



Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences et des Sciences Appliqués

Polycopie de Cours

Systemes Asservis

3^{ème} Année Licence Electrotechnique
S5

L'enseignante : Dr Fella BOULGAMH

Un mot à dire...

Ce cours est destiné aux étudiants de 3^{ème} Année Licence LMD, spécialité Electrotechnique (S5). Il est rédigé suivant le programme ministériel. Cependant, il sert aussi de guide pour tous les étudiants dans toutes les spécialités du génie électrique, mécanique, hydraulique, ...

Ce document est le fruit de quinze ans d'enseignement de cette unité scientifique dans différentes spécialités et formations. C'est pourquoi j'ai évité de donner des exemples liés à tel ou tel domaine. Ceci fera l'objet d'un éventuel document réservé aux travaux dirigés que je compte élaborer ultérieurement.

Pour l'honnêteté scientifique, Je tiens à noter que les figures que vous trouvez sur ce cours ne m'appartiennent pas, celles-ci sont prises de différents documents tout le long de 15 ans d'enseignement. Une partie de cette bibliographie est citée en fin du cours mais d'autres que j'ai perdu ont également fait l'objet de quelques figures ; que les auteurs de ces documents trouvent dans ce mot l'expression de ma profonde reconnaissance et mon profond respect.

En fin, je tiens à remercier les enseignants qui ont fait l'expertise de ce document qu'ils ont validé positivement ainsi que pour leurs remarques précieuses.

Comme tout travail, rien n'est parfait, je serai très reconnaissante de recevoir vos remarques concernant les erreurs qui peuvent apparaître sur ce cours.

Un grand MERCI à tous mes étudiants le long de mon parcours d'enseignement à l'université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi...

Dr. Fella BOULGAMH

Introduction

Systèmes Asservis Linéaires Invariants dans le Temps

I. Historique des systèmes de régulation automatique

L'Automatisation est l'ensemble des procédés visant à réduire ou à supprimer l'intervention humaine dans les processus de production.

Historique

- 1840 : Régulateur de Watt (Besoins de l'industrie à vapeur)
- 1945 : Deuxième guerre mondiale (développement de l'automatique dans l'aviation)
- 1960 : Apparition de l'informatique (cosmos, traitement rapide de l'information, possibilité de résolution des systèmes complexes etc.)

Importance

Qualité des produits finis, précision des opérations, protection de l'environnement, répétitivité des opérations etc...

Pourquoi automatiser ?

- Augmentation de la fiabilité,
- Augmentation de la rapidité et des performances en général,
- Diminution des coûts,
- Garantie de la sécurité de l'opérateur,
- Souvent, le système est trop rapide pour être géré manuellement.

II. Terminologie et définitions

II. 1 Système asservi

- a) Un système est un assemblage de constituants branchés ou reliés de telle façon à former une entité ou un tout.
- b) Le mot asservi est en général pris dans le sens de "régler", "diriger" ou "commander".

En combinant ces deux définitions, on obtient :

Un système asservi est un assemblage de constituants physiques branchés ou reliés les uns aux autres de telle sorte qu'il puisse se commander, se diriger ou se régler lui-même ; ou bien commander, diriger ou régler un autre système.

Pour définir ou identifier un système de commande, il faut définir d'abord deux termes principaux dans le langage des systèmes asservis : signaux d'entrée et signal de sortie.

II. 2 Principaux signaux

1. Signaux d'entrée

Ce sont des grandeurs indépendantes du système, mais ayant une action sur son état. Ces grandeurs peuvent être de deux types :

- a- Grandeurs commandables : Elles sont appliquées à partir d'une source d'énergie extérieure, afin de provoquer une réponse spécifique (déterminée) du système.
- b- Grandeurs non commandables : Ce sont des grandeurs d'entrée parasites ou "*perturbations*". Leur effet nuit au bon fonctionnement du système et fausse sa réponse.

2. Signal de sortie

C'est la réponse effective élaborée par le système évoluant à partir de son état initial, sous l'action des signaux d'entrée.

3. Signal de commande

C'est une quantité donnant au système l'impulsion nécessaire à la formation du signal d'entrée.

II. 3 L'Automatique

C'est une science et une technique qui permet de maîtriser le comportement d'un système (traduit par ses grandeurs de sortie), en agissant de manière adéquate sur ses grandeurs d'entrée.

III. Exemples de systèmes de commande

On distingue trois types fondamentaux de systèmes de commande :

- Ceux *fabriqués par l'homme* ;
- Ceux *naturels*, y compris les systèmes de commande biologiques ;
- Ceux dont les constituants sont soit fabriqués par l'homme soit naturels.
- **Exemple 1** : *L'interrupteur électrique*

C'est un système de commande fabriqué par l'homme réglant le passage de l'électricité :

- Signal d'entrée : deux états ---- Marche, Arrêt ---- .
- Signal de sortie : deux états --- Passage ou non de l'électricité ---.

- **Exemple 2** : *Montrer un objet du doigt*

C'est un système de commande biologique.

- Constituants : les yeux, le bras, la main, le doigt et le cerveau.
- Entrée : la position exacte de l'objet (immobile ou non) par rapport à un repère.
- Sortie : la direction montrée par rapport au même repère.

- **Exemple 3** : Le conducteur et son automobile

Il possède à la fois des constituants fabriqués par l'homme et des constituants biologiques. Le conducteur cherche à maintenir l'automobile dans une voie appropriée. Il y parvient en comparant sans cesse la direction de l'automobile avec celle de la route.

- Entrée : direction de la route.
- Sortie : direction de l'automobile.

IV. Comportement et propriétés des systèmes

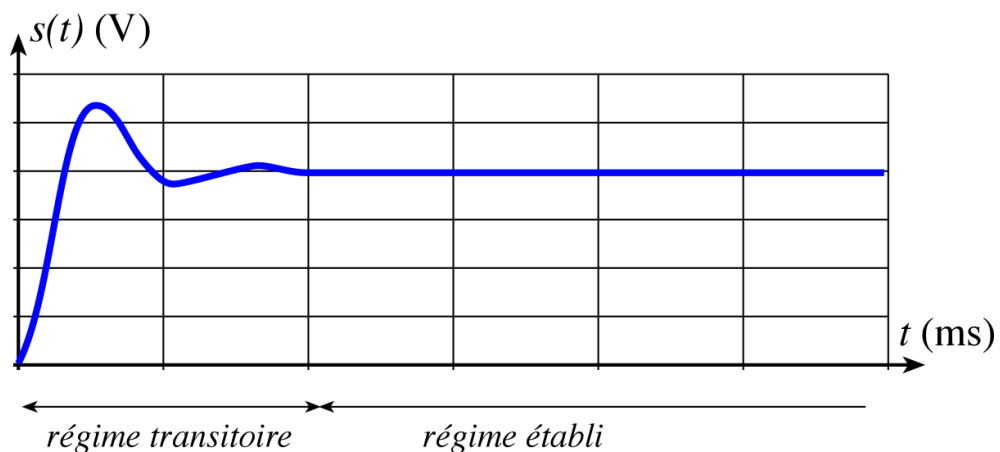
IV. 1 Régime Permanent / Transitoire / Statique

Dans le comportement des systèmes, on distingue deux régimes :

- le **régime permanent** ou **établi**, caractérisant la réponse stabilisée du système à une entrée quelconque,
- le **régime transitoire**, caractérisant l'évolution de la réponse avant que le régime permanent ne soit atteint.

Un troisième régime est :

- Le **régime statique** : C'est le régime permanent (ou établi) dans le cas où l'entrée est constante.



IV. 2 Comportement Dynamique/Statique

1. Comportement dynamique

Le comportement dynamique, c.à.d. en régime transitoire, est souvent difficile à qualifier (quantifier) sur la base de l'analyse temporelle seule. Il faut des outils spécifiques tels que les transformations de Fourier et de Laplace.

2. Comportement statique

Dans le comportement statique, on considère le système étudié en régime permanent *constant*, c.à.d. $u(t) = C^{ste}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. On peut alors calculer le gain statique K :

$$K = \left. \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)} \right|_{u(t)=const.}$$

IV. 3 Système Statique/Dynamique

1. Système statique

Un système est *statique* si sa sortie $y(t)$ à l'instant t ne dépend que de l'entrée $u(t)$ au même instant t . Du point de vue de l'automaticien, un système statique peut être représenté par son gain statique.

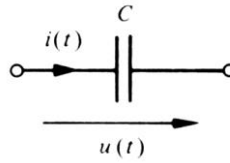
Un tel système réagit donc instantanément, sans retard, sans régime transitoire ou temps d'établissement. Il est sans mémoire puisque le passé n'influence pas sa sortie présente.

Un exemple de système statique est la résistance électrique idéale.

2. Système dynamique

Un système est *dynamique* si sa sortie $y(t)$ peut dépendre non seulement de l'entrée présente $u(t)$ mais aussi des entrées (sorties) passées.

Un exemple de système dynamique est le condensateur électrique : définissant le courant de charge $i_c(t)$ comme signal d'entrée et la tension aux bornes $u_c(t)$ comme signal de sortie, on aura :



$$y(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

IV. 4 Système causal

Un système est **causal** si sa sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $u(t)$ pour $t \leq t_0$.

- Un système *causal* ne répond pas avant d'être excité (système non anticipatif). Les systèmes physiques temporels réalisables sont tous *causals*.
- Un signal $x(t)$ est **causal** si $\forall t < 0 \quad x(t) = 0$.

En pratique un signal temporel est toujours causal, à condition de bien choisir l'origine des temps.

IV. 5 Système à temps invariant

Un système à **temps invariant** a un modèle identique à tout instant (un retard τ ne change pas la loi du modèle).

$$u(t) \rightarrow y(t) \quad \Rightarrow \quad u(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

IV. 6 Système instantané

Un système est dit **instantané** si à un instant donné, sa sortie ne dépend que de l'excitation à cet instant :

$$y(t) = a \cdot u(t)$$

Dans tous les autres cas, il est dit, à *mémoire* ou **dynamique**, par exemple pour :

$$y(t) = a \cdot u(t - \tau)$$

IV. 7 Système linéaire

Un système est **linéaire** s'il satisfait au principe de superposition :

$$a. u_1(t) + b. u_2(t) \xrightarrow{\text{système linéaire}} a. y_1(t) + b. y_2(t)$$

IV. 8 Système suiveur et système régulateur

1. **Système régulateur** (opération de régulation) : le signal d'entrée demeure constant durant de longues périodes (*asservissement de la température d'une pièce*).
2. **Système suiveur** (opération d'asservissement) : le signal d'entrée est variable à chaque instant (*poursuite radar d'une cible mobile*).

Remarque

Dans cette unité d'enseignement, on traitera les systèmes *causals, linéaires* et à *temps invariant* : les S.A.L.T.I.

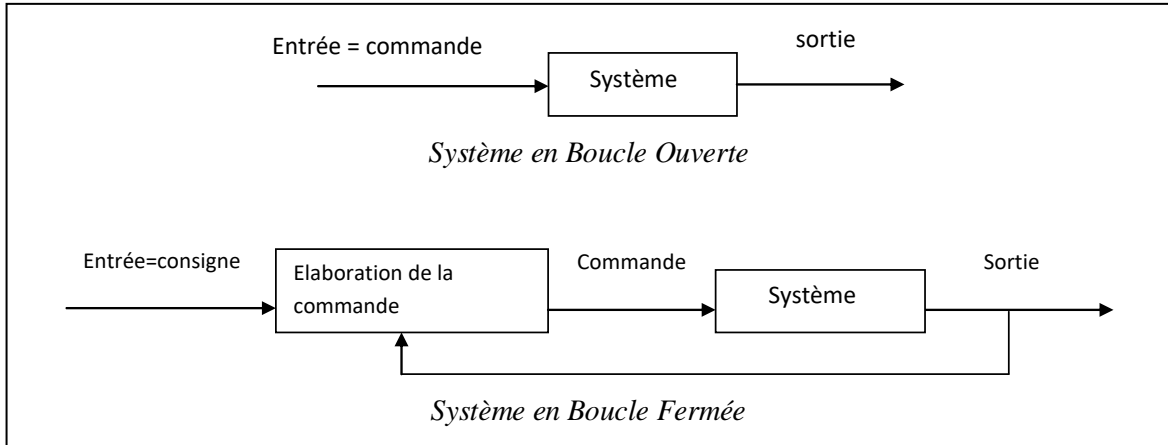
Les systèmes étudiés sont analogiques, leurs signaux d'entrée et de sortie sont continus à la fois en temps et en amplitude.

La relation qui lie leur entrée et leur sortie est dès lors une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

V. Notions de Boucle Ouverte (BO) / Boucle Fermée (BF)

- Un système est en *boucle ouverte* (en *chaîne directe*) lorsque la commande est élaborée sans l'aide de la connaissance des grandeurs de sortie : il n'y a pas de feedback.
- Un système est dit en *boucle fermée* (*à retour*) lorsque la commande est fonction de la consigne (la valeur souhaitée en sortie) et de la sortie.

Pour observer les grandeurs de sortie, on utilise des capteurs. C'est l'information de ces capteurs qui va permettre d'élaborer la commande.



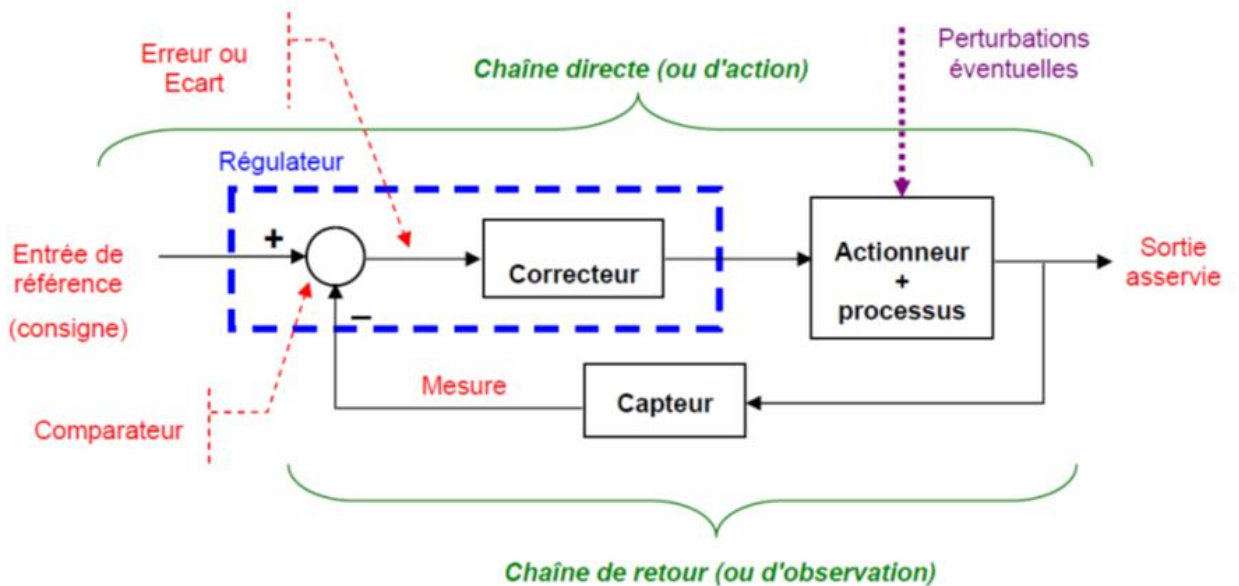
Remarque

Un système à retour contrôle l'exécution de la commande (c. à. d. vérifie que la réponse correspond bien à l'entrée utile).

Un système en boucle ouverte (en chaîne directe) commande sans contrôler.

VI. Principaux éléments d'un système asservi

Les principaux éléments d'un système asservi peuvent être résumés comme suit :



- Chaîne directe ou d'action

Cette chaîne englobe :

- tous les organes de puissance nécessaires pour l'exécution du travail,
- les amplificateurs,
- plusieurs éléments de différentes natures (engins électriques, mécaniques,...)

- Chaîne de retour ou de réaction

Cette chaîne *analyse, mesure* le travail effectué et *transmet* au comparateur une grandeur physique proportionnelle à ce travail.

Elle comprend généralement *un capteur* qui donne une mesure de la grandeur de sortie, qui est ensuite amplifiée et transformée avant d'être utilisée.

- Compareur ou détecteur d'écart

Cet élément compare le travail effectué à celui qui était à faire et délivre un signal d'erreur proportionnel à la différence entre une grandeur de référence (E) et la grandeur physique issue de la chaîne de retour.

Ce signal d'erreur, après amplification, agira sur les organes de puissance dans un sens tel que l'erreur tendra à s'annuler.

- Régulateur

Le régulateur se compose *d'un compareur* qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et *d'un correcteur* qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande.

- Actionneur

C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité.

- Capteur

Le capteur prélève, sur le système, la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.

- Perturbation

On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système et modifie l'état de sa sortie. On rappelle qu'un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.

VII. Performances d'un système asservi

VII. 1 En régime permanent

La grandeur de sortie doit être aussi voisine que possible de la valeur désirée. En réalité, il subsiste toujours une légère erreur. Cette erreur est appelée :

- a. erreur statique ou écart permanent quand la grandeur d'entrée est une constante ; pour un système idéal, elle doit être nulle.
- b. erreur de traînage quand la grandeur d'entrée est une fonction linéaire du temps.

VII. 2 En régime transitoire

Le système évoluant entre deux régimes permanents, le temps mis par le système pour aller d'un régime à l'autre et la façon dont il parvient à l'état final, sont très importants.

- Le temps de réponse est le temps au bout duquel la sortie du système atteint (à $\pm 5\%$ près) sa valeur de régime permanent.
- L'amortissement : la sortie du système dépasse généralement la valeur qu'elle doit avoir dans le régime permanent final. Elle oscille quelques instants autour de cette valeur. Ces oscillations doivent être amorties, le plus rapidement possible.

Modélisation des systèmes

I. Introduction

La résolution d'un problème d'asservissement nécessite une représentation sous forme de modèle pour faciliter l'analyse et la conception du système de commande.

Les modèles utilisés peuvent être classés en deux catégories :

1. Les modèles mathématiques,
2. Les modèles graphiques.

I. 1 Modèle mathématique

Il s'agit de la mise en équation des différentes grandeurs du système par l'application des lois physiques, chimiques, biologiques, ...etc.

Ces équations sont de deux types :

1. *Equations différentielles* linéaires ou non linéaires pour les systèmes continus,
2. *Equations de récurrences* pour les systèmes discrets ou échantillonnés.

Le jeu d'équations ainsi obtenu *caractérise* le système et *sa solution* représente le *comportement* du système.

La recherche de cette solution nécessite un changement d'espace pour une simplification des calculs qui sont beaucoup trop complexes dans le domaine temporel :

1. *Systèmes continus* : on utilise
 - la Transformée de Laplace (TL),
 - la Transformation dans l'espace d'état.
2. *Systèmes discrets* : on utilise
 - la Transformation en z ,
 - la Transformation dans l'espace d'état.

I. 2 Représentation graphique

On représente par un modèle graphique, le diagramme schématique du système de commande. Celui-ci fait apparaître la disposition des différents organes du système et leurs relations fonctionnelles. Ces représentations sont de deux types :

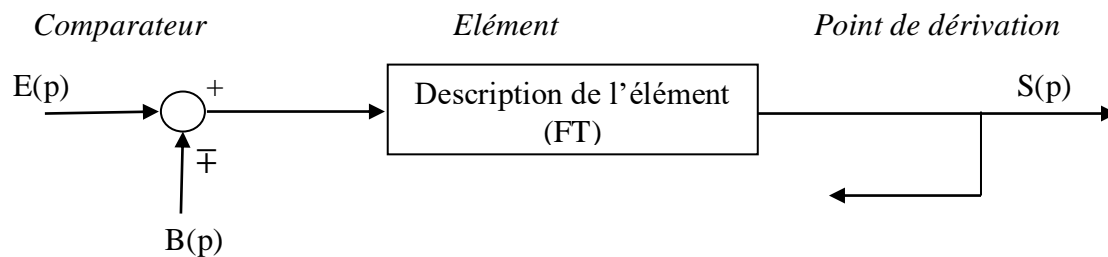
1. Les schémas fonctionnels,
2. Les graphes de fluence des signaux.

II. Schéma fonctionnel

II. 1 Définition et règles

Un *schéma fonctionnel* est une représentation graphique abrégée des relations entre les signaux d'entrée et le signal de sortie d'un système physique.

De manière générale, on trouve dans un schéma fonctionnel :



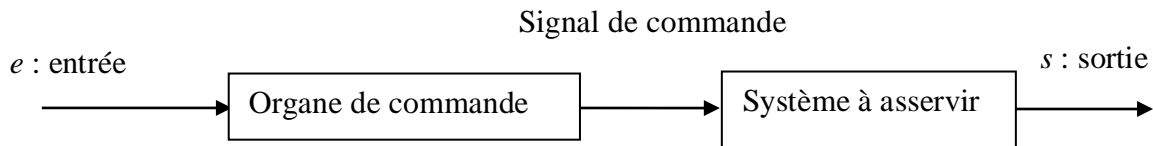
- *Les flèches* indiquent le sens dans lequel l'information ou le signal se transmette,
- *Le comparateur* qui est une combinaison de sommateur et d'inverseur,
- *L'opérateur* : ici c'est la fonction de transfert (FT),
- *Le point de dérivation* : c'est un point de branchement ou *nœud*.

Il est souvent possible de réduire un schéma fonctionnel donné grâce à l'application des règles de transformation (*tableau 1*).

II. 2 Schéma fonctionnel d'un système asservi

1. Commande en boucle ouverte

Dans ce cas, le signal de commande est indépendant du signal de sortie. Son schéma fonctionnel est représenté comme suit :

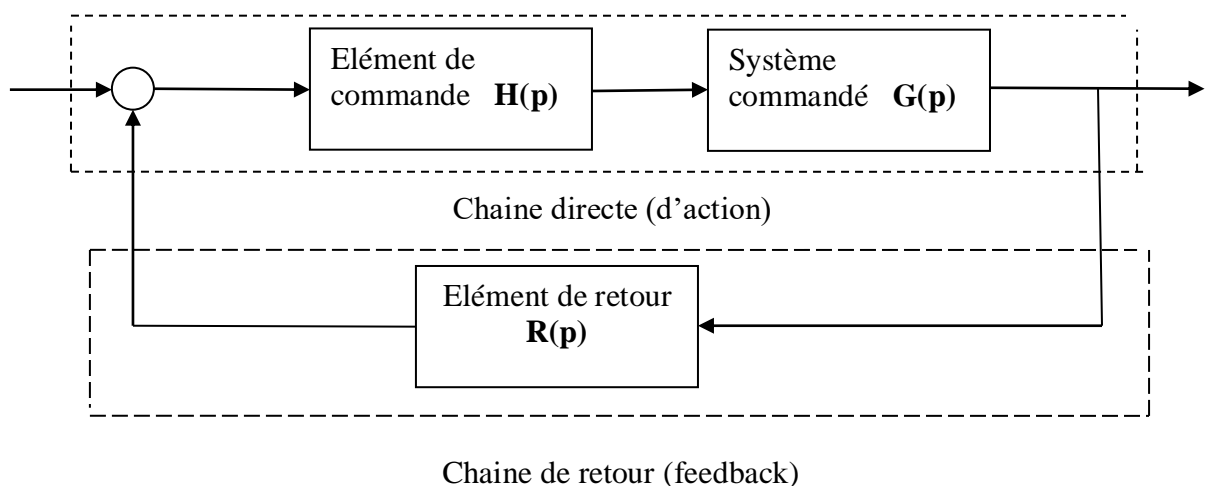


Le système à asservir représente le processus ou la machine dont une partie ou un paramètre doit être asservi (ou commandé) ;

- *L'organe de commande* constitue l'organe nécessaire à la production du signal de commande ;
- *Le signal de commande* est une quantité donnant au système l'impulsion nécessaire à la formation du signal de sortie.

2. Commande en boucle Fermée

Dans ce cas, le signal de commande est lié au signal de sortie. Son schéma fonctionnel est le suivant :



3. Principaux organes d'un système de commande

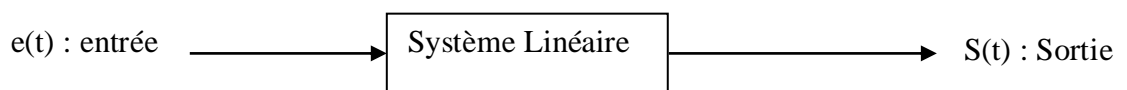
1. *Le capteur* : C'est l'organe qui transforme une grandeur physique en une grandeur électrique (*exemple* : Thermocouple : température → tension électrique).
2. *Le détecteur d'écart* : c'est le comparateur. Parfois, il est combiné avec le capteur.
3. *L'actionneur* : Sa fonction est l'exécution. Il commande le système et travaille souvent à de très hautes puissances.
4. *L'amplificateur de puissance* : Il délivre la puissance d'entrée nécessaire à l'actionneur (Il est placé entre le comparateur et l'actionneur).

5. Le correcteur : Il permet d'améliorer les performances du système asservi. Il travaille à basse puissance et est généralement placé entre le comparateur et l'amplificateur de puissance.

II. 3 Fonction de Transfert (FT)

1. Hypothèses

- On suppose, dans ce qui suit, que le système possède une seule variable d'entrée et une seule variable de sortie et qui sont toutes les deux continues (système mono-variable).



- On suppose que la relation entrée/sortie peut être décrite par une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre " n " :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j} \quad m \leq n \quad (1)$$

2. Définition

Posons, tout d'abord, les conditions initiales de (1) égales à zéro et $e(t) = 0$ pour $t < 0$.

En introduisant la transformée de Laplace :

$$L[(1)] \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i p^i S(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j E(p)$$

D'où :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = T(p)$$

Remarque

La FT ne dépend que du système lui-même (des a_i et b_i avec conditions initiales nulles).

