République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère d'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et Informatiques

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE DE MAGISTER EN MATHEMATIQUES

Option : Mathématiques Appliquées

Intitulé :

SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES D'EVOLUTION AVEC DES CONDITIONS AUX LIMITES NON LOCALES POUR UNE STRUCTURE PLURIDIMENSIONNELLE

présenté et soutenu par

Tébessi Faouzi

Le : 04 /12 / 2011

Jury :

MERAZGA Nabil	**Pr**	**Univ. Larbi Ben M'Hidi**	**Président**
BOUZIANI Abdelfatah	**Pr**	**Univ. Larbi Ben M'Hidi**	**Rapporteur**
ALIOUCHE Abdelkarim	**M.C.A.**	**Univ. Larbi Ben M'Hidi**	**Examinateur**
BOUZIT Mohamed	**M.C.A.**	**Univ. Larbi Ben M'Hidi**	**Examinateur**

2011- 2012

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et remerciement envers mon directeur de thèse, Monsieur BOUZIAN Abdelfatah, Professeur à l'université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi.

Effectuer ma thèse sous sa direction fut pour moi un grand honneur et un réel plaisir. Ses conseils et ses encouragements ont guidé et stimulé mon travail. Sa rigueur et sa culture scientifique en ont été les modèles.

Je remercie profondément Monsieur MERAZGA Nabil, Professeur à l'université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi, pour avoir accepté de présider mon jury.

Mes grands remerciements sont adressés aussi à messieurs :

ALIOUCHE Abdelkarim, M.C.A. à l'université Larbi Ben M'Hidi,

BOUZIT Mohamed, M.C.A. à l'université Larbi Ben M'Hidi,

d'être membres de jury et ayant un grand honneur de présenter mon thèse devant eux.

Je tiens aussi en ce moment là à exprimer mes sincères et grands remerciements à tous les membres de ma petite et grande famille et à tous mes amis de leurs soutiens et leurs encouragements.

Abstract

In this memory, we study two evolution problems with nonlocal boundary conditions for a two-dimensional structure: the first for a parabolic equation and the second for a hyperbolic equation. We show the existence, uniqueness and continuous dependence of the solution of every problem.

The proof for the first problem is based on two a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the studied problem.

The proof for the second problem is based on a priori estimate and the density of the range of the operator generated by the studied problem.

Keywords: Nonlocal Boundary Conditions, A Priori Estimate, Inequality of Energy, Parabolic Equation, Hyperbolic Equation.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie deux problèmes d'évolution avec des conditions aux limites non locales pour une structure bidimensionnelle : le premier pour une équation parabolique et le deuxième pour une équation hyperbolique. On montre l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution de chaque problème.

La démonstration pour le premier problème est basée sur deux estimations à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème étudié. La démonstration pour le deuxième problème est basée sur une estimation à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème étudié.

Mots clés: Conditions aux limites non locales, Estimation a priori, Inégalité de l'Energie, Equation Parabolique, Equation Hyperbolique.

Abstract

In this memory, we study two evolution problems with nonlocal boundary conditions for a two-dimensional structure: the first for a parabolic equation and the second for a hyperbolic equation. We show the existence, uniqueness and continuous dependence of the solution of every problem.
The proof for the first problem is based on two a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the studied problem.
The proof for the second problem is based on a priori estimate and the density of the range of the operator generated by the studied problem.

Keywords: Nonlocal Boundary Conditions, A Priori Estimate, Inequality of Energy, Parabolic Equation, Hyperbolic Equation.

ملخص البحث

في هذه المذكرة، نقوم بدراسة مسألتين تطوريتين ثنائتي الأبعاد مع شروط حدية غير موضعية: الأولى لمعادلة متكافئة و الثانية لمعادلة زائدية. نبين وجود و وحدانية و الارتباط المستمر للحل لكل مسألة. البرهان بالنسبة للمسألة الأولى مستند على تقديرين قبليين و على كثافة صورة المؤثر المولد من المسألة المدروسة. و البرهان بالنسبة للمسألة الثانية مستند على تقدير قبلي و على كثافة صورة المؤثر المولد من المسألة المدروسة.

كلمات البحث: شروط حدية غير موضعية، تقدير قبلي، متراجحة الطاقة، معادلة متكافئة، معادلة زائدية.

Table des matières

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers des équations aux dérivées partielles avec des conditions initiales et des conditions aux limites classiques (appelées conditions locales) et avec des conditions intégrales (appelées conditions non locales), que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. Deux importantes classes des équations aux dérivées partielles sont les équations hyperboliques et les équations paraboliques.

Les équations hyperboliques et les équations paraboliques régissent l'évolution des processus de propagation des ondes et de la diffusion, respectivement, et leurs études ont pris alors une grande importance.

La méthode utilisée dans notre travail pour la première démonstration se base sur deux estimations à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème étudié. Cette méthode est décrite comme suit :

On écrit le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}, \qquad u \in D(L)$$

où L est un opérateur défini d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F convenablement choisis, puis on établit deux estimations bilatérales pour l'opérateur L de types :

$$\|u\|_{E} \leq c \|Lu\|_{F},$$

et

$$\|Lu\|_{F} \leq c' \|u\|_{E} .$$

Ces deux estimations résultent des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur intégro-différentiel Mu choisi selon la forme de cette équation et en intégrant sur le domaine. Le choix de l'opérateur intégro-différentiel est fondamental, il est dicté par l'équation donnée et les conditions aux limites. Ainsi on déduit que l'opérateur L de E dans F est continu et qu'il admet un inverse L^{-1} continu et aussi que l'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'opérateur L est fermé et ensuite on démontre la densité de l'ensemble image de cet opérateur dans l'espace F.

La méthode utilisée pour la deuxième démonstration se base sur une estimation à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème étudié. Cette méthode est décrite comme suit :

On écrit le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}, \qquad u \in D(L)$$

où L est un opérateur défini d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F convenablement choisis, puis on établit une estimation pour l'opérateur L de type :

$$\|u\|_{E} \leq c \|Lu\|_{F} ,$$

cette estimation résulte des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur intégro-différentiel Mu et en intégrant sur le domaine. On montre ensuite que l'opérateur L admet une fermeture $\overline{L}$. La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble image de cet opérateur $\overline{L}$ dans l'espace F.

Ce mémoire se compose de deux chapitres :

Dans le premier chapitre, on étudie une équation parabolique bidimensionnelle avec des conditions aux limites non locales. Les Problèmes mixte avec des conditions aux limites ou des conditions initiales non locales pour des équations paraboliques du second ordre ont été étudiés par Batten [41], Cannon [42], [43], Kamynin [45], Bouziani [1] , [3] , [4] , [7], [8] , [11] , [13] , [14] , [17] , [19] , [22], Bouziani et Benouar [10] , Mesloub et Bouziani [6] , [21] , Mesloub, Bouziani et Kechkar [20] , Bouziani , Merazga et Benamira [32] , Bouziani et Merazga [24] , [29] , [30] , [31] , Bouziani, Bensaid et Zereg [33] . Notons aussi que les problèmes qui combinent les conditions locales et intégrales pour des équations paraboliques du second ordre ont été étudiés par la méthode du potentiel [44] et [45], et par la méthode de Fourier [46] et [47]

Dans le deuxième chapitre, on étudie une équation hyperbolique bidimensionnelle avec des conditions aux limites non locales. Les problèmes mixtes avec des condition non locale pour les équations hyperboliques ont reçu une attention considérable, ils ont été étudiés par : Yurchuk [40], Byszewski [38] – [39]. Plus tard, ces types de problème ont été traités par : Bouziani et Benouar [2] , Bouziani [5] , [16] , [18] , [19] , [23] , [26] , Beilin [34] , Bouziani et Merazga [28] , Mesloub et Bouziani [12] , Gordeziani et Avalishvili [35] , Pulkina [36] , [37] .

Le but de ce mémoire est d'étudier deux problèmes d'évolutions bidimensionnels avec des conditions aux limites non locales et cela par la démonstration de l'existence, l'unicité et la dépendance continue de leurs solutions.

Le présent travail est considéré comme prolongement des résultats obtenus dans [4] et [6] pour les équations paraboliques et [12] et [18] pour les équations hyperboliques.

Préliminaires

Ce chapitre à pour objet d'aider à comprendre les différentes étapes de notre travail et cela en donnant quelques notions (Définition, Lemme et Théorème) fondamentaux d'analyse fonctionnelle et aussi des notations utilisées tout le long du mémoire.

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle produit scalaire sur E toute application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :*

1) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$, $\forall x \in E, \forall x' \in E$ *et* $\forall y \in E$.

2) $f(\lambda x) = \overline{\lambda}\, f(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$.

3) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$, $\forall x \in E$ *et* $\forall y \in E$.

4) $f(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

5) $f(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$.

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle norme sur E toute application $u \mapsto \|u\|$de E dans $[0, \infty[$ vérifiant :*

1) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in K$.

2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u \in E$, $\forall v \in E$.

3) $\|u\| = 0 \Longrightarrow u = 0$.

On appelle espace normé tout espace vectoriel sur K muni d'une norme.

Définition 3 *Un espace normé est dit complet si toute suite de Cauchy appartenant à cette espace est convergente.*

Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 4 *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace de Hilbert s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire.*

Définition 5 *Soit F un espace de Hilbert.*

On appelle orthogonal d'un sous-ensemble G de F et on note $G^{\perp}$, l'ensemble :

$$G^{\perp} = \{u \in F, \qquad (u,v)_F = 0,\ \forall v \in G\}.$$

Définition 6 *Soient E et F deux espaces normés.*

On dit que l'opérateur $L : E \to F$ de domaine $D(L)$ est fermé si $\forall (u_n) \subset D(L)$ on a :

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ dans } E \\ Lu_n \to v \text{ dans } F \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Lu = v \\ u \in D(L). \end{cases}$$

Définition 7 $($*Critère de fermabilité*$)$ *Soient E un espace de Banach et F un espace de Hilbert.*

On dit que l'opérateur $L : E \to F$ de domaine $D(L)$ est fermable si pou toute suite $(u_n) \in D(L)$ on a :

$$\begin{cases} u_n \to 0 \\ Lu_n \to v \end{cases} \Longrightarrow v = 0.$$

Théorème 8 $($*du Graphe fermé*$)$

Soient E et F deux espaces de Banach.

