REPUBLIQUE AGERIENNE DÉMOCRATIQIE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPRIEUR DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ LARBI BEN MHIDI- OUM EL BOUAGHI

FACULTÉ DE SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Année universitaire 2022 – 2023

Numéro d'ordre :..................

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques **Option :** Mathématiques appliquées

Thème

QUELQUES METHODES ANALYTIQUES ET APPLICATIONS

Présenté par :Boussaadi Faiza

Soutenu le 02/07/2023, devant le jury:

Prof.Taieb Hamaizia	Président	Univ. O.E.B
Prof.Ahcene Merad	Encadreur	Univ. O.E.B
Dr.Mohamed Saadi	Examinateur	Univ. O.E.B

SESSION: JUIN 2023

Résumé

Ce mémoire est consacré à appliquer des méthodes analytiques pour résoudre des équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires, des équations aux dérivées partielles (Nous prenons comme exemple les équations de Schrödinger), et des équations intégrodifférentielles de type Volterra. En utilisant la méthode de perturbation d'homotopique, la méthode de décomposition d'Adomian ainsi que l'utilisation de la transformée de Laplace.

Mots clés : équations différentielles, méthode de perturbation d'homotopique, décomposition d'Adomian, transformée de Laplace.

Abstract

This dissertation is talking about the analytical resolution of ordinary differential equations linear and nonlinear, partial differential equations (We take as an example the Schrödinger equations), and integral differential equations of Volterra type using the homotopic perturbation method, the Adomian decomposition method as well as the use of Laplace transform.

Key words: differential equations, homotopic perturbation method, Adomian decomposition method , Laplace transform.

ملخص

تهدف هذه المذكرة الى تطبيق طرق تحليلية لحل المعادالت التفاضلية العادية الخطية وغير الخطية ,المعادالت التفاضلية الجزئية مجسدة في معادالت شرودنجر و المعادالت التفاضلية التكاملية من نوع فولتيرا باستخدام طريقة االضطراب الهوموتوبي , طريقة تحليل ادوميان وكذا استخدام تحويل لابلاس .

الكلمات المفتاحية : المعادالت التفاضلية , طريقة االضطراب الهوموتوبي , تحليل ادوميان, تحويل لابلاس.

# Remerciement

Je tiens à remercier avant tout le Dieu de m'avoir accordé la volonté et la capacité pour achever ce travail.

je remecie infiniment en premier lieu mon encadreur Prof. Merad Ahcen pour ses orientations et ses conseils.
Mes remerciments spéciaux pour Prof. Merad Mahmoud, Dr. Gheraf Namir et Dr Saadi Mohamed, pour leur aide et un grand merci à ce dernier et à Prof. Hmaizia Taieb d'avoir accepté d'être dans les membres de jury pour évaluer ce modeste travail.
Je remercie également tous les professeurs de département de mathématiques surtout le Prof. Rezzouk Imad, et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail de près ou de loin.

DÉDICACE

Je dédie ce travail à la mémoire de mon père.
À ma chère maman et à toute ma famille.
À toutes mes amies et mes collègues .
À tout personne qui m'a soutenue, aide ou contribué de près ou de loin.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

1. $\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{R}$:L'ensemble des nombres réel
3. $\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes.
4. Ω :Un domaine borné dans $\mathbb{R}^n, n \geq 1$.
5. Γ : La frontière du domaine Ω .
6. EDO :Les équations différentielles ordinaires.
7. EDP :Les équations différentilles aux dérivées partielles.
8. ADM :La méthode de décomposition d'Adomian.
9. HPM : La méthode de perturbation d'homotopie.
10. LT : La méthode de trasformée de Laplace.

INTRODUCTION

Au cours des deux dernières décennies, avec le développement rapide de la science linéaire et non linéaire, les physiciens et les ingénieurs se sont de plus en plus intéressés au techniques analytiques pour les problèmes linéaires et non linéaires.

De nombreux problèmes en sciences naturelles et en science de l'ingénierie sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces équations apparaissent dans un certain nombre de modèles scientifiques tels que la propagation des vagues en eaux peu profondes, modèles à ondes longues et de réaction-diffusion chimique.

Un travail considérable a été investi pour la résolution de tels problèmes. Plusieurs techniques dont la méthode des caractéristiques, invariants de Riemann, combinaison de relaxation de forme d'onde et multi-grille, forme d'onde périodique multi-grille, itération variationnelle, perturbation homotopique et décomposition d'Adomian([21]), ont été utilisés pour les solutions de tels problèmes. La plupart de ces techniques se heurtent à des lacunes inhérentes et impliquent un énorme travail de calcul. Il a refaire ([11])a développé l'homotopie méthode de perturbation pour résoudre des problèmes linéaires, non linéaires, initiaux et aux limites en fusionnant deux techniques, l'homotopie standard et la téchnique de perturbation. La méthode de perturbation d'homotopie a été formulé en tirant pleinement parti des méthodes standard d'homotopie et de perturbation et a été appliqué à une large classe d'équations fonctionnelles([13])([14])([24]).

L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la méthode de perturbation d'homotopie (**HPM)**, la méthode de décomposition d'Adomian (**ADM)** et la méthode de trasformée de Laplace **(LT)** pour resoudre des équations difféletielles ordinaires, des èquations aux dérivées partielles, et des équations intégro-différentilles de type Volterra.

Notre mémoire est organisé selon le plan suivant : ´

Dans **le premier chapitre**, nous présentons quelques préliminaires concernant les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, et les équations intégro-différentielles de type volterra.

Nous donnons dans **le deuxième chapitre**, la description de la méthode de perturbation d'homotopie, la méthode de décomposition d'Adomian et nous faisons l'analyse de leur convergence. En suite nous présentons la méthode de la transformée de Laplace.

Dans **le troisième chapitre**, nous appliquons les trois méthodes sur des équations aux dérivées partielles (EDP) (équation de Shrödinger),des équations intégro-différentielles de type Volterra, et des équations différentielles ordinaire (EDO).

CHAPITRE 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les concepts de base et des résultats fondamenteaux sur les equations différentielles ordinaires, les équation différentielles aux dérivées partielles, et les équations integro-différentielles de type de Volterra.

1.1 Les équations différentielles ordinaires :

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et exemples sur la résolution des équations différentielles ordinaires linéaires du premier et second ordre sans montrer l'existence et l'unicité de la solution.

1.1.1 Les équations différentielles linéaires du premier order :

Définition 1 *:([22])Une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre est de la forme :*

$$u' + p(x)u = q(x) \tag{1.1}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues données sur $]x_0, x_1[\subset \mathbb{R}$.

La solution de l'équation (1.1) est obtenue sous la formule :

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(t)q(t)dt + c \right], \tag{1.2}$$

où c est une constante arbitraire à déterminer par la condition initiale.

Tout d'abord on détermine un facteur d'intégrant $\mu(x)$ donné par :

$$\mu(x) = \exp(\int^x p(t)dt).$$

Exemple 1 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$u' - 3u = 3x^2 e^{3x}, \quad u(0) = 1. \tag{1.3}$$

On note que

$$p(x) = -3 \quad \text{et} \quad q(x) = 3x^2 \exp(3x)$$

Le facteur d'intégrant $\mu(x)$ est donné par :

$$\mu(x) = \exp(\int_0^x (-3)\, dt) = \exp(-3x).$$

En utilisant la condition initiale donnée dans l'équation (1.3), la solution $u(x)$ est obtenu par la relation suivante :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(t)q(t)dt + c\right] = \exp(3x)\left(\int_0^x 3t^2 dt + c\right) \\ &= \exp(3x)\left(x^3 + c\right) = \exp(3x)\left(x^3 + 1\right), \end{aligned}$$

1.1.2 Les équations différentielles linéaires du second ordre :

Définition 2 *Une équation différentielle linéaiire du 2ème ordre à coefficients constants, avec second membre, est de la forme :*

$$au'' + bu' + cu = f(x) \text{ ou } u'' + Au' + Bu = F(x),$$

où A et B sont des coefficients constants et $F(x)$ le second membre.

Les équations homogènes à coefficients constants :

Définition 3 *Une équation homogène à coefficients constants du second ordre est une équation de la forme standard suivante :*

$$au'' + bu' + cu = 0, \quad a \neq 0, \tag{1.4}$$

où a, bet c sont des constantes. Tout d'abord en suppose La solution de cette équation est de la forme :

$$u(x) = e^{rx}, \tag{1.5}$$

puis en substituantl l'hypothèse (1.5) dans l'équation (1.4)on trouve :

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Puisque e^{rx} n'est pas nul, alors nous avons l'équation caractéristique auxiliaire suivante :

$$ar^2 + br + c = 0,$$

la résolution de cette équation quadratique conduit à l'un des trois cas suivants :

(i) Si les racines r_1 et r_2 sont réelles et $r_1 \neq r_2$, alors la solution générale de l'équation homogène (1.4) est de la forme :

$$u(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

où A et B sont des constantes.

