Contrôle optimal d'un problemede Proie-Predateur

HAKKAR Naima

République Algérienne démocratique et populaire

Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de Nature et de la Vie

Département de mathématiques et Informatique

Mémoire

Pour le l'obtention du Diplôme de MAGISTERE

Spécialité

Mathématiques Appliquées

Contrôle optimal d'un problème de chaleur

Présenté par : HAKKAR NAIMA

Sous la direction de : OMRANE ABDENNEBI

JURY

AYADI ABDELHAMID	Professeur	Univ. Oum El Bouaghi	(Président)
BOUZIT MOHAMED	MC (A)	Univ. Oum El Bouaghi	(Examinateurs)
ALIOUCHE ABDELKRIME	MC (A)	Univ. Oum El Bouaghi	(Examinateurs)
OMRANE ABDENNEBI	MC HABILITE	Univ. Antilles-Guyane	(Encadreur)

Soutenu le : 26 - 09 - 2012

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclair le bon chemin

Je remercie mon encadreur Mr OMRANE ABDENNEBI qui, malgré ses charges ,m'a assurée de son entière disponibilité pendant toute la durée de mon travail qu'il a dirigé avec beaucoup d'expérience et de patience. Qu'il soit assuré de ma reconnaissance et de mon respect indéfectible

Je remercie Mr AYADI ABDELHAMID qui m'a honorée de sa présence et qui a accepté de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie Mr BOUZIT MOHAMED et ALIOUCHE ABDELKRIME les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mes travaux de recherche.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles ,associées à certaines bonnes .
classes d'opérateur,fournissent des modéles mathématiques .
de quantité de phénoménes :
-physiques : lois de conservation,thermodynamique,électrostatique.
électromagnétisme,dynamique des gaz,plasmas,mécanique.
-mécaniques : élasticité,plasticité,plasticité,mécanique des fluides,...
-chimiques : réaction-diffussion,combustion,....
-économiques : modéles macroéconomiques,gestion de stocks,...
-domaines scientifiques pluridisciplinaires : météorologie, biomédecine.
ingénierie avec mention particuliére pour les industies spatiales
et nucléaires.
(voir J.-P.Puel,par exemple,Cours de DEA).
Les principaux opérateurs aux dérivées partielles rencontrés sont :
-L'opérateur de Laplace pour les phénomènes dz diffusion ou de
potentiel électrostatique.
-L'opérateur de la chaleur .
-L'opérateur des ondes pour les phénoménes de propagation.
IL existe d'autres opérateures fondamentaux moins faciles à écrire :
opérateur de Stokes (mécanique des fluides), opérateur de l'élasticité,
opérateur de Maxwell(électromagnétisme), opérateur de
Schodinger,...etc.
Nous nous intéressons dans ce mémoire de Magistère à L'utilisation de
L'opérateur de chaleur avec des conditions aux limites
de type Neumann.
Avec le controle optimal,on cherche à étudier la possibilité d'agir
sur un systéme afin qu'il fonctionne dans un but désiré,
ou (au mieux),(aumoindre cout) etc. C 'est l'objet de
la théorie du controle,la variable d'action

étant appelée le contrôle (souvent aussi la commande),
l'objectif à atteindre étant parfois assez difficile
à définir (par exemple comment exprimer
précisément ce qu'on cherche à obtenir pour
un écoulement autour d'un aile d'avion...).
Nous allons ici développer un peu le domaine imporant de
la théorie du contrôle,en particulier du
contrôle optimal.
Considérons un exemple simple .
On considère l'équation de la chaleur posée dans un domaine
ouvert bornéω
de Rn (de frontière Γ)
et sur un intervalle de temps (0,T).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &= f + Bv \qquad \text{dans } Q \times (0,T), && (1)\\
y &= 0 \qquad \text{sur } \Gamma \times (0,T), && (2)\\
y(0) &= 0. && (3)
\end{aligned}
$$

Ici f est une donnée, v est le contrôle,B est un opérateur linéaire
continu de 1'espace des contrôles dans 1'espace des données.
Sous des hypothèses raisonnables,en particulier sur les classes
de fonctions considérées,on montre que pour tout contrôle v
il existe une solution unique $y = y(v)$ qui
sera appellée (état du système).
On considère ensuite une (fonction cout) J(v) qui sera donnée
dans les chapitres suivants,avec une donnée Z_d.
Le problème de contrôle optimal est de trouver un contrôle
y tel que :
J(y)=min J(v)
L'ensemble des contrôles(admissbles) peut etre un espace ou un
sous ensemble convexe fermé.
Les quations àétudier sont : existence et unicité d'un contrôle
optimal et caractérisation de celui-ci par un système d'optimalité(SO).

Résumé

Dans ce travail, nous étudions le contrôle optimal d'une équation différentielle elliptique puis parabolique. Nous appliquons ensuite la technique à l'étude du contrôle optimal de l'équation parabolique de la Chaleur.
Dans le premier chapitre, on étudie l'existence de solution pour l'équation de la chaleur dans les espaces de Sobolev. Ensuite nous donnons les premiers théorèmes sur le contrôle optimal, qui correspondent aux cas généraux elliptique et parabolique dans les chapitres 2 et 3. Enfin au chapitre 4, on donne le système d'optimalité caractérisant le contrôle optimal dans le cas où l'espace des contrôles admissibles est l'espace de Hilbert $U_{ad} = L^2(\Omega\times]0,T[)$.

Abstract

In this work, we study the optimal control of elliptic and parabolic differential equations. We then apply the technique to the study of the optimal control of the parabolic heat equation.
In the first chapter, we study the existence of a solution to the heat equation in the Sobolev spaces. Then, we give the first theorems on the optimal control, which correspond to the general elliptic and parabolic cases in chapters 2 and 3. Finally in chapter 4, we givethe optimality system characterizing the optimal control in the case where the admissible set of controls is the Hilbert space $U_{ad} = L^2(\Omega\times]0,T[)$.