Une application linéaire T :$E \to F$ est continue si seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Définition 9 *Soit (E,μ) un espace mesuré, pour tout réel $p \geq 1$ on pose :*

$$\mathcal{L}^p(E,\mu) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

Pour chaque $p \geq 1$, *on définit une relation d'équivalence sur* $\mathcal{L}^p$ *en posant*

$$f \sim g \text{ si seulement si } f = g, \ \mu \ p.p$$

Cela conduit à definir l'espace quotient :

$$L^p(E,\mu) = \mathcal{L}^p(E,\mu) / \sim$$

Un élement de $L^p(E,\mu)$ *est donc une classe d'équivalence de fonctions égales* μ *p.p.*

Pour tout $f : E \to \mathbb{R}$ *mesurable, on note pour* $p \geq 1$:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^p.$$

Théorème 10 (*Riesz*) *por tout* $p \in \left]1, \infty\right]$, *l'espace* $L^p(E,\mu)$ *muni de la norme* $f \to \|f\|_p$ *est un espace de Banach* (*i.e un espace vectoriel normé complet*)

Lemme 11 *de Gronwall*

Soit $T \in \mathbb{R}_+$ et $C \in \mathbb{R}_+$. Soit $y \in L^1([0,T])$ une fonction positive, vérifiant

$$\alpha + y(\tau) \leq A + C \int_0^\tau y(t) \, dt, \qquad \forall \tau \in [0,T]$$

où A et α sont positive, alors

$$\alpha + y(\tau) \leq C_1 A.$$

Notation :

Tout au long de ce mémoire, on utilise les notations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\Im_{x_i} u &= \int_0^{x_i} u\left(\eta_1, x_2, t_1, t_2\right) d\eta_1, \qquad i = 1,2 \\
\Im_{x_1 x_2} u &= \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} u\left(\eta_1, \eta_2, t_1, t_2\right) d\eta_2 d\eta_1 \\
\Im^2_{x_1 x_2} u &= \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2} u\left(\eta_1, \eta_2, t_1, t_2\right) d\eta_2 d\eta_1 d\xi_2 d\xi_1 \\
Q_1 &= (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, T_1) \qquad 0 < b_i < \infty \text{ et } 0 < T_1 < \infty, \ \ (i = 1,2) \\
Q_2 &= (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, T_2) \qquad 0 < T_2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Chapitre 1

Problème mixte avec des conditions aux limites non locales pour une équation parabolique bidimensionnelle

1.1 Position du problème

Dans le domaine $Q = \Omega \times I$ avec $\Omega = (0, b_1) \times (0, b_2)$ et $I = (0, T_1) \times (0, T_2)$, où $0 < b_i < \infty$ $(i = 1, 2)$ et $0 < T_j < \infty$ $(j = 1, 2)$, on considère l'équation parabolique

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = f\left(x_1, x_2, t_1, t_2\right), \\ x &= (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad t = (t_1, t_2) \in I, \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec les conditions initiales

$$\ell_1 u = u(x_1, x_2, 0, t_2) = \Phi_1(x_1, x_2, t_2), \tag{1.2}$$

$$\ell_2 u = u(x_1, x_2, t_1, 0) = \Phi_2(x_1, x_2, t_1), \tag{1.3}$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^{b_i} x_i^k u(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad k = 0, 1, \tag{1.4}$$

où f, Φ_1, Φ_2 sont des fonctions connues telles que :$\Im_{x_1 x_2} f \in L^2(Q), \Im_{x_1}\Phi_1 \in L^2(Q_1),$

$\Im_{x_2}\Phi_1 \in L^2(Q_1), \Im_{x_1}\Phi_2 \in L^2(Q_2), \Im_{x_2}\Phi_2 \in L^2(Q_2).$

Le problème $(1.1) - (1.4)$ peut être considéré comme la résolution de l'équation opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$, $\mathcal{F} = (f, \Phi_1, \Phi_2)$. L'opérateur L est défini de $D(L) = E$ dans F.

Corollaire 12 *Soient E un espace vectorielconstitué des fonctions u tel que $\Im_{x_1 x_2} u \in L^2(Q)$ pour lesquelles : $\Im_{x_1 x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}, \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}, \Im_{x_1} u, \Im_{x_2} u, \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in L^2(Q)$.*

L'application $\|u\|_E : E \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\|u\|_E = \left(\int_Q \left(\left(\Im_{x_1 x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 + \left(\Im_{x_1 x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2 \right) dxdt \right.$$
$$+ \sup_{0 \le \tau_1 \le T_1} \int_0^{T_2} \left(\left\|\Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau_1, t_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau_1, t_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_2$$
$$\left. + \sup_{0 \le \tau_2 \le T_1} \int_0^{T_1} \left(\left\|\Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, t_1, \tau_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, t_1, \tau_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme.

Preuve. $\|u\|_E = 0 \Longrightarrow$

$$\left(\int_Q \left(\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 + \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2\right) dxdt\right.$$

$$+\sup_{0\leq\ \tau_1\leq T_1}\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2$$

$$\left.+\sup_{0\leq\ \tau_2\leq T_1}\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\right)=0$$

cela implique :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Q \left(\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 + \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2\right) dxdt = 0 \\ \displaystyle\sup_{0\leq\ \tau_1\leq T_1}\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2 = 0 \\ \displaystyle\sup_{0\leq\ \tau_2\leq T_1}\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1 = 0, \end{cases}$$

d'ici on trouve :

$$\begin{cases} \Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)=0 \\ \Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \\ \left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}=0 \\ \left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}=0 \\ \left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}=0 \\ \left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}=0, \end{cases}$$

alors on a :

$$\begin{cases} \Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)=0 \\ \Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \\ \Im_{x_1}u=\Im_{x_2}u=0, \end{cases}$$

d'où on obtient :

$$u = 0.$$

Les conditions $(1), (2)$ et (3) de la norme ci dessus sont évidentes. ■

Corollaire 13 *Soit E un espace normé constitué des fonctions u tel que $\Im_{x_1x_2}u \in L^2(Q)$, pour lesquelles : $\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}, \Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}, \Im_{x_1}u, \Im_{x_2}u, \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in L^2(Q)$ et $\int_0^{b_i} x_i^k u(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad k = 0, 1,$ et dont la norme est :*

$$\|u\|_E = \left(\int_Q \left(\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 + \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2\right) dxdt\right.$$
$$+ \sup_{0\leq \tau_1 \leq T_1} \int_0^{T_2} \left(\left\|\Im_{x_1}u(\xi_1, x_2, \tau_1, t_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}u(x_1, \xi_2, \tau_1, t_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_2$$
$$\left. + \sup_{0\leq \tau_2 \leq T_1} \int_0^{T_1} \left(\left\|\Im_{x_1}u(\xi_1, x_2, t_1, \tau_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}u(x_1, \xi_2, t_1, \tau_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_1\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace E est de Banach.

Preuve. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E, alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m > N ; \|v_n - v_m\|_E < \epsilon$

$\Rightarrow$

$$\int_Q \left(\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(v_n - v_m) + \frac{\partial}{\partial t_2}(v_n - v_m)\right)\right)^2\right.$$
$$+ \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(v_n - v_m) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(v_n - v_m)\right)\right)^2 dxdt$$
$$+ \sup_{0\leq \tau_1 \leq T_1} \int_0^{T_2} \left(\left\|\Im_{x_1}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_2$$
$$\left. + \sup_{0\leq \tau_2 \leq T_1} \int_0^{T_1} \left(\left\|\Im_{x_1}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_1\right) < \epsilon,$$

cela implique :

$$\begin{cases} \int\limits_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(v_n - v_m) + \frac{\partial}{\partial t_2}(v_n - v_m)\right)\right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(v_n - v_m) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(v_n - v_m)\right)\right)^2 dxdt < \epsilon \\ \sup\limits_{0\leq \tau_1 \leq T_1} \int\limits_0^{T_2} \left\|\Im_{x_1}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_2 < \epsilon \\ \sup\limits_{0\leq \tau_1 \leq T_1} \int\limits_0^{T_2} \left\|\Im_{x_2}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_2 < \epsilon \\ \sup\limits_{0\leq \tau_2 \leq T_1} \int\limits_0^{T_1} \left\|\Im_{x_1}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_1 < \epsilon \\ \sup\limits_{0\leq \tau_2 \leq T_1} \int\limits_0^{T_1} \left\|\Im_{x_2}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_1 < \epsilon \end{cases}$$

alors on a :

$$\begin{cases} \int\limits_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(v_n - v_m) + \frac{\partial}{\partial t_2}(v_n - v_m)\right)\right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(v_n - v_m) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(v_n - v_m)\right)\right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_0^{T_2} \left\|\Im_{x_1}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_2 < \epsilon \\ \int\limits_0^{T_2} \left\|\Im_{x_2}(v_n - v_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_2 < \epsilon, \end{cases}$$

ainsi les suites $\left(\Im_{x_1}v_n\right)_n$ et $\left(\Im_{x_2}v_n\right)_n$ sont de Cauchy dans les espaces complet $L^2\left((0,T_2)\times L^2(\Omega)\right)$ et $L^2\left((0,T_1)\times L^2(\Omega)\right)$, alors les suites $\left(\Im_{x_1}v_n\right)_n$ et $\left(\Im_{x_2}v_n\right)_n$ convergent.vers $\Im_{x_1}v$ et $\Im_{x_2}v$ respectivement.

$$\int\limits_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(v_n - v_m) + \frac{\partial}{\partial t_2}(v_n - v_m)\right)\right)^2 dxdt < \epsilon,$$

aussi on a :

$$\int\limits_Q \left(\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} (v_n - v_m) \right)^2 + \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} (v_n - v_m) \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\Im_{x_1 x_2} (v_n - v_m) \right)^2 \right) dxdt <$$
ϵ,

cela implique :

$$\begin{cases} \int\limits_Q \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} (v_n - v_m) \right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_Q \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} (v_n - v_m) \right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_Q \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\Im_{x_1 x_2} (v_n - v_m) \right)^2 dxdt < \epsilon \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} \int\limits_Q \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} (v_n - v_m) \right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_Q \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} (v_n - v_m) \right)^2 dxdt < \epsilon \\ \int\limits_\Omega \left(\Im_{x_1 x_2} (v_n - v_m) \right)^2 dxdt < \epsilon \end{cases}$$

ainsi les suites $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} v_n \right)_n$, $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} v_n \right)_n$ et $\left(\Im_{x_1 x_2} v_n \right)_n$ sont de Cauchy dans les espaces complet $L^2(Q)$, $L^2(Q)$ -et $L^2(\Omega)$, alors les suites $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} v_n \right)_n$, $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} v_n \right)_n$ et $\left(\Im_{x_1 x_2} v \right)_n$ convergent.vers $\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_1} v$, $\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} v$ et $\Im_{x_1 x_2} v$ respectivement et de façon analogue, on dédéduit que les suites $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_n \right)_n$ et $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v_n \right)_n$ sont de Cauchy dans les espaces complet $L^2(Q)$, $L^2(Q)$ -et $L^2(\Omega)$, ainsi les suites $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_n \right)_n$, $\left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v_n \right)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers $\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v$, $\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v$ et v respectivement dans les espaces complet $L^2(Q)$, $L^2(Q)$ -et $L^2((0, T_1) \times (0, T_2))$.

On conclut que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E, d'où E est espace de Banach. ■

Corollaire 14 *Soit F un espace normé constitué desconstitué des triplets de fonc-*

tions (f,Φ,Ψ) *et* (g,φ,ψ), *muni du produit scalaire suivant :*

$$
\begin{aligned}
&((f,\Phi,\Psi),(g,\varphi,\psi))_F \\
= &\int\limits_Q \Im_{x_1x_2} f \Im_{x_1x_2} g dxdt \\
&+\int\limits_\Omega\int\limits_0^{T_1}\left(\Im_{x_1}\Psi(\xi_1,x_2,t_1)\Im_{x_1}\psi(\xi_1,x_2,t_1)+\Im_{x_2}\Psi(\xi_1,x_2,t_1)\Im_{x_2}\psi\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)dxdt_1 \\
&+\int\limits_\Omega\int\limits_0^{T_2}\left(\Im_{x_1}\Phi\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\Im_{x_1}\varphi\left(\xi_1,x_2,t_2\right)+\Im_{x_2}\Phi\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\Im_{x_2}\varphi\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)dxdt_2,
\end{aligned}
$$

et la norme finie associée est définie par :

$$
\begin{aligned}
\|(f,\Phi,\Psi)\|_F = &\left(\int\limits_I \left\|\Im_{x_1x_2} f\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt\right. \\
&+\int\limits_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}\Psi\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Psi\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1 \\
&\left.+\int\limits_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1}\Phi\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

l'espace F *est de Hilbert.*

Preuve. Soit $((f_n,\Phi_n,\Psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E, alors :