(ii) Si les racines r_1 et r_2 sont réelles et $r_1 = r_2 = r$,alors la solution générale de l'équation homogène (1.4) est de la forme :

$$u(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx},$$

où A et B sont des constantes déterminer par les conditions initiales.

(iii) Si les racines r_1 et r_2 sont complexes et $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$, alors la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$u(x) = e^{\lambda x}(Acos(\mu x) + Bsin(\mu x)),$$

où A et B sont des constantes.

Exemple 2 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$u'' - u = 0, \quad (*)$$

L'équation caractéristique auxiliaire de l'équation $(*)$ est :

$$r^2 - 1 = 0,$$

dans ce cas on a deux racines réelles :

$$r = \pm 1,$$

la solution générale s'écrit sous la forme

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Soit une autre équation différentielle ordionaire du second ordre :

$$u'' + u = 0, \quad (**)$$

L'équation caractéristique auxiliaire de l'équation $(**)$ est :

$$r^2 + 1 = 0,$$

dans ce cas on a deux racines complexes :

$$r = \pm i,$$

alors la solution générale donnée par

$$u(x) = Acosx + Bsinx,$$

où A et B sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

1.2 Les équations aux dérivées partielles :

Les equations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP par la suite, constituant une branche importante des mathémathiques appliquées.

Définition 4 *à revoire ([23]) Une (EDP) est une équation qui contient la dépendance variable (la fonction inconnue) et ses dérivées partielles.*

Exemple 3 *Voici quelques exemples concrets des EDP.*

1) Les équations de la chaleur (dans un espace à une dimension, à deux dimensions et trois dimensionnels respectivement) :

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \\ u_t &= k(u_{xx}+u_{yy}), \\ u_t &= k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}). \end{aligned}$$

2) Les équations des ondes (dans un espace à une dimension, à deux dimensions et trois dimensions respectivement) :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2u_{xx}, \\ u_{tt} &= c^2(u_{xx}+u_{yy}), \\ u_{tt} &= c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}). \end{aligned}$$

où les fonctions inconnues définis par $u = u(x,t)$, $u = u(x,y,t)$ et $u = u(x,y,z,t)$ respectivement.

1.2.1 L'ordre d'une EDP :

Définition 5 ***L'ordre*** *d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevée qui apparaît dans léquation.*

Exemple 4 *Les EDP suivantes :*

$$\begin{aligned} u_x - u_y &= 0 \\ u_{xx} - u_t &= 0 \\ u_y - u_{xxx} &= 0 \end{aligned}$$

sont des EDP du premier ordre, du deuxième ordre et du troisième ordre.

1.2.2 EDP linéaires et non linéaires :

EDP linéaire du 1erordre

Définition 6 *La forme générale d'une EDP linéaire, du premier ordre, à deux variables, est*

$$Au_x + Bu_y + Cu = D(x,y).$$

où A, B, C, D sont des fonctions de(x,y).

EDP linéaire du 2^{e}ordre

Définition 7 *La forme générale d'une EDP linéaire, du deuxième ordre, à deux variables, est*

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G.$$

où A, B, C, D, E, F, G sont des fonctions de(x, y).

Exemple 5 *Soient les EDP suivantes :*

$$xu_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (a),$$

$$uu_t + xu_x = 2, \quad (b).$$

L'EDP (a) est linéaire puisque la puissance de chaque dérivée partielle u_{xx} et u_{yy} égale à un, de plus les coefficients des dérivées partielles u_{xx} et u_{yy} sont des variables indépendantes x et y respectivement.

Bien que L'EDP (b) est non linéaire puisque le coefficient da la dérivée partielle u_t dépend de la variable u.

1.2.3 Quelques exemples concrets des EDP linéaires :

Les équations aux dérivées partielles apparaissent dans différents domaines de la physique mathématique et ingénierie, y compris la dynamique des fluides, la physique des plasmas, théorie quantique des champs, propagation des ondes et fibre optique Dans ce qui suit, nous présentons quelques modèles bien connus qui sont d'une grande intérêt :

1. L'équation de la chaleur dans un espace unidimensionnel

$$u_t = ku_{xx}$$

où k est une constante.

2. L'équation d'onde dans un espace unidimensionnel donnée par

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

où c est une constante.

3. L'équation de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

4. L'équation du télégraphe

$$u_{xx} = au_{tt} + bu_t + cu$$

où a, b et c sont des constantes.

1.2.4 Quelques exemples concrets des EDP non linéaires :

1.Equation d'advection donnée par

$$u_t + uu_x = f(x,t).$$

2.Equation de Burgers donnée par

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx}.$$

3. Equation de Korteweg de-Vries (KdV) donnée par

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0.$$

4. Equation KdV modifiée (MKdV) donnée par

$$u_t - 6u^2 + u_{xxxx} = 0.$$

5. Equation de Boussinesq donnée par

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0.$$

6. Equation de Schrödinger donnée par

$$iu_t + u_{xx} + \gamma|u|^2 u = 0.$$

7. Equation de Camassa-Holm (CH) donnée par

$$u_t - u_{xxt} + au_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

1.2.5 EDP homogènes et non homogènes :

Définition 8 *Une EDP d'ordre quelconque est dite homogène si son second membre est nul, c'est-à-dire si elle est de la forme où l'opérateur différentiel* $\mathbf{L}$ *est une application linéaire et* u *est la fonction inconnue, sinon on l'appelle une EDP non homogène.*

Exemple 6 *Soient les EDP suivantes :*

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & 4u_{xx}, & (a) \\ u_t & = & u_{xx} + x. & (b). \end{array}$$

L'EDP (a) est homogène, car tout les termes de l'équation ne contiennent que des dérivées partielles de u.

L'EDP(b) est non homogène, car un terme de l'équation contient la variable dépendante x.

1.2.6 Solution d'une EDP :

Définition 9 *Une solution d'une EDP est une fonction u telle qu'elle vérifie l'équation donnée et vérifie également les conditions données.*

Exemple 7 *La fonction :*

$$u(x,t) = \sin x \exp(-4t)$$

est une solution de l'EDP :

$$u_t = -4u_{xx}.$$

Exemple 8 *La fonction suivante*

$$u(x,y) = \sin x \sin y + x^2,$$

est une solution de L'EDP :

$$u_{xx} = u_{yy} + 2.$$

1.2.7 Classifications d'une EDP de second ordre :

Définition 10 *([23])Une EDP linéaire du second ordre à deux variables indépendantes x et y*

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{1.6}$$

est généralement classée en trois classes d'équations ([18]), ([17]), à savoir :

1) **Parabolique** : l'équation parabolique est une équation qui satisfaite la propriétée suivante :

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Des exemples d'équations paraboliques sont les équations de flux de chaleur et de processus de diffusion.

L'équation de transfert de chaleur.

$$u_t = ku_{xx}.$$

Exemple 9 *où la variable dépendante $u = u(x,t)$ dépend de la position x et de la variable de temps t.*

2) **Hyperbolique** : l'équation hyparbolique est une équation qui satisfaite la propriétée suivante :

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Des exemples d'équations hyperboliques sont les équations de propagation des ondes. La vague équation.

$$u_t = c^2 u_{xx}.$$

3) **Elliptique** : l'équation ellliptique est une équation qui satisfaite la propriétée suivante :

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Des exemples d'équations elliptiques sont l'équation de Laplace et l'équation de Schödinger.

L'équation de Laplace dans un espace à deux dimension.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

L'équation de Schrödinger de la forme :

$$iu_t + u_{xx} + \gamma |u|^2 u = 0.$$

Exemple 10 *Soient les EDP du second ordre suivantes :*

$$u_t = 4u_{xx}, \quad (a),$$

l'équation en (a) est parabolique.

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (b)$$

l'équation en (b) est hyperbolique

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (c).$$

l'équation en (c) est elliptique.

1.3 Les équations intégro-différentielles de type Volterra :

Il y a deux types d'équations intégro-différentielles, représentées dans le type Voltera et le type Fredholm. Les équations intégrales dépendent d'une fonction K, qu'on appelle noyau de l'équation. La principale différence entre les équations intégrales de Fredholm et celles de Volterra se trouve dans les bornes de l'opérateur intégral : celles des équations de Fredholm sont fixes, tandis que celles des équations de Volterra sont variables.