Table des matières

Chapitre 1

Etude de l'équation de la Chaleur

1.1 Définitions et propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de frontière Γ. On note par Q le cylindre $Q = \Omega \times]0, +\infty[$ de frontière $\Sigma = \Gamma \times]0, +\infty[$. C'est la frontière latérale du cylindre Q. Et considérons le problème suivant. Trouver une fonction

$$\begin{array}{rcccl} u(.,.) & : & \Omega \times [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & u(x,t) \end{array}$$

solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{dans } Q, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{dans } \Omega. \tag{1.3}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace $x_1, \cdots, x_N$, et t est la variable de temps, $u_0(x)$ est une fonction donnée.
L'équation (1.1) est appelée équation de la chaleur car elle-modélise la distribution de la températeure u dons le domaine Ω à l'instant t, l'équation de la chaleur et ses variantes interviennent dans de très nombreux phénomènes de diffusion, l'équation de la chaleur est l'éxemple le plus simple d'une équation parabolique.
L'équation (1.2) est la condition aux limites de Dirichlet ; elle peut-être remplacée par la condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma. \tag{1.4}$$

(η est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ) ou bien par l'une quelconque des conditions aux limites. La condition (1.2) exprime que l'on maintient le bord Γ de Ω à une température nulle ; la condition (1.4) exprime que le flux de chaleur à travers Γ est nul.

L'équation (1.3) est la condition initiale ou donnée de cauchy.

Nous allons résoudre le problème (1.1)-(1.3) en considérant $u(x,t)$ comme une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans un espace H ,o'u H est un espace de fonctions qui dépendent seulement de x ; par exemple $H = L^2(\Omega)$, ou bien $H = H_0^1(\Omega)$, etc...

La notation $u(t)$ désignera un élément de H,c'est-à-dire la fonction $x \mapsto u(x,t)$ à t fixé. Ce point de vue permet d'obtenir très facilement une solution du problème (1.1)-(1.3) grâce au théorème de Hille-Yosida.

On suppose dans tout ce chapitre que Ω est de classe C^∞ avec Γ borné (mais cette hypothèse peut être affaiblie considérablement si l'on s'intéresse seulement à des solution faibles).

1.2 Existence de solution pour la Chaleur

Théorème 1.1. *On suppose que $u_o \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une fonction $u(x,t)$ unique vérifiant (1.1)-(1.3) et*

$$u \in C([0,\infty[; L^2(\Omega)) \cap C(]0,\infty[; H^2(\Omega) \cap H_1^0(\Omega)) \tag{1.5}$$

$$u \in C^1(]0,+\infty[; L^2(\Omega)). \tag{1.6}$$

De plus

$$u \in C^\infty(\Omega \times [\xi,\infty[) \qquad \forall \xi \gg 0 \tag{1.7}$$

Enfin $u \in L^2(0,\infty; H^1, 0(\Omega))$ et l'on a

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall T \gg 0. \tag{1.8}$$

Preuve - On applique la théorie de Hille-Yosida dans l'espace $H = L^2(\Omega)$. Pour cela on introduit l'opérateur non-borné $A : D(A) \subset H \mapsto H$ défini par :

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$Au = -\Delta u.$$

On utilise la condition aux limites (1.2) dans la définition du domaine de A. On va vérifier que A est maximal monotone et autoadjoint. On va alors en déduire l'existence d'une solution unique de (1.1)-(1.6).

i) A est monotone. En effet si $u \in D(A)$ on a

$$(Au, u)_{L^2} = \int (-\Delta u)u = \int |\nabla u|^2 \geq 0$$

ii) A est maximal monotone. Il suffit de montrer que $\mathbb{R}(I + A) = H = L^2$.

Or on sait que pour tout $f \in L^2$ il existe $u \in H^2 \cap H_0^1$ unique solution de l'équation $u - \Delta u = f$

iii) A est autoadjoint : Il suffit de vérifier que A est symétrique. Or si $u, v \in D(A)$ on a

$$(Au, v)_{L^2} = \int (-\Delta u)v = \int \nabla u \nabla v$$

$$(u, Av)_{L^2} = \int u(-\Delta v) = \int \nabla u \nabla v$$

et par suite $(Au, v) = (u, Av)$.

D'autre part. $D(A^l) \in H^{2l}(\Omega)$ avec injection continue : plus precisement on a

$$D^l = u \in H^{2l}(\Omega) : u = \Delta u = ...\Delta^{l-1} = 0 \quad sur \quad \Gamma.$$

On sait que la solution u de (1.1)-(1.3) appartient à

$$C^k(]0, +\infty[; D(A^l)) \quad \forall k, \forall l$$

et donc $u \in C^k(]0, +\infty[; H^{2l}(\Omega)) \quad \forall k, \forall l.$

Il en resulte que

$$u \in C^k(]0, +\infty[; C^k(\Omega)) \qquad \forall k.$$

Prouvons (1.8). On multiplie (1.1) par u et on intègre sur $\Omega\times]0, T[$. On remarque que $u(t)$ est differentiable sur $]0, +\infty[$ mais pas sur $[0, +\infty[$. Considerons la fonction $\phi(t) = \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$, alors ϕ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (d'après (1.6)) et

$$\phi'(t) = (u(t), \frac{du}{dt}(t))_{L^2} = (u, \Delta u)_{L^2} = -\int |\nabla u|^2.$$

Par consequent, si $0 < \varepsilon < T < +\infty$, on a

$$\phi(T) - \phi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{T} \phi'(t)\, dt = -\int_{\varepsilon}^{T} |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, dt$$

quand $\varepsilon \mapsto 0$, $\phi(\varepsilon) \mapsto \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}$ et on obtient déduit (1.8).