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n,m>N:\|(f_n,\Phi_n,\Psi_n)-(f_m,\Phi_m,\Psi_m)\|_E<\epsilon$

cela implique :

$$
\begin{aligned}
&\left(\int\limits_I \left\|\Im_{x_1x_2}(f_n-f_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt\right. \\
&+\int\limits_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}(\Phi_n-\Phi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}(\Phi_n-\Phi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1 \\
&\left.+\int\limits_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1}(\Psi_n-\Psi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}(\Psi_n-\Psi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\right)<\epsilon,
\end{aligned}
$$

de cette inégalité on on a :

$$\begin{cases} \int_I \left\|\Im_{x_1x_2}(f_n - f_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt < \epsilon \\ \int_0^{T_1} \left(\left\|\Im_{x_1}(\Phi_n - \Phi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}(\Phi_n - \Phi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_1 < \epsilon \\ \int_0^{T_2} \left(\left\|\Im_{x_1}(\Psi_n - \Psi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}(\Psi_n - \Psi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_2 < \epsilon, \end{cases}$$

alors on obtient :

$$\begin{cases} \int_I \left\|\Im_{x_1x_2}(f_n - f_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt < \epsilon \\ \int_0^{T_1} \left\|\Im_{x_1}(\Phi_n - \Phi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_1 < \epsilon \\ \int_0^{T_1} \left\|\Im_{x_2}(\Phi_n - \Phi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_1 < \epsilon \\ \int_0^{T_2} \left\|\Im_{x_1}(\Psi_n - \Psi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_2 < \epsilon \\ \int_0^{T_2} \left\|\Im_{x_2}(\Psi_n - \Psi_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt_2 < \epsilon \end{cases}$$

ainsi les suites $\left(\Im_{x_1x_2}f_n\right)_n$, $\left(\Im_{x_1}\Phi_n\right)_n$, $\left(\Im_{x_2}\Phi_n\right)_n$, $\left(\Im_{x_1}\Psi_n\right)_n$et $\left(\Im_{x_2}\Psi_n\right)_n$ sont de Cauchy dans les espaces complet $L^2(Q)$, $L^2\left((0,T_1)\times L^2(\Omega)\right)$ -et $L^2\left((0,T_2)\times L^2(\Omega)\right)$, alors les suites $\left(\Im_{x_1x_2}f_n\right)_n$, $\left(\Im_{x_1}\Phi_n\right)_n$, $\left(\Im_{x_2}\Phi_n\right)_n$, $\left(\Im_{x_1}\Psi_n\right)_n$et $\left(\Im_{x_2}\Psi_n\right)_n$ convergent.vers $\Im_{x_1x_2}f$, $\Im_{x_1}\Phi$, $\Im_{x_2}\Phi$, $\Im_{x_1}\Psi$et $\Im_{x_2}\Psi$ respectivement

On conclut que $((f_n, \Phi_n, \Psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans F, d'où F est espace de Hilbert. ■

E est l'espace de Banach constitué des fonctions u tel que $\Im_{x_1x_2}u \in L^2(Q)$ pour lesquelles : $\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}$, $\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}$, $\Im_{x_1}u$, $\Im_{x_2}u$, $\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in L^2(Q)$, vérifiant les conditions (1.4) et dont la norme est :

$$\|u\|_E = \left(\int_Q \left(\left(\Im_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) \right)^2 + \left(\Im_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \right)^2 \right) dxdt \right.$$
$$+ \sup_{0 \leq \tau_1 \leq T_1} \int_0^{T_2} \left(\left\| \Im_{x_1} u \left(\xi_1, x_2, \tau_1, t_2 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} u \left(x_1, \xi_2, \tau_1, t_2 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_2$$
$$\left. + \sup_{0 \leq \tau_2 \leq T_2} \int_0^{T_1} \left(\left\| \Im_{x_1} u \left(\xi_1, x_2, t_1, \tau_2 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} u \left(x_1, \xi_2, t_1, \tau_2 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et F est l'espace de Hilbert constitué des triplets de fonctions (g, Ψ_1, Ψ_2) et (f, Φ_1, Φ_2), muni du produit scalaire suivant :

$$((g, \Psi_1, \Psi_2), (f, \Phi_1, \Phi_2))_F = \int_Q \Im_{x_1 x_2} g \Im_{x_1 x_2} f dxdt$$
$$+ \int_\Omega \int_0^{T_1} \left(\Im_{x_1} \Psi_2 (\xi_1, x_2, t_1) \Im_{x_1} \Phi_2 (\xi_1, x_2, t_1) + \Im_{x_2} \Psi_2 \left(x_1, \xi_2, t_1 \right) \Im_{x_2} \Phi_2 \left(x_1, \xi_2, t_1 \right) \right) dxdt_1$$
$$+ \int_\Omega \int_0^{T_2} \left(\Im_{x_1} \Psi_1 \left(\xi_1, x_2, t_2 \right) \Im_{x_1} \Phi_1 \left(\xi_1, x_2, t_2 \right) + \Im_{x_2} \Psi_1 \left(x_1, \xi_2, t_2 \right) \Im_{x_2} \Phi_1 \left(x_1, \xi_2, t_2 \right) \right) dxdt_2,$$

et la norme finie associée est définie par :

$$\|(f, \Phi_1, \Phi_2)\|_F = \left(\int_I \left\| \Im_{x_1 x_2} f \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \right.$$
$$+ \int_0^{T_1} \left(\left\| \Im_{x_1} \Phi_2 \left(\xi_1, x_2, t_1 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} \Phi_2 \left(x_1, \xi_2, t_1 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_1$$
$$\left. + \int_0^{T_2} \left(\left\| \Im_{x_1} \Phi_1 \left(\xi_1, x_2, t_2 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} \Phi_1 \left(x_1, \xi_2, t_2 \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Estimations à priori

Théorème 15 *Pour tout* $u \in D(L) = E$, *on a*

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F \tag{1.5}$$

où c *est une constante positive indépendante de la solution* u.

Preuve. Considérons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de (1.1) et l'opérateur intégro-différentiel Mu

$$\begin{aligned} Mu &= \Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) \\ &= \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2}\left(\frac{\partial u(\eta_1,\eta_2,t_1,t_2)}{\partial t_1}+\frac{\partial u(\eta_1,\eta_2,t_1,t_2)}{\partial t_2}\right)d\eta_2 d\eta_1 d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \tag{1.6}$$

où $Q^\tau = \Omega \times I^\tau$, $\Omega = (0,b_1)\times(0,b_2)$, $I^\tau = (0,\tau_1)\times(0,\tau_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{Q^\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\ &-\int_{Q^\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\ =\ &\int_{Q^\tau} f(x,t)\,\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Intégrons par partie séparément chaque terme en tenant compte des conditions (1.2)−

(1.4), il vient :

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= &\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= &-\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= &\int\limits_{Q^\tau} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 dx dt, \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt \\
= &\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt \\
= &-\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt \\
= &\int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt, \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= &\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= &-\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= &\int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt, \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt \\
= \;& \int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt \\
= \;& -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt \\
= \;& \int\limits_{Q^\tau} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \right)^2 dx dt, \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= \;& -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= \;& \int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} u \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= \;& -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_2} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_2} u \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt \\
= \;& \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_2} u \left(x_1, \xi_2, \tau_1, t_2 \right) \right)^2 dx dt_2 \\
&-\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_2} \Phi_1 \left(x_1, \xi_2, t_2 \right) \right)^2 dx dt_2, \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int\limits_{Q^{\tau}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= & -\int\limits_{I^{\tau}} \int\limits_0^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int\limits_{Q^{\tau}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= & \int\limits_{I^{\tau}} \int\limits_0^{b_2} u \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^{\tau}} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= & -\int\limits_{I^{\tau}} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_2} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^{\tau}} \Im_{x_2} u \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= & \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_2} u \left(x_1, \xi_2, t_1, \tau_2 \right) \right)^2 dxdt_1 \\
& -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_2} \Phi_2 \left(x_1, \xi_2, t_1 \right) \right)^2 dxdt_1,
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int\limits_{Q^{\tau}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= & -\int\limits_{I^{\tau}} \int\limits_0^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^{\tau}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= & \int\limits_{I^{\tau}} \int\limits_0^{b_1} u \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt - \int\limits_{Q^{\tau}} u \Im^2_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= & -\int\limits_{I^{\tau}} \int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1} u \Im^2_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int\limits_{Q^{\tau}} \Im_{x_1} u \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= & \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_1} u \left(\xi_1, x_2, \tau_1, t_2 \right) \right)^2 dxdt_2 \\
& -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_1} \Phi_1 \left(\xi_1, x_2, t_2 \right) \right)^2 dxdt_2,
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \; & -\int_{I^\tau} \int_0^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \; & \int_{I^\tau} \int_0^{b_1} u \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt - \int_{Q^\tau} u \Im^2_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \; & -\int_0^{b_2} \Im_{x_1} u \Im^2_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int_{Q^\tau} \Im_{x_1} u \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \; & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_1} u \left(\xi_1, x_2, t_1, \tau_2 \right) \right)^2 dxdt_1 \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_1} \Phi_2 \left(\xi_1, x_2, t_1 \right) \right)^2 dxdt_1, \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int_{Q^\tau} f \Im^2_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dxdt \\
= \; & \int_{I^\tau} \int_0^{b_2} \Im_{x_1} f \Im^2_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) \bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q^\tau} \Im_{x_1} f \Im_{x_1 x_2 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dxdt \\
= \; & -\int_{I^\tau} \int_0^{b_1} \Im_{x_1 x_2} f \Im_{x_1 x_2 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) \bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} f \Im_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dxdt \\
= \; & \int_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} f \Im_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dxdt. \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Substituons les identités $(1.8)-(1.16)$ dans l'égalité (1.7), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt+\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt+2\int\limits_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2 dxdt_2+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2 dxdt_1\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2 dxdt_2+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2 dxdt_1\\
=\;&\int\limits_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2}f\,\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2 dxdt_2\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2 dxdt_1+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2 dxdt_2\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2 dxdt_1. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy pour majorer le premier terme du membre droit de l'égalité (1.17) et en multipliant par 2, il vient :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 dxdt\\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2 dxdt_2+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2 dxdt_1\\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2 dxdt_2+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2 dxdt_2\\
\leq\;&\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}f\right)^2 dxdt+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2\\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2\right)dxdt_1. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Appliquons l'opérateur $\Im_{x_1x_2}$ à l'équation (1.1), élevons au carré et intégrons sur Q^τ, on trouve grace à l'inégalité élementaire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2 dxdt \\
\leq\ &\frac{1}{2}\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}f\right)^2 dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 dxdt.
\end{aligned}\tag{1.19}$$

Additionnons les deux inégalités (1.18)-(1.19), il vient :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 dxdt+\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2 dxdt \\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2 \\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2\right)dxdt_1 \\
\leq\ &6\left(\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}f\right)^2 dxdt+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2\right. \\
&\left.+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2\right)dxdt_1\right).
\end{aligned}\tag{1.20}$$

De l'inégalité (1.20) , on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 dxdt+\int\limits_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2 dxdt \\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left[\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2\right]dxdt_2 \\
&+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left[\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2\right]dxdt_1 \\
\leq\ &6\left(\int\limits_{Q}\left(\Im_{x_1x_2}f\right)^2 dxdt+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left[\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right]dxdt_2\right. \\
&\left.+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left[\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2\right]dxdt_1\right),
\end{aligned}\tag{1.21}$$

comme le membre droit de l'inégalité est indépendant de τ_i $(i=1,2)$, en passant au supremum dans le membre gauche par rapport à τ_i $(i=1,2)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
& \int_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 dxdt + \int_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2 dxdt \\
& + \sup_{0\le\tau_1\le T_1}\int_\Omega\int_0^{T_2}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2 \\
& + \sup_{0\le\tau_2\le T_2}\int_\Omega\int_0^{T_1}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2\right)dxdt_1 \\
\le\ & 6\left(\int_Q\left(\Im_{x_1x_2}f\right)^2dxdt+\int_\Omega\int_0^{T_2}\left(\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2\right. \\
& \left.+\int_\Omega\int_0^{T_1}\left(\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2\right)dxdt_1\right).
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

D'où l'inégalité (1.5). ■

Corollaire 16 *Si u est la solution du problème* $(1.1)-(1.4)$ *correspondant aux données f, Φ_1, Φ_2, et u^* est la solution du problème* $(1.1)-(1.4)$ *correspondant aux données f^*, Φ_1^*, Φ_2^*, on a :*

$$
\begin{aligned}
\left\|u-u^*\right\|_E \le\ & c\left(\int_I\left\|\Im_{x_1x_2}f-\Im_{x_1x_2}f^*\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right. \\
& +\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1}\Phi_1-\Im_{x_1}\Phi_1^*\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_1-\Im_{x_2}\Phi_1^*\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2 \\
& \left.+\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}\Phi_2-\Im_{x_1}\Phi_2^*\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_2-\Im_{x_2}\Phi_2^*\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Corollaire 17 *Si La solution du problème* $(1.1)-(1.4)$ *existe, elle est unique.*

Théorème 18 *Pour tout $u \in D(L) = E$, on a :*

$$\|Lu\|_F \leq c' \|u\|_E , \tag{1.23}$$

où c' est une constante positive indépendante de la solution u.