Définition 11 *([22]) L'équation intégro-différentielle de type Volterra apparaît dans la forme :*

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{1.7}$$

où $u^{(n)}$ indique la $n^{ième}$ dérivée de $u(x)$. Autres dérivés de moindre ordre peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche.

Exemple 11 *L'équation integro -différentielle de type Volterra définies par :*

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \ u(0) = 0, \tag{1.8}$$

et

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = -1, \ u'(0) = 1. \tag{1.9}$$

CHAPITRE 2

Quelques méthodes analytiques

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement quelques méthodes analytiques : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), et la transformée de Laplace (LT).

2.1 Méthode de perturbation d'homotopie (HPM) :

La méthode de perturbation d'homotopie, a été proposée et développée par le mathématicien chinois Ji-Haun-He en (1999), ([10]), ([11]). Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre des problèmes de frontière non-linéaire et à valeur initiale. La méthode de perturbation d'homotopie, est un outil mathématique puissant pour étudier une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. Elle est obtenue avec succès par la combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation. La caractéristique importante de la méthode de perturbation d'homotopie est qu'elle fournit une solution presque exacte à un large éventail de problèmes linéaires et non-linéaires, sans la nécessité d'hypothèses irréalistes, la linéarisation, la discrétisation et le calcul des polynômes Adomiann ([8]).

2.1.1 Description de la méthode

Pour illustrer le concept de base de cette méthode ([15]), nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega, \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites :

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, r \in \Gamma. \tag{2.2}$$

où A est un opérateur différentielle général, B est un opérateur définissant les conditions aux limites, $f(r)$ est une fonction analytique connue, u est la fonction inconnue et Γ la frontière du domaine Ω . D'une façon générale, l'opérateur A peut être décomposé en deux opérateurs L et N, où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non linéaire. Donc l'équation (2.1) peut être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

On construit l' homotopie : $v(r,p) : \Omega \times [0,1] \longrightarrow R$, qui satisfait :

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \tag{2.3}$$

ou

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0. \tag{2.4}$$

Avec $r \in \Omega$, $p \in [0,1]$ est le paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de l'équation (2.1) qui satisfait les condition aux limites (2.2).

D'après les équations (2.3) et (2.4) nous avons :

$$\begin{aligned} H(v,0) &= L(v) - L(u_0) = 0, \\ H(v,1) &= A(v) - f(r) = 0. \end{aligned}$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u_0(r)$ en $u(r)$. En topologie avec cette dernière propriété, la fonction $v(r,p)$ est appelée homotopie. Selon la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre, et supposons que les solutions des équations (2.3) et (2.4) peuvent être écrites comme une série de puissance de p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \ldots \; = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i. \tag{2.5}$$

Pour $p = 1$, la solution approximative de l'équation (2.1) devient :

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i. \tag{2.6}$$

2.1.2 Analyse de convergence

Dans ce paragraphe, on étudie la convergence de la méthode **HPM** ([4] , [3]). On peut érire la relation (2.4) comme suit :

$$L(v) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N(v)], \tag{2.7}$$

et en remplaçant (2.5) dans (2.7), on obtient :

$$L\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i\right) - L(u_0) = p\left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i\right)\right], \tag{2.8}$$

ainsi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} L(v_i) - L(u_0) = p\left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i\right)\right]. \tag{2.9}$$

D'après le développement de Maclaurin de $N(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i)$ par rapport à p, nous avons :

$$N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)\right)_{p=0} p^i. \tag{2.10}$$

D'après ([7]), on a :

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)_{p=0} = \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{n} p^i v_i\right)\right)_{p=0},$$

alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{n} p^i v_i\right)\right)_{p=0} p^i.$$

Posons :

$$H_n(v_o, v_1, ..., v_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n} p^i v_i\right)\right]_{p=0}, n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.11}$$

où H_n sont appelés polynômes de He ([7]). Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \tag{2.12}$$

En remplaçant (2.12) dans (2.9), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p\left[f(r) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i\right] \tag{2.13}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p, on trouve :

$$\begin{aligned}
p^0 &: \ L(v_0) - L(u_0) = 0, \\
p^1 &: \ L(v_1) = f(r) - L(u_0) - H_0, \\
p^2 &: \ L(v_2) = -H_1, \\
p^3 &: \ L(v_3) = -H_2, \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
p^{n+1} &: \ L(v_{n+1}) = -H_n \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ .
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Par conséquent on trouve :

$$
\begin{aligned}
p^0 &: \quad v_0 = u_0, \\
p^1 &: \quad v_1 = L^{-1}(f(r)) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\
p^2 &: \quad v_2 = -L^{-1}(H_1), \\
p^3 &: \quad v_3 = -L^{-1}(H_2), \\
& \quad . \\
& \quad . \\
& \quad . \\
p^{n+1} &: \quad v_{n+1} = -L^{-1}(H_n), \\
& \quad . \\
& \quad . \\
& \quad .
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Théorème 1 *La solution de l'équation (2.1) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de S_n donnée par :*

$$
S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n, S_0 = 0, \tag{2.16}
$$

en utilisant le schéma itératif

$$
S_{n+1} = -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}\left(f(r)\right), \tag{2.17}
$$

où

$$
N_n\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} H_i, n = 0, 1, 2, ... \tag{2.18}
$$

Preuve. Pour n = 0, d'après (2.17), on a :

$$
S_1 = -L^{-1}N_0(S_0 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \tag{2.19}
$$

Alors

$$
v_1 = -L^{-1}(H_0) - u_0 + (f(r)).
$$

Pour

$$
\begin{aligned}
S_2 &= -L^{-1}N_n(S_1 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \\
&= -L^{-1}(H_1 + H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \\
&= -L^{-1}(H_1) + v_1.
\end{aligned}
$$

Selon $S_2 = v_1 + v_2$, on obtient :

$$
v_2 = -L^{-1}(H_1)
$$

La démonstration de ce théorème se fera par induction. Supposons que :

$$
v_{k+1} = -L^{-1}(H_k), \ pour\ k = 1, 2, 3..., n-1,
$$

donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= -L^{-1}N_n(S_n+v_0)-u_0+L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n}H_i\right)-u_0+L^{-1}(f(r)) \\ &= -\sum_{i=0}^{n}L^{-1}(H_i)-u_0+L^{-1}(f(r)) \\ &= v_1+v_2+...+v_n-L^{-1}(H_n). \end{aligned}$$

Puis, à partir de (2.16), on peut trouver

$$v_{n+1}=-L^{-1}(H_n).$$

■

Ce résultat est identique à celui de (2.15) obtenu par la méthode HPm

Théorème 2 *Soit B un espace de Banach*

1) $\sum_{i=0}^{\infty}v_i$ *converge vers $S\in B$, si*

$$\exists(0\leq\lambda<1)\ \textit{tel que}\ (\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\|v_n\|\leq\lambda\|v_{n-1}\|). \tag{2.20}$$

2) $S=\sum_{i=1}^{\infty}v_i$ *vérifie*

$$S=-L^{-1}N(S+v_0)-u_0+L^{-1}(f(r)). \tag{2.21}$$

Preuve. *1) on a :*

$$\|S_{n+1}-S_n\|=\|v_{n+1}\|\leq\lambda\|v_n\|\leq\lambda^2\|v_{n-1}\|\leq...\leq\lambda^{n+1}\|v_0\|$$

Pour $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq m$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_n-S_m\| &= \|(S_n-S_{n-1})+(S_{n-1}-S_{n-2})+...+(S_{m+1-}-S_m)\| \\ &\leq \|S_n-S_{n-1}\|+\|S_{n-1}-S_{n-2}\|+...+\|S_{m+1}-S_m\| \\ &\leq \lambda^n\|v_0\|+\lambda^{n-1}\|v_0\|+...+\lambda^{m+1}\|v_0\| \\ &\leq (\lambda^n+\lambda^{n-1}+...+\lambda^{m+1})\|v_0\| \\ &\leq (\lambda^{m+1}+...+\lambda^n+...)\|v_0\| \\ &\leq \lambda^{m+1}(1+\lambda+...+\lambda^n+...)\|v_0\| \\ &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda}\|v_0\| \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n,m\to\infty}\|S_n-S_m\|=0.$$

$(S_n)_{n\geq0}$, *est suite de Cauchy dans l'espace de Banach, et elle est convergente, c'est-à-dire :*

$$\exists S\in B, avec:\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}v_n=S.$$

2) D'après (2.17), on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_{n+1} &= -L^{-1} \lim_{n\to\infty} N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1} \lim_{n\to\infty} N_n\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
S &= -L^{-1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)).
\end{aligned}$$

A partir de (2.18) et (2.12), pour $p = 1$, il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_i = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
S &= -L^{-1} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1} N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).
\end{aligned}$$

■

Lemme 1 *L'équation (2.21) est équivalente à :*

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \tag{2.22}$$

Preuve. *On écrit l'équation (2.21) comme suit :*

$$S + u_0 = -L^{-1} N(S + v_0) + L^{-1}(f(r)).$$

En appliquant l'opérateur L à l'équation précédente, on obtient :

$$L(S + u_0) = -N(S + v_0) + f(r).$$

Comme $u_0 = v_0$,

$$L(S + v_0) = -N(S + v_0) + f(r).$$

Soit

$$u = S + v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} v_i,$$

l'équation (2.22) devient l'équation d'origine. ■

La solution de l'équation (2.21) est la même que celle de la solution de

$$A(u) - f(r) = 0.$$

Définition 12 *Pour tout $i \in N$, on définit :*

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, \|v_i\| \neq 0 \\ 0, \|v_i\| = 0. \end{cases}$$

Dans le Théorème précédent $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers la solution exacte, lorsque $0 \leq \lambda_i < 1$.

