles et ordinaires avec des ordres entiers aux équations différentielles avec des ordres non entiers, et cette généralisation est appelée équation différentielle fractionnaire.

Prouver l'existence et l'unicité de la solution pour chaque problème différentiel fractionnaire proposé est l'objectif principal de ce travail.

Dans notre étude, nous avons utilisé des méthodes fonctionnelles bien connues, dont les plus importantes sont les estimations a priori, la preuve par récurrence et la densité de l'opérateur qui génère le problème proposé. Nous nous sommes également appuyés sur l'utilisation des propriétés des dérivées fractionnaires.

Le calcul fractionnaire est un domaine de recherche riche. Par conséquent, nous proposons, comme travaux futurs, de rechercher des solutions numériques aux problèmes étudiés, ainsi que d'appliquer d'autres définitions des dérivées fractionnaires pour généraliser les problèmes différentiels d'ordres entiers.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Abdeljawad. *On conformable fractional calculus*. J. Comput. Appl. Math. **279** : 57-66. 2015.
- [2] M.S. Abdo, W. Shammakh, H.Z. Alzumi. New Existence and Stability Results for Caputo-Fabrizio Fractional Nonlocal Implicit Problems. *Journal of Mathematics*. Vol 2023 (Article ID 3152502, 10 pages). 2023.
- [3] M.S. Abdo. *Further results on the existence of solutions for generalized fractional quadratic functional integral equations*. J. Math. Anal. Model. **1**(1) : 33-46. 2020.
- [4] O.P. Agrawal. Response of a diffusion-wave system subjected to deterministic and stochastic fields. *J. Angew. Math. Mech.*, 83 :265-274, 2003.
- [5] R. P. Agarwal, M. Benchohra, J. J. Nieto and A. Ouahab. *Fractional Differential Equations and Inclusions*
- [6] A. A. Alikhanov. Priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional order equations. *Partial Differential Equations*, 46, 660-666. 2010.
- [7] M. Al-Refai and K.Pal. *New Aspects of Caputo-Fabrizio Fractional Derivative*. *Progr Fract Differ Appl.*5(2) :157-166. 2019.
- [8] P. Amarasekare. "Allee Effects in Metapopulation Dynamics". *American naturalist*, **152**,2. 1998.
- [9] Z. Amarti, N. S. Nurkholipah , N Anggriani, A K Supriatna. *Numerical solution of a logistic growth model for a population with Allee effect considering fuzzy initial*

- values and fuzzy parameters*. IOP Conf. Series Materials Science and Engineering. **332** :012051. 2018.
- [10] K.J. Ansari, F. Ilyas, K. Shah, A. Khan and T. Abdeljawad. *On new updated concept for delay differential equations with piecewise Caputo fractional-order derivative*. Waves in Random and Complex Media **Vol 2023**. 2023
- [11] I. Area, J. Losada and J. J. Nieto. A note on the fractional logistic equation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. **444** : 182- 187. 2016.
- [12] M. S. Arshad, D. Baleanu, M. B. Riaz, and M. Abbas. A novel 2-stage fractional Runge-Kutta method for a time-fractional logistic growth model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol 2020 : 1-8. 2020.
- [13] R.L. Bagley. Application of generalized derivatives to viscoelasticity. PhD thesis. Air Force Institute of Technology, 1979.
- [14] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On fractional calculus models of viscoelastic behavior. *J. Rheol.*, **23** :918-925, 1986.
- [15] C. Balzotti, M. D'Ovidio and P. Loreti. *Fractional SIS Epidemic Models*. *Fractal Fract.* **4**(3), 44. 2020.
- [16] T. Bashiri, S. M. Vaezpour, and J. J. Nieto. *Approximating Solution of Fabrizio-Caputo Volterra's Model for Population Growth in a Closed System by Homotopy Analysis Method*. *Journal of Function Spaces*. **Vol 2018**. 2018.
- [17] J. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Heat flux stimulation through inverted non integer identification models. *Int. J. Therm. Sci.*, **39** :374-389, 2000.
- [18] A. Bouziani. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **9** (1996), no. 3, 323-330. MR 97f :35090. Zbl 864.35049
- [19] A. Bouziani. Mixed problem for certain non-classical equations containing a small parameter. In : *Bulletin de la Classe des sciences*, tome 5, n°7-12, 1994. pp. 389-400.
- [20] A. Bouziani. Initial-boundary value problem with a nonlocal condition for a viscosity equation. *JMMS* **30** :6,327-338, 2002.
- [21] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson. Paris, 1983.