Preuve. Appliquons l'opérateur $\Im_{x_1 x_2}$ à l'équation (1.1), on a :

$$\begin{aligned}\int_Q (\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u)^2 dxdt \;&\leq\; 2\left(\int_Q \left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)^2 dxdt\right.\\ &\left.+\int_Q \left(\left(\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)^2\right) dxdt\right),\end{aligned} \tag{1.24}$$

de la définition de l'opérateur trace ℓ_2, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_0^{T_1}\left(\left(\Im_{x_2}\ell_2 u\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\ell_2 u\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2\right)dxdt_1 \qquad (1.25)\\ \leq\;& \sup_{0\leq\tau_2\leq T_2}\int_\Omega\int_0^{T_1}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2\right)dxdt_1,\end{aligned}$$

de la définition de l'opérateur trace ℓ_1, on trouve :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_0^{T_2}\left(\left(\Im_{x_2}\ell_1 u\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}\ell_1 u\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2 \qquad (1.26)\\ \leq\;& \sup_{0\leq\tau_1\leq T_2}\int_\Omega\int_0^{T_2}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2.\end{aligned}$$

En combinant les inégalités (1.24) , (1.25) et (1.26), on obtient l'inégalité (1.23). ■

Corollaire 19 *L'opérateur L réalise un homéomorphisme linéaire de E sur l'ensemble $R(L) \subset F$.*

Corollaire 20 *L'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'opérateur est un fermé.*

Preuve. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $R(L)$ tel que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = v \in F,$$

alors il existe une suite correspondante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tel que :

$$Lu_n = v_n.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $F \Longrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F, alors la suite correspondante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E.

De l'estimation (1.5), on a :

$$\|u_n - u_m\|_E \leqslant c\,\|Lu_n - Lu_m\|_F = \|v_n - v_m\|_F \longrightarrow 0$$

quand n et m tendent vers l'infini. On en déduit que $u_n \to u$ dans E, et comme $Lu_n \to v$ dans F. Alors d'après le théorème du graphe fermé on conclut que :

$$v = Lu \in R(L),$$

ce qui achève la démonstration du corollaire 20. ■

1.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 21 *Pour tout* $(f, \Phi_1, \Phi_2) \in F$, *le problème* (1.1) - (1.4) *admet une solution unique* $u = L^{-1}(f, \Phi_1, \Phi_2)$ *vérifiant les estimations :*

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F$$

et

$$\|Lu\|_F \leq c'\,\|u\|_E\,,$$

où c *et* c' *sont deux constantes positives indépendantes de la solution* u.

Preuve. Pour montrer que le problème (1.1) - (1.4) admet une solution unique, il suffit de démontrer que l'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'operateur L est dense dans F, c'est-à-dire $\overline{R(L)} = F$. ■

Pour arriver a ce résultat, nous avons besoins de démontrer la proposition suivante :

Proposition 22 *Si pour w tel que $\Im_{x_1x_2}w \in L^2(Q)$ on a*

$$\int_Q \Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\Im_{x_1x_2}wdxdt = 0, \tag{1.27}$$

pour tout $u \in D_0(L) = \{u/\ u \in D(L) : \ell_i u = 0,\ i = 1,2\}$, alors $w = 0$ p.p dans Q.

Preuve. La relation (1.27) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous la forme particulière :

$$u(x_1, x_2, t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t_1 \leq s_1 \text{ ou } 0 \leq t_2 \leq s_2 \\ \int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2} \frac{\partial^2 u}{\partial\tau_1\partial\tau_2}d\tau_1 d\tau_2 & s_p \leq t_p \leq T_p. \end{cases} \tag{1.28}$$

Soit $\frac{\partial u}{\partial t_p}$ est la solution de l'équation :

$$\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_p} = h_p, \tag{1.29}$$

où

$$h_p = \int_{t_p}^{T_p} \Im_{x_1x_2}w_p d\ \tau_p, \tag{1.30}$$

Les formules (1.28) et (1.30) implique que $u \in D_{s_1s_2}(L)$ qui représente l'ensemble de tous les $u \in D(L)$ s'annulant dans les frontières de $t_p = s_p$ et $t_p \lessdot s_p$ $(p = 1,2)$, en posant $s_p = 0$ $(p = 1, 2)$, nous obtenons que $u \in D_0(L)$, des formules $(1.28), (1.29)$ et (1.30), nous obtenons que :

$$\Im_{x_1 x_2} w = \sum_{p=1}^{2} \Im_{x_1 x_2} w_p = -\sum_{p=1}^{2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_p^2}. \tag{1.31}$$

Pour montrer que $\Im_{x_1 x_2} w$ définie par la relation (1.31) est dans $L^2(Q)$, nous appliquons le résultat suivant : ■

Lemme 23 *La fonction définie par* (1.31) *est dans* $L^2(Q_s)$, *où* $Q_s = \Omega \times (s_1, T_1) \times (s_2, T_2)$.

Preuve. Soit $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}), \omega \geqslant 0$, $\omega = 0$ dans un voisinage de $t_p = 0$ et $t_p = T_p$ et à l'extérieur de l'intervalle $(0, T_p)$, et soit $\int_{\mathbb{R}} \omega(t)dt = 1$. Considérons les t-opérateurs de régularisation ρ_ε de la forme :

$$\rho_\varepsilon w(x,t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_p} \omega\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right) w(x,s)\, ds \quad \text{pour } w \in L^2(Q) \tag{1.32}$$

Ces opérateurs ont les propriétés suivantes (voir [48]) :

P_1 : la fonction $\rho_\varepsilon w \in C^\infty(Q_s)$ et elle s'annule dans un voisinage de $t_p = T_p$ si $w \in L^2(Q)$ et $\rho_\varepsilon u \in D_{s_1 s_2}(L)$ si $u \in D_{s_1 s_2}(L)$.

P_2 : Si $w \in L^2(Q_s)$, alors $\|\rho_\varepsilon w - w\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, et $\|\rho_\varepsilon w\|_{L^2(Q)} \leq \|w\|_{L^2(Q)}$.

P_3 : $\frac{d^k}{dt^k} \rho_\varepsilon u = \rho_\varepsilon \frac{d^k}{dt^k} u$ pour k=1,2 si $u \in D_{s_1 s_2}(L)$.

Appliquons les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t_p}$ à l'équation (1.28), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t_p} \rho_\varepsilon \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_p} = \frac{\partial}{\partial t_p} \rho_\varepsilon h_p. \tag{1.33}$$

De la relation (1.33) et des propriétés P_1, P_2 et P_3 des opérateurs ρ_ε, on obtient :

$$\left\| \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_p^2} \right\|_{L^2(Q_s)} \leq 2 \left\| \frac{\partial}{\partial t_p} \rho_\varepsilon h_p \right\|_{L^2(Q_s)} \tag{1.34}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 23.

En remplaçant $\Im_{x_1 x_2} w$ dans (1.27) par sa représentation (1.31), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dxdt - \int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dxdt \\
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dxdt - \int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dxdt \\
&+\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dxdt + \int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dxdt \\
&+\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dxdt + \int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

En intégrant par partie chaque terme de (1.35), nous obtenons :

$$-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dxdt = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{s_2}^{T_2} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 dxdt_2, \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dxdt &= -\int_\Omega \int_{s_1}^{T_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_{t_2 = s_2}^{t_2 = T_2} dxdt_1 \\
&\quad + \int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{s_2}^{T_2} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \right)^2 dxdt_2,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dxdt = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{s_1}^{T_1} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \right)^2 dxdt_1, \tag{1.38}$$

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt &= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_2}^{T_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_1=s_2}^{t_1=T_1} dxdt_2 \\
&\quad +\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_2}^{T_1} \left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1, \qquad (1.39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
= &\int\limits_{I_s}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
= &-\int\limits_{I_s}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
= &\int\limits_{I_s}\int\limits_{0}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q_s}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
= &-\int\limits_{I_s}\int\limits_{0}^{b_2} u\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt + \int\limits_{Q_s}u\Im^2_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
= &\int\limits_{I_s}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}u\Im^2_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt - \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
= &-\int\limits_{s_2}^{T_2} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{t_1=s_1}^{t_1=T_1} dxdt_2 + \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}dxdt \\
= &\int\limits_{Q_s}\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt, \qquad (1.40)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dxdt \\
= &\int\limits_{I_s}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dxdt \\
&= \int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q_s}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dxdt \\
&= -\int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_2} u\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt + \int\limits_{Q_s}u\Im^2_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dxdt \\
&= \int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_1} \Im_{x_2}u\Im^2_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt - \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dxdt \\
&= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_1} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\Bigg|_{t_2=s_2}^{t_2=T_2} dxdt_1 + \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}dxdt \\
&= \int\limits_{Q_s}\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt, \qquad (1.41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_s}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
&= \int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q_s}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
&= -\int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int\limits_{Q_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
&= \int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt - \int\limits_{Q_s}\frac{\partial u}{\partial x_2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
&= -\int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_1} u\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int\limits_{Q_s}u\Im^2_{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \\
&= \int\limits_{I_s}\int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1}u\Im^2_{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q_s}\Im_{x_1}u\Im_{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dxdt \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

$$= -\int_{\Omega}\int_{s_2}^{T_2} \Im_{x_1} u \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{t_1=s_1}^{t_1=T_1} dx dt_2 + \int_{Q_s} \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} dx dt$$

$$= \int_{Q_s} \left(\Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dx dt, \tag{1.43}$$

$$\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt$$

$$= \int_{I_s}\int_{0}^{b_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q_s} \Im_{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt$$

$$= -\int_{I_s}\int_{0}^{b_1} \Im_{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt$$

$$= \int_{I_s}\int_{0}^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt - \int_{Q_s} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt$$

$$= -\int_{I_s}\int_{0}^{b_1} u \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q_s} u \Im^2_{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt$$

$$= \int_{I_s}\int_{0}^{b_2} \Im_{x_1} u \Im^2_{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q_s} \Im_{x_1} u \Im_{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt$$

$$= -\int_{\Omega}\int_{s_1}^{T_1} \Im_{x_1} u \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2}\Big|_{t_2=s_2}^{t_2=T_2} dx dt_1 + \int_{Q_s} \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dx dt,$$

d'où

$$\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dx dt = \int_{Q_s} \left(\Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dx dt. \tag{1.44}$$

Additionnons les relations (1.36) – (1.43) en tenant compte de l'identité (1.35), on trouve :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_2}^{T_2}\left[\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2+\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2\right]dxdt_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_1}^{T_1}\left[\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2+\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2\right]dxdt_1$$
$$+\int_{Q_s}\left(\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2+\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2+\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2\right)dxdt=0. \tag{1.45}$$

Alors $\Im_{x_1x_2}w=0$ presque partout dans Q_s.

