UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM BOUAGHI
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIERE

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

Docteur en Sciences

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Naima Bouzid

THEME

Traitement de Certains Problèmes relativistes et non relativistes avec Dérivées Fractionnaires

Soutenue le 09/03/2017

Devant le Jury:

Président:	**A.Ayadi**,	Prof.	Université Larbi Ben M.hidi-Oum El Bouaghi
Rapporteur:	**M. Merad**,	Prof.	Université Larbi Ben M.hidi-Oum ElBouaghi
Examinateur:	**M.T.Meftah**,	Prof.	Université Kasdi Merbah-Ouargla
Examinateur:	**A.Boumali**,	Prof.	Université Larbi Tébessi-Tebessa
Invité :	**K.Khounfais**,	MCA	Université 20 Août 1955-Skikda

Remerciements

- Je tiens à remercier le Professeur **Mahmoud Merad** de m'avoir fait l'honneur d'accepter la direction de ma thèse. Je lui adresse mes vifs remerciements pour son orientation, ses conseils, sa patience pendant ce travail et tout spécialement pour son encouragement. J'admire beaucoup sa perspicacité et lui témoigne ma gratitude et ma reconnaissance.

- J'adresse mes remerciements a Mr. **A. Ayadi** professeur à l'université Larbi Ben M.hidi-Oum El Bouaghi qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance, je lui adresse toute ma gratitude.

- Je tiens à remercier Mr. **M. T. MEFTAH**, professeur à l'université Kasdi Merbah-Ouargla et Mr. **A. Boumali**, professeur à l'université Larbi Tébessi-Tebessa d'avoir humblement accepté d'être membres du jury de soutenance et de juger ce travail.

- Je suis sensible à l'honneur que me fait Mr. **K.Khounfais, docteur** à l'université 20 Août 1955- Skikda en acceptant d'examiner ce travail et de faire partie du jury.

- Je ne pourrais terminer sans remercier tout particulièrement **Mme Sara Merrouche** maitre de conférences au département d'anglais pour l'aide précieuse qu'elle m'a apportée.

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire, décrit comme une extension du concept de l'opérateur de dérivation d'ordre entier n à un ordre arbitraire α (réel ou complexe), a une longue histoire qui a débuté le *30 septembre 1695* quand la dérivée d'ordre $\alpha = 1/2$ a été mentionnée par Leibniz. Depuis, nombreux sont les mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes à ce sujet, citons entre autres L. Euler, P.S. Laplace, J. Fourier, J. Liouville, B. Riemann.... ; chacun utilisant ses propres méthodes et notations pour proposer différentes définitions de l'intégrale et/ou la dérivée fractionnaires. Les plus célèbres définitions sont celles de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov.

Pendant longtemps, la théorie fractionnaire restait comme un champ de recherche purement mathématique. Cependant, et durant ces dernieres 100 années le calcul fractionnaire a gagné importance et popularité grâce à son vaste potentiel d'application dans différents domaines des sciences et ingéniérie comme l'écoulement de fluide, la diffusion, la relaxation, l'oscillations, la dynamique des matériaux visco-élastique, la propagation des ondes sismiques, la chimie, les milieux éléctriques...

Il existe en littérature un grand nombre d'ouvrages qui traitent le calcul fractionnaire, les équations différentielles fractionnaires et leurs applications en physique. Pour la premiére monographie le mérite est attribué à K.B.Oldham et J.Spanier [1] publié en 1974 et consacré à la présentation des méthodes et applications du calcul fractionnaire dans la physique et l'ingéniérie. Aujourd'hui, la liste des textes et des procédures consacrés exclusivement ou en partie au calcul fractionnaire et ses applications devient de plus en plus riche citons entre autres [2], [3], [4]. En 2005, le premier livre consacré exclusivement à la dynamique fractionnaire et l'application du calcul fractionnaire au Chaos a été publié par Zaslavsky[5]. Mainardi [6] en 2010 publia un livre qui traite l'application du calcul fractionnaire à la dynamique des matériaux viscoélastiques.

Plus récemment, le progrés effectué dans le domaines des équations d'ondes fractionnaires a amplifié et un nouveau champ de recherche a immergé conduisant à de nouvelles méthodes et approches. En 2000, Raspini dans sa publication [7] présenta une équation fractionnaire de Dirac d'ordre 2/3, une approche qui a été généralisée par Zavada en 2002 [8]. Le traitement des équations relativistes et non relativistes notamment Schrodinger, Klein-Gordon et Dirac dans le formalism fractionnaire a connu par la suite un grand intéret. On rencontre par exemple, dans la mécanique quantique non-relativiste, plusieurs approches pour l'équation de Schrödinger libre ou en présence d'un potentiel realisées dans le cadre des dérivées fractionnaires([9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]). En outre, l'applicabilité de ces téchniques a été étendue au cas relativiste où le traitement des équations de Dirac et de Klein Gordon fractionnaires a connu différentes formulations ([16], [17], [18], [19], [20]). Le traitement des équations de Maxwell dans le cadre du calcul fractionnaire a aussi acquis récemment une popularité considérable et de nombreux travaux ont été réalisés à cet égard. Entre autres, nous pouvons nous référer à [21] où la solution d'une équation d'onde fractionnaire dans les milieux diélectriques a été présentée par Gomez et al, [22] où Tarasov a montré que les champs et les ondes éléctromagnetiques dans une grande classe des milieux diéléctriques doivent être décrits a l'aide d'équations différentielles fractionnaires. Dans [23], une formulation Lagrangienne des champs de Maxwell dans un espace-temps fractionnaire a été reportée par Muslih et al.

Cependant, on rencontre dans la littérature une autre équation relativiste qui n'a pas eu le même intérêt dans le cadre fractionnaire, c'est l'équation de Duffin-Kemmer- Petiau (DKP) ([24], [25], [26]). Cette équation est similaire à celle de Dirac, elle décrit la dynamique des particules de spin supérieur et est considerée comme le prolongement naturel de l'équation de Maxwell avec masse associée à l'électrodynamique des milieux diélectriques.

Motivés par le succés réalisé dans ce domaine, notre but dans cette thése est de traiter dans une premiére partie l'équation relativiste dite de DKP dans le formalisme fractionnaire. La déduction de l'équation de DKP fractionnaire à partir d'une densité Lagrangienne appropriée a été realisée en utilisant le principe variationnel fractionnaire. On montre aussi que la même équation fractionnaire peut être déduite en appliquant le formalisme Hamiltonien fractionnaire. Par la suite l'équation de DKP libre a été résolue pour les deux cas scalaire($spin-0$) et vectoriel

($spin-1$). En deuxiéme lieu, et en se basant sur le concept que les méthodes développées dans le calcul fractionnaire sont étroitement liées à celles de la q-algébre étant donné qu'elles introduisent toutes les deux un opérateur dérivée généralisé et peuvent être combinées donnant naissance à une nouvelle classe du calcul fractionnaire déformé, nous présentons l'opérateur de déplacement déformé proposé par Costa Filho et al où la dérivée ordinnaire a été remplacée par l'opérateur déformé appelé q-dérivée où $0 < q \leq 1$.

Cette thèse est organisée comme suit

Dans le premier chapitre, nous donnons un bref apperçu sur les concepts fondamentaux nécéssaires à l'étude et à la manipulation du formalisme fractionnaire en mettant l'accent sur les principales fonctions spéciales qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires.

Dans Le deuxieme chapitre le principe variationnel ainsi que la formulation Hamiltonienne dans le cadre du calcul fractionnaire sont briévement présentés .

Le chapitre trois est consacré au traitement de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans le cadre des dérivées fractionnaires où nous envisageons de déduire puis résoudre l'équation libre dans les cas scalaire et vectoriel. Pour ce faire, nous proposons les formulations Lagrangienne et Hamiltonienne fractionnaires des champs de DKP puis nous traitons l'équation libre à temps fractionnaire ensuite à espace-temps fractionnaires.

Dans le Chapitre quatre, notre contribution consiste en l'application du nouvel opérateur appelé q-dérivée dans le cas des équations relativistes de Klein Gordon et Dirac et de résoudre le problème pour une particule confinée dans une boîte.

Finalement, nous concluons par un récapitulatif des principaux résultats puis nous présentons une bibliographie complète principalement sur les sujets traités et ceux en relation.

Chapitre 1

Notions préliminaires et outils de base

1.1 Introduction

Le concept de différenciation et d'intégration d'ordre non entier n'est pas nouveau. L'intérêt pour ce sujet était presque aussitôt évident que les idées du calcul classique étaient connues. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dûe à Liouville ($1832 - 1837$). Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leurs apparitions comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo (voir [1], [4]).

Dans ce chapitre nous présentons les définitions des plus célébres opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de Riemann-Liouville et de Caputo.Nous mettons aussi l'accent sur quelques notions de base concernant les fonctions spéciales mentionnées dans les autres chapitres. Notre présentation va se restreindre a quelques rappels sur la fonction Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un grand rôle dans la theorie de différentiation d'ordre arbitraire et la théorie des équations différentielles fractionnaires.

1.2 Quelques fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

Sans doute, l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ qui généralise la notion de la factorielle $n!$ et l'étend aux valeurs non entières et même complexes. La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.1}$$

L'une des propriétés de base de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.2}$$

qui peut être démontrée par une simple intégration par parties,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z\right]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \tag{1.3}$$

Partant de $\Gamma(1) = 1$, l'équation (1.2) permet de donner pour $z = 1, 2, 3...$,

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \tag{1.4}$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2 = 2!, \tag{1.5}$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 6 = 3!, \tag{1.6}$$

....

et donc aboutir à :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!. \tag{1.7}$$

La fonction Gamma présente une variété de proprietés et relations avec différentes fonctions spéciales qui peuvent être consultées dans différents ouvrages traitant les fonctions spéciales (voir par exemple [1], [4]).

1.2.2 La fonction Bêta

La fonction bêta est généralement définie par :

$$\mathfrak{B}\left(z,w\right)=\int\limits_{0}^{1}t^{z-1}\left(1-t\right)^{w-1}dt,\quad \mathcal{R}e\left(z\right)\succ 0,..\mathcal{R}e\left(w\right)\succ 0. \tag{1.8}$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (1.1) et la fonction bêta (1.8), nous utiliserons la transformée de Laplace. Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{z.w}\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}t^{z-1}\left(1-t\right)^{w-1}dt. \tag{1.9}$$

Il est facile de voir que $h_{z.w}\left(t\right)$ est un produit de convolution des fonctions t^{z-1} et t^{w-1} et que $h_{z.w}\left(1\right)=\mathfrak{B}\left(z,w\right).$

Grâce à la formule de la transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions on peut trouver,

$$H_{z.w}\left(s\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)}{s^{z}}.\frac{\Gamma\left(w\right)}{s^{w}}=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{s^{z+w}}. \tag{1.10}$$

Etant donné que $\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)$ est une constante, la transformée de Laplace inverse permet de restaurer la fonction originale $h_{z.w}\left(t\right)$,

$$h_{z.w}\left(t\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{\Gamma\left(z+w\right)}t^{z+w-1}, \tag{1.11}$$

qui pour $t=1$ donne l'expression suivante de la fonction Bêta,

$$\mathfrak{B}\left(z,w\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{\Gamma\left(z+w\right)}. \tag{1.12}$$

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler

L'étude de la fonction Mittag-Leffler et ses diverses généralisations est devenue un sujet très populaire en mathématiques et ses applications. Cependant, au cours du XXe siècle, cette fonction était pratiquement inconnue de la majorité des scientifiques, car elle a été ignorée dans les plus courants ouvrages qui traitent les fonctions spéciales. Mais l'importance réelle de cette fonction a été reconnue lorsque son rôle spécial dans le calcul fractionnaire a été découvert, par conséquent l'attention des mathématiciens et scientifiques à l'égard des fonctions de type Mittag-Leffler a augmenté. Depuis, la fonction Mittag-Leffler est considérée comme la fonction reine du calcul fractionnaire.

Du point de vue applications, la fonction de Mittag-Leffler a attiré un grand intérêt dans plusieurs modèles de la physique. On peut citer, entre autres, ceux qui sont liés à des phénomènes de relaxation et d'oscillation fractionnaires ([37], [38]), la diffusion fractionnaire et les phénomènes ondulatoires diffusifs [39], viscoélasticité et hydrodynamisme [6], modèles stochastiques [40]. Pour une analyse plus détaillée nous vous renvoyons à la récente monographie [27] où une déscription détaillée des propriétés de la fonction Mittag-Leffler, ses nombreuses généralisations et leurs applications dans différents domaines de la science moderne sont présentées.

La fonction de Mittag-Leffler doit son nom au grand mathématicien Suédois **Gösta Magnus Mittag-Leffler** $(1846 - 1927)$ qui l'a définie par la représentation en série suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \ \alpha \succ 0. \tag{1.13}$$

En raison de la substitution de $n! = \Gamma(n+1)$ avec $(\alpha n)! = \Gamma(\alpha n + 1)$, il se trouve que la fonction de Mittag-Leffler fournit une généralisation simple de la fonction exponentielle, en effet,

$$E_1(\pm z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm)^n z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm)^n z^n}{n!} = e^{\pm z}. \tag{1.14}$$

D'autres fonctions élémentaires sont aussi des cas particuliers de la fonction de Mittag-Leffler à un paramétre $E_\alpha(z)$,citons entre autres,

$$E_2\left(z^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh z, \tag{1.15}$$

$$E_2\left(-z^2\right) = \cos z, \tag{1.16}$$

ainsi que la fonction erreur complémentaire,

$$E_{1/2}\left(\pm z\right)=e^{z^{2}}\operatorname{erf}c\left(\mp z\right), \tag{1.17}$$

où erf c est la complémentaire de la fonction erf définie par :

$$\begin{aligned}
\operatorname{erf}c\left(z\right) &= 1-\operatorname{erf}\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z}^{\infty}e^{-u^{2}}du, \\
\operatorname{erf}c\left(z\right) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}z}e^{-z^{2}}\ \ pour\ \ \ |z|\rightarrow\infty.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Une généralisation dirécte de la fonction de Mittag-Leffler, initialement introduite par Agarval (voir [27]) est obtenue en remplaçant la constante additive 1 dans l'argument de la fonction Gamma par un paramètre complexe arbitraire β. La fonction de Mittag-Leffler généralisée (ou à deux paramétres) est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{\Gamma\left(\alpha n+\beta\right)},\ 0<\alpha\ ,0<\beta. \tag{1.19}$$

A partir de la définition (1.19) il résulte que,

$$E_{\alpha,1}\left(z\right)=E_{\alpha}\left(z\right), \tag{1.20}$$

et

$$E_{1,2}\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{\Gamma\left(n+2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{\left(n+1\right)!}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\left(n+1\right)!}=\frac{e^{z}-1}{z}, \tag{1.21}$$

Le sinus hyperbolique est aussi un cas particulier de la fonction Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}\left(z\right)$,

$$E_{2,2}\left(z^{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\Gamma\left(2n+2\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}=\frac{\sinh z}{z}. \tag{1.22}$$

D'autre part, il est utile de mentionner que la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler et son comportement asymptotique sont parmi ses plus importantes propriétés qui sont diréctement applicables dans la solution d'équations différentielles et dans l'étude du comportement de la solution [27]. Citons comme exemple une relation qui nous sera trés utile par la suite,

$$L\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\pm at^{\alpha}\right);s\right\}=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}\mp a}. \tag{1.23}$$

1.3 Opérateurs fractionnaires

Le concept de l'opérateur de dérivation $D=d/dx$ est familier à tous ceux qui ont etudié le calcul élémentaire. Pour une souhaitable fonction f, la $n^{iéme}$ (n etant un entier positif) dérivée de la fonction f par rapport à la variable x est notée $D^{n}f\left(x\right)=\frac{d^{n}f}{dx^{n}}=f^{(n)}\left(x\right).$

La question originale qui a conduit au nom du calcul fractionnaire était : la dérivée $\frac{d^{n}f}{dx^{n}}$ peut-elle avoir un sens si n était un nombre arbitraire α ?, d'où l'appéllation intégration et différentiation d'ordre arbitraire. Le symbole D^{n} est par la suite remplacé par D^{α}.

Nous nous intéressons dans ce qui va suivre aux définitions des intégrales et dérivées fractionnaires les plus célèbres et les plus répandues du point de vue applications en physique, à savoir l'intégrale fractionnaire, la dérivée de Riemann-Liouville notée ${}^{RL}D^{\alpha}$ (ou tout simplement D^{α}) et celle de Caputo notée ${}^{c}D^{\alpha}$.

Les intégrales classiques, et les dérivées d'ordre un sont obtenues en posant $\alpha=1$.