- [22] Haim Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.
- [23] M. Caputo and M. Fabrizio. *A new definition of fractional derivative without singular kernel* Prog. Fract. Differ. **1**(2) : 73-85. 2015.
- [24] R. Darling and J. Newmann. On the short behaviour of porous interaction electrodes. J. Electrochem. Soc., 144 :3057-3063, 1997.
- [25] S. Debbouche et A. Merad. A study of N -dimensional fractional differential problem with integral conditions. Nonlinear Studies, 30(3), p. 795-805. 2023.
- [26] S. Debbouche. Implicit solution for logistic Caputo-Fabrizio fractional differential equation with Allee effect. Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems, 4(1), 17. 2023.
- [27] B. Dennis. Allee effects : population growth, critical density, and the chance of extinction. Natural Resource Modeling, 3(4), 481-538. 1989.
- [28] A. A. Dezin. General questions in theory of boundary value problems. Springer Verlag, Nauka, English trans, Moscow, 1980.
- [29] A.M.A. El-Sayed, A.E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka (2007). *On the fractional-order logistic equations*. Appl. Math. Lett. **20** :817-823. 2007.
- [30] N. T. Fadai and M. J. Simpson. *Population Dynamics with Threshold Effects Give Rise to a Diverse Family of Allee Effects*. Bulletin of Mathematical Biology. (2020) 82 :74. 2020.
- [31] N.T. Fadai , S.T. Johnston, M.J. Simpson. *Unpacking the Allee effect : determining individual-level mechanisms that drive global population dynamics*. bioRxiv. 2020.
- [32] H. Funahashi and M. Kijima A Solution to the Time-Scale Fractional Puzzle in the Implied Volatility. Fractal Fract. 2017, 1(1), 14, 2017.
- [33] K. M. Furati, N. Tatar. An existence result for a nonlocal fractional differential problem, J. Fract. Calc. 26, 43-51, 2004.
- [34] L. Garding. Cauchy's Problem for hyperbolic equations. University of Chicago, Lectures notes, 1957.
- [35] R. Hilfer. Applications of fractional calculus in physics. World scientific. 2000.
- [36] F. M. Hilker and E. Liz. *Proportional threshold harvesting in discrete-time population models*. Journal of Mathematical Biology. 2019.

- [37] M. Irfan, F.M. Alotaibi, S. Haque, N. Mlaiki and K. Shah. *RBF-based local meshless method for fractional diffusion equations*. *Fractal and Fractional*. 7(2) :143. 2023.
- [38] Mohammad Izadi and H. M. Srivastava. *A Discretization Approach for the Nonlinear Fractional Logistic Equation*. *Entropy*. 22 :13-28. 2020.
- [39] L. Kasmi, A. Guerfi, and S. Mesloub. Existence of solution for 2-D time-fractional differential equations with a boundary integral condition. *Advances in difference equations*, 2019 :511, 2019.
- [40] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science, Publishers BV, Amsterdam, 2006.
- [41] O. L. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Springer-Verlag, New York, 1985
- [42] N. Laskin. Fractional market dynamics, *Physica A* 287, 482-492, 2000.
- [43] J. Leray. *Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficient*. Princeton, Jus for Adv Study, New York, 1952.
- [44] J. Losada, J. J. Nieto. *Properties of a new fractional derivative without singular kernel*. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1(2) :87-92, 2015.
- [45] J.T. Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16 :1140 1153, 2011.
- [46] A. Merad, J. M. Vaquero. A galerkin method for two-dimensional hyperbolic integro differential equation with purely integral conditions. *Appl math comput*, 291 :386-94, 2016.
- [47] A. Merad, A. Bouziani ,O. Cenap, A. Kilicman. On solvability of the integrodifferential hyperbolic equation with purely nonlocal conditions. *Acta Math Sci.* 35(3) : 601-9, 2015.
- [48] A. Merad. Adomian decomposition method for solution of parabolic equation to nonlocal conditions. *Int J Contemp Math Sci.* 6(30) : 1491-96, 2011.
- [49] S. Mesloub, A. Bouziani. On a class of singular hyperbolic equations with a weighted integral condition. *Int. J. Math. Math. Sci.* 22(3), 511-519, 1999.

- [50] S. Mesloub and F. Aldosari. Even Higher Order Fractional Initial Boundary Value Problem with Nonlocal Constraints of Purely Integral Type. *Symmetry*; 11(3) :305, 2019.
- [51] S. Mesloub and F. Aldosari. Well posedness for a singular two dimensional fractional initial boundary value problem with Bessel operator involving boundary integral conditions. *AIMS Mathematics*, 6(9) : 9786-9812, 2021.
- [52] S. Mesloub and F. Aldosari. On a two-dimensional fractional thermoelastic system with nonlocal constraints describing a fractional Kirchhoff plate. *Advances in Difference Equations*. 2021 :24, 2021.
- [53] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339 :1-77, 2000.
- [54] K. S. Miller AND B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.
- [55] J. D. Murray. *Mathematical biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.
- [56] J. J. Nieto, A. Ouahab and P. Prakash. *Extremal Solutions and Relaxation Problems for Fractional Differential Inclusions*. Hindawi Publishing Corporation *Abstract and Applied Analysis*, ID 292643, 2013.
- [57] J. J. Nieto. Solution of a fractional logistic ordinary differential equation. *Applied Mathematics Letters*. 20(7) :817- 823, 2022.
- [58] R.R. Nigmatullin. To the theoretical explanation of the universal response. *Physica Status (B) : Basic Res*, 123 :739-745, 1984.
- [59] R.R. Nigmatullin. Realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. *Physica Status (B) : Basic Res.*, 133 :425-430, 1986.
- [60] K. B. OLDHAM AND J. SPANIER, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [61] T.E. Oussaeif, A. Bouziani. Solvability of nonlinear goursat type problem for hyperbolic equation with integral condition. *Khayyam J Math*. 4(2) : 198-213, 2018.
- [62] T.E. Oussaeif, B. Antara, A.Ouannas, I. M. Batiha, K. M. Saad, H. Jahanshahi, A. M. Aljuaid, and A. A. Aly. Existence and uniqueness of the solution for an Inverse

- problem of a fractional diffusion equation with integral Condition. Hindawi Journal of Function Spaces , Article ID 7667370, 9 pages, 2022.
- [63] L.G. Petrovsky. Uber das Cauchyshe problem fur system von linearen partialen differentialgeinchnungen in Gebit der nichtanalytischen funktionen. Bull. Univ. d'état, Moskow, No. 7, p. 1-74, 1938.
- [64] I. Podlubny. Fractional-order system and fractional-order controllers. UEF-03-94. Slovak Acad. Sci, Kosice, 1994.
- [65] I. Podlubny. Fractional Differential Equations, Academic Press, London, 1999.
- [66] H. Qiao and A. Cheng. *fast high order methode for time fractional*. 2020 Mathematics Subject Classification. Primary : 26A33, 65M06 ; Secondary : 65M15
- [67] J. Sabatter, O. P. Agrawal AND J. A. Tenretro Machado (Eds.), Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer, Dordrecht, 2007.
- [68] A. Sakhri and A. Merad. *Solvability of nonlinear fractional integro-differential equation with nonlocal condition*. Arab Journal of Mathematical Sciences. JEL Classification - 34A12, 35B45. 2021.
- [69] A. A. Samarskii. Some problems of the theory of differential equations. Differential'nye Uravneniya, vol. 16, no. 11, pp. 1925- 1935, 1980.
- [70] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS AND O. I. MARICHEV, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordan and Breach, Amsterdam, 1993.
- [71] R. V. d. Santos, F. L. Ribeiro and A. S. Martinez. *Models for Allee effect based on physical principles*. Journal of Theoretical Biology. **385** : 143-152. 2015.
- [72] R.K. Saxena, A.M. Mathai and H.J. Haubold. Fractional reaction-diffusion equations. Astrophysics and Space Science, April 2006.
- [73] C.R. Serment. *Synthèse d'un isolateur d'ordre entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélectriques quasi-identiques*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, France, 2001.
- [74] I.M. Sokolov, J. Klafter, and A. Blumen. *Fractional kinetics*. Physics Today, 55 :48-54, 2002.
- [75] S. H. Strogatz. "Nonlinear Dynamics and Chaos". Levant Books, Kolkata, India. 2007.

- [76] A. Suryanto, I.Darti and S. Anam. *Stability analysis of a fractional order modified Leslie-Gower model with additive Allee effect*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol :2017. 2017.
- [77] S.Tang. S.Qin and R.O.Weber. *Numerical studies on 2-dimentional reaction-diffusion equations*. J. Austral. Math. Soc. Sen B 35, 223-243, 1993.
- [78] V.E. Tarasov. *Exact solutions of Bernoulli and logistic fractional differential equations with power law coefficients*. Mathematics, 8(12), 22-31. 2020.
- [79] A. Tesfaya, D. Tesfaya, J. Brannanc and J.Duan. *A Logistic-Harvest Model with Allee Effect under Multiplicative Noise*. 2020.
- [80] I. Vortkamp, S.J. Schreiber, A. Hastings and F.M. Hilker. *Multiple attractors and long transients in spatially structured populations with an Allee effect*. Bulletin of mathematical biology, 82 :1-21. 2020.
- [81] H.A. Wahash and S.K. Panchal. *Positive solutions for generalized Caputo fractional differential equations using lower and upper solutions method*. J. Frac. Calc. Nonlinear Sys. 1(1) : 1-12. 2020.
- [82] B.J. West. *Exact solution to fractional logistic equation*. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications. 429 : 103-108. 2015.
- [83] S.J. Schreiber. *Allee effects, extinctions, and chaotic transients in simple population models*. Theoretical population biology, 64(2), 201-209. 2023.
- [84] Y. Zhou. *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 2014.
- [85] F. Zouyed and S. DEBBOUCHE. *An iterative regularization method for a class of inverse boundary value problems of elliptic type*. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. vol. 16, no 1, p. 66-85. 2020.