D'où on conclut que $w=0$ presque partout dans Q_s.

Comme s_j $(j=1,2)$ est une longueur indépendante du choix de l'origine et en procédant avec le même raisonnement, nous montrons que $w=0$ presque partout dans Q, et par conséquent la démonstration de la proposition 22 est achevée.

Revenant maintenant à la démonstration du théorème.

Soit $W=(w,w_1,w_2)$ un élément orthogonal à $R(L)$, c.à.d : $W\in R(L)^{\perp}$, Comme F est un espace de Hilbert alors $\overline{R(L)}=F$ est vraie, si seulement si :

$$(Lu,W)_F=\int_Q\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\Im_{x_1x_2}wdxdt+\int_{\Omega}\int_0^{T_2}\left(\Im_{x_1}\ell_1u\Im_{x_1}w_1+\Im_{x_2}\ell_1u\Im_{x_2}w_1\right)dxdt_2$$
$$+\int_{\Omega}\int_0^{T_1}\left(\Im_{x_1}\ell_2u\Im_{x_1}w_2+\Im_{x_2}\ell_2u\Im_{x_2}w_2\right)dxdt_1=0, \tag{1.46}$$

entraine $w=0$, $w_1=0$ et $w_2=0$. ■

Corollaire 24 *Soit H un espace normé constitué des fonctions Φ et Ψ tel que $\Im_{x_1}\Phi$, $\Im_{x_2}\Phi$, $\Im_{x_1}\Psi$, $\Im_{x_2}\Psi\in L^2(Q_1)$, (g,Ψ_1,Ψ_2) et (f,Φ_1,Φ_2), muni du produit scalaire* *suivant :*

$$(\Phi,\Psi)_H=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T_1}\left(\Im_{x_1}\Phi\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\Im_{x_1}\Psi\left(\xi_1,x_2,t_1\right)+\Im_{x_2}\Phi\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\Im_{x_2}\Psi\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)dxdt_1$$

et la norme finie associée est définie par :

$$\|\Phi\|_H=\left(\int\limits_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}\Phi\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

l'espace H est de Hilbert.

Preuve. Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E, alors :

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n,m>N\,;\|\Phi_n-\Phi_m\|_E<\epsilon$

cela implique :

$$\int\limits_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1}\left(\Phi_n-\Phi_m\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\left(\Phi_n-\Phi_m\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1<\epsilon,$$

d'où :

$$\begin{cases}\int\limits_0^{T_1}\left\|\Im_{x_1}\left(\Phi_n-\Phi_m\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_1<\epsilon\\ \int\limits_0^{T_1}\left\|\Im_{x_2}\left(\Phi_n-\Phi_m\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_1<\epsilon\end{cases}$$

ainsi les suites $\left(\Im_{x_1}\Phi_n\right)_n$ et $\left(\Im_{x_2}\Phi_n\right)_n$ sont de Cauchy dans les espaces complet $L^2\left((0,T_1)\times L^2(\Omega)\right)$, alors les suites $\left(\Im_{x_1}\Phi_n\right)_n$ et $\left(\Im_{x_2}\Phi_n\right)_n$ convergent.vers $\Im_{x_1}\Phi$ et $\Im_{x_2}\Phi$ respectivement.

On conclut que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans H, d'où H est espace de Hilbert.

Si on considère un élément u quelconque de $D_0(L)$, la relation (1.45)

entraîne que :

$$\int\limits_Q\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\Im_{x_1x_2}wdxdt=0, \tag{1.47}$$

la proposition 18, implique $w=0$, par conséquent et à partir de la relation (1.45), on obtient :

$$\int_{\Omega}\int_{0}^{T_2}\left(\Im_{x_1}\ell_1 u \Im_{x_1} w_1 + \Im_{x_2}\ell_1 u \Im_{x_2} w_1\right) dx dt_2 +$$

$$\int_{\Omega}\int_{0}^{T_1}\left(\Im_{x_1}\ell_2 u \Im_{x_1} w_2 + \Im_{x_2}\ell_2 u \Im_{x_2} w_2\right) dx dt_1 = 0. \tag{1.48}$$

Comme les valeurs $\ell_1 u$ et $\ell_2 u$ sont indépendants et les ensembles des valeurs des opérateurs ℓ_1 et ℓ_2 sont denses dans les espaces de Hilbert H_1 et H_2 de normes :

$$\|w_1\|_{H_1} = \left[\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1} w_1\left(\xi_1, x_2, t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} w_1\left(x_1, \xi_2, t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.49}$$

et

$$\|w_2\|_{H_2} = \left[\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1} w_2\left(\xi_1, x_2, t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} w_2\left(x_1, \xi_2, t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt_1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.50}$$

respectivement, où $H_1 = \left\{w_1 /\ \Im_{x_1} w_1,\ \Im_{x_2} w_1 \in L^2\left(\left(0, T_2\right), L^2\left(\Omega\right)\right)\right\}$ et $H_2 = \left\{w_2 /\ \Im_{x_1} w_2,\ \Im_{x_2} w_2 \in L^2\left(\left(0, T_1\right), L^2\left(\Omega\right)\right)\right\}$, alors $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$ presque partout dans Q. Ce qui achève la démonstration du théorème 21. ■

Chapitre 2

Problème mixte avec des conditions aux limites non locales pour une équation hyperbolique bidimensionnelle

2.1 Position du problème

Dans le domaine $Q = \Omega \times I$ avec $\Omega = (0, b_1) \times (0, b_2)$ et $I = (0, T_1) \times (0, T_2)$, où $0 < b_i < \infty$ $(i = 1, 2)$ et $0 < T_j < \infty$ $(j = 1, 2)$, on considère l'équation hyperbolique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = f(x_1, x_2, t_1, t_2), \\ x &= (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad t = (t_1, t_2) \in I. \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales :

$$\ell_1 u = u(x_1, x_2, 0, t_2) = \Phi_1(x_1, x_2, t_2), \tag{2.2}$$

$$\ell_2 u = u(x_1, x_2, t_1, 0) = \Phi_2(x_1, x_2, t_1), \tag{2.3}$$

et les conditions intégrales :

$$\int_0^{b_i} x_i^k u(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad k = 0, 1, \tag{2.4}$$

où f, Φ_1, Φ_2sont des fonctions connues telles que $\Im_{x_1 x_2} f \in L^2(Q), \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} \in L^2(Q_1), \Im_{x_1} \Phi_1 \in L^2(Q_1), \Im_{x_2} \Phi_1 \in L^2(Q_1), \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1} \in L^2(Q_2), \Im_{x_1} \Phi_2 \in L^2(Q_2), \Im_{x_2} \Phi_2 \in L^2(Q_2)$

Le problème $(2.1) - (2.4)$ peut être considéré comme la résolution de l'équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$, $\mathcal{F} = (f, \Phi_1, \Phi_2)$. L'opérateur L est considéré de E dans F, où E est un espace de Banach constitué des fonctions u tels que $\Im_{x_1 x_2} u \in L^2(Q)$, pour lesquelles $\Im_{x_1} u, \Im_{x_2} u,\ \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1}\ , \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \in L^2(Q)$, vérifiant les conditions (2.4) et dont la norme :

$$\|u\|_E = \left(\sup_{0 \le \tau_2 \le T_2} \int_0^{T_1} \left(\left\| \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, t_1, \tau_2) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, , t_1, \tau_2) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_1 \right.$$
$$\left. + \sup_{0 \le \tau_1 \le T_1} \int_0^{T_2} \left(\left\| \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau_1, t_2) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau_1, t_2) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué des fonctions (g, Ψ_1, Ψ_2) et (f, Φ_1, Φ_2), muni du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned}
& \left(\left(g,\Psi_1,\Psi_2\right),\left(f,\Phi_1,\Phi_2\right)\right)_F \\
= & \int_Q \Im_{x_1x_2} g \Im_{x_1x_2} f\,dxdt + \int_\Omega \int_0^{T_1} \left(\Im_{x_1x_2} \frac{\partial \Psi_2 u}{\partial t_1} \Im_{x_1x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1} + \Im_{x_1} \Psi_2 u\left(\xi_1,x_2,t_2\right) \Im_{x_1} \Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_2\right) \right. \\
& \left. + \Im_{x_2} \Psi_2 u\left(\xi_1,x_2,t_2\right) \Im_{x_2} \Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right) dxdt_1 + \int_\Omega \int_0^{T_2} \left(\Im_{x_1x_2} \frac{\partial \Psi_1 u}{\partial t_2} \Im_{x_1x_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} \right. \\
& \left. + \Im_{x_1} \Psi_1 u\left(\xi_1,x_2,t_2\right) \Im_{x_1} \Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right) + \Im_{x_2} \Psi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right) u \Im_{x_2} \Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right) dxdt_2,
\end{aligned}$$

et la norme finie associée est définie par :

$$\begin{aligned}
& \left\|\left(f,\Phi_1,\Phi_2\right)\right\|_F \\
= & \left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \left\| \Im_{x_1x_2} f \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \right. \\
& + \int_0^{T_1} \left(\left\| \Im_{x_1x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_1} \Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} \Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_1 \\
& \left. + \int_0^{T_2} \left(\left\| \Im_{x_1x_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_1} \Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \Im_{x_2} \Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt_2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Le domaine de définition $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions u tels que $\Im_{x_1x_2} u \in L^2(Q)$ pour lesquelles $\Im_{x_1} u, \Im_{x_2} u, \Im_{x_1x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1}, \Im_{x_1x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2}, \Im_{x_1x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \Im_{x_1x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \Im_{x_1x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in L^2(Q)$ et vérifiant les conditions (2.4).

2.2 Estimation à priori

Théorème 25 *Pour tout $u \in D(L)$, on a :*

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F, \tag{2.5}$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

Preuve. Considérons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de (2.1) et l'opérateur intégro-différentiel Mu

$$\begin{aligned} Mu &= \Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) \\ &= \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2}\left(\frac{\partial u\left(\eta_1,\eta_2,t_1,t_2\right)}{\partial t_1}+\frac{\partial u\left(\eta_1,\eta_2,t_1,t_2\right)}{\partial t_2}\right)d\eta_2 d\eta_1 d\xi_2 d\xi_1, \quad (2.6) \end{aligned}$$

où $Q^\tau=\Omega\times I^\tau$, $\Omega=(0,b_1)\times(0,b_2)$, $I^\tau=(0,\tau_1)\times(0,\tau_2)$, il vient :

$$\begin{aligned} &\int_{Q^\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\ &-\int_{Q^\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\ =&\int_{Q^\tau}f(x,t)\,\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt. \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Intégrons par parties séparément chaque terme en tenant compte des conditions $(2.2)-(2.4)$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{Q^\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}dxdt \\ =&\int_{I^\tau}\int_0^{b_2}\Im_{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1}dx_2dt-\int_{Q^\tau}\Im_{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}dxdt \\ =&-\int_{I^\tau}\int_0^{b_1}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2}dx_1dt+\int_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}dxdt \\ =&\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\tau_2}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2dxdt_2-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\tau_2}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1}\right)^2dxdt_2, \qquad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \quad & \int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \Im_{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \quad & -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \quad & \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \right)^2 dxdt_1 - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_2} \right)^2 dxdt_1,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
& -\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= \quad & -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= \quad & \int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} u \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= \quad & -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_1} \Im_{x_2} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} \Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int\limits_{Q^\tau} \Im_{x_2} u \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt \\
= \quad & \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_2} u \left(x_1, \xi_2, \tau_1, t_2 \right) \right)^2 dxdt_2 \\
& -\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_2} \Phi_1 \left(x_1, \xi_2, t_2 \right) \right)^2 dxdt_2,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
& -\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \quad & -\int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im^2_{x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt \\
= \quad & \int\limits_{I^\tau} \int\limits_0^{b_2} u \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} \Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int\limits_{Q^\tau} u \Im^2_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt
\end{aligned}$$

$$= -\int_{I^\tau}\int_0^{b_1} \Im_{x_2} u \Im_{x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_2}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \Im_{x_2} u \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_2} u\left(x_1, \xi_2, , t_1, \tau_2\right)\right)^2 dxdt_1$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\tau_1} \left(\Im_{x_2} \Phi_2\left(x_1, \xi_2, t_1\right)\right)^2 dxdt_1, \tag{2.11}$$

$$-\int_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt$$

$$= -\int_{I^\tau}\int_0^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im_{x_1 x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_2}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt$$

$$= \int_{I^\tau}\int_0^{b_1} u \Im_{x_1 x_1 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt - \int_{Q^\tau} u \Im_{x_1}^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt$$

$$= -\int_{I^\tau}\int_0^{b_2} \Im_{x_1} u \Im_{x_1}^2 \frac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int_{Q^\tau} \Im_{x_1} u \Im_{x_1} \frac{\partial u}{\partial t_1} dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_1} u\left(\xi_1, x_2, \tau_1, t_2\right)\right)^2 dxdt_2$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\tau_2} \left(\Im_{x_1} \Phi_2\left(\xi_1, x_2, t_2\right)\right)^2 dxdt_2, \tag{2.12}$$

$$-\int_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt$$

$$= -\int_{I^\tau}\int_0^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Im_{x_1 x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_2}\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int_{Q^\tau} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt$$

$$= \int_{I^\tau}\int_0^{b_2} u \Im_{x_1 x_2 x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2}\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q^\tau} u \Im_{x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt$$

$$= -\int_{I^\tau}\int_0^{b_1} \Im_{x_2} u \Im_{x_2}^2 \frac{\partial u}{\partial t_2}\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \Im_{x_2} u \Im_{x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt$$

d'où :

$$-\int\limits_{Q^\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im^2_{x_1x_2} \frac{\partial u}{\partial t_2} dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1} \left(\Im_{x_2} u\left(x_1, \xi_2, , t_1, \tau_2\right)\right)^2 dxdt_1$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1} \left(\Im_{x_2} \Phi_2\left(x_1, \xi_2, t_1\right)\right)^2 dxdt_1, \qquad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^\tau} f\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\
&= \int\limits_{I^\tau}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1} f\Im^2_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int\limits_{Q^\tau}\Im_{x_1} f\Im_{x_1x_2x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\
&= -\int\limits_{I^\tau}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_1x_2} f\Im_{x_1x_2x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int\limits_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2} f\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt \\
&= \int\limits_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2} f\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dxdt. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Substituons les identités (2.8) – (2.14) dans l'égalité (2.7), on obtien :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt_2 \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_2} u\left(x_1,\xi_2,,t_1,\tau_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1} u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2\right)dxdt_1 \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\left(\Im_{x_2} u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1} u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2 \\
&= \int\limits_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2} f\Im_{x_1x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1}\right)^2+\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2\right. \\
&\left.+\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2\right)dxdt_1 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\tau_2}\left(\left(\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2}\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right.\right. \\
&\left.+\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy pour majorer le premier terme du membre droite de l'égalité (2.15), il vient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau_1}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1+\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau_2}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt_2\\
&+\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right)^2\right)dxdt_1\\
&+\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau_2}\left(\left(\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2+\left(\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2\\
\leq\;&\int_{Q^\tau}\left(\Im_{x_1x_2}f\right)^2 dxdt+\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau_1}\left(\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1}\right)^2+\left(\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right)^2\right.\\
&\left.+\left(\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right)^2 dxdt_1+\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau_2}\left(\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2}\right)^2+\left(\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right)^2\right.\right.\\
&\left.+\left(\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right)^2\right)dxdt_2, \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\tau_1}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_1+\int_{0}^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_2\\
&+\int_{0}^{\tau_1}\left(\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\\
&+\int_{0}^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\\
\leq\;&4\int_{0}^{\tau_1}\int_{0}^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}f\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_{0}^{\tau_1}\int_{0}^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_{0}^{\tau_1}\int_{0}^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt\\
&+\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\\
&+\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\
&\left.+\left\|\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^{\tau_1}\left(\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\\ &+\int_0^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\ &\left.+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dxdt_2, \qquad (2.18)\end{aligned}$$

$$y\left(\tau\right)=\int_0^{\tau_1}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_1+\int_0^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_2, \qquad (2.19)$$

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}f\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\ &+\int_0^{\tau_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\\ &+\int_0^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\ &\left.+\left\|\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\tau_1}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_1+\int_0^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_2\\ &+\int_0^{\tau_1}\left(\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\\ &+\int_0^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\\ \leq\ &C\left(\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\left\|\Im_{x_1x_2}f\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^{\tau_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\right.\end{aligned}$$

$$+\left\|_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Bigg)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$
$$\left.+\left\|\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\Bigg), \tag{2.21}$$

$$\int_0^{T_1}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_1+\int_0^{T_2}\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt_2$$
$$+\int_0^{T_1}\left[\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]dt_1$$
$$+\int_0^{T_2}\left[\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]dt_2$$
$$\leq C\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left\|\Im_{x_1x_2}f\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\right.$$
$$\left.+\left\|\Im_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1+\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$
$$\left.\left.+\left\|\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\right). \tag{2.22}$$

Le membre droite ne dépend pas de τ_i $(i=1,2,....,n)$, alors en passant dans le membre gauche au supremum par rapport à τ_i de $[0,T_i]$ $(i=1,2,....,n)$, on obtient :

$$\sup_{0\leq\tau_2\leq T_2}\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,t_1,\tau_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1$$
$$+\sup_{0\leq\tau_1\leq T_1}\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}u\left(x_1,\xi_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}u\left(\xi_1,x_2,\tau_1,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2$$
$$\leq C\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left\|\Im_{x_1x_2}f\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right.$$

$$+\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\Phi_2\left(x_1,\xi_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\Im\left\|_{x_1}\Phi_2\left(\xi_1,x_2,t_1\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1$$
$$+\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\Phi_1\left(\xi_1,x_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$
$$\left.\left.+\left\|\Im_{x_2}\Phi_1\left(x_1,\xi_2,t_2\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\right). \tag{2.23}$$

D'ici on obtient l'inégalité (2.5). ■

Proposition 26 [4] *L'operateur L de E dans F est fermable.*

Preuve. On suppose que $(u_n)_n \in D(L)$ une suite telle que :

$$u_n \;\to\; 0 \qquad \text{dans} \quad E, \tag{2.24}$$

et

$$Lu_n = (\mathcal{L}u_n, \ell_1 u_n, \ell_2 u_n) \to \mathcal{F} = (f, \Phi_1, \Phi_2) \qquad \text{dans} \quad F, \tag{2.25}$$

nous devons démontrer que : $f \equiv 0$, $\Phi_1 \equiv 0$ et $\Phi_2 \equiv 0$.

Comme

$$u_n \;\to\; 0 \qquad \text{dans} \quad E, \tag{2.26}$$

alors

$$u_n \;\to\; 0 \qquad \text{dans} \quad D'(Q). \tag{2.27}$$

D'après la continuité de la dérivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$, (2.27) implique :

$$\mathcal{L}u_n \to 0 \qquad \text{dans} \quad D'(Q), \tag{2.28}$$

et comme

$$\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u_n \to \Im_{x_1x_2}f \qquad \text{dans} \quad L^2(Q), \tag{2.29}$$

alors

$$\Im_{x_1 x_2}\mathcal{L}u_n \rightarrow \Im_{x_1 x_2} f \qquad \text{dans} \quad D'(Q), \tag{2.30}$$

d'où

$$\mathcal{L}u_n \rightarrow f \qquad \text{dans} \quad D'(Q), \tag{2.31}$$

de l'unicité de la limite dans $D'(Q)$, on a :

$$f \equiv 0. \tag{2.32}$$

D'aprés (2.25) ona :

$$\begin{cases} \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial \ell_1 u_n}{\partial t_2} \rightarrow \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} \text{ dans } L^2(Q_2) \\ \Im_{x_1}\ell_1 u_n \rightarrow \Im_{x_1}\Phi_1 \text{ dans } L^2(Q_2) \\ \Im_{x_2}\ell_1 u_n \rightarrow \Im_{x_2}\Phi_1 \text{ dans } L^2(Q_2), \end{cases}$$

et comme $L^2(Q_2)$ s'injecte continument dans $D'(Q_2)$, on obtient :

$$\begin{cases} \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial \ell_1 u_n}{\partial t_2} \rightarrow \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} \text{ dans } D'(Q_2) \\ \Im_{x_1}\ell_1 u_n \rightarrow \Im_{x_1}\Phi_1 \text{ dans } D'(Q_2) \\ \Im_{x_2}\ell_1 u_n \rightarrow \Im_{x_2}\Phi_1 \text{ dans } D'(Q_2). \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{cases} \left\|\Im_{x_1 x_2}\frac{\partial \ell_1 u_n}{\partial t_2}\right\|_{L^2(Q_2)} \leq \|u_n\|_E \ , \forall n, \\ \left\|\Im_{x_1}\ell_1 u_n\right\|_{L^2(Q_2)} \leq \|u_n\|_E \ , \forall n, \\ \left\|\Im_{x_2}\ell_1 u_n\right\|_{L^2(Q_2)} \leq \|u_n\|_E \ , \forall n, \end{cases}$$

de ces inégalités on a :

$$\begin{cases} \Im_{x_1 x_2}\frac{\partial \ell_1 u_n}{\partial t_2} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(Q_2) \\ \Im_{x_1}\ell_1 u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(Q_2) \\ \Im_{x_2}\ell_1 u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(Q_2), \end{cases}$$

alors : :

$$\begin{cases} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial \ell_1 u_n}{\partial t_2} \to 0 \text{ dans } D'(Q_2) \\ \Im_{x_1}\ell_1 u_n \to 0 \text{ dans } D'(Q_2) \\ \Im_{x_2}\ell_1 u_n \to 0 \text{ dans } D'(Q_2), \end{cases}$$

de l'unicité de la limite dans $D'(Q_2)$, on conclut que :

$$\begin{cases} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} = 0 \\ \Im_{x_1}\Phi_1 = 0 \\ \Im_{x_2}\Phi_1 = 0 \ , \end{cases}$$

d'où

$$\Phi_1 \equiv 0. \tag{2.33}$$

De façon analogue, on démontre que :

$$\Phi_2 \equiv 0. \tag{2.34}$$

■

Soit $\overline{L}$ la fermeture de L avec le domaine de définition $D\left(\overline{L}\right)$.

Définition 27 *La solution de l'équation*

$$\overline{L}\,u = \mathcal{F}$$

est dite solution forte du problème $(2.1) - (2.4)$.

L'inégalité (2.5) peut être prolongée à $\overline{L}$, soit :

$$\|u\|_E \leq \left\|\overline{L}\,u\right\|_F, \ \forall u \in D\left(\overline{L}\right).$$

L'inégalité entraine les corollaires suivants :

Corollaire 28 *La solution forte du problème si elle existe, elle est unique et dépend continument des conditions initiales et du second membre de l'équation* (2.1).

Corollaire 29 *L'ensemble des valeurs* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *égale à la fermeture* $\overline{R(L)}$ *de* $R(L)$.

Proof [5]. De la définition de l'ensemble $R\left(\overline{L}\right)$ de l'opérateur $\overline{L}$, il s'ensuit que $R\left(\overline{L}\right) \subset \overline{R(L)}$.

Il reste à montrer $\overline{R(L)} \subset R\left(\overline{L}\right)$.