Remarque 1.1. *Sous des hypothèses supplémentaires sur u_0, la fonction (solution) u devient plus réeguliere au voisinage de $t = 0$, et on pourra considérer la solution définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ fermé en zéro.*

1.3 Existence par la méthode variationnelle

Lorsque l'on a l'existence de u réalisant le minimum sur U_{ad} sans nécessairement unicité, alors l'une quelconque des inégalités variationnelles obtenues caractérise l'ensemble des solutions dans U_{ad} réalisant le minimum.
Dans les applications au contrôle, tout élément $u \in U_{ad}$ réalisant le minimum est dit contrôle optimal.

Théorème 1.2 (Existence et unicité)**.** *On suppose que la forme $\pi(u, v)$, non nécessairement symétrique vérifie :*

$$\pi(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geq c\|v_1 - v_2\|^2,\ c > 0, \quad \forall v_1, v_2 \in U_{ad}. \tag{1.9}$$

Alors il existe u unique dans U_{ad} vérifiant

$$\pi(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in U_{ad}, \tag{1.10}$$

où L est une forme linéaire donnée sur U.

Preuve - Soient u_1 et u_2 deux solutions éventuelles ; donc

$$\begin{array}{rcl} \pi(u_1, v - u_1 & \geq & L(v - u_1) \quad \forall\ v \in U_{ad} \\ \pi(u_2, v - u_2) & \geq & L(v - u_2) \quad \forall\ v \in U_{ad}. \end{array}$$

Prenons dans $v = u_2$ (resp $v = u_2$) et additionons, alors :

$$-\pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq 0.$$

Donc, d'après (1.9), $\pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, ce qui donne :

$$u_1 = u_2.$$

Pour la dèmonstration de l'existence, on applique le théorème précédent avec $\pi(u,v) = (u,v)_U$, produit scalaire sur U. Donc, pour g donnée dans U, il existe $w = S(g) \in U_{ad}$, unique tel que

$$(w, v-w)_U \geq (g, v-w)_U - p[\pi(g, v-w) - L(v-w)] \quad \forall\, v \in U_{ad},$$

où $p > 0$ fixé quelconque.

Si u est un point fixe dans U_{ad} de l'application $g \mapsto S(g)$ ainsi définie,alors u satisfait à (1.10), on aura donc démontré le théorème si l'on montre que l'on peut choisir $p > 0$ de façon que $g \mapsto S(g)$ soit une contraction sur U_{ad}.

La forme $v \mapsto \pi(g,v)$ étant linéaire et continue sur peut s'écrire :

$$\pi(g,v) = (Bg, v)_U, \qquad B \in \pounds(U;U), \tag{1.11}$$

et

$$(w, v-w)_U \geq (g - pBg, v-w)_U + pL(v-w) \quad \forall v \in U_{ad}. \tag{1.12}$$

Soit $v_1 = S(g_1)$; d'aprés (1.12) appliqué à g_1,w_1 :

$$(w_1, v-w_1)_U \geq (g_1 - pBg_1, v-w_1)_U + L(v-w_1) \quad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{1.13}$$

Prenant $v = w_1$ (resp. $=$ w) dans (1.12) (resp. (1.13)) et ajoutant, il vient

$$-\|w - w_1\|_U^2 \geq -((I - pB)(g - g_1), w - w_1)_U$$

d'où $\|w - w_1\|_U \leq \|(I - pB)(g - g_1)\|_U$. Mais

$$\|(I - pB)g\|_U^2 = \|g\|_U^2 + p^2\|Bp\|_U^2 - 2p(Bg, g)_U.$$

Or d'après (1.11), $(Bg,g)_U = \pi(g,g)$ et donc, remplaçant g par $g - g_1$:

$$\|(I - pB)(g - g_1)\|_U^2 \leq (I + p^2\|B\|^2)\|g - g_1\| - 2p\pi(g - g_1, g - g_1).$$

On applique cela avec $g, g_1 \in U_{ad}$ et grâce à (1.9), on en déduit

$$\|(I - pB)(g - g_1)\|_U^2 \leq (I + p^2\|B\|^2 - 2pc)\|g - g_1\|^2$$

ce qui joint à (1.11) donne finalement :

$$\|S(g) - S(g_1)\|_U \leq (I + p^2\|B\|^2 - 2cp)^{\frac{1}{2}}\|g - g_1\|_U$$

$$g, g_1 \in U_{ad}$$

Choisissant $p > 0$ de façon que $I + p^2\|B\|^2 - 2cp < 1$, on obtient le résultat désiré.

Théorème 1.3. *on suppose que $a(u, v)$ forme bilinéaire continue sur V, coercive :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall\, v \in V.$$

Pour f donnée dans V', il existe $y \in V$ unique tel que :

$$a(y, \psi) = (f, \psi) \quad \forall\, \psi \in V. \tag{1.14}$$

Preuve - Le changement de notation dans est justfié ci-dessous. On peut interpréter (1.14) de la faÃ§on suivante : la forme $v \mapsto a(u, v)$ étant linéaire et continue sur V peut s'écrire :

$$a(u, v) = (Au, v), \quad Au \in V' \tag{1.15}$$

ce qui définit

$A \in \pounds(V, V')$

Donc $a(u, v)$ équivant à $Ay = f$.

On peut maintenant formuler les premiers problèmes de Contrôle au chapitre suivant.