Si v_i et v_i' sont obtenus par deux différentes homotopie, et $\lambda_i < \lambda_i'$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$ le taux de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ est supérieure à $\sum_{i=0}^{\infty} v_i'$.

Exemple 12 *On considère l'équation de Riccati suivante*:

$$\begin{cases} u' = 2u - u^2 + 1, t \geq 0, \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante : $u : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(1-p)(v' - u_0') + p(v' - 2v + v^2 - 1) = 0, p \in [0,1],\ t \in \Omega. \tag{2.24}$$

les solutions de l'équation (2.23), peuvent être écrites sous forme de série :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + ... \tag{2.25}$$

En remplaçant (2.25) dans (2.24) et en identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p, on obtient :

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0' = u_0' \\ p^1 &: v_1' + u_0' + u_0^2 - 1 = 0 \\ p^2 &: v_2' + 2v_0 v_1 = 0 \\ p^3 &: v_3' + v_1' + 2v_0 v_1 = 0 \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers termes de la solution sont données par :

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0 = t, \\ p^1 &: v_1 = \frac{1}{4}\left(-1 + e^t - 2t + 2t^2\right), \\ p^2 &: v_2 = \frac{1}{4}\left(t^2 - t^2 e^t + 2t^3\right), \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

En prenant $p = 1$, la solution approximative de l'équation (2.23) est donnée par :

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + ...$$

ce qui veut dire que :

$$u = t + \frac{1}{4}\left(-1 + e^t - 2t + 2t^2\right) + \frac{1}{4}\left(t^2 - t^2 e^t + 2t^3\right) + \ldots$$

D'autre part, après l'utilisation du développement de Taylor de e^t aux voisinage de zéro, la solution de l'équation (2.23)est donnée par :

$$\begin{aligned} u &= t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \ldots \\ u &= 1 + \sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right). \end{aligned}$$

2.2 Méthode de décomposition d'Adomian (ADM) :

La décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique développée par le mathématicien américain George Adomian ([1]) durant la seconde partie du XX^e siècle. Elle est utilisée pour la résolution large éventail des problèmes dont les modèles mathématiques impliqués, à savoir les problèmes algébriques, différentiels, intégrales, intégro différentielle, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et les équations aux dérivées partielles. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré et donne la solution sous forme d'une série infinie, qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe ([6]).([15])

2.2.1 Description de la méthode :

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$Fu = g, \tag{2.26}$$

où F représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaires et g est une fonction connue. La partie linéaire est généralement décomposée en $L+R$, où L est un opérateur différentiel facilement inversible et R représente le reste de l'opérateur linéaire. Dans ces conditions, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lu + Ru + Nu = g, \tag{2.27}$$

avec N un opérateur différentiel non-linéaire.

Nous pouvons écrire l'équation (2.27) comme suit :

$$Lu = g - Ru - Nu. \tag{2.28}$$

En multipliant l'équation (2.28) par L^{-1}, on obtient :

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu). \tag{2.29}$$

où $L^{-1} = \iint ... \int (.)(\mathrm{dt})^n$ est l'inverse de l'opérateur L.
Puisque

$$L^{-1}(Lu) = u - \varphi,$$

et φ est la constante de l'intégration.
Par conséquent, l'équation (2.29) devient :

$$u = \varphi + L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu). \tag{2.30}$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \tag{2.31}$$

puis à décomposer le terme non-linéaire Nu sous forme d'une série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{2.32}$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_{1,...,} u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, ... \tag{2.33}$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance.
En substituant les équations (2.31) et (2.32) dans (2.30), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \varphi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{2.34}$$

D'où on déduit

$$\begin{array}{c} u_0 = \varphi + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{array} \tag{2.35}$$

Il est à noter que cette identification n'est pas unique mais c'est la seule qui permet de définir explicitement les u_n. La relation (2.35) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de u_0, u_1, ..., u_n.

En pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (sauf pour des cas très particulier). Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée ϕ_n, sous la forme de série tronquée :

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \ n \geq 1.$$

La question qu'on peut poser est comment déterminer les $(A_n)_n \geq 0$ et à quelles conditions la méthode converge.

2.2.2 Les polynômes d'Adomian :

Définition 13 *Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \end{cases} \tag{2.36}$$

La formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suivante [Adomian, 1997] :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0), \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1\frac{\partial}{\partial u}N(u_0), \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2\frac{\partial}{\partial u}N(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0), \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3\frac{\partial}{\partial u}N(u_0) + u_1u_2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0) + \frac{1}{3!}u_1^3\frac{\partial^3}{\partial u^3}N(u_0), \\ & . \\ & . \\ & . \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v, n)N^{(v)}(u_0), \ n \geq 1,$$

où $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par m!) des v termes u_i dont la somme des indices i est égales à n, m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

2.2.3 Convergence de la méthode ADM :

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des condition suffisantes de convergence. Toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N.([15])

En effet, de la relation (2.35) on déduit :

Théorème 3

$$\text{Si} \sum_{n\geq 0} A_n < +\infty \ alors \ \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty, \tag{2.37}$$

et réciproquement.

Les premières preuves de convergence ont été citées par Yves Cher ruault. Elles sont basées sur la méthode du point fixe.

Donnons les grandes lignes de la démonstration (voir [Cherruault,1990] pour plus de détails).

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (2.26) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$

avec $S_0 = 0$ et vérifiant la relation récurrente suivante :

Théorème 4

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n),\ \ S_0 = 0,\ \ u_0 = g,\quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.38}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 5 *Si l'opérateur N est une contraction (c'est-à-dire vérifie$\|N\| < \delta < 1$) alors*

la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0+S)$ avec $S_0 = 0, n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.
Preuve. voir ([15]) [KHALOUTA Ali] ∎

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$vers S.
Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n\geq 0} A_n = \sum_{n\geq 1} u_n,$$

et comme$\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente d'après le Théorème précédent , on a alors le résultat suivant :

Corollaire 1 *Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est solution de l'équation*

$$Fu = g.$$

Exemple 13 *Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante*

$$\begin{cases} u' - e^u = 0, t \geq 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}, \tag{2.39}$$

On a

$$Lu = u'\text{et}\quad Nu = e^u$$

avec $L = \frac{d}{dt}(.)$.
L^{-1}représente une simple intégration de 0 à t. On trouve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{2.40}$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$\begin{aligned}
A_0 &= e^{u_0}, \\
A_1 &= u_1, \\
A_2 &= u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2, \\
A_3 &= u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3 \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad .
\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0, \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = t, \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = \frac{t^2}{2}, \\
u_3 &= -L^{-1}(A_2) = \frac{t^3}{3}, \\
u_4 &= -L^{-1}(A_3) = \frac{t^4}{4},
\end{aligned}$$

D'aprés (2.40), on a la solution de (2.39) sous forme d'une série infinie donnée par :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + ...$$

2.3 Transformée de Laplace :

La méthode de la transformée de Laplace est un outil puissant utilisé pour résoudre les équations différentielles et intégrales. La transformée de Laplace change les équations différentielles et les équations intégrales en équations polynomiales qui peuvent être facilement résolu, et donc en utilisant la transformée de Laplace inverse donne le solution de l'équation donnée, [22]).

Définition 14 *La transformée de Laplace d'une fonction $f(x)$, pour $x \geq 0$, est définie par*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx, \tag{2.41}$$

où s est un réel et $\mathcal{L}$ est appelé l'opérateur de transformée de Laplace.

2.3.1 Condition suffisante d'existence de $\mathcal{L}\{f(x)\}$:

Si $f(x)$ à des discontinuités infinies ou si elle est rapidement grande, alors $F(s)$ n'existe pas. De plus, on a besoin d'un condition important d'existence de la transformée de Laplace $F(s)$ est que $F(s)$ doit disparaitre lorsque s tend vers l'infini. Cela signifie que :

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

En d'autres termes, les conditions d'existence d'une transformée de Laplace $F(s)$ de toute fonction $f(x)$ sont :

1. $f(x)$ est continue par morceaux sur l'intervalle d'intégration $0 \leq x < A$ pour tout A positif,

2. $f(x)$ est d'ordre exponentiel e^{ax} lorsque $x \to \infty$, (i.e) soit $|f(x)| \leq Ke^{ax}$, $x \geq M$, où a est une constante réelle, K et M sont des constantes positives.

2.3.2 Propriétés des transformées de Laplace :

A partir de la définition de la transformée de Laplace donnée dans (2.41), on peut facilement écrire les propriétés suivantes des transformées de Laplace :

1). Multiple constante :

$$\mathcal{L}\{af(x)\} = a\mathcal{L}\{f(x)\}$$

a est une constante. Par exemple :

$$\mathcal{L}\{4e^x\} = 4\mathcal{L}\{e^x\} = \frac{4}{s-1}.$$

2). Propriété de linéarité :

$$\mathcal{L}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{L}\{f(x)\} + b\mathcal{L}\{g(x)\},$$

a, b sont des constantes. Par exemple :

$$\mathcal{L}\{4x + 3x^2\} = 4\mathcal{L}\{x\} + 3\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s^3}.$$

3). Multiplication par x :

$$\mathcal{L}\{xf(x)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(x)\} = -F'(s).$$

Par exemple :

$$\mathcal{L}\{x\sin x\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin x\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Pour résoudre des problèmes de valeur initiale ou équations intégrales, nous utilisons le tableau suivant de transformées de Laplace élémentaires ci-dessous :

Tableau 1.1 Transformées de Laplace élémentaires

$f(x)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$
c	$\frac{c}{s}$, $s > 0$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $s > 0$,Re $n > -1$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$cosax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

4). Transformées de Laplace des dérivées :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f'(x)\right\} &= s\left\{f(x)\right\} - f(0), \qquad (2.42)\\
\mathcal{L}\left\{f"(x)\right\} &= s^2\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} - sf'0) - f(0),\\
\mathcal{L}\left\{f'"(x)\right\} &= s^3\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} - s^2f(0) - sf(0) - f(0),\\
&.\\
&.\\
&.\\
\mathcal{L}\left\{f^n(x)\right\} &= s^n\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} - s^{n-1}f(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

2.3.3 Le produit de convolution :

Définition 15 *Soient* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$.

Le produit de convolution de deux fonctions f et g qu'on le noté $f * g$ *est défini par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-\tau)g(\tau)d(\tau).$$

Pour la transformée de Laplce, on a les propriétés suivants :

1) Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions, telles que f admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s)$ et g admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}(s)$.

Alors

$$\mathcal{L}\left\{f * g(x)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s).\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}(s).$$

2) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s) = F(s)$.

Alors

$$\mathcal{L}\left\{x^n f(x)\right\}(s) = (-1)^n F^n(s).$$

2.3.4 Transformée de Laplace inverse :

Définition 16 *Si la transformée de Laplace de* $f(x)$ *est* $F(s)$, *alors on dit que La transformée inverse de Laplace de* $F(s)$ *est* $f(x)$.*donnée par :*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i.\infty}^{\gamma+i.\infty} \exp(sx)F(s)ds,$$

où $\mathcal{L}^{-1}$ est l'opérateur de la transformée de Laplace inverse.

Remarque 1 *La propriété de la linéarité est également valable pour la transformée de Laplace inverse. Cela signifie que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{aF(s) + bG(s)\right\} &= a\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} + b\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} \qquad (2.43)\\
&= af(x) + bg(x).
\end{aligned}$$

Notez que les systèmes symboliques informatiques tels que Maple et Mathematica peut être utilisé pour trouver la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse.

La méthode de la transformée de Laplace et la méthode de la transformée de Laplace inverse seront illustrés à l'aide d'exemple suivant.

Exemple 14 *Résoudre le problème à valeurs initiales suivants :*

$$y" + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1. \tag{2.44}$$

En prenant les transformées de Laplace des deux côtés de l'ODE (2.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(x)\} &= Y(s), \\ \mathcal{L}\{y"(x)\} &= s^2\mathcal{L}\{y(s)\} - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - s - 1. \end{aligned}$$

et en utilisant les conditions initiales dans l'ODE (2.44), on trouve :

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}. \tag{2.45}$$

Pour déterminer la solution $y(x)$ on prend alors la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ aux deux côtés de la dernière équation on aura :

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}. \tag{2.46}$$

Par conséquent la solution est de la forme :

$$y(x) = \cos x + \sin x. \tag{2.47}$$

CHAPITRE 3

Applications

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et la transformée de Laplasse (LT) pour résoudre des équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, aussi une équation intégro-différentielle de type volterra .

3.1 La méthode HPM pour une équation différentielle ordinaire non linéaire

Exemple 15 *([15])Soit une équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

On cherche la solution avec la méthode HPM, nous pouvons construire l'homotopie suivante : $u : \Omega \ (\times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$(1-p)(v' - u_0') + p(v' + v^2) = 0, p \in [0,1]\,,\ t \in \Omega, \tag{3.2}$$

avec $u_0 = 1$.La solution de léquation(3.1), peuvent être écrites sous forme de la série :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + ... \tag{3.3}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p, on obtient :

$$\begin{aligned} p^0 &: \ v_0' = u_0', \\ p^1 &: \ v_1' = -u_0 - v_0^2, v_1(0) = 0, \\ p^2 &: \ v_2' = -2v_0 v_1, v_2(0) = 0, \\ & \quad . \\ & \quad . \\ & \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers termes de la solution sont donnés par :

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0 = 1, \\ p^1 &: v_1 = -t, \\ p^2 &: v_2 = t^2, \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (3.1) est de la forme :

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + ... = 1 - t + t^2 - ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}, \; -1 < t < 1 \end{aligned}$$

3.2 La méthode ADM pour une équation différentielle ordinaire non linéaire :

Exemple 16 *On considère l'équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

On a

$$Lu = u', \text{ et } Nu = u^2$$

avec $L(.) = \frac{d}{dt}(.)$
L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t. On trouve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{3.5}$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, \\ A_1 &= 2u_0u_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1, \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = -t, \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = t^2, \\
u_3 &= -L^{-1}(A_2) = -t^3, \\
u_4 &= -L^{-1}(A_3) = t^4, \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad .
\end{aligned}$$

D'aprés (3.5) on a la solution de (3.4) donnée par :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}.
\end{aligned}$$

3.3 La méthode de transformée de Laplace pour une équation différentielle non linéaire :

Exemple 17 *résoudre le problème à valeur initiale suivante :*

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, t \in \Omega \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

En prenant les transformèes de Laplace des deux côtés de l'ODE (3.6), et en utilisant la condition initiale, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u'\} + \mathcal{L}\{u^2\} &= 0 \\
sU(s) - 1 + \mathcal{L}\{u^2\} &= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u^2\}.$$

Remarque 2 *Dans ce cas, il n'est pas possible de résoudre directemen. Nous utilisons donc les polynômes d'Adomian pour $u^2(t)$ et en utilisant la relation du recurence on trouve*

$$\begin{aligned}
U_0(s) &= \frac{1}{s}, \\
\mathcal{L}\{u_{k+1}\}(t) &= -\frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_k\}, k \geq 0.
\end{aligned}$$

Pour déterminer la solution u, on prend alors la transformée inverse de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ aux deux côtés de la $1^{ère}$ partie du dernière équation, et en utilisant la relation de récurrence on obtien :t

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= -t, \\ u_2 &= t^2, \\ u_3 &= -t^3, \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Cela donne à son tour la solution par :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}, -1 < t < 1$$

3.4 La méthode HPM pour les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires :

3.4.1 Les équations de Schrödinger :

Les équations de Schrödinger se produisent dans divers domaines de la physique, y compris l'optique non linéaire, l'hydrodynamique, physique des plasmas, supraconductivité et mécanique quantique. Par exemple, l'équation linéaire de Schrodinger discute de l'évolution temporelle d'une particule libre, et les équations de Schrodinger non linéaires cubiques présentent des types de solutions. De nombreuses méthodes sont généralement utilisées pour traiter les équations non linéaires telles que la méthode de diffusion inverse, la méthode de tanh, les formes bilinéaires de Hirota, Transformation de Backlund, méthode d'itération variationnelle (VIM) [[12]] et d'autres méthodes également, ([20]),([19]).

3.4.2 L'équation linéaire de Schrödinger :

Exemple 18 *Premièrement, nous considérons l'équation linéaire de schrödinger*

$$u_t + iu_{xx} = 0, \;\; u(x,0) = 1 + \cosh(2x), \tag{3.7}$$

où $u(x,t)$ est une fonction complexe et $i^2 = -1$.
D'après (2.3), une homotopie $(x,t,p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$ peut être construit comme suit :

$$(1-p)(v_t - u_{0,t}) + p(v_t + iv_{xx}) = 0, \tag{3.8}$$

$p \in [0,1], (x,t) \in \Omega$ où $u_0(x,t) = v_0(x,0) = u(x,0)$ et $u_{0,t} = \frac{\partial u_0}{\partial t}$
Essayons maintenant d'obtenir une solution de (3.7) sous la forme

$$v(x,t) = v_0(x,t) + pv_1(x,t) + p^2 v_2(x,t) + ... \tag{3.9}$$

En remplaçant (3.9) par (3.8), et en assimilant les termes à les puissances identiques de p, donne :

$$\begin{aligned} p^0 &: \quad v_{0,t}=0, \\ p^1 &: \quad v_{1,t}+iv_{0,xx}=0, \\ p^2 &: \quad v_{2,t}+iv_{1,xx}=0, \\ & \quad . \\ & \quad . \\ & \quad . \\ p^n &: \quad v_{n,t}+iv_{n-1,xx}=0, \\ n &= \quad 3,4,5... \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$v_i(x,0)=\begin{cases} 1+\cosh(2x), i=0 \\ 0, i=1,2,3,..., \end{cases} \tag{3.11}$$

La solution du système (3.10), avec les conditions initiales (3.11), peut être facilement obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} v_0(x,t) &= 1+\cosh(2x), \\ v_1(x,t) &= -4it\cosh(2x), \\ v_2(x,t) &= -8t^2\cosh(2x), \\ v_3(x,t) &= \frac{32}{3}it^3\cosh(2x), \\ v_4(x,t) &= \frac{32}{3}t^4\cosh(2x), \\ v_5(x,t) &= -\frac{128}{15}it^5\cosh(2x), (3.5) \end{aligned} \tag{3.12}$$

De cette manière, les autres composants peuvent être facilement obtenu. Remplacer (3.12) par (2.6) donne

$$u(x,t)=1+\cosh(2x)\left(1-4it-8t^2+\frac{32}{3}it^3+\frac{32}{3}t^4-\frac{128}{15}it^5-...\right).$$

Par conséquent, la solution exactes de (3.7)

$$u(x,t)=1+\cosh(2x)e^{-4it},$$

est facilement obtenu en utilisant le développement en série de Taylor de e^{-4it}.

3.4.3 L'équation non linéaire de Schrödinger :

Exemple 19 *On considère d'abord léquation de Schrodinger cubique non-linéaire*

$$iu_t+u_{xx}+m\left|u\right|^2u=0, u(x,0)=e^{nix}, \tag{3.13}$$

où m et n sont des constantes.

On construit l'homotopie $(x,t,p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$ qui satisfait

$$(1-p)(iv_t - iu_{0,t}) + p(iv_t + v_{xx} + m\,|v|^2\,v) = 0, \quad p \in [0,1], (x,t) \in \Omega, \tag{3.14}$$

ou

$$(1-p)(iv_t - iu_{0,t}) + p(iv_t + v_{xx} + mv^2\bar{v}) = 0, \quad p \in [0,1], (x,t) \in \Omega, \tag{3.15}$$

où

$$u_0(x,t) = v_0(x,0) = u(x,0), |v|^2 = v\bar{v}$$

et v̄ est le conjugué de v.

Supposons que la solution en série de (3.15) et son conjugué aient les formes suivantes :

$$v = v_0(x,t) + pv_1(x,t) + p^2 v_2(x,t) + ..., \tag{3.16}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0(x,t) + p\bar{v}_1(x,t) + p^2\bar{v}_2(x,t) + ... \tag{3.17}$$

Nous remplaçons (3.16) et (3.17) par (3.15), et en assimilant les termes à les puissances identiques de p, on a :

$$\begin{array}{lcl} P^0 & : & iv_{0,t} = 0, \\ P^1 & : & iV_{1,t} + v_{0,xx} + mv_0^2\bar{v}_0 = 0, \\ p^2 & : & iv_{2,t} + v_{1,xx} + mv_0^2\bar{v}_1 + 2mv_0v_1\bar{v} = 0, \\ p^3 & : & iv_{3,t} + v_{2,xx} + mv_0^2\bar{v}_2 + m\bar{v}_0(v_1^2 + 2v_0v_2) + 2mv_0v_1\bar{v}_1 = 0, \\ p^4 & : & \begin{array}{c} iv_{4,t} + v_{3,xx} + mv_0^2\bar{v}_3 + 2m\bar{v}_0(v_0v_3 + v_1v_2) + \\ m\bar{v}_1(v_1^2 + 2v_0v_2) + 2mv_0v_1\bar{v}_2 = 0, \end{array} \\ p^5 & : & iv_{5,t} + v_{4,xx} + mv_0^2\bar{v}_4 + m\bar{v}_0(v_2^2 + 2v_0v_4 + 2v_1v_3) + \end{array} \tag{3.18}$$

$$2m\bar{v}_1(v_0v_3 + v_1v_2) + \bar{v}_2(v_1^2 + 2v_0v_2) + 2mv_0v_1\bar{v}_3 = 0.$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$v_i(x,0) = \begin{cases} e^{nix}, \ i = 0, \\ 0\ , i = 1,2,3,... \end{cases} \tag{3.19}$$

La solution du système (3.18), avec la condition initiale (3.19), s'obtient facilement comme suit :

$$\begin{aligned} v_0(x,t) &= e^{nix}, \\ v_1(x,t) &= i(m-n^2)te^{nix}, \\ v_2(x,t) &= -\frac{1}{2}(m-n^2)^2t^2e^{nix}, \\ v_3(x,t) &= -\frac{i}{6}(m-n^2)^3t^3e^{nix}, \\ v_4(x,t) &= \frac{1}{24}(m-n^2)^4t^4e^{nix}, \\ v_5(x,t) &= \frac{i}{120}(m-n^2)^5t^5e^{nix}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

Les autres composants peuvent également être facilement obtenus.
en remplaçant (3.20) par (2.6) donne

$$u(x,t) = e^{nix}\left(1 + i(m-n^2)t - \frac{1}{2}(m-n^2)^2t^2 - \frac{i}{6}(m-n^2)^3t^3 - \frac{1}{24}(m-n^2)^4t^4 + \frac{i}{120}(m-n^2)^5t^5 -\right.$$

Par conséquent, la solution exacte de (3.13) est de la forme :

$$u(x,t) = e^{i(nx+(m-n^2)t)},$$

est facilement obtenu en utilisant le développement en série de Taylor de $e^{i(m-n)^2t}$.

3.5 La méthode ADM pour les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires :

3.5.1 Léquation linéaire de Schrödinger :

Exemple 20 *Considérons léquation linéaire de Schrödinger*

$$\begin{cases} u_t + iu_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 1 + \cosh(2x) \end{cases} \tag{3.21}$$

où $u(x,t)$ est une fonction complexe et $i^2 = -1$.
D'aprés (3.21) :

$$L_t u = -iL_{xx}u, \tag{3.22}$$

L^{-1}représente une simple intégration de 0 à t.
On trouve

$$\begin{aligned} L^{-1}L_t u &= -iL^{-1}L_{xx}u \\ u(x,t) - u(x,0) &= -iL^{-1}L_{xx}u(x,t)dt, \end{aligned} \tag{3.23}$$

par conséquent, léquation (3.23) devient :

$$u(x,t) = u(x,0) - iL^{-1}L_{xx}u(x,t)dt, \tag{3.24}$$

La méthode d'Adomian consiste a rechercher la solution sous forme d'une serie :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{3.25}$$

En substitusant léquation (3.25) dans (3.24), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) - iL^{-1}L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)dt, \tag{3.26}$$

D où on déduit

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) \\ u_{k+1} = -iL^{-1}L_{xx}u_k(x,t)dt \\ k = 0,1,2,.... \end{cases}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= 1+\cosh(2x),\\
u_1(x,t) &= -4it\cosh(2x),\\
u_2(x,t) &= -8t^2\cosh(2x),\\
u_3(x,t) &= \frac{32}{3}it^3\cosh(2x),\\
u_4(x,t) &= \frac{32}{3}t^4\cosh(2x),\\
&\;\;.\\
&\;\;.\\
&\;\;.
\end{aligned}$$

D àprès (3.25) on a la solution de (3.21) donnée par :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1+\cosh(2x)\left(1-4it-8t^2+\frac{32}{3}it^3+\frac{32}{3}t^4-\ldots\right)\\
&= 1+\cosh(2x)e^{-4it}.
\end{aligned}$$

3.5.2 L'équation non linéaire de Schrödinger :

Exemple 21 *nous considérons léquation non linéaire de Schrödinger :*

$$\left\{\begin{array}{c} iu_t+u_{xx}+m\left|u\right|^2u=0 \\ u(x,0)=e^{nix} \end{array}\right. , \tag{3.27}$$

où m et n sont des constantes.
D àprés (3.27) on a

$$iu_t = u_{xx}+m\left|u\right|^2u. \tag{3.28}$$

L^{-1} représente une simple intégrale de 0 à t.
on trouve :

$$L_t^{-1}L_tu = iL_t^{-1}L_{xx}u+iL_t^{-1}m\left|u\right|^2u,$$

donc :

$$u(x,t)-u(x,0) = iL^{-1}L_{xx}u(x,t)+iL^{-1}mu^2\bar{u}, \tag{3.29}$$

par conséquent léquation (3.29) devient :

$$u(x,t) = u(x,0)+iL^{-1}L_{xx}u(x,t)+imL^{-1}A_n. \tag{3.30}$$

La méthode d'Adomian consiste a recherche la solution sous forme d'une série :

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t). \tag{3.31}$$

En substituant léquation (3.30) dans (3.31), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + iL^{-1}L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)dt + imL^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{3.32}$$

Doù on déduit :

$$\begin{aligned} u_{0(x,t)} &= u(x,0), \\ u_{k+1} &= iL^{-1}L_{xx}u_k(x,t)dt + imL^{-1}A_k, k \geq 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

le terme non linéaire $N(u(x,t))$ est donné par :

$$N(u) = u^2\bar{u} \tag{3.34}$$

Compte tenu de (3.34), et en suivant les techniques formelles utilisées auparavant pour dériver polynômes adomiens, on peut facilement en déduire que $N(u)$a les polyômes suivants :

$$\begin{aligned} A_o &= u_0^2\bar{u}_0, \\ A_1 &= 2u_ou_1\bar{u}_0 + u_0^2\bar{u}_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2\bar{u}_0 + u_1^2\bar{u}_0 + 2u_0u_1\bar{u}_1 + u_0^2\bar{u}_2, \\ A_3 &= 2u_0u_3\bar{u}_0 + 2u_1u_2\bar{u}_0 + 2u_0u_2\bar{u}_1 + u_1^2\bar{u}_1 + 2u_ou_1\bar{u}_2 + u_0^2\bar{u}_3. \end{aligned} \tag{3.35}$$

En conjonction avec (3.33) et (3.35), nous pouvons facilement déterminer les premières composantes par :

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= e^{nix}, \\ u_1(x,t) &= i(m-n^2)te^{nix}, \\ u_2(x,t) &= -\frac{1}{2}(m-n^2)^2t^2e^{nix}, \\ u_3(x,t) &= -\frac{i}{6}(m-n^2)^3t^3e^{nix}, \\ u_4(x,t) &= \frac{1}{24}(m-n^2)^4t^4e^{nix}, \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

Les auters composantes peuvent également être facilement obtenus.

par (3.31), on a la solution de (3.27) sous forme d'une série infinien donnée par :

$$u(x,t) = e^{nix}\left\{i(m-n^2)t - \frac{1}{2}(m-n^2)^2t^2 - \frac{i}{6}(m-n^2)^3t^3 + \dots\right. .$$

Par conséquent , la solution éxacte de (3.27) est donée par :

$$u(x,t) = e^{i(nx+(m-n^2)t)}.$$

est facilement obtenu en utilisant le développement en série de Taylor de

$$e^{i(m-n^2)t}$$

3.6 La méthode de transformée de Laplace pour une équation aux dérivées partielle linéaire :

Léquation linéaire de Schrödinger :

Exemple 22 *nous considérons léquation linéaire de schrödinger :*

$$\begin{cases} u_t + iu_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 1 + \cosh(2x). \end{cases} \tag{3.36}$$

En prenant les transformèes de Laplace des deux côtés de l'EDP :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_t\} + i\mathcal{L}\{u_{xx}\} &= 0, \\ sU(x,s) - U(x,0) + i\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) &= 0, \\ \text{On obtient} &: \\ i\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) + sU(x,s) &= 1 + \cosh(2x) \end{aligned}$$

On cherche d'abord la solution générale $U_G(x,s)$ de l'équation (3.36), on a :

$$i\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) + sU(x,s) = 0. \tag{3.37}$$

Alors nous avons l'équation caractéristique auxiliaire suivante :

$$\begin{aligned} ir^2 + s &= 0, \\ r &= \pm\sqrt{is}. \end{aligned}$$

On applique la méthode deWronskien :
Donc

$$U_{1,2}(x,s) = e^{\pm\sqrt{is}x}$$

Alors la solution générale $U_G(x,s)$ de l'équation (3.36) est donnée par :

$$U_G(x,s) = C_1 e^{\sqrt{is}x} + C_2 e^{-\sqrt{is}x}.$$

D'autre part on a le Wronskien :

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

D'après les calculs, on trouve :

$$W = -2\sqrt{is}$$

Nous avons :

$$\lambda_1' = \frac{-u(x,0)y_2}{W} \text{ et } \lambda_2' = \frac{u(x,0)y_1}{W}$$

$$\lambda_1' = -\frac{(1+\cosh(2x))e^{-\sqrt{is}x}}{-2\sqrt{is}} \text{ et } \lambda_2' = \frac{(1+\cosh(2x))e^{-\sqrt{is}x}}{-2\sqrt{is}}.$$

Donc on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{e^{-\sqrt{is}x}}{-2is} + \frac{1}{4\sqrt{is}}\left[\frac{e^{(2-\sqrt{is})x}}{2-\sqrt{is}} - \frac{e^{-(2+\sqrt{is})x}}{2+\sqrt{is}}\right] + C_1,$$

et

$$\lambda_2 = \frac{e^{-\sqrt{is}x}}{-2is} - \left[\frac{e^{(2+\sqrt{is})x}}{2+\sqrt{is}} - \frac{e^{-(2-\sqrt{is})x}}{2-\sqrt{is}}\right] + C_2.$$

Aprés les calculs, on trouve :

$$\lambda_1 U_1 = \frac{1}{-2is} + \frac{1}{4\sqrt{is}}\left[\frac{e^{2x}}{2-\sqrt{is}} - \frac{e^{-2x}}{2+\sqrt{is}}\right] + C_1 e^{\sqrt{is}x},$$

et

$$\lambda_2 U_2 = \frac{1}{-2is} - \frac{1}{4\sqrt{is}}\left[\frac{e^{2x}}{2+\sqrt{is}} - \frac{e^{-2x}}{2-\sqrt{is}}\right] + C_2 e^{\sqrt{is}x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} U(x,s) &= \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = \frac{i}{s} + \frac{1}{2\sqrt{is}}\left(\frac{1}{2-\sqrt{is}} - \frac{1}{2+\sqrt{is}}\right) + U_G, \\ &= \frac{i}{s} + \frac{1}{4-is}\cosh(2x) + U_G \end{aligned}$$

On obtient :

$$U(x,s) = \frac{i}{s} + \frac{i}{s+4i}\cosh(2x) + U_G$$

Si $C_1 = C_2 = 0$ la solution devient :

$$U(x,s) = \frac{i}{s-(-4i)}\cosh(2x) + \frac{i}{s} \tag{3.38}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de l'équation (3.38), on trouve que la solution de (3.36) est :

$$u(x,t) = ie^{-4it}\cosh(2x) + i$$

3.7 La méthode HPM pour une équation intégro-différentielle de type Volterra :

Dans ce qui suit, nous présentons la méthode de perturbation d'homotopie pour gérer les équations intégro- différentielles de type Voltera de second type. On peut supposer un intégro-différentielle équation du second type de Volterra donnée par :

$$u''(x) = f(x) + x_0 + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, u(0) = a_0, u'(0) = a_1, \tag{3.39}$$

En intégrant deux fois les deux membres de l équation (3.39) de 0 à x, on trouve :

$$u(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{3.40}$$

où les conditions initiales $u(0)$ et $u'(0)$ sont utilisés, et L^{-1} est un double opérateur intégral.

Exemple 23 *utiliser la méthode HPM pour résoudre léquation itégro-différentiielle de type Voltera suivante :*

$$u" = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, u(0) = 1, u'(0) = 1. \tag{3.41}$$

En appliquant l'opérateur intégral double L^{-1}défini par :

$$L^{-1}(.) = \int_0^x\int_0^x (.)\, dxdx$$

aux deux côtés de (3.41), c'est-à-dire en intégrant les deux côtés de (3.41) deux fois de 0 à x, et en utilisant les conditions initiales données, nous obtenons :

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{3.42}$$

remplaçant $u = p^0u_0 + p^1u_1 + p^2u_2 + ...$dans (3.42) On a :

$$p^0u_0 + p^1u_1 + p^2u_2 + ... = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\int_0^x (x-t)(p^0u_0 + p^1u_1 + p^2u_2 + ...)(t)dt$$

En assimilant les terme à les puissances identique de p, on obtient :

$$\begin{aligned}
p^0 &: \quad u_0(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3, \\
p^1 &: \quad u_1(x) = L^{-1}\int_0^x (x-t)u_0(t)dt, \\
&= \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7, \\
& \quad . \\
& \quad . \\
& \quad .
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Cela donne la solution sous forme de série :

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + ...$$

et cela converge ver la solution exacte :

$$u(x) = e^x.$$

3.8 La méthode ADM pour résoudre une équation intégro-différentielle :

La méthode de décomposition d'Adomian donne la solution en un nombre infinisérie de composants qui peuvent être déterminés de manière récurrente. La série obtenue peut donner la solution exacte si elle existe. Sinon, la série donne une approximation de la solution qui donne un niveau de précision élevé.Sans perte de généralité, on peut supposer une équation intégro-différentielle de Volterra du second type donnée par :

$$u''(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, u(0) = a_0, u'(0) = a_1. \tag{3.43}$$

En intégrant deux fois les deux membres de (3.43) de 0 à x conduit à

$$u(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1} f(x) + L^{-1} \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{3.44}$$

où les conditions initiales $u(0)$ et $u'(0)$ sont utilisés, et L^{-1} est un double opérateur intégral. On utilise alors la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \tag{3.45}$$

dans les deux côtés de (3.44) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \int_0^x K(x,t) \left(\sum u_n(t)\right) dt, (4) \tag{3.46}$$

ou équivalent à :

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... &= a_0 + a_1 x + L^{-1} f(x) + L^{-1} \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt \quad (3.47) \\ &+ L^{-1} \int_0^x K(x,t)u_1 dt + L^{-1} \int_0^x K(x,t)u_3(t)dt \quad (3.48) \end{aligned}$$

Pour déterminer les composantes : $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x)$, de la solution $u(x)$, on fixe la relation de récurrence

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + a_1 x + L^{-1}(f(x)), \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1} \int_0^x K(x,t)u_k(t)dt, k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.49}$$

où la composante zéro $u_0(x)$ est définie par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral de (3.47). Après avoir déterminé les composantes $u_i(x)$, $i \geq 0$, la solution $u(x)$ de (3.43) est alors obtenue sous forme d'une série. En utilisant (3.45), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

$\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ est généralement utilisé pour approximer la solution $u(x)$.

Exemple 24 *Soit l'équation intégro-différentielle de type Volterra*

$$u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, u(0) = 1, u'(0) = 1. \tag{3.50}$$

En appliquant l'opérateur d'intégral double L^{-1} définit par :

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx,$$

aux deux côtés de (3.50), c'est-à-dire en intégrant les deux côtés de (3.50) deux fois de 0 à x, et en utilisant les conditions initiales données, nous obtenons :

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{3.51}$$

En utilisant la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

dans les deux côtés de (3.51) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\int_0^x (x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt, \tag{3.52}$$

et en utilisant la relation de récurrence (3.47) on obtien :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^2, \\ u_1(x) &= \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7, \\ & . \\ & . \\ & . \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Cela donne la solution sous forme d'une série :

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

et cela converge vers la solution exacte :

$$u(x) = e^x.$$

3.9 La méthode de transformée de Laplace pour une équation intégro-différentielle :

Exemple 25 *Résoudre l'équation intégro-différentielle de type Volterra en utilisant la méthode de la transformée de Laplace*

$$u"(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, u(0) = 1, u'(0) = 1. \tag{3.53}$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation (3.53) donne :

$$L\{u"(x)\} = L\{1\} + L\{x\} + L\{x-t\} * u(x), \tag{3.54}$$

Par conséquent :

$$s^2u(s) - su(0) - u'(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}u(s). \tag{3.55}$$

En utilisant la condition initiale donnée et en résolvant pour $U(s)$ nous trouvons

$$u(s) = \frac{1}{s-1}. \tag{3.56}$$

En prenant la transformée inverse de Laplace inverse des deux côtés de (3.56), la valeur exacte de la solution est donnée par :

$u(x) = e^x$.

CONCLUSION

Il existe de nombreuses méthodes analytiques efficaces pour résoudre des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles non-linéaires.Dans ce travail on s'intéresse à certaines de ces méthodes représentée par la méthode de perturbation d'homotopie et la méthode de décomposition d'Adomian, qui facilitent la solution des équations en la donnant sous forme d'une série qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe. D'autre part on a également étudié la méthode de la transformée de Laplace, ce dernier donne la solution sous la forme d'un polynôme. On a appliqué ces méthodes aux mêmes exemples pour voir lequelle est la meilleure, mais cela n'a pas été possible car cela nécessite d'étudier la convergence de chaque méthode séparèment. On peut conclure, que les méthodes proposées sont très puissantes et efficaces pour trouver des solutions approximatives et analytiques pour des équations différentielles et aux dérivées partielles non-linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathe matics. J. Math. Anal. Appl, 135(2) :501–544, 1988. 22

[2] G. Adomian, Solving Frontier Problem of Physics. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[3] Z. Ayatia et J. Biazar, On the convergence of homotopy perturbation me thod. J. Egyp. Math. Soc., 23 :424–428, 2015. 16

[4] J. Biazara et H. Ghazvini, Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations. Nonlinear Anal. Real World Appl., 10(5) :2633–2640, 2009. 16

[5] Y. Cherruault. (1989) Convergence of Adomian's Method. Kybernetes, 18, 31-38.

[6] Y. Cherruault, G. Saccomandi, et B. Some. New results for convergence of adomian's method applied to integral equations. Math. Comput. Model., 16(2) :85–93, 1992. 22

[7] A. Ghorbani, Beyond Adomian polynomials : He polynomials. Chaos Solitons Fractals, 39 :1486–1492, 2009. 17

[8] L. Jin, Homotopy perturbation method for solving partial differential equations with variable coefficients. Int. J. Contemp. Math. Sci., 3(28) :1395–1407, 2008. 15

[9] J. H. He, Phys. Lett. A 350, 87 (2006).

[10] J. H. He.1, Homotopy perturbation technique. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 178(3) :257–262, 1999 15

[11] J. H. He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. Appl. Math. Comput, 156(2) :527–539, 2004. 6, 15

[12] J. H. He.3,Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique.Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 34, 708 (1999). 33

[13] A Merad, S Hadid Malaya,Analytical solution of non-integer extra-ordinary differential equation via adomian decomposition method, Journal of Matematik 4 (01), 126-135(2016) 6

[14] Samir Hadid *1 and Ahcene Merad 2, Homotpy Analysis Method for Solving Fractional Differential Equations Australian Journal of Basic and Applied Sciences, X(X) Month 2015, Pages : 1-5 6

[15] KHALOUTA Ali, Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques, received June 19, 2008. 15, 22, 24, 25, 30

[16] A Merad, Adomian decomposition method for solution of parabolic equation to non-local conditions Int. J. Contemp. Math. Sciences 6 (30), 1491-1496(2011)

[17] A Bouziani, A Merad,The Laplace transform method for one# dimensional hyperbolic equation with purely integral conditions Romanian journal of Mathematics and Computer Science 3 (2), 191(2013) 13

[18] A Merad, A Bouziani,Laplace transform technique for pseudoparabolic equation with nonlocal condition Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics 5 (1), 59-64(2013) 13

[19] Mohamed M. Mousaa and Shahwar F. Ragabb, pplication of the Homotopy Perturbation Method to Linear and 33

Nonlinear Schrodinger Equations.Z. Naturforsch.63a,140 – 144 (2008) ; received September 8, 2007.

[20] A Necib, A Merad Kragujevac Journal of Mathematics 44 (2), 251-272(2020) 33

[21] M. A. Noor. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 9, 141 (2008). 6

[22] Abdul-majid Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications ; Saint Xavier, November 2011. 7, 14, 26

[23] Abdul-Majid Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Department of Mathematics Saint Xavier University Chicago,2009. 10, 13

[24] L. Xu,Variational iteration method : New developments and applications. Comput. Math. Appl. 54, 881–894 (2007).

6