3. Intérêt

L'intérêt de l'utilisation de la FT plutôt que de l'équation différentielle (1) est lié à la simplicité des manipulations mathématiques des relations entre les variables. En effet, la transformée de Laplace permet de convertir l'équation différentielle en équation algébrique.

4. Terminologie et remarques

- Le dénominateur de $T(p)$ s'appelle "*polynôme caractéristique du système*".
- Les racines du polynôme caractéristique sont appelées "*pôles*" de la FT.
- Les racines du numérateur de $T(p)$ sont appelées "*zéros*" de la FT.
- La transformée inverse de $T(p)$ est "*la réponse impulsionnelle du système*".
- La détermination de la réponse temporelle $y(t)$ d'un système $T(p)$ à un signal d'entrée $e(t)$ est donnée par :

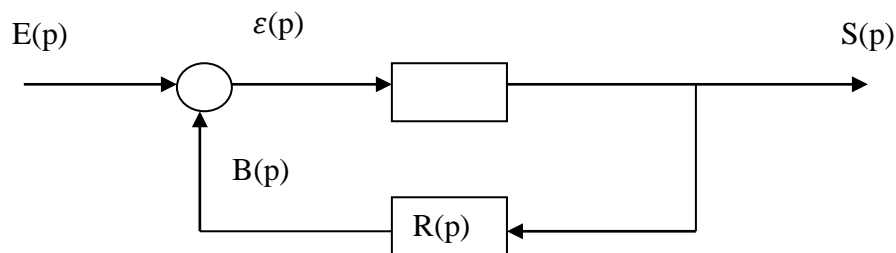
$$y(t) = L^{-1}[T(p)E(p)]$$

avec comme hypothèse que toutes les conditions initiales de (1) sont nulles.

- Il arrive souvent qu'un système complexe, de FT inconnue puisse être décomposé en un ensemble de sous-systèmes dont les FT respectives sont, elles, connues à priori. Le schéma fonctionnel représente les interactions entre ces différents sous-systèmes.

II. 4 Algèbre des schémas fonctionnels

1. Forme canonique d'un système asservi



$E(p)$: entrée de référence (ou sortie désirée).

$\varepsilon(p)$: signal d'activation.

$S(p)$: variable contrôlée (sortie ou sortie réelle).

$G(p)$: FT directe ou d'action.

et

$R(p)$: FT de retour.

On définit alors :

- La Fonction de Transfert Boucle Ouverte (FTBO) : $T(p) = \frac{B(p)}{\varepsilon(p)}$
- La Fonction de Transfert Boucle Fermée (FTBF) : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- La Fonction de Transfert écart-entrée : $W(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$

A partir de ce schéma fonctionnel, on tire les équations suivantes :

$$\begin{cases} S(p) = G(p) \cdot \varepsilon(p) \\ B(p) = R(p) \cdot S(p) \Rightarrow S(p) = G(p)[E(p) \mp B(p)] = G(p) \cdot E(p) \mp R(p) \cdot S(p) \cdot G(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) \mp B(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(p)[1 \pm G(p) \cdot R(p)] = G(p) \cdot E(p)$$

d'où :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 \pm G(p)R(p)} : \text{FTBF du système.}$$

Remarques :

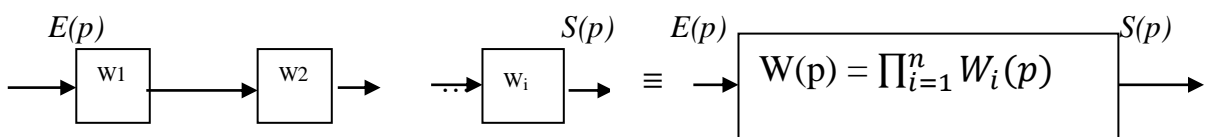
1. La FTBF du système est sa caractéristique principale.
2. $1 \pm G(p)R(p) = 0$ est l'équation caractéristique. On verra, par la suite, que son analyse renseigne sur la stabilité et la réponse du système en boucle fermée.
3. Une autre FT utile au calcul des erreurs stationnaires de l'asservissement est la FT écart-entrée :

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + G(p)R(p)}$$

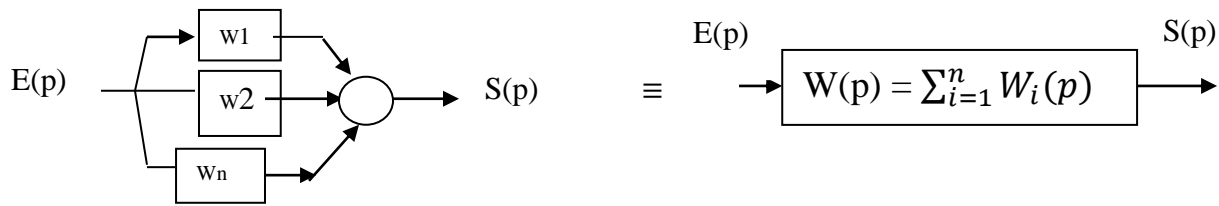
2. Modes de connexions

Il existe, en général, trois modes de connexions types des éléments constituant un asservissement simple ou complexe :

- Connexions séries (ou en cascade)



- Connexions en parallèle :

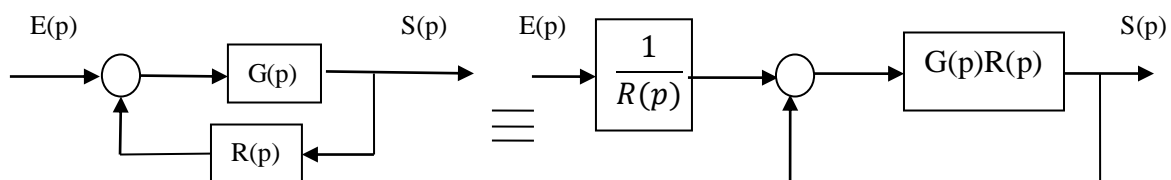


- Connexions en opposition parallèle : Tel que la forme canonique.

3. Système à retour unité

C'est un système à retour avec $R(p) = 1$.

Tout système à retour n'ayant que des éléments linéaires dans la chaîne de retour peut se mettre sous la forme d'un système à retour unité en utilisant la transformation suivante :



- FTBF : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)}$
- FTBO : $T(p) = G(p)$
- FT écart-entrée : $\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+G(p)}$

4. Signaux d'entrées multiples

On a souvent besoin de connaître le comportement d'un système quand on applique plusieurs signaux (entrées) simultanément en ses différentes parties.

Dans ce cas et vu que le système est linéaire, on procède pour l'analyser comme suit (on utilise le procédé de superposition) :

Etape 1 : Rendre tous les signaux nuls, sauf un seul.

Etape 2 : Mettre le schéma fonctionnel sous forme canonique (règles de transformation).

Etape 3 : Calculer la réponse produite par le signal choisi agissant seul.

Etape 4 : Répéter les étapes **de 1 à 3** pour chacun des signaux d'entrée restants.

Etape 5 : Ajouter algébriquement toutes les réponses (sorties) calculées dans les étapes **1 à 5**. Cette somme représente la sortie totale obtenue quand tous les signaux d'entrée agissent ensemble.

Remarque

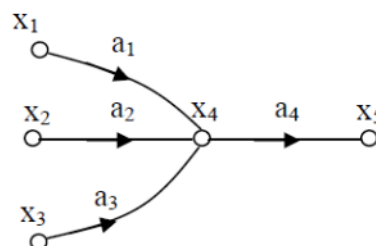
Le procédé (ou principe) de superposition n'est applicable que si le système est linéaire.

III. Graphes de fluence

III. 1 Définition

- *Un graphe de transfert ou de fluence* permet de simplifier l'écriture et la mise en équation des processus lorsque le nombre de variables augmente.
- Un graphe de fluence est constitué d'un ensemble de nœuds reliés entre eux par des branches orientées.
- Les nœuds représentent les variables du système.
- Chaque branche est affectée d'un coefficient correspondant à la transmittance qui relie entre deux nœuds (variables).

Exemple :



Ce graphe (graphe de fluence), est équivalent aux équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} x_4 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_5 = a_4x_4 = a_4(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \end{cases}$$

- Un nœud source est un nœud qui n'est extrémité d'aucun arc.
- Un nœud puits est un nœud qui n'est origine d'aucun arc.
- Le chemin qui relie un nœud source à un autre nœud est appelé cascade ou chaîne directe si on ne traverse pas plus d'une fois le même nœud.
- Une boucle est un parcours suivant les flèches qui, partant d'un nœud, revient à ce même nœud sans passer deux fois par le même nœud.
- On appelle boucle propre un chemin fermé qui ne rencontre qu'un seul nœud.

III. 2 Transformation élémentaire des graphes de fluence

	$\begin{cases} x_2 = a_1x_1 \\ x_3 = a_2x_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = a_1a_2x_1$
	$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a+b)x_1$
	$\begin{cases} x_3 = ax_2 + bx_1 \\ x_4 = cx_3 = acx_2 + bcx_1 \end{cases}$
	$\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_3) = bax_1 + bcx_3 \end{cases}$ $\Rightarrow x_3(1-bc) = abx_1$ $\Rightarrow x_3 = \frac{ab}{(1-bc)}x_1$

III. 3 Règle de Masson

La *méthode globale* ou la *règle de Masson* utilise directement la structure du graphe pour en déduire la transmittance entre deux nœuds.

La fonction de transfert d'un graphe de fluence est donnée par :

$$H = \frac{\sum_{i=1}^N T_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Où Δ s'exprime par :

$$\Delta = 1 + (-1)^1 \sum_i B_i + (-1)^2 \sum_{i,j} B_i B_j + (-1)^3 \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \dots$$

avec:

- $\sum_i B_i$: Somme des transmittances de toutes les boucles.
- $\sum_{i,j} B_i B_j$: Somme des produits de transmittance de boucles disjointes prises deux à deux.
- $\sum_{i,j,k} B_i B_j B_k$: Somme des produits de transmittance pour les boucles disjointes prises trois à trois.
- T_i : Transmittance de toutes les cascades du graphe (où une cascade représente tout chemin qui conduit d'un nœud source à un nœud puits). C'est le parcourt directe de e vers s .
- Δ_i : la valeur prise par Δ pour la portion du graphe disjointe de la $i^{\text{ème}}$ cascade/
- N : Nombre de parcours $e - s$.

	Transformation	Equation	Schéma fonctionnel	Schéma fonctionnel Equivalent
1	Association d'éléments en cascade	$Y = (P_1 \cdot P_2)X$		
2	Association d'éléments en parallèle ou suppression d'une boucle d'action	$Y = P_1X \pm P_2X$		
3	Retrait d'un élément d'une chaîne d'action	$Y = P_1X \pm P_2X$		
4	Elimination d'une boucle de retour	$Y = P_1(X \mp P_2Y)$		
5	Retrait d'un élément d'une boucle de retour	$Y = P_2(X \mp P_2Y)$		
6 a	Redispotion des comparateurs	$Z = W \pm X \pm Y$		
6 b	Redispotion des comparateurs	$Z = W \pm X \pm Y$		

7	Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément	$z = PX \pm Y$		
8	Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément	$z = P[X \pm Y]$		
9	Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément	$Y = PX$		
10	Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément	$Y = PX$		
11	Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur	$z = X \pm Y$		
12	Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un comparateur	$z = X \pm Y$		

Réponses temporelles des systèmes linéaires

I. Introduction

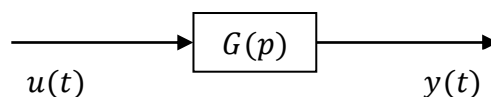
Un système est un ensemble de constituants effectuant une fonction définie. Son comportement lors de l'utilisation doit être testé. Classiquement, on peut apprendre beaucoup sur ce comportement en observant la réponse du système aux entrées suivantes :

1. L'impulsion : notée généralement $e(t) = a\delta(t) \xrightarrow{TL} E(p) = a$ aboutissant à une réponse dite "impulsionnelle".
2. L'échelon : $e(t) = au(t) \xrightarrow{TL} E(p) = \frac{a}{p}$ aboutissant à une réponse dite "indicielle".
3. La rampe : $e(t) = at u(t) \xrightarrow{TL} E(p) = \frac{a}{p^2}$
4. La sinusoïde : $e(t) = A\sin \theta(t)$ aboutissant à une réponse dite "fréquentielle".

II. Définitions

II. 1 Réponse d'un système

On considère un système linéaire à une entrée et une sortie :



La réponse d'un système est l'évolution dans le temps du signal de sortie $y(t)$ d'un système excité par une entrée $u(t)$ connue.

II. 2 Réponse libre et réponse forcée

Lorsque l'entrée $u(t)$ du système est nulle, on distingue deux types de réponses :

- La *réponse forcée* qui s'observe lorsque les conditions initiales du système sont nulles (toutes les grandeurs physiques du système sont nulles pour $t = 0$).
- La *réponse libre* qui s'observe lorsque les conditions initiales du système ne sont pas nulles (par exemple, l'existence d'une charge initiale de capacité dans un système électrotechnique).

II. 3 Régime transitoire (RT) / Régime permanent (RP)

- Le régime permanent : C'est la valeur atteinte par $s(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Le régime transitoire : C'est la réponse $s(t)$ que fournit le système pour transiter (ou passer) de sa valeur de départ $s(0) = 0$ à sa valeur en régime permanent.

III. Notions de performances

De manière générale, on caractérise les performances d'un système asservi par les trois critères suivants :

- Précision.
- Rapidité / bande passante.
- Amortissement / stabilité.

Un système asservi idéal est donc *rapide, précis et stable*. Nous verrons par la suite que ces critères ne peuvent être satisfaits en même temps, pour un système bouclé.

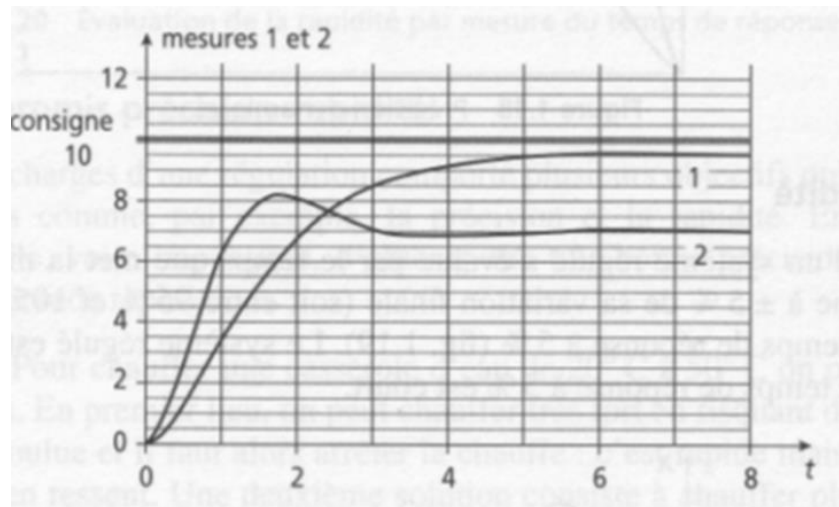
Remarque

La stabilité est une performance à satisfaire en priorité pour un système, car un système instable est inutilisable (un système à jeter).

III. 1 Précision

La précision d'un système régulé se mesure par l'écart entre la consigne (entrée ou sortie désirée) et la mesure en régime permanent ; on parle alors de précision statique (donnée par l'écart statique).

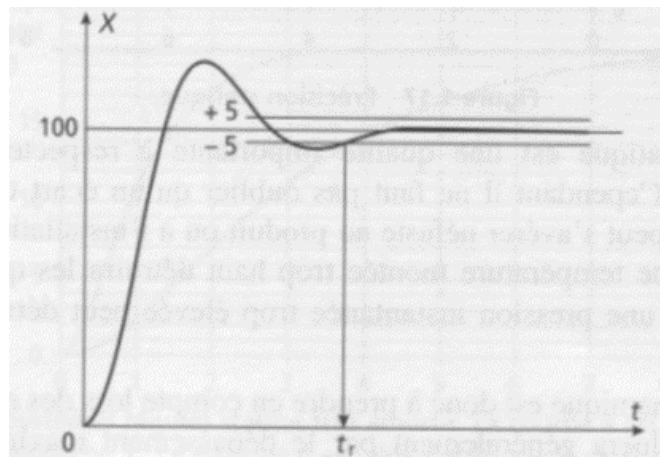
Plus l'écart statique est petit, plus le système est précis.



III. 2 Rapidité

La rapidité d'un système régulé s'évalue par le temps que met la réponse pour entrer dans une zone à $\pm 5\%$ de sa valeur finale (soit entre 95% et 105%). Ce temps s'appelle temps de réponse à 5%.

Le système régulé est d'autant plus rapide que le temps de réponse à 5% est court

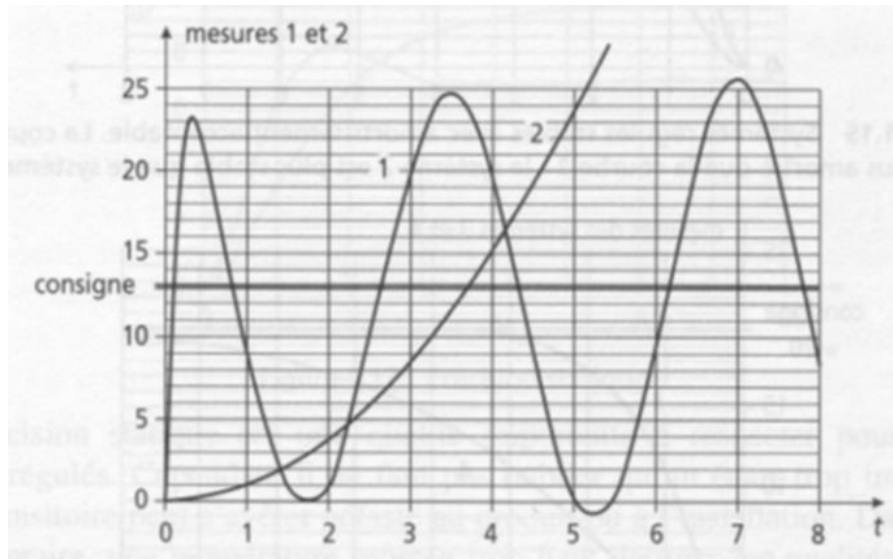


III. 3 Stabilité

La qualité essentielle pour un système régulé est la stabilité. En effet, un système instable se caractérise :

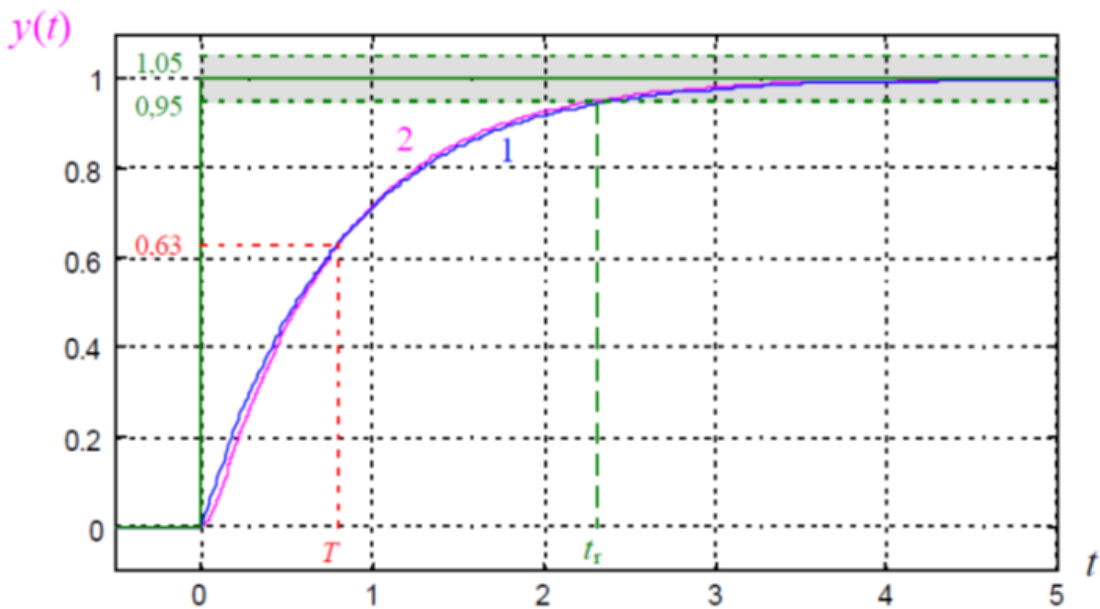
- soit par des oscillations d'amplitude de la réponse (grandeur mesurée) de plus en plus grandes ;
- soit par une croissance irréversible négative ou positive de la réponse.

Dans les deux cas, l'objectif de la régulation n'est pas atteint. Plus encore, il y a risque de détérioration physique du procédé et donc d'insécurité.



Dans de très nombreux cas, l'analyse d'un système quelconque, basée sur l'étude de son approximation par un système fondamental du *premier* ou du *second ordre*, donne des résultats très voisins de la réalité.

Exemple :



Réponse indicielle d'un système d'ordre 2 pour $m > 1$ et $K_p = 1$ et son approximation d'ordre 1 (tracé pour $m=2$, $\omega_0 = 5$ et $T = 0,8$)

IV. Analyse d'un système du premier ordre

IV. 1 Equation générale

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \xrightarrow{TL} H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

avec K le gain statique et τ la constante de temps du système.

IV. 2 Réponse temporelle aux signaux tests

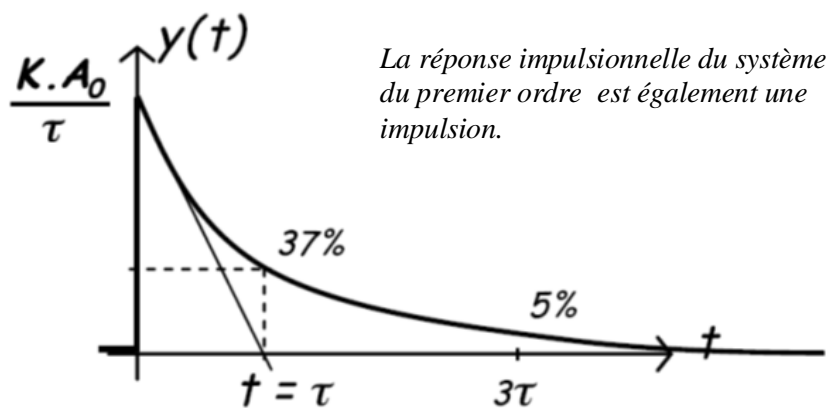
Nous supposons dans ce qui suit que le système est excité par un signal test causal

(nul pour $t < 0$) et qu'il part du repos ($s(0^-) = 0$).

IV. 2. 1 Réponse impulsionnelle (entrée = impulsion)

Lorsque le système est excité par une *impulsion unité* (généralement l'impulsion de Dirac), la sortie est appelée *réponse impulsionnelle*.

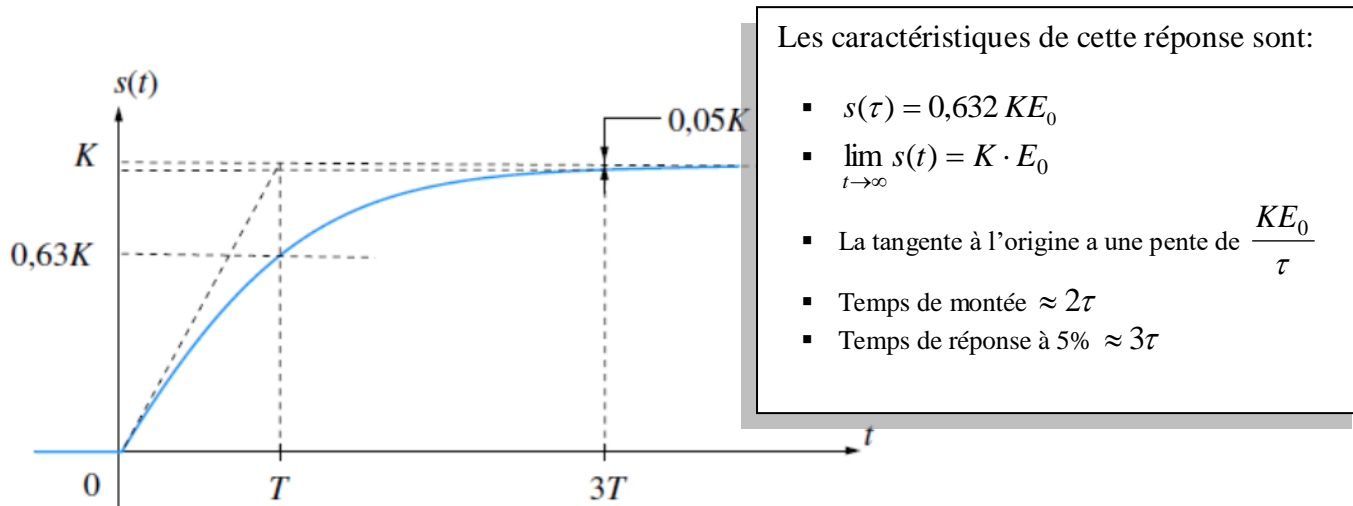
Entrée		Réponse ou sortie	
Temps : e(t)	Laplace :E(p)	Temps : s(t)	Laplace : S(p)
$E_0 \cdot \delta(t)$	E_0	$\frac{K \cdot E_0}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\frac{K \cdot E_0}{1 + \tau p}$



IV. 2. 2 Réponse indicielle (entrée = échelon)

Lorsque le système est excité par un *échelon unité*, la sortie est appelée *réponse indicielle*.