1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

C'est une généralisation de la formule (*attribuée à Cauchy*) de'intégrale répétée n-fois,

$$\left(I_{a}^{n}f\right)\left(x\right)=\int\limits_{a}^{x}dt_{1}\int_{a}^{t_{1}}dt_{2}...\int_{a}^{t_{n-1}}f\left(t_{n}\right)dt_{n}=\frac{1}{(n-1)!}\int_{a}^{x}\left(x-t\right)^{n-1}f\left(t\right)dt,\;\;\left(n\in\mathbb{N}^{*}\right). \tag{1.24}$$

Definition 1 (*intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

Soit f une fonction définie sur (a,b), et $0<\alpha$. Alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :

$${}_{x}I_{b}^{\alpha}f\left(x\right)={}_{x}D_{b}^{-\alpha}f\left(x\right)=I_{b-}^{\alpha}f\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_{x}^{b}\left(t-x\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)dt,\;\alpha\in R^{+}\;;\;\;x<b. \tag{1.25}$$

Definition 2 (*intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

Soit f une fonction définie sur (a,b), et $0<\alpha$. Alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :

$$ {}_aI_x^{\alpha}f(x) = {}_aD_x^{-\alpha}f(x) = I_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt,\ \alpha\in R^+;\quad a<x. \tag{1.26}$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

En utilisant les définitions des intégrales fractionnaires ci-dessus, les dérivées de Riemann-Liouville à gauche et à droite pour $n-1<\alpha<n$ sont définies par :

Definition 3 (*Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite*)

Soit $0<\alpha$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite d'ordre α, notées respectivement par ${}_aD_x^{\alpha}$ et ${}_xD_b^{\alpha}$, sont définies par :

$$\left({}_aD_x^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left({}_aI_x^{n-\alpha}\varphi(x)\right), \tag{1.27}$$

et

$$\left({}_xD_b^{\alpha}\varphi\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left({}_xI_b^{n-\alpha}\varphi(x)\right). \tag{1.28}$$

En particulier pour $\alpha\to n$ la dérivée fractionnaire va tendre vers la dérivée usuelle d'ordre entier $\varphi^{(n)}(x)$,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n}\left({}_aD_x^{\alpha}\varphi\right)(x) &= \lim_{\alpha\to n}\frac{d^n}{dx^n}\left({}_aI_x^{n-\alpha}\varphi(x)\right) = \varphi^{(n)}(x),\\ \lim_{\alpha\to n}\left({}_xD_b^{\alpha}\varphi\right)(x) &= \lim_{\alpha\to n}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_xI_b^{n-\alpha}\varphi(x)\right) = (-1)^n\varphi^{(n)}(x).\end{aligned} \tag{1.29}$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967−1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité et mécanique des solides exigent des conditions initiales physiquement intérprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui éxige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Les dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite sont obtenues quand on change l'ordre de l'intégrale et l'opérateur de dérivation dans les formules (1.27) et (1.28) :

Definition 4 (*Dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite*)

Soit $0 < \alpha$, *les dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite d'ordre* α, *notées respectivement par* ${}_{a}^{c}D_{x}^{\alpha}$ *et* ${}_{x}^{c}D_{b}^{\alpha}$, *sont définies par :*

$$\left({}_{a}^{c}D_{x}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)\,dt,\;\; n-1<\alpha<n, \tag{1.30}$$

et

$$\left({}_{x}^{c}D_{b}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)\,dt,\;\; n-1<\alpha<n. \tag{1.31}$$

Notons que pour $\alpha \to n$ la dérivée fractionnaire va tendre vers la dérivée usuelle d'ordre entier $f^{(n)}(x)$, en effet, en supposant que la fonction $f(x)$ admet $n+1$ dérivées on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n}{}_{a}^{c}D_{x}^{\alpha}f(x) &= \lim_{\alpha\to n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \\
&\quad \left[\left[f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\right]_{x}^{a}+\int_{a}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt\right] \\
&= \lim_{\alpha\to n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[f^{(n)}(a)+\int_{a}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt\right] \\
&= f^{(n)}(a)+\int_{a}^{x}f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n)}(a)+f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)=f^{(n)}(x).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

1.3.4 Propriétés importantes

Les opérateurs fractionnaires ne sont pas aisément manipulables car les propriétés fondamentales des dérivées usuelles ne s'étendent pas au cas fractionnaire (ex. la régle de Leibniz, la dérivée d'une composée, la composée d'opérateurs). Toutefois, quelques propriétés subsistent.

dans ce qui suit, nous allons présenter celles qui nous seront utiles. (pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [4],[2]).

Linéarité

De la même façon que la différenciation d'ordre entier, la différenciation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires,

$$D^{\alpha}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right)=\lambda D^{\alpha}f\left(x\right)+\mu D^{\alpha}g\left(x\right). \tag{1.33}$$

En effet, pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $0<\alpha<1$ définies à partir de (1.26) et (1.27)on a :

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{\alpha}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\left(x-t\right)^{-\alpha}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right)dt \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\left(x-t\right)^{-\alpha}f\left(x\right)dt \\
&\quad +\frac{\mu}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_a^x\left(x-t\right)^{-\alpha}g\left(x\right)dt \\
&= \lambda_aD_x^{\alpha}f\left(x\right)+\mu_aD_x^{\alpha}g\left(x\right).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

De même pour les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre $0<\alpha<1$ définies par (1.30) :

$$\begin{aligned}
{}_a^cD_x^{\alpha}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_a^x\left(x-t\right)^{-\alpha}\frac{d}{dx}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right)dt \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_a^x\left(x-t\right)^{-\alpha}f^{(1)}dt \\
&\quad +\frac{\mu}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int\limits_a^x\left(x-t\right)^{-\alpha}g^{(1)}dt \\
&= \lambda_a^cD_x^{\alpha}f\left(x\right)+\mu_a^cD_x^{\alpha}g\left(x\right).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Lien entre les dérivées de Caputo et celles de Riemann-Liouville

En se basant sur les définitions des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $(1.27)\,,(1.28)$ et celle de Caputo $(1.30)\,,(1.31)\,,$ et en éffectuant l'intégration par parties répétée et la différenciation on peut obtenir les relations liant les deux dérivées à savoir,

$$ {}_aD_x^\alpha f\left(x\right) = {}_a^cD_x^\alpha f\left(x\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(x-a\right)^{k-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha+k\right)}f^{(k)}\left(a\right), \tag{1.36}$$

et

$$ {}_xD_b^\alpha f\left(x\right) = {}_x^cD_b^\alpha f\left(x\right) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(b-x\right)^{k-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha+k\right)}f^{(k)}\left(b\right). \tag{1.37}$$

Transformée de Laplace

De nombreux problèmes dans l'ingénierie et la physique impliquent des équations différentielles soumises à des conditions initiales. Un groupe important des équations de ce type peuvent être résolues facilement en utilisant la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace d'une fonction $\varphi\left(x\right)$, $0 < x < \infty$, est définie par :

$$L\varphi = L\left\{\varphi\left(x\right);s\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi\left(x\right)dx. \tag{1.38}$$

Pour choisir la formule appropriée, il est très important de comprendre quel type de définition de dérivée fractionnaire (en d'autres termes, quel type de conditions initiales) doit-on utiliser.

La transformée de Laplace de Riemann-Liouville : Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha$.

L'intégrale fractionnaire de RL peut être éxprimée en fonction du produit de convolution comme suit :

$$ {}_0I_x^\alpha f\left(x\right) = \mathbf{Y}_\alpha\left(x\right) * f\left(x\right), \qquad \textit{avec} \quad \mathbf{Y}_\alpha\left(x\right) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}. \tag{1.39}$$

En utilisant la transformée de Laplace de la convolution,

$$L\left\{\mathbf{Y}_\alpha\left(x\right) * f\left(x\right)\right\} = L\left\{\mathbf{Y}_\alpha\left(x\right);s\right\}F\left(s\right), \tag{1.40}$$

sachant que

$$L\left\{\mathbf{Y}_{\alpha}(x);s\right\}=L\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)};s\right\}=s^{-\alpha}, \tag{1.41}$$

nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α,

$$L\left\{{}_0I_x^{\alpha}f(x);s\right\}=s^{-\alpha}F(s). \tag{1.42}$$

Pour le calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, nous écrivons cette dérniére sous la forme (1.27)

$$ {}_0D_x^{\alpha}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left({}_0I_x^{n-\alpha}f(x)\right). \tag{1.43}$$

En appliquant la définition usuelle de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier n,

$$L\left\{\frac{d^nf}{dx^n};s\right\}=s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0)=s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^rf^{(n-r-1)}(0), \tag{1.44}$$

nous arrivons, avec l'aide de (1.42), à l'expréssion finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α,

$$\begin{aligned} L\left\{{}_0D_x^{\alpha}f;s\right\} &= L\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left({}_0I_x^{n-\alpha}f\right);s\right\}=s^nL\left\{{}_0I_x^{n-\alpha}f;s\right\} \\ &\quad -\sum_{r=0}^{n-1}s^r\frac{d^{n-r-1}}{dx^{n-r-1}}\ {}_0I_x^{n-\alpha}f(0_+) \\ &= s^{\alpha}F(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^r\ \ {}_0D_x^{\alpha-r-1}f(x)\Big]_{x=0}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Nous pouvons constater que la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemaim Liouville fait intervenir des conditions initiales sous forme de dérivées fractionnaires ce qui peut causer des problèmes avec leurs interprétations physiques.

La transformée de Laplace de Caputo : Afin d'établir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo écrivons celle-ci en fonction de l'intégrale fractionnaire,

$$ {}_0^cD_x^{\alpha}f(x)=\ {}_0I_x^{n-\alpha}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right). \tag{1.46}$$

Avec l'aide de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (1.42) et grâce à (1.44) on peut trouver :

$$\begin{aligned} L\left\{ {}_0^cD_x^\alpha f;s\right\} &= s^{-(n-\alpha)}L\left\{\frac{d^nf}{dx^n};s\right\} = s^{-(n-\alpha)}\left(s^nF\left(s\right)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}\left(0_+\right)\right) \\ &= s^\alpha F\left(s\right)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{\alpha-r-1}f^{(r)}\left(0_+\right). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Nous remarquons que la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, à la différence de celle de Riemann-Liouville, permet l'utilisation des valeurs initiales des dérivées d'ordre entier classiques avec des intérprétations physiques connues.

Transformée de Fourier

La tansformée de Fourier d'une fonction $\varphi\left(x\right)$ d'une variable réelle $-\infty < x < +\infty$, est définie par :

$$\left(\mathcal{F}\varphi\right)\left(x\right) = \mathcal{F}\left\{\varphi\left(x\right);k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\varphi\left(x\right)dx. \tag{1.48}$$

La transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire : Pour évaluer la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville avec borne inférieure $-\infty$ définie par :

$${}_aD_x^{-\alpha}f\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)dt, \tag{1.49}$$

et qui peut être écrite sous forme du produit de convolution suivant :

$${}_aD_x^{-\alpha}f\left(x\right) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}*f\left(x\right), \tag{1.50}$$

on utilise la transformée de Fourier du produit de convolution,

$$\mathcal{F}\left\{h\left(x\right)*g\left(x\right),k\right\} = \mathcal{F}\left\{h\left(x\right),k\right\}\mathcal{F}\left\{g\left(x\right),k\right\}. \tag{1.51}$$

Tout en sachant que,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)},k\right\} = \left(-ik\right)^{-\alpha}, \tag{1.52}$$

on obtient la formule finale de la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire,

$$\mathcal{F}\left\{ {}_aD_x^{-\alpha} f(x) ; k \right\} = (-ik)^{-\alpha} \mathcal{F}\{f(x), k\}. \tag{1.53}$$

La transformée de Fourier des dérivées fractionnaires : En considérant la borne inférieure $a = -\infty$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo peuvent être écrites sous la même forme (voir [4]) à savoir :

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}D_x^{\alpha} f(x) &= {}_{-\infty}^{\;\;c}D_x^{\alpha} f(x) = {}_{-\infty} D_x^{\alpha-n} f^n(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt,\ n-1 < \alpha < n. \end{aligned} \tag{1.54}$$

L'utilisation de la formule de la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire(1.53) avec l'aide de la transformée de Fourier de la dérivée d'ordre entier nous permet d'aboutir à la formule suivante qui définit La transformée de Fourier des dérivées fractionnaires d'ordre α,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{ {}_{-\infty}D_x^{\alpha-n} f^n(x) ; k \right\} &= (-ik)^{\alpha-n} \mathcal{F}\left\{ f^{(n)}(x), k \right\} = (-ik)^{\alpha-n} (-ik)^n \mathcal{F}\{f(x), k\} \\ &= (-ik)^{\alpha} \mathcal{F}\{f(x), k\}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

La dérivée d'une constante

Une autre différence entre la définition de Riemann- Liouville et la définition de Caputo est que le dérivée de Caputo d'une constante est nulle ce qui n'est pas le cas pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville avec valeur de la borne inférieure finie, en effet :

Dans le cas de Riemann-Liouville $(0 \leq \alpha < 1)$,

$${}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}\ f^{(1)}(t)\, dt. \tag{1.56}$$

Pour $f(x) = C \Longrightarrow f^{(1)}(x) = 0$ on aboutit à :

$${}_aD_x^{\alpha} C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1.57}$$

On remarque que l'équation (1.57) donnera, pour $a \to \infty$, une valeur nulle ce qui peut être interpreté comme si le temps de démarage du processus physique est réglé à ∞.

Dans le cas de Caputo $(0 \leq \alpha < 1)$,

$$ {}_{a}^{c}D_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[f^{(n)}(a) + \int_{a}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha} dt \right]. \tag{1.58} $$

Pour $f(x) = C \implies f^{(n)}(x) = 0$ et $f^{(n+1)}(x) = 0$ ce qui donne :

$$ {}_{a}^{c}D_{x}^{\alpha} C = 0. \tag{1.59} $$

Formules d'intégration par parties

En admettant que $0 \leq \alpha < 1$ alors les formules d'intégration par partie utilisant les définitions des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo ainsi que les relations qui les relient peuvent être résumées comme suit :

1. $$ \int_{a}^{b} f(x) \; {}_{a}D_{x}^{\alpha} \; g(x) \, dx = \int_{a}^{b} g(x) \; {}_{x}D_{b}^{\alpha} \; f(x) \, dx. \tag{1.60} $$

Démonstration :

Remplaçons la dérivée de Riemann-Liouville par sa formule (1.27) en posant $n = 1$ puis intégrons par partie,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)\ {}_aD_x^{\alpha}\ g(x)\,dx &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^b \frac{d}{dx}\left[\int_a^x (x-t)^{-\alpha}\, g(t)\,dt\right] f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[f(x)\int_a^x (x-t)^{-\alpha}\, g(t)\,dt\right]_a^b \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^b f^{(1)}(x)\,dx\int_a^x (x-t)^{-\alpha}\, g(t)\,dt \qquad (1.61)\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(b)\int_a^b (b-t)^{-\alpha}\, g(t)\,dt \\
&\quad +\int\limits_a^b g(t)\,dt\left(\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b \ (x-t)^{-\alpha}\ \ f^{(1)}(x)\,dx\right).
\end{aligned}
$$

On remarque que le dernier terme entre paranthése n'est autre que la dérivée à droite de Caputo,

$$
\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b \ (x-t)^{-\alpha}\ \ f^{(1)}(x)\,dx = {}_t^cD_b^{\alpha} f(t)\,. \qquad (1.62)
$$

Avec l'aide de (1.37) on aura :

$$
\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)\ {}_aD_x^{\alpha}\ g(x)\,dx &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(b)\int_a^b (b-t)^{-\alpha}\, g(t)\,dt \\
&\quad +\int\limits_a^b g(t)\,dt\left({}_tD_b^{\alpha} f(t) - \frac{(b-t)^{-\alpha} f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\right). \qquad (1.63)
\end{aligned}
$$

Donc on aboutit enfin à :

$$
\int\limits_a^b f(x)\ {}_aD_x^{\alpha}\ g(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx\ {}_xD_b^{\alpha} f(x)\,. \qquad (1.64)
$$

2.

$$
\int\limits_a^b g(t)\ {}_a^cD_t^{\alpha}\ f(t)\,dt = \int\limits_a^b f\ \ (t)_t\, D_b^{\alpha} g(t)\,dt - f(a)\ {}_tI_b^{1-\alpha}\ g(t)\Big|_a^b. \qquad (1.65)
$$

Démonstration :

A partir de la relation qui relie la dérivée fractionnaire de Caputo à celle de Riemann-Liouville (1.36) on peut écrire,

$$\int_a^b g(t)\ {}_a^cD_t^{\alpha} f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\left[{}_aD_t^{\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(a)\right] dt$$

$$= \int_a^b g(t)_a\, D_t^{\alpha} f(t)\,dt - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b g(t)(t-a)^{-\alpha}\,dt. \qquad (1.66)$$

Avec l'aide de (1.60) on aura :

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)\ {}_a^cD_t^{\alpha}\ f(t)\,dt &= \int_a^b f\ \ (t)_t\, D_b^{\alpha} g(t)\,dt - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b g(t)(t-a)^{-\alpha}\,dt \\ &= \int_a^b f\ \ (t)_t\, D_b^{\alpha} g(t)\,dt - f(a)\ {}_tI_b^{1-\alpha}\ g(t)\Big|_a^b\ . \end{aligned} \qquad (1.67)$$

Avec la même procédure on obtient :

3.
$$\int_a^b g(t)\ {}_t^cD_b^{\alpha}\ f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\ {}_aD_t^{\alpha}\ g(t)\,dt - f(b)\ {}_aI_t^{1-\alpha}\ g(t)\Big|_a^b. \qquad (1.68)$$

Chapitre 2

Formalisme Variationnel Fractionnaire

2.1 Introduction

Le calcul fractionnaire a été considéré comme un champ mathématique théorique sans applications physiques pendant plus de trois siècles. Ces dernières décennies ont montré le contraire. Plusieurs domaines d'application de la différenciation fractionnaire et de l'intégration fractionnaire sont déjà bien établies, d'autres ont tout juste commencé. L'un des domaines qui a récemment émergé dans le cadre fractionnaire et qui est fortement soumis à la recherche est le calcul des variations et les équations de type Euler-Lagrange.

La mécanique Hamiltonienne (ou Lagrangienne) classique est formulée pour l'analyse des systèmes conservatifs, alors que le monde physique est plutôt nonconservatif . La présence des forces non conservatives tels que la friction dans les modéles physiques augmente la complexité mathématique pour y faire face. Des recherches récentes ont montré qu'un modèle à dérivée fractionnaire fournit une meilleure représentation de l'amortissement interne d'un matériau que le modèle à dérivée ordinaire. Plusieurs tentatives ont été faites pour inclure les forces non conservatives dans le Lagrangien et la mécanique Hamiltonienne.

En 1996, Riewe a formulé le calcul des variations de problèmes avec des dérivés fractionnaires et obtenu les équations d'Euler-Lagrange respectives combinant les cas conservatifs et non conservatifs [34]. En 2001, Agrawal a présenté une nouvelle forme du Lagrangien et des équations de lagranges qui peuvent être utilisées pour l'obtention des équations de mouvement de systémes dont les forces d'amortissement sont proportionnelles à la dérivée fractionnaire d'ordre j/n [35]. En 2002, Agrawal dans son article [36] a étendu les problèmes variationnels en considérant les dérivées fractionnaires droite et gauche dans le sens de Riemann-Liouville, la formulation présentée et les équations résultantes sont très semblables à celles qui apparaissent dans le domaine du calcul classique des variations.

Dans ce qui suit et dans le but de présenter brièvement le formalisme variationnel, nous allons nous baser sur la formulation du principe variationnel fractionnaire d'Agrawal [36].

2.2 Principe Variationnel Fractionnaire

"Qu'est-ce que le calcul variationnel fractionnaire ?" Pour résoudre ce probléme définissons d'abord "un ***problème variationnel***". Un probléme variationel est un probléme qui nécéssite de trouver l'extrémum d'une fonctionnelle qui peut être soumise à des contraintes algébriques ou dynamiques. Si la fonctionnelle et/ou les contraintes contiennent au moins un terme avec dérivée fractionnaire alors le probléme est appelé probléme variationnel fractionnaire.

Pour ce faire, soit la fonction $\mathcal{F}$ dépendant des champs ϕ et de leurs dérivées fractionnaires donnée par $\mathcal{F} = \mathcal{F}\left(x, \phi(x), {}_a D_x^{\alpha} \phi(x), {}_x D_b^{\beta} \phi(x)\right)$, où on a inclus les dérivées à gauche et à droite de Riemann-Liouville d'ordre respectif $0 \leq \alpha < 1$ et $0 \leq \beta < 1$.

Soit la fonctionnelle $J[\phi]$ définie par :

$$J[\phi] = \int_a^b \mathcal{F}\left[x, \phi(x), {}_a D_x^{\alpha} \phi(x), {}_x D_b^{\beta} \phi(x)\right] dx. \tag{2.1}$$

Pour développer la condition necéssaire pour laquelle la fonctionnelle $J[\phi]$ est un extremum on envisage la famille des fonctions,

$$\phi(x, \epsilon) = \phi(x) + \epsilon \eta(x), \tag{2.2}$$

avec ϵ un paramétre arbitraire et une fonction $\eta(x)$ quelconque qui verifie les conditions aux limites,

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{2.3}$$

Etant donné que les dérivées fractionnaires sont des opérateurs linéaires il en résulte que,

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^\alpha \phi(x,\epsilon) &= {}_aD_x^\alpha \phi(x) + \epsilon {}_aD_x^\alpha \eta(x), \\
{}_xD_b^\beta \phi(x,\epsilon) &= {}_xD_b^\beta \phi(x) + \epsilon {}_xD_b^\beta \eta(x).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Substituons (2.2) et (2.4) dans (2.1), nous constatons que pour chaque $\eta(x)$ on a :

$$J(\epsilon) = \int_a^b \mathcal{F}\left[x, \phi(x) + \epsilon\eta(x), {}_aD_x^\alpha \phi(x) + \epsilon {}_aD_x^\alpha \eta(x), {}_xD_b^\beta \phi(x) + \epsilon {}_xD_b^\beta \eta(x)\right] dx. \tag{2.5}$$

La variation de $J[\phi(x,\epsilon)]$ (qui est devenue une fonction de ϵ) est alors :

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}\eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_a D_x^\alpha \phi}{}_a D_x^\alpha \eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_x D_b^\beta \phi}{}_x D_b^\beta \eta\right] dx. \tag{2.6}$$

Une condition nécéssaire pour que $J(\epsilon)$ ait un extremum est que $\frac{dJ}{d\epsilon}$ doit être nulle quelque soit $\eta(x)$,

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}\eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_a D_x^\alpha \phi}\ {}_a D_x^\alpha \eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_x D_b^\beta \phi}\ {}_x D_b^\beta \eta\right] dx = 0. \tag{2.7}$$

Pour évaluer la deuxiéme et la troisiéme intégrale dans (2.7) on utilise la formule d'intégration par partie (1.60) d'où le résultat :

$$\int_a^b \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_a D_x^\alpha \phi}\ {}_a D_x^\alpha \eta dx = \int_a^b {}_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_a D_x^\alpha \phi}\right)\eta dx, \tag{2.8}$$

$$\int_a^b \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_x D_b^\beta \phi}\ {}_x D_b^\beta \eta dx = \int_a^b {}_a D_x^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_x D_b^\beta \phi}\right)\eta dx. \tag{2.9}$$

Remplaçant (2.8) et(2.9) dans (2.7) on arrive à :

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} + {}_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_a D_x^\alpha \phi}\right) + {}_a D_x^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_x D_b^\beta \phi}\right)\right]\eta dx = 0. \tag{2.10}$$

Du moment que $\eta(x)$ est arbiltraire, on aboutit à l'équation d'Euler-Lagrange pour un probléme variationnel fractionnaire,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} +_x D_b^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_a D_x^\alpha \phi} \right) +_a D_x^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial_x D_b^\beta \phi} \right) = 0. \tag{2.11}$$

En outre, pour $\alpha = \beta = 1$, nous avons ${}_aD_x^\beta = \frac{d}{dx}$ et ${}_xD_b^\alpha = -\frac{d}{dx}$ ce qui nous permet de recupérer l'équation standard d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^{(1)}} \right) = 0 \text{ avec } \phi^{(1)} = \frac{d\phi}{dx}. \tag{2.12}$$

A ce stade nous aimerions preciser ce qui suit :

1. Nous avons formulé le problème en termes de dérivées de Riemann-Liouville. La même approche peut être utilisée pour trouver les équations d'Euler-Lagrange pour fonctionnelles définies en termes de dérivées de Caputo ou mixtes (Caputo et Riemann-Liouville).
2. La présence des dérivées Caputo / Riemann-Liouville droite / gauche conduit à des dérivées de Riemann-Liouville / Caputo gauche / droite dans les équations d'Euler-Lagrange.
3. Dans la formulation précedente ϕ a été traitée comme une fonction scalaire. Les équations ci-dessus sont également valables lorsque ϕ est une fonction vectorielle.

2.3 Formulation Hamiltonienne Fractionnaire

Le traitement des problèmes de la mécanique classique ou relativiste dans le formalisme Lagrangien est amplement suffisant pour la déscription du système. En outre, il est souhaitable de traiter ces problèmes grâce à l'approche Hamiltonien. Bien que le formalisme Hamiltonien n'apporte rien de nouveau du point de vue contenu physique, il fournit un cadre théorique puissant pour une intérprétation géométrique de la mécanique quantique. C'est dans ce cadre que la physique moderne (en particulier la théorie des champs) a développé. C'est dans ce cadre aussi que tous les phénomènes du chaos sont étudiés car la déscription du système à travers le formalisme Hamiltonien est mieux adaptée dans l'espace de phase.

D'un point de vue mathématique une formulation Hamiltonienne n'est autre qu'un ensemble de transformations de Legendre qui remplace les vitesses généralisées présentes dans le Lagrangien (ou la densité Lagrangienne) par les impulsions généralisées ou moments conjugués. Le Lagrangien transformé (ou la densité Lagrangienne) obtenu par ce processus est appelé Hamiltonien (ou densité Hamiltonienne).

Dans le but de développer une formulation Hamiltonienne fractionnaire, considérons la fonctionnelle décrite par (2.1) comme l'action des champs classiques contenant des dérivées fractionnaires,

$$S = \int_a^b \mathcal{L}\left[\phi,_a D_t^\alpha \phi,_t D_b^\beta \phi,_a D_x^\alpha \phi\left(x\right),_x D_b^\beta \phi, t\right] d^3x dt. \tag{2.13}$$

Comme il a été développé précédement, l'extrémisation de cette action donnera naissance à l'équation d'Euler-Lagrange fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} +_a D_t^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t D_b^\beta \phi}\right) +_t D_b^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a D_t^\alpha \phi}\right) + \ _x D_b^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha \phi}\right) +_a D_x^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta \phi}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Introduisant les moments conjugués comme :

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a D_t^\alpha \phi}, \qquad \pi_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t D_b^\beta \phi}, \tag{2.15}$$

et écrivons l'Hamiltonien sous la forme :

$$H = \pi_\alpha \ _a D_t^\alpha \phi + \pi_\beta \ _t D_b^\beta \phi - \mathcal{L}. \tag{2.16}$$

En prenant la différentielle totale des deux côtés, nous obtenons :

$$\begin{aligned} dH &= \pi_\alpha \ d\left(_a D_t^\alpha \phi\right) + d\pi_\alpha \ _a D_t^\alpha \phi + \pi_\beta \ d\left(_t D_b^\beta \phi\right) + d\pi_\beta \ _t D_b^\beta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a D_t^\alpha \phi} d\left(_a D_t^\alpha \phi\right) \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t D_b^\beta \phi} d\left(_t D_b^\beta \phi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha \phi} d\left(_a D_x^\alpha \phi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta \phi}\left(_x D_b^\beta \phi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En remplaçant les valeurs des moments conjugués, on trouve :

$$\begin{aligned} dH &= d\pi_\alpha \ _a D_t^\alpha \phi + d\pi_\beta \ _t D_b^\beta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha \phi} d\left(_a D_x^\alpha \phi\right) \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta \phi} d\left(_x D_b^\beta \phi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{2.18}$$

D'aprés l'équation d'Euler-Lagrange (2.14) on peut réecrire (2.18) comme :

$$\begin{aligned} dH &= d\pi_\alpha\ {}_aD_t^\alpha\phi + d\pi_\beta\ {}_tD_b^\beta\phi + \left[{}_aD_t^\beta\pi_\beta +{}_t D_b^\alpha\pi_\alpha +\ {}_xD_b^\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha\phi}\right) +{}_a D_x^\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta\phi}\right)\right]d\phi \\ &\quad -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha\phi}d\left({}_aD_x^\alpha\phi\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta\phi}d\left({}_xD_b^\beta\phi\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt, \end{aligned} \tag{2.19}$$

ce qui nous améne à un Hamiltonien dépendant de ϕ, π_α, π_β, ${}_aD_x^\alpha\phi$, ${}_xD_b^\beta\phi$ et t,

$$H = H\left(\phi, \pi_\alpha, \pi_\beta, {}_a D_x^\alpha\phi, {}_x D_b^\beta\phi, t\right). \tag{2.20}$$

Ainsi la différentielle totale prendra la forme :

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial H}{\partial\pi_\alpha}d\pi_\alpha + \frac{\partial H}{\partial\pi_\beta}d\pi_\beta + \frac{\partial H}{\partial_a D_x^\alpha\phi}d\left({}_aD_x^\alpha\phi\right) \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial_x D_b^\beta\phi}d\left({}_xD_b^\beta\phi\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Par comparaison entre les équations (2.19) et (2.21) on aboutit aux équations de mouvement fractionnaires d'Hamilton,

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial\pi_\alpha} ={}_a D_t^\alpha\phi, \quad \frac{\partial H}{\partial\pi_\beta} ={}_t D_b^\beta\phi, \\ \frac{\partial H}{\partial_a D_x^\alpha\phi} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha\phi}, \quad \frac{\partial H}{\partial_x D_b^\beta\phi} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta\phi}, \\ \frac{\partial H}{\partial\phi} ={}_a D_t^\beta\pi_\beta +{}_t D_b^\alpha\pi_\alpha +\ {}_xD_b^\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_a D_x^\alpha\phi}\right) +{}_a D_x^\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_x D_b^\beta\phi}\right). \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Chapitre 3

Applications : Traitement de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans le cadre fractionnaire

3.1 Introduction

Au cours des dérnières années, le calcul fractionnaire a été utilisé dans la mécanique quantique, dans l'objectif d'une généralisation. La première tentative d'application du concept de fractalité réussie était l'approche par l'intégrale de chemin de Feynman [46]. La mécanique quantique fractionnaires a été découverte par Nick Laskin (1999), il a montré que si l'intégrale de chemin sur des trajectoires browniennes conduit à l'équation bien connue de Schrödinger, l'intégrale de chemin sur des trajectoires Levy conduit à l'équation de Schrödinger fractionnaire.

Récemment, une attention considérable a été accordée aux solutions des équations relativistes et non relativistes fractionnaires, à savoir les équations de Schrödinger, Klein–Gordon et Dirac fractionnaires qui pourraientt être considérées comme des équations dans lesquelles les dérivées ordinnaires de l'espace et du temps ont été remplacées par des dérivées d'ordre arbitraire. Citons comme exemple l'équation fractionnaire de Schrödinger qui comprend la dérivée d'ordre α,

$$i\hbar^{\alpha c}{}_{+}\partial_0^{\alpha}\Psi\left(x,t\right)=-\frac{\hbar^{2\alpha}}{2m^{\alpha}}{}_{+}^{c}\partial_{k+}^{\alpha c}\partial_k^{\alpha}\Psi\left(x,t\right),$$

et qui pour $\alpha = 1$ converge vers l'équation standard de Schrödinger.

L'équation de Dirac fractionnaire,

$$\gamma^{\mu} \left({}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha} \Psi \right) + m^{\alpha} \Psi = 0,$$

avec $0 \prec \alpha \preceq 1$.

L'équation de Klein-Gordon fractionnaire,

$$\left[\left({}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha} \right) \left({}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha} \right) - m^{2\alpha} \right] \Psi (x, t) = 0.$$

Plusieurs méthodes ont été mises en place pour résoudre de telles équations, les plus populaires sont la méthode de transformation de Laplace [4], la transformée de Fourier [3], la méthode d'itération [2]. La méthode de fonction de Green est aussi une des plus utiles (voir [47]).

Dans ce qui va suivre nous allons traiter l'équation relativiste qui gouverne les bosons scalaires et vectoriels à savoir l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau et ceci via le formalisme fractionnaire en commençant par développer une formulation Lagrangienne puis Hamiltonienne fractionnaire des champs de DKP afin d'aboutir à une équation fractionaire d'ordre arbitraire puis de proposer des solutions pour les deux cas $spin - 1$ et $spin - 0$.

3.2 Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Fractionnaire

3.2.1 Généralités

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [24],[26] est une équation d'onde relativiste de premier ordre qui décrit les particules scalaires et vectorielles. C'est une généralisation directe de l'équation de Dirac ($spin - 1/2$) aux particules de spin superieurs avec une algèbre plus compliquée appelée algèbre de DKP.

Même si l'équation de DKP contient une déscription des particules scalaires de spin-0 elle n'est pas complétement équivalente à celle de Klein-Gordon (KG) sauf dans le cas d'abscence d'intéraction. Récemment, beaucoup d'efforts, dont [28], [29], ont été fournits dans le but de restaurer cette équivalence. Cette équation fût par la suite appliquée en chromodynamique quantique (QCD) par [30], et généralisée par [31] et [32] à l'espace-temps courbe.

Dans le cas d'une particule libre de masse m l'équation de DKP est donnée par :

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\Psi_{DKP} = 0, \tag{3.1}$$

où β^{μ} $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont les matrices de DKP satisfaisant la relation de commutation,

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\lambda} + \beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\mu} = \eta^{\mu\nu}\beta^{\lambda} + \eta^{\lambda\nu}\beta^{\mu}, \tag{3.2}$$

qui définit ce qu'on appelle l'algèbre de (DKP), $\eta^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique espace-temps de Minkowski, avec la signature$(+ - --)$. L'algébre générée par les 4 β^{μ} a trois représentations irréductibles : une représentation de dimension 10 qui décrit les particules vectorielles de spin-1, une de dimension 5 décrivant les particules scalaires de spin-0 et la représentation de dimension 1 dite triviale.

Dans le cas des particules de spin-0 les β^{μ} sont des matrices 5×5 definies comme $(i = 1, 2, 3)$,

$$\beta^{0} = \begin{pmatrix} \theta & \overline{0} \\ \overline{0}^{T} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta^{i} = \begin{pmatrix} \widetilde{0} & \rho^{i} \\ -\left(\rho^{i}\right)^{T} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

où $\widetilde{0}$, $\overline{0}$, 0 sont des matrices zéro d'ordre respectif 2×2, 2×3, 3×3, θ et ρ^{i} définies par :

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Pour le spin-1, β^{μ} sont des matrices 10×10 données par :

$$\beta^{0} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0}^{T} & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \overline{0}^{T} & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \overline{0}^{T} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & e_{i} & \overline{0} \\ \overline{0}^{T} & 0 & 0 & -is_{i} \\ e_{i}^{T} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{0}^{T} & -is_{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

s_{i} sont les matrices 3×3 usuelles, $(s_{i})_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$, $\mathbf{I}$ est la matrice identité, $\overline{0}$ et e_{i} sont définies comme :

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Ψ_{DKP} est un spineur à cinq composantes pour le cas $spin - 0$ et dix composantes pour les particules de $spin - 1$.

3.2.2 Equation de DKP fractionnaire

Dans le but de déduire l'équation de DKP libre dans le contexte du principe variationnel fractionnaire on propose la densité Lagrangienne fractionnaire de DKP suivante [33] :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}\beta^{\mu}\ {}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}\Psi +_{-} \partial_{\mu}^{\alpha}\overline{\Psi}\beta^{\mu}\Psi\right) - m^{\alpha}\overline{\Psi}\Psi, \tag{3.7}$$

avec m la masse de la particule, Ψ le spineur représentant le champ de DKP et $\overline{\Psi} = \Psi^{+}\eta^{0}$ est son adjoint où η^{0} est définie à partir de l'expréssion générale

$$\eta^{\mu} = 2\left(\beta^{\mu}\right)^{2} - \eta^{\mu\mu}, \tag{3.8}$$

β^{μ} $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont les matrices de DKP (3.2).

On note que ${}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}$ et ${}_{-}\partial_{\mu}^{\alpha}$ introduits dans (3.7) sont respectivement la dérivée fractionnaire partielle de Caputo à gauche et la dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à droite d'ordre α $(0 < \alpha \leq 1)$ par rapport aux variables x_{μ}.

Pour établir les équations du mouvement nous appliquons le principe variationnel fractionnaire développé dans le chapitre 2 a la densité Lagrangienne (3.7) en considérant Ψ et $\overline{\Psi}$ comme des champs indépendants.

Avec l'aide des formules d'intégration par partie (1.65) et (1.68) on arrive aux équations d'Euler-Lagrange pour Ψ et $\overline{\Psi}$ suivantes :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\Psi}} + {}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left({}_{-}\partial_{\mu}^{\alpha}\overline{\Psi}\right)}\right) = \mathbf{0}, \tag{3.9}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} + {}_{-}\partial_\mu^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left({}_{+}^{c}\partial_\mu^\alpha \Psi \right)} \right) = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

La substitution de (3.7) dans (3.9) et dans (3.10) permet facilement d'aboutir a l'équation de DKP fractionnaire,

$$i\beta^\mu \, {}_{+}^{c}\partial_\mu^\alpha \Psi - m^\alpha \Psi = 0, \tag{3.11}$$

et son équation adjointe,

$$i {}_{-}\partial_\mu^\alpha \overline{\Psi} \beta^\mu - m^\alpha \overline{\Psi} = 0. \tag{3.12}$$

Il est facile de voir qu'à la limite $\alpha = 1$ on a : ${}_{+}^{c}\partial_\mu^1 = \partial_\mu$, ${}_{-}\partial_\mu^1 = -\partial_\mu$, par la suite les équations (3.11) et (3.12) convergent vers les équations de DKP ordinnaires à savoir :

$$i\beta^\mu \; \partial_\mu \Psi - m^\alpha \Psi = 0, \tag{3.13}$$

et

$$i \; \partial_\mu \overline{\Psi} \beta^\mu + m^\alpha \overline{\Psi} = 0. \tag{3.14}$$

3.2.3 Formulation Hamiltonienne des champs de Duffin-Kemmer-Petiau fractionnaires

En dépit de ses avantages, le Lagrangien n'est pas une quantité intrinsèque, il est défini à une fonction arbitraire près tandis que l'Hamiltonien, qui est une formulation canonique des équations dans l'espace de phase est déterminé d'une manière unique permettant de mettre l'accent sur les variables dynamiques. Voilà pourquoi nous croyons que pour des raisons pédagogiques, il est intéressant de traiter une formulation Hamiltonienne fractionnaire du champ de DKP afin de comparer les deux formalismes. En outre cette formulation joue un rôle capital dans la quantification ainsi que la construction de théories physiques telles que la mécanique quantique, la mécanique statistique, la théorie quantique des champs, la relativité générale et les théories unifiant les différentes interactions physiques.

La formulation Hamiltonienne fractionnaire des champs de DKP commence par l'introduction des moments canoniques fractionnaires π_0 et $\overline{\pi}_0$ définis par :

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left({}_{+}^{c}\partial_0^\alpha \Psi\right)}, \quad \overline{\pi}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left({}_{-}\partial_0^\alpha \overline{\Psi}\right)}. \tag{3.15}$$

Faisant usage de (3.7) nous obtenons :

$$\pi_0 = \frac{i}{2}\overline{\Psi}\beta^0 \ \text{ et } \quad \overline{\pi}_0 = \ \frac{i}{2}\beta^0\Psi. \tag{3.16}$$

En faisant intervenir la densité Lagrangienne fractionnaire, on propose la densité Hamiltonienne canonique fractionnaire sous la forme suivante :

$$H_f = \pi_0 \ {}_{+}^{c}\partial_0^\alpha \Psi + \ {}_{-}\partial_0^\alpha \overline{\Psi} \ \overline{\pi}_0 - \mathcal{L} \ . \tag{3.17}$$

Cependant, cette forme du Hamiltonien ne conduit pas à l'équation du mouvement correcte d'Euler-Lagrange. En effet, en remplaçant l'expression de la densité Lagrangienne fractionnaire (3.7) on trouve :

$$H_f = -\frac{i}{2}\overline{\Psi}\beta^j \ {}_{+}^{c}\partial_j^\alpha \Psi - \frac{i}{2}{}_{-}\partial_j^\alpha \overline{\Psi}\beta^j \ \Psi + m^\alpha \overline{\Psi}\Psi, \tag{3.18}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial H_f}{\partial \overline{\Psi}} = -\frac{i}{2}\beta^j \ {}_{+}^{c}\partial_j^\alpha \Psi + m^\alpha \Psi. \tag{3.19}$$

un résultat qui n'est pas compatible avec,

$$\frac{\partial H_f}{\partial \overline{\Psi}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\Psi}} = \frac{i}{2}\beta^{\mu}{}_{+}^{c}\partial_\mu^\alpha \Psi \tag{3.20}$$

Pour surmonter ce problème, nous allons utiliser la technique des multiplicateurs de Lagrange en introduisant autant de multiplicateurs qu'il y'a de contraintes.

En traitant l'equation (3.16) comme des contraintes et en les ajoutant à la fonction (3.17) nous obtenons la nouvelle densité Hamiltonienne,

$$H_f = -\frac{i}{2}\overline{\Psi}\beta^j \ {}_{+}^{c}\partial_j^\alpha \Psi - \frac{i}{2}{}_{-}\partial_j^\alpha \overline{\Psi}\beta^j \ \Psi + m^\alpha \overline{\Psi}\Psi + \left(\pi_0 - \frac{i}{2}\overline{\Psi}\beta^0\right)\theta_0^\alpha + \overline{\theta}_0^\alpha \left(\overline{\pi}_0 - \frac{i}{2}\beta^0\Psi\right), \tag{3.21}$$

où θ_0^α et $\overline{\theta}_0^\alpha$ sont les multiplicateurs de Lagrange qu'on va définir dans ce qui va suivre.

L'usage des équations $(3.7)\,,(3.17)$ et (3.21) permet d'aboutir aux équations d'Hamilton fractionnaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_f}{\partial \overline{\Psi}} &= -\frac{i}{2}\beta^j\, {}_{+}^{c}\partial_j^\alpha \Psi + m^\alpha \Psi - \frac{i}{2}\beta^0 \theta_0^\alpha = \frac{i}{2}\beta_+^{\mu c}\partial_\mu^\alpha \Psi, && (3.22)\\
\frac{\partial H_f}{\partial \pi_0} &= {}_{+}^{c}\partial_0^\alpha \Psi = \theta_0^\alpha, &&\\
\frac{\partial H_f}{\partial \Psi} &= -\frac{i}{2}{}_{-}\partial_j^\alpha \overline{\Psi}\beta^j + m^\alpha \overline{\Psi} - \frac{i}{2}\overline{\theta}_0^\alpha \beta^0 = \frac{i}{2}{}_{-}\partial_\mu^\alpha \overline{\Psi}\beta^\mu, && (3.23)\\
\frac{\partial H_f}{\partial \overline{\pi}_0} &= {}_{-}\partial_0^\alpha \overline{\Psi} = \overline{\theta}_0^\alpha. &&
\end{aligned}$$

Il est facile de verifier qu'à partir des équations (3.22) et (3.23) nous retrouvons les équations (3.11) et $(3.12)\,.$

3.2.4 Equations fractionnaires de Klein-Gordon et Proca

Il est bien connu que dans le cas libre il y a une parfaite équivalence entre l'équation de DKP et ceux de Klein-Gordon et Proca, mais en présence de l'interaction, il semble que le formalisme de DKP jouit d'une richesse pas capable d'être exprimée dans les théories.de KG et Proca [41] [42] [43].

Comme cette théorie correspond aux cas de spin-1 et spin-0, nous proposons de déduire les équations de Klein-Gordon et Proca fractionnaires libres en séparant les deux secteurs scalaire et vectoriel de l'équation de DKP fractionnaire.

Les secteurs de spin 0 et de spin 1 de la théorie peuvent être sélectionnés à partir d'une représentation générale des matrices β^μ à travers un ensemble d'opérateurs comme il est indiqué en référence [44].

Pour séléctionner la fonction d'onde de la particule scalaire $(spin - 0)$, nous appliquons l'opérateur definit par :

$$P = -\left(\beta^0\right)^2 \left(\beta^1\right)^2 \left(\beta^2\right)^2 \left(\beta^3\right)^2, \tag{3.24}$$

à gauche de l'équation fractionnaire de DKP (3.11) en tenant compte de l'opérateur,

$$P^{\mu}=P\beta^{\mu}, \tag{3.25}$$

on obtient :

$$ {}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}\left(P^{\mu}\Psi\right)=\frac{m^{\alpha}}{i}\left(P\Psi\right), \tag{3.26}$$

puis en appliquant l'opérateur P^{ν} à (3.11) une fois de plus en utilisant la propriété $P^{\mu}\beta^{\nu}=P\eta^{\mu\nu}$ (qui peut être déduite facilement à partir de l'algébre (3.2)), où $\eta^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski, on trouve :

$$P^{\nu}\Psi=\frac{i}{m^{\alpha}}\,{}_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\nu}\left(P\Psi\right). \tag{3.27}$$

Enfin en combinant les deux équations (3.26) et (3.27) on arrive à l'équation.de Klein-Gordon fractionnaire,

$$ {}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}\left({}_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\mu}\right)\left(P\Psi\right)+m^{2\alpha}\left(P\Psi\right)=0, \tag{3.28}$$

Ces résultats montrent que tous les éléments de la matrice colonne $P\Psi$ sont des champs scalaires de masse m obéissant à l'équation KG, tandis que les éléments de $P^{\nu}\Psi$ sont les dérivées par rapport à x_{ν} des éléments correspondants de $P\Psi$. Donc, l'application de l'opérateur P sur Ψ sélectionne le secteur $spin-0$ de la théorie DKP, rendant explicitement clair qu'il décrit une particule scalaire.

De même, nous pouvons choisir la fonction d'onde d'une particule vectorielle ($spin-1$) en introduisant les opérateurs [44],

$$R^{\mu}=\left(\beta^{1}\right)^{2}\left(\beta^{2}\right)^{2}\left(\beta^{3}\right)^{2}\left[\beta^{\mu}\beta^{0}-\eta^{\mu0}\right], \tag{3.29}$$

et

$$R^{\mu\nu}=R^{\mu}\beta^{\nu}. \tag{3.30}$$

qui verifient les propriétés suivantes :

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}, \tag{3.31}$$

$$R^{\mu}\beta^{\rho}\beta^{\upsilon} = \eta^{\rho\nu}R^{\mu} - \eta^{\mu\nu}R^{\rho}. \tag{3.32}$$

L'application de l'opérateur R^{μ} à l'équation de DKP (3.11) avec l'aide de (3.30) donne le résultat suivant :

$$\,_{+}^{c}\partial_{\nu}^{\alpha}\left(R^{\mu\nu}\Psi\right) = \frac{m^{\alpha}}{i}\left(R^{\mu}\Psi\right). \tag{3.33}$$

Faisant agir l'opérateur $R^{\mu\rho}$ sur (3.11) on obtient :

$$i\,_{+}^{c}\partial_{\nu}^{\alpha}\left(R^{\mu\rho}\beta^{\nu}\Psi\right) - m^{\alpha}R^{\mu\rho}\Psi = 0, \tag{3.34}$$

en tenant compte que $R^{\mu\rho}$ est donné par (3.30) on peut écrire,

$$R^{\mu\rho}\Psi = \frac{i}{m^{\alpha}}\,_{+}^{c}\partial_{\nu}^{\alpha}\left(R^{\mu}\beta^{\rho}\beta^{\nu}\right)\Psi, \tag{3.35}$$

ou bien, d'aprés la propriété (3.32) ,

$$R^{\mu\rho}\Psi = \frac{i}{m^{\alpha}}\,_{+}^{c}\partial_{\nu}^{\alpha}\left[\eta^{\rho\nu}R^{\mu} - \eta^{\mu\nu}R^{\rho}\right]\Psi, \tag{3.36}$$

ce qui permet d'aboutir à :

$$R^{\mu\rho}\Psi = -\frac{i}{m^{\alpha}}\left[\,_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\mu}\left(R^{\rho}\Psi\right) -_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\rho}\left(R^{\mu}\Psi\right)\right], \tag{3.37}$$

La combinaison des éqs.(3.33) et (3.37) conduit à l'équation suivante :

$$\,_{+}^{c}\partial_{\rho}^{\alpha}U^{\mu\rho} - m^{2\alpha}R^{\mu}\Psi = 0, \tag{3.38}$$

où le tenseur $U^{\mu\rho}$ est définit par :

$$U^{\mu\rho} = \left[\,_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\mu}\left(R^{\rho}\Psi\right) -_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\rho}\left(R^{\mu}\Psi\right)\right]. \tag{3.39}$$

D'une maniére équivalente (3.38) peut s'écrire sous la forme d'une équation de Proca fractionnaire,

$$\begin{cases} {}_{+}^{c}\partial_{\rho}^{\alpha}\left({}_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\rho}\right)\left(R^{\mu}\Psi\right)+m^{2\alpha}\left(R^{\mu}\Psi\right)=0 \\ {}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}\left(R^{\mu}\Psi\right)=0 \end{cases}. \tag{3.40}$$

où $R^{\mu}\Psi$ est une matrice colonne dont les éléments sont les composantes d'un champ vecteur. Ainsi, comme dans le cas de $spin-0$, cette procédure permet de sélectionner le contenu $spin-1$ de la théorie de DKP qui décrit d'une façon explicite une particule vectorielle massive.

A ce stade, il est également intéressant de dériver l'équation de continuité pour le champ fractionnaire de DKP en multipliant l'équation.(3.11) à gauche par Ψ et l'équation conjuguée.(3.12) par $\overline{\Psi}$ à droite puis en retranchant les deux équations résultantes. Le résultat final est :

$$\overline{\Psi}\beta^{\mu}\left({}_{+}^{c}\partial_{\mu}^{\alpha}\Psi\right)-\ {}_{-}\partial_{\mu}^{\alpha}\left(\overline{\Psi}\beta^{\mu}\right)\Psi=0, \tag{3.41}$$

qui représente l'équation de continuité écrite dans une forme plus compacte,

$$\overline{\Psi}\beta^{\mu}\overleftrightarrow{D_{\mu}^{\alpha}}\Psi=0, \tag{3.42}$$

où l'opérateur $\overleftrightarrow{D_{\mu}^{\alpha}}$ est définit par :

$$\overleftrightarrow{D_{\mu}^{\alpha}}={}_{+}^{c}\overrightarrow{\partial_{\mu}^{\alpha}}-\overleftarrow{{}_{-}\partial_{\mu}^{\alpha}}. \tag{3.43}$$

Notons que pour $\alpha=1$, nous retrouvons l'équation de continuité ordinnaire,

$$\partial_{\mu}\left(\overline{\Psi}\beta^{\mu}\Psi\right)=0. \tag{3.44}$$

3.2.5 Solutions de l'équation de DKP fractionnaire

On propose dans ce qui va suivre de résoudre l'équation fractionnaire de DKP libre écrite en terme de dérivées fractionnaires sous deux formes, la premiére équation avec temps fractionnaire puis une deuxiéme équation à espace-temps fractionnaires et cela pour les particules scalaires et vectorielles.

Equation de DKP scalaire à temps fractionnaire

L'équation de DKP libre (3.11) peut s'écrire dans la dimension $(1+1)$ sous la forme suivante :

$$i\beta^0 \, {}_{+}^{c}\partial_0^\alpha \Psi(x,t) = -i\beta^1 \partial_x \Psi(x,t) + m^\alpha \Psi(x,t) . \tag{3.45}$$

Dans le cas des particules de $spin-0$, les matrices β^μ sont de dimension cinq représentées par (3.3) [45] et la fonction d'onde prend la forme suivante :

$$\Psi(x,t) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T , \tag{3.46}$$

où $u_i \equiv u_i(x,t), i = \overline{1,5}$ sont les componsantes de $\Psi(x,t)$.

Quand on injecte l'équation (3.46) dans (3.45) , l'équation matricielle (3.45) est transformée en un systéme d'équations,

$$i \, {}_{+}^{c}\partial_0^\alpha u_2 = i\partial_x u_3 + m^\alpha u_1, \tag{3.47}$$

$$i \, {}_{+}^{c}\partial_0^\alpha u_1 = m^\alpha u_2, \tag{3.48}$$

$$-i\partial_x u_1 + m^\alpha u_3 = 0, \tag{3.49}$$

$$u_4 = u_5 = 0. \tag{3.50}$$

Dans le but de détérminer la solution de (3.45), nous allons injecter (3.48) et (3.49) dans (3.47) pour découpler le systéme en faveur de la premiére composante. Un nouveau systéme découplé est obtenu,

$${}_{+}^{c}\partial_0^\alpha \left({}_{+}^{c}\partial_0^\alpha u_1\right) - \partial_x^2 u_1 + m^{2\alpha} u_1 = 0, \tag{3.51}$$

$$u_2 = \frac{i}{m^\alpha} \, {}_{+}^{c}\partial_0^\alpha u_1, \tag{3.52}$$

$$u_3 = \frac{i}{m^{\alpha}} \partial_x u_1. \tag{3.53}$$

Notons que la premiére composante $u_1(x,t)$ satisfait une équation du type Klein-Gordon (3.51). Pour résoudre cette dérniére nous introduisons la transformée de Laplace (notée $\sim$) et la transformée de Fourier (notée $-$) par rapport à t et x.

Avant d'effectuer la transformée de Laplace, il convient d'exprimer l'opérateur ${}^{c}_{+}\partial\left({}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0}\right)$ sous la forme suivante (voir annexe) :

$$\begin{aligned}
{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0}\ \left[{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0} f(t)\right] &= {}^{c}_{+}\partial^{2\alpha}_{0} f(t) \qquad \textit{pour} \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \ \textit{et} && (3.54)\\
{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0}\ \left[{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0} f(t)\right] &= {}^{c}_{+}\partial^{2\alpha}_{0} f(t) + \frac{f^{(1)}(0)\, t^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} \ \ \textit{pour} \ \ 1/2 < \alpha \leq 1, && (3.55)
\end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer qu'elles donnent le même résultat par la transformée de Laplace. En effet, en posant $2\alpha = \beta$, on trouve :

Pour $0 \leq \beta < 1$,

$$L\left\{{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0}\ \left[{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0} u_1(x,t)\right]; s\right\} = L\left\{{}^{c}_{+}\partial^{\beta}_{0} u_1(t); s\right\} = s^{\beta}\widetilde{u}_1(s) - s^{\beta-1}u_1(0), \tag{3.56}$$

Pour $1 \leq \beta < 2$,

$$\begin{aligned}
L\left\{{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0}\ \left[{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{0} u_1(t)\right]; s\right\} &= L\left\{{}^{c}_{+}\partial^{\beta}_{0} u_1(t); s\right\} + L\left\{\frac{u_1'(0)\, t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}; s\right\}\\
&= s^{\beta}\widetilde{u}_1(s) - s^{\beta-1}u_1(0) - s^{\beta-2}u_1'(0) - \frac{s^{\beta-2}u_1'(0)}{\Gamma(2-\beta)}\Gamma(2-\beta)\\
&= s^{\beta}\widetilde{u}_1(s) - s^{\beta-1}u_1(0), && (3.57)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé,

$$L\{t^n; s\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}. \tag{3.58}$$

Nous pouvons à présent et aprés les transformées succéssives de Fourier et Laplace, écrire l'équation (3.51) sous la forme suivante :

$$s^{2\alpha}\widetilde{\overline{u}}_1(k,s) - s^{2\alpha-1}\overline{u}_1(k,0) + k^2\widetilde{\overline{u}}_1(k,s) + m^{2\alpha}\widetilde{\overline{u}}_1(k,s) = 0, \tag{3.59}$$

ce qui permet d'aboutir à :

$$\overline{\overline{u}}_1 (k,s) = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha}+k^2+m^{2\alpha}} \overline{u}_1 (k,0) . \tag{3.60}$$

Utilisons la formule de la transformée de Laplace inverse (1.23),

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} (-at^\alpha) , \tag{3.61}$$

avec $a = k^2 + m^{2\alpha}$, pour exprimer la solution de l'équation (3.60) comme :

$$\overline{u}_1 (k,t) = E_{2\alpha,1} \left(-at^{2\alpha}\right) \overline{u}_1 (k,0) , \tag{3.62}$$

où $E_{2\alpha,1} \left(-at^{2\alpha}\right)$ est la fonction Mittag-Leffler à deux paramétres (1.19),

Pour détérminer les autres composantes, nous suivons la même procédure. A partir de l'équation (3.52) on arrive à :

$$\overline{\overline{u}}_2 (k,s) = \frac{i}{m^\alpha} \left[s^\alpha \overline{\overline{u}}_1 (k,s) - s^{\alpha-1} \overline{u}_1 (k,0) \right] . \tag{3.63}$$

Avec l'aide de (3.60) nous obtenons :

$$\overline{\overline{u}}_2 (k,s) = -\frac{ia}{m^\alpha} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha}+a} \right] \overline{u}_1 (k,0) , \tag{3.64}$$

ainsi, sa forme finale sera :

$$\overline{u}_2 (k,t) = -\frac{ia}{m^\alpha} t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1} \left(-a_\alpha t^{2\alpha}\right) \overline{u}_1 (k,0) . \tag{3.65}$$

Après une transformée de Fourier et sur la base de (3.62), l'équation (3.53) donne :

$$\overline{u}_3 (k,t) = -\frac{k}{m^\alpha} E_{2\alpha,1} \left(-at^{2\alpha}\right) \overline{u}_1 (k,0) . \tag{3.66}$$

Enfin, l'ensemble des solutions du système se résume comme suit :

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1(k,t) \\ \overline{u}_2(k,t) \\ \overline{u}_3(k,t) \\ \overline{u}_4(k,t) \\ \overline{u}_5(k,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right) \\ -\frac{ia}{m^\alpha} t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}\left(-at^{2\alpha}\right) \\ -\frac{k}{m^\alpha} E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{u}_1(k,0). \tag{3.67}$$

A partir de la solution (3.67) il est intéressant de distinguer les cas particuliers suivants :

Le cas où $\alpha = 1$, en utilisant les formules reliant la fonction Mittag-Leffler (1.19) aux fonctions élémentaires (1.15) et (1.22) nous pouvons facilement récupérer l'onde périodique,

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1(k,t) \\ \overline{u}_2(k,t) \\ \overline{u}_3(k,t) \\ \overline{u}_4(k,t) \\ \overline{u}_5(k,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh iEt \\ -\frac{E}{m}\sinh iEt \\ -\frac{k}{m}\cosh iEt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{u}_1(k,0), \tag{3.68}$$

où $k^2 + m^2 = E^2$.

Pour le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, nous aurons ce qui suit :

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1(k,t) \\ \overline{u}_2(k,t) \\ \overline{u}_3(k,t) \\ \overline{u}_4(k,t) \\ \overline{u}_5(k,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-at} \\ -\sqrt{\frac{a}{m}}\left[E_1(-at) - E_{1/2}\left(-i\sqrt{at}\right)\right] \simeq -\sqrt{\frac{a}{m}}\left[e^{-at} + \frac{i}{\sqrt{\pi a}\sqrt{t}}\right] \\ -\frac{k}{\sqrt{m}} e^{-at} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{u}_1(k,0), \tag{3.69}$$

où nous avons utilisé les relations $(1.17), (1.18)$ ainsi que la propriété suivante (voir [27]),

$$E_\alpha(-ix) = E_{2\alpha}\left(-x^2\right) - ixE_{2\alpha,\alpha+1}\left(-x^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}\alpha \succ 0. \tag{3.70}$$

Nous remarquons que les solutions tendent de manière monotone vers zéro ; elles présentent un caractère d'amortissement.

Dans le but de déduire les solutions asymptotiques nous pouvons utiliser le comportement asymptotique de la fonction Mittag-Leffler (see [27]) ,

$$E_{\alpha}(z) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}, \quad |z| \to \infty, \quad \frac{\alpha\pi}{2} < \arg z < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{3.71}$$

comme $t \to \infty$, l'utilisation de (3.71) dans le systéme (3.67) donne :

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1(k,t) \\ \overline{u}_2(k,t) \\ \overline{u}_3(k,t) \\ \overline{u}_4(k,t) \\ \overline{u}_5(k,t) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{t^{-2\alpha}}{a\Gamma(1-2\alpha)} \\ \frac{t^{-2\alpha}}{m^{\alpha}\sqrt{a}\Gamma(1-2\alpha)} + \frac{it^{-\alpha}}{m^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \\ -\frac{k}{am^{\alpha}}\frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{u}_1(k,0). \tag{3.72}$$

Comme nous pouvons le voir dans ce résultat, les solutions des équations fractionnaires présentent une décroissance algébrique qui est une conséquence directe du comportement asymptotique de la fonction Mittag-Leffler.

Equation de DKP vectorielle à temps fractionnaire

dans cette partie nous allons traiter l'équation de DKP fractionnaire de dim $(1+1)$ pour une particule vectorielle. Dans ce cas les matrices β^{μ} sont représentées par (3.5) (*voir* [45]). L'état dynamique du système Ψ, pour le cas d'une particule de $spin-1$, est représenté comme un spineur de dimension 10 qui s'écrit :

$$\Psi^{T} = (\varphi, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}), \tag{3.73}$$

avec,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \tag{3.74}$$

A partir de l'équation de DKP fractionnaire (3.11) et par un simple calcul nous pouvons obtenir le systéme découplé suivant :

$$\left({}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\left({}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\right)-\partial_x^2+m^{2\alpha}\right)\Phi=0, \tag{3.75}$$

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \Theta\end{pmatrix}=\frac{i}{m^{\alpha}}\begin{pmatrix}{}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\\ \partial_x\end{pmatrix}\otimes\Phi, \tag{3.76}$$

et,

$$C_1=0, \tag{3.77}$$

où

$$\Phi^T=\left(A_2,A_3,B_1\right),\ \phi^T=\left(B_2,B_3,A_1\right)\ et\ \Theta^T=\left(C_3,-C_2,\varphi\right). \tag{3.78}$$

En vue de résoudre les équations (3.75) et (3.76) , procédons de la même manière que dans le cas du $spin-0$, à savoir l'introduction des transformées de Laplace et Fourier pour exprimer enfin les solutions en termes de la fonction de Mittag-Leffler comme suit :

$$\left(\overline{A}_2\left(k,t\right),\overline{A}_3\left(k,t\right),\overline{B}_1\left(k,t\right)\right)^T=E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\ \left(\overline{A}_2\left(k,0\right),\overline{A}_3\left(k,0\right),\overline{B}_1\left(k,0\right)\right)^T, \tag{3.79}$$

$$\left(\overline{B}_2\left(k,t\right),\overline{B}_3\left(k,t\right),\overline{A}_1\left(k,t\right)\right)^T=-\frac{ia}{m^{\alpha}}t^{\alpha}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(-at^{2\alpha}\right)\ \left(\overline{A}_2\left(k,0\right),\overline{A}_3\left(k,0\right),\overline{B}_1\left(k,0\right)\right)^T, \tag{3.80}$$

et

$$\left(\overline{C}_3\left(k,t\right),-\overline{C}_2\left(k,t\right),\overline{\varphi}\left(k,t\right)\right)^T=-\frac{k}{m^{\alpha}}E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\ \left(\overline{A}_2\left(k,0\right),\overline{A}_3\left(k,0\right),\overline{B}_1\left(k,0\right)\right)^T, \tag{3.81}$$

avec toujours $a=k^2+m^{2\alpha}$.

Enfin l'ensemble des solutions peut être résumé comme suit :

$$\overline{\Psi}(k,t)=\begin{pmatrix}\overline{\varphi}\\ \mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{k}{m^{\alpha}}E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{B}_1(k,0)\\ -\frac{ia}{m^{\alpha}}t^{\alpha}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{B}_1(k,0)\\ E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{A}_2(k,0)\\ E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{A}_3(k,0)\\ E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{B}_1(k,0)\\ -\frac{ia}{m^{\alpha}}t^{\alpha}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{A}_2(k,0)\\ -\frac{ia}{m^{\alpha}}t^{\alpha}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{A}_3(k,0)\\ 0\\ \frac{k}{m^{\alpha}}E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{A}_3(k,0)\\ -\frac{k}{m^{\alpha}}E_{2\alpha,1}\left(-at^{2\alpha}\right)\overline{A}_2(k,0)\end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Si on pose $\alpha=1$ avec $E^2=k^2+m^2$, les expressions (3.79), (3.80) et (3.81) deviennent,

$$\left(\overline{A}_2(k,t),\overline{A}_3(k,t),\overline{B}_1(k,t)\right)^T=\cosh iEt\ \left(\overline{A}_2(k,0),\overline{A}_3(k,0),\overline{B}_1(k,0)\right)^T, \tag{3.83}$$

$$\left(\overline{B}_2(k,t),\overline{B}_3(k,t),\overline{A}_1(k,t)\right)^T=-\frac{E}{m}\sinh iEt\ \left(\overline{A}_2(k,0),\overline{A}_3(k,0),\overline{B}_1(k,0)\right)^T, \tag{3.84}$$

et

$$\left(\overline{C}_3(k,t),-\overline{C}_2(k,t),\overline{\varphi}(k,t)\right)^T=-\frac{k}{m}\cosh iEt\ \left(\overline{A}_2(k,0),\overline{A}_3(k,0),\overline{B}_1(k,0)\right)^T. \tag{3.85}$$

La solution finale est écrite comme suit :

$$\overline{\Psi}(k,t)=\begin{pmatrix}\overline{\varphi}\\ \mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{k}{m}\cosh iEt\ \overline{B}_1(k,0)\\ -\frac{E}{m}\sinh iEt\ \overline{B}_1(k,0)\\ \cosh iEt\ \overline{A}_2(k,0)\\ \cosh iEt\ \overline{A}_3(k,0)\\ \cosh iEt\ \overline{B}_1(k,0)\\ -\frac{E}{m}\sinh iEt\ \overline{A}_2(k,0)\\ -\frac{E}{m}\sinh iEt\ \overline{A}_3(k,0)\\ 0\\ \frac{k}{m}\cosh iEt\ \overline{A}_3(k,0)\\ -\frac{k}{m}\cosh iEt\ \overline{A}_2(k,0)\end{pmatrix}. \tag{3.86}$$

A ce stade il est utile de remarquer que, pour obtenir l'ensemble des équations de Maxwell qui apparaissent comme la limite de masse nulle de l'équation de DKP, nous pouvons utiliser la forme de la fonction d'onde [45] qui est définie comme :

$$\Psi=\begin{pmatrix}\frac{m^{\alpha}\varphi}{i}\\ im^{\alpha}\mathbf{A}\\ \mathbf{E}\\ -\mathbf{B}\end{pmatrix} \tag{3.87}$$

où $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ sont respectivement le champ électrique, le champ magnétique et le potentiel vecteur. En injectant (3.87) dans l'équation de DKP (3.11), cette dérniére se décompose en donnant naissance aux équations de Maxwell à temps fractionnaire avec masse :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E}&=-m^{2\alpha}\varphi\\ \boldsymbol{\nabla}\Lambda\mathbf{B}&={}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\mathbf{E}-m^{2\alpha}\mathbf{A}\\ \mathbf{E}&=-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}-{}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}&=\boldsymbol{\nabla}\Lambda\mathbf{A}\end{aligned}. \tag{3.88}$$

En posant $m=0$ et $\alpha=1$ on retrouve l'ensemble des équations de Maxwell.

Solution de l'équation de DKP à éspace-temps fractionnaire pour le cas $spin-1$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de DKP libre à espace temps fractionnaire. A cet effet, nous allons exprimer l'équation de DKP fractionnaire sous la forme Hamiltonienne de type Schrődinger.

Premièrement, nous multiplions l'équation DKP (3.11) à gauche par ${}_{+}^{c}\partial_{\rho}^{\alpha}\beta^{\rho}\beta^{\nu}$, et avec l'aide de l'algébre de DKP (3.2) nous obtenons :

$$ {}_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{\upsilon}\Psi = \beta^{\rho}\beta^{\upsilon}\ {}_{+}^{c}\partial_{\rho}^{\alpha}\Psi. \tag{3.89}$$

Pour $\upsilon = 0$ l'équation (3.89) peut s'écrire,

$$ i{}_{+}^{c}\partial_{\alpha}^{0}\Psi = i\left(\beta^{0}\right)^{2}\ {}_{+}^{c}\partial_{0}^{\alpha}\Psi + i\beta^{j}\beta^{0}\ {}_{+}^{c}\partial_{j}^{\alpha}\Psi. \tag{3.90}$$

Additionnant (3.90) et l'équation de DKP (3.11) multipliée à gauche par β^{0}, on arrive à l'équation de type Schrődinger suivante :

$$ i{}_{+}^{c}\partial_{0}^{\alpha}\Psi = H_{DKP}^{\alpha}\Psi, \tag{3.91}$$

où H_{DKP}^{α} est défini par :

$$ H_{DKP}^{\alpha} = i\Sigma^{j}\ {}_{+}^{c}\partial_{j}^{\alpha} + m^{\alpha}\beta^{0}, \tag{3.92}$$

et la matrice Σ^{j} est détérminée par le commutateur,

$$ \Sigma^{j} = \left[\beta^{j}, \beta^{0}\right]. \tag{3.93}$$

Afin de déterminer la solution de l'équation (3.91) dans la dimension $(1+1)$, nous utilisons la méthode de séparation de variables en admettant que,

$$ \Psi\left(x,t\right) = h\left(t\right)\boldsymbol{\chi}\left(x\right), \tag{3.94}$$

où $h\left(t\right)$ est la partie temporelle tandis que $\boldsymbol{\chi}\left(x\right)$ est la partie spatiale donnée par :

$$\boldsymbol{\chi}\left(x\right)=\begin{pmatrix}\varphi\\ \mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}, \tag{3.95}$$

$\mathbf{A},\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ étant des vecteurs (3×1) se décomposant de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Phi}\left(x\right)^{T}=\left(A_{2},A_{3},B_{1}\right),\ \boldsymbol{\phi}\left(x\right)^{T}=\left(B_{2},B_{3},A_{1}\right)\quad et\quad \boldsymbol{\Theta}\left(x\right)^{T}=\left(C_{3},-C_{2},\varphi\right). \tag{3.96}$$

Lorsque nous remplaçons (3.94) dans (3.91) nous obtenons l'équation suivante :

$$i_{+}^{c}\partial_{0}^{\alpha}h\left(t\right)=Eh\left(t\right). \tag{3.97}$$

La méthode de la transformation de Laplace [3] appliquée à l'équation précédente conduit à une solution exprimée à l'aide de la fonction de Mittag–Leffler,

$$h\left(t\right)=E_{\alpha,1}\left(-iEt^{\alpha}\right), \tag{3.98}$$

Ensuite en injectant (3.94) une fois de plus dans (3.91) et avec l'aide de (3.97) nous obtenons l'équation fractionnaire qui dépend seulement de x,

$$E\ \boldsymbol{\chi}\left(x\right)=i\ \Gamma^{1}\ {}_{+}^{c}\partial_{x}^{\alpha}\boldsymbol{\chi}\left(x\right)+m^{\alpha}\beta^{0}\boldsymbol{\chi}\left(x\right). \tag{3.99}$$

L'utilisation de la forme explicite de β^{μ} [45] et les composantes précédemment mentionnées de $\boldsymbol{\chi}\left(x\right)$ nous permet, après un calcul simple, de découpler le système en faveur de $\boldsymbol{\Phi}\left(x\right)$; ainsi, nous obtenons une équation de type Klein-Gordon,

$${}^{c}\mathbf{O}_{KG}^{\alpha}\boldsymbol{\Phi}\left(x\right)=0, \tag{3.100}$$

où l'opérateur fractionnaire ${}^{c}\mathbf{O}_{KG}^{\alpha}$ est exprimé à l'aide des dérivées de Caputo comme suit :

$$ {}^{c}\mathbf{O}_{KG}^{\alpha} = {}_{+}^{c}\partial_{x}^{\alpha}\left({}_{+}^{c}\partial_{x}^{\alpha}\right) + \left(E^{2} - m^{2\alpha}\right). \tag{3.101} $$

Les autres composantes (*i.e.*, ϕ et Θ) sont déterminées par :

$$ \begin{pmatrix} \phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \frac{1}{m^{\alpha}} \begin{pmatrix} E \\ i\ {}_{+}^{c}\partial_{x}^{\alpha} \end{pmatrix} \otimes \Phi, \tag{3.102} $$

$$ C_{1} = 0. \tag{3.103} $$

Grâce aux propriétés de la fonction Mittag-Leffler , la solution de (3.100) est donnée comme :

$$ \mathbf{\Phi}(x) = E_{\alpha}\left(i\sqrt{E^{2} - m^{2\alpha}}x^{\alpha}\right)\mathbf{\Phi}(0), \tag{3.104} $$

puis, on déduit les autres composants ϕ and Θ comme suit :

$$ \begin{pmatrix} \phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \frac{1}{m^{\alpha}} \begin{pmatrix} E \\ -\sqrt{E^{2} - m^{2\alpha}} \end{pmatrix} \otimes \Phi. \tag{3.105} $$

Par conséquent, nous pouvons résumer la solution générale de la manière suivante :

$$ \Psi(x,t) = \mathcal{N} E_{\alpha,1}\left(-iEt^{\alpha}\right) E_{\alpha}\left(i\sqrt{E^{2} - m^{2\alpha}}x^{\alpha}\right) \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{E^{2}-m^{2\alpha}}}{m^{\alpha}} \\ \frac{E}{m^{\alpha}} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{E}{m^{\alpha}} \\ \frac{E}{m^{\alpha}} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{E^{2}-m^{2\alpha}}}{m^{\alpha}} \\ -\frac{\sqrt{E^{2}-m^{2\alpha}}}{m^{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{3.106} $$

où $\mathcal{N}$ est une constante de normalisation.

Arrivé à ce stade, il est intéressant de distinguer la limite de l'équation (3.106) quand $\alpha \to 1$.

Dans ce cas la fonction de Mittag-Leffler (1.19) se transforme en la fonction exponentielle ordinaire (1.14) et la solution (3.106) devient l'équation d'onde ordinaire avec $k = \sqrt{E^2 - m^2}$,

$$\Psi(x,t) = \mathcal{N} \quad e^{i(kx-Et)} \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} \\ \frac{E}{m} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{E}{m} \\ \frac{E}{m} \\ 0 \\ \frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Solution de l'équation de DKP à éspace-temps fractionnaire pour le cas $spin-0$

Dans le cas $spin-0$, nous suiverons une procédure similaire à celle de$spin-1$ avec la fonction d'onde $\Psi(x,t) = h(t)\,\boldsymbol{\chi}(x)$ où $\boldsymbol{\chi}(x)$ a cinq composantes à savoir $\boldsymbol{\chi}(x)^T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)^T$. Sur la base de la correspondance suivante :

$$\eta_1 \to \mathbf{\Phi}, \eta_2 \to \phi, \eta_3 \to \Theta \quad et \quad (\eta_4, \eta_5) \to C_1, \tag{3.108}$$

nous arrivons au système découplé suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}\mathbf{O}^{\alpha}_{KG}\eta_1(x) = 0 \\ \eta_2(x) = \frac{E}{m^{\alpha}}\eta_1(x) \\ \eta_3(x) = \frac{i}{m^{\alpha}}\,{}^{c}_{+}\partial^{\alpha}_{x}\eta_1(x) \\ \eta_4 = \eta_5 = 0 \end{cases}. \tag{3.109}$$

Par la suite, la forme définitive de la fonction d'onde peut être écrite comme suit :

$$\Psi\left(x,t\right)=E_{\alpha,1}\left(-iEt^{\alpha}\right)\begin{pmatrix}\eta_1\left(x\right)\\ \eta_2\left(x\right)\\ \eta_3\left(x\right)\\ \eta_4\left(x\right)\\ \eta_5\left(x\right)\end{pmatrix}=\mathcal{C}\ E_{\alpha,1}\left(-iEt^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(i\sqrt{E^2-m^{2\alpha}}x^{\alpha}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{E}{m^{\alpha}}\\ -\frac{\sqrt{E^2-m^{2\alpha}}}{m^{\alpha}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\tag{3.110}$$

$\mathcal{C}$ est le coéfficient de normalisation.

Comme il est a été fait dans le cas vectoriel, lorsque $\alpha\to 1$ (3.110) est en parfait accord avec la solution de la particule libre,

$$\Psi\left(x,t\right)=\mathcal{C}\ e^{i(kx-Et)}\begin{pmatrix}1\\ \frac{E}{m}\\ -\frac{k}{m}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\tag{3.111}$$

Chapitre 4

Equations relativistes en terme d'opérateur impulsion modifié

4.1 Introduction

La théorie moderne du calcul différentiel et intégral a commencé au XVIIe siècle avec les travaux de Newton et Leibniz. Comme il est bien connu, la dérivée d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x est par définition :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h} \tag{4.1}$$

Maintenant, considérons l'extention de l'expression (4.1) modifiée :

$$f'(x) = \lim_{q\to 1} \frac{f\ (qx) - f\ (x)}{qx - x} \tag{4.2}$$

Bien sûr, cela n'est pas valide lorsque $q = 1$ ou $x = 0$, mais par ailleurs cette formule alternative est équivalente à la dérivée habituelle. Nous pouvons nous convaincre en écrivant $\frac{f\ (x+(q-1)x)-f\ (x)}{(q-1)x}$, le terme $(q-1)\,x$ jouant le rôle de h.

Au début du XXe siècle, *F.H. Jackson* [49] a étudié cette dérivée modifiée et beaucoup de ses conséquences. Le concept clé est l'opérateur q-dérivée défini comme suit lorsque $0 < q < 1$:

$$\left(D_q f\right)(x) = \frac{f\ \ (qx) - f\ \ (x)}{qx - x}. \tag{4.3}$$

Récemment, il y a eu un intérêt considérable dans le domaine du q-calcul en raison de ses applications en mathématiques, statistiques et la physique. La théorie du q-calcul a donné naissance à une algèbre déformée liée à la fonction q-exponentielle et la fonction q-logarithme. Cette algèbre a été présentée et utilisée dans la résolution de nombreux problèmes citons entre autres [50] ,[51], [52] et [53]. Dans ce context, une généralisation de l'intégration fractionnaires a été également introduite [54],[57], [58] à travers la q-intégrale et la q-dérivée pour laquelle la q-exponentielle est une fonction propre.

4.2 q-Algébre

C'est une algébre déformée reliée aux fonctions appelées q-exponentielle et q-logarithme.

La q-exponentielle est une déformation de la fonction exponentielle ordinnaire. Elle a été tout d'abord proposée dans [56] telle que :

Pour un paramètre réel q,

$$\exp_q(x) \equiv \left[1 + (1-q)\,x\right]^{\frac{1}{1-q}}, \tag{4.4}$$

qui, pour $q = 1$ donne $\exp_1(x) = \exp(x)$. On notera que la fonction $\exp_q(x)$ diverge si$1 < q$ et $\left[1 + (1-q)\,x\right] \leq 0$.

La fonction q-logarithme est l'inverse de la q-exponentielle, et est donnée par :

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}. \tag{4.5}$$

Les fonctions $\ln_q x$ et $\exp_q(x)$ verifient les relations :

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q)\ln_q x \ln_q y, \tag{4.6}$$

et

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x + y + (1-q)\,xy)\,. \tag{4.7}$$

Ces propriétés conduisent à une généralistion des opérations somme et différence entre deux nombres x et y,

$$x \oplus_q y = x + y + (1-q)\,xy, \tag{4.8}$$

et

$$x \ominus_q y = \frac{x-y}{1+(1-q)\,y} \qquad (y \neq 1/(q-1))\,, \tag{4.9}$$

qui nous raménent à la somme et la soustraction usuelles comme cas particuliers $\oplus_1 \equiv +$ et $\ominus_1 \equiv -$.

Sur la base de ces opérateurs déformés, il est possible de définir une généralisation de l'opérateur dérivé appelé la q-dérivée définie par :

$$D_{(q)}f(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x\ominus_q y} = [1+(1-q)\,x]\,\frac{df}{dx}. \tag{4.10}$$

dont la q-exponentielle est une fonction propre. La dérivée ordinaire est récupérée pour $q = 1$.

Nous avons la q-intégrale correspondante (notée $\int_{(q)}$) donnée par

$$\int_{(q)} f(x)\,d_q x = \int \frac{f(x)\,dx}{1+(1-q)\,x}, \tag{4.11}$$

où

$$d_q x \equiv \lim_{y\to x} x \ominus_q y = \frac{1}{1+(1-q)\,x}dx. \tag{4.12}$$

Il faut préciser que les équations $(4.10)-(4.12)$ sont limitées à $1+(1-q)\,x \neq 0$

Il est important de noter aussi que la q-derivée (4.10) verifie la relation suivante :

$$D_{(q)}[f(x)\,g(x)] = D_{(q)}[f(x)]\,g(x) + f(x)\,D_{(q)}[g(x)] \tag{4.13}$$

4.3 Opérateur de déplacement modifié

En mécanique quantique, un déplacement a le long de l'axe Ox est représenté par l'opérateur de déplacement $\widehat{T}_a = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{P}_x.a}$, où l'opérateur impulsion $\widehat{P}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ est défini comme étant le générateur du groupe des translations. Une translation infinitésimale δx est représentée par un opérateur infiniment voisin de l'identité que l'on peut écrire : $\widehat{T}_{\delta x} = \widehat{I} - \frac{i}{\hbar}\delta x \widehat{P}_x$.

Récemment, Costa Filho et al [48] ont analysé un système quantique avec masse dépendant de la position et ils suggèrent un opérateur de déplacement modifié donné par :

$$\widehat{T}_\gamma (a) |x\rangle = |x + a (1 + \gamma x)\rangle , \tag{4.14}$$

où γ est un paramètre réel de dimension $[\gamma] = L^{-1}$. Pour $\gamma \neq 0$, le déplacement dépend explicitement de la position du système, alors que $\gamma = 0$ correspond à une translation standard.

A partir de la définition de l'opérateur (4.14), nous pouvons distinguer les propriétés suivantes :

1. $\widehat{T}_\gamma$ devient opérateur identité lorsque la translation infinitésimale tend vers zéro,

$$\lim_{dx \to 0} \widehat{T}_\gamma (dx) = \widehat{\mathbf{1}}. \tag{4.15}$$

2. Il est également important de noter que l'opérateur inverse est donné par,

$$\widehat{T}_\gamma^{-1} (dx) |x\rangle = \left| \frac{x - dx}{1 + \gamma dx} \right\rangle , \tag{4.16}$$

tel que,

$$\widehat{T}_\gamma (dx) \left[\widehat{T}_\gamma^{-1} (dx) |x\rangle \right] = |x\rangle . \tag{4.17}$$

3. La composition de deux translations infinitésimales successives conduit à,

$$\begin{aligned} \widehat{T}_\gamma \left(dx'\right) \widehat{T}_\gamma \left(dx''\right) |x\rangle &= \widehat{T}_\gamma \left(dx'\right) \left| x + dx'' + \gamma x dx'' \right\rangle \\ &= \left| x + dx'' + \gamma x dx'' + dx' + \gamma dx' \left(x + dx'' + \gamma x dx'' \right) \right\rangle \\ &= \left| x + \left(dx' + dx'' + \gamma dx' dx'' \right) + \gamma \left(dx' + dx'' + \gamma dx' dx'' \right) x \right\rangle \\ &= \widehat{T}_\gamma \left(dx' + dx'' + \gamma dx' dx'' \right) |x\rangle . \end{aligned} \tag{4.18}$$

qui montre clairement la propriété de la non-additivité de l'opérateur.

4. Il faut aussi noter que, du moment que :

$$\widehat{T}_{\gamma}\left(dx^{'}\right)\widehat{T}_{\gamma}\left(dx^{''}\right)=\widehat{T}_{\gamma}\left(dx^{'}+dx^{''}+\gamma dx^{'}dx^{''}\right) \tag{4.19}$$

et,

$$\exp_{q}\left(a\right)\exp_{q}\left(b\right)=\exp_{q}\left[a+b+\left(1-q\right)ab\right] \tag{4.20}$$

où $\exp_{q}\left(a\right)$ est la fonction q-exponentielle (4.4), en posant $1-q=\gamma$, $\widehat{T}_{\gamma}$ peut être considéré comme le générateur infinitésimal du groupe représenté par la fonction q-exponentielle. Le développement limité de $\widehat{T}_{\gamma}\left(dx\right)$ au premier ordre de dx conduit à :

$$\widehat{T}_{\gamma}\left(dx\right)=\widehat{\mathbf{1}}-\frac{i\widehat{p}_{\gamma}dx}{\hbar}, \tag{4.21}$$

dans laquelle $\widehat{p}_{\gamma}$ est l'opérateur impulsion modifié écrit comme :

$$\widehat{p}_{\gamma}=-i\hbar\left(1+\gamma x\right)\frac{d}{dx}, \tag{4.22}$$

A ce stade, il est important d'établir que l'opérateur impulsion $\widehat{p}_{\gamma}$ (4.22) est Hermitien relativement au produit scalaire défini dans l'éspace déformé par :

$$\left(\psi,\phi\right)=\int_{\left(\gamma\right)}d_{\gamma}\psi^{*}\phi=\int\frac{dx}{1+\gamma x}\psi^{*}\phi, \tag{4.23}$$

où la portée de l'intégration dépend des conditions limites spécifiques du système étudié. Par conséquent, la relation de fermeture prendra la forme :

$$\mathbf{1}=\int\frac{dx}{1+\gamma x}\left|x\right\rangle\left\langle x\right|. \tag{4.24}$$

En utilisant la définition (4.22), il est commode d'exprimer l'opérateur impulsion modifié dans une forme abrégée ,

$$\widehat{p}_{\gamma}=-i\hbar D_{\gamma}, \tag{4.25}$$

avec

$$D_{\gamma}=(1+\gamma x)\,\frac{d}{dx}, \tag{4.26}$$

étant la dérivée déformée dans l'espace.

4.4 Applications : Equations relativistes avec opérateur modifié

4.4.1 Equation de Klein-Gordon dans une boite

Considérons une particule relativiste de $spin-0$ confinée dans un puits infini à une dimension de longueur L défini comme suit :

$$V(x)=\left\{\begin{array}{c} 0,\quad 0\leq x\leq L \\ \infty,\quad partout\ ailleurs \end{array}\right. . \tag{4.27}$$

En utilisant l'opérateur impulsion déformé $\widehat{p}_{\gamma}$ (4.25) nous pouvons écrire une équation de Klein Gordon modifiée pour $0\leq x\leq L$ sous la forme :

$$\left(\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\hbar^{2}D_{\gamma}^{2}+m^{2}\right)\Psi(x,t)=0, \tag{4.28}$$

où m est la masse de la particule, et $\Psi(x,t)$ est la fonction d'onde de la particule. La solution de l'équation. (4.28) dans sa forme générale peut s'écrire,

$$\Psi(x,t)=\varphi(x)\,h(t). \tag{4.29}$$

La substitution de (4.29) dans (4.28) et aprés la séparation des variables de l'espace et du temps on peut aboutir à la partie temporelle $h(t)$ de la solution sous la forme suivante :

$$h(t)=Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t}+Be^{i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{4.30}$$

Tandis que la partie spaciale $\varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$D_{\gamma}^{2}\varphi(x)+\frac{E^{2}-m^{2}}{\hbar^{2}}\varphi(x)=0. \tag{4.31}$$

Avec l'aide de la définition de D_γ (4.26) et aprés un simple calcul l'équation différentielle se transforme en :

$$(1+\gamma x)^2 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \gamma(1+\gamma x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \left(\frac{E^2-m^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0. \tag{4.32}$$

Effectuons le changement de variable $u(x) = 1+\gamma x$ pour transformer l'équation (4.32) en :

$$u^2(x)\frac{d^2\varphi}{du^2} + u(x)\frac{d\varphi}{du} + \left(\frac{E^2-m^2}{\hbar^2\gamma^2}\right)\varphi = 0, \tag{4.33}$$

qui est semblable à l'équation différentielle homogène d'Euler-Cauchy,

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \tag{4.34}$$

où $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{E^2-m^2}{\hbar^2\gamma^2}$. En posant $z = \ln u$ l'équation (4.33) se transforme en une équation à coéficients constants,

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \mathcal{A}\frac{d\varphi}{dz} + \mathcal{B}\varphi = 0, \tag{4.35}$$

où $\mathcal{A} = \alpha - 1$ et $\mathcal{B} = \beta$ et donc a pour solution générale,

$$\varphi(x) = \mathcal{C}\sin\left[\frac{\sqrt{E^2-m^2}}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right] + \mathcal{D}\cos\left[\frac{\sqrt{E^2-m^2}}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right]. \tag{4.36}$$

En utilisant les conditions aux limites $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ la solution (4.36) prendra la forme suivante :

$$\varphi_n(x) = C_n \sin\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right], \tag{4.37}$$

dans laquelle C_n est la constante de normalisation et où le vecteur d'onde quantifié k_n est déduit grâce à la condition $\varphi(L) = 0$,

$$k_n^2 = E_n^2 - m^2 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2\gamma^2}{\ln^2(1+\gamma L)}, \tag{4.38}$$

par conséquent le spectre d'énergie peut être écrit comme :

$$E_n = \pm\sqrt{\frac{n^2\pi^2\hbar^2\gamma^2}{\ln^2(1+\gamma L)} + m^2}, \quad n = 1, 2, 3... \tag{4.39}$$

A ce stade nous pouvons écrire les fonctions propres pour la particule (+) et l'anti-particule (−) comme :

$$\Psi_n^{\pm}(x,t) = C_n^{\pm} e^{\mp\frac{iE_n t}{\hbar}} \sin\left[\frac{n\pi}{\ln(1+\gamma L)} \ln(1+\gamma x)\right]. \tag{4.40}$$

D'autre part l'équation de continuité peut être déduite à partir de l'équation de Klein-Gordon modifiée (4.28) et sa conjuguée, en effet en multipliant la premiére par Ψ^* et la seconde par Ψ puis en soustrayant les deux équations on arrive à :

$$\left(\Psi^*\partial_t^2\Psi - \Psi\partial_t^2\Psi^*\right) - \left(\Psi^* D_\gamma^2\Psi - \Psi D_\gamma^2\Psi^*\right) = 0, \tag{4.41}$$

où le premier terme conduit à la densité de probabilité,

$$\rho = \left(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*\right), \tag{4.42}$$

alors que le développement du deuxiéme terme grâce à la propriété (4.13) donne :

$$\left(\Psi^* D_\gamma^2\Psi - \Psi D_\gamma^2\Psi^*\right) = D_\gamma\left[\Psi^* D_\gamma\Psi - \Psi D_\gamma\Psi^*\right]. \tag{4.43}$$

L'équation (4.41) peut ainsi s'écrire sous la forme,

$$\partial_t\rho + D_\gamma\left[\Psi D_\gamma\Psi^* - \Psi^* D_\gamma\Psi\right] = 0, \tag{4.44}$$

où la quantité entre crochets définit la densité de courant modifiée J_γ,

$$J_\gamma = \left(\Psi(1+\gamma x)\frac{d\Psi^*}{dx} - \Psi^*(1+\gamma x)\frac{d\Psi}{dx}\right), \tag{4.45}$$

ce qui nous donne l'équation de continuité modifiée,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + D_\gamma J_\gamma = 0. \tag{4.46}$$

Sachant que la densité de probabilité pour la particules ρ^{+}(anti-partícule ρ^{-}) obéit aux conditions de normalisation,

$$\int_0^L \rho^{\pm} dx = \pm 1, \tag{4.47}$$

nous pouvons injecter (4.40) dans (4.42) puis utiliser (4.47) pour obtenir les constantes de normalisation $C_n^{\pm}$ (voir annexe) ,

$$\left|C_n^{\pm}\right| = \sqrt{\frac{\hbar}{LE_n}\left(\frac{\ln^2\left(1+\gamma L\right)}{4n^2\pi^2}+1\right)}, \tag{4.48}$$

de telle sorte que les fonctions propres seront écrites comme :

$$\Psi_n^{\pm}\left(x,t\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{LE_n}\left(\frac{\ln^2\left(1+\gamma L\right)}{4n^2\pi^2}+1\right)} e^{\mp\frac{iE_n t}{\hbar}} \sin\left[\frac{n\pi}{\ln\left(1+\gamma L\right)}\ln\left(1+\gamma x\right)\right], \tag{4.49}$$

et la densité de courant comme :

$$\rho^{\pm} = \pm\frac{1}{L}\left[\frac{\ln^2\left(1+\gamma L\right)}{4n^2\pi^2}+1\right]\sin^2\left[\frac{n\pi}{\ln\left(1+\gamma L\right)}\ln\left(1+\gamma x\right)\right], \tag{4.50}$$

ce qui conduit au cas ordinaire quand $\gamma \to 0$,

$$\lim_{\gamma\to 0}\rho^{\pm} = \pm\frac{1}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{4.51}$$

4.4.2 Equation de Dirac dans une boite

Considérons maintenant l'équation de Dirac relativiste décrivant une fonction d'onde d'une particule de masse m se déplaçant le long de l'axe x,

$$i\hbar\partial_0\Psi\left(x,t\right) = H_\gamma\Psi\left(x,t\right), \tag{4.52}$$

où H_γ est l'operateur Hamiltonien dans la dimension $(1+1)$ [59],

$$H_\gamma = -i\hbar c\sigma_2\widehat{D}_\gamma + \sigma_3 mc^2 + V\left(x\right). \tag{4.53}$$

σ_2 et σ_3 sont les matrices bien connues de Pauli qui, dans la représentation standard de

Dirac, sont $\sigma_2 = \sigma_x$ et $\sigma_3 = \sigma_z$ avec :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad et \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

L'équation de Dirac stationnaire pour ce problème pourrait être écrite comme suit ($c = 1$) :

$$\begin{pmatrix} -m + V(x) + E & i\hbar D_\gamma \\ i\hbar D_\gamma & m + V(x) + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.55}$$

où $\phi(x)$ et $\chi(x)$ sont les deux composantes du spineur de Dirac, E est l'énérgie de la particule et m sa masse. A l'interieur du puit de potentiel, où $V(x) = 0$, cette dérniére équation se scinde en deux équations couplées pour les composantes $\phi(x)$ et $\chi(x)$, données par :

$$\begin{cases} (E - m)\phi(x) + i\hbar D_\gamma \chi(x) = 0 \\ i\hbar D_\gamma \phi(x) + (E + m)\chi(x) = 0 \end{cases}. \tag{4.56}$$

Il faut donc résoudre ces deux équations pour déterminer les énergies possibles et les spineurs correspondants. Commençant tout d'abord par l'élimination de l'une des composantes en faveur de l'autre. Apres un réarrangement des termes, on obtient l'équation différentielle satisfaite par la composante ϕ,

$$\left[(1 + \gamma x)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(1 + \gamma x)\frac{d}{dx} + \left(\frac{E^2 - m^2}{\hbar^2}\right)\right]\phi(x) = 0. \tag{4.57}$$

La deuxiéme composante χ peut être obtenue au moyen de (4.56),

$$\chi(x) = \frac{-i\hbar}{E + m} D_\gamma \phi(x). \tag{4.58}$$

En répétant le même calcul que dans le cas de KG, nous arrivons à la solution de l'équation (4.57),

$$\phi(x) = A \sin\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1 + \gamma x)\right] + B\cos\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1 + \gamma x)\right], \tag{4.59}$$

et par la suite,

$$\chi(x) = -\frac{ik_n}{E+m}\left[A\cos\left(\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right) - B\sin\left(\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right)\right]. \tag{4.60}$$

En mécanique quantique élémentaire, pour une particule libre dans une boîte à une dimension, la condition de Dirichlet $\Psi = 0$ est la plus simple. Avec cette condition aux limites l'Hamiltonien libre de Schrödinger est un opérateur auto-adjoint bien défini. En mécanique quantique relativiste la fonction d'onde est un spineur à composantes complexes couplées dans un système d'équations différentielles du premier ordre. Imposer la condition de Dirichlet à la limite $\Psi(0) = 0$ $(ou\ \Psi(L) = 0)$ est équivalent à dire que $\phi(0) = 0$ et $\chi(0) = 0$ $(ou\ \phi(L) = 0\ et\ \chi(L) = 0)$ ce qui conduit à $A = B = 0$, soit la seule solution est triviale. Donc il n'y a pas de solutions non triviales si la fonction $\phi(x)$ et sa dérivée $\chi(x)$ doivent disparaître simultanément au niveau des limites de l'intervalle. Toutefois, des solutions non triviales peuvent être obtenues en utilisant des conditions aux limites appropriées pour la fonction d'onde $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$, d'une manière telle que l'opérateur de Dirac (4.53) soit auto-adjoint.

En effet, imposer les conditions aux limites de Dirichlet à la premiére composante,

$$\phi(0) = \phi(L) = 0, \tag{4.61}$$

est une condition limite physiquement accéptable car elle assure la condition d'Hérmiticité de l'Hamiltonien (4.53) donnée par :

$$\langle \xi | H_\gamma \eta \rangle - \langle \eta | H_\gamma \xi \rangle^* = -i\hbar\, \xi^\dagger \sigma_x \eta \Big]_0^L = 0. \tag{4.62}$$

Celle-ci est liée à l'équation de continuité qui assure la conservation de la densité de probabilité et celle du courant.

La condition (4.61) permet d'arriver à :

$$\phi(x) = A\sin\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right], \tag{4.63}$$

d'où, d'aprés (4.60),

$$\chi(x) = -\frac{iAk_n}{E+m}\cos\left(\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right), \tag{4.64}$$

et par conséquent, le spectre d'énergie sera d'aprés la condition $\phi(L) = 0$:

$$E_n = \pm\sqrt{\frac{n^2\pi^2\hbar^2\gamma^2}{\ln^2(1+\gamma L)} + m^2}. \tag{4.65}$$

Enfin on peut écrire le spineur en termes de ses deux composantes comme :

$$\Psi(x) = A\begin{pmatrix} \sin\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right] \\ -\frac{ik_n}{E+m}\cos\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma}\ln(1+\gamma x)\right] \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

L'équation de continuité correspondante peut être déduite par un simple calcul à partir de l'équation de Dirac déformée (4.52) et son adjointe et se présente sous la forme suivante :

$$\partial_t\rho + D_\gamma J = 0, \tag{4.67}$$

où le densité de probabilité ρ est donnée par :

$$\rho = \Psi^\dagger\Psi = \overline{\phi}\phi + \overline{\chi}\chi, \tag{4.68}$$

$\Psi^\dagger$etant le spineur conjugué et $\overline{\phi}$ ainsi que $\overline{\chi}$ sont les complexes conjugués de ϕ et de χ.

Alors que la densité de courant J est définie par :

$$J = \Psi^\dagger\sigma_x\Psi = \overline{\phi}\chi + \overline{\chi}\phi, \tag{4.69}$$

En utilisant les conditions (4.61), il est facile de verifier que les quantités (4.68) et (4.69) verifient, respectivement, la condition de symétrie au niveau des parois de la boite,

$$\rho(0) = \rho(L) = \frac{A^2k_n^2}{(E+m)^2}, \tag{4.70}$$

ainsi que la condition d'impénétrabilité,

$$j(0) = j(L) = 0. \tag{4.71}$$

La densité de courant s'annule au niveau des parois, la particule est dite confinée à l'intérieur de la boîte.

Il est utile de souligner que, en prenant les conditions aux limites de Newmann,

$$\chi(0) = \chi(L) = 0, \tag{4.72}$$

on aboutit à,

$$A = 0, \tag{4.73}$$

d'où la fonction propre,

$$\Psi(x) = B \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma} \ln(1+\gamma x)\right] \\ \frac{ik_n}{E+m} \sin\left[\frac{k_n}{\hbar\gamma} \ln(1+\gamma x)\right] \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

qui a les mêmes valeurs propres que la fonction d'onde (4.66).

Les conditions aux limites (4.72) remplissent la même relation d'impénétrabilité (4.71) et la relation de symétrie au niveau des parois,

$$\rho(0) = \rho(L) = B^2, \tag{4.75}$$

elles représentent aussi une extension self-adjointe de l'Hamiltonien H_γ.

Il est important de noter que, en ne prenant en compte que la symétrie physique, l'exigence d'impénétrabilité et le spectre d'énergie correspondant, on ne peut pas distinguer entre les conditions aux limites (4.61) et (4.72). Par conséquent, les fonctions d'onde (4.66) et (4.74) doivent être considérés comme équivalentes. En effet, nous considérons qu'il est impossible de distinguer physiquement entre ces deux solutions, à part le fait qu'elles présentent différentes densités de probabilité.

D'autre part, en considérant les conditions mixtes,

$$\phi(0) = \chi(L) = 0, \tag{4.76}$$

on obtient,

$$\phi\left(x\right)=A\sin\left[\frac{k_{n}}{\hbar\gamma}\ln\left(1+\gamma x\right)\right], \tag{4.77}$$

alors que la deuxiéme conposante sera d'aprés (4.60) :

$$\chi\left(x\right)=-\frac{iA}{E+m}k_{n}\cos\left(\frac{k_{n}}{\hbar\gamma}\ln\left(1+\gamma x\right)\right), \tag{4.78}$$

qui donnera pour $\chi\left(L\right)=0$,

$$k_{n}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\hbar\gamma}{\ln\left(1+\gamma L\right)} \tag{4.79}$$

Toutefois on peut voir que les conditions aux limites mixtes (4.76), qui peuvent aussi être utilisées si l'on considère les parois de la boîte comme barrières infranchissables et qui assurent aussi l'Hermiticité de l'Hamiltonien libre de Dirac, ne sont pas physiques parce que leur symétrie n'est pas la même au niveau des parois de la boîte. En effet, la densité de probabilité ρ est telle que :

$$\rho\left(0\right)=\frac{A^{2}k_{n}^{2}}{\left(E+m\right)^{2}}\neq\rho\left(L\right)=A^{2}. \tag{4.80}$$

D'autre part, les fonctions d'onde correspondantes aux conditions aux limites (4.76) présentent un ensemble de valeurs propres qui sont différentes de ceux de la fonction d'onde (4.66)

A la limite $\gamma\rightarrow0$, il est facile de voir que tous les résultats concordent avec le cas ordinnaire.

Conclusion

Cette thése consiste en une recherche concernant des sujets d'actualité qui a pour but d'apporter une contribution a l'étude de l'équation de DKP dans le cadre du calcul fractionnaire.

Nous rappelons que dans le premier chapitre, nous avons présenté l'essentiel des outils fondamentaux de la théorie fractionnaire dont les définitions des plus célébres dérivées et intégrales fractionnaires à savoir l'approche de Riemann-Liouville et de Caputo tout en méttant l'accent sur quelques fonctions spéciales reliées au calcul fractionnaire.

Dans le deuxiéme chapitre nous avons exposé le principe variationel fractionnaire dans le but de développer une formulation Lagrangienne et Hamiltonienne dans le cadre fractionnaire.

Par la suite, nous avons entamé dans le troisiéme chapitre le traitement de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans le cadre fractionnaire. En appliquant le principe variationel fractionnaire à une densité Lagrangienne contenant des dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha \leq 1$, nous avons déduit les équations d'Euler-Lagrange fractionnaires, celles-ci ont permit d'aboutir à l'équation de DKP fractionnaire et son adjointe. Ensuite, dans le but de traiter une formulation Hamiltonienne fractionnaire du champ de DKP afin de comparer les deux formalismes (Lagrangien et Hamiltonien) , nous avons introduit une densité Hamiltonienne fractionnaire contenant des moments canoniques fractionnaires. En utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange nous avons obtenu les équations d'Hamilton fractionnaires et par conséquent les équations de mouvement. Par les deux méthodes, nous avons trouvé le même résultat à savoir les mêmes équations de mouvement. Toujours dans le contexte fractionnaire nous avons aussi déduit les équations de Klein-Gordon et Proca fractionnaires en séparant les deux secteurs (scalaire et vectoriel) dans l'équation de DKP libre dans une procédure similaire au cas ordinaire. Dans la deuxiéme étape nous avons résolu l'équation de

DKP libre à temps fractionnaire puis à espace-temps fractionnaires dans les deux cas scalaire et vectoriel. Les solutions obtenues sont exprimées en terme de la fonction Mittag-Leffler. Le cas limite est ensuite discuté où nous avons montré que pour $\alpha = 1$, la fonction Mittag- Leffler se réduit à la fonction exponentielle par conséquent les solutions représentent une onde périodique par rapport au temps t et l'espace x comme cela devrait être. Cependant, si $0 < \alpha < 1$, la périodicité est rompue et les solutions présentent un comportement de décroissance à l'infini. En dernier lieu, et sachant que l'ensemble des équations de Maxwell apparaissent comme la limite de masse nulle de l'équation de DKP, nous avons montré que l'équation de DKP fractionnaire pour une particule vectorielle peut se décomposer en donnant naissance aux équations de Maxwell à temps fractionnaire avec masse.