Soit $y \in \overline{R(L)}$, il existe alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$ telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y. \tag{2.35}$$

Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(L)$ telle que :

$$Lu_n = y_n. \tag{2.36}$$

De l'estimation (2.5), on a :

$$\|u_n - u_m\|_E \leqslant \|Lu_n - Lu_m\|_F \longrightarrow 0 \tag{2.37}$$

quand n et m tendent vers l'infini. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Alors, il existe une fonction $u \in E$ telle que :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } E \tag{2.38}$$

quand n tend vers l'infini. En vertu de la définition de $\overline{L}$, la fonction u vérifie :

$$\overline{L}u = y,\ u \in D\left(\overline{L}\right). \tag{2.39}$$

Par conséquent, $y \in R\left(\overline{L}\right)$. Ce qui achève la démonstration du corollaire 29. ■

2.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 30 *Pour tout* $\mathcal{F} = (f, \Phi_1, \Phi_2) \in F$ *, il existe une solution générale unique* $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ *pour le problème* $(2.1) - (2.4)$.

Preuve. Pour montrer que le problème $(2.1) - (2.4)$ admet une solution générale unique pour tout $\mathcal{F} = (f, \Phi_1, \Phi_2) \in F$, il suffit de démontrer que l'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'operateur L est dense dans F, c'est-à-dire $\overline{R(L)} = F$. ■

Pour arriver a ce résultat, nous avons besoins de démontrer la proposition suivante :

Proposition 31 *Si pour* w *tel que* $\Im_{x_1 x_2} w \in L^2(Q)$ *on a :*

$$\int \Im_{x_1 x_2} \mathcal{L}u \Im_{x_1 x_2} w dx dt = 0, \tag{2.40}$$

pour tout $u \in D_0(L) = \{u \ / u \in D(L) : \ell_1 u = \ell_2 u = 0\}$, *alors* $w = 0$ *dans* Q.

Preuve. La relation (2.40) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous la forme particulière :

$$u(x_1, x_2, t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t_p \leq s_p, \\ \int\limits_{s_1}^{t_1}\int\limits_{s_2}^{t_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 & s_p \leq t_p \leq T_p, \end{cases} \tag{2.41}$$

Soit $\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}$ est la solution de l'équation :

$$\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = h_p, \tag{2.42}$$

où

$$h_p = \int\limits_{t_p}^{T_p} \Im_{x_1 x_2} w_p d\ \tau_p, \tag{2.43}$$

Les formules (2.41) et (2.43) implique que $u \in D_{s_1 s_2}$ qui représente l'ensemble de tout les $u \in D(L)$ s'annulant dans les frontière de $t_p = s_p$ et $t_p \lessdot s_p$ $(p = 1, 2)$. En posant $s_p = 0$ $(p = 1, 2)$, nous obtenons que $u \in D_0(L)$, des relations $(2.41), (2.42)$ et (2.43) nous obtenons que :

$$\Im_{x_1 x_2} w = \sum_{p=1}^{2} \Im_{x_1 x_2} w_p = -\Im_{x_1 x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \tag{2.44}$$

Pour montrer que $\Im_{x_1 x_2} w$ définie par la relation $(2.44) \in L^2(Q)$, nous appliquons le résultat suivant : ■

Lemme 32 *La fonction définie par* (2.44) *a des dérivées de la forme* $\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2^2}$ *et* $\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial t_2}$ *appartenant à* $L^2(Q_s)$, *où* $Q_s = \Omega \times (s_1, T_1) \times (s_2, T_2)$.

Preuve. Soit $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}), \omega \geqslant 0$, $\omega = 0$ dans un voisinage de $t_p = 0$ et $t_p = T_p$ et à l'extérieur de l'intervalle $(0, T_p)$, et soit $\int_{\mathbb{R}} \omega(t) dt = 1$. Considérons les t-opérateurs de régularisation ρ_ε de la forme :

$$\rho_\varepsilon w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_p} \omega\left(\frac{s - t}{\varepsilon} \right) w(x, s)\, ds \quad \text{pour } w \in L^2(Q) \tag{2.45}$$

Ces opérateurs ont les propriétés suivantes :

P_1 : la fonction $\rho_\varepsilon w \in C^\infty(Q_s)$ et elle s'annule dans un voisinage de $t_p = T_p$ si $\omega \in L^2(Q)$ et $\rho_\varepsilon u \in D_{s_1 s_2}(L)$ si $u \in D_{s_1 s_2}(L)$.

P_2 : Si $w \in L^2(Q)$, alors $\|\rho_\varepsilon w - w\|_{L^2(Q)} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, et $\|\rho_\varepsilon w\|_{L^2(Q)} \leq \|w\|_{L^2(Q)}$.

P_3 : $\frac{d^k}{dt^k} \rho_\varepsilon u = \rho_\varepsilon \frac{d^k}{dt^k} u$ pour k=1,2 si $u \in D_{s_1 s_2}(L)$.

Appliquons les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t_p}$ à l'équation (2.42), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t_p} \left(\rho_\varepsilon \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right) = \frac{\partial}{\partial t_p} \rho_\varepsilon h_p. \tag{2.46}$$

De la relation (2.46) et des propriétés P_1, P_2 et P_3 de l'opérateur ρ_ε, on obtient :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t_p} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right\|_{L^2(Q_s)} \leq 2 \left\| \frac{\partial}{\partial t_p} \rho_\varepsilon h_p \right\|_{L^2(Q_s)}. \tag{2.47}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 32.

En remplaçant $\Im_{x_1 x_2} w$ dans (2.40) par sa représentation (2.44), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial t_2} dxdt \\
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2^2} dxdt \\
&+\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial t_2} dxdt \\
&+\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2^2} dxdt \\
&+\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial t_2} dxdt \\
&+\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2^2} dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

En intégrant par partie chaque terme de (2.48), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial t_2} dxdt \\
= \;& \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{s_2}^{T_2} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, s_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right)^2 dxdt_2,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2^2} dxdt \\
= \;& \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{s_1}^{T_1} \left(\Im_{x_1 x_2} \frac{\partial^2 u(\xi_1, \xi_2, t_1, s_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right)^2 dxdt_1,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= &\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_1=s_1}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= &-\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_2}^2\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&+\int\limits_{Q_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_2}^2\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= &\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Im_{x_1x_2}^2\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= &-\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} u\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&+\int\limits_{Q_s} u\Im_{x_2}^2\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= &\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}^2\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= &-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_2} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Bigg|_{t_1=s_1}^{t_1=T_1} dxdt_2 \\
&+\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}dxdt \\
= &\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_1}\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1, \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
= &\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=s_1}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
= &-\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=s_2}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&+\int\limits_{Q_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
= &\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
= &-\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} u\Im_{x_1x_2x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&+\int\limits_{Q_s} u\Im^2_{x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
= &\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}u\Im^2_{x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
= &-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_1} \Im_{x_2}u\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Bigg|_{t_2=s_2}^{t_2=T_2} dxdt_1 \\
&+\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}dxdt \\
= &\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_2} \left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt_2,
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= \ & \int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
& -\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= \ & -\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
& +\int\limits_{Q_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= \ & \int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
& -\int\limits_{Q_s} \frac{\partial u}{\partial x_2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= \ & -\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} u\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
& +\int\limits_{Q_s} u\Im^2_{x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= \ & \int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1}u\Im^2_{x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
& -\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1}u\Im_{x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2\partial t_2}dxdt \\
= \ & -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_2} \Im_{x_1}u\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Bigg|_{t_1=s_1}^{t_1=T_1} dxdt_2 \\
& +\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}dxdt \\
= \ & \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_1}\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1, \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
=\;& \int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
=\;& -\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&+\int\limits_{Q_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
=\;& \int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}\Im^2_{x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \frac{\partial u}{\partial x_2}\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
=\;& -\int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_1} u\Im_{x_1x_1x_2}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt \\
&+\int\limits_{Q_s} u\Im^2_{x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
=\;& \int\limits_{s_1}^{T_1}\int\limits_{s_2}^{T_2}\int\limits_{0}^{b_2} \Im_{x_1}u\Im^2_{x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt \\
&-\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1}u\Im_{x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2^2}dxdt \\
=\;& -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_1}^{T_1} \Im_{x_1}u\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Bigg|_{t_2=s_2}^{t_2=T_2} dxdt_1 \\
&+\int\limits_{Q_s} \Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\Im_{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}dxdt \\
=\;& \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s_2}^{T_2}\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt_2.
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

Substituons les identités (2.49) − (2.54) dans l'égalité (2.48), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_1}^{T_1}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u\left(\xi_1,\xi_2,t_1,s_2\right)}{\partial t_1\partial t_2}\right)^2 dxdt_1+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_2}^{T_2}\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u\left(\xi_1,\xi_2,s_1,t_2\right)}{\partial t_1\partial t_2}\right)^2 dxdt_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_1}^{T_1}\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_1}^{T_1}\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_1+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_2}^{T_2}\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 dxdt_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_2}^{T_2}\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 dxdt_2=0, \tag{2.55}$$

ainsi on a :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_1}^{T_1}\left(\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u\left(\xi_1,\xi_2,t_1,s_2\right)}{\partial t_1\partial t_2}\right)^2+\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2+\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2\right)dxdt_1$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{s_2}^{T_2}\left(\left(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial^2 u\left(\xi_1,\xi_2,s_1,t_2\right)}{\partial t_1\partial t_2}\right)^2+\left(\Im_{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\Im_{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2\right)dxdt_2=0. \tag{2.56}$$

Alors $\Im_{x_1x_2}w=0$ presque partout dans $(0,b_2)\times(0,b_2)\times(s_1,T_1)\times(s_2,T_2)$.

D'où on conclut que $w=0$ presque partout dans $(0,b_2)\times(0,b_2)\times(s_1,T_1)\times(s_2,T_2)$.

Comme s_j $(j=1,2)$ est une longueur indépendante du choix de l'origine et en procédant avec le même raisonnement nous montrons que $w=0$ presque partout dans Q, et par conséquent la démonstration de la proposition 31 est achevée.

Revenant maintenant à la démonstration du théorème.

Soit $W=(w,w_1,w_2)$ un élément orthogonal à $R(L)$, c.à.d : $W\in R(L)^{\perp}$, comme F est un espace d'Hilbert alors :

$\overline{R(L)} = F$ est vraie, si seulement si :

$$\begin{aligned}(Lu, W)_F &= \int_Q \Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\Im_{x_1x_2}wdxdt + \int_\Omega\int_0^{T_1}\Big(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\ell_2 u}{\partial t_1}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial w_2}{\partial t_1} + \Im_{x_1}\ell_2 u\Im_{x_1}w_2 \\ &+\Im_{x_2}\ell_2 u\Im_{x_2}w_2\Big)\,dxdt_1 + \int_\Omega\int_0^{T_2}\Big(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\ell_1 u}{\partial t_2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial w_1}{\partial t_2} + \Im_{x_1}\ell_1 u\Im_{x_1}w_1 \\ &+\Im_{x_2}\ell_1 u\Im_{x_2}w_1 dxdt_2\Big) = 0, \qquad (2.57)\end{aligned}$$

alors $w = 0$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$.

Si on considère un élément u quelconque de $D_0(L)$, la relation (2.57) entraîne que :

$$\int_Q \Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\Im_{x_1x_2}wdxdt = 0, \qquad (2.58)$$

la proposition 16 implique : $w = 0$, par conséquent et à partir de la relation (2.57), on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_0^{T_1}\Big(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\ell_2 u}{\partial t_1}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial w_2}{\partial t_1} + \Im_{x_1}\ell_2 u\Im_{x_1}w_2 + \Im_{x_2}\ell_2 u\Im_{x_2}w_2\Big)\,dxdt_1 \\ &+\int_\Omega\int_0^{T_2}\Big(\Im_{x_1x_2}\frac{\partial\ell_1 u}{\partial t_2}\Im_{x_1x_2}\frac{\partial w_1}{\partial t_2} + \Im_{x_1}\ell_1 u\Im_{x_1}w_1 \\ &+\Im_{x_2}\ell_1 u\Im_{x_2}w_1 dxdt_2\Big) = 0. \qquad (2.59)\end{aligned}$$

Comme les valeurs $\ell_1 u$ et $\ell_2 u$ sont indépendants et les ensembles des valeurs des opérateurs ℓ_1 et ℓ_2 sont denses dans les espaces de Hilbert H_1 et H_2 de normes :

$$\|w_1\|_{H_1} = \left[\int_0^{T_2}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial w_1}{\partial t_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}w_1\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}w_1\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.60)$$

et

$$\|w_2\|_{H_2} = \left[\int_0^{T_1}\left(\left\|\Im_{x_1x_2}\frac{\partial w_2}{\partial t_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}w_2\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}w_2\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt_1\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.61)$$

respectivement, où $H_1 = \left\{ w_1 / \ \Im_{x_1} w_1, \Im_{x_2} w_1, \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial w_1}{\partial t_2} \in L^2 \left((0, T_2) \times L^2 (\Omega) \right) \right\}$ et $H_2 = \left\{ w_2 / \ \Im_{x_1} w_2, \Im_{x_2} w_2, \Im_{x_1 x_2} \frac{\partial w_2}{\partial t_1} \in L^2 \left((0, T_1) \times L^2 (\Omega) \right) \right\}$, alors $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$ presque partout dans Q. Ce qui achève la démonstration du théorème 30. $\blacksquare$

Conclusion

En utilisant une méthode d'analyse fonctionnelle de deux façon variantes : la première basée sur deux estimations à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème étudié et la deuxième basée sur une estimation à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème étudié, on a prouvé l'existence, l'unicité et la dépendance de la solution d'une classes de deux équations paraboliques et hyperbolique bidimensionnelle avec des conditions aux limites non locales.

Nos résultats du chapitre (01) peuvent être étendus au problème avec des conditions aux limites non locales pour une équation parabolique pluridimensionnelle suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t_i} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x_1, ..., x_m, t_1, ..., t_n), \\
x &= (x_1, .., x_m) \in \Omega = (0, b_1) \times ... \times (0, b_m), \qquad t = (t_1, ..., t_n) \in I = (0, T_1) \times ... \times (0, T_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_i u &= u\left(x_1, ..., x_m, t_1, ..., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, ..., t_n\right) = \Phi_i\left(x_1, ..., x_m, t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n\right), \\
i &= 1, 2, ..., n,
\end{aligned}$$

$$\int_0^{b_i} x_i^k u(x_1, ..., x_m, t_1, ..., t_n)\, dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \qquad k = 0, 1.$$

Nos résultats du chapitre (02) peuvent être étendus au problème avec des conditions aux limites non locales pour une équation hyperbolique pluridimensionnelle suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x_1, ..., x_m, t_1, t_2), \\
x &= (x_1, ..., x_m) \in \Omega = (0, b_1) \times ... \times (0, b_m), \qquad t = (t_1, t_2) \in I = (0, T_1) \times (0, T_2),
\end{aligned}$$

$$\ell_1 u = u\left(x_1, x_2, ..., x_m, 0, t_2\right) = \Phi_1\left(x_1, x_2, ..., x_m, t_2\right),$$

$$\ell_2 u = u\left(x_1, x_2, ..., x_m, t_1, 0\right) = \Phi_2\left(x_1, x_2, ..., x_m, t_1\right),$$

$$\int_0^{b_i} x_i^k u\left(x_1, x_2, ..., x_m, t_1, t_2\right) dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \qquad k = 0, 1.$$

REFERENCES

[1] A. BOUZIANI, Mixed problem with integral conditions for a certain parabolic equation, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Vol. 9, N°3, 323-330, 1996.

[2] A. BOUZIANI & N-E. BENOUAR, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques, Bulletin of the Belgian Mathematical Sosiety Sim. Stev, Vol. 31, 125-133,1996.

[3] A. BOUZIANI, Solution forte d'un problème mixte avec une condition intégrale pour une classe d'équations paraboliques, Maghreb Mathematical Review, Vol. 6, N°1, 1-17, 1997.

[4] A. BOUZIANI, Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equations, Hiroshima Mathematical Journal, Vol. 27, N°3, 373-390, 1997.

[5] A. BOUZIANI, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations hyperboliques, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale des Sciences de Belgique, Vol. 8, 53-70, 1997.

[6] S. MESLOUB & A. BOUZIANI, Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bi-dimensionnelles, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale des Sciences de Belgique, Vol. 9, 59-71, 1998.

[7] A. BOUZIANI, On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition, Bull. Classe Scien., Acad. Royale Scien. Belgique, Vol. 10, 61-77, 1999.

[8] A. BOUZIANI, Sur un problème parabolique avec des conditions intégrales. (French) (On a parabolic problem with integral conditions) 2iéme Colloque National en Analyse Fonctionnelle et Applications(Sidi Bel Abbés, 1997), Ann. Matt. Univ. Sidi Bel Abbés, 6(1999), 55-66.

[9] A. BOUZIANI, Strong solution to an hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions, Maghreb Math. Rev., 9 (2000), no. 1-2, 71–84.

[10] A. BOUZIANI & N-E. BENOUAR, Sur un problème mixte avec uniquement des conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques, Mag. Math. Rev., 9 (2000), no. 1-2, 55–70.

[11] A. BOUZIANI, On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems, Electronic J. Differential equations, Vol. 2001 (2001), no. 21, 1-16.

[12] S. MESLOUB & A. BOUZIANI, Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations, Journal of Applied Mathematics, Vol. 1 (2001), no. 3, 107-116.

[13] A. BOUZIANI, Weak solution to linear and semilinear parabolic equation with a nonlocal condition, Engineering Simulation, Vol. 18(2001), 5996619.

[14] A. BOUZIANI, On the solvability of a class of singular parabolic equations with nonlocal boundary condition in nonclassical function spaces, IJMMS, Vol. 30 (2002), no. 7, 435-447.

[15] A. BOUZIANI, Initial-boundary values problem with nonlocal condition for a viscosity equation, Internat. J. Math. Math. Sci., Vol. 30 (2002), 327-338.

[16] A. BOUZIANI, On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition, IJMMS, Vol. 31 (2002), no. 4, 201-213.

[17] A. BOUZIANI, On three-point boundary-value problem with a weighted integral condition for a class of singular parabolic equations, A. A. A., Vol. 7 (2002), no. 10, 517-530.

[18] A. BOUZIANI, On a class of nonclassical hyperbolic equations with nonlocal conditions, J. Appl. Math. Stochastic Anal., Vol. 15 (2002), no. 2, 125-140.

[19] A. BOUZIANI, On the quasistatic flexure of a thermoelastic rod, Communication in Applied Analysis, Vol. 15 (2002), no. 2, 549-568.

[20] S. MESLOUB, A. BOUZIANI & N.KECHKAR, A strong solution for an evolution problem with integral conditions, Georian Mathematical Journal, Vol. 9 (2002), no. 1, 149-159.

[21] S. MESLOUB & A. BOUZIANI, Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator, JAMSA, Vol. 15 (2002), no. 3, 291-300.

[22] A. BOUZIANI, On the weak solution of three-point boundary-value problem for a class of parabolic equations with energy specification, A.A.A., Vol. 2003 (2003), no. 10, 573-589.

[23] A. BOUZIANI, On initial-boundary value problem with Dirichlet-integral conditions for an hyperbolic equation with the Bessel operator, J.A.M, Vol. 2003 (2003), no. 10, 487-502.

[24] N.MERAZGA & A. BOUZIANI, Rothe method for mixed problem with an integral conditions for the two-dimensional diffusion equation, A.A.A., Vol. 2003 (2003), no. 16, 899-922.

[25] A. BOUZIANI, On a class of nonlinear reaction-diffusion systems with nonlocal boundary conditions, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2004 (2004), no. 9, 793 - 813.

[26] A. BOUZIANI, mixed problem with only integral boundary conditions for an hyperbolic equation, IJMMS, Vol. 2004 (2004), no. 26, 1279 - 1291.

[27] A. BOUZIANI, Problèmes mixtes avec conditions intégrales pour quelques équations aux dérivées partielles, Ph.D. thesis, Constantine University, 1996.

[28] A. BOUZIANI & N.MERAZGA, Rothe time-discretization method applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions, Advances in Difference Equation, Vol. 2004, no. 3, 211-235.

[29] N.MERAZGA & A. BOUZIANI, Rothe time-discretization method for a nonlocal problem arising in thermoelasticity, JAMSA, 2005 :1(2005) 13-28.

[30] N.MERAZGA & A. BOUZIANI, Rothe time-discretization method for the semilinear heat equation subject to a nonlocal boundary condition, Journal of Applied Mathemaics and Stochastic Analysis, Volume 2006, Article ID34053, Page 1-20.

[31] N.MERAZGA & A. BOUZIANI, On a time-discretization method for the semilinear heat equation with purely integral conditions in a nonclassical function space, Nonlinear Analysis :Theory, Methods and Application, 66 (2007), 604-623.

[32] A. BOUZIANI, N.MERAZGA & S.BENAMIRA, Galerkin method applied to parabolic evolution problem with nonlocal boundary conditions, Journal of Nonlinear Analysis- A : Theory, Methods and Application, 69 (2008), 1515-1524.

[33] S. BENSAID, A. BOUZIANI & M. ZEREG, Backward Euler method applied for the diffusion equation with integral boundary specifications, Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications, Volume 2, Number 2, 2009, Pages 169-185.

[34] S. A. Beilin, Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions, Electron. J. Differential Equations 2001 (2001), no. 76, 1–8.

[35] D. G. Gordeziani and G. A. Avalishvili, Solution of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of a medium,Mat.Model. 12 (2000), no. 1, 94–103 (Russian) .A mixed priblem with only integral boundary condition ... 1291

[36] L. S. Pulkina, A non-local problemwith integral conditions for hyperbolic equations, Electron. J. Differential Equations 1999 (1999), no. 45, 1–6.

[37] L. S. Pulkina, On the solvability in L2 of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Differ. Equ. 36 (2000), no. 2, 316–318

[38] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation uxt = F(x ; t ; u ; ux), J. Appl. Math. Stochastic.Anal., 3 (1990), 163-168.

[39] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions for nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Applicable Analysis, 40 (1991), 173-180.

[40] N. I. Yurchuk, Problème avec conditions aux limites non locales pour les equations opérationnelles hyperboliques avec des dérivées partielles du second ordre, Differentsial'nye Uravneniya, 11 (1975), 1687-1693.

[41] Batten, Jr., G.W., Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations, (1963), 405-413. Math. Comp. 17

[42] Cannon, J.R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy,Quart. Appl. Math. 21 (1963), 155-160.

[43] Cannon, J.R., The one-dimensional heat equation, In : Encyclopedia of Math. and its Appl. , Addison-Wesley, Mento Park, CA (1984). 23

[44] Cannon, J.R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy,Quart. Appl. Math. 21 :2 (1963), 155-160.

[45] Kamynin, N.I., A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non-classical boundary condition, Th., Vychisl., Mat., Fiz.4 :6 (1964), 1006-1024.

[46] Ionkin, N.I., Solution of boundary value problems in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differents. Uravn. 13 :2 (1977),294-304.

[47] Ionkin, N.I. and Moiseev, E.I., A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition, Differents. Uravn. 15 :7 (179), 1284-1295.

[48] Garding, L., Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations, University of Chicago 1957.

[49] Jean-François Le Gall, Intégration, Probabilité et Processus Aléatoires, Département Mathématiques et Applications, Ecole normale supérieure de Paris.