Chapitre 2

Contrôle optimal : Cas elliptique

2.1 Premières définitions

On se donne l'espace de Hilbert U des contrôle et un opérateur B avec

$$B \in \pounds(U, V')$$

On se donne un système (physique, mécanique, etc ..) gouverné par l'opérateur A donné par (1.4). Pour chaque contrôle $u \in U$, l'état du systéme est donné par y solution de :

$$Ay = f + Bu, \qquad y \in V.$$

La solution y (appelée état du ystème) dépend de u (contrôle) : à chaque fois que l'on a u, il sort une solution $y(u)$. Donc :

$$Ay(u) = f + Bu, \qquad y(u) \in V \tag{2.1}$$

équation qui définit bien $y(u)$ de faÃ§on unique, d'après le théorème 1.3. On définit maintenant l'observation du système. C'est :

$$z(u) = Cy(u)$$

où $C \in \pounds(\mathcal{V}, \ell)$, ℓ étant un espace de Hilbert. Et on définit en toute généralité :

$$N \in \pounds(U, U), \quad N \text{ hermitien défini positif,}$$

c'est à dire :

$$(Nu, u)_U \geq v\|u\|_U^2, \qquad v > 0.$$

A toute fonction contrôle $u \in U$ on associe le coût :

$$J(u) = \|Cy(u) - z_d\|_\ell^2 + (Nu, u)_U$$

où z_d donné dans ℓ. Soit alors U_{ad} un ensemble convexe fermé non vide de U. Le problème de contrôle est alors :

$$\text{trouver} \quad \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

2.2 Théorème d'existence du contrôle optimal

On étudie le cas général où $N \neq 0$ (le cas $N = 0$ s'en déduira). Nous annonçons les premiers résultats sur les problèmes de contrôle. D'après ce qui précède, l'application $u \mapsto y(u)$ est affine de $U \mapsto V$. On a alors le théorème :

Théorème 2.1. *L'état du système ètant donné par (2.1), il existe un élément $u \in U_{ad}$ et un seul tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v). \tag{2.2}$$

Preuve - Ecrivons alors $J(u)$ sous la forme

$$J(u) = \|C(y(u) - y(0)) + Cy(0) - z_d\|_\ell^2 + (Nu, u)_U$$

Si l'on pose

$$\pi(u, v) = (C(y(u) - y(0)), C(y(v) - y(0))_\ell + (Nu, v)_\ell$$

et

$$L(v) = (z_d - Cy(0), C(y(v) - y(0))_\ell.$$

Alors, la forme $\pi(u, v)$ est bilinéaire continue sur U et l'on a :

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \|z_d - Cy(0)\|_\ell^2.$$

Puisque $\|C(y(v) - y(0))_\ell^2\|$ est évidemment ≥ 0, on a :

$$\pi(v, v) \geq v\|v\|_U^2 \qquad \forall v \in U$$

ce qui permet l'application du théorème 1.3 qui prouve l'existence d'un minimum.

Définition 2.1. *L'élément u de U_{ad} réalisant le minimum (2.2) s'appelle le contrôle optimal.*

Remarque 2.1 (Le cas $N = 0$). *Si $N = 0$, alors on a en general $\pi(v, v) \geq 0$. Il peut arriver que $\|C(y(v) - y(0))\|_\ell^2$ soit coercif.*

On déduit le résultat suivant lorsque $N = 0$.

Corollaire 2.1. *on suppose que $N = 0$. On suppose aussi que U_{ad} est borné. Alors il existe un sous-ensemble X non vide de U_{ad} tel que :*

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \qquad \forall u \in X.$$

L'esemble X est fermé convexe.

Définition 2.2. *L'ensemble des $u \in X$ s'appele l'ensemble des contrôles optimaux.*

2.2.1 Remarque importante

D'après les résultats précédents et pour la suite, les problème à résoudre sont maintenant les suivants :

- écrire les équation fournissant le contrôle optimal u ou bien l'ensemble des contrôles optimaux,
- étudier ces équations pour tâcher d'en tirer le maximum d'information sur le contrôle optimal (ou l'ansemble X)

La seconde étape est plus difficile et mathématiquement plus intéressante que la première étape. Elle ne peut cependant être abordée que dans des cas concrets.

2.3 Système d'optimalité (S.O)

Si u est contrôle optimal alors :

$$J'(u).(v-u) \geq 0 \qquad \forall\, v \in U_{ad}$$

et réciproquement, comme A est un isomorphisme de V sur V' (d'après le théorème 1.3), on peut écrire :

$$y(u) = A^{-1}(f + Bu),$$

d'où $y'(u) * \psi = A^{-1}B\psi$, donc

$$y'(u).(v-u) = A^{-1}B(v-u) = y(v) - y(u)$$

et ceci équivaut (en divisant par 2) à :

$$(Cy(u) - z_d, C(y(v) - y(u)))_\ell + (Nu, u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

On introduit maintenant le dual ℓ' de ℓ et on pose $A = A_\ell$ = isomorphisme canonique de ℓ sur ℓ'. Alors, $C^\star \in \pounds(\ell', V')$ désignant l'adjoint de C, on a pour φ et ψ dans V :

$$(C^\star AC\psi, \varphi)$$

(dualité V',V) = $(AC\psi, C\varphi)$ (dualité ℓ',ℓ) = $(C\psi, C\varphi)_\ell$ de sorte l'on a :

$$(C^\star A(Cy(u) - z_d), y(v) - y(u)) + (Nu, v - u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

On transforme à l'aide de l'état adjoint, soit $A^\star \in \pounds(V; V')$ l'adjoint de A. Il est associé à la forme bilinéaire

$$(A^\star\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) = a(\psi, \varphi), \qquad \varphi, \psi \in V,$$

et $A^\star$ est un isomorphisme de V sur V'. Pour un contrôle $v \in U$ on définit l'état (dit) adjoint $p(v) \in V$ par :

$$A^\star p(v) = C^\star A(Cy(v) - z_d).$$

Transformons maintenant comme suit :
$(A^\star p(u), y(v) - y(u)) = (C^\star A(Cy(u) - z_d), y(v) - y(u)) = (par$ definition de l'adjoin A $^\star)(p(u), Ay(v) - Ay(u)) = (d'aprs(1.10))$ (p(u),B(v - u)) = (B $^\star p(u), v - u)_U$,
où $B^\star \in \pounds(V; U')$ est l'adjoin de B, U' étant le dual de U. Si l'on pose :

$$A_U = \text{ isomorphisme canonique de } U \text{ sur } U',$$

on a, pour $v \in U$,$\psi \in V$: (ψ, Bv) (dualité V,V') = $(B^\star\psi, v)$ (dualité U',U) = $(A^{-1}B^\star\psi, v)_U$, de sorte que l'on a :

$$(A_U^{-1}B^\star p(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}$$

ou encore à :

$$(B^\star p(u) + A_U Nu, v - u) \geq 0$$

(la parenthèse désignant isi le produit scalaire U' et U), $\qquad \forall v \in U_{ad}$.
On peut résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant :

Théorème 2.2. *On suppose que (1.1) a lieu. La condition nécessaire et suffisante pour que u soit contrôle optimal, la fonction cout étant donnée par (1.10),est que les équation suivantes soient satisfaites :*

$$Ay(u) = f + Bu, \tag{2.3}$$

$$A^{\star}p(u) = C^{\star}A(Cy(u) - z_d), \tag{2.4}$$

$$u \in U_{ad}, (A^{-1}B^{\star}p(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \qquad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{2.5}$$

De plus,

- *Si N vérifie (2.3), le contrôle optimal est unique (i.e. le système (2.3)-(2.5) admet une solution unique.*
- *Si $N = 0$ et U_{ad} est borné,le système (2.3)-(2.5) admet au moins une solution. L'ensemble des solutions correspond à une famille de contrôles optimaux formant un ensemble X convexe fermè de U_{ad}.*

Remarque 2.2. *On peut formuler l'équation (2.5) sous la forme (équivalente)*

$$(A_U^{-1}B^{\star}p(u) + Nu, u)_U = \inf_{v \in U_{ad}} (A_U^{-1}B^{\star}p(u) + Nu, v)_U.$$

(2.6)

Le problème est maintenant d'étudier le système (2.3)-(2.5). On a montré que $\frac{1}{2}J'(u) = B^{\star}p(u) + A_U Nu$. Supposons que U_{ad} = cone fermè convexe de sommet $\{0\}$.Alors (2.5)équivaut à $u \in U_{ad}$, tel que

$$(A_U^{-1}B^{\star}p(u) + Nu, v)_U \geq 0 \quad \forall\, v \in U_{ad},$$

et

$$(A_U^{-1}B^{\star}p(u) + Nu, u)_U = 0.$$

Chapitre 3

Contrôle optimal : Cas parabolique

3.1 Premières définitions et théorème de base

On utilise dans ce chapitre deux espaces de Hilbert V et H, avec V' le dual de V, H' le dual de H tel que

$$V \subset H \subset V'.$$

On définit ensuite la famille de formes bilinéaires continues sur V :

$$\varphi, \psi \mapsto a(t; \varphi, \psi)$$

pour chaque $t \in]0, T[$. Et enfin on suppose que pour tous φ, $\psi \in V$, la fonction $t \mapsto a(t; \varphi, \psi)$ est mesurable sur $]0, T[$ et que :

$$|a(t; \varphi, \psi)| \leq c\|\varphi\|\|\psi\|.$$

Alors, il existe λ tel que :

$$a(t; \varphi, \varphi) + \lambda|\varphi|^2 \geq \alpha\|\varphi^2\| \quad , \alpha \ > 0, \varphi \in V, t \in]0, T[.$$

On introduit maintenant l'espace L^2 des fonctions $t \to f(t)$ de $]0, T[\to V$, mesurables et telles que

$$\int_0^T \|f(t)\|^2 \, dt < \infty.$$

L'espace $L^2(0, T; V')$ se définit de la même façon, et on note :

$$A(T) \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); L^2(0, T, V'))$$

qui est pour le moment une fonction mesurable, qui satisfait à

$$\|A(t)f(t)\|_{V'} \leq c\|f(t)\|_V.$$

Si $f \in L^2$, on peut définir sa dérivée $\frac{df}{dt}$ en utilisant les distributions. Pour cela :

- On définit d'abord : $\mathcal{D}'(]0,T[;V) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0,T[);V)$: espace des distribtions sur $]0,T[$ à valeurs dans V.
- On définit la dérivée $\dfrac{df}{dt}$ par :

$$\varphi \to \frac{df}{dt}(\varphi) = -f(\frac{d\varphi}{dt}).$$

Ce qui donne une application linéaire continue de $\mathcal{D}(]0,T[) \to V$.

3.2 Propriétés des équations paraboliques

On désigne par U l'espace de Hilbert (des fonctions contrôles) et on pose

$$B \in \mathcal{L}(U; L^2(0,T;V')).$$

Soient f et y_0 données, $f \in L^2(0,T;V')$, $y_0 \in H$. Avec les hypothèses de la section précédente, on désigne par $y(v)$ la solution de :

$$\begin{aligned} \frac{dy(v)}{dt} + A(t)y(v) &= f + Bu, \\ y(v)|_{t=0} &= y_0, \\ y(v) &\in L^2(0,T;V), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$y(v)$ est une fonction dépendant de t, x : $t, x \to y(v)(t,x)$ que l'on notera

$$y(v) = y(t,x;v).$$

La fonction $y(v)$ est l'état du système. L'observation est donnée par

$$z(v) = Cy(v), C \in \mathcal{L}(W(0,T);H).$$

On se donne

$$\mathrm{N} \in \mathcal{L}(U;U), \quad \mathrm{N} \text{ hermitien définie positive :}$$

(Nu,u)$_U \geq \alpha \|u\|_U^2 \quad \alpha > 0$.La fonction coût est donnée par

$$J(v) = \|Cy(v) - z\|_H^2 + (Nv, v)_H.$$

On se définit ensuite U_{ad} = ensemble convexe fermé de U et on cherche le contrôle optimal réalisant :

$$\inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

3.3 Existence et unicité du contrôle optimal

Théorème 3.1. *Si $\pi(u, v)$ est une forme bilinéaire continue symétrique sur U et π est coercif sur U si*

$$\pi(v, v) \geq c\|v\|^2, \quad \forall\, v \in U \quad c > 0, \tag{3.2}$$

alors, il existe un élément u et un seul dans U_{ad} tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