Entrée		Réponse ou sortie	
Temps : $e(t)$	Laplace : $E(p)$	Temps : $s(t)$	Laplace : $S(p)$
$E_0 \cdot u(t)$	$\frac{E_0}{p}$	$K \cdot E_0(1 - e^{-t/\tau})$	$\frac{K \cdot E_0}{p(1 + \tau p)}$



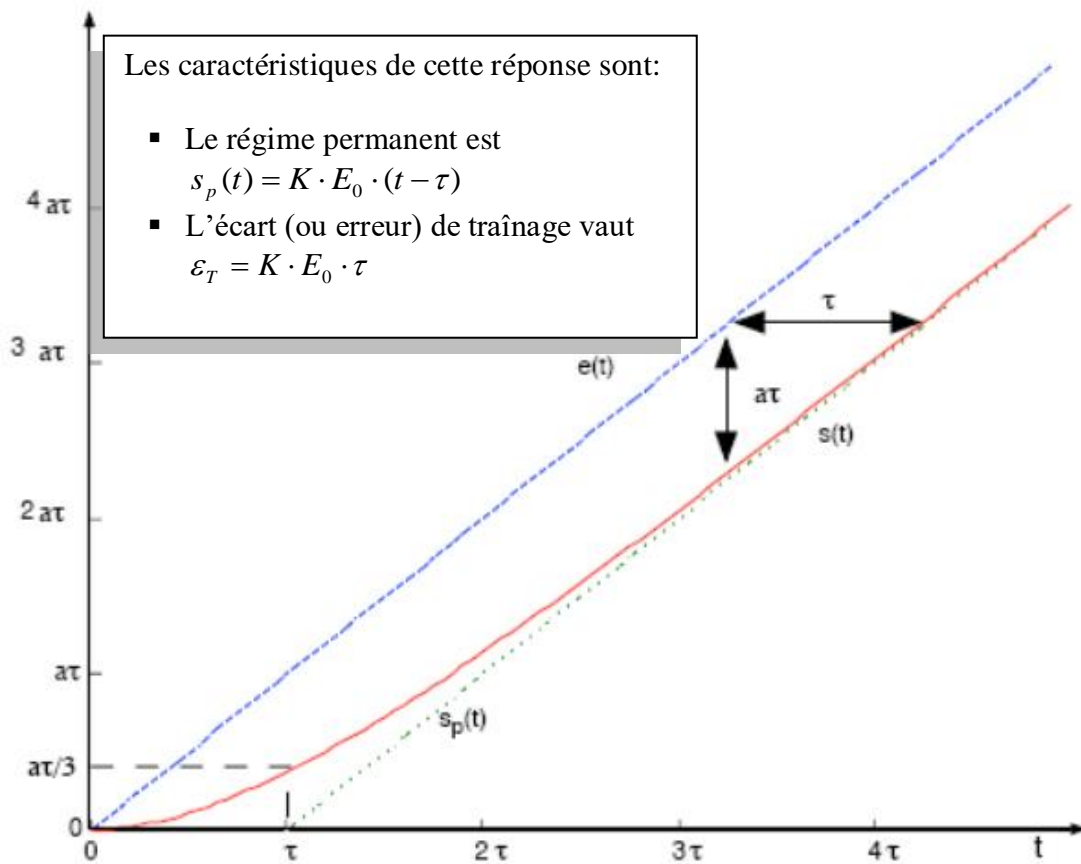
Pour cette réponse, on définit les termes suivants :

- 1- Le régime permanent : C'est la valeur atteinte par $s(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Cette limite est égale à $K \cdot E_0$. En pratique, on considère souvent que le régime permanent est atteint avec une approximation suffisante au bout de $t = 3\tau$.
- 2- Le régime transitoire : C'est la réponse $s(t)$ que fournit le système pour transiter (ou passer) de sa valeur de départ $s(0) = 0$ à sa valeur en régime permanent :
 Sur une durée de $3\tau \rightarrow s(t) = K \cdot E_0(1 - e^{-t/\tau})$
- 3- Temps de montée : C'est le temps que met la réponse $s(t)$ pour passer de 10% à 90% de sa valeur en régime permanent ($= K \cdot E_0$).

IV. 2. 3 Réponse en vitesse (entrée = rampe)

Lorsque le système est excité par une rampe unité, la sortie est appelée *réponse en vitesse*.

Entrée		Réponse ou sortie	
Temps : $e(t)$	Laplace : $E(p)$	Temps : $s(t)$	Laplace : $S(p)$
$E_0 \cdot t \cdot u(t)$	$\frac{E_0}{p^2}$	$K \cdot E_0 (t - \tau) + K \cdot E_0 \cdot \tau \cdot e^{-t/\tau}$	$\frac{K \cdot E_0}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2(p + \frac{1}{\tau})}$



Pour $t \geq 4\tau$, le terme $\tau e^{-t/\tau} \rightarrow 0$. La réponse $s(t)$ s'écrit alors $KE_0(t - \tau)$ qui est également une rampe mais retardée de τ par rapport à celle que donnerait un système sans inertie ($\tau = 0$)

V. Analyse d'un système du second ordre

V. 1 Equation générale

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$a \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + cs(t) = f(e(t))$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = g(e(t)) = K \cdot e(t) \quad \xrightarrow{FT} \quad T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Généralement, la fonction $g(e(t))$ est proportionnelle à l'entrée $e(t)$, $m > 0$ et $\omega_0 > 0$

. On définit alors :

- K : le gain statique du système ;
- ω_0 : la pulsation propre du système (en rad/s) ;
- m : le coefficient d'amortissement ($m = 0$ cas idéal : aucune perte d'énergie).

V. 2 Réponse temporelle aux signaux tests

Si on cherche les pôles de la FT (les racines du dénominateur), on distingue trois cas possibles :

1. $m > 1$: dans ce cas les pôles sont réels : $-m\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$
2. $m = 1$: Deux pôles réels multiples : $-\omega_0$
3. $m < 1$: Deux pôles complexes conjugués. Ils sont à partie réelle négative si $m > 0$.

La réponse du système dépend donc de la valeur du coefficient d'amortissement m et sera très différente d'un cas à l'autre.

Un bon amortissement est la capacité d'un système oscillant à être suffisamment amorti et à ne pas présenter de dépassement important. Cela signifie deux choses :

- Le premier dépassement doit rester inférieur à X% de la consigne.
- Le nombre d'oscillations avant stabilisation devra être faible.

D'autre part, on ne veut pas que le système soit trop amorti car l'augmentation de l'amortissement provoque une diminution du rendement du système asservi. En effet, l'amortissement correspond physiquement à des pertes.

V. 2. 1 Réponse indicielle (entrée = échelon)

- $m > 1$: Système à fort amortissement (absence d'oscillations)

$$m > 1$$

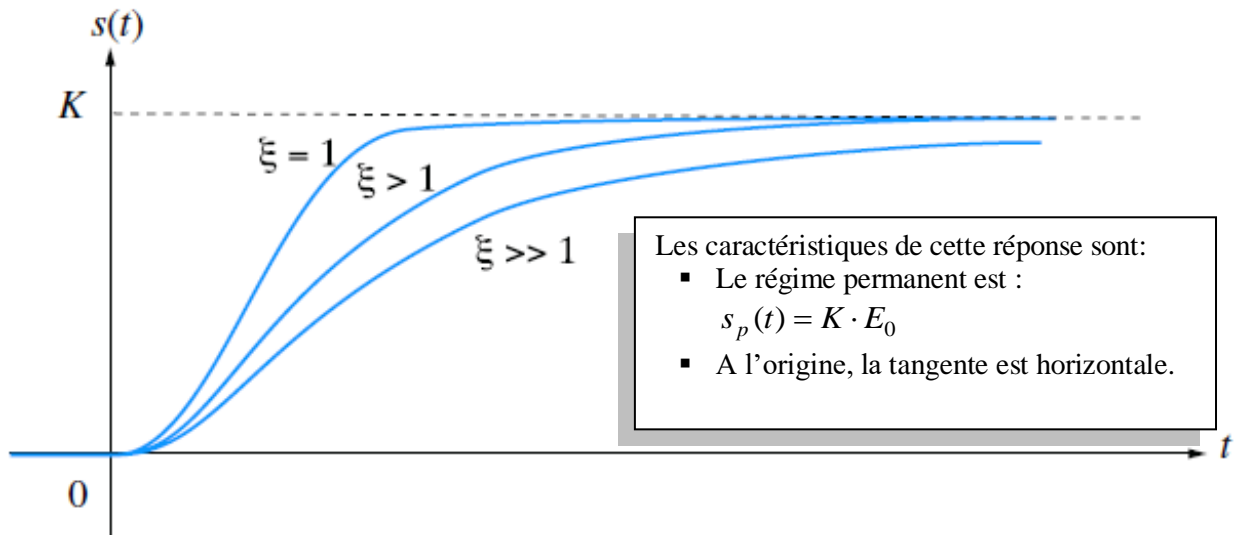
Entrée		Réponse ou sortie	
Temps : e(t)	Laplace :E(p)	Temps : s(t)	Laplace : S(p)
$E_0 \cdot u(t)$	$\frac{E_0}{p}$	$K \cdot E_0 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2}\right) u(t)$	$\frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$ <p>avec :</p> $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}, p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

- $m = 1$: Régime critique (la réponse la plus rapide possible sans oscillations).

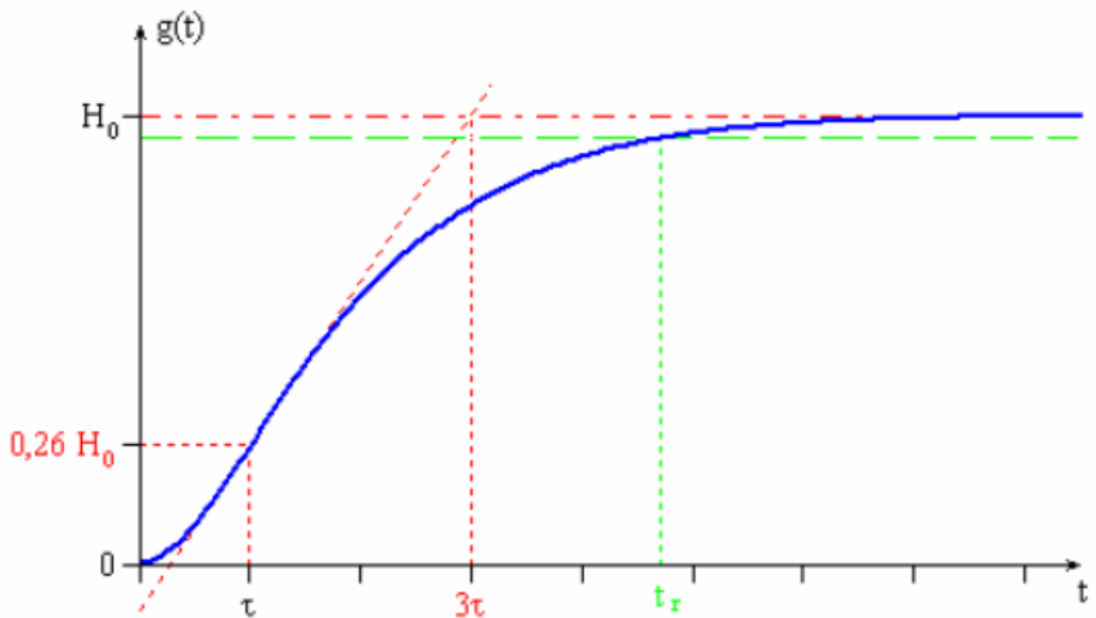
$$m = 1$$

Entrée		Réponse ou sortie	
Temps :e(t)	Laplace :E(p)	Temps : s(t)	Laplace : S(p)
$E_0 \cdot u(t)$	$\frac{E_0}{p}$	$K \cdot E_0 \left[1 - (1 + \omega_0 t) e^{-t/\tau_0}\right] \cdot u(t)$	$\frac{K \cdot \omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$

La courbe de réponse ressemble à celle pour $m > 1$ sauf que la croissance est plus rapide.



Exemple :



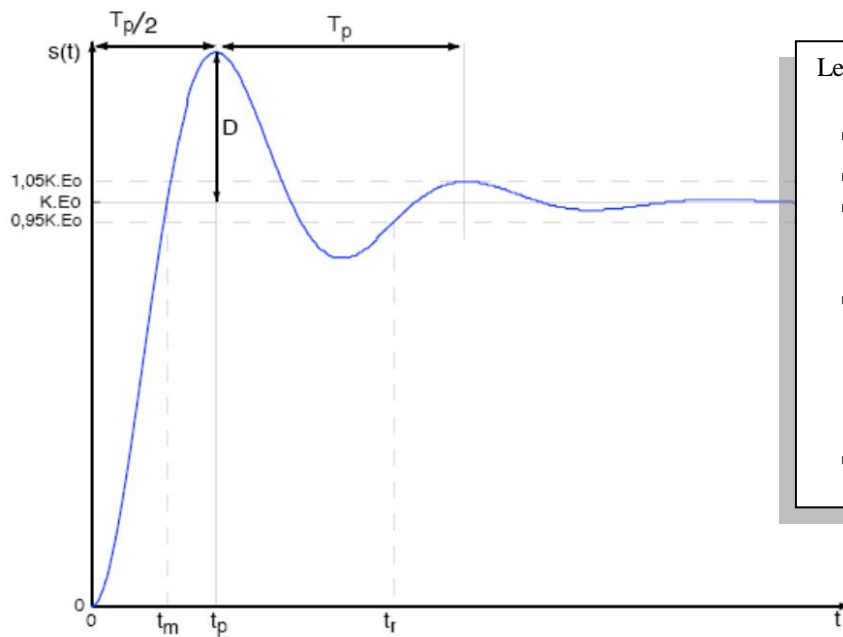
Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre à amortissement critique (t_r est le temps de réponse à 5%)

- $m < 1$: Système à faible amortissement (présence d'oscillations amorties)

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_1 = -\omega_0 [m - j\sqrt{(1 - m^2)}] \\ p_2 = -\omega_0 [m + j\sqrt{(1 - m^2)}] \end{cases} \quad (1)$$

$$m < 1$$

Entrée		Réponse ou sortie	
Temps : e(t)	Laplace : E(p)	Temps : s(t)	Laplace : S(p)
$E_0 \cdot u(t)$	$\frac{E_0}{p}$	$K \cdot E_0 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) u(t)$ $\tan \varphi = \sqrt{1 - m^2} / m$ <p>ou</p> $KE_0 u(t) - \frac{K}{\sqrt{(1 - m^2)}} e^{-z\omega_0 t} \left[\sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m} \right) \right]$	Expression (1)



- Les caractéristiques de cette réponse sont:
- Régime permanent $s_p(t) = K \cdot E_0$
 - A l'origine, la pente est horizontale
 - Pulsation propre amortie

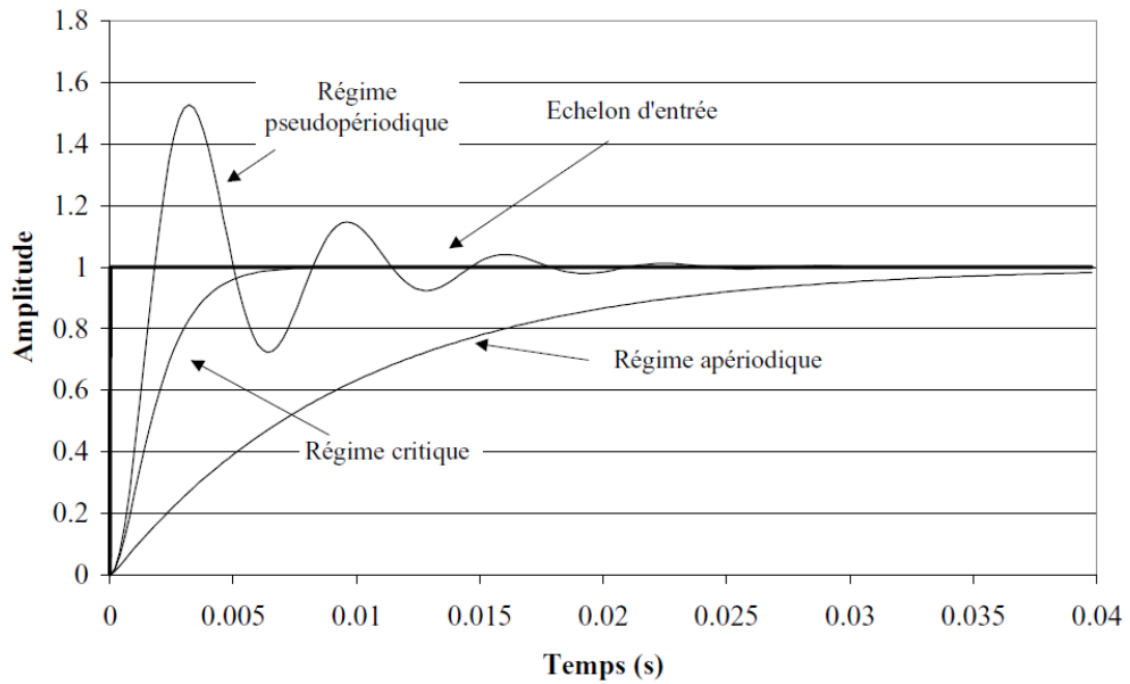
$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$
 - Pseudo-période d'oscillations

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$
 - Temps de montée $t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right)$

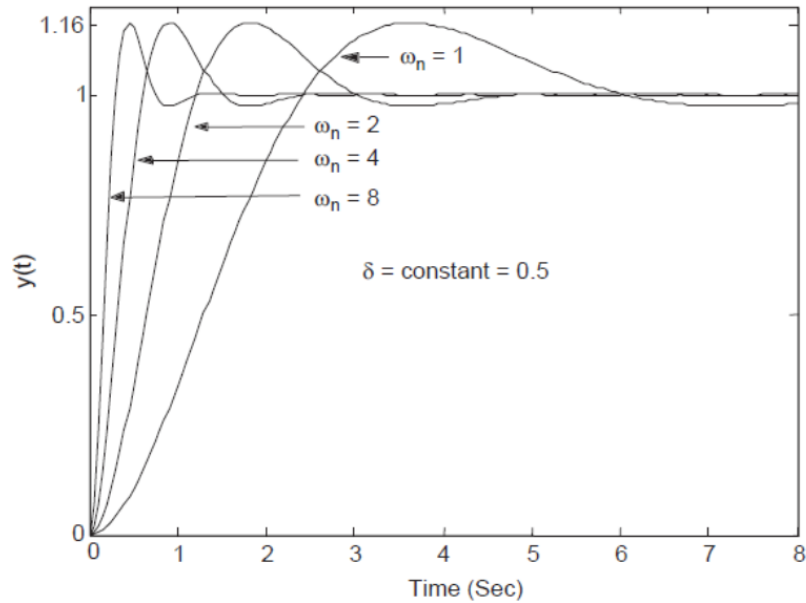
- Temps de pic: $t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$
- Temps de réponse à 5% : $t_r = 3 \frac{\tau_0}{z} = \frac{3}{z\omega_0}$
- Le premier dépassement : $D = s(t_p) - K \cdot E_0 = K \cdot E_0 \cdot \exp \left(-\frac{\pi z}{\sqrt{1 - z^2}} \right)$
- Relation entre deux dépassements successifs : $\ln \frac{D_2}{D_1} = \frac{-2\pi z}{\sqrt{1 - z^2}}$

La figure suivante montre les trois types de réponses :

- $m > 1$: Régime aperiodique (Système à fort amortissement)
- $m < 1$: Régime pseudoperiodique (Système à faible amortissement)
- $m = 1$: Régime critique (Système à amortissement critique)



De même, sur la figure suivante, on donne la réponse d'un système du deuxième ordre pour $m = C^{ste} = 0,5$ et pour différentes valeurs de la pulsation propre ω_0 .



V. 2. 2 Réponse impulsionnelle (entrée = impulsion)

Dans le domaine de Laplace, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- $m > 1$ ($\Delta > 0$) \Rightarrow L'équation caractéristique possède deux racines réelles

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-m \mp \sqrt{m^2 - 1} \right) < 0$$

La décomposition en éléments simples donne :

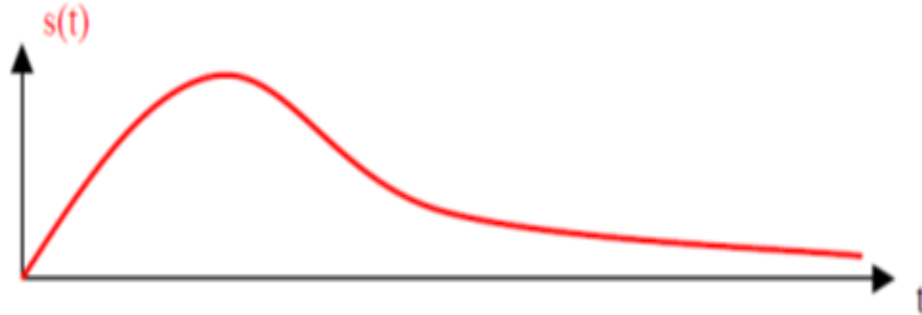
$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2}$$

Après identification, on trouve :

$$A = -B = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}}$$

D'où :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

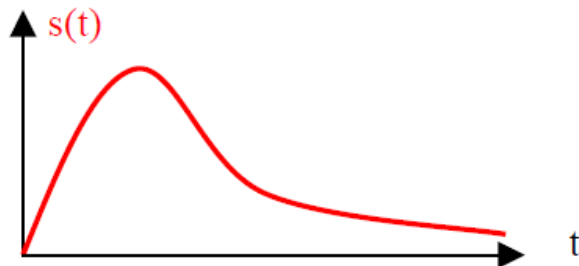


- $m = 1$ ($\Delta = 0$) \Rightarrow Dans ce cas, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \quad y(t) = K\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} \cdot t$$

Cette réponse possède la même allure que dans le cas $m > 1$, avec $t_{max} = \frac{1}{\omega_0}$ et

$$y(t_{max}) = \frac{K\omega_0}{e}$$

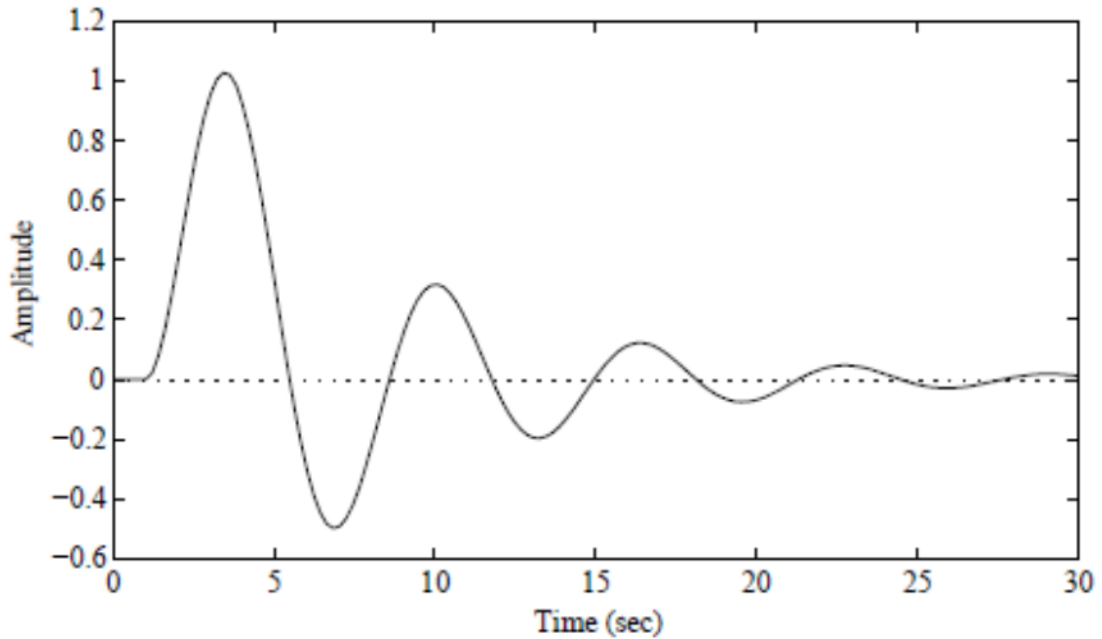


- $m < 1$ ($\Delta < 0$) \Rightarrow 2 racines complexes conjuguées

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad \text{avec} \quad p_{1,2} = \omega_0(-m \mp \sqrt{1 - m^2}) < 0$$

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \Rightarrow y(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}(e^{-\omega_0 m t}) \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t)$$



On peut remarquer que la réponse est :

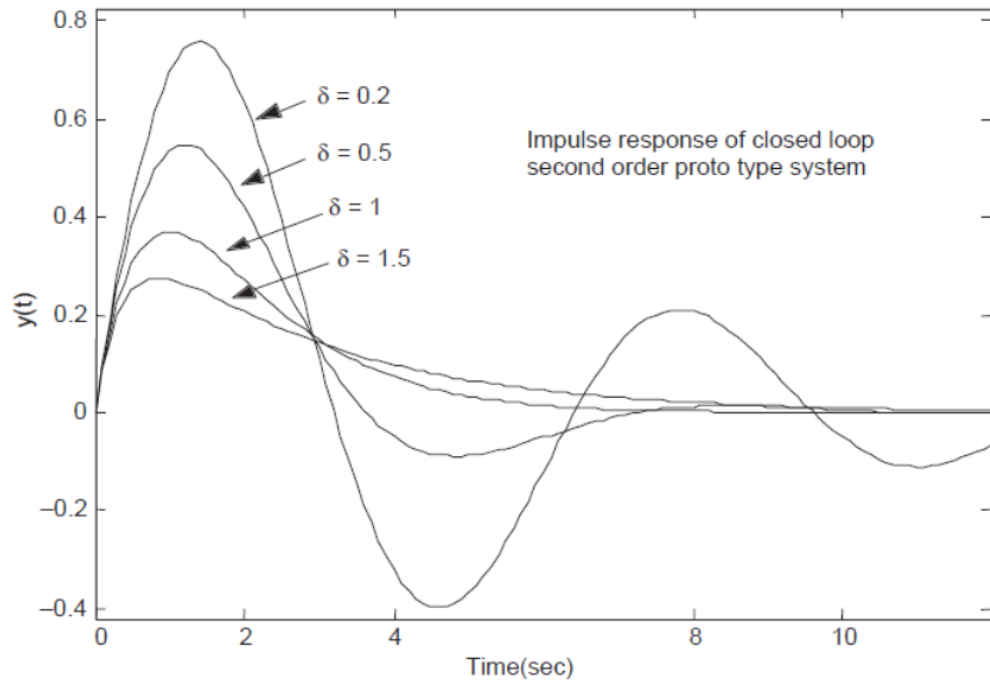
- Oscillante (à cause de $\sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t)$)
- Amortie (à cause de $e^{-\omega_0 m t}$)

On note :

$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$: la pulsation propre amortie du système

$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$: Période des pseudo-oscillations (pseudo-période)

Les trois cas ($m > 0$, $m = 0$, $m < 0$) sont résumés dans la courbe suivante :



VI. Influence des pôles sur la réponse d'un système

On donne sur la figure ci-dessous un exemple de positionnement des pôles dans le plan complexe et les réponses impulsionnelles associées.

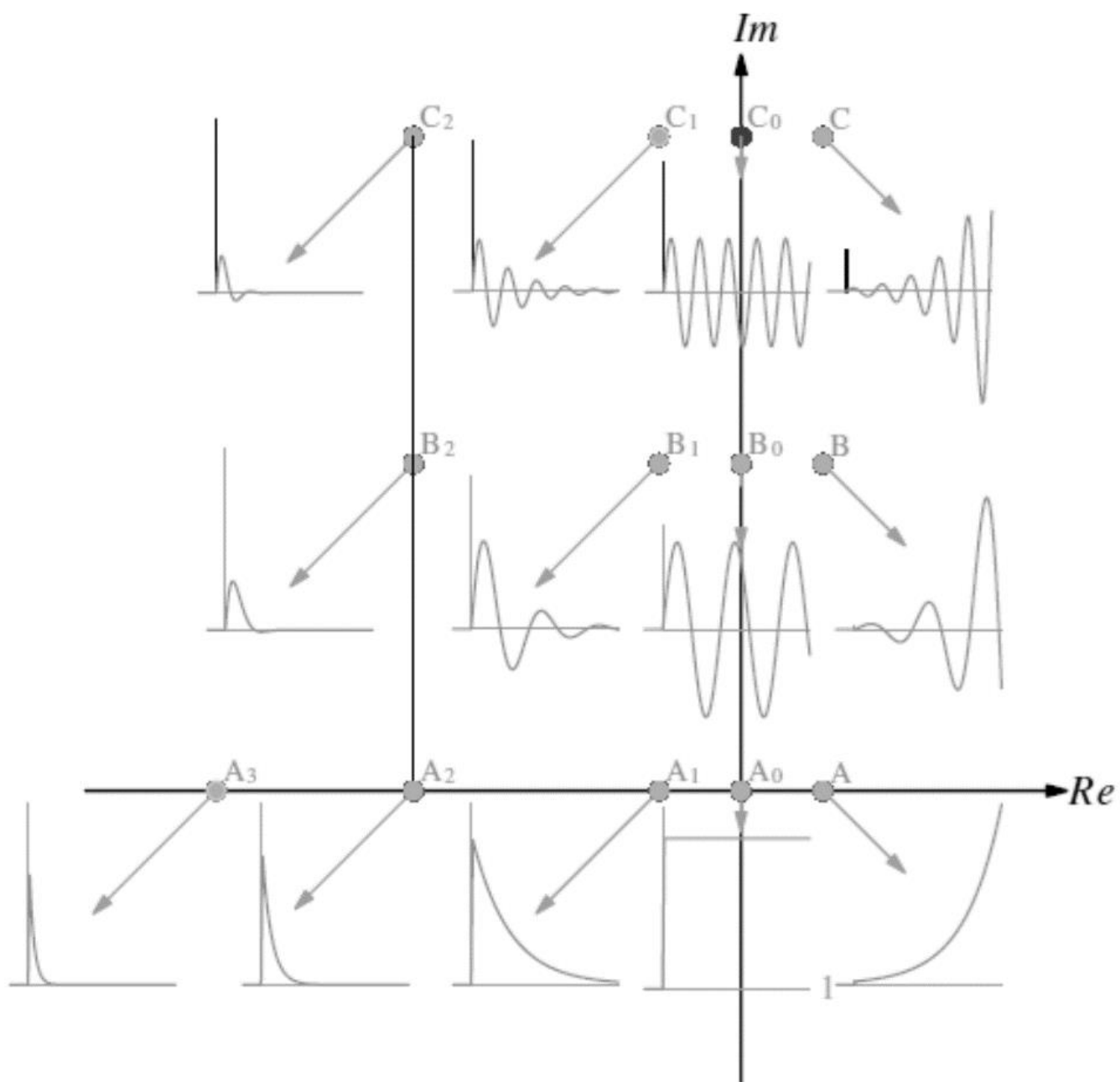
A partir de ces courbes, nous pouvons noter les remarques suivantes :

1. D'une part :

- pour un pôle réel, la réponse varie exponentiellement, et le mode associé est dit exponentiel ;
- pour une paire de pôles complexes conjugués, la réponse varie avec des oscillations dans une enveloppe en exponentielle, le mode associé est dit oscillant. Leur fréquence d'oscillation augmente avec leur partie imaginaire.

2. D'autre part :

- pour les pôles à partie réelle positive, la réponse est divergente ;
- pour les pôles à partie réelle négative, la réponse converge vers zéro et plus le pôle est éloigné de l'axe imaginaire, plus la décroissance est rapide.



VII. Systèmes d'ordre supérieur

Nous venons de voir que la forme de la réponse d'un système linéaire est déterminée par l'ordre du système, et plus particulièrement par la valeur et donc la position de ses pôles.

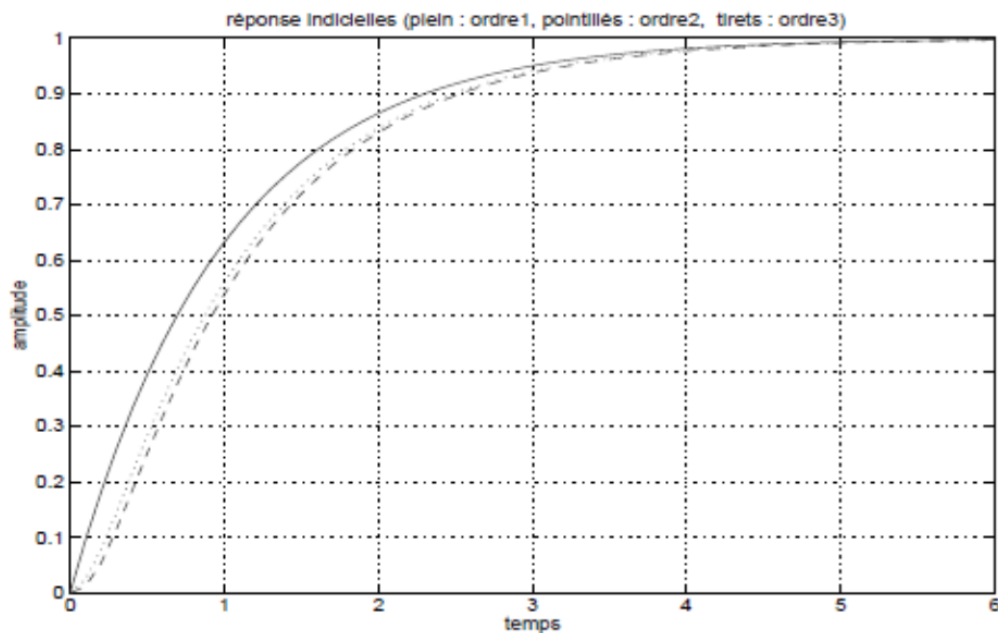
Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses temporelles devient compliqué.

L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement d'un système en fonction de ses réponses temporelles tout en considérant un nombre limité de paramètres (un système relativement simple).

On note que :

- un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, 1 ou 2 pôles dominants et se comporte donc comme un système du *premier* ou du *deuxième ordre*.
- on peut simplifier la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le (ou les) pôle(s) dominant(s) (approximation par un système du premier ou du deuxième ordre).
- en pratique, un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 à 4 fois supérieur au précédent.

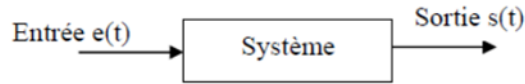
Exemple



Réponse indicielle et pôles dominants

Annexe A

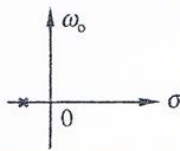
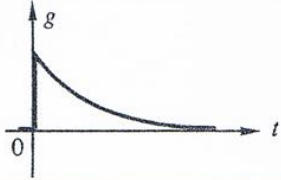
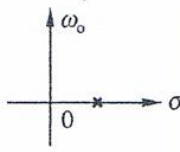
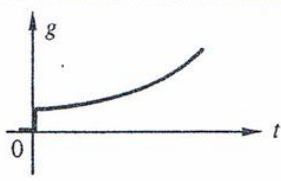
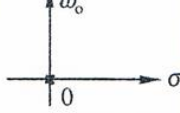
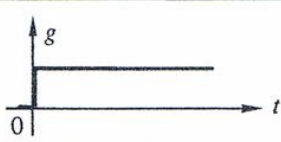
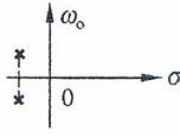
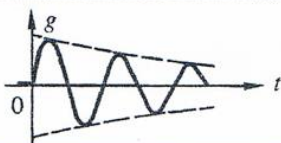
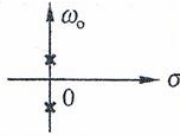
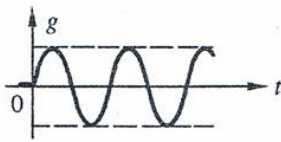
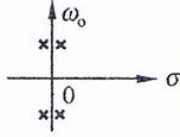
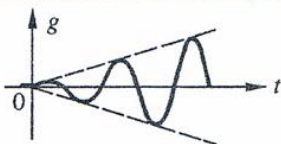
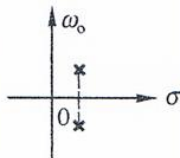

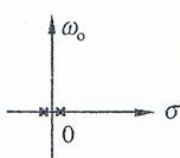
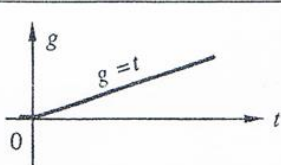
Réponse temporelle aux entrées types



Fonctions	Equations	Réponse s(t)	Allures
Dirac ou impulsion (percussion)	$e(t) = E \delta(t)$ tel que : $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$	Réponse impulsionnelle	
échelon de position	$e(t) = E u(t)$ tel que: $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$	Réponse indicielle	
échelon de vitesse (rampe)	$e(t) = at u(t)$	Réponse de vitesse	
échelon d'accélération	$e(t) = \frac{a}{2} t^2 u(t)$	Réponse d'accélération	
sinusoïdale	$e(t) = a \sin(\omega t)$	Réponse sinusoïdale	

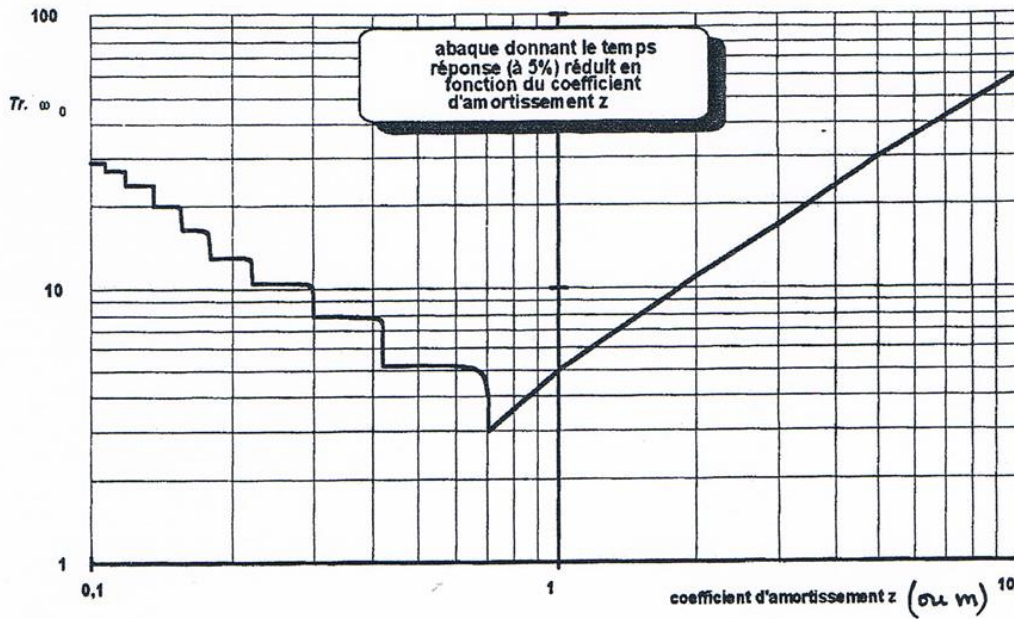
Annexe B

Position des pôles et réponses temporelles

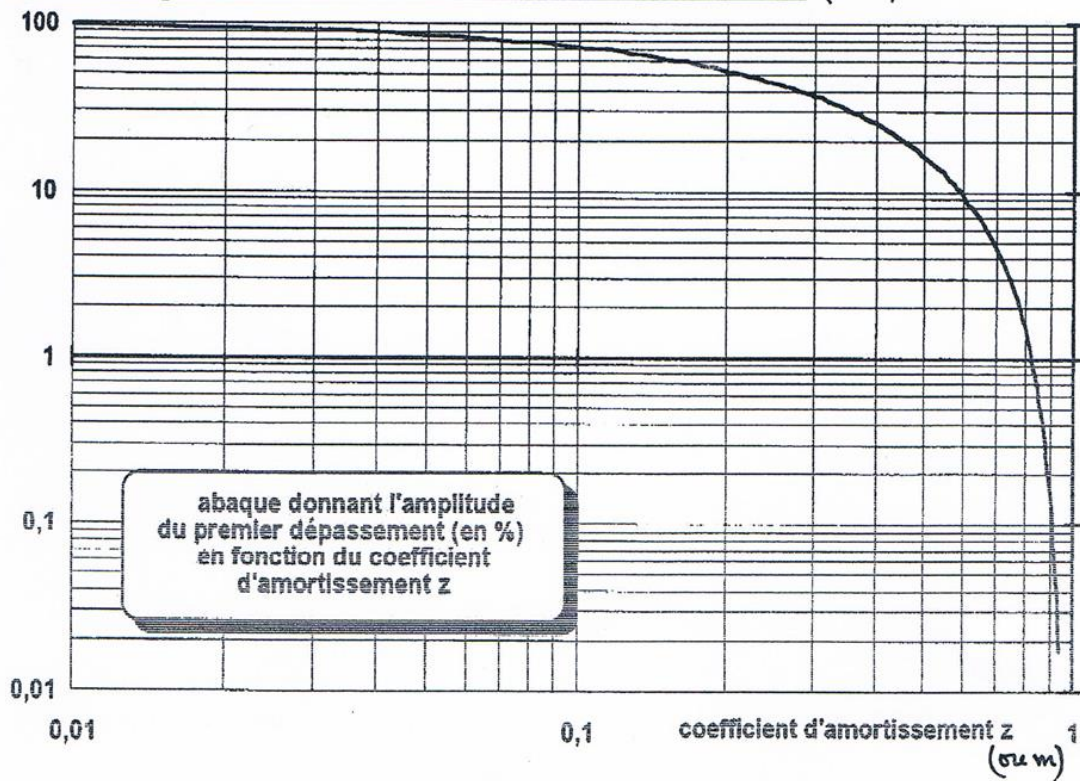
Type de pôle	Plan complexe $s = \sigma \pm j\omega_0$	Graphes de la réponse impulsionnelle	Remarques
Réel négatif			Asymptotiquement stable
Réel positif			Instable
Nul (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Complexe conjugué Partie réelle négative			Asymptotiquement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 2)			Instable
Complexe conjugué Partie réelle positive			Instable
Nuls (Multiplicité = 2)			Instable

Annexe C

Soit Tr le temps de réponse à 5% et $Tr. \omega_0$ le temps de réponse réduit en fonction de z : ($\sigma u m$)



D_1 premier dépassement en % de la valeur finale en fonction de z . ($\sigma u m$)



Annexe D

*Résumé des lois de calcul des paramètres
d'un système du second ordre*

• Fonction de transfert:	$G_{s2}(s) = \frac{K_s}{1 + \frac{2\delta s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$	
• Pulsation naturelle:	ω_0 (ou ω_n)	$[s^{-1}]$
• Coefficient d'amortissement:	δ (ou ζ)	$[...]$
• Période naturelle:	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$[s]$
• Temps de pic:	$t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\delta^2}}$	$[s]$
• Pseudopériode:	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\delta^2}}$	$[s]$
• Temps de montée (0 à 100 %):	$t_m = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}{\omega_0 \sqrt{1-\delta^2}}$	$[s]$
• Temps de montée (10 à 90 %):	$t_{m19} \cong \frac{1 - 0,4167\delta + 2,917\delta^2}{\omega_0}$	$[s]$
• Temps de réponse à 5 %		
($\delta \in [0,01 \quad 0,7]$):	$t_r \cong \frac{3}{\delta \omega_0}$	$[s]$
($\delta \in [1 \quad 100]$):	$t_r \cong \frac{6\delta}{\omega_0}$	$[s]$
• Constante de temps de la courbe enveloppe:	$T_e = \frac{1}{\delta \omega_0}$	$[s]$
• Pulsation propre ou pseudopulsation:	$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\delta^2}$	$[s^{-1}]$
• Pulsation de résonance:	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\delta^2}$	$[s^{-1}]$
• Dépassement:	$D_1 = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$	$[...]$

Réponses fréquentielle des systèmes linéaires

I. Introduction à l'analyse des systèmes linéaire

I. 1 Objectifs

La détermination des performances des systèmes asservis, à savoir :

- Son degré de stabilité (ou sa stabilité relative) ;
- Son régime transitoire (amortissement et rapidité) ;
- Sa précision statique ou son comportement en régime permanent.

I. 2 Procédure

1. Déterminer les équations différentielles de chacun des constituants du système ;
2. Ramener, à l'aide de la TL de ces équations, l'étude du système à un problème algébrique ;
3. Tracer le schéma fonctionnel du système et le simplifier (forme canonique ou à retour unitaire) ;
4. Déterminer les performances du système.

I. 3 Méthodes

1. La méthode purement *mathématique* qui se traduit par la recherche de la solution directe de l'équation différentielle du système ;
2. La méthode fréquentielle et *courbes de Bode* ;
3. Les méthodes harmoniques et fréquentielles de *Nyquist* et de *Black-Nichols* ;
4. La méthode du *lieu des racines* (*lieu des pôles* ou *d'Evans*).

II. Réponse en fréquence et courbes de Bode

II. 1 Réponse en fréquence

Pour une entrée harmonique $e(t) = E_0 \sin \omega t$ ou ω est une pulsation (fréquence) réglable, la sortie du système est de la forme : $s(t) = S_0 \sin (\omega t + \varphi)$.

Dans le plan complexe, on pose $p = j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert $H(p)$ et on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

avec :

$$A(\omega) = \frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)| : \text{Amplitude de } H(p)$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) : \text{Argument de } H(p).$$

En faisant varier ω , on obtient les réponses en fréquence du système :

- $A(\omega)$: courbe d'amplitude (affaiblissement car $A(\omega)$ est en général, une fonction décroissante) ;
- $\varphi(\omega)$: courbe de phase.

La connaissance de $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ permet de caractériser complètement $H(j\omega)$ et donc de caractériser le système.

II. 2 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'une FT donne une représentation en fonction de la pulsation ω

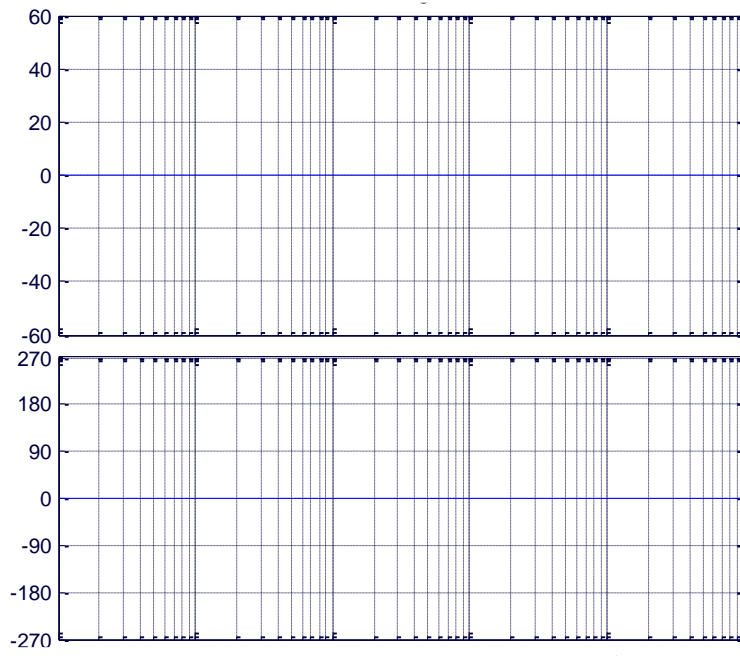
- de son module $A(\omega)$ en décibels :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \text{Log}_{10} |H(j\omega)| \quad [dB]$$

- et de sa phase $\varphi(\omega)$ exprimée en degré (ou en radians) :

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \quad [^\circ]$$

Le diagramme de Bode est représenté dans le plan suivant :



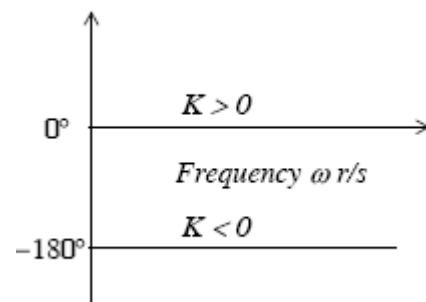
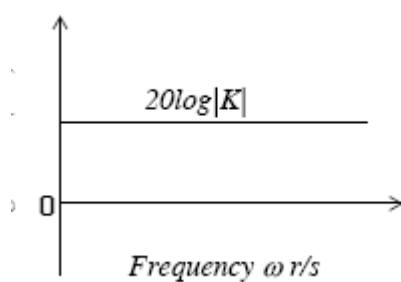
Dans l'échelle des pulsations (semi-logarithmique, pour permettre la représentation tant les basses fréquences (BF) que les hautes fréquences (HF)), on définit :

- **l'octave** : la distance entre ω et 2ω , $\forall \omega$.
- **La décade** : la distance entre ω et 10ω , $\forall \omega$.

II. 3 Diagramme de Bode des fonctions élémentaires

II. 3. 1 Gain : $H(j\omega) = K$

$$\begin{cases} A_{db}(\omega) = 20\text{Log}|K| \quad db \\ \varphi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{0}{K}\right) = \text{arctg}(0) = \begin{cases} 0^\circ & K > 0 \\ -180^\circ & K < 0 \end{cases} \end{cases}$$



II. 3. 2 Intégrateur pur : $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau}$

$$\begin{cases} A_{db}(\omega) = 20\text{Log}\left|\frac{1}{j\omega\tau}\right| = -20\text{Log}|j\omega\tau| = -20\text{Log}(\omega\tau) \\ \varphi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{1}{j\omega\tau}\right) = -\text{arctg}\left(\frac{\omega\tau}{0}\right) = -\text{arctg}(+\infty) = -90^\circ \end{cases}$$

La variation de $A(\omega)$ est linéaire dans l'échelle logarithmique. Pour déterminer la pente de cette variation, on considère les fréquences $\frac{1}{\tau}$ et $10\frac{1}{\tau}$:

- $\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow A_{db}(\omega) = -20\text{Log}(1) = 0 \text{ dB}$
- $\omega = \frac{10}{\tau} \Rightarrow A_{db}(\omega) = -20\text{Log}(10) = -20 \text{ dB}$

Donc, si ω varie d'une décade $\Rightarrow A_{db}(\omega)$ varie de (-20 dB) \Rightarrow une pente de -20 dB/déc.

On généralise alors pour $H(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega\tau}\right)^n$. Les courbes de Bodes sont alors les suivantes :

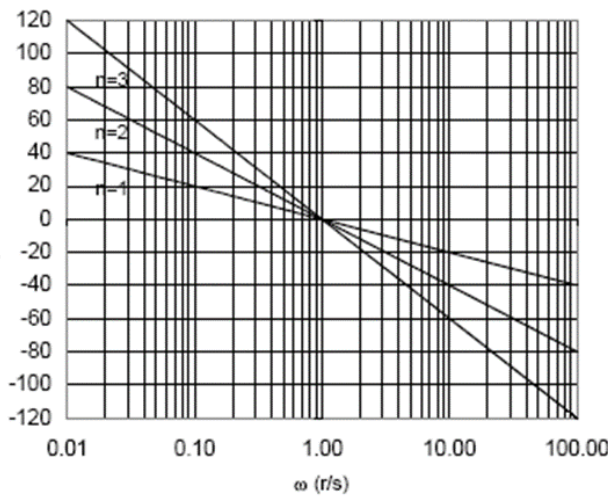


Diagramme d'amplitude

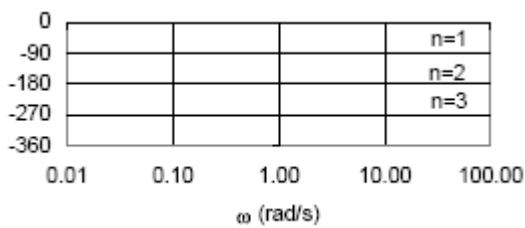


Diagramme de phase

II. 3. 3 Dérivateur pur : $H(j\omega) = j\omega\tau$

- $A_{db}(\omega) = 20\text{Log}(\omega\tau)$

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow A_{db}(\omega) = 0\text{ db} \\ \omega = \frac{10}{\tau} \Rightarrow A_{db}(\omega) = 20\text{ db} \end{cases} \Rightarrow \text{pente} = 20\text{ db/dec}$$
- $\varphi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\omega\tau}{0}\right) = \text{arctg}(+\infty) = 90^\circ$

Pour $H(j\omega) = (j\omega\tau)^n$, nous avons les courbes suivantes :

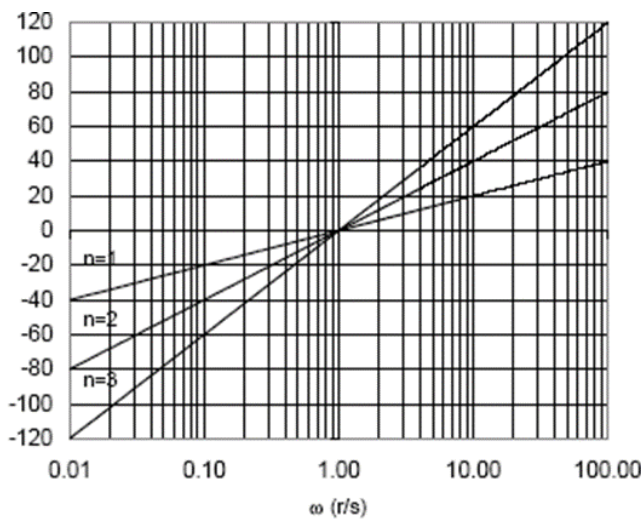


Diagramme d'amplitude

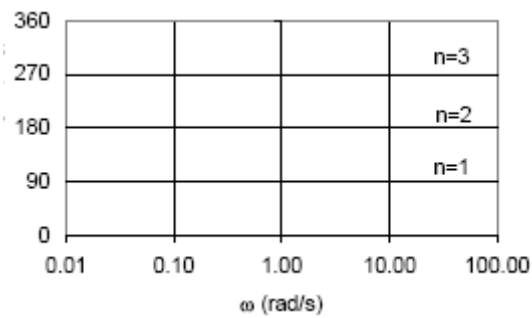


Diagramme de phase

II. 3. 4 Système du 1^{er} ordre : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

- $A_{db}(\omega) = 20\text{Log}|H(j\omega)| = 20\text{Log}(1) - 20\text{Log}\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} = -20\text{Log}\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$

- $\varphi(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = -\text{arctg}(\omega\tau)$

- **BF:** $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} A_{db}(\omega) = -20\text{Log}\sqrt{1} = 0 \text{ db} \\ \varphi(\omega) = -\text{arctg}(0) = 0^\circ \end{cases}$

- **HF:** $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} A_{db}(\omega) = -20\text{Log}\sqrt{\omega^2\tau^2} = -20\text{Log}(\omega\tau) \\ \varphi(\omega) = -\text{arctg}(\infty) = -90^\circ \end{cases}$

- $\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} A_{db}(\omega) = -20\text{Log}\sqrt{1} = 0 \text{ db} \\ \varphi(\omega) = -\text{arctg}(1) = -45^\circ \end{cases}$

- $\omega = \frac{10}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} A_{db}(\omega) = -20\text{Log}\sqrt{10} = -20 \text{ db} \\ \varphi(\omega) = -\text{arctg}(1) = -45^\circ \end{cases}$ pente = -20
db/dec

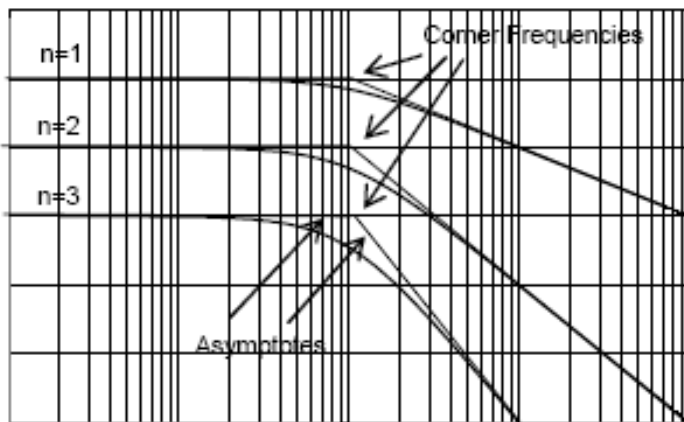


Diagramme d'amplitude

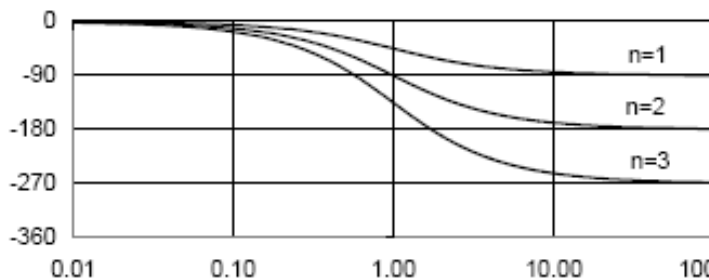


Diagramme de phase

De même, pour le système dont la FT est donnée par : $H(j\omega) = 1 + j\omega\tau$, on trouve :

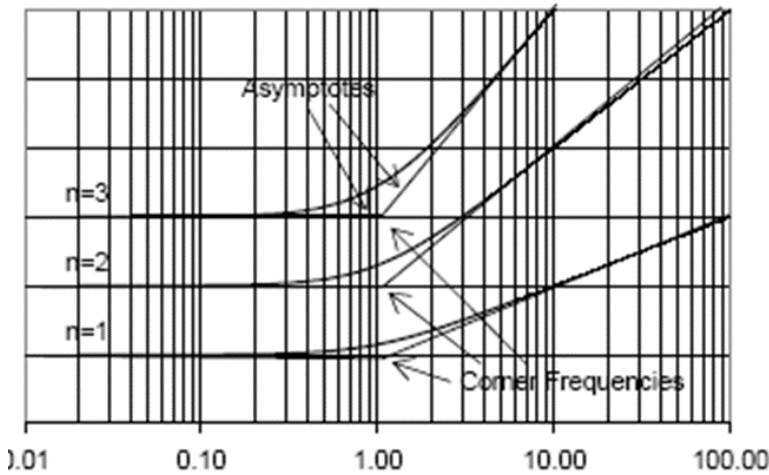


Diagramme d'amplitude

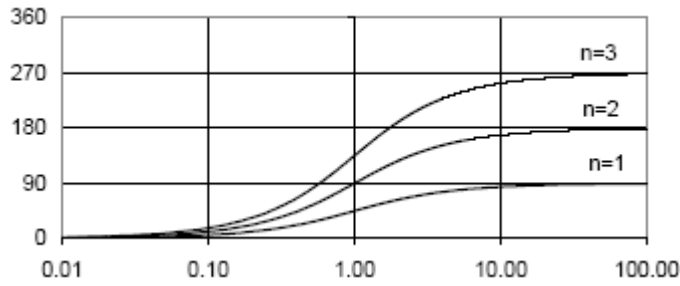


Diagramme de phase

II. 3. 5 Système du 2^{ème} ordre : $H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j2m\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j2m\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Tout dépend de la valeur du facteur d'amortissement m :

- $m > 1 \Rightarrow$ les pôles sont réels et $H(j\omega)$ peut se mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs du 1^{er} ordre.
- $m < 1 \Rightarrow$ les pôles sont complexes :

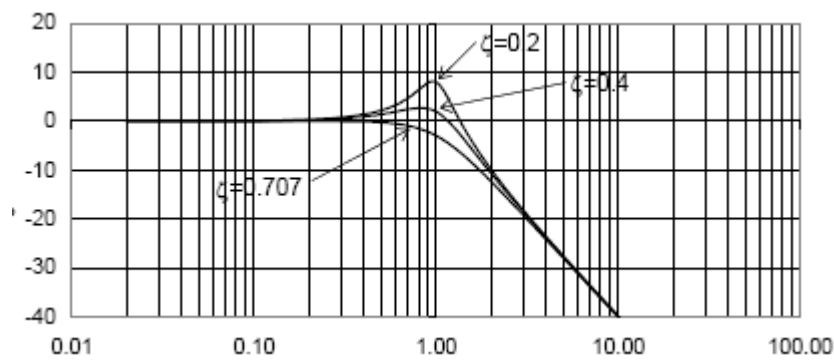
$$A_{db}(\omega) = -20 \text{Log} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\phi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2m \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

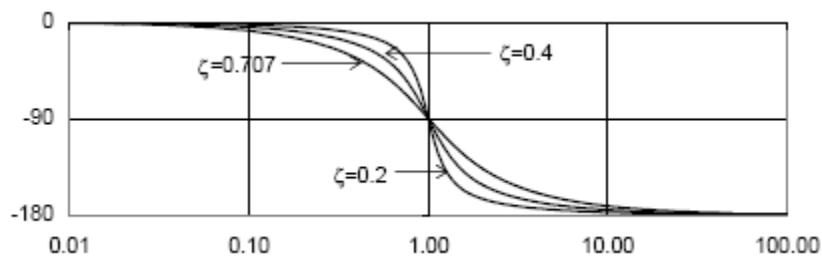
Posons $y = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} A_{db}(\omega) = -20 \text{Log} \sqrt{(1 - y^2)^2 + (2my)^2} \\ \phi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2my}{1 - y^2} \end{cases}$

L'allure du diagramme de Bode dépend de la valeur du facteur d'amortissement m .

- *Diagramme d'amplitude*



- *Diagramme de phase*



De même, pour un système de type passe-haut de FT $H(p) = p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$, Le diagramme de Bode se déduit par symétrie par rapport à l'axe des ω .

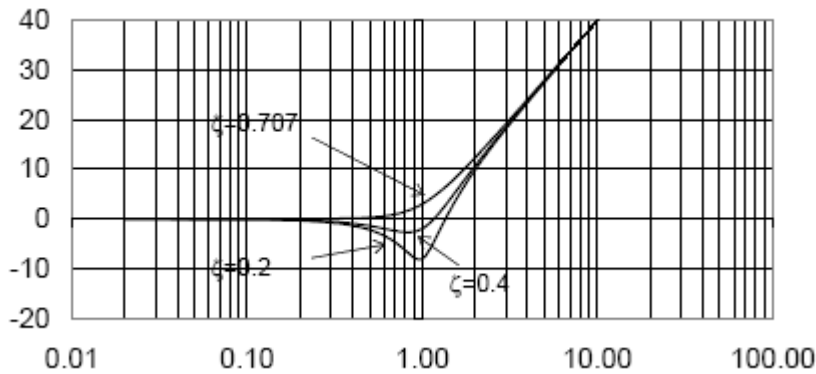


Diagramme d'amplitude

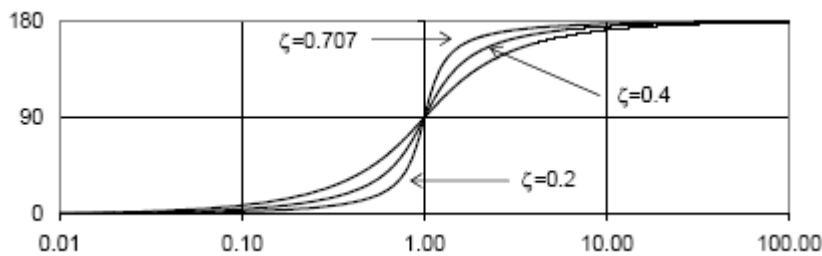


Diagramme de phase

II. 3. 6 Système d'ordre quelconque :

Considérons le système présenté par la FT suivante : $H(p) = K \frac{1 + \tau_1 p}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$

Avec $\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2} < \frac{1}{\tau_3}$ et $K > 1$.

Cette FT peut être traitée de deux manières :

Première méthode :

1. Décomposer $H(p)$ en produit de quatre FT :

$$H_1(p) = K, \quad H_2(p) = 1 + \tau_1 p, \quad H_3(p) = \frac{1}{1 + \tau_2 p}, \quad H_4(p) = \frac{1}{1 + \tau_3 p}.$$

2. Tracer le diagramme de Bode de chacune des FT élémentaires $H_i(p)$ $i = 1, 2, 3, 4$.
3. Additionner les diagrammes des amplitudes en db et les diagrammes de phase en degré.

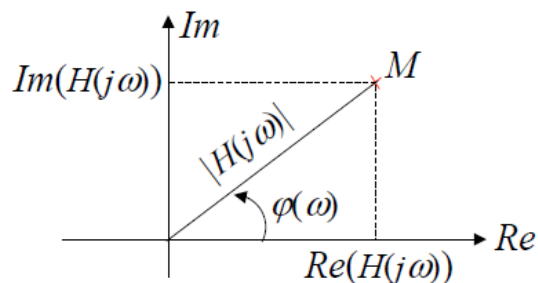
Deuxième méthode : Traiter la FT globale $H(p)$:

$$\begin{cases} A_{db}(\omega) = 20\text{Log}(K) + 20\text{Log}\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2} - 20\text{Log}\sqrt{1 + \omega^2\tau_2^2} - 20\text{Log}\sqrt{1 + \omega^2\tau_3^2} \\ \varphi(\omega) = 0 + \text{arctg}(\tau_1\omega) - \text{arctg}(\tau_2\omega) - \text{arctg}(\tau_3\omega) \end{cases}$$

III. Diagramme de Nyquist

III. 1 Définitions

1. Le lieu de Nyquist est le lieu, en coordonnées polaires, des points d'affixe $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Il est gradué avec les valeurs de ω .

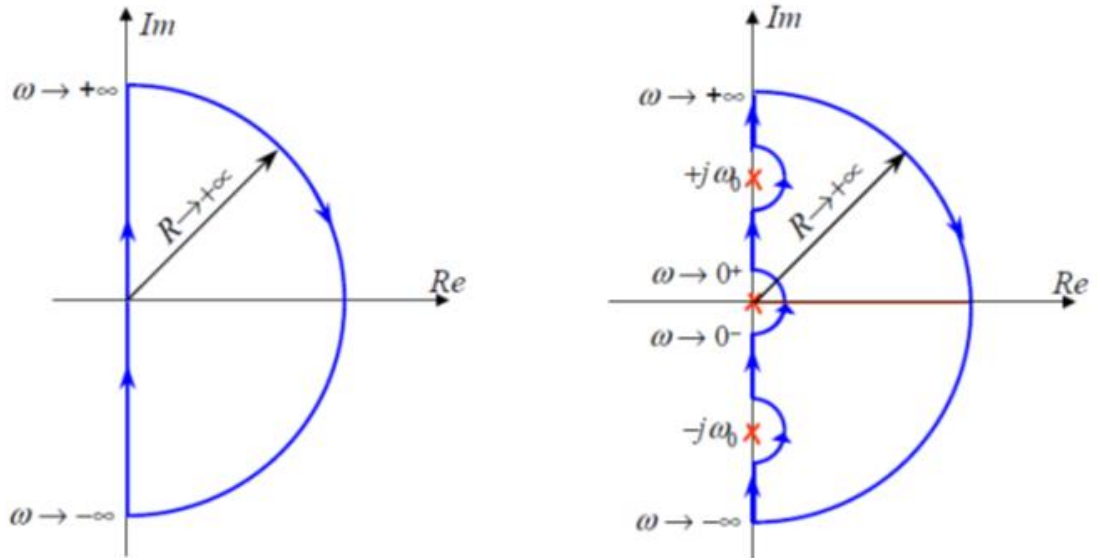


Soit le point M associé à $H(j\omega)$

$$M(|H(j\omega)|, \arg(H(j\omega)))$$

2. Le diagramme de Nyquist (lieu complet) correspond à ω variant de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'obtient par symétrie par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist.

Le diagramme de Nyquist est l'image par $H(p)$ du *contour fermé* appelé *contour d'exclusion de Nyquist*. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de $H(p)$ à partie réelle strictement positive. Si $H(p)$ a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon $\varepsilon \rightarrow 0$.



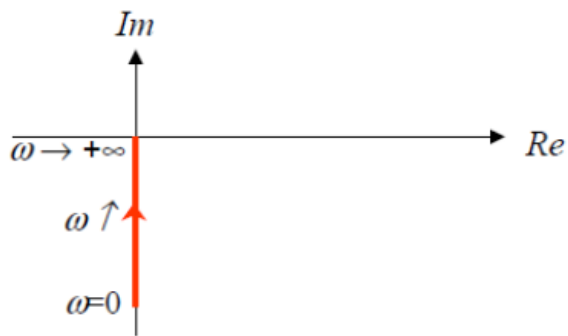
III. 2 Lieu de Nyquist des systèmes usuels

1. Intégrateur pur $H(p) = \frac{1}{p}$

$\omega \rightarrow 0, |H(j\omega)| \rightarrow +\infty$

$\omega \rightarrow +\infty, |H(j\omega)| \rightarrow 0$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \forall \omega \in [0 \quad +\infty[$

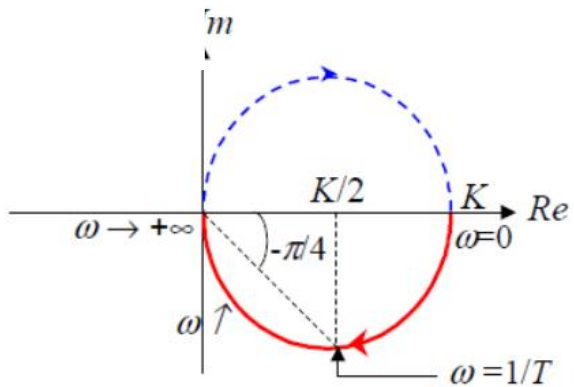


2. Système du premier ordre $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$ ($K > 0, \tau > 0$)

$\omega = 0, |H(j\omega)| = K$ et $\varphi = 0$

$\omega = \frac{1}{T}, |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

$\omega \rightarrow \infty, |H(j\omega)| = 0$ et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

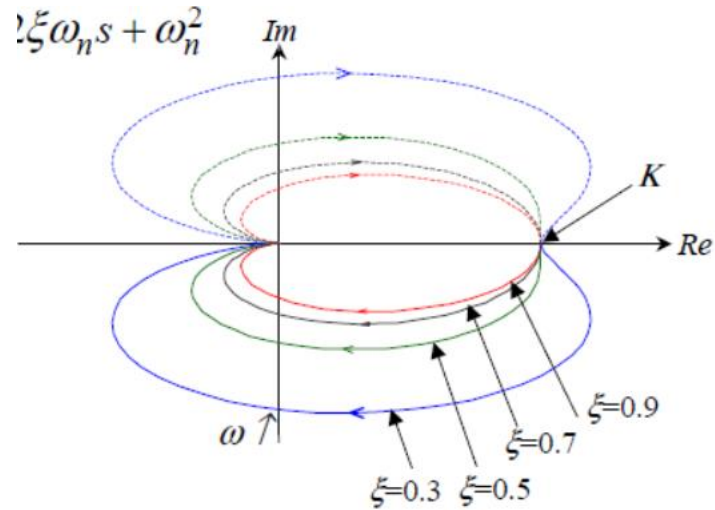


3. Système du deuxième ordre $H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$

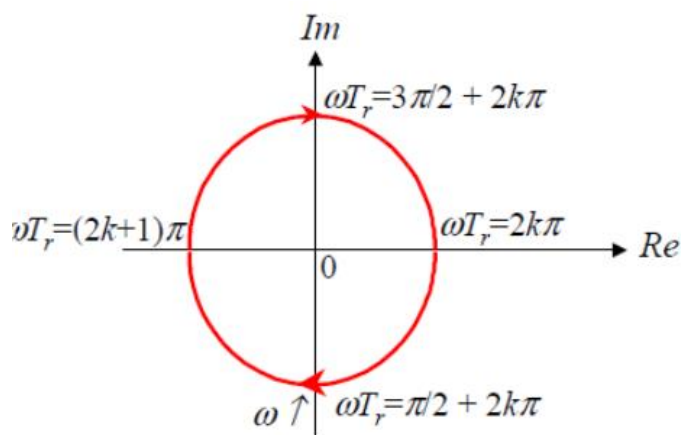
$\omega = 0 \quad | \quad 0$

$\omega = \omega_n \quad | \quad |H(j\omega)| = 2\xi \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega \rightarrow \infty \quad | \quad |H(j\omega)| = 0 \text{ et } \varphi = -\pi$



4. Retard pur $H(p) = e^{-\tau_r p}$



Le lieu de Nyquist est un cercle centré en 0 et de rayon unité

IV. Lieu de Black

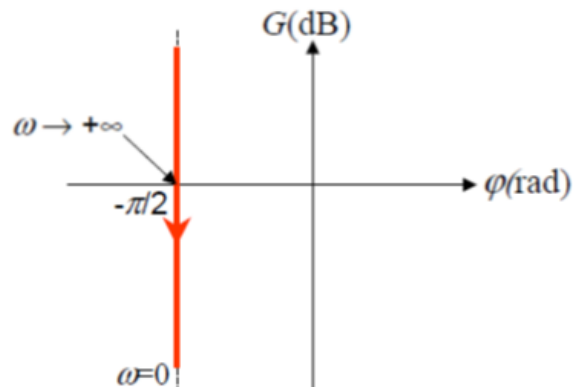
IV. 1 Définition

Le lieu de Black est la représentation cartésienne de $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Le lieu de Black est gradué avec les valeurs du paramètre ω .

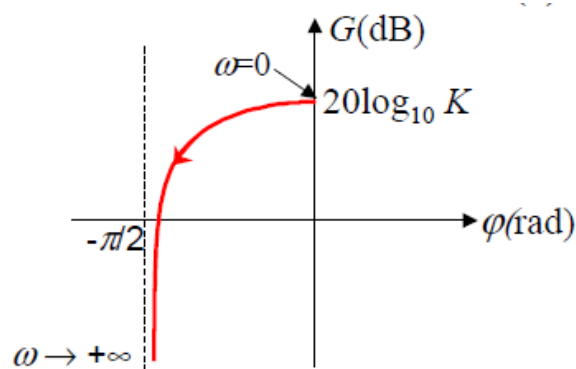
- Abscisse : la phase en degré ou radian
- Ordonnée : le gain en décibel (dB)

IV. 2 Lieu de Black des systèmes usuels

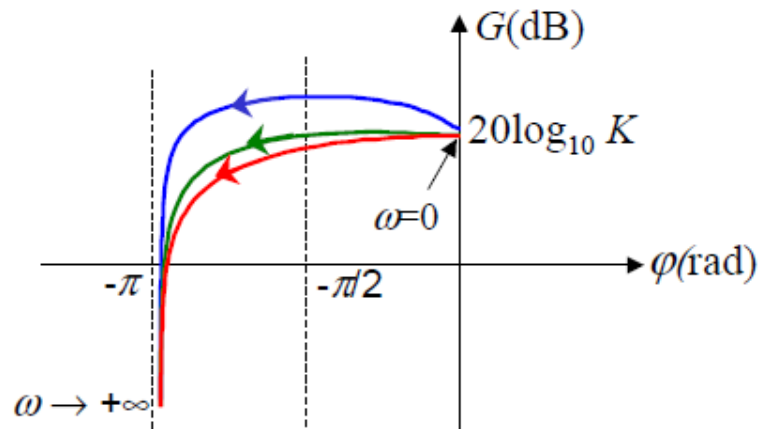
1. Intégrateur $H(p) = \frac{1}{p}$



2. Système du premier ordre $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$ ($K > 0$, $\tau > 0$)



3. Système du deuxième ordre $H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$



V. Marges de phase et de gain

Les marges de stabilité constituent une sécurité contre un risque d'instabilité. On les nomme également "*marges de stabilité*".

Elles permettent d'estimer la proximité de la réponse fréquentielle $H_{FTBO}(j\omega)$ du point critique $-1 = 1 - \pi$.

V. 1 Marge de phase M_φ

Soit ω_{c0} la pulsation telle que $|H_{FTBO}(j\omega_{c0})| = 1$.

La marge de phase est la différence entre $\varphi_{FTBO}(\omega_{c0})$ et $-\pi$.

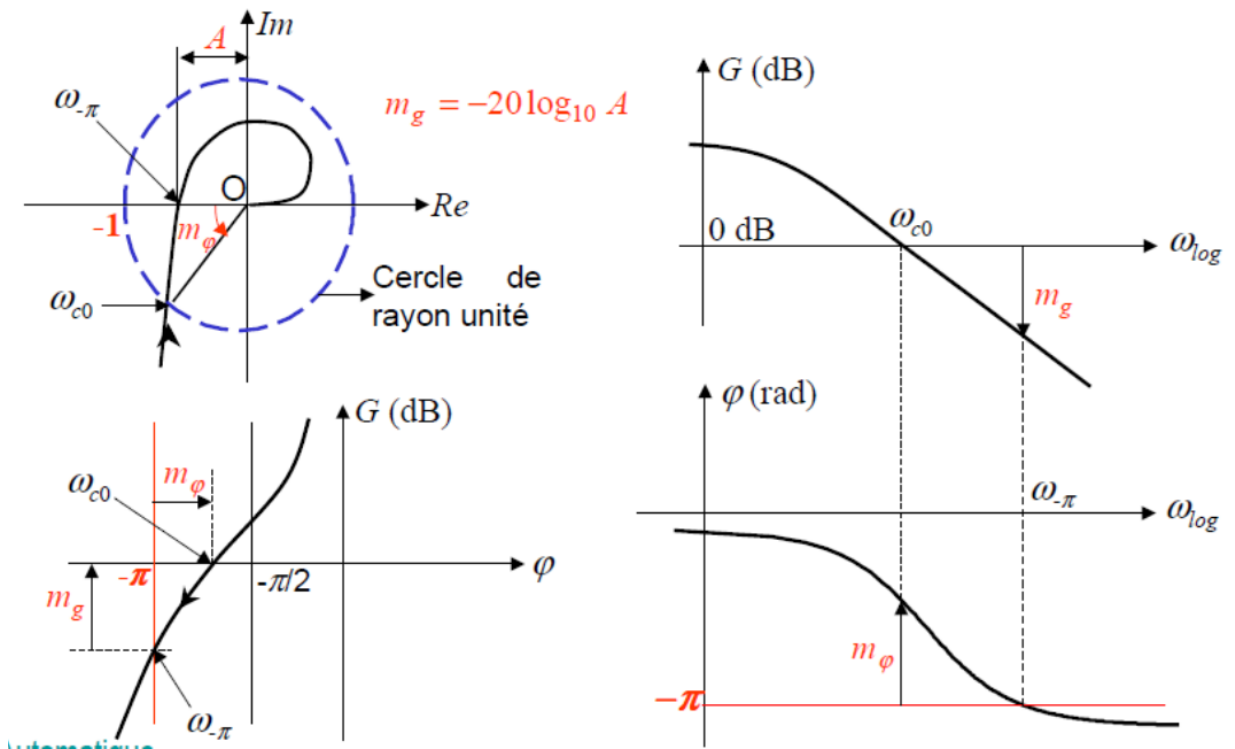
$$M_\varphi = \varphi_{FTBO}(\omega_{c0}) + \pi \quad \text{avec} \quad \varphi_{FTBO}(\omega_{c0}) = \arg(H(j\omega_{c0}))$$

V. 2 Marge de gain M_g

Soit $\omega_{-\pi}$ la pulsation telle que $\varphi(H_{FTBO}(j\omega_{-\pi})) = -\pi$. La marge de gain est l'écart entre $0dB$ et le gain à la pulsation $\omega_{-\pi}$.

$$M_g = -20 \text{ Log}_{10} |H_{FTBO}(j\omega_{-\pi})| \quad \text{avec} \quad \varphi_{FTBO}(\omega_{-\pi}) = -\pi$$

Dans les plans de Bode, Black, et Nyquist, ces marges de sécurité sont déterminées comme suit (figure ci-dessous) :



Performances des S.A.L.

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un *cahier des charges*. Ce cahier des charges se décline en termes de *performances* auxquelles le système doit satisfaire.

Si les performances attendues ne sont pas atteintes, il convient de modifier la commande du système pour faire évoluer ces performances dans le sens souhaité : C'est l'objet de la partie *correction* qui suit la définition des principaux critères de performances habituellement utilisés.

Partie 1 : Stabilité des S.A.L.I.T

I. Introduction

L'objectif principal de *l'analyse des systèmes asservis* est la détermination des caractéristiques suivantes :

- sa stabilité relative et absolue ;
- les performances des régimes permanent et transitoire.

La stabilité est une performance à satisfaire en priorité pour un système, car un système instable est inutilisable.

Savoir qu'un système est stable s'avère des fois insuffisant. Nous devons connaître à quel point il est proche de l'instabilité. Nous avons, alors, besoin de déterminer sa *stabilité relative*.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'étude de la stabilité par les méthodes de *Routh-Hurwitz* et *Nyquist* ainsi que la stabilité relative par celle de *Bode* et de *Black*.

II. Définitions

- **Déf. 1** : On dit qu'un système bouclé est stable s'il tend à son état d'équilibre permanent quand on lui applique une perturbation de courte durée.
- **Déf. 2** : On dit qu'un système bouclé est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$.
- **Déf. 3** : Un système asservi est stable si tous les pôles (racines de l'équation caractéristique) sont à partie réelle négative.

III. Méthodes d'étude de la stabilité

Sachant que la FTBF d'un système asservi peut se mettre sous la forme suivante :

$$T(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)R(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec $G(p)$ la FT de la chaîne d'action et $R(p)$ celle de la chaîne de retour.

Les pôles de $T(p)$ sont donc les racines du *polynôme caractéristique* :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

Si le degré de ce polynôme est supérieur à deux, le calcul de ses racines peut devenir impossible sauf si on utilise un calculateur numérique.

Tenant compte du fait qu'il ne faut déterminer que le signe de la partie réelle de ces racines (d'après *déf. 3*), plusieurs méthodes sont mises au point et qui n'exigent pas la détermination des racines de $D(p)$.

Ces méthodes sont :

1. Méthode de *Routh-Hurwitz*, **méthode algébrique**, supposant la connaissance "à priori" de $D(p)$,
2. Méthode de *Nyquist*, **méthode graphique**, supposant la connaissance "à priori" de la réponse en fréquence de la FTBO ($KG(p)R(p)$), ainsi que la connaissance "à priori" du nombre de pôles à partie réelle non négative de $G(p)$.

3. Méthode du *lieu des racines* (ou du lieu d'Evans), **méthode graphique**, supposant la connaissance "à priori" des pôles et zéros de la FTBO. Cette méthode permet de déterminer les racines de $D(p)$.

IV. Méthode Algébrique de Routh-Hurwitz

Cette méthode permet de déterminer si tous les pôles de la FTBF ont une partie réelle négative sans passer par le calcul de ces racines. Elle se subdivise en deux tests, le *test d'Hurwitz* et le *test de Routh*.

IV. 1 Test d'Hurwitz (1895)

Soit $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$

Le test d'Hurwitz s'énonce comme suit : "*Pour que le polynôme $D(p)$ ait des racines toutes à partie réelle négative, il est nécessaire que tous les coefficients $a_i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ soient positifs*".

- Si le polynôme $D(p)$ ne passe pas le test d'H., il possède certainement des racines à partie réelle non négative et le système possédant ce polynôme comme polynôme caractéristique est instable.
- Par contre, si $D(p)$ passe le test d'H., on ne peut encore rien conclure à propos du signe de la partie réelle de ses racines. Il faut alors lui appliquer le test de Routh.

IV. 2 Test de Routh (1877)

Soit $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$

On commence par former la table de *Routh* définie comme suit :

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
p^{n-2}	c_1	c_2	c_3	...
p^{n-3}	d_1	d_2	d_3	...
...
...			

Avec a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sont les coefficients de l'équation caractéristique et $c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$ sont calculés comme suit :

$$c_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad c_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad \text{etc.}$$

$$d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - a_{n-1} c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - a_{n-1} c_3}{c_1} \quad \text{etc.}$$

On procède de la même façon, horizontalement et verticalement, jusqu'à ce qu'on obtienne uniquement des zéros.

Le test de *Routh* s'énonce alors comme suit : "**Une condition nécessaire et suffisante pour que $D(p)$ ait toutes ses racines à partie réelle négative est que tous les termes de la colonne pivot (la première colonne) de la table soient positifs**".

Remarques

1. Si la colonne pivot contient des termes négatifs, le nombre de racines à partie réelle positive est égal au nombre de changements de signe apparaissant dans la colonne pivot.
2. Les coefficients d'une ligne quelconque peuvent être multipliés ou divisés par un nombre positif sans changer les signes de la première colonne.
3. Exemple : $D(p) = p^3 + 12p + 8$. Ce polynôme ne passe pas le test d'*Hurwitz* ($a_2 = 0$) et possède donc une ou deux racines à partie réelle non négative. Il est inutile de lui appliquer le test de *Routh*.

Intérêt pour la synthèse

La méthode de *Routh-Hurwitz* permet de déterminer, dans un but de synthèse, le domaine des valeurs que peut prendre un paramètre du régulateur pour lesquelles le système automatisé est stable.

Exemple :

Soit un régulateur dont le gain K n'est pas fixé. Soit $D(p) = p^3 + 6p^2 + 12p + K$.

- Test d'*Hurwitz* $\Rightarrow K > 0$.

- Test de *Routh* :

Table de Routh

p^3	1	12	0
p^2	6	K	0
p^1	$12 - \frac{K}{6}$	0	0
p^0	K	0	0

Le système automatisé sera donc stable si : $0 < K < 72$

IV. 3 Limites de la méthode (du critère) de Routh-Hurwitz

1. Le critère est valable uniquement quand le polynôme traduisant l'équation caractéristique est à coefficients réels constants ;
2. Le critère n'est pas valable pour les systèmes à retard, c.à.d. des systèmes de la forme : $H(p) = e^{-\tau p} \frac{N(p)}{D(p)}$;
3. Il cesse d'être applicable lorsque tous les termes d'une ligne sont nuls.

Ces limites constituent des cas particuliers qui seront étudiés ci-dessous par des exemples.

IV. 4 Cas particuliers

1. **Présence de termes nuls dans la colonne pivot** : Ceci traduit la présence de racines à partie réelle nulle. Si on désire connaître le nombre de racines à partie réelle non-négative, il faut considérer que le terme nul introduit des changements de signe au même titre que les termes négatifs. On remplace alors le terme nul par ε / $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Exemple : $D(p) = p^4 + p^3 + 2p^2 + 2p + 5 = 0$

$$\begin{array}{r}
 p^4 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \\
 p^3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\
 p^2 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \\
 p^1 \quad ? \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 p^0 \quad ? \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

en remplaçant $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\begin{array}{r}
 p^4 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \\
 p^3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\
 p^2 \quad \varepsilon \quad 5 \quad 0 \quad 0 \\
 p^1 \quad \frac{2\varepsilon-5}{\varepsilon} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 p^0 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

et comme $\varepsilon \rightarrow 0^+$ donc $\frac{2\varepsilon-5}{\varepsilon} < 0 \Rightarrow$ deux changements de signe \Rightarrow système non stable.

2. **Tous les éléments d'une ligne sont nuls** : Ceci traduit la présence de racines conjuguées imaginaires pures ($\pm jx$). Le système est à la limite de stabilité et va osciller sinusoidalement sur la pulsation ω_{osc} ($j\omega_{osc} = jx$).

Exemple : $D(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 9 = 0$

$$\begin{array}{r}
 p^3 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \\
 p^2 \quad 3 \quad 9 \quad 0 \\
 p^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 p^0 \quad ? \quad ? \quad ? \\
 p^3 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \\
 p^2 \quad 3 \quad 9 \quad 0 \\
 p^1 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \\
 p^0 \quad 9 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

$$Q(p) = 3p^2 + 9 \Rightarrow \frac{dQ(p)}{dp} = 6p \Leftrightarrow$$

avec $D(p) = Q(p)D_1(p)$.

On remplace alors dans la ligne p^1 les coefficients nuls par les coefficients du polynôme $\frac{dQ(p)}{dp}$ et on continue le tableau.

Remarquons que la colonne pivot est formée de termes positifs. Ceci indique que les racines de $D_1(p)$ sont stables ; mais le système $D(p)$, lui, est instable.

En effet, les racines du polynôme auxiliaire sont toujours instables puisque, par construction, il manque un coefficient sur deux dans $Q(p)$.

Remarque

Le critère de R-H est un critère algébrique simple qui permet d'analyser la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps. Cependant, il ne donne aucune information sur le degré de stabilité ni sur la façon de stabiliser un système instable.

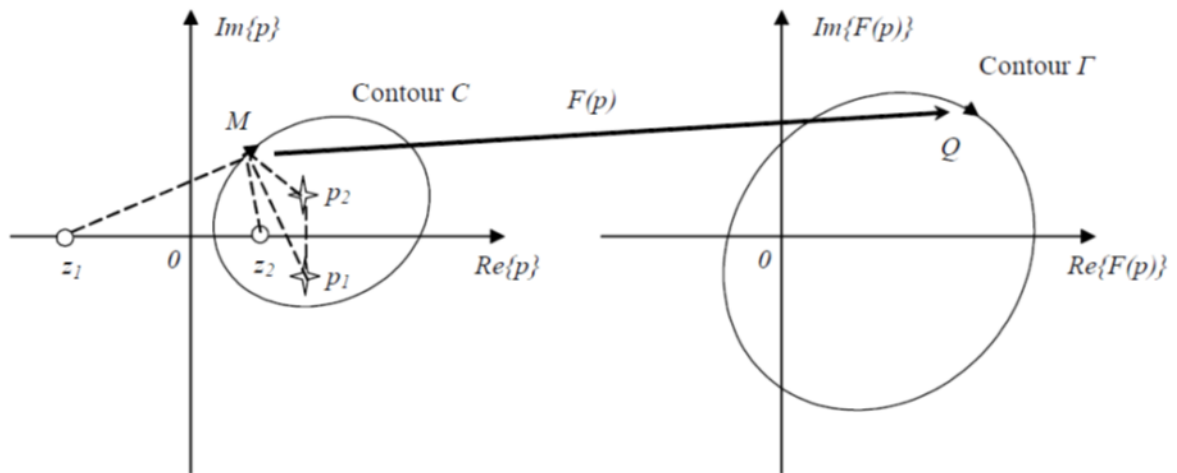
V. Méthode de Nyquist

La méthode de Nyquist est une méthode graphique de détermination de la stabilité absolue et relative des systèmes asservis en boucle fermée.

V. 1 Théorème de Cauchy

Soit $F(p)$ une fonction de la variable complexe p : c'est un nombre complexe dont le module et l'argument sont fonction de p .

Si le point d'affixe p décrit une courbe fermée (C) dans le plan complexe, le point d'affixe $F(p)$ décrit un lieu (Γ) de forme plus ou moins compliquée, et les lieux (C) et (Γ) se correspondent point par point :



Théorème de Cauchy

On démontre alors, *le théorème de Cauchy* suivant :

Quand le point p décrit complètement la courbe (C), dans le sens des aiguilles d'une montre, le point d'affixe $F(p)$, situé sur la courbe (Γ), fait, autour de l'origine et dans le sens trigonométrique, un nombre de tours N algébriquement donné par : $N=P - Z$.

Où P et Z désignent respectivement le nombre de pôles et le nombre de zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité) de la fonction $F(p)$ situés à l'intérieur de la courbe (C).

V. 2 Application au problème de la stabilité

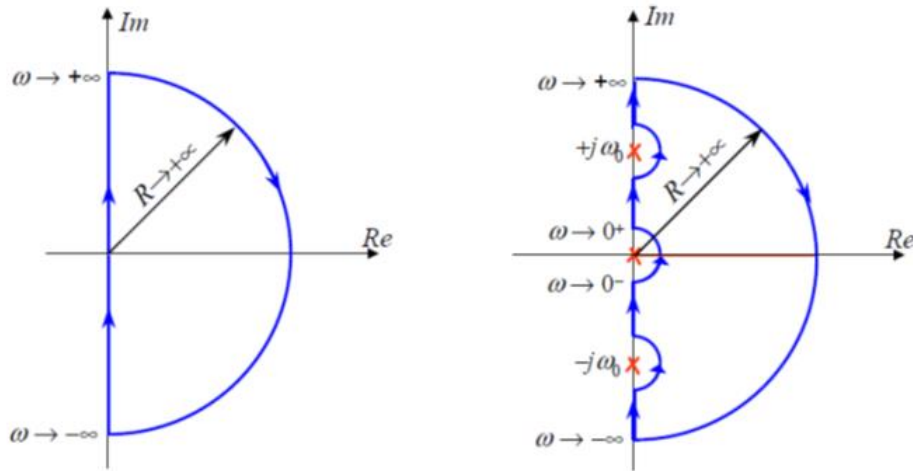
Le théorème de Cauchy est appliqué dans le cas suivant :

- fonction : $F(p) = D(p) = 1 + KG(p)R(p)$
- courbe (C) : *contour de Nyquist* ou *contour d'exclusion de Nyquist*.

V. 3 Contour d'exclusion de Nyquist et courbe de Nyquist

Le contour d'exclusion de Nyquist est un contour fermé (C) enfermant tout le demi-plan droit de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$.

Ce contour encercle certainement tous les pôles et zéros à partie réelle positive (s'il y en existe) de $D(p) = 1 + KG(p)R(p)$. Un tel contour comporte 3 parties :



- $\Gamma_I : p = j\omega \quad 0 \leq \omega \leq \infty$
- $\Gamma_{II} : p = re^{j\theta} \quad r \rightarrow \infty \text{ et } -\pi/2 < \theta < \pi/2$
- $\Gamma_{III} : p = j\omega \quad -\infty \leq \omega \leq 0$

Si $D(p)$ a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayons $\rho \rightarrow 0$.

Supposons ici que $D(p)$ ne possède pas de pôles à partie réelle nulle.

Lorsque le point p décrit ce contour dans le sens des aiguilles d'une montre, le point $D(p)$ correspondant décrit, dans le sens des fréquences croissantes, le lieu de transfert $D(j\omega)$ (gradué en pulsation $\omega \geq 0$), complété par son symétrique par rapport à l'axe réel, soit $D(-j\omega)$.

A chaque partie de ce contour (Γ') décrit par $D(p) = KG(p)R(p)$:

a. $(\Gamma_I') : D(p) = K.G(j\omega).R(j\omega) \quad 0 \leq \omega < \infty$

Cette partie de (Γ') s'identifie avec la réponse en fréquence de $D(p)$ représentée sous la forme d'un diagramme de Nyquist.

b. $(\Gamma_{II}') : D(p) = KG(re^{j\theta})R(re^{j\theta}) \quad r \rightarrow \infty$

Cette partie de (Γ') se réduit toujours à un point à l'origine pour les systèmes réalisables où le degré du dénominateur de la FT est supérieur au degré du numérateur de cette FT.

c. $(\Gamma_{III}') : D(p) = KG(-j\omega)R(-j\omega) \quad 0 \leq \omega < \infty$

Cette partie de (Γ') est symétrique à la partie (Γ_I') par rapport à l'axe réel.

V. 4 Expression équivalente du théorème

On remarque que $KG(p)R(p)$ et $1 + G(p)R(p)$ ont les mêmes pôles. En outre, si l'on appelle point critique le point d'affixe $(-1,0)$, l'énoncé précédent est alors équivalent au suivant :

Lorsque, dans le plan complexe p , l'image de p décrit une fois le contour de Nyquist dans le sens des aiguilles d'une montre, l'image de $KG(p)R(p)$ tourne, autour du point critique, et dans le sens trigonométrique, d'un nombre de tours N égal à : $N = P - Z$ où :

- Z est le nombre de zéros de $D(p) = 1 + KG(p)R(p)$ à partie réelle positive ;
- P est le nombre de pôles de $KG(p)R(p)$ à partie réelle positive.

V. 5 Etapes pratiques pour l'application du critère de Nyquist

1. Etudier la stabilité de la FTBO $\Rightarrow P =$ nombre de pôles instables de la FTBO.
2. Tracer le lieu complet de Nyquist de la FTBO : lieu de $KG(p)R(p)$, parcouru dans le sens croissant, de $-\infty$ à $+\infty$.
3. Calculer le nombre de tours (comptés algébriquement dans le sens trigonométrique), soit N , que fait, autour du point critique d'affixe $(-1,0)$, le lieu complet de Nyquist, parcouru dans le sens des ω croissant, de $-\infty$ à $+\infty$.
4. En déduire $Z = P - N$, c.à.d. le nombre de pôles instables de la FTBF.

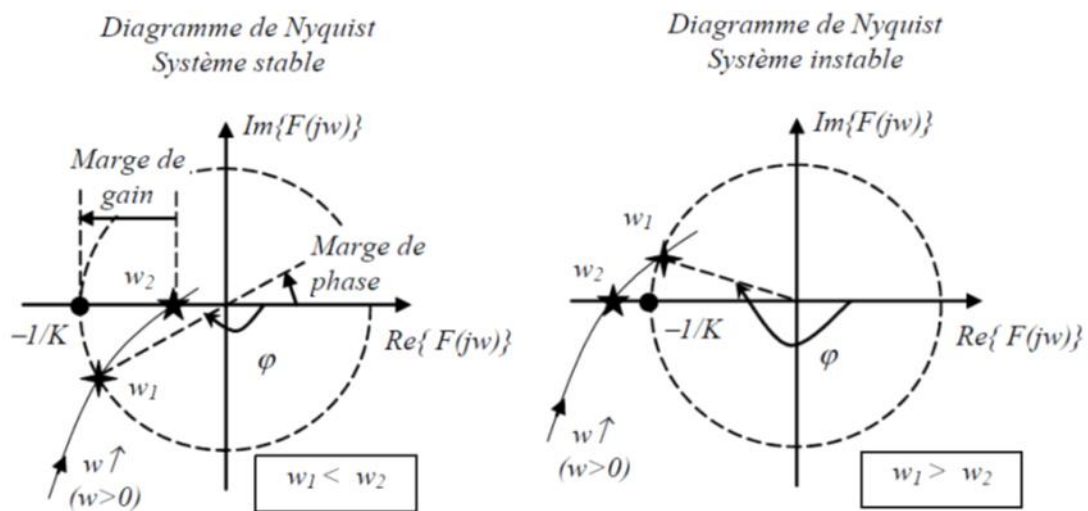
V. 6 Critère du revers dans le plan de Nyquist

Condition : *Le critère du revers n'est valable que si la FTBO a tous ses pôles dans le demi-plan gauche (c.à.d. le système est stable en BO).*

On trace le lieu de Nyquist de la FTBO, et on observe la courbe par rapport au point (-1) , dans le sens des fréquences croissantes :

- si le point -1 est à gauche de la courbe, le système est stable ;
- si le point -1 est à droite de la courbe, le système est instable ;
- si la courbe passe par le point -1 , le système est juste oscillant. Ce qui signifie en pratique, que la moindre perturbation extérieure ou intérieure au système, le rendra instable.

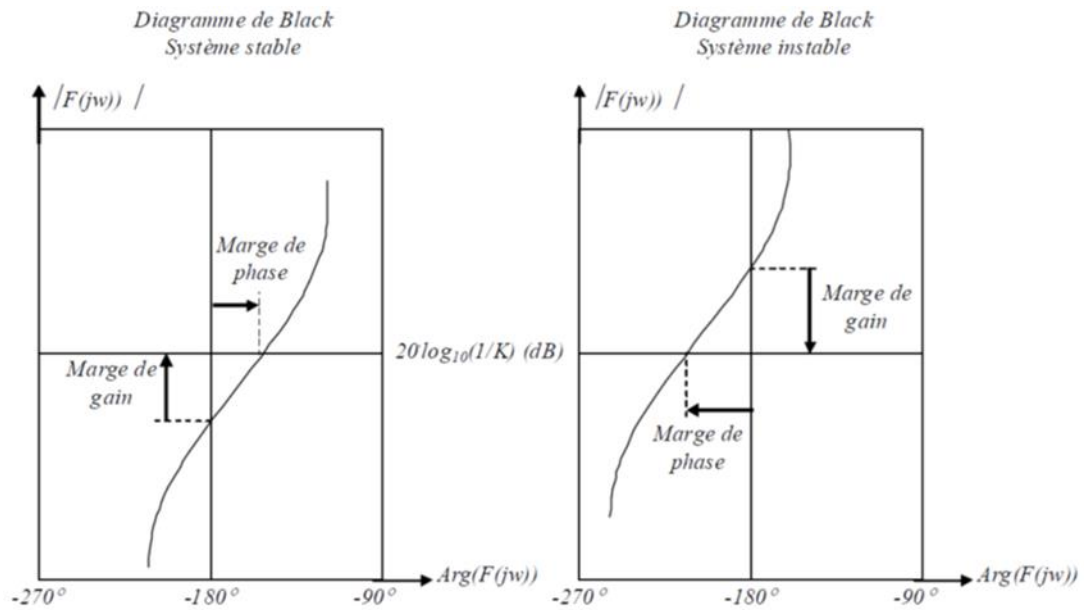
Remarque : Il n'est pas nécessaire de tracer le lieu complet de Nyquist pour savoir si oui ou non le point critique (-1) sera entouré. Tracer pour $\omega : 0 \rightarrow +\infty$ suffit.



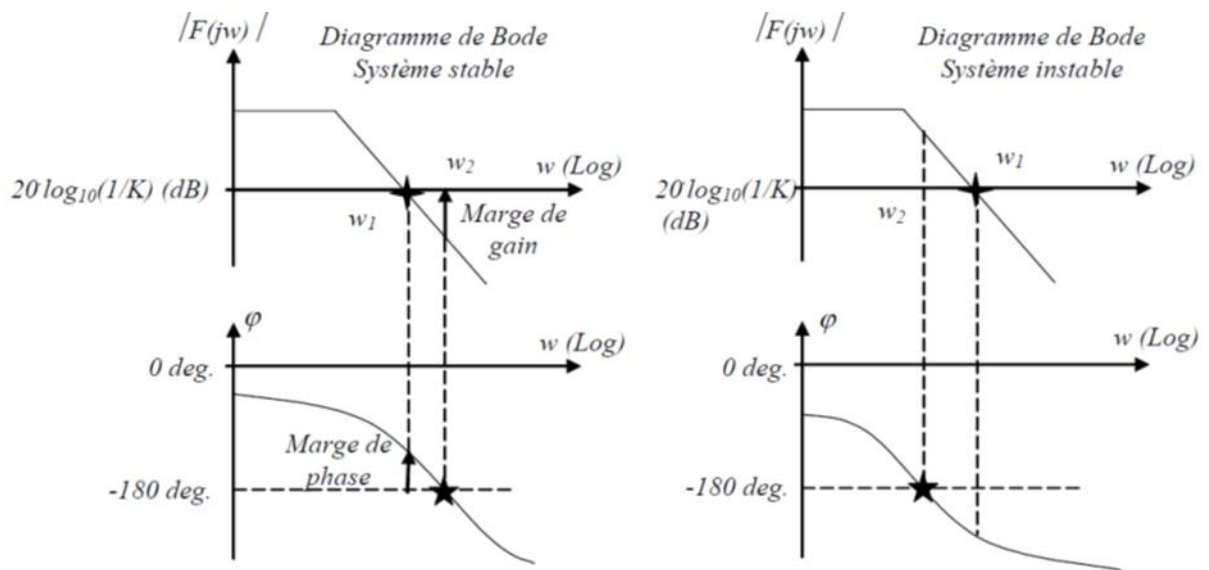
VI. Stabilité dans le plan de Black et Bode

VI. 1 Dans le plan de Black

Un système est *stable* si en décrivant la courbe de Black dans le sens des ω croissantes, on laisse le point critique ($-180^\circ, 0dB$) à sa droite ; il est *instable* dans le cas contraire.



VI. 2 Dans le plan de Bode



VI. 3 Stabilité relative d'un système automatisé

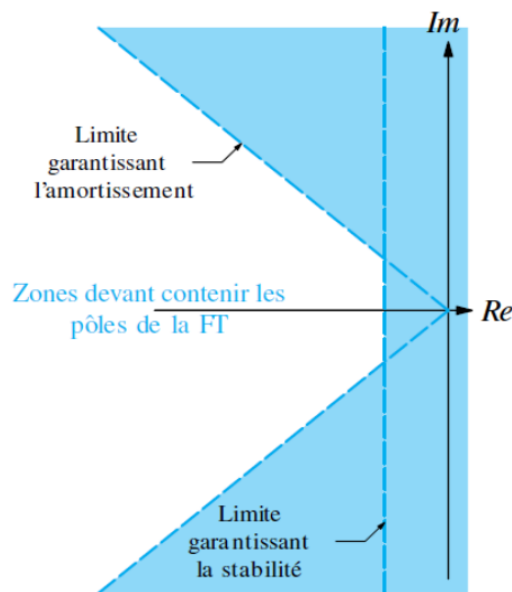
Les systèmes réels ne sont généralement pas des systèmes continus linéaires invariants dans le temps. Ils présentent des problèmes d'usure mécanique, de vieillissement de composants, ...etc.

- Un système stable, à une date donnée, peut devenir instable ultérieurement.
- Un système stable mais très oscillant a un comportement que l'on essaie souvent d'éviter.

Il est donc important de prévoir une marge de sécurité par rapport à l'état limite de transition " stable-instable ".

Pour un système défini par sa fonction de transfert, son instabilité est liée à l'existence de pôles à partie réelle positive. Son trop faible amortissement est lié à des racines complexes conjuguées trop éloignées de l'axe des réels.

Garder une marge de stabilité revient à faire en sorte que ses pôles soient dans une zone limitée du plan complexe.



Emplacement des pôles d'une FTBF stable amortie

Remarques

1. Une augmentation du gain de la BO (en décalant le lieu vers le haut) réduit les marges de stabilité.
2. Une augmentation de la phase de la FTBO réduit ces marges et peut conduire à l'instabilité.
3. Les valeurs courantes des marges de gain et de phase sont :
 - Marge de gain : $10 \text{ dB} < M_G < 15 \text{ dB}$
 - Marge de phase : $45^\circ < M_\varphi < 50^\circ$.

Performances des S.A.L.

Partie 2 : Précision et rapidité

I. Introduction

Un système asservi est conçu pour délivrer un signal de sortie fonction connue du signal d'entrée. Ses performances sont donc jugées par comparaison entre la *sortie réelle* et la *sortie désirée (l'entrée)*.

II. Qualité d'un bon asservissement

Le problème majeur des asservissements est de trouver un compromis entre stabilité et précision du système.

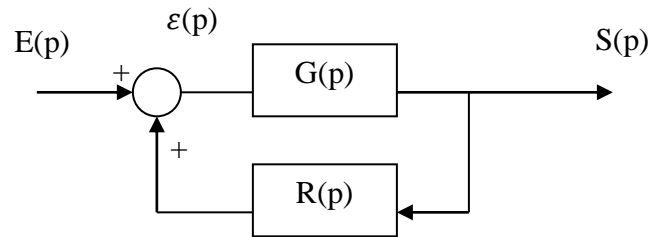
- Un système asservi doit être non seulement *stable* mais *suffisamment stable*, c. à. d.
 - Le système doit posséder *des marges de stabilité suffisantes* pour ne pas risquer d'être déstabilisé ;
 - Après une perturbation, le système doit non seulement revenir à l'équilibre, mais y revenir par *un transitoire suffisamment amorti*.
- Dans un bon système asservi, l'erreur en régime permanent doit être aussi faible que possible (bonne précision statique). Le plus souvent, on désire une *erreur statique nulle* et une *erreur de traînage faible*.
- Enfin, le *transitoire* par lequel un système asservi revient à l'équilibre après une perturbation doit être suffisamment *rapide*.

III. Précision des S.A.L.

La précision obtenue grâce à l'asservissement est estimée en regardant l'erreur.

III. 1 Précision statique (régime permanent atteint)

Considérons le système asservi suivant :



$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)[G(p)\varepsilon(p)] \Rightarrow \varepsilon(p)[1 + R(p)G(p)] = E(p)$$

$$\text{D'où } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)R(p)} \Rightarrow \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + G(p)R(p)}$$

On définit alors trois types d'erreurs :

1. Erreur de position : correspondant à la réponse à un *échelon* ;
2. Erreur de vitesse (ou de traînage) : correspondant à la réponse à une *rampe* ;
3. Erreur en accélération : correspondant à la réponse à une *entrée parabolique*.

Vu qu'il s'agit du régime permanent, l'erreur statique est déterminée par $\varepsilon(\infty)$.

Reprenons la forme générale de la FTBO :

$$G(p)R(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

où α désigne la classe du système.

III. 1. 1 Système de classe zéro (pas d'intégration dans la chaîne directe)

1. Erreur de position : Soit $e(t) = 1 \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$ (Entrée = Echelon)

$$\text{Théorème de la valeur finale } \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \frac{1}{K+1} \approx \frac{1}{K}$$

Remarque : Lorsqu'il n'y a pas d'intégrations dans la chaîne directe, la précision dépend du gain statique : K augmente \Rightarrow la précision augmente.

$$2. \text{ Erreur de vitesse : } e(t) = t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2} \quad (\text{Entrée = Rampe})$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right] = \infty \quad : \text{ l'erreur statique est } \underline{\text{infinie}}$$

III. 1. 2 Système de classe 1 (Présence d'une intégration dans la chaîne directe)

$$1. \text{ Erreur de position : Soit } e(t) = 1 \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \quad (\text{Entrée = Echelon})$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right] = 0 \quad : \text{ l'erreur statique est } \underline{\text{nulle}}.$$

Remarque : Lorsqu'il y a au moins une intégration dans la chaîne directe, l'erreur statique est nulle \Rightarrow la précision est ∞ .

$$2. \text{ Erreur de vitesse : } e(t) = t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2} \quad (\text{Entrée = Rampe})$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right] = \frac{1}{K}$$

III. 1. 3 Système de classe 2 (Présence de deux intégrations dans la chaîne directe)

$$1. \text{ Erreur de position : Soit } e(t) = 1 \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \quad (\text{Entrée = Echelon})$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right] = 0$$

$$3. \text{ Erreur de vitesse : } e(t) = t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2} \quad (\text{Entrée = Rampe})$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right] = 0$$

4. **Erreur en accélération** : réponse à une *entrée parabolique*.

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K}$$

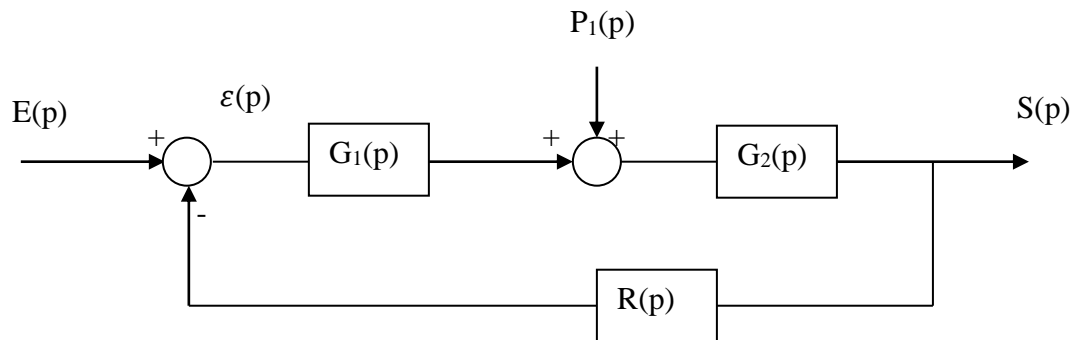
III. 1. 4 Conclusions pratiques

1. Le type des erreurs permanentes que présente un asservissement à retour unitaire est déterminé par le nombre d'intégrations que possède la boucle :
 - *Pas d'intégrations* : erreur de position finie ;
 - *Une intégration* : erreur de position nulle et erreur de vitesse finie ;
 - *Deux intégrations* : erreurs de position et de vitesse nulles et erreur d'accélération finie.
2. L'erreur permanente (quel que soit son type) que présente un système donné est d'autant plus petite que le gain en boucle ouverte est grand.
3. Pour un régime permanent d'un système asservi, on a donc intérêt :
 - A ce que la boucle présente une intégration,
 - à ce que le gain en BO soit le plus élevé possible (sachant qu'on est limité dans ce cas par des considérations sur la stabilité).

α	0	1	2	3	
$e(t)$					
$Au(t)$	$\frac{1}{1+K} \approx \frac{1}{K}$	0	0	0	ε_p
$Atu(t)$	∞	$\frac{1}{K}$	0	0	ε_v
$\frac{A}{2}t^2u(t)$	∞	∞	$\frac{1}{K}$	0	ε_a

III. 1. 5 Présence d'une perturbation

On représente un système asservi sur lequel s'exerce une perturbation par le schéma fonctionnel suivant :



- $S(p) = [\varepsilon(p)G_1(p) + P(p)]G_2(p) = G_1(p)G_2(p)\varepsilon(p) + G_2(p)P(p)$
- $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p)$

D'où :

$$S(p) = \frac{G_1(p)G_2(p)}{1 + R(p)G_1(p)G_2(p)} E(p) + \frac{G_2(p)}{1 + R(p)G_1(p)G_2(p)} P(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + R(p)G_1(p)G_2(p)} E(p) - \frac{R(p)G_2(p)}{1 + R(p)G_1(p)G_2(p)} P(p)$$

↑
Erreur liée à la
commande

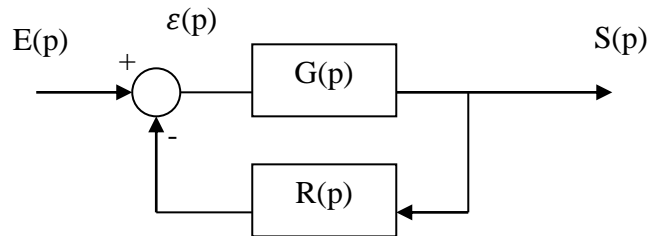
↑
Erreur liée à la
perturbation

- Dans le cas des systèmes suiveurs (entrée variable, absence de perturbation), $\varepsilon(p)$ se réduit au premier terme.
- Dans le cas des systèmes de régulation, l'entrée est une consigne constante E_0 et l'erreur en présence de perturbation peut être obtenue en appliquant le théorème de superposition (vu que le système est linéaire).

III. 2 Précision dynamique et rapidité (régime dynamique)

III. 2. 1 Définition et condition

Considérons toujours la forme canonique d'un système asservi :



Le rôle de ce système est que la sortie $s(t)$ suit l'entrée $e(t)$.

- Un système parfait $\Rightarrow \varepsilon(t) = e(t) - r(t) = 0 \quad \forall t$.
- Système réel $\Rightarrow \varepsilon(t) \neq 0 \quad \forall t$ (constantes de temps des systèmes physiques, perturbations agissant sur le système).

En pratique, il est intéressant de connaître l'erreur permanente, dite statique, ε_s qui représente la valeur asymptotique (lorsque $t \rightarrow \infty$) de l'erreur instantanée, dite dynamique, ε_d .

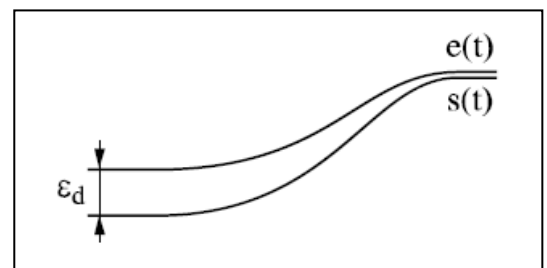
Dans le calcul d'erreurs, on est intéressé par deux spécifications :

1. *Erreur statique* nulle ($\varepsilon_s = 0$) pour des entrées données ou perturbations canoniques (échelon, rampe, signal harmonique,...) ;
2. *Erreur dynamique* $\varepsilon_d < \varepsilon_{d \max}$ pour des entrées ayant certaines caractéristiques données.

Soit le cas d'un système à retour unitaire dont l'écart entrée-sortie est schématisé par :

Nous avons donc, à limiter ε_d à une valeur $\varepsilon_{d \max}$.

Pour tout signal d'entrée, l'expression de ε_d est complexe. Cependant, si on limite $e(t)$ à une vitesse v



et une accélération γ , il nous serait possible d'obtenir une condition caractérisant la précision désirée.

III. 2. 2 Précision en réponse à une entrée quelconque

Méthode de la sinusoïde équivalente

Cette méthode consiste à remplacer le signal d'entrée, lorsqu'il n'est pas sinusoïdal, par une *sinusoïde* dite *équivalente*, qui impose, en première approximation, des conditions en vitesse et en accélération maximales identiques à celles du signal réel.

$$e(t) \rightarrow \begin{cases} v \leq v_M \\ \gamma \leq \gamma_M \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

Soit $e(t) = E_0 \sin \omega_0 t$ (signal satisfaisant la condition (1)).

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow v_M = E_0 \omega_0 \\ \frac{d^2e(t)}{dt^2} \Rightarrow \gamma_M = E_0 \omega_0^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} E_0 = \frac{v_M^2}{\gamma_M} \\ \omega_0 = \frac{\gamma_M}{v_M} \end{cases}$$

En régime permanent, l'erreur liée à la commande $\varepsilon_e(t)$ est un signal harmonique de module $|\varepsilon_e|$ tel que :

$$|\varepsilon_e| = E_0 \left| \frac{1}{1 + G(p)R(p)} \right|_{p=j\omega_0}$$

Si $|G(p)R(p)|_{p=j\omega_0} \gg 1$ (ω_0 est dans la bande passante de laFTBO)

$$\Rightarrow |\varepsilon_e| = E_0 \left| \frac{1}{R(p)G(p)} \right|_{p=j\omega_0} \dots\dots\dots(2)$$

$$(2) \Rightarrow \left| \frac{1}{G(p)R(p)} \right|_{p=j \frac{\gamma_M}{v_M}} \leq \frac{\varepsilon d \max}{\frac{v_M^2}{\gamma_M}}$$

$\left \frac{1}{G(p)R(p)} \right _{p=j \frac{\gamma_M}{v_M}} \leq \frac{\varepsilon d \max}{\frac{v_M^2}{\gamma_M}}$

Notons que cette condition est nécessaire et, dans certains cas, elle n'est pas suffisante.

III. 2. 3 Bande passante

La bande passante d'un système est l'intervalle des fréquences angulaires ω pour lesquelles le module de la FTBO est très grand devant le 1 : $|G(j\omega)R(j\omega)| \gg 1$

On pourra alors utiliser les approximations suivantes, pour déterminer la FTBF :

- Si $|G(j\omega)R(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \approx \frac{1}{R(j\omega)}$
- Si $|G(j\omega)R(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \approx G(j\omega)$

III. 2. 4 La rapidité d'un S.A.L.

La rapidité est le temps que met le système pour réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (soit un échelon). La valeur finale S_0 de $s(t)$ étant souvent atteinte de manière asymptotique, la rapidité est généralement caractérisée par *le temps de réponse* t_r à 5%.

C'est le temps que met la réponse $s(t)$ pour que :

$$t \geq t_r(5\%) \Rightarrow 0,95 S_0 \leq s(t) \leq 1,05 S_0$$

Dans le cas du régime oscillant amorti, on complète le temps de réponse par le premier dépassement exprimé en %, qui caractérise l'amplitude des oscillations :

$$D_1 = 100 \left| \frac{S_{\max} - S_0}{S_0} \right|$$

IV. Conclusions

- La précision :

1. *L'erreur statique*, lorsqu'elle est *finie et non nulle*, diminue lorsque le gain en BO augmente, c. à. d. lorsque la bande passante augmente.
2. *Une erreur statique nulle* suppose dans la chaîne, au moins, une intégration vis-à-vis d'une entrée en échelon et deux intégrations vis-à-vis d'une entrée en rampe, etc.

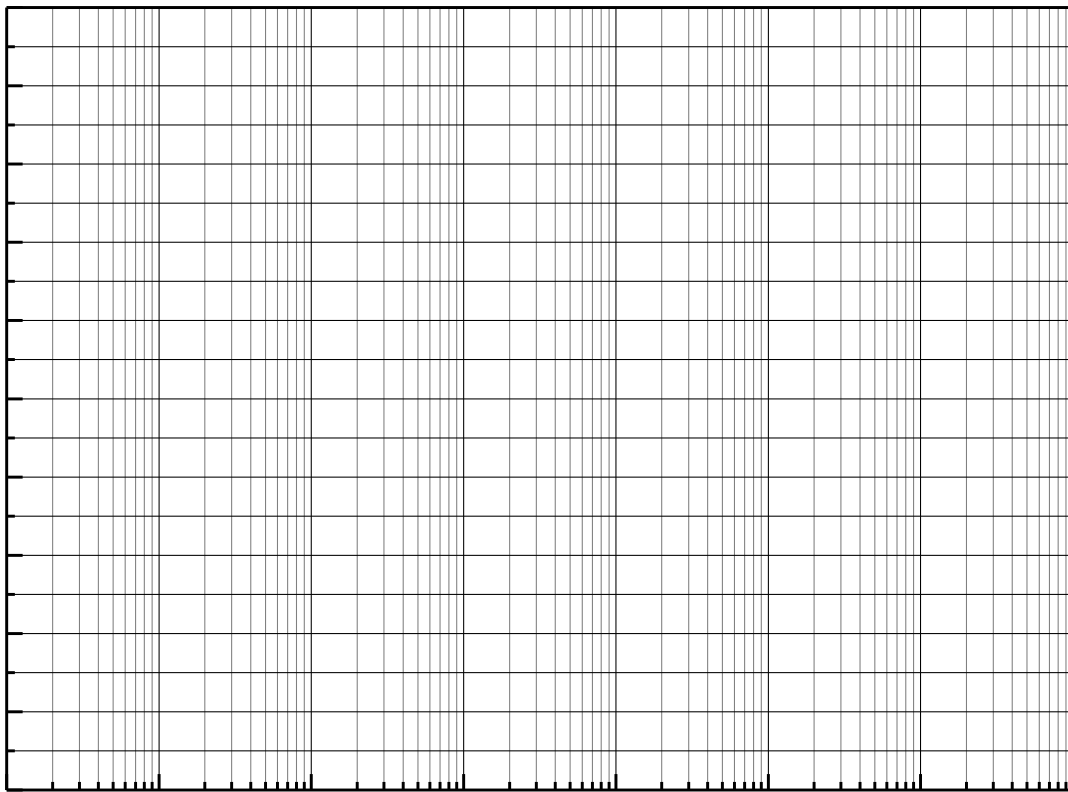
- La rapidité :

La rapidité d'un système du premier ordre est d'autant plus grande que :

1. la constante de temps τ dans la chaîne directe est *faible* ;
2. le gain K est *grand* ;
3. sa *bande passante* est *grande*.

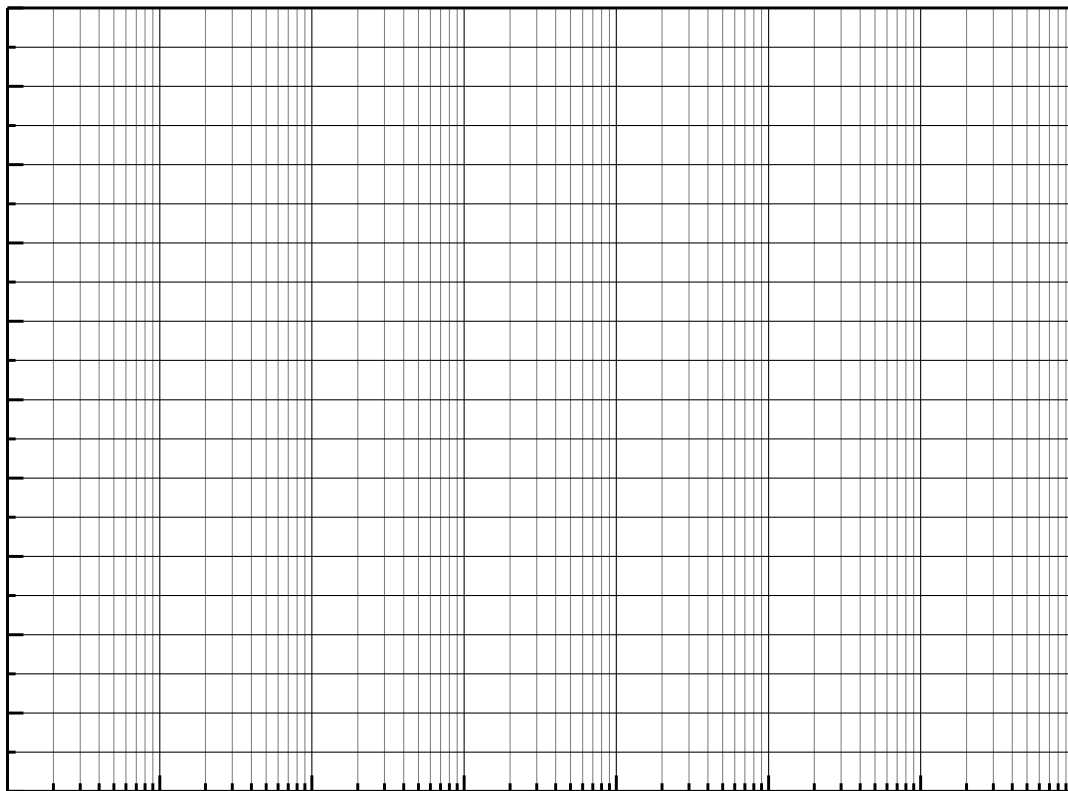
Papier semi-logarithmique
(Plusieurs formats)
Pour tracé du diagramme de Bode

Amplitude (dB), Phase (deg)

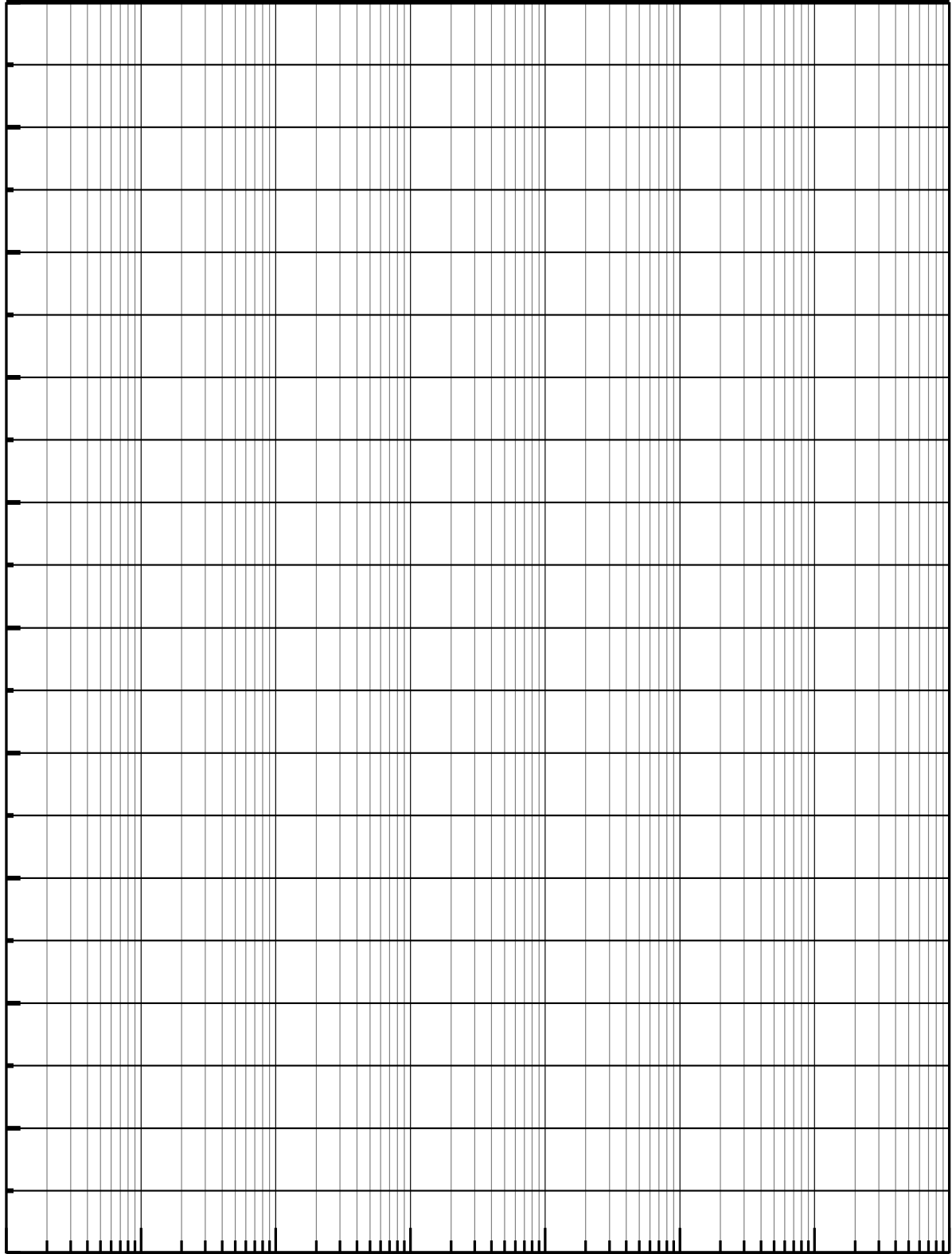


Fréquence (rad/sec)

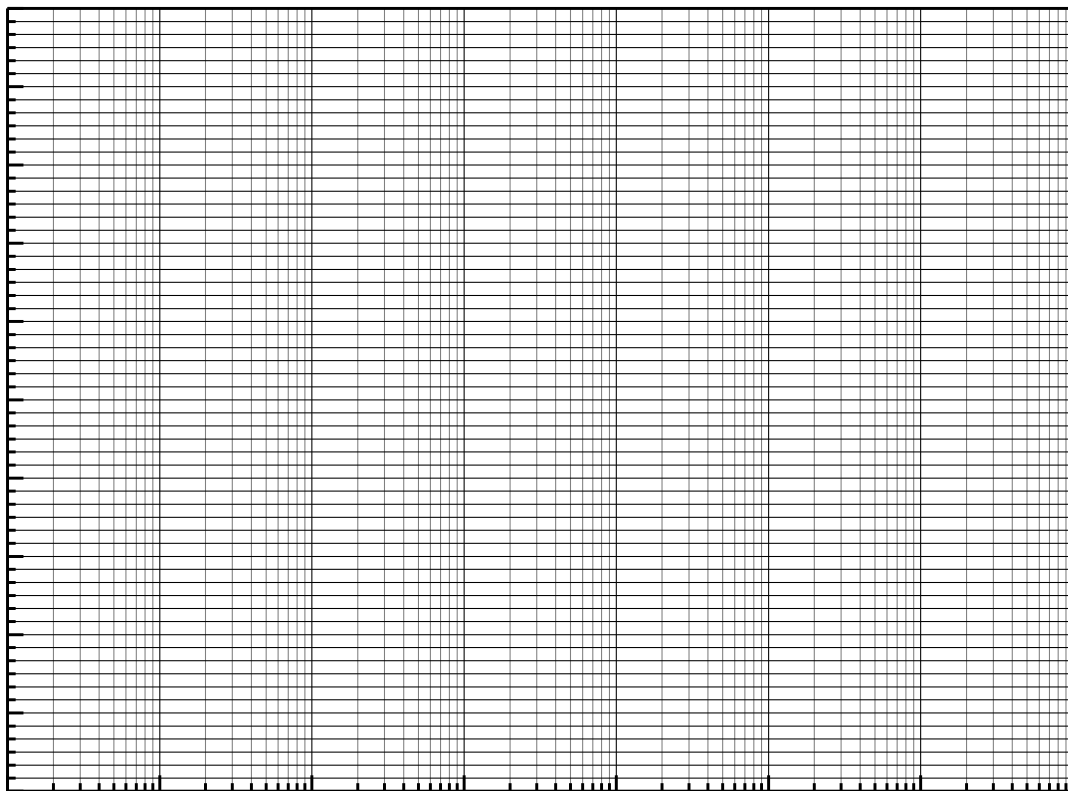
Amplitude (dB), Phase (deg)



Fréquence (rad/sec)

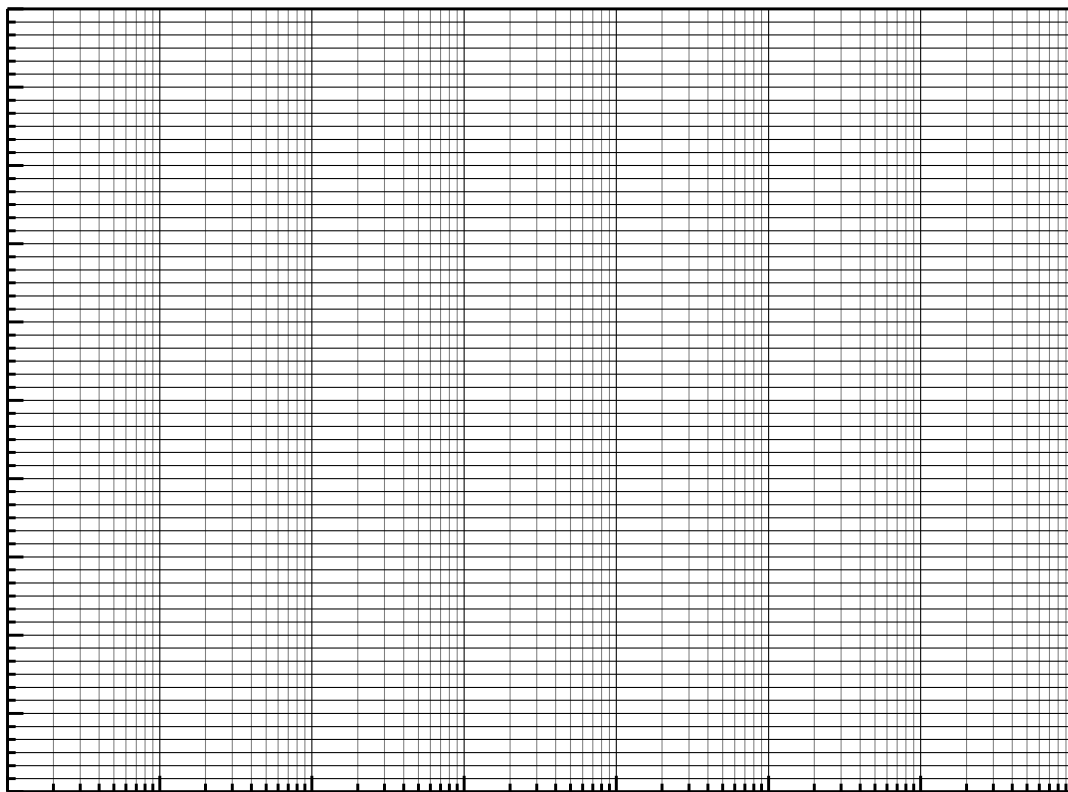


Amplitude (dB), Phase (deg)

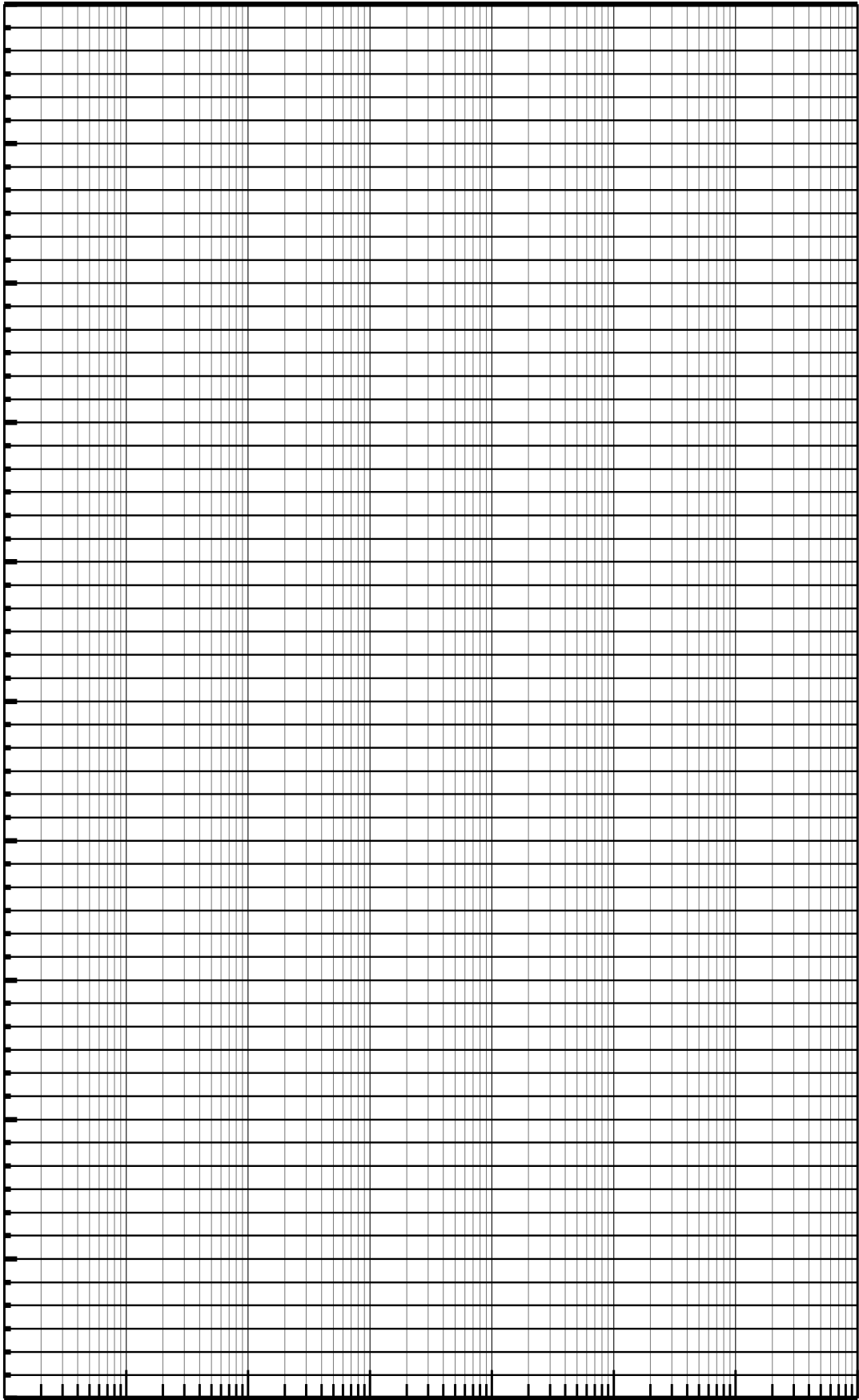


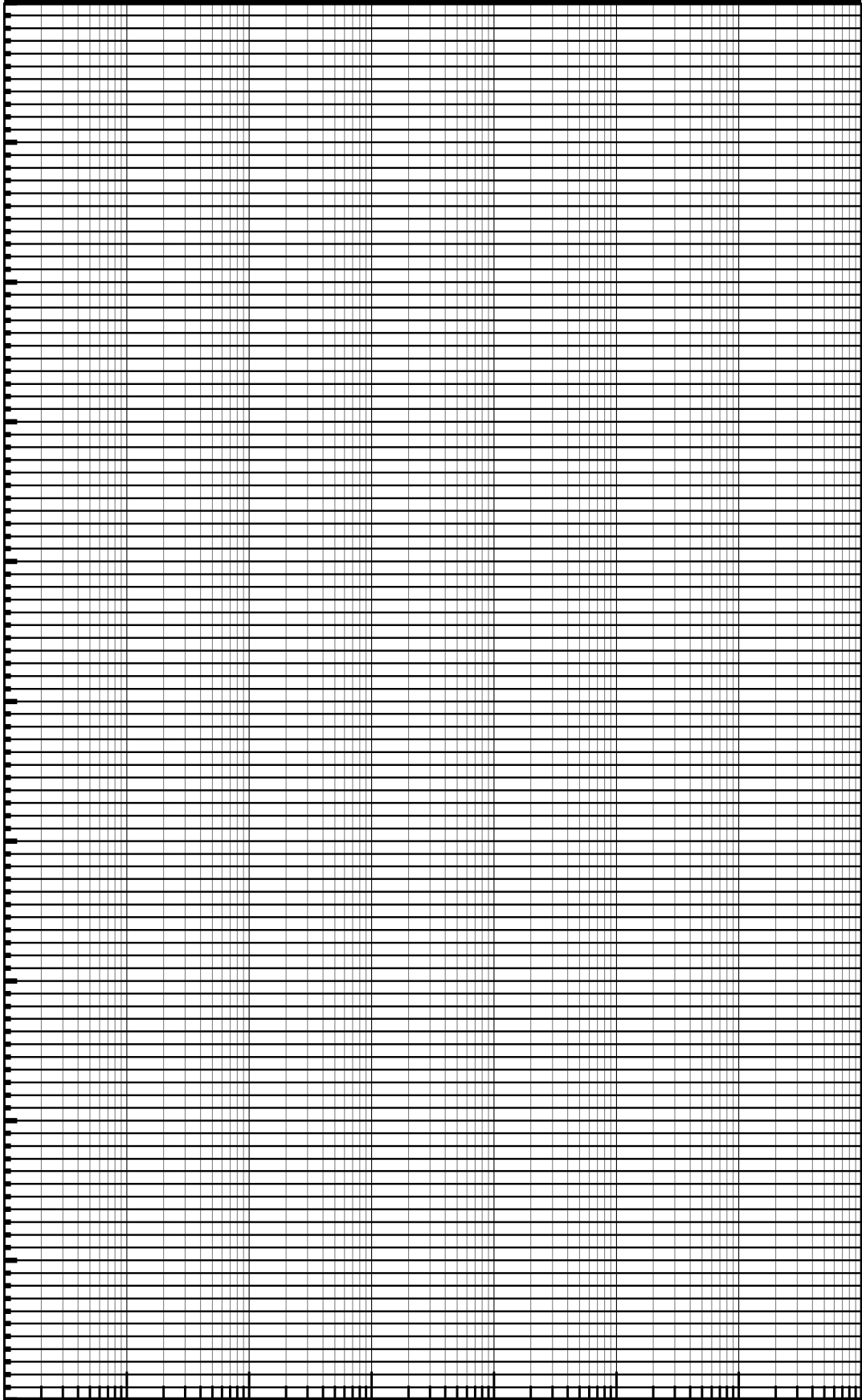
Fréquence (rad/sec)

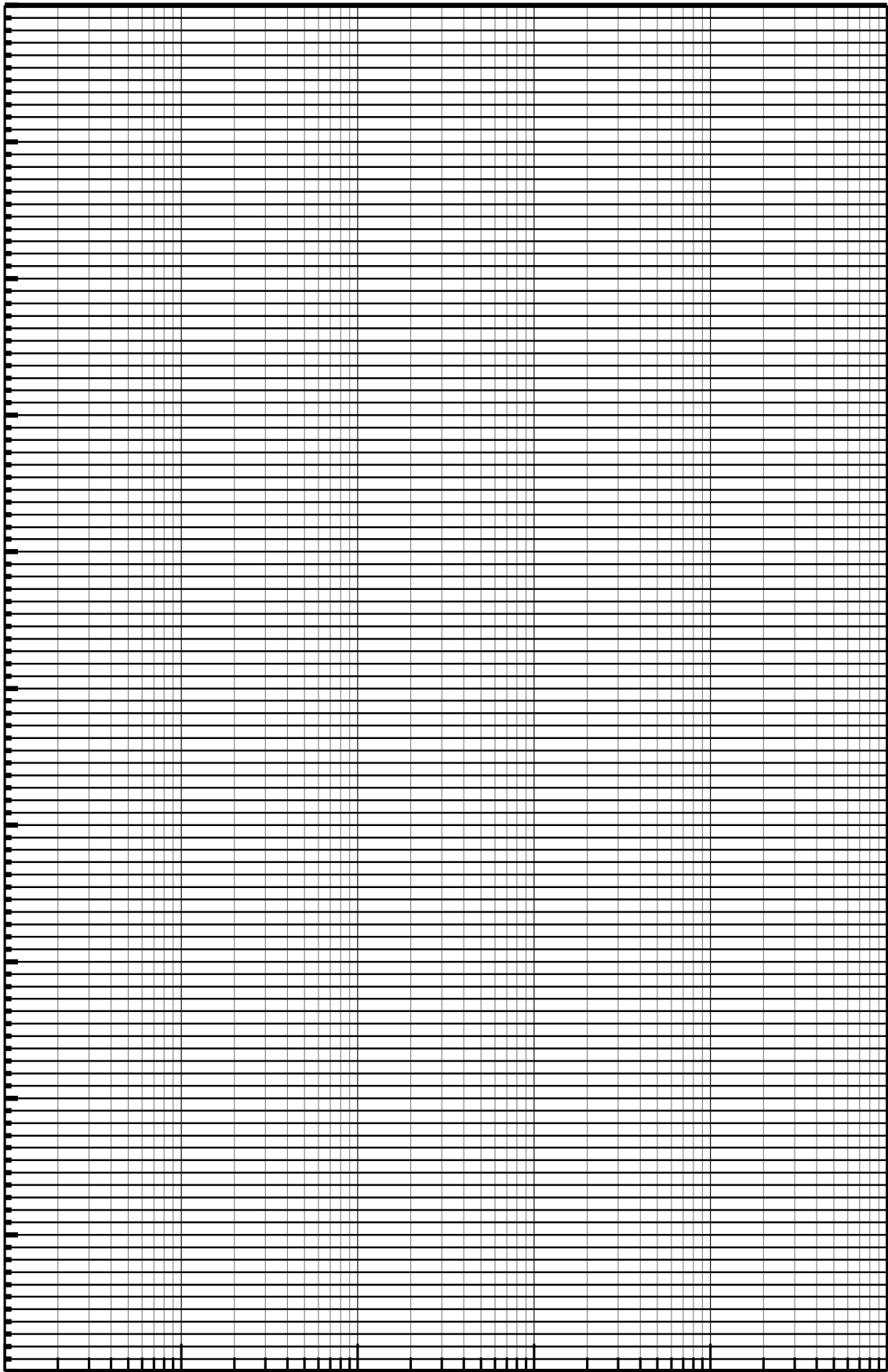
Amplitude (dB), Phase (deg)



Fréquence (rad/sec)

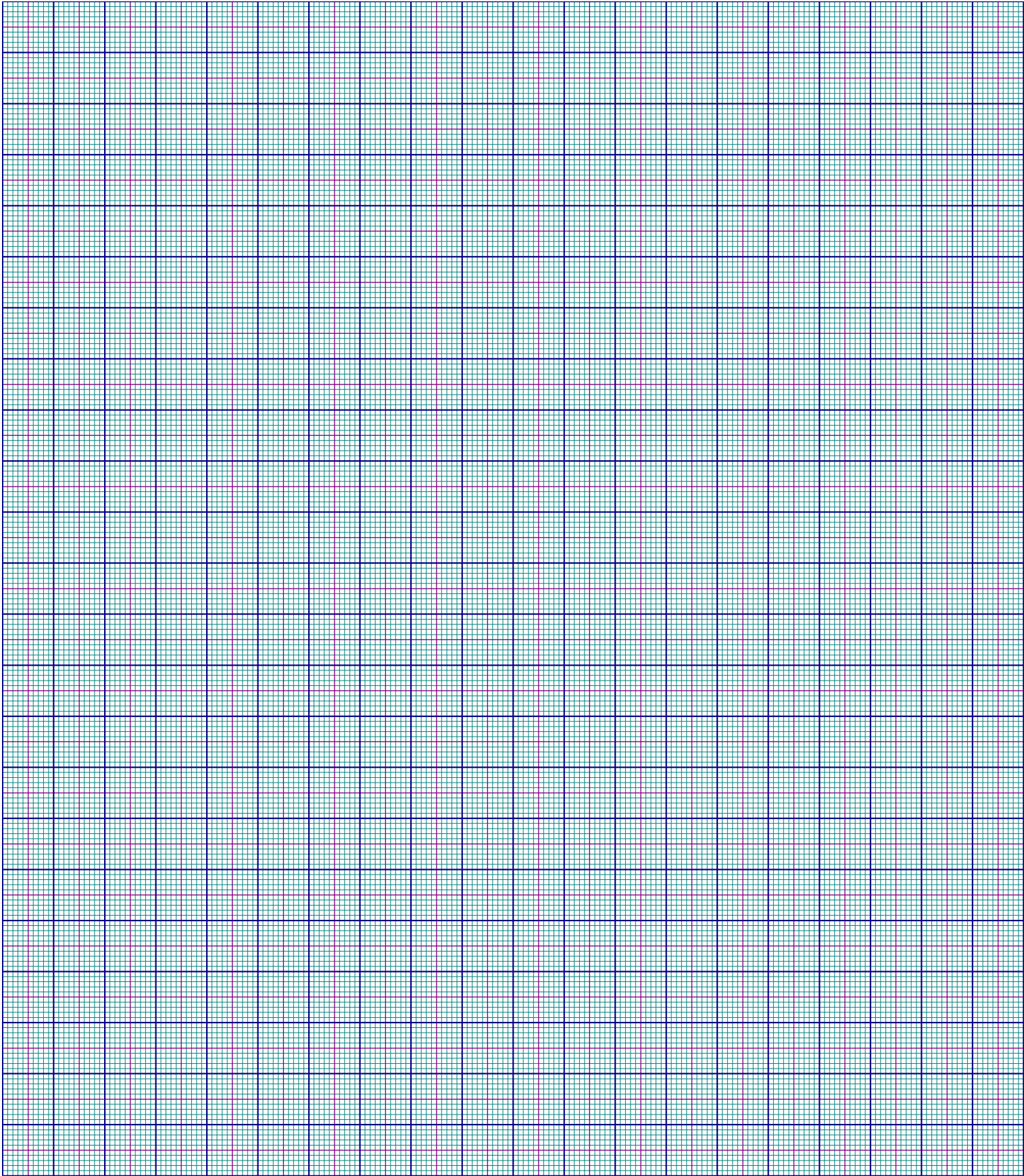






Papier Millimétré

NOM : Prénom : Classe :



Références Bibliographiques utilisées

Et bien d'autres...

SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

BTS • IUT • 1^{er} cycle/Licence

AUTOMATIQUE

Contrôle et régulation



Patrick Prouvost

DUNOD

AUTOMATIQUE

**Systemes linéaires, non linéaires,
à temps continu, à temps discret,
représentation d'état**

Cours et exercices corrigés

Yves Granjon

Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)
et directeur de l'ENSEM à Nancy

2^e édition

DUNOD

Patrick Prouvost

Agrégé en génie mécanique
au Lycée Val de Murigny
à Reims

Instrumentation et régulation en 30 Fiches

DUNOD



Signals and Systems with **MATLAB**®

 Springer

CAM

Control Systems, Robotics and Manufacturing Series



Analysis and Control of Linear Systems

Edited by Philippe de Larminat

ISTE

Systemes linaires invariants

A. Définition

A.1. Notion de système

On essaye souvent de modéliser un système physique en interaction avec l'extérieur ou d'autres systèmes en distinguant des *entrées*, un *état* et des *sorties* (figure 4-1).

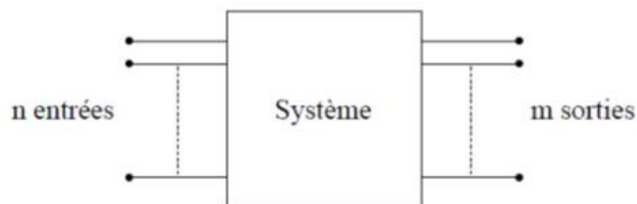


Fig. 4-1 : Modélisation d'un système physique

A un instant donn e, l'état du système peut dépendre de son histoire antérieure et des actions instantanées qu'il subit. Les entrées représentent ces actions extérieures. Une sortie peut représenter une action sur un autre système qui lui serait connect e. Ce peut également être une grandeur interne caractéristique de l'état du système (une observable qu'un expérimentateur pourrait mesurer par exemple). De manière générale, à tout instant une sortie dépend de l'état du système et de l'état de chacune des entrées. Cette modélisation suppose que entrées et sorties fonctionnent comme des canaux *unidirectionnels* (parfois mat erielis es par des flèches sur les schémas). C'est-à-dire, par exemple, que la manière dont est exploitée une sortie n'a pas d'influence sur le comportement du système étudié. Il faut d'autre part que le fonctionnement de ce système n'interfère pas avec le signal d'entrée. Par exemple la grandeur physique en entrée peut être l'intensité d'un courant si celui-ci est fourni par une source idéale de courant. Mais si ce courant est d ebit e par une source de tension il peut dépendre de la résistance d'entrée du système (sauf si celle-ci est infinie). Il sera alors impossible de choisir l'intensité comme grandeur d'entrée.

A.2. Système scalaire

Nous nous limitons aux systèmes dits *scalaires*, c'est-à-dire comportant une entrée et une sortie, notées respectivement $e(t)$ et $s(t)$ sur la figure 4-2. Ces quantités $e(t)$ et $s(t)$ représentent des signaux et le système effectue un *traitement*. Le signal de sortie $s(t)$ est souvent appel e *réponse* du système à l'*excitation* $e(t)$. La transformation réalisée par ce système peut être mod elisee par un opérateur F :

$$s(t) = F[e(t)]$$

Réponse indicielle des systèmes linéaires analogiques

Le chapitre précédent a introduit une première méthode de caractérisation des systèmes analogiques linéaires avec l'analyse fréquentielle. Nous présentons ici une deuxième méthode appliqué à deux types de système.

A. Réponse indicielle d'un système du premier ordre fondamental

A.1. Définition

La *réponse indicielle* $g(t)$ d'un système est définie comme le signal obtenu en sortie de ce système lorsqu'un échelon unité $u(t)$ est appliqué en entrée.

Si nous notons F la transformation qui caractérise l'action du système, nous avons pour la réponse indicielle :

$$g(t) = F[u(t)].$$

A.2. Constante de temps et gain statique

Nous avons déjà rencontré un filtre du premier ordre fondamental dans le chapitre précédent. Il est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = H_0 e(t)$$

La quantité τ , homogène à un temps, est appelée *constante de temps* du circuit.

La quantité H_0 , sans dimension, est le *gain* en tension *statique* du filtre.

A.3. Réponse indicielle

Cherchons la solution $g(t)$ de cette équation différentielle lorsque l'excitation est un échelon unité en supposant le système au repos à $t = 0$.

Nous savons que la solution générale d'une telle équation différentielle peut s'écrire comme la somme de deux fonctions :

- la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) ou *réponse libre* du système;
- une solution particulière de l'équation complète correspondant au *régime permanent*.

Commençons par résoudre l'équation sans second membre :

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Elle a pour solution générale :

Asservissement des systèmes linéaires à temps continu

Cours et Exercices

FORMATION D'INGÉNIEURS EN PARTENARIAT – 1^{ÈRE} ANNÉE
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE DE STRASBOURG
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Edouard Laroche (laroche@unistra.fr)
Housseem Halalchi (Housseem.Halalchi@lsiit.u-strasbg.fr)

<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>

2009–2010

Dr F. BOULGAMH

fel.boulgamh2019@gmail.com