Dans le cadre de La théorie du q-calcul qui a donné naissance à une algèbre déformée liée à la fonction q-exponentielle nous avons traité dans le quatriéme chapitre des équations de Klein-Gordon et Dirac modifiées grâce à l'introduction d'une dérivée déformée par la présence d'un paramétre réel $0 < q < 1$. Les définitions des différentes expressions modifiées ont été mentionnées entre autres la q-dérivée, la q-intégrale, q-exponentielle ainsi que la q-logarithme. Par la suite, un opérateur impulsion Hermitien relativement a un produit scalaire défini dans l'éspace déformé a été introduit. La résolution des deux équations déformées de Klein-Gordon et Dirac a été faite pour une particule confinée dans une boite. Les équations de continuité ont été aussi déduites pour les deux cas de Klein-Gordon et Dirac, où nous avons remarqué qu'elles ont été influées par la présence de la dérivée déformée.

En considérant les différentes conditions aux limites, nous avons discuté, pour l'équation de Dirac, les conditions de Dirichlet, les conditions de Newmann ainsi que les conditions mixtes. Nous avons trouvé que la fonction d'onde relativiste de Dirac aux limites d'une région non permise ne peut pas disparaître complètement et que, pour trouver des solutions non triviales la condition nécessaire et suffisante est d'imposer à la fonction d'onde des conditions aux limites qui rendent l'Hamiltonien auto-adjoint ce qui peut se realiser à l'aide des conditions de Dirichlet ainsi que celles de Newmann. Par contre, les conditions aux limites mixtes ne sont pas physiques parce que leur symétrie n'est pas la même aux parois de la boîte en effet la densité de probabilité est telle que $\rho(0) \neq \rho(L)$.

En conclusion, les résultats obtenus concordent exactement avec ceux de la littérature dans le cas où les paramètres de déformation $\alpha \to 1$ ou $q \to 1$.

Annexe

Composition des dérivées de Caputo

en partant de la définition (1.30) en prenant $0 < \alpha \leq 1$ et la borne inférieure $a = 0$ on a

$$\begin{aligned} {}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\ \left({}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} \left({}_{0}^{c}\partial_{\tau}^{\alpha} f(\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} \left[\int_0^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f^{(1)}(u)\, du\right] d\tau. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Posons $\tau - u = y$ l'intégrale entre crochets peut s'évaluer comme suit

$$\int_0^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f^{(1)}(u)\, du = \int_0^{\tau} y^{-\alpha} f'(\tau-y)\, dy, \tag{4.82}$$

donc

$$\frac{d}{d\tau}\left[\int_0^{\tau} y^{-\alpha} f'(\tau-y)\, dy\right] = \tau^{-\alpha} f'(0) + \int_0^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f''(u)\, du, \tag{4.83}$$

par la suite

$$\begin{aligned} {}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha}\ \left({}_{+}^{c}\partial_0^{\alpha} f(t)\right) &= \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \left[\tau^{-\alpha} f'(0) + \int_0^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f''(u)\, du\right] d\tau \\ &= \frac{f'(0)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \tau^{-\alpha} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \left(\int_0^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f''(u)\, du\right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Remarquons que le premier terme fait intervenir la fonction Béta définie par (1.8) et (1.12)

$$\mathfrak{B}(x,y)=\int_0^1(1-u)^{x-1}u^{y-1}du=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

en effet, en faisant le changement de variables $u=\frac{t-\tau}{t}$ nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f'(0)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\tau^{-\alpha}d\tau &= \frac{f'(0)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}t^{1-2\alpha}\int_0^1 u^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}du\\ &= \frac{f'(0)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}t^{1-2\alpha}\mathfrak{B}(1-\alpha,1-\alpha)\\ &= \frac{f'(0)}{\Gamma(2-2\alpha)}t^{1-2\alpha}. \end{aligned}\tag{4.85}$$

Il va de même pour le deuxiéme terme, moyennant l'interversion des deux intégrales

$$\begin{aligned}&\frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\left(\int_0^\tau(\tau-u)^{-\alpha}f''(u)du\right)d\tau\\ =\ &\frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}\int_0^t\int_0^\tau(t-\tau)^{-\alpha}(\tau-u)^{-\alpha}f''(u)dud\tau\\ =\ &\int_0^t\left(\frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}\int_u^t(t-\tau)^{-\alpha}(\tau-u)^{-\alpha}d\tau\right)f''(u)du,\end{aligned}\tag{4.86}$$

et avec le changement de variables $y=\frac{t-\tau}{t-u}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\left(\int_0^\tau(\tau-u)^{-\alpha}f''(u)du\right)d\tau\\ =\ &\int_0^t\frac{(t-u)^{1-2\alpha}}{[\Gamma(1-\alpha)]^2}\mathfrak{B}(1-\alpha,1-\alpha)f''(u)du\\ =\ &\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\int_0^t(t-u)^{1-2\alpha}f''(u)du.\end{aligned}\tag{4.87}$$

A ce stade on peut distinguer deux cas

-Si $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$ ou bien $1<2\alpha\leq 2$,

$$\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\int_0^t(t-u)^{1-2\alpha}f''(u)du={}_0^c\partial_t^{2\alpha}f(t).\tag{4.88}$$

-Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ou bien $0 < 2\alpha \leq 1$, alors l'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{(t-u)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f''(u)\,du &= \int_0^t \frac{(t-u)^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} f'(u)\,du - \frac{t^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(0) \\ &= {}_0^c\partial_t^{2\alpha} f(t) - \frac{t^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(0), \end{aligned} \tag{4.89}$$

où le terme suplémentaire représente l'opposé de (4.85).

Conclusion :

$$ {}_+^c\partial_0^\alpha \left({}_+^c\partial_0^\alpha f(t) \right) = {}_0^c\, \partial_t^{2\alpha} f(t) \text{ pour } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \tag{4.90}$$

et

$$ {}_+^c\partial_0^\alpha \left({}_+^c\partial_0^\alpha f(t) \right) = {}_0^c\, \partial_t^{2\alpha} f(t) + \frac{t^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(0) \text{ pour } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \tag{4.91}$$

Constantes de normalisation

Dans le but d'obtenir les constantes de normalisation nous allons développer le calcul à titre d'exemple pour le cas C_n^+.

A partir des équations (4.40) et (4.42) on trouve

$$\rho^+ = 2\left|C_n^+\right|^2 \frac{E}{\hbar} \sin^2 \frac{n\pi}{\ln(1+\gamma L)} \ln(1+\gamma x), \tag{4.92}$$

de même

$$\rho^- = -2\left|C_n^-\right|^2 \frac{E}{\hbar} \sin^2 \frac{n\pi}{\ln(1+\gamma L)} \ln(1+\gamma x). \tag{4.93}$$

En substituant dans (4.47) on trouve

$$2\left|C_n^+\right|^2 \frac{E}{\hbar} \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{\ln(1+\gamma L)} \ln(1+\gamma x)\,dx = 1, \tag{4.94}$$

avec le changement de variables $u = \ln(1+\gamma x)$ l'équation se transforme en

$$\left|C_n^+\right|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{k_n}{\hbar\gamma} u\right) \exp u\; du = \frac{\gamma\hbar}{2E}, \tag{4.95}$$

avec $k_n = \frac{n\pi\hbar\gamma}{\ln(1+\gamma L)}$.

Avec l'aide de (*voir* [55])

$$\int \exp ax \ \sin^2 bx \ dx = \frac{\exp ax}{2a} - \frac{\exp ax}{a^2+4b^2}\left[\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right], \tag{4.96}$$

on arrive à

$$\left|C_n^+\right|^2 \ \frac{\gamma L}{2}\left(\frac{4k_n^2}{\hbar^2\gamma^2+4k_n^2}\right) = \frac{\gamma\hbar}{2E}. \tag{4.97}$$

Finallement on aboutit aprés simplification à

$$\left|C_n^+\right|^2 = \frac{\hbar}{LE}\left[\frac{\ln^2(1+\gamma L)}{4n^2\pi^2}+1\right]. \tag{4.98}$$

Bibliographie

[1] K.Oldham, J.Spanier, *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order* , Academic Press, Inc.(London), (1974)

[2] S.G.Samko, A.A.Kilbas, O.I.Marichev, *Fractional integrals and Derivatives theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam (1993) .

[3] K.S.Miller, B. Ross : *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York (1993) .

[4] I.Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press (London), (1999) .

[5] G.M.Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford Univ.Press, (2005).

[6] F.Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial college press, London (2010).

[7] A.Raspini, *Dirac Equation with Fractional Derivative of order 2/3,* Fizika B (Zagreb) 9, 2, 49 (2000) .

[8] P.J.Zavada, J Appl. Math. 2 :4, 163 (2002).

[9] N. Laskin, *Fractional Quantum Mechanics* , Phys. Rev. E 62, 3135 (2000).

[10] S.Wang, M. Xu, *Generalized fractional Schrödinger equation with space–time fractional derivatives*,J. Math. Phys. 48, 043502 (2007) .

[11] S.I.Muslih, *Solutionsof a particle with fractional δ-potential in a fractional dimensional space ,* Int. J. Theor. Phys. 49, 2095 (2010) .

[12] P.Rosmej, B.Bandrowski, *On fractional Schrödinger equation* , Comput. Methods Sci. Technol. 16, 191 (2010).

[13] D.Baleanu, S.I.Muslih, *About fractional supersymmetric quantum mechanics*, Czechoslov. J. Phys. 55, 1063 (2005).

[14] A.Ashyralyevab, B.Hicdurmazcd, *On the numerical solution of fractional Schrödinger differential equations with the Dirichlet condition* , Int. J. Comput. Math. 89, 1927 (2012).

[15] A.Bibi, A.Kamran, U.Hayat, S.T.Mohyud-Din, *New iterative method for time-fractional Schrodinger equations,* World J. Mod. Sim. 9, 89 (2013).

[16] M.I.Bhati, L.Debnath, *On fractional Schrodinger and Dirac equations,* Int. J. Pure Appl. Math. 15, 1 (2004).

[17] S.I.Muslih, O.P.Agrawal, D.Baleanu, *A fractional Dirac equation and its solution* , J. Phys. A Math.Theor. 43, 055203 (2010).

[18] S.I.Muslih, O.P.Agrawal, D.Baleanu, *Solutions of a fractional dirac equation*, In : Proceedings of the ASME (2009) InternationalDesign Engineering TechnicalConferences and Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2009 August 30–September 2, 2009, San Diego, California, USA.

[19] A. Raspini, *Simple solutions of the fractional Dirac equation of order 2/3*, Phys. Scr. 64, 20 (2001).

[20] V.E.Tarasov, *Fractional dynamics of relativistic particle,* Int. J. Theor. Phys. 49, 293 (2010).

[21] J.F.Gómez-Aguilara, H.Yépez-Martínezb, R.F.Escobar-Jiméneza, C.M.Astorga-Zaragozaa, L.J.Morales-Mendozac, M.González-Leec, *Universal character of the fractional space–time electromagnetic waves in dielectric media* . J. Electromagn. Waves Appl. 29, 727 (2015).

[22] V.E.Tarasov, *Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media,* Theor. Math. Phys. 158, 355 (2009).

[23] S.I.Muslih, M.Saddallah, D.Baleanu, E.Rabei, *Lagrangian formulation of Maxwell's field in fractional D dimensional space–time*, Rom. J. Phys. 55, 659 (2010).

[24] G.Petiau, *Contribution a la theorie des equations d'ondes corpusculaires,* Acad. Roy. Belg. Mem. Collect 16 (1936).

[25] R.Y.Duffin, *On the characteristic matrices of covariant systems*, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).

[26] N.Kemmer, *The particle aspect of meson theory*, Proc. R. Soc. A 173, 91 (1939).

[27] R.Gorenflo, A.A.Kilbas, F.Mainardi, S.V.Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2014)

[28] Ya.V.Fainberg, B.M. Pimentel, *Duffin–Kemmer–Petiau and Klein–Gordon–Fock equations for electromagnetic, Yang–Mills and external gravitational field interactions : proof of equivalence,* Phys. Lett. A 271, 16, (2000) .

[29] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, J. S. Valverde, *Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance,* http ://arxiv.org/abs/hep-th/9911254(1999) .

[30] V. Gribov, *QCD at large and short distances*, Eur. Phys. J. C10,71 (1999).

[31] V.M.Red'kov, *Generally relativistical Daffin-Kemmer formalis and behaviour of quantm-mechanical particle of spin-1 in the Abelian monopole field* arXiv :quant-ph/981(2007).

[32] J.T. Lunardi, L.A. Manzoni, B.M. Pimentel and J.S. Valverde, *Duffin-Kemmer-Petiau Theory in the Causal Approach,* Int. J. Mod. Phys. A 17, 205 (2002).

[33] N.Bouzid, M.Merad, D.Baleanu, *On Fractional Duffin-Kemmer-Petiau Equation,* Few.Body Syst. 57, 265 (2016) .

[34] F.Riewe, *Non conservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics,* Phys. Rev.E 53,1890, (1996) .

[35] O.P.Agrawal, *E New Lagrange Equation of Motion for Fractionally Damped Systems,* J. Appl. Mechanics, 68,339 (2001).

[36] O.P.Agrawal, *Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems*, J. Math. Anal. and Appl. 272, 368 (2002) .

[37] F.Mainardi, *Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena.* Chaos Solitons Fractals 7, 1461 (1996).

[38] F.Mainardi, R.Goren, *On Mittag–Leffler-type functions in fractional evolution processes.* J.Comput.Appl.Math. 118, 283 (2000).

[39] F.Mainardi, *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett. 9(6), 23 (1996).

[40] R.N.Pillai, *On Mittag–Leffler functions and related distributions*. Ann. Inst. Stat. Math. 42(1), 157 (1990).

[41] B.C.Clark, et al.,*Pion-nucleus scattering at medium energies with densities from chiral effective field theories*. Phys. Lett.282 B 427, 231 (1998)

[42] B.C.Clark, et al., *Relativistic impulse approximation for meson-nucleus scattering in the Kemmer–Duffin–Petiau formalism.* Phys. Rev. Lett. 55, 592 (1985)

[43] R.F.Guertin, T.L.Wilson, *Noncausal propagation in spin-0 theories with external field interactions*. Phys. Rev. D 15, 1518 (1977)

[44] H.Umezawa, *Quantum Field Theory*. North-Holland, Amsterdam (1956).

[45] Y.Nedjadi, R.C.Barrett, *Solution of the central field problem for a Duffin–Kemmer–Petiau vector boson.* J. Math. Phys. 19, 87 (1994)

[46] R.P.Feynman, A.R.Hibbs, *Quantum and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York (1965)

[47] F.Mainardi, Y.Luchko, G.Pagnini,*The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*.Fract..Calc. Appl. Anal. 4, 153 (2001).

[48] R.N. Costa Filho, M.P. Almeida , G.A. Farias and J.S. Andrade, *Displacement operator for quantum systems with position-dependent mass.* Jr Phys. Rev. A 84 050102(2011) .

[49] F.H.Jackson, *On q-functions and certain difference operator*. Trans.Roy Soc. Edin. 46, 253 (1908).

[50] Ernesto P. Borges, *A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics.* Physica A 340, 95 (2004)

[51] Bruno G. da Costa and Ernesto P. Borges, *Generalized space and linear momentum operators in quantum mechanics*. J.Math.Phys. 55, 062105 (2014)

[52] M. A. Rego-Monteiro and F. D. Nobre, *Nonlinear quantum equations : Classical field theory.* J. Math. Phys. 54, 103302 (2013).

[53] F. D. Nobre, M. A. Rego-Monteiro and C. Tsallis, *Nonlinear Relativistic and Quantum Equations with a Common Type of Solution*. Phys.Rev.Lett. 106, 140601 (2011).

[54] P.M. Rajkovic, S.D. Marinkovic, M.S. Stankovic , *A generalization of the concept of q–fractional integrals.*M.S. Acta. Math. Sin.-English Ser. 25, 1635 (2009) .

[55] Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger *Gradshteyn and Ryzhik's Table of Integrals, Series, and Products* Sixth edition (2000).

[56] C. Tsallis, *What are the numbers that experiments provide* Quimica Nova 17, 468 (1994).

[57] R.P.Agarwal, *Certain fractional q–integrals and q–derivatives.* Proc. Camb. Phil. Soc., 66, 365 (1969).

[58] W.A.Al-Salam, *Some fractional q–integrals and q–derivatives.* Proc. Edin. Math.Soc., 15, 135 (1966).

[59] J. D. Bjorken, and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* McGraw-Hill, New York, (1964).