Preuve - Montrons l'existence. Soit $v_n \in U_{ad}$ une suite minimisante :

$$J(v_n) \mapsto \inf_{v \in U_{ad}} J(v). \tag{3.3}$$

D'après ce qui précède on a :

$$J(v) \geq c\|v\|^2 - c_1\|v\| \tag{3.4}$$

(les c_i dèsignant des constantes). Il résulte de (3.3) et (3.4) que

$$\|v_n\| \leq \text{ constante.} \tag{3.5}$$

D'après (3.5) on peut extraire de v_n une sous-suite $v_{\supseteq}$ telle que $v_k \mapsto w$ dans U faible.
Comme U_{ad} est fermé convexe, il est faiblement fermé. ceci implique que $w \in U_{ad}$.
Mais la fonction :

$$v \mapsto \pi(v, v)$$

est semi-continue inférieurement (s.c.i) pour la topologie faible de U, et la fonction $v \mapsto L(v)$ est continue pour la topologie faible. Donc, $v \mapsto J(v)$ est s.c.i et donc :

$$\lim inf J(v_k) \geq J(w) \tag{3.6}$$

et

$$w \in U_{ad} \qquad \text{et} \quad J(w) \leq \inf_{v \in U_{ad}} J(v). \tag{3.7}$$

Donc nécessairement

$$J(w) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v),$$

et l'on peut prendre $u = w$ dans l'énoncé.
Montrons maintenant l'unicité. La fonction $v \mapsto \pi(v, v)$ est strictement convexe, c'est-a-dire :

$$\pi((1-\theta)v_1 + \theta v_2, (1-\theta)v_1 + \theta v_2) \leq (1-\theta)\pi(v_1, v_1) + \theta\pi(v_2, v_2)$$

si $\theta \in]0, 1[$, sauf si $v_1 = v_2$). Donc aussi $v \mapsto J(v)$ si l'on a u_1 et u_2 réalisent le minimum de J sur U_{ad} , alors U_{ad} étant convexe :

$$(\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in U_{ad}$$

et

$$J(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)) \leq \inf_{v \in U_{ad}} J(v),$$

sauf si $u_1 = u_2$, ce qui est donc nècessairement le cas et montre l'unicité.

3.4 Remarques

Considérons $\pi(u, v) = (u, v)$ comme le produit scalaire dans U, $L(v) = (g, v)_U$ et g donné dans U.
Alors

$$J(v) = \|g - v\|_U^2 - \|g\|_U^2$$

et donc l'unique élément u de U réalisant $\inf J(v)$ est caractérisé par

$$\|g - u\|_U \leq \|g - v\|_U \quad \forall\, v \in U_{ad}$$

u étant la projection de g sur U.

3.5 Analyse du Théorème d'existence

Une analyse des hypothéses intervenant dans la démonstation présédent conduit à la remarque suivante :

Remarque 3.1. *Le théorème est vrai si l'on suppose la forme bilinéaire $\pi(u, v)$ définie sur $U_{ad} \times U_{ad}$ et vérifiant la coercivité (3.2) pour tout $v \in U_{ad}$. Le fait que $v \mapsto J(v)$ soit une forme quadratique n'intervient pas de façon importante.*

D'autres propriťés peuvent être citées :
Si $v \mapsto J(v)$ une fonction de $U_{ad} \mapsto \mathbb{R}$, telle que

$$J(v) \mapsto +\infty \quad \text{si} \quad \|v\| \mapsto +\infty, \quad v \in U_{ad}, \tag{3.8}$$

$$v \mapsto J(v) \qquad \text{est s.c.i.} \tag{3.9}$$

Alors il existe $u \in U_{ad}$ tel que

$$J(u) = \inf_{v} J(v).$$

Cette propriété s'étend même aux fonctions $v \mapsto J(v)$ définies sur $U_{ad} \subset U$. Lorsque U est un espace de Banach par exemple réflexif, et sous les seules hypothéses (3.8) et (3.9), il n'y a plus nécessairement unicité de u. Il y a par contre unicité si l'on suppose que $v \mapsto J(v)$ est strictement convexe.
On finit ce chapitre par la remarque suivante :

Remarque 3.2. *L'hypothése (3.8) n'intervient que pour montrer que toute suite minimisante est bornée.Elle est donc inutile si l'on suppose que l'ensemble U_{ad} est borné.*

Chapitre 4

Application à l'équation de la Chaleur

4.1 Position du problème

On s'intéresse au contrôle optimal de systèmes modélisés par des équations différentielles, en dimension finie. De tels systèmes sont de la forme :

$$Ax = f + Bu$$

où :
$x(t)$ est l'état du système et $u(t)$ est le contrôle vérifiant éventuellement certaines contraintes, le but est d'amener l'état du système à un certain état observé ou mesuré, en minimisant une fonction appelée : le coût.

Equation d'Euler-Lagrange

L'équation (ou condition) d'Euler, aussi appelée d'Euler-Lagrange, énonce, sous la forme d'une équation différentielle, une condition nécessaire d'extremum de la fonctionnelle J, fonction de fonctions, régissant un phénomène étudié :
Si le problème revient à étudier les variations d'une fonction y de la variable x sur un intervalle $[a, b]$, on est généralement conduit à minimiser (ou maximiser selon le phénomène étudié) une intégrale, de la forme :

$$J(u) = \int_{[a,b]} F(x, u)\, dx$$

et on montre que si u est un extrémum, alors on a l'inégalité de Euler-Lagrange suivante :

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{J(u) - J(u + \lambda v)}{\lambda} \right) \geq 0. \tag{4.1}$$

Notations Dans ce mémoire on note :

- La variable spatiale $x = (x_1, \cdots, x_d)$ désigne la variable géométrique,
- On a $x \in \Omega$, domaine ouvert de frontière Γ,
  t désigne la variable de temps. En général $t \in [0, T[$, $T > 0$,
- Le contrôle est noté u. Il est pris dans un espace U_{ad} (généralement hilbertien sur $\mathbb{R}$),
- L'ensemble U_{ad} (ensemble des contrôles admissibles) est convexe fermé de U qui lui est un espace de Hilbert.
- L'état du système est noté $y(u)$,
- L'observation est notée $z(v)$,
- La fonction coût est notée $J(v)$.
- La fonction $p(v)$ est l'état adjoint.

4.2 Le contrôle optimal

Soit un contrôle u dans un ensemble U_{ad} (ensemble admissible) et l'état $y(u)$ du système à contrôler.

- l'observation $z(u)$ est une fonction de $y(u)$.

La fonction coût $J(u)$ définie à partir d'une fonction $\phi(z)$ numérique ≥ 0 sur l'espace des observations par $J(u) = \phi(z(u))$ on cherche u tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

L'objectif de ce travail est l'obtention des conditions nécéssaires et suffisantes pour le contrôle optimal u et son calcul, dans le cas d'une équation de la chaleur.
Si $\widetilde{u}$ est le contrôle optimal unique, la condition d'Euler-Lagrage (4.1) doit vérifier pour tout $\lambda \in]0, 1[$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{J(\widetilde{u} + \lambda v) - J(\widetilde{u})}{\lambda} \right) \geq 0 \qquad \forall\, v \in U_{ad}. \tag{4.2}$$

Calculons d'abord $J(\widetilde{u} + \lambda v) - J(\widetilde{u})$. Nous avons le Lemme :

Lemme 4.1. *Pour $\widetilde{u}$ et v de U_{ad} et pour $\lambda > 0$, nous avons :*

$$\Delta_\lambda = J(\widetilde{u} + \lambda v) - J(\widetilde{u}) = \langle y(\widetilde{u}) - z, \lambda y(v)\rangle + \frac{1}{2}\lambda^2\|y(v)\|^2 + \beta\langle \widetilde{u}, \lambda v\rangle + \frac{\beta}{2}\lambda^2\|v\|^2.$$

Preuve - On a en effet :

$$\begin{array}{rcl} J(\widetilde{u} + \lambda v) & = & \frac{1}{2}\|y(\widetilde{u} + \lambda v) - z\|^2 + \frac{\beta}{2}|\widetilde{u} + \lambda v\|^2 \\ \text{et} & & \\ J(\widetilde{u}) & = & \frac{1}{2}\|y(\widetilde{u}) - z\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\widetilde{u}\|^2. \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_\lambda & = & \frac{1}{2}\|y(\widetilde{u} + \lambda v) - z\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\widetilde{u} + \lambda v\|^2 - \frac{1}{2}\|y(\widetilde{u}) - z\|^2 - \frac{\beta}{2}|\widetilde{u}\|^2 \\ & = & \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) + \lambda y(v) - z, y(\widetilde{u}) + \lambda y(v) - z\rangle + \frac{\beta}{2}\langle \widetilde{u} + \lambda v, \widetilde{u} + \lambda v\rangle \\ & & -\frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, y(\widetilde{u}) - z\rangle - \frac{\beta}{2}\langle \widetilde{u}, \widetilde{u}\rangle \\ & = & \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, y(\widetilde{u}) + \lambda y(v) - z\rangle + \frac{1}{2}\langle \lambda y(v), y(\widetilde{u}) + \lambda y(v) - z)\rangle \\ & & +2 \times \frac{\beta}{2}\langle \widetilde{u}, \lambda v\rangle + \frac{\beta}{2}\lambda^2\langle v, v\rangle - \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, y(\widetilde{u})\rangle + \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, z\rangle \\ & = & \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, y(\widetilde{u})\rangle + \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, \lambda y(v)\rangle - \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, z\rangle \\ & & +\frac{1}{2}\langle \lambda y(v), y(\widetilde{u}) - z\rangle + \frac{1}{2}\langle \lambda y(v), \lambda y(v)\rangle + \frac{\beta}{2}\langle \widetilde{u}, \lambda v\rangle \\ & & +\frac{\beta}{2}\langle \lambda v, \widetilde{u}\rangle + \frac{\beta}{2}\lambda^2\langle v, v\rangle - \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, y(\widetilde{u})\rangle + \frac{1}{2}\langle y(\widetilde{u}) - z, z\rangle \\ & = & \langle y(\widetilde{u}) - z, \lambda y(v)\rangle + \frac{1}{2}\lambda^2\|y(v)\|^2 + \beta\langle \widetilde{u}, \lambda v\rangle + \frac{\beta}{2}\lambda^2\|v\|^2. \end{array}$$

Lemme 4.2. *Soit $\widetilde{u}$ le contrôle optimal. Alors pour tout $v \in U_{ad}$, nous avons l'identité :*

$$\lim_{\lambda \to 0}\left(\frac{J(\widetilde{u} + \lambda v) - J(\widetilde{u})}{\lambda}\right) = \langle y(\widetilde{u}) - z, y(v)\rangle + \beta\langle \widetilde{u}, v\rangle \geq 0. \tag{4.3}$$

Preuve - On divise par λ dans le lemme 4.1 précédent :

$$\frac{J(\widetilde{u} + \lambda v) - J(\widetilde{u})}{\lambda} = \langle y(\widetilde{u}) - z, y(v)\rangle + \frac{1}{2}\lambda\|y(v)\|^2 + \beta\langle \widetilde{u}, v\rangle + \frac{\beta}{2}\lambda\|v\|^2,$$

et on fait tendre λ vers 0. On obtient le résultat (4.3) avec l'inégalité puisque $\widetilde{u}$ est le minimum.

Proposition 4.1 (Etat adjoint)**.** *Soit $p(x,t)$ une fonction solution du problème de chaleur adjoint (le temps initial est T au lieu de 0) :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p & = & y(\widetilde{u}) - z & \textit{dans} \quad Q, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \eta} & = & 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ p(x,T) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Alors

$$\int_0^T \int_\Omega (y(\widetilde{u}) - z) y(v)\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega p\, v\, dxdt. \tag{4.5}$$

Preuve - On multiplie la première équation du système adjoint (4.4) et on intègre sur Q :

$$\int_0^T \int_\Omega (y(\widetilde{u}) - z) y(v)\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega (-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p) y(v)\, dx\, dt.$$

On utilise ensuite la formule de Green (intégration par parties) dans le membre de droite comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_Q (-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p) y(v)\, dx\, dt & = & \displaystyle -\int_Q \frac{\partial p}{\partial t} y(v)\, dx\, dt - \int_Q (\Delta p)\, y(v)\, dx\, dt \\ & = & A + B. \end{array}$$

Nous avons d'une part :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \displaystyle -\int_Q \frac{\partial p}{\partial t} y(v)\, dxdt \\ & = & \displaystyle -\int_\Omega p(T) y(T)\, dx + \int_\Omega p(0) y(0)\, dx + \int_Q \frac{\partial y}{\partial t} p\, dxdt \\ & = & \displaystyle 0 + \int_Q \frac{\partial y}{\partial t} p\, dxdt \end{array}$$

car

$$p(T) = y(0) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega.$$

D'autre part, on a :

$$B = -\int_Q (\Delta p)\, y\, dxdt = -\int_Q p\, (\Delta y)\, dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial p}{\partial \eta} y\, d\eta + \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial \eta} p\, d\eta.$$

Mais comme :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma,$$

alors on obtient :

$$B = -\int_Q (\Delta p)\, y\, dxdt = -\int_Q p\,(\Delta y)\, dxdt.$$

En conclusion

$$\int_Q \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p\right) y(v)\, dxdt = \int_Q \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y\right) p\, dxdt = \int_Q v\, p\, dxdt.$$

Ce qui est exactement (4.5).

4.3 Système d'optimalité pour l'équation de la Chaleur

Nous donnons une caractérisation du contrôle optimal $\widetilde{u}$ par un système d'optimalité.

Théorème 4.1 (Système d'Optimalité)**.** *Nous faisons l'hypothèse que $U_{ad} = L^2(Q)$. Alors, le contrôle optimal $\widetilde{u}$ est caractérisé par l'unique triplet $\{\widetilde{u}, y(\widetilde{u}), p(\widetilde{u})\}$, solution du système d'optimalité :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &=& \widetilde{u} & \textit{dans} \quad Q, \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p &=& y(\widetilde{u}) - z & \textit{dans} \quad Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} &=& 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \eta} &=& 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ y(x,0) &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ p(x,T) &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{4.6}$$

avec l'équation adjointe :

$$p + \beta \widetilde{u} = 0 \qquad \textit{dans} \quad Q. \tag{4.7}$$

Preuve - D'après (4.3), on obtient :

$$\langle y(\widetilde{u}) - z, y(v)\rangle + \beta\langle \widetilde{u}, v\rangle \geq 0.$$

Et d'après la proposition 4.1 on a :

$$\int_0^T \int_\Omega (y(\widetilde{u}) - z)y(v)\,dxdt = \int_0^T \int_\Omega p\,v\,dxdt.$$

ou bien :

$$\langle y(\widetilde{u}) - z, y(v)\rangle = \langle p, v\rangle.$$

Donc

$$\langle y(\widetilde{u}) - z, y(v)\rangle + \beta\langle \widetilde{u}, v\rangle = \langle p + \beta\widetilde{u}, v\rangle \geq 0.$$

Mais cette inégalité est est vraie quel que soit $v \in U_{ad}$. Et comme par hypothèse du théorème $U_{ad} = L^2(Q)$ qui est un espace de Hilbert, donc en particulier un espace vectoriel. On déduit que $-v \in U_{ad}$ pour tout $v \in U_{ad}$. Alors :

$$\langle p + \beta\widetilde{u}, -v\rangle \geq 0.$$

D'où

$$\langle p + \beta\widetilde{u}, v\rangle \leq 0.$$

Finalement,

$$\langle p + \beta\widetilde{u}, v\rangle = 0$$

ce qui prouve bien l'équation d'ajoint (4.7).

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les propriétés d'existence et de contrôle optimal pour les équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques et paraboliques. Nous avons mis le point aux chapitres 1 et 4 sur l'équation de la chaleur qui est de type parabolique.

Nous avons donné une caractérisation du contrôle optimal pour l'équation de la chaleur avec une donnée aux limites de type Neumann, par un système d'optimalité (SO).

Le contrôle optimal (unique) $\widetilde{u} \in U_{ad}$ avec

$$U_{ad} = L^2(Q).$$

En perspective, il serait intéréssant d'étudier le cas où

$$U_{ad} \subset L^2(Q) \quad \text{un converxe fermé non vide.}$$

De plus, le cas de conditions aux limites de type Dirichlet peut être abordé.

Bibliographie

[1] Brezis H. (1983) : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson.

[2] Euvrard D. (1984) : *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Différences finies, éléments finis.* Masson

[3] Jean.-P.Puel : *Contrôle et équations aux dérivées partielles.* Université de versailles.

[4] Lions J.-L. (1968) : *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod, Gauthier-Villars.

[5] Murray J.-D. (2002) : *Mathematical Biology.* Springer (2002).

[6] Raviart P.-A., Thomas J.-M. (1992) : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson.