

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Larbi Ben M'hidi

THESE

Présentée à la Faculté des SESNV
Département de Mathématiques et informatique
Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en-sciences

Option: Mathématiques Appliquées

Par

SAMIA REZZAG

**Etude et estimation des bornes de systèmes
dynamiques chaotiques et hyperchaotiques**

Soutenue le / / , devant le jury composé de:

M ^r . A. AYADI	Pr. U. Larbi Ben M'hidi d'OEB	Président
M ^r . O. ZEHOURE	MCA. U. Larbi Ben M'hidi d'OEB	Rapporteur
M ^r . K. BESSILA	MCA. U. Constantine 1	Examineur
M ^r . T. HAMAIZIA	MCA. U. Constantine 1	Examineur
M ^r . M. ABDELOUAHAB	MCA. C. U. de Mila	Examineur

Table des matières

Introduction générale	8
1 Systèmes dynamiques	9
1.1 Introduction	9
1.2 Notions de système dynamique	10
1.3 Systèmes dynamiques continus	11
1.3.1 Orbite	11
1.3.2 Flot	11
1.3.3 Points d'équilibres	12
1.3.4 Points et ensembles limites	12
1.3.5 Invariance et attraction	13
1.3.6 Etude de stabilité	16
1.3.7 Bifurcations	23
1.4 Systèmes dynamiques discrets	28
1.4.1 Orbites ou trajectoires	28
1.4.2 Points fixes	29
1.4.3 Points périodiques et p-cycles	29
1.4.4 Etude de la stabilité	29
1.4.5 Bifurcations	32
1.4.6 La section de Poincaré	32

2	Théorie de chaos	34
2.1	Sémantique de la théorie du chaos	34
2.2	Chaos déterministe	35
2.3	Propriétés du chaos	36
2.3.1	La non-linéarité	36
2.3.2	La structure fractale	36
2.3.3	L'attracteur étrange	37
2.4	Scénarios de transition vers le chaos	38
2.5	Exposants de Lyapunov	40
2.5.1	Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	43
2.5.2	Utilisation des exposants de Lyapunov au calcul de dimension de l'attracteur	43
3	Systèmes hyperchaotiques	45
3.1	Introduction	45
3.2	Premier système hyperchaotique	46
3.3	Modèle 9D pour une transition chaos-hyperchaos	47
3.4	Comportements hyperchaotiques expérimentaux	49
3.5	Hyperchaotification de quelques systèmes chaotiques continus	49
3.5.1	Système hyperchaotique de Lü	50
3.5.2	Système hyperchaotique de Lorenz	55
4	Estimation des bornes pour le système quadratique généralisé de dimension quatre	61
4.1	Introduction	61
4.2	Estimation de la borne supérieure d'un système 4-D quadratique généralisé à temps continu	63
4.3	Application	68
4.4	Conclusion	70

5	La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre	71
5.1	Introduction	71
5.2	La borne extrême et l'ensemble positivement invariant	72
5.3	Estimation de la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre	73
5.4	Conclusion	76
	Conclusion générale	78
	Bibliographie	82

Remerciements

- Je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à terme ce présent travail.

- J'exprime toute ma profonde gratitude, ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur Okba Zehrou, maître de conférence à l'université d'Oum El Bouaghi, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé cette thèse.

- Je lui témoigne ma gratitude pour sa patience, sa disponibilité et surtout pour ses encouragements tout au long de la préparation de ce travail.

- Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail. Merci à Mr le professeur A. AYADI, d'avoir accepté d'être le président du jury de cette thèse, à Messieurs K. BESSILA, T. HAMAIZIA et M. S. ABDELOUAHAB qui m'ont honoré d'accepter de faire partie du Jury.

- J'adresse mes vifs remerciements à M. Taib Hamaizia, M. Mabrouk Bragdi, et M. Abdelkrim Aliouche qui n'ont pas cessé tout au long de mes recherches de me prodiguer conseils, encouragements et soutiens scientifiques et humains.

- Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

- Je ne remercierai sans doute jamais assez mon cher époux Kada, qui a su faire preuve d'une grande patience, de compréhension et m'a accompagné et soutenu de façon permanente dans les moments difficiles.

- Enfin, toute ma gratitude et mes chaleureux remerciements vont à mes frères, à mes sœurs, à mes enfants et à ceux ou celles qui me sont très chers.

- Merci à tous.

À mes très chers parents.

À mon cher époux Kada.

À mes frères et à mes sœurs.

À mes enfants : Aymen; Toukaa; Abd El Mouiz.

À tout ce qui compte pour moi.

...Je dédie humblement ce travail.

Introduction générale

Les travaux fondamentaux de **Lorenz** en 1963 ont donné un aperçu scientifique de reconnaissance d'un nouveau type de mouvement appelé Chaos. La théorie du chaos étudie en détail comment une petite erreur sur la connaissance de l'état initial d'une évolution temporelle déterministe peut donner lieu à une incertitude des prédictions qui croît rapidement avec le temps. On dit qu'il y a une dépendance sensible aux conditions initiales. Selon **Alexandre Lyapunov**, la façon la plus pertinente pour la description de cette caractéristique est à travers l'utilisation des exposants positifs de Lyapunov. Si le système dynamique a plus d'un exposant de Lyapunov positif, alors le système est considéré comme hyperchaotique.

Le comportement dynamique des systèmes hyperchaotiques est plus compliqué que celui d'un simple système chaotique. C'est pour cette raison que ces systèmes offrent plus de sécurité dans le domaine de la communication.

D'autre part, en raison de ses applications théoriques et pratiques dans les domaines technologiques, tels que les circuits non-linéaires, les lasers, le contrôle, la synchronisation, l'hyperchaos est récemment devenu un thème central dans la recherche des sciences non linéaires.

En particulier, l'estimation de bornes d'un système chaotique est importante pour l'étude du comportement qualitatif de ce système. Si nous arriverons à montrer qu'un système chaotique a un ensemble globalement attractif, alors nous pourrions déduire que le système ne peut pas avoir des points d'équilibre, des solutions périodiques, des solutions quasi-périodiques, ou d'autres attracteurs chaotiques en dehors de cet ensemble. Cela simplifie l'analyse des propriétés dynamiques du système chaotique. L'estimation de bornes d'un système chaotique joue également un rôle important dans

le contrôle du chaos, la synchronisation du chaos, et leurs applications.

Une telle estimation est assez difficile à réaliser techniquement. Malgré la difficulté, des nombreux résultats intéressants sur ce sujet ont été obtenus pour certains systèmes dynamiques de dimension trois à temps continu [18], [27], [20], [11], [43].

Au cours des dernières années, l'étude et l'estimation des bornes pour les systèmes dynamiques de dimension quatre ont attiré l'attention de nombreux ingénieurs, de physiciens et de mathématiciens. De ce fait, la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour quelques systèmes hyperchaotiques ont été déterminés, notamment, le système hyperchaotique de **Lorenz-Haken** [21], le système hyperchaotique de **Lorenz-Stenflo** [35] et un modèle hyperchaotique 4-D généralisé contenant les deux systèmes: **Lorenz-Stenflo** et **Lorenz-Haken** [42].

Notre contribution à travers le travail développé dans le cadre de cette thèse concerne la généralisation de tous les résultats existants dans la littérature actuelle pour la borne supérieure d'un système 4-D quadratique généralisé à temps continu [29]. Plus précisément, en utilisant une analyse rigoureuse des fonctions multivariées, les grandes régions dans l'espace des paramètres de bifurcation de ce système où il est borné sont déterminées. En outre, à l'aide de la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée, nous étudions la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système hyperchaotique le plus général de dimension quatre à temps continu [28]. Spécialement, nous présentons les conditions suffisantes pour que ce système soit contenu dans un ensemble ellipsoïdal à quatre dimensions. Nous prouvons également que l'ensemble des systèmes qui vérifient ces conditions n'est pas vide car le système de **Lorenz-Stenflo** appartient à cette classe.

Cette thèse est présentée à travers cinq chapitres :

Afin de mieux comprendre l'enchaînement des concepts fondamentaux de notre recherche, le premier chapitre est un ensemble de rappels sur les systèmes dynamiques non linéaires avec un accent, particulier, porté sur les systèmes à temps continue et discret.

Le deuxième chapitre retrace un bref historique de la théorie du chaos déterministe. Dans ce chapitre, nous citons les différents outils mathématiques qui nous servent à

caractériser le comportement chaotique, tels que les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov et la dimension fractale.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude des systèmes dynamiques hyperchaotiques, où nous allons illustrer la théorie de l'hyperchaotification des systèmes chaotiques par des exemples majeurs tels que le modèle de **Lorenz** et le modèle de **Lu**.

Le quatrième chapitre nous emmène au coeur du travail réalisé. Il est consacré à la généralisation de tous les résultats précédents concernant l'estimation de la borne supérieure d'un système hyperchaotique quadratique généralisé en quatre dimensions.

Enfin, dans le dernier chapitre, en utilisant une technique combinant la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée et l'optimisation, nous étudions la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre à temps continu. En particulier, nous rapportons des conditions suffisantes pour que ce système soit contenu dans un ensemble ellipsoïdal de dimension quatre.

Ces deux derniers chapitres ont fait l'objet de deux publications : [28] et [29].

Chapitre 1

Systemes dynamiques

1.1 Introduction

Historiquement, la notion de temps dans l'étude des modèles physiques et mathématiques remonte à Galilée, le premier qui introduisit cette notion dans l'étude de la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. Cette introduction du temps dans les équations est ce qui s'appellera l'étude des systèmes dynamiques.

Les systèmes dynamiques sont d'abord manifestés dans les équations du mouvement de **Newton**, ils fournissent ainsi une vision nouvelle et utile de la nature, une vision qui met l'accent sur "les aspects qualitatifs géométriques du comportement dynamique des systèmes complexes", au fur et à mesure que des paramètres extérieurs changent. Cette vision a contribué à l'avancement des connaissances non seulement dans les domaines traditionnels de la physique mais aussi dans d'autres programmes de recherche scientifique.

Les systèmes dynamiques ont été développés et spécialisés au cours du **XIXe** siècle. En effet, vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au **XIX**e siècle, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de **sensibilité aux conditions initiales**.

En 1963, le météorologue **Edward Lorenz** pose bien le problème : "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas ?". Il y décrit le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. Selon la valeur de certains paramètres, un comportement dynamique nouveau était mis en évidence. Les trois variables d'état du système, permettant de déterminer l'évolution des masses d'air, manifestaient une activité erratique, imprévisible. Edward Lorenz mit en évidence que, dans les systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à long terme des systèmes totalement différents. Pour mieux faire comprendre l'importance de cette sensibilité aux conditions initiales, il eut recours à une image qui contribua au succès médiatique de la théorie du chaos : celle de l'effet papillon. Cette métaphore insistait sur la disproportion entre la cause et l'effet soulignant au passage l'imprédictibilité à long terme de l'évolution de tels systèmes [22].

1.2 Notions de système dynamique

On appelle système dynamique tout système évolutif par l'intermédiaire d'au moins un paramètre réel (qui pourra jouer le rôle de temps par exemple), qui utilise des équations différentielles (ordinaires, aux dérivées partielles,...), des équations intégrales, des itérations ou un ensemble composite de tout cela et de façon générale qui soit décrit par une ou des "relations" entre un état du système et un (ou des) état(s) à une autre étape (ou instant). Donc pratiquement toute description d'un phénomène qui évolue est en soi un système dynamique.

Dans le cas continu un système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t, \mu) \tag{1.1}$$

$X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champ de vecteur sur Ω .

Dans le cas discret un système dynamique est décrit par une itération de la forme

$$X_{k+1} = F(X_k, \mu), k \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Lorsque F dépend explicitement du temps (1.1) est dit non autonome. Dans le cas contraire on dit que (1.1) est autonome.

1.3 Systèmes dynamiques continus

1.3.1 Orbite

Définition 1.3.1 Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable $t \rightarrow X(t)$, définie d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans Ω telle que pour tout $t \in I$ on a $X'(t) = F(X, t, \mu)$. L'image d'une solution X est appelée orbite et notée :

$$\gamma_X = \{a \in \Omega; \exists t \in I : X(t) = a\} \quad (1.3)$$

Remarque 1.3.1 L'orbite est tangente en chaque'un de ses points au champ de vecteur F .

1.3.2 Flot

Définition 1.3.2 Considérons le système autonome :

$$\frac{dX}{dt} = F(X), X \in \mathbb{R}^n, F \in C^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

Soit $X(t, X_0)$, $X_0 \in D$, une solution de (1.4) avec conditions initiales $X(0) = X_0$. On appelle flot de (1.4) l'application : $\varphi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi_t(X_0) = X(t, X_0) \quad (1.5)$$

$\varphi_t(X_0)$ possède les propriétés suivantes:

- (i) $\varphi_t(X_0)$ est de classe C^r .
- (ii) $\varphi_0(X_0) = X_0$.
- (iii) $\varphi_{t+s}(X_0) = \varphi_t(\varphi_s(X_0))$.

1.3.3 Points d'équilibres

Définition 1.3.3 a) Un point fixe (ou critique ou singulier, ou point stationnaire) de l'équation $\frac{dX}{dt} = F(X)$ est un point \bar{X} de l'espace des phases vérifiant $F(\bar{X}) = 0$, (ou pour tout $t \in \mathbb{R} : \varphi_t(\bar{X}) = \bar{X}$) sinon \bar{X} est dit point ordinaire.

b) Un point ordinaire \bar{X} est dit périodique s'il existe $T > 0$ tel que

$$\varphi_T(\bar{X}) = \bar{X}. \quad (1.6)$$

c) Une orbite γ_{X_0} telle qu'il existe deux points d'équilibre a et b vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(X_0) = a \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(X_0) = b \quad (1.7)$$

est dite orbite hétérocline si $a \neq b$ et homocline si $a = b$.

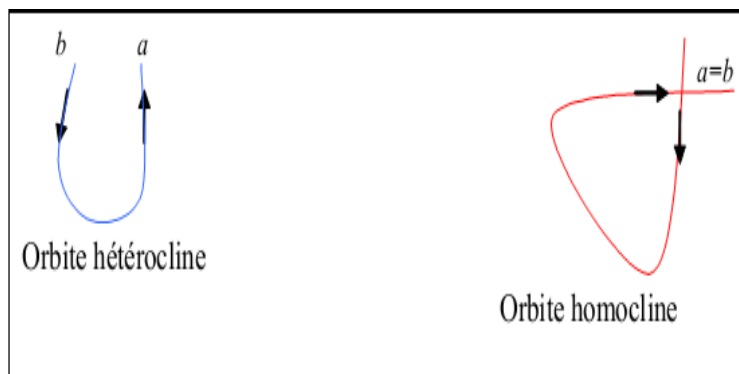


Figure 1.1 : Orbite hétérocline et orbite homocline

Remarque 1.3.2 Par un changement de variable $Z = X - \bar{X}$ on peut ramener le point \bar{X} à l'origine (0).

1.3.4 Points et ensembles limites

Définition 1.3.4 Un point $a \in I$ est un point ω -limite d'une trajectoire $X(t, X_0)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n} = a \quad (1.8)$$

où φ_t est le flot du système $\frac{dX}{dt} = F(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^k(I)$, $I \subset \mathbb{R}^n$ et $X(t, X_0)$ est une solution de ce système avec $X(0) = X_0$.

Définition 1.3.5 Un point $b \in I$ est un point α -limite d'une trajectoire $X(t, X_0)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_{t_n} = b \quad (1.9)$$

Définition 1.3.6 L'ensemble des points α -limites (resp ω -limites) de $X(t, X_0)$ est désigné par $\alpha(X)$ (resp $\omega(X)$), et on définit l'ensemble limite de $X(t, X_0)$ par l'ensemble :

$$\alpha(X) \cup \omega(X) \quad (1.10)$$

Remarque 1.3.3 -Si a est un point d'équilibre alors $\alpha(a) = \omega(a) = \{a\}$.

-Si a est périodique alors $\alpha(a) = \omega(a) = \gamma_a$.

-Si a et b sont dans la même orbite alors $\omega(a) = \omega(b)$ et $\alpha(a) = \alpha(b)$, donc on définit les ensembles limites d'une orbite comme étant les ensembles limites de l'un de ses points.

-Si γ est une orbite hétérocline allant du point d'équilibre a au point d'équilibre b alors $\omega(\gamma) = \{b\}$, $\alpha(\gamma) = \{a\}$.

1.3.5 Invariance et attraction

Ensemble invariant

Définition 1.3.7 Soit E une région de l'espace d'état \mathbb{R}^n et $X(t, X_0)$ une solution de (1.4). E est un ensemble invariant du flot si :

$$\forall X_0 \in E \subset \mathbb{R}^n \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, X(t, X_0) \in E \quad (1.11)$$

Remarque 1.3.4 la trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.

Attracteurs

Définition 1.3.8 Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers laquelle évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- A est un ensemble compact, fermé et invariant par le flot φ_t (c-à-d $\varphi_t(A) = A$ pour tout t)
- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $X(t, X_0) = \varphi_t(X_0)$ restera dans U si $X_0 \in V$
- $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$
- Il existe une orbite dense dans A .

Bassin d'attraction

Définition 1.3.9 Le bassin d'attraction $B(A)$ de A , c'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers A ; donc $B(A) = \cup \varphi_t(V), t < 0$.

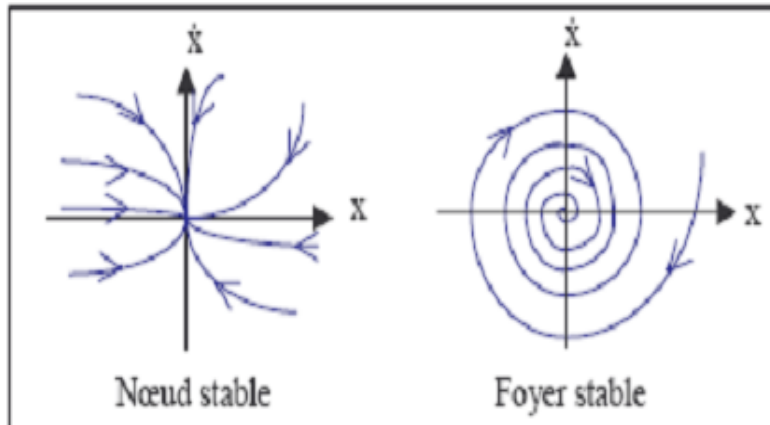


Figure 1.2 : Points fixes attracteurs

Remarque 1.3.5 Un attracteur est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

Les différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

***Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos (point). On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des noeuds stables et des foyers stables, représentés (**Figure 1.2**).

***Le cycle limite périodique** : On appelle cycle limite du système (1.4), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.

* **Le cycle limite pseudo-périodique** : Il correspond à une somme de solutions périodiques, dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.

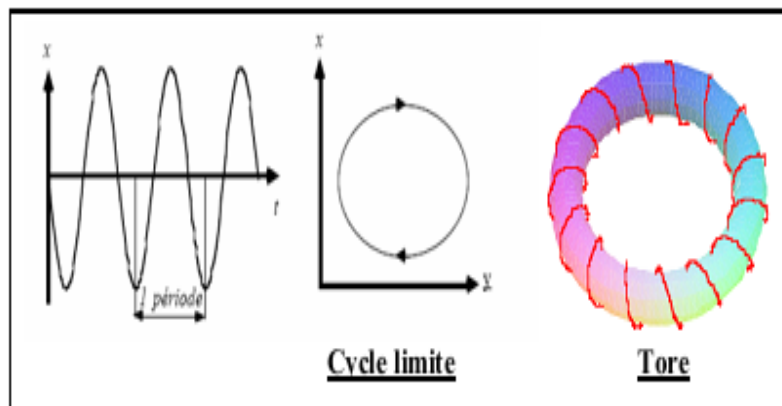


Figure 1.3 : Cycle limite périodique et pseudo-périodique

2. Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des

trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique)
2. La dimension de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

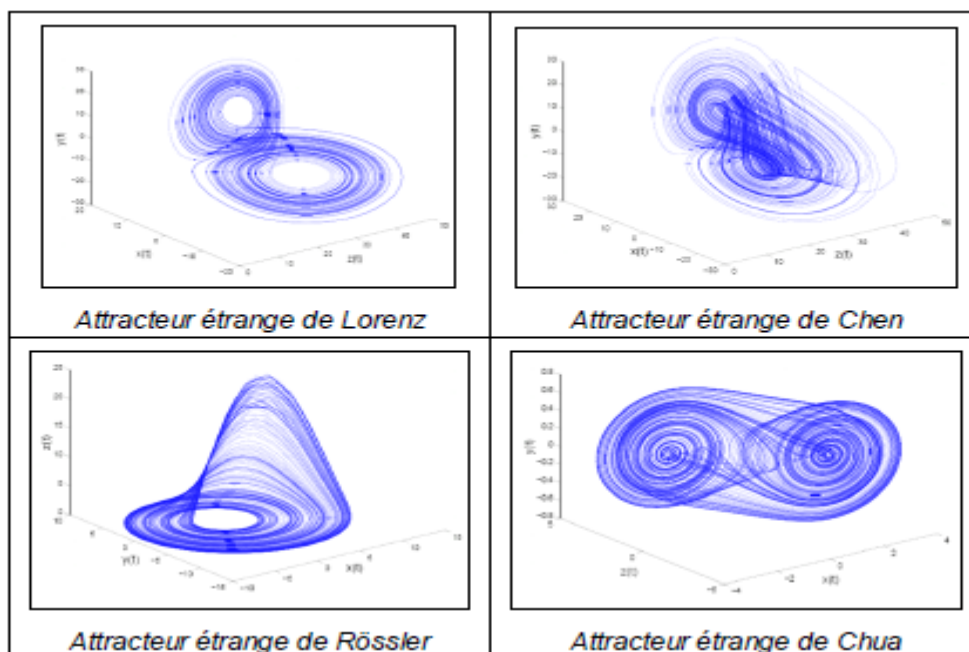


Figure 1.4 : Quelques attracteurs étranges

1.3.6 Etude de stabilité

Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1.12}$$

où f est une fonction non linéaire.

Le point d'équilibre \bar{x} du système (1.12) est :

- Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.13)$$

- Asymptotiquement stable si \bar{x} est stable et si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

- Exponentiellement stable s'il existe deux réels positifs a et b tels que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < a \|x(t_0) - \bar{x}\| \exp(-bt), \forall t > t_0$$

- Instable si la condition (1.13) n'est pas satisfaite.

Stabilité des systèmes linéaires autonome

Soit le système linéaire autonome suivant :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \quad (1.14)$$

où A est une matrice constante. Le théorème ci-dessous caractérise la stabilité des systèmes linéaires autonomes.

Théorème 1.3.1 - *S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\text{Re}(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre 0 est instable.*

- *Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.*

- *Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A a une partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.*

Tous ces cas sont regroupés dans la **Figure 1.5**.

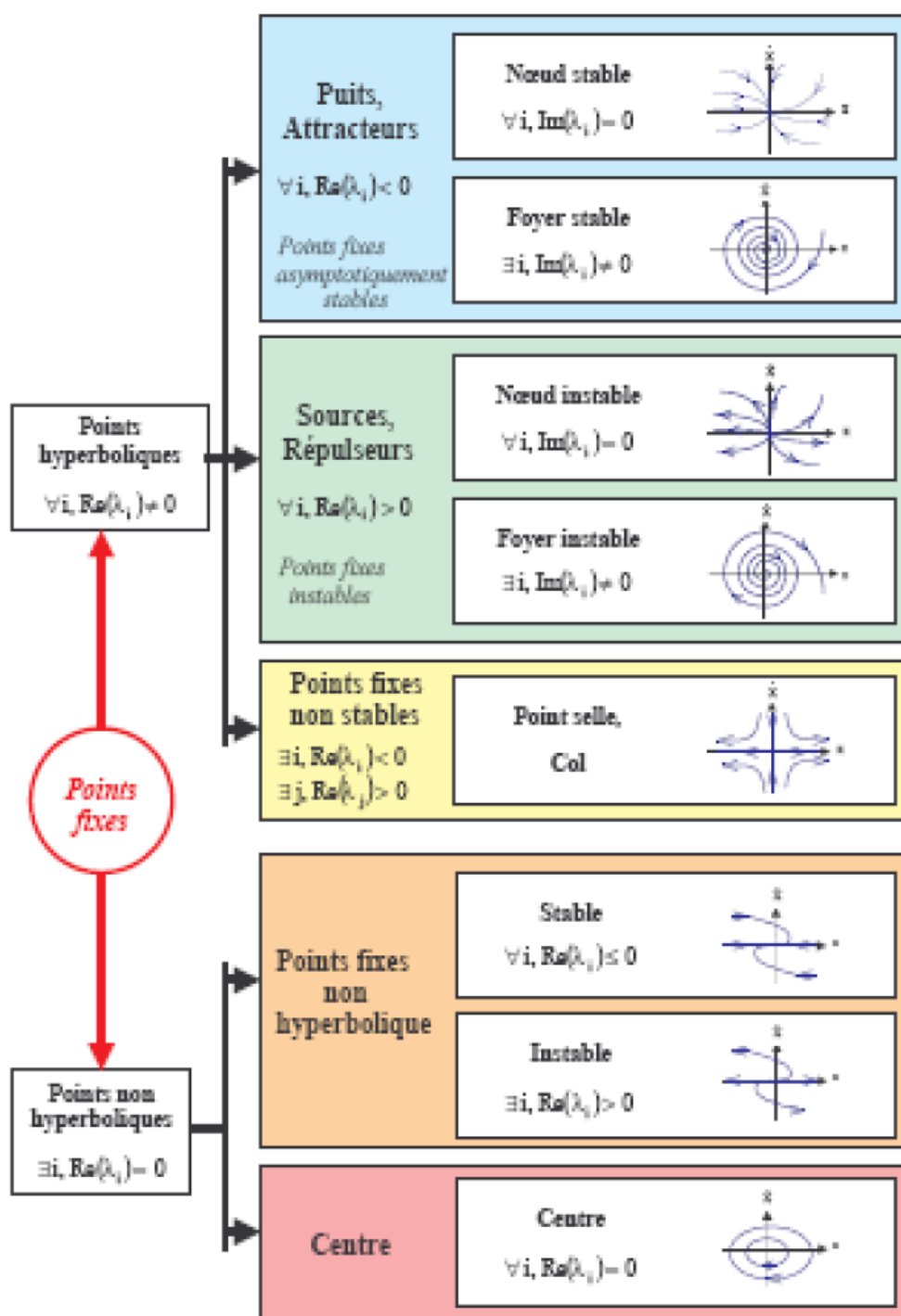


Figure 1.5 : Les différents types d'états d'équilibre pour le système linéaire autonome.

Stabilité des systèmes linéaires non autonome

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (1.15)$$

et soit x_0 un point fixe (d'équilibre) de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point fixe. La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage de point x_0 comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}_0 = f(\varepsilon(t) + x_0) \simeq f(x_0) + Jf(x_0)\varepsilon(t) \quad (1.16)$$

avec $Jf(x_0)$ est la matrice Jacobienne de la fonction f défini par :

$$Jf(x_0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_0}$$

Comme $f(x_0) = 0$, alors l'équation (1.16) redevient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = Jf(x_0) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.17)$$

L'écriture (1.17) veut dire que le système (1.15) est linéarisé.

Le théorème qui suit, connue comme **méthode indirecte de Lyapunov**, utilise la linéarisation (1.17) du système (1.15) et peut dans certains cas apporter une réponse au problème de la stabilité locale, plus précisément :

Théorème 1.3.2 - *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x_0 est asymptotiquement stable.*

- *Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x_0 est instable.*

Remarque 1.3.6 *Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre avec partie réelle nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne, et la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode suivante :*

Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée **fonction de Lyapunov**, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant va résumer cette méthode.

Théorème 1.3.3 *Le point d'équilibre x_0 du système (1.15) est stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ayant les propriétés suivantes:*

- 1- D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x_0 \in D$.
- 2- $V(x) > V(x_0), \forall x \neq x_0$.
- 3- $\dot{V}(x) \leq 0$.

Si de plus pour $x \neq x_0, \dot{V}(x) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x_0 , tendent vers x_0 (on dit que x_0 est globalement asymptotiquement stable), mais si $\dot{V}(x) > 0$ pour $x \neq x_0$ alors x_0 est instable.

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

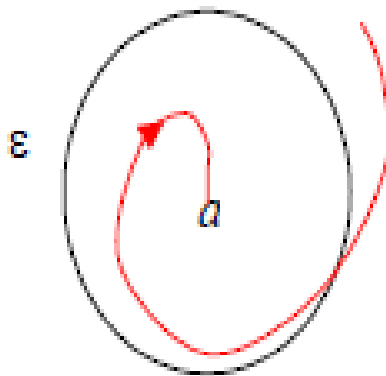


Figure 1.6 : Stabilité globale

Théorème de la variété centrale

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \quad (1.18)$$

un système dynamique non linéaire, x_0 son point d'équilibre qui on peut ramener à l'origine par le changement de variable :

$$\xi = x - x_0$$

et soit J la matrice jacobienne d'ordre n associé au système (1.18) après sa linéarisation au voisinage du point fixe (après avoir considéré une petite perturbation ξ au voisinage de point fixe).

$$\frac{d\xi}{dt} = J\xi$$

Soient :

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de la matrice jacobienne J dont la partie réelle est négative.

- u_1, u_2, \dots, u_i les valeurs propres de la matrice J dont la partie réelle est positive.

- s_1, s_2, \dots, s_c les valeurs propres dont la partie réelle est nulle, avec $s + i + c = n$.

Et soient :

E^s le sous espace vectoriel de dimension s engendré par $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

E^i le sous espace vectoriel de dimension i engendré par $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$.

E^c le sous espace vectoriel de dimension c engendré par $\{s_1, s_2, \dots, s_c\}$.

avec

$$E^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.4 *Il existe des variétés de classe C^r : stable W^s , instable W^i et centrale W^c tangentes respectivement à E^s , E^i , E^c en x_0 .*

Ces variétés sont invariantes, par rapport au flot de système (1.18).

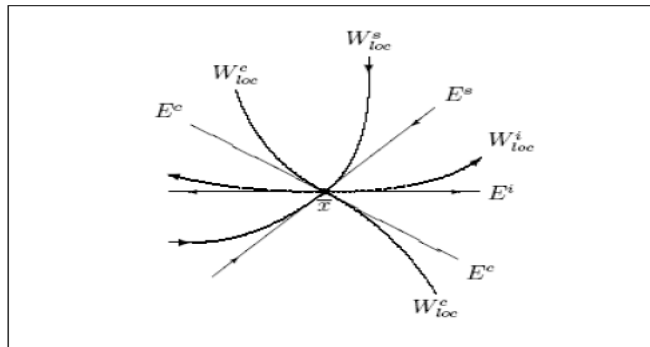


Figure 1.7 : Les sous-variétés invariantes autour de point d'équilibre \bar{x}

Variété centrale dépendant d'un paramètre

On applique une petite perturbation ε sur le système (1.18); donc le résultat sera un système dynamique dépendant d'un paramètre ε , et supposons que par une certaine transformation on peut ramener le système (1.18) à un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = A_2 y + g(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = A_3 z + m(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

La variété centrale au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ est alors donnée par :

$$y = h_1(x, \varepsilon), \quad z = h_2(x, \varepsilon)$$

Après un simple calcul, et après avoir appliqué le développement de Taylor sur h_1 et h_2 , on peut alors écrire le système (1.19) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + f(x, h_1(x, \varepsilon), h_2(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique du système (1.20) à celle du système (1.19) :

Théorème 1.3.5 *Si l'origine $x_0 = 0$ du système (1.20) est asymptotiquement stable (resp, instable), alors l'origine du système (1.19) est aussi asymptotiquement stable (resp, instable).*

1.3.7 Bifurcations

Dans la modélisation des systèmes (biologiques, physiques...) les incertitudes liées aux phénomènes sont toujours présentées dans un modèle mathématique (estimation des paramètres etc.). Un moyen de tester la robustesse du modèle face aux perturbations ainsi engendrées serait donc un outil puissant. Mais des perturbations de même amplitude peuvent être de plusieurs natures et leurs conséquences sur le système sont alors très différentes, et comme l'incertitude la plus importante porte sur les paramètres, nous allons nous restreindre aux modèles paramétrés :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in D \subset \mathbb{R}^p, \quad f \in C^r \quad (1.21)$$

Dans le cas de ces modèles, l'analyse de bifurcation est une méthode qui permet d'identifier des valeurs des paramètres pour lesquelles le comportement asymptotique du système change qualitativement (Valeurs de bifurcation). Elle permet donc bien de savoir si le système est consistant malgré les perturbations dues à l'incertitude sur l'estimation des paramètres (s'il n'y a pas de valeur de bifurcation dans la zone d'incertitude des paramètres) ou non (s'il existe au moins une valeur de bifurcation dans la zone d'incertitude des paramètres). Elle peut aussi apporter beaucoup d'autres renseignements sur le système.

Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre.

Stabilité structurelle

Définition 1.3.10 *Le système (1.21) est dit structurellement stable si et seulement s'il existe un voisinage V de μ tel que pour tout $\eta \in V$ le système (1.21) est topologiquement équivalent au système $\frac{dx}{dt} = f(x, \eta)$.*

Remarque 1.3.7 *Si un système structurellement stable admet un seul point d'équilibre a asymptotiquement stable hyperbolique, alors, tout système "voisin" admet aussi un seul point d'équilibre, proche de a , asymptotiquement stable et hyperbolique.*

Valeur de bifurcation et codimension

* Une valeur η du paramètre pour laquelle le système (1.21) n'est pas structurellement stable est appelée valeur de bifurcation.

* Si l'ensemble des valeurs de bifurcation est défini par k conditions

$$C_1(\mu) = C_2(\mu) = \dots = C_k(\mu) = 0 \text{ avec } 1 \leq k \leq p$$

La bifurcation est dite de codimension k (on peut dire que la codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation).

Bifurcation de codimension un

Nous présentons ici les quatre bifurcations de codimension un (nœud-col, transcritique, fourche et Hopf)

1. Bifurcation nœud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque μ franchit 0, un point d'équilibre stable (noeud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \tag{1.22}$$

qui s'appelle équation générique de bifurcation nœud-col. On a alors $f(x, \mu) = \mu - x^2$

* Si $\mu < 0$ l'équation $f(x, \mu) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

* Si $\mu > 0$ on a :

$$\mu - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\mu}.$$

Par conséquent (1.22) admet deux points fixes.

$\frac{df(x, \mu)}{dt} = -2x$ alors $\left. \frac{df(x, \mu)}{dt} \right|_{x=\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0$ et $\left. \frac{df(x, \mu)}{dt} \right|_{x=-\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0$
par suite :

Le point fixe $x = \sqrt{\mu}$ est stable, mais $x = -\sqrt{\mu}$ est instable.

*Si $\mu = 0$ le seul point fixe est $x = 0$, par intégration de (1.22) on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}$$

d'où le point $x = 0$ est semi-stable. (stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

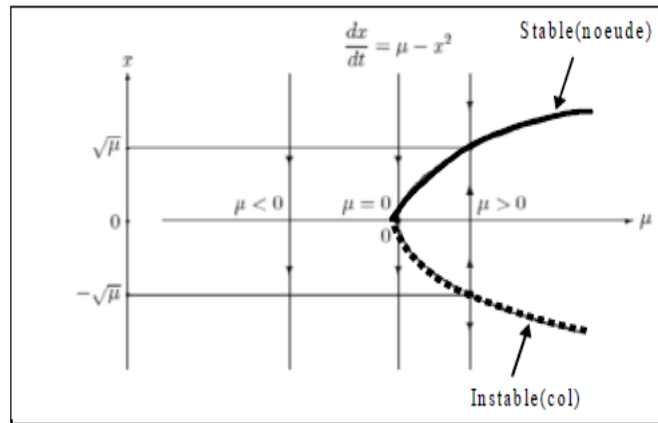


Figure 1.8 : Diagramme de bifurcation noeud-col

2. Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instables et vice versa) lorsque μ franchit 0.

Elle est souvent représentée par l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \tag{1.23}$$

qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique. On a alors :

$$\mu x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \mu.$$

Par conséquent (1.23) admet deux points fixes.

$$\frac{df(x, \mu)}{dt} = \mu - 2x \text{ alors } \left. \frac{df(x, \mu)}{dt} \right|_{x=0} = \mu \text{ et } \left. \frac{df(x, \mu)}{dt} \right|_{x=\mu} = -\mu \text{ par suite :}$$

*Si $\mu < 0$, le point fixe $x = 0$ est stable, mais $x = \mu$ est instable.

*Si $\mu > 0$, le point fixe $x = 0$ est instable, mais $x = \mu$ est stable.

On remarque un échange de stabilité en $\mu = 0$.

*Si $\mu = 0$ le seul point fixe est $x = 0$, par intégration de (1.22) on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}$$

d'où le point $x = 0$ est semi-stable. (stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$).

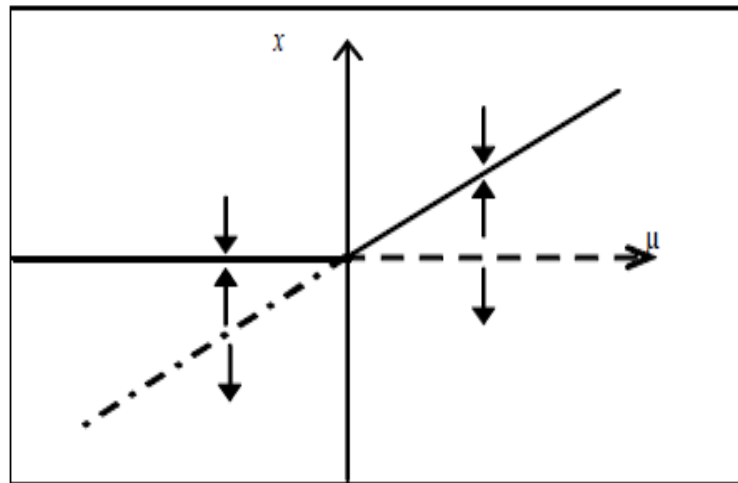


Figure 1.9 : Diagramme de bifurcation transcritique.

3. Bifurcation fourche (Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance d'une paire de points fixes.

L'équation générique d'une bifurcation fourche (sur-critique) est

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \quad (1.24)$$

et pour la sous-critique c'est

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3 \quad (1.25)$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a :

$$\mu x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = \mu.$$

Alors si $\mu < 0$ on a un seul point fixe $x = 0$.

Si $\mu > 0$ on a trois points fixes : $x = 0$, $x = \sqrt{\mu}$, $x = -\sqrt{\mu}$.

$$\frac{df(x, \mu)}{dt} = \mu - 3x^2 \text{ alors } \left. \frac{df(x, \mu)}{dt} \right|_{x=0} = \mu \text{ et } \left. \frac{df(x, \mu)}{dt} \right|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \text{ par suite:}$$

*Si $\mu < 0$, le seul point fixe stable est $x = 0$.

*Si $\mu > 0$, le point fixe $x = 0$ est instable, mais $x = \pm\sqrt{\mu}$ sont stables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes et dans la stabilité en $\mu = 0$.

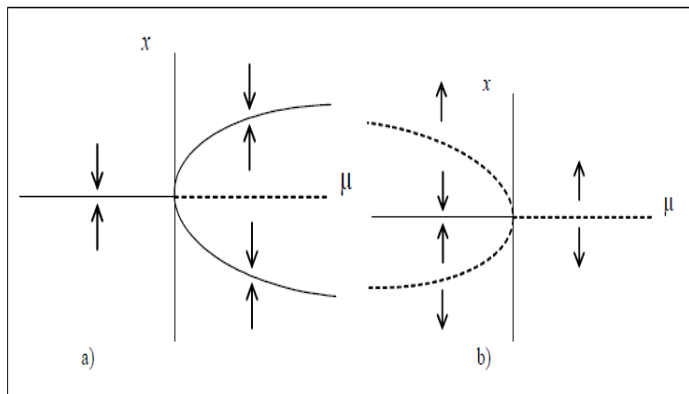


Figure 1.10 : Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sou-critique.

4. Bifurcation Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

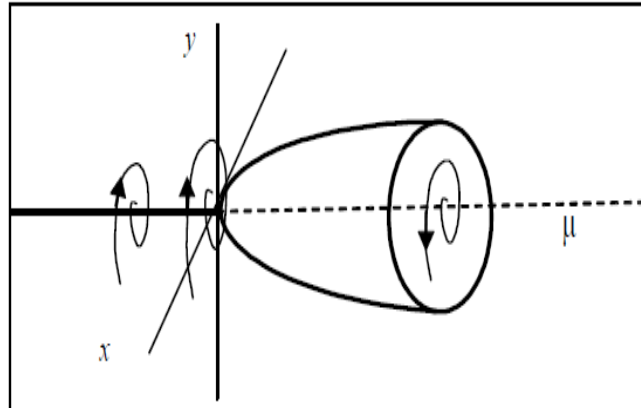


Figure 1.11 : Diagramme de bifurcation Hopf.

1.4 Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.4.1 Soit $f : D \rightarrow D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ une application continue (ou une transformation), f^k désigne la $k^{\text{ième}}$ itérée de f ; c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

Dans la pratique $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$ représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps 0, 1, 2, ... Ainsi la valeur de la quantité au temps $k + 1$ est en fonction de sa valeur au temps k . L'application f est appelée un système dynamique discret.

1.4.1 Orbites ou trajectoires

L'orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$O_+^f = \{f^k(x) / k \in \mathbb{N}\}$$

Si f est bijectif, on définit l'orbite de x par :

$$O^f = \{f^k(x) / k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$O_-^f = \{f^{-k}(x) / k \in \mathbb{N}\}$$

1.4.2 Points fixes

Définition 1.4.2 Un point $x \in D$ est un point fixe de f si :

$$f(x) = x$$

Si, de plus, la matrice jacobienne $Df(x)$ n'a pas de valeurs propres dont le module soit égal à un, x est un point fixe hyperbolique. Si tous les modules des valeurs propres de $Df(x)$ sont égaux à un, x est un point fixe elliptique.

1.4.3 Points périodiques et p-cycles

Définition 1.4.3 S'il existe $n \geq 1$, tel que $f^n(x) = x$, on dit que x est un point périodique. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que :

$$f^n(x) = x$$

Définition 1.4.4 Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :

$$f(x_i) = x_{i+1} \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, p-2 \text{ et } f(x_{p-1}) = x_0$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour f^p : $f^p(x_i) = x_i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ et n'est pas un point fixe pour f^k si $k < p$.

1.4.4 Etude de la stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

Les deux théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

Théorème 1.4.1 (de Brouwer) Toute application continue $f : \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$ avec $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$, admet un point fixe c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans \bar{B}^n .

Théorème 1.4.2 (de contraction de Banach) Soit $f : \bar{B}^2 \rightarrow \bar{B}^2$ application continue, \bar{B}^2 est le disque unitaire fermé; $\bar{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$.

Supposons que :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda |x_1 - x_2|$$

pour tout vecteur $x_{i,j} \in \bar{B}^2$ et un certain $0 < \lambda < 1$. Alors il existe un point fixe unique $\bar{x} \in \bar{B}^2$. De plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in \bar{B}^2$$

Stabilité du point fixe

* Un sous ensemble A de D est invariant par f si $f(A) = A$.

* Un sous ensemble compact fermé A de D est un attractif ou est attracteur si A est invariant par f ; et s'il existe un voisinage V de A tel que pour $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 est une suite qui converge vers A . Le voisinage V est appelé le **bassin d'attraction** de A et on a :

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(V)$$

*Le sous ensemble A est **répulsif** ou **instable** s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 s'éloigne de A (ou de façon équivalente : si A est un attracteur pour f^{-1}).

*Un attracteur A est fractal (ou un attracteur étrange) si l'orbite de x est dense dans A pour tout $x \in A$ et est sensible aux conditions initiales.

*L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif ou répulsif.

Définition 1.4.5 Un point fixe $\bar{x} \in D$ est stable, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \forall k \geq 0 : |x_k - \bar{x}| < \varepsilon$$

En dimension un, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ c'est la pente $m = f'(\bar{x})$ de la tangente au point fixe \bar{x} qui détermine le type de point fixe.

Théorème 1.4.3 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le point fixe est :

1-attractif (ou stable) si: $|m| < 1$.

2-répulsif (ou instable) si: $|m| > 1$.

3-indifférent si: $|m| = 1$.

4-super attractif (ou super stable) si: $m = 0$.

m s'appelle le multiplicateur de f au point \bar{x} .

Théorème 1.4.4 En dimension n , pour décider si un point fixe \bar{x} est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x) = J(x)$. Si toutes les valeurs propres de $Df(x)$ sont à l'intérieur du disque unité, \bar{x} est stable. Si une de ces valeurs propres a un module plus grand que un, \bar{x} est instable.

Stabilité des points périodiques

Une orbite périodique est un attracteur si chacun de ses points est un attracteur.

Comme les points périodiques d'ordre p sont des points fixes de f^p , alors le théorème suivant est une généralisation du théorème précédent :

Théorème 1.4.5 Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p : Si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable ; si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.

En dimension un, si $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est un cycle d'ordre p ; les dérivées $(f^p)'(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ sont égales. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$(f^p)'(x_0) = f'(f(\dots f(x_0))) \dots f'(f(x_0)) f'(x_0) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)$$

et comme $f(x_i) = x_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p-2$ et $f(x_{p-1}) = x_0$, on peut déduire que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées $(f^p)'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$:

$$m_p = (f^p)'(x_0) = \dots = (f^p)'(x_{p-1})$$

Cette valeur commune m_p est appelée le **multiplicateur** du cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$, cette dernière détermine le type du cycle.

Théorème 1.4.6 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est :

- 1-Attractif (ou stable) si $|m_p| < 1$.
- 2-Répulsif si $|m_p| > 1$.
- 3-Indifférent si $|m_p| = 1$.
- 4-Super-attractif (ou super stable) si $m_p = 0$.

1.4.5 Bifurcations

Ce type de système dynamique possède trois types de bifurcations à un paramètre : doublement de période, noeud-col, et Neimark-Sacker.

1- lorsque une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte le cercle unité à -1 , on a alors une bifurcation fourche (ou doublement de période, ou flip).

2- lorsque une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte le cercle unité à $+1$, on a alors une bifurcation noeud-col (ou tangente, ou pli).

3- lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(x)$ quittent le cercle unité simultanément à $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, on a alors une bifurcation de Neimark-Sacker.

1.4.6 La section de Poincaré

En mathématiques, dans la théorie des systèmes dynamiques, la **section de Poincaré** est l'intersection d'une trajectoire (périodique, quasi-périodique ou chaotique) dans l'espace d'au moins trois dimension, avec un hyperplan d'une dimension inférieure. Ainsi, nous observons le retour de la trajectoire vers l'hyperplan qui commence à un certain point de celle-ci l'ensemble des points marqués par la trajectoire sur l'hyperplan est appelé **plan de Poincaré**.

Considérons $x(x_0, t_0, t) = \varphi_t(x_0)$ une solution d'un système autonome $\dot{x} = f(x)$. On définit localement un hyperplan $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$, transversal au champs de vecteurs f en x_0 . On suppose maintenant un point x au voisinage $V \subseteq \Sigma$ de x_0 .

L'application de Poincaré $P : V \rightarrow \Sigma$ est alors défini par :

$$x_1 = P(x) = \varphi_\tau(x)$$

où $\tau = \tau(x)$ est le temps après lequel la trajectoire retourne et intersecte Σ pour la première fois.

L'hyperplan Σ s'appelle alors section de Poincaré. La section de Poincaré remplace le système dynamique en temps continu par un système en temps discret. C'est une visualisation par échantillonnage du système avec une paramétrisation qui doit être choisie convenablement pour accéder au maximum d'informations.

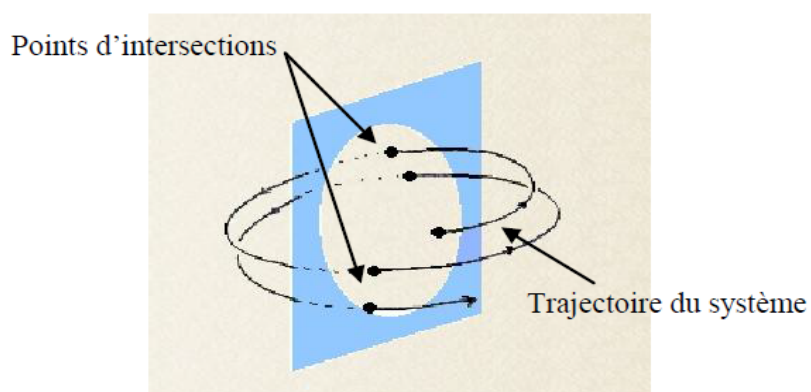


Figure 1.12 : La section de Poincaré

Chapitre 2

Théorie de chaos

2.1 Sémantique de la théorie du chaos

Le mot chaos n'a pas ici le même sens que l'usage dans la vie courante [19]. On retrouve trace de ce mot du grec Khaos dans les écrits de Christine de Pisan (Chemin de long estude) qui définit le chaos comme un

"état de confusion des éléments ayant précédé l'organisation du monde"

Au XVIème siècle Desportes, le décrit dans ses Elegies comme

"Toute sorte de confusion, de désordre"

Le chaos, dans son sens familier aujourd'hui, c'est le désordre et la violence, mais aussi l'intelligibilité.

Loin de ces considérations historiques et mythologiques, Chaos : un terme souvent utilisé comme métaphore du désordre. Et la théorie du Chaos a vu le jour dans les travaux d'Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle et c'est dans les années soixante qu'elle fut redécouverte après la publication d'un article qui allait révolutionner le monde des sciences [22]. Le chaos est devenu un champ d'exploration de la science.

2.2 Chaos déterministe

On dit qu'un système est chaotique lorsque son évolution dans le temps est très sensible aux conditions initiales que l'on ne peut prédire exactement dans quel état il va se trouver si l'on attend trop longtemps.

L'atmosphère terrestre est un exemple quotidien, c'est parce que sa dynamique est chaotique que les météorologues ont tant de mal à faire des prévisions convenables au delà d'une petite semaine, même si l'on connaissait parfaitement les équations qui gouvernent l'atmosphère - ce qui est loin d'être le cas.

Dans des systèmes réguliers (non chaotiques) une petite erreur n'a que peu d'influence sur le mouvement alors qu'au contraire dans les systèmes chaotiques, par définition, une petite cause peut avoir de grands effets.

Typiquement dans un système régulier deux trajectoires séparées initialement d'une petite distance dx_0 seront séparées au bout d'une durée t de $dx = ktdx_0$ où k est une constante de proportionnalité dépendant du système, c'est à dire que les trajectoires se séparent de manière proportionnelle au temps (voir partie gauche du figure 2.1).

En revanche dans un système chaotique on aura $dx = dx_0 e^{\frac{t}{T}}$, la constante T étant positive et la séparation des trajectoires sera beaucoup plus rapide que dans le cas des systèmes réguliers même si dx_0 est petit dx croît de façon exponentielle et les prédictions deviennent vite impossibles au bout de quelques T . (voir partie droite du figure 2.1)

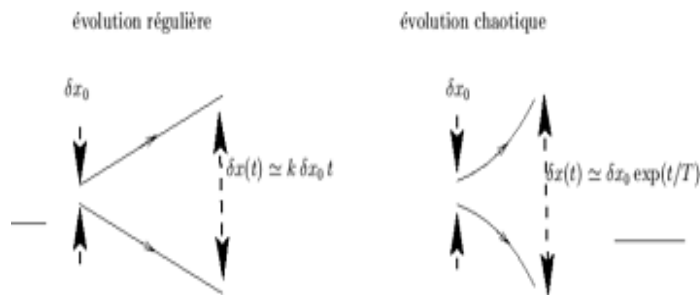


Figure 2.1 : Sensibilité aux conditions initiales.

La théorie du chaos selon Keller [16] est « l'étude qualitative du comportement aperiodique instable d'un système dynamique déterministe ». qui admet le manque d'une définition générale d'un système dynamique chaotique considère qu'un tel système possède les propriétés suivantes:

2.3 Propriétés du chaos

Les phénomènes chaotiques ne sont pas aléatoires, mais au contraire ils obéissent à des lois déterministes, parfois assez simples dans leur représentation mathématique. Les phénomènes traités par les lois du chaos se caractérisent par des propriétés génériques fondamentales, en plus de **la sensibilité aux conditions initiales** (c-à-d pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement), on peut citer les caractérisations suivantes :

2.3.1 La non-linéarité

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perd ses propriétés.

Mais un système non-linéaire, n'est pas en général soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

2.3.2 La structure fractale

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface).

2.3.3 L'attracteur étrange

Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale et non entière; sa trajectoire est complexe; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant " t " voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré " vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur [32].

Une " définition " d'un attracteur étrange peut être formulée :

Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

* **Attraction:** U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U ; est entièrement contenue dans U : De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

* **Sensibilité:** les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

* **Fractal:** A est un objet fractal.

***Mélange:** Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

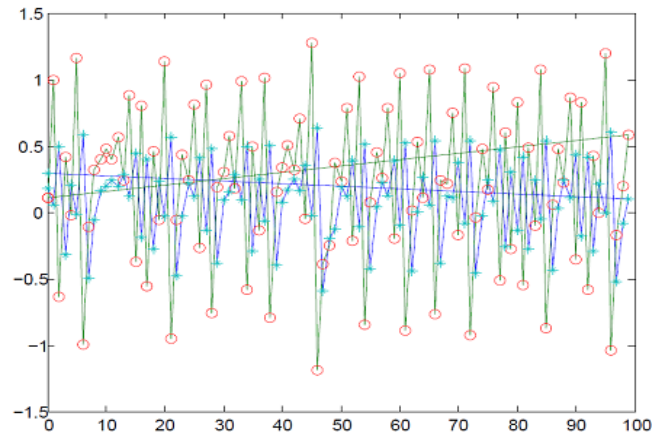


Figure 2.2 : Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique.

2.4 Scénarios de transition vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe plusieurs types d'évolution possibles d'un système dynamique régulier vers le chaos. Supposons que la dynamique étudiée dépend d'un paramètre de contrôle. Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique.

On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos [24], [12] :

1-Le doublement de période

Ce scénario de transition vers le chaos est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

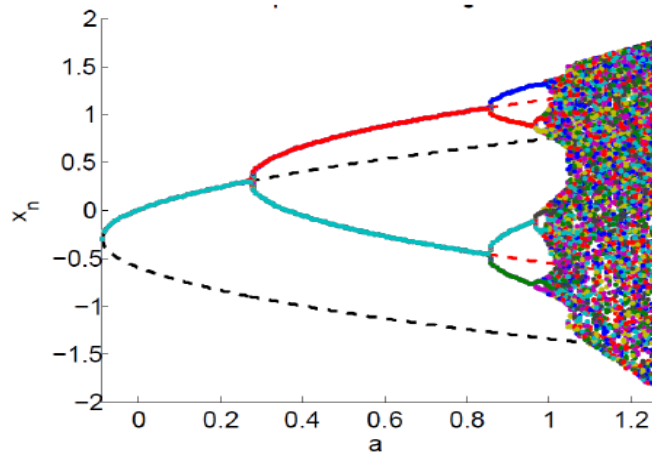


Figure 2.3 : Cascade de doublements de période

2-L'intermittence vers le chaos

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise de nouveau ensuite, pour donner lieu à une nouvelle "bouffée" plus tard. On a constaté que la fréquence et la durée des phases chaotiques avaient tendance à s'accroître plus on s'éloignait de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition. L'intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l'état périodique d'où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu'il n'y ait pas d'attracteur à proximité. C'est ce que l'on observe dans le système de Rössler.

3-La quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens (1971) illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963). Ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermo-hydrodynamique - convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte - et en chimie - réaction de Bélousov-Zabotinsky - entre autres. cette route vers le chaos résulte de la "concurrence" de différentes fréquences dans le système dynamique.

Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas, les trajectoires couvrent la superficie d'un tore. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

2.5 Exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisée pour déterminer si un système est chaotique ou non.

1-Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_n sur x_{n+1} .

Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel que après n itérations on a :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \simeq \varepsilon e^{n\lambda} \text{ d'où } n\lambda \simeq \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\simeq \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} \simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{d(x_{n-1})} \frac{df(x_{n-2})}{d(x_{n-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{d(x_i)} \right| \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \tag{2.1}$$

avec la notation $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{d(x_i)}$, λ est appelé exposant de Lyapunov; il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

2-Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système m -dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe.

Tout d'abord nous devons calculer les λ_i . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\simeq \frac{df^n(x_0)}{dx_0} (x_0 - x'_0) \\ &\simeq J(x_0) J(x_1) \dots J(x_n) (x_0 - x'_0) \\ &\simeq \prod_{i=0}^n J(x_i) (x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=0}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \simeq J^n(x_0) (x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$ denote la matrice jacobienne de $f^n(x_0)$ au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^t = P_n^{-1} J^n P_n$, D_m^t est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0))$, $i = 1, \dots, m$ de J^n .

On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

Pour le point d'équilibre x^* la formule (2.2) devient

$$\lambda_i = \ln |u_i(x^*)|, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

3- Cas d'une application continue multidimensionnelle

Pour un système différentiel de dimension n défini par f tel que :

$$x' = f(x(t)) \quad \text{tel que : } t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

L'exposant de Lyapunov dans la direction i est donné par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|x_i(t) - x_i^*(t)\|}{\|x_i(0) - x_i^*(0)\|}. \quad (2.4)$$

Différents algorithmes ont été développés pour calculer les exposants de Lyapunov, l'un des algorithmes utilisé pour le calcul est celui appelé algorithme de Wolf. Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont :

1. Changement du paramètre de contrôle,
2. Choix aléatoire d'une condition initiale,
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une perturbation,
4. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires,
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence,

6. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné,
7. Retour au point (1),
8. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

2.5.1 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Les différents types d'attracteurs d'un système de dimension n en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représentés dans le tableau ci-dessous.

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Cycle	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \dots \geq \lambda_n$
Attracteur étrange	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

Tableau 2.1 : Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

2.5.2 Utilisation des exposants de Lyapunov au calcul de dimension de l'attracteur

Le terme de dimension est souvent implicitement associé à celui de coordonnée, c'est à dire de variable nécessaire pour décrire la position d'un élément d'un ensemble. La dimension par définition est un nombre entier.

- le point est une attracteur de dimension 0.
- la dimension d'une courbe fermé ou une ligne est 1.

Il ya un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

(a) Dimension de Mori.

Soit m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\bar{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs. La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right)$$

(b) Dimension de Kaplan et Yorke.

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

La dimension de Kaplan et Yorke est donnée par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Il existe aussi d'autres dimensions fractales comme la dimension de Lyapunov, la dimension de Hausdorff, la dimension de corrélation. Tous ces dimensions sont très proches les unes des autres et satisferont les propriétés suivantes :

- 1- Si $A \subset B$ alors $d(A) < d(B)$ ($d(\cdot)$ dimension fractale).
- 2- Si $A = \emptyset$ alors $d(A) = 0$.
- 3- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.
- 4- Si f est une application différentiable sur A alors $d(A) = d(f(A))$.

Chapitre 3

Systèmes hyperchaotiques

3.1 Introduction

Le comportement hyperchaotique a été étudié dans différentes applications telles que : l'oscillateur de Colpitts [4], les circuits non-linéaires [15]-[41], les systèmes de communications et la synchronisation [13]-[37]. Pour cela, la génération de ce comportement dynamique complexe devient un sujet de recherche très important.

Le comportement hyperchaotique a été découvert pour la première fois par **Rössler** en 1979 [31] par une boucle de retour appliquée sur son système original. Cette découverte a ouvert un autre horizon de recherche dans la théorie du chaos.

Durant les dernières années, les systèmes hyperchaotiques ont été beaucoup plus utilisés pour le cryptage des données dans les communications sécurisées. Dans la communication chaotique sécurisée, le signal chaotique est utilisé pour masquer les messages à transmettre. **Perez** et **Cerderia** [26] ont prouvés que le masquage des messages par un système chaotique normal (possédant un seul exposant de Lyapunov positif) n'est pas toujours efficace. Puis **Perocha** a montré qu'on peut résoudre ce problème en utilisant un système hyperchaotique de dimension élevée (système avec plusieurs exposants de Lyapunov positifs).

Définition 3.1.1 *Un attracteur hyperchaotique est généralement défini, comme étant un comportement chaotique avec au moins deux exposants de Lyapunov positifs, combiné avec un exposant nul le long de l'écoulement et un exposant négatif pour garantir la reliée de la solution. La dimension minimale d'un système hyperchaotique (continu autonome) est quatre [38].*

Le comportement dynamique des systèmes hyperchaotiques va donc être très compliqué, c'est pour cela que ces systèmes offrent plus de sécurité dans la communication chaotique.

3.2 Premier système hyperchaotique

Le premier système hyperchaotique à 4 dimensions a été proposé en 1979 par Rössler. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x' = -(y + z) \\ y' = x + ay + w \\ z' = b + xz \\ w' = -cz + dw \end{cases}$$

Le système suit un comportement hyperchaotique (Figure 3.1), quand les paramètres a , b , c et d prennent les valeurs suivantes : $a = 0.25$, $b = 3$, $c = 0.5$ et $d = 0.05$.

Les conditions initiales peuvent prendre les valeurs suivantes : $x_0 = -10$, $y_0 = -6$, $z_0 = 0$, $w_0 = 10.0$.

Les quatre exposants de Lyapunov correspondants sont : $\lambda_1 = 0.112$, $\lambda_2 = 0.019$, $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = -25.118$.

On constate bien que ce système répond aux conditions de passage du chaos vers l'hyperchaos déjà prédéfinies.

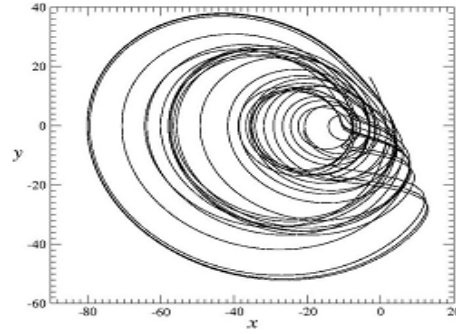


Figure 3.1 : Attracteur hyperchaotique
4D de Rössler.

Le caractère hyperchaotique de ce comportement n'est pas si évident à partir de cette projection d'avion, qui ressemble un peu à un attracteur chaotique "bruyant" [38].

3.3 Modèle 9D pour une transition chaos-hyperchaos

Un modèle de 9 dimensions, pour une convection Rayleigh-Bénard dans une cellule carrée a été proposé par Reiterer en 1998. Il est défini ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_1 = -\sigma b_1 C_1 - C_2 C_4 + b_4 C_4^2 + b_3 C_3 C_5 - \sigma b_2 C_7 \\ \dot{C}_2 = -\sigma C_2 + C_1 C_4 - C_2 C_5 + C_4 C_5 - \sigma C_9 / 2 \\ \dot{C}_3 = -\sigma b_1 C_3 + C_2 C_4 - b_4 C_2^2 - b_3 C_1 C_5 - \sigma b_2 C_8 \\ \dot{C}_4 = -\sigma C_4 - C_2 C_3 - C_2 C_5 + C_4 C_5 + \sigma C_9 / 2 \\ \dot{C}_5 = -\sigma b_5 C_5 + C_2^2 / 2 - C_4^2 / 2 \\ \dot{C}_6 = -b_6 C_6 + C_2 C_9 - C_4 C_9 \\ \dot{C}_7 = -b_1 C_7 - RC_1 + 2C_5 C_8 - C_4 C_9 \\ \dot{C}_8 = -b_1 C_8 + RC_3 - 2C_5 C_7 + C_2 C_9 \\ \dot{C}_9 = -C_9 - RC_2 + RC_4 - 2C_2 C_6 + 2C_4 C_6 + C_4 C_7 - C_2 C_8 \end{array} \right.$$

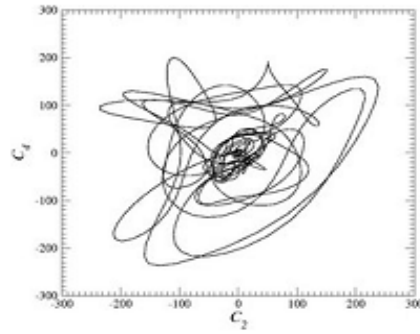


Figure 3.2 : Comportement hyperchaotique 9D.

Où :

Les paramètres constants b_i sont une mesure de la géométrie de la cellule carrée, définie par :

$$b_1 = 4 \frac{1+a^2}{1+2a^2}, b_2 = 4 \frac{1+2a^2}{2(1+a^2)}, b_3 = 2 \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

$$b_4 = \frac{a^2}{1+a^2}, b_5 = \frac{8a^2}{1+2a^2}, b_6 = \frac{4}{1+2a^2} \text{ et } R = 43.3.$$

Dans les études précédentes, ce système a fait l'objet d'une enquête avec $a = 0.25$ pour laquelle la route vers le chaos est une cascade doublant la période. La transition du chaos à l'hyperchaos (Figure 3.2) est observée autour de $R = 43.3$, où un deuxième exposant de Lyapunov devient positif (voir l'évolution du spectre de Lyapunov montré dans la Figure 3.3).

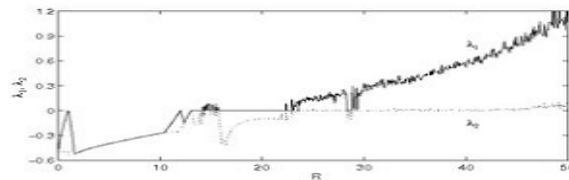


Figure 3.3 : Evolution des deux premiers exposants de Lyapunov les plus grands contre la valeur R.

Le deuxième exposant de Lyapunov devient positif pour R environ 43.3 suggestion d'une transition lisse de chaotique au comportement hyperchaotique.

3.4 Comportements hyperchaotiques expérimentaux

Très peu de comportements hyperchaotiques expérimentaux ont été identifiés à ce jour. Comme les systèmes hyperchaotiques (continus) sont minimum de quatre dimensions nécessairement, l'effet de la fonction de mesure $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ devient de plus en plus critique que pour les systèmes chaotiques tridimensionnel (continu chaotique).

En particulier, quand l'exposant positif de Lyapunov λ_1 est suffisamment plus grand que le deuxième exposant positif λ_2 , il y a deux différentes échelles de temps dans la dynamique hyperchaotique. En conséquence, il devient tout à fait difficile de reconstruire d'une façon adéquate le signal du départ.

Ainsi, seulement peu de comportements hyperchaotiques expérimentaux ont été identifiés. L'occurrence du comportement hyperchaotique a été trouvée dans un circuit électronique (Matsumoto et Al, 1986), le laser de NMR (le Perron et Al, 1988), dans un système de semi-conducteur (le Perron et Al, 1989) et dans un système de réaction chimique (Eiswirth et Al, 1992). Dans le modèle 9D, la notabilité est de façon significative réduite dans le régime hyperchaotique quand le premier exposant positif de Lyapunov est plus grand que le deuxième exposant de Lyapunov positif [38].

3.5 Hyperchaotification de quelques systèmes chaotiques continus

Pour générer un comportement hyperchaotique à partir d'un système chaotique, il faut satisfaire les deux conditions suivantes [34] :

- 1) La dimension du système doit être supérieure ou égale à 4.
- 2) Le système doit avoir au moins deux exposants de Lyapunov positifs et la somme de tout les exposants doit être négative.

3.5.1 Système hyperchaotique de Lü

Le système de Lü est décrit par [6] :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = -xz + cy \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

où a, b, c sont des constantes réelles. Quand $a = 36, b = 3, c = 20$, le système (3.1) présente un comportement complètement chaotique avec les exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 1.5046, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -22.5044$ et la dimension de Lyapunov $d_L = 2.0669$.

Pour faire l'hyperchaotification du système de Lü, en se basant sur les deux conditions précédentes, un feedback contrôleur est introduit de la manière suivante [7]:

$$\begin{cases} x' = a(y - x) + u \\ y' = -xz + cy \\ z' = xy - bz \\ u' = xz + du \end{cases} \quad (3.2)$$

Où a, b, c sont les constantes du système de Lü et d est le paramètre du contrôle. Ci-après, pour simplifier, le système (3.2) est appelé système hyperchaotique de Lü.

Comportement dynamique de système hyperchaotique de Lü

Cette section étudie le comportement dynamique de système hyperchaotique de Lü, y compris les points d'équilibre, le diagramme de bifurcation, les exposants de Lyapunov et la section de Poincaré.

1- Points d'équilibre

Si $c - ad \neq 0$, le système hyperchaotique de Lü possède trois points fixes :

$$\left\{ O(0, 0, 0, 0), P_1 \left(\sqrt{bc}, -\frac{ad\sqrt{bc}}{c - ad}, -\frac{acd}{c - ad}, \frac{ac\sqrt{bc}}{c - ad} \right), P_2 \left(-\sqrt{bc}, \frac{ad\sqrt{bc}}{c - ad}, -\frac{acd}{c - ad}, -\frac{ac\sqrt{bc}}{c - ad} \right) \right\}$$

La jacobienne du système (3.2) s'écrit

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ -z & c & -x & 0 \\ y & x & -b & 0 \\ z & 0 & x & d \end{bmatrix}$$

Et la linéarisation du système autour du point O nous donne :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont calculées par :

$$\det(\lambda I - J) = (\lambda + a)(\lambda - c)(\lambda + b)(\lambda - d) = 0$$

Les valeurs propres sont donc en fonction des paramètres du système (a, b, c) et du paramètre de contrôle d , donc les valeurs propres du système varie avec la variation du paramètre de contrôle. Alors, avec ce paramètre on peut choisir des valeurs propres à partie réelle positive ou négative (ce qui signifie la stabilité ou l'instabilité du système).

2-Diagramme de bifurcation

Pour analyser la dynamique du système hyperchaotique on fait varier d dans l'intervalle $[-1.5, 1.3]$ puis on trace le diagramme de bifurcation représenté dans la figure suivante :

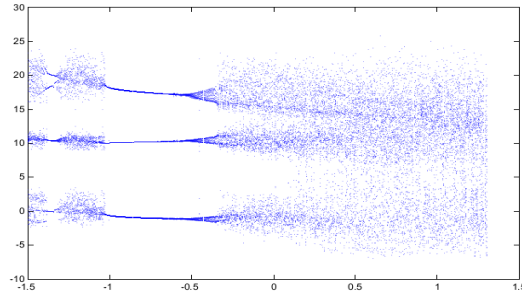


Figure 3.4 : Diagramme de bifurcation du système hyperchaotique de Lü.

Selon la figure (3.4), il est très clair que les comportements dynamiques de système (3.2) évoluent d'un état chaotique vers un état stable (orbite périodique), et ensuite de l'orbite périodique vers l'état hyperchaotique en passant par une région chaotique avec l'augmentation du paramètre de contrôle d . En détail, il ya quatre régions différentes :

$$I_1 = [-1.5, -1.03], I_2 = [-1.03, -0.46], I_3 = (-0.46, -0.35], I_4 = (-0.35, 1.3]$$

I_1, I_3 sont des régions chaotiques et il existe une fenêtre périodique dans le region I_1 . I_2 est une région périodique et I_4 est une région hyperchaotique.

3-Les exposants de Lyapunov

Pour justifier les différents comportements dynamiques obtenus par le diagramme de bifurcation, il faut calculer les exposants de Lyapunov. Pour cela, on fait appel à l'algorithme de Wolf [36].

Les résultats de calcul des quatre exposants pour différent valeurs de d , sont représentés dans la figure (3.5) et le tableau (3.1).

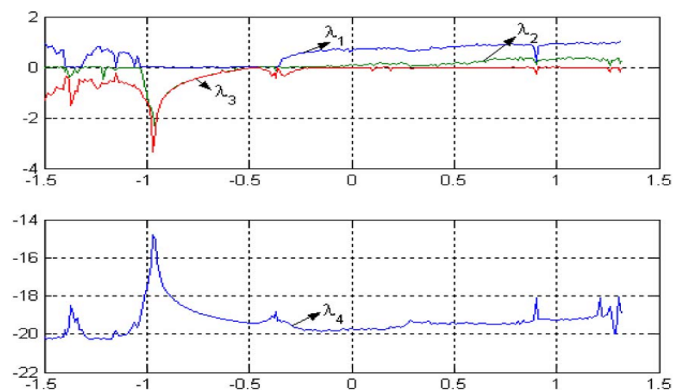


Figure 3.5 : Exposants de Lyapunov du système hyperchaotique de Lü.

La figure (3.5) représente le spectre des exposants de Lyapunov de système (2) avec l'augmentation du paramètre d où $a = 36, b = 3, c = 20$.

d	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$	comportement
-1.2	0.6867	0.0066	-0.6164	-20.1643	-20.0874	chaotique
-0.5	0.0093	-0.0367	-0.0529	-19.3603	-19.4406	périodique
-0.4	0.0119	0.0035	-0.2186	-19.1446	-19.3478	chaotique
1.3	0.9533	0.2135	-0.0277	-18.8076	-17.6685	hyper chaotique

Tableau 3.1

D'après les résultats représentés dans le tableau (3.1), on remarque que :

Pour $d = -0.5$: le plus grand exposant du système est pratiquement nul, donc le système est stable sur un cycle limite (Fig 3.6 (a)).

Pour $d = -0.4$: le système (3.2) possède un seul exposant positif, le système cette fois se trouve donc dans un état chaotique (Fig 3.6 (b)).

Pour $d = 1.3$: on remarque que le système possède dans ce cas deux exposants positifs qui sont suffisants, pour conduire le système vers un état hyper chaotique (Fig 3.6 (c)).

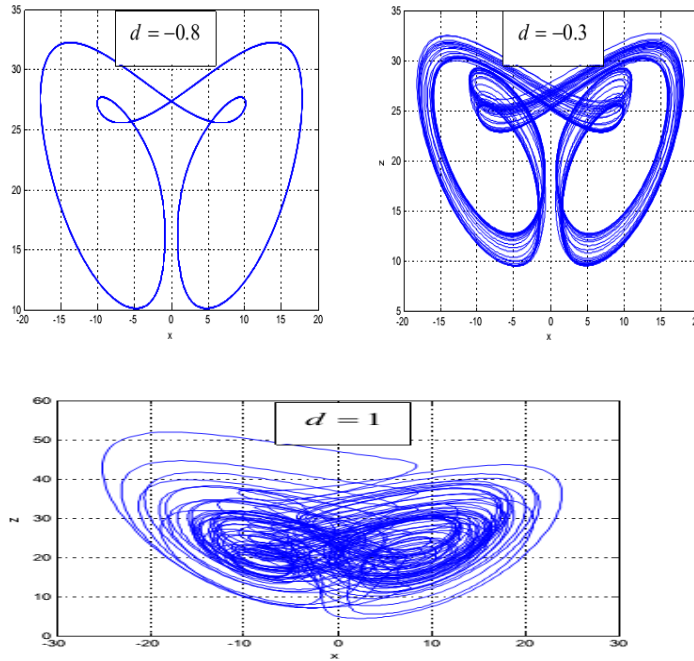


Figure 3.6 : Comportements dynamiques typiques de système hyperchaotique de Lü.

La figure suivante représente les attracteurs hyperchaotiques dans différents plans de phase.

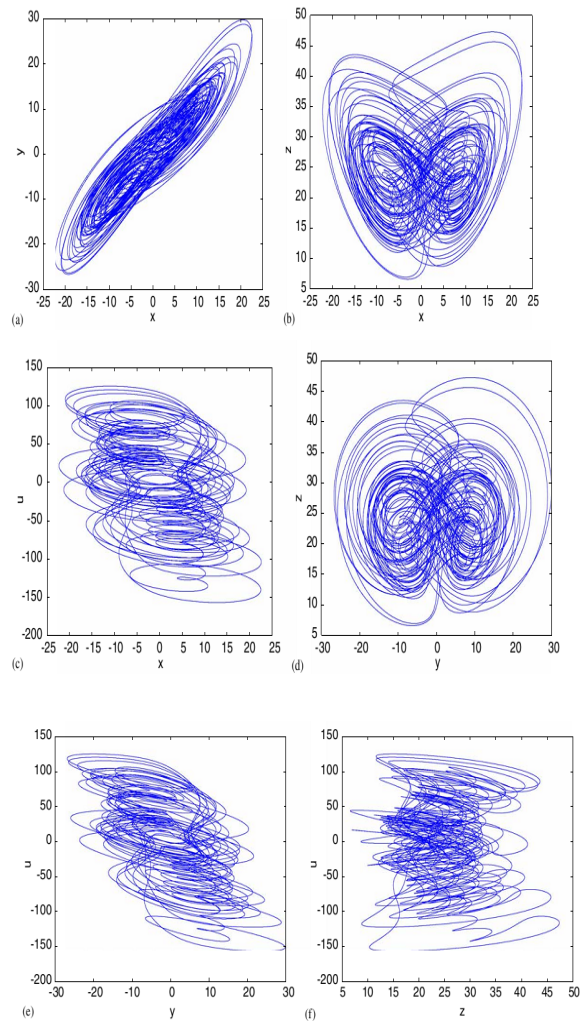


Figure 3.7 : Portraits de phase de système hyperchaotique de Lü : a) x-y, b) x-z, c) x-u, d) y-z, e) y-u, f) z-u

4-Section de poincaré

La figure (3.8) représente la section de poincaré du système hyperchaotique de Lü dans le plan $(y - z)$, où $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$, $d = 1.3$.

D'après la figure (3.8), le système (3.2) a une structure auto-similaire et plusieurs feuilles d'attracteurs sont visualisées. Il est clair que certaines feuilles sont pliées.

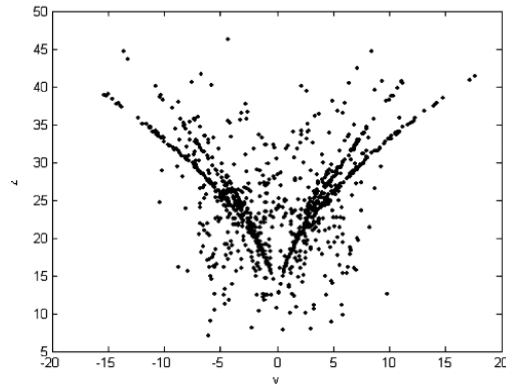


Figure 3.8 : Section de Poincaré du système hyperchaotique pour $d=1.3$

3.5.2 Système hyperchaotique de Lorenz

Le système de Lorenz est décrit par [3] :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (3.3)$$

où σ , b , r sont des constantes réelles. Quand $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$, le système (3.3) a un attracteur chaotique avec les exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.86$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -14.52$.

Afin de générer le comportement hyperchaotique du système de Lorenz, un feedback contrôleur u est appliqué de la façon suivante [14] :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) + u \\ y' = -xz + rx - y \\ z' = xy - bz \\ u' = -xz + du \end{cases} \quad (3.4)$$

Où σ , b , r sont les constantes du système de Lorenz et d est le paramètre du contrôle.

Comportement dynamique de système hyperchaotique de Lorenz

1- Points d'équilibre

Il est évident que le point $O(0, 0, 0, 0)$ est un point fixe. Donc dans notre étude on s'intéresse seulement au point O .

La matrice jacobienne du système hyperchaotique est décrite par :

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 1 \\ r - z & -1 & -x & 0 \\ y & x & -b & 0 \\ -z & 0 & -x & d \end{bmatrix}$$

Autour du point O , cette matrice devient égale à

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 1 \\ r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ -z & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont calculées en résolvant :

$$\det(\lambda I - J) = (\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + b)(\lambda - d) - \sigma r(\lambda + b)(\lambda - d) = 0$$

Les valeurs propres sont en fonction des paramètres du système (σ, b, r) , et du paramètre du contrôle d .

2-Diagramme de bifurcation

Pour identifier les différentes zones de stabilité, on fait appel au diagramme de bifurcation qui va nous permettre de voir l'influence du paramètre de contrôle d dans l'intervalle $[0.2, 1.3]$ sur la stabilité du système.

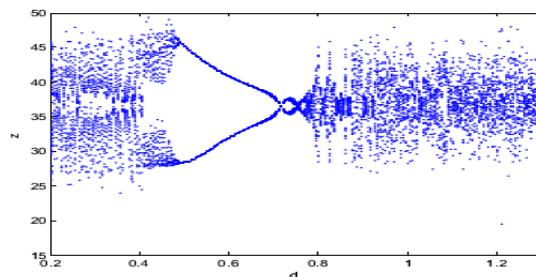


Figure 3.9 : Diagramme de bifurcation du système hyperchaotique de Lorenz.

D'après la figure (3.9), on trouve que :

Pour $d < 0.49$: le système est défini dans une zone chaotique.

Pour d dans l'intervalle $[0.49, 0.75]$: le système chaotique peut être stabilisé sur une orbite périodique de deux cycles.

Pour $d > 0.75$: le système va perdre sa stabilité et rentre de nouveau dans une zone chaotique, pour devenir à la limite hyperchaotique.

3-Les exposants de Lyapunov

Pour justifier l'apparition de l'état hyperchaotique, on doit calculer les exposants de Lyapunov du système hyperchaotique.

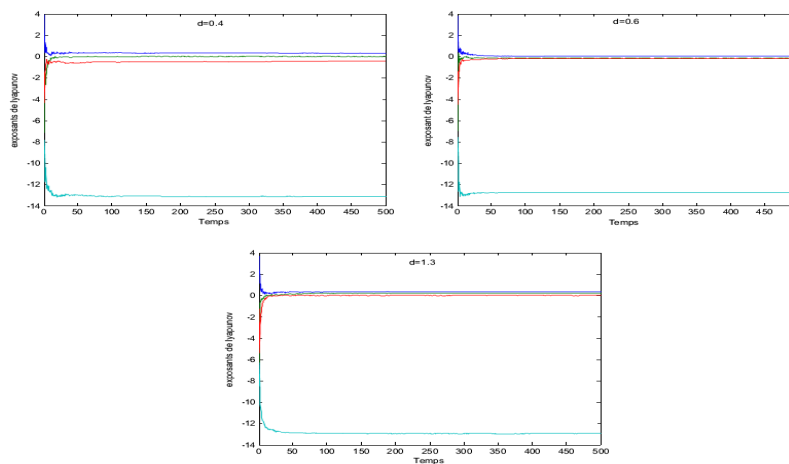


Figure 3.10 : Exposants de Lyapunov du système hyperchaotique de Lorenz.

d	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$	comportement
0.4	0.3034	0.0009	-0.4456	-13.1269	-13.2682	chaotique
0.6	0.0047	-0.1553	-0.1669	-12.7468	-13.0643	périodique
1.3	0.3570	0.2144	0.0016	-12.9377	-12.3647	hyper chaotique

Tableau 3.2

D'après les résultats représentés dans le tableau (3.2), on remarque que :

Pour $d = 0.4$: le système (3) possède un seul exposant positif, le système se trouve donc dans un état chaotique. (Fig 3.11(a)).

Pour $d = 0.6$: le plus grand exposant du système est nul, ce qui illustre la stabilisation sur une orbite de deux cycles. (Fig 3.11(b)).

Pour $d = 1.3$: le système possède deux exposants positifs $\lambda_1 = 0.3570$, $\lambda_2 = 0.2144$. Un système de dimension 4 avec deux exposants positifs est une condition suffisante pour affirmer que le comportement obtenu dans ce cas est un comportement hyperchaotique. (Fig 3.11(c)).

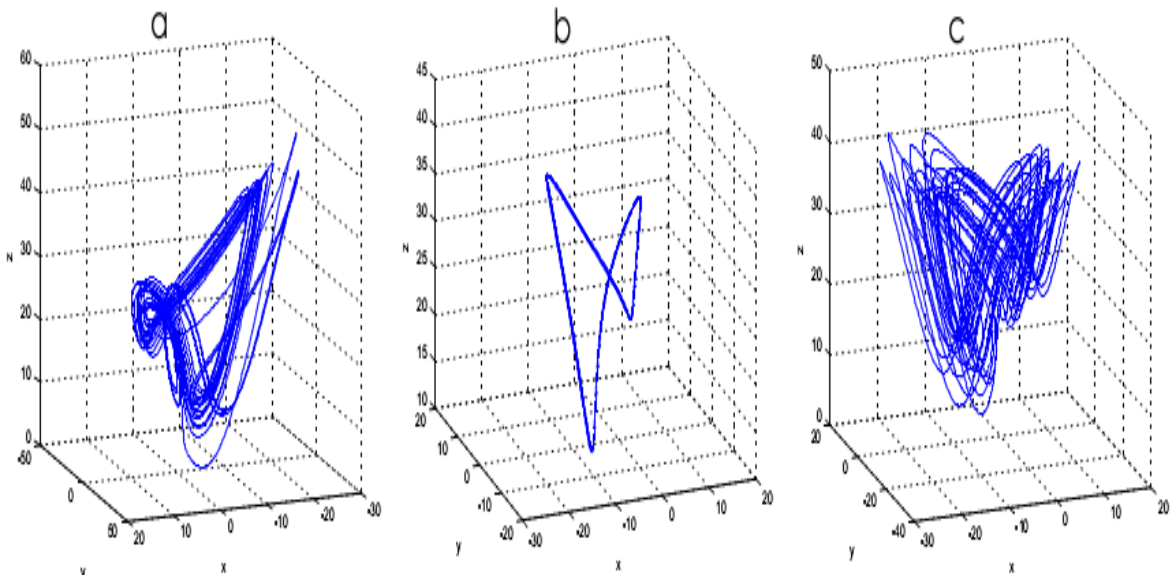


Figure 3.11 : Attracteurs du système 4 dimension pour : a) $d=0.4$, b) $d=0.6$, c) $d=1.3$

La figure suivante représente les attracteurs hyperchaotiques dans différents plans de phase.

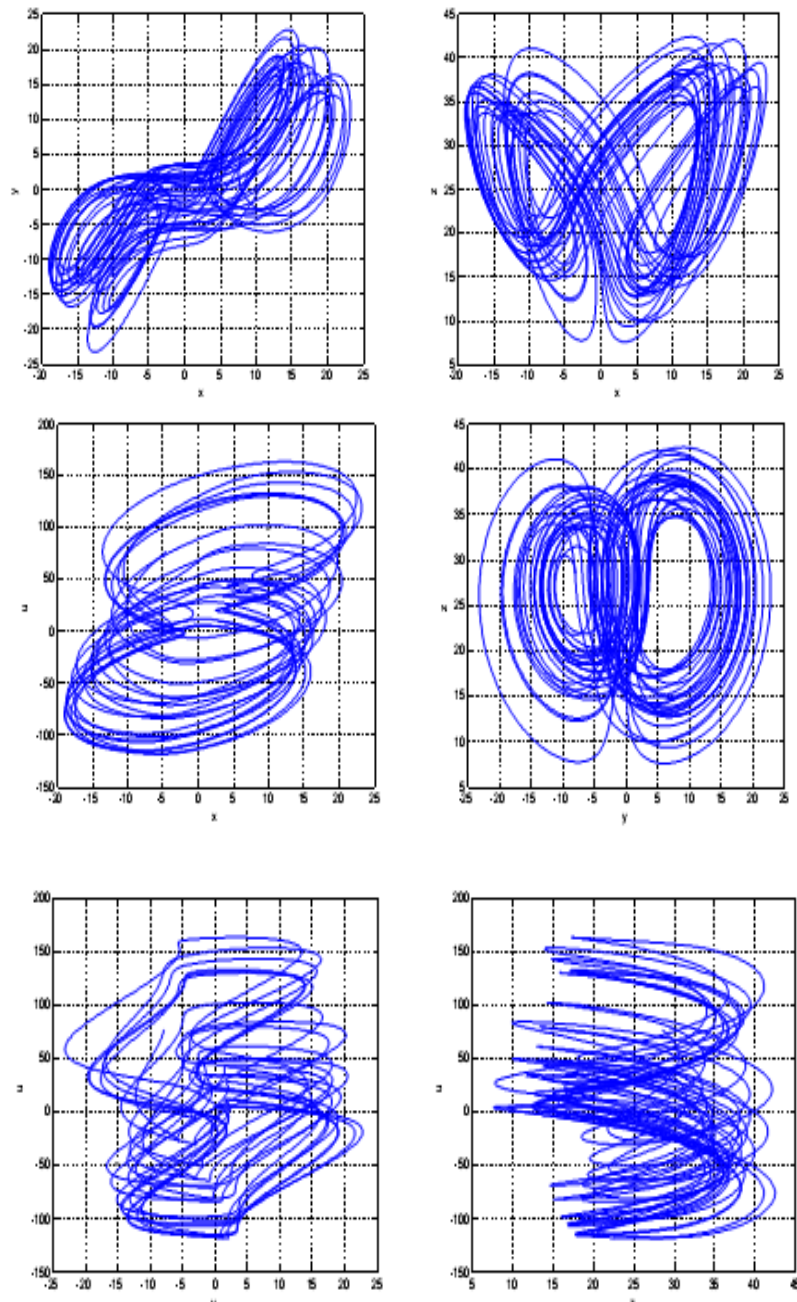


Figure 3.12 : Portraits de phase de système hyperchaotique de Lorenz : a) x-y, b) x-z, c) x-u, d) y-z, e) y-u, f) z-u

4-Section de Poincaré

Pour l'attracteur hyperchaotique on observe l'apparition de plusieurs branches supplémentaires qui n'existent pas dans l'attracteur chaotique. L'apparition de ces branches

prouve que les systèmes hyperchaotiques ont un comportement plus compliqué par rapport aux systèmes chaotiques normaux. Pour mieux voir la différence, on fait appel à la section de Poincaré, la figure (3.13) représente les sections de Poincaré du système dans son état chaotique et hyperchaotique.

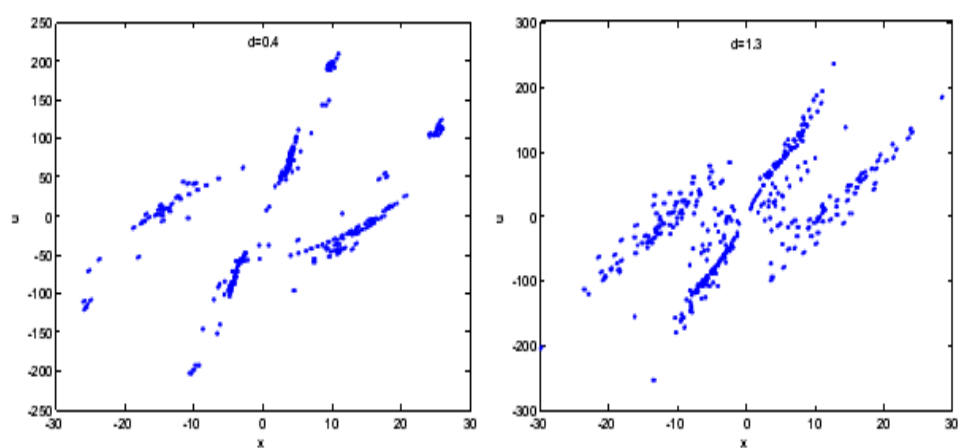


Figure 3.13 : Section de Poincaré pour $d=0.4$ et $d=1.3$

Chapitre 4

Estimation des bornes pour le système quadratique généralisé de dimension quatre

4.1 Introduction

Les systèmes chaotiques bornés et l'estimation de leurs bornes jouent un grand rôle dans la théorie du contrôle du chaos, la synchronisation du chaos, et leurs applications. D'autre part, les concepts de la borne extrême et l'ensemble d'attraction d'un système chaotique servent comme des excellents outils pour l'analyse du comportement qualitatif de ce système. En effet, si nous pouvons montrer qu'un système chaotique a un ensemble globalement attractif, alors nous savons que le système ne peut pas avoir des points d'équilibre, des solutions périodiques, des solutions quasi-périodiques, ou d'autres attracteurs chaotiques en dehors de cet ensemble. Cela simplifie l'analyse des propriétés dynamiques du système chaotique.

Techniquement, l'estimation de la borne supérieure d'un système chaotique est assez difficile à réaliser. Malgré cette difficulté, la bornitude des systèmes dynamiques à

temps continu, en particulier des systèmes quadratique 3-D a été l'objet de nombreux travaux.

Au cours des dernières années, l'étude et l'estimation de bornes des systèmes hyperchaotiques en quatre dimension ont attiré l'attention de nombreux ingénieurs, de physiciens et de mathématiciens. Par exemple, le système hyperchaotique 4-D de **Lorenz-Haken** [21], système hyperchaotique 4-D de **Lorenz-Stenflo** [35] et un type de système hyperchaotique qui a de larges applications dans les communications sécurisées [44].

Le but de ce chapitre est de généraliser tous les résultats existants dans la littérature actuelle pour la borne supérieure d'un système 4-D quadratique généralisé à temps continu. En particulier, en utilisant une analyse rigoureuse des fonctions multivariées, les grandes régions dans l'espace des paramètres de bifurcation de ce système où il est borné sont déterminées. Dans ce chapitre, nous présentons les conditions suffisantes pour qu'un système 4-D quadratique généralisé soit inclus dans un ensemble ellipsoïdal de dimension quatre. Nous prouvons également que l'ensemble des systèmes qui vérifient ces conditions n'est pas vide car le système de **Lorenz-Stenflo** appartient à cette classe.

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale : [29].

Prenons le système 4-D quadratique généralisé à temps continu suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4w + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8w^2 + a_9xy + a_{10}xz + \\ \quad a_{11}xw + a_{12}yz + a_{13}yw + a_{14}zw \\ y' = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4w + b_5x^2 + b_6y^2 + b_7z^2 + b_8w^2 + b_9xy + b_{10}xz + \\ \quad b_{11}xw + b_{12}yz + b_{13}yw + b_{14}zw \\ z' = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4w + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7z^2 + c_8w^2 + c_9xy + c_{10}xz + \\ \quad c_{11}xw + c_{12}yz + c_{13}yw + c_{14}zw \\ w' = d_0 + d_1x + d_2y + d_3z + d_4w + d_5x^2 + d_6y^2 + d_7z^2 + d_8w^2 + d_9xy + d_{10}xz + \\ \quad d_{11}xw + d_{12}yz + d_{13}yw + d_{14}zw \end{array} \right. , \quad (4.1)$$

où $(a_i, b_i, c_i, d_i) \in \mathbb{R}^{60}$ sont les paramètres de bifurcation.

4.2 Estimation de la borne supérieure d'un système 4-D quadratique généralisé à temps continu

Pour estimer les bornes de système (4.1), nous définissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x, y, z, w) = \frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 + (w - \theta)^2}{2}, \quad (4.2)$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \in \mathbb{R}^4$ sont des constantes réelles, pour lesquelles la dérivée de (4.2) le long des orbites de système (4.1) est donnée par :

$$\frac{dV}{dt} = (x - \alpha)x' + (y - \beta)y' + (z - \gamma)z' + (w - \theta)w'. \quad (4.3)$$

Nous avons

$$\frac{dV}{dt} = -\omega(x - \alpha_1)^2 - \varphi(y - \beta_1)^2 - \phi(z - \gamma_1)^2 - \eta(w - \theta_1)^2 + r, \quad (4.4)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \omega\alpha_1^2 + \varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2 + \eta\theta_1^2 - \alpha a_0 - \beta b_0 - \gamma c_0 - \theta d_0 \\ \omega = \alpha a_5 + \beta b_5 + \gamma c_5 + \theta d_5 - a_1 \\ \varphi = \alpha a_6 + \beta b_6 + \gamma c_6 + \theta d_6 - b_2 \\ \phi = \alpha a_7 + \beta b_7 + \gamma c_7 + \theta d_7 - c_3 \\ \eta = \alpha a_8 + \beta b_8 + \gamma c_8 + \theta d_8 - d_4 \\ \alpha_1 = \frac{a_0 - \alpha a_1 - \beta b_1 - \gamma c_1 - \theta d_1}{2\omega}, \text{ si } \omega \neq 0 \\ \beta_1 = \frac{b_0 - \alpha a_2 - \beta b_2 - \gamma c_2 - \theta d_2}{2\varphi}, \text{ si } \varphi \neq 0 \\ \gamma_1 = \frac{c_0 - \alpha a_3 - \beta b_3 - \gamma c_3 - \theta d_3}{2\phi}, \text{ si } \phi \neq 0 \\ \theta_1 = \frac{d_0 - \alpha a_4 - \beta b_4 - \gamma c_4 - \theta d_4}{2\eta}, \text{ si } \eta \neq 0 \end{array} \right. , \quad (4.5)$$

On remarque que si $\omega = 0$ ou $\varphi = 0$ ou $\phi = 0$ ou $\eta = 0$, alors il n'y a pas besoin de calculer α_1 , β_1 , γ_1 et θ_1 respectivement, et une condition qui relie $(a_i, b_i, c_i, d_i)_{0 \leq i \leq 14} \in \mathbb{R}^{60}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \in \mathbb{R}^4$ est obtenue. Sinon, nous avons les quatre dernières égalités de (4.5). La forme de la fonction $\frac{dV}{dt}$ dans (4.4) est possible si les conditions suivantes

concernant les coefficients $(a_i, b_i, c_i, d_i)_{0 \leq i \leq 14} \in \mathbb{R}^{60}$ sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_5 = 0, b_5 = -a_9, b_6 = 0, b_9 = -a_6, c_5 = -a_{10}, c_6 = -b_{12} \\ c_7 = 0, c_9 = -a_{12} - b_{10}, c_{10} = -a_7, c_{12} = -b_7, d_5 = -a_{11}, d_6 = -b_{13} \\ d_7 = -c_{14}, d_8 = 0, d_9 = -a_{13} - b_{11}, d_{10} = -a_{14} - c_{11}, d_{11} = -a_8 \\ d_{12} = -b_{14} - c_{13}, d_{13} = -b_8, d_{14} = -c_8 \\ b_1 = \alpha a_9 - a_2 - \beta a_6 - \gamma(a_{12} + b_{10}) - \theta(a_{13} + b_{11}) \\ c_1 = \alpha a_{10} - a_3 + \beta a_{10} - \gamma a_7 - \theta(a_{14} + c_{11}) \\ c_2 = \alpha a_{12} - b_3 + \beta b_{12} - \gamma b_7 - \theta(b_{14} + c_{13}) \\ d_1 = \alpha a_{11} - a_4 + \beta b_{11} + \gamma c_{11} - \theta a_8 \\ d_2 = \alpha a_{13} - b_4 + \beta b_{13} + \gamma c_{13} - \theta b_8 \\ d_3 = \alpha a_{14} - c_4 + \beta b_{14} + \gamma c_{14} - \theta c_8 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Par conséquent, le système (4.1) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4w + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8w^2 + a_9xy + a_{10}xz + \\ \quad a_{11}xw + a_{12}yz + a_{13}yw + a_{14}zw \\ y' = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4w - a_9x^2 + b_7z^2 + b_8w^2 - a_6xy + b_{10}xz + \\ \quad b_{11}xw + b_{12}yz + b_{13}yw + b_{14}zw \\ z' = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4w - a_{10}x^2 - b_{12}y^2 + c_8w^2 - (a_{12} + b_{10})xy + \\ \quad -a_7xz + c_{11}xw - b_7yz + c_{13}yw + c_{14}zw \\ v' = d_0 + d_1x + d_2y + d_3z + d_4w - a_{11}x^2 - b_{13}y^2 - c_{14}z^2 - (a_{13} + b_{11})xy + \\ \quad - (a_{14} + c_{11})xz - a_8xw - (b_{14} + c_{13})yz - b_8yw - c_8zw \end{array} \right. \quad (4.7)$$

avec b_1, c_1, c_2, d_1, d_2 et d_3 sont donnés par les six dernières équations de (4.6).

Maintenant, pour prouver que le système (4.1) est borné, nous supposons qu'il est borné puis nous allons trouver sa borne, alors nous supposons que $\omega, \varphi, \phi, \eta$ et r sont strictement positives, c- à-d,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega\alpha_1^2 + \varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2 + \eta\theta_1^2 - \alpha a_0 - \beta b_0 - \gamma c_0 - \theta d_0 > 0 \\ a_1 < \alpha a_5 + \beta b_5 + \gamma c_5 + \theta d_5 \\ b_2 < \alpha a_6 + \beta b_6 + \gamma c_6 + \theta d_6 \\ c_3 < \alpha a_7 + \beta b_7 + \gamma c_7 + \theta d_7 \\ d_4 < \alpha a_8 + \beta b_8 + \gamma c_8 + \theta d_8 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Donc, l'équation $\frac{dV}{dt} = 0$ signifie que la surface

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \frac{(x - \alpha_1)^2}{\frac{r}{\omega}} + \frac{(y - \beta_1)^2}{\frac{r}{\varphi}} + \frac{(z - \gamma_1)^2}{\frac{r}{\phi}} + \frac{(w - \theta_1)^2}{\frac{r}{\eta}} = 1, \omega, \varphi, \phi, \eta, r > 0 \right\} \quad (4.9)$$

est un ellipsoïde dans l'espace à quatre dimensions. Si le système (4.1) est borné, la fonction (4.2) peut atteindre sa valeur maximale sur Γ . Notons le point maximum par (x_0, y_0, z_0, w_0) . Pour le trouver, nous définissons la fonction F par :

$$F(x, y, z, w) = G(x, y, z, w) + \lambda H(x, y, z, w), \quad (4.10)$$

où

$$\begin{cases} G(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ H(x, y, z, w) = \frac{(x - \alpha_1)^2}{\frac{r}{\omega}} + \frac{(y - \beta_1)^2}{\frac{r}{\varphi}} + \frac{(z - \gamma_1)^2}{\frac{r}{\phi}} + \frac{(w - \theta_1)^2}{\frac{r}{\eta}} - 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

et $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre fini. Il est clair que $\max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} G = \max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} F$ et soit

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y, z, w)}{\partial x} = 2r^{-1}((\omega\lambda + r)x - \omega\lambda\alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z, w)}{\partial y} = 2r^{-1}((\varphi\lambda + r)y - \varphi\lambda\beta_1) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z, w)}{\partial z} = 2r^{-1}((\phi\lambda + r)z - \phi\lambda\gamma_1) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z, w)}{\partial w} = 2r^{-1}((\eta\lambda + r)w - \eta\lambda\theta_1) = 0 \end{cases}. \quad (4.12)$$

Dans la suite, nous pouvons séparer certains cas pour discuter les bornes supérieures du système (4.1).

(i) Si $\lambda \neq \frac{-r}{\omega}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\varphi}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\phi}$ et $\lambda \neq \frac{-r}{\eta}$, nous avons

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = \left(\frac{\omega\lambda\alpha_1}{r + \omega\lambda}, \frac{\varphi\lambda\beta_1}{r + \varphi\lambda}, \frac{\phi\lambda\gamma_1}{r + \phi\lambda}, \frac{\eta\lambda\theta_1}{r + \eta\lambda} \right) \quad (4.13)$$

et

$$\max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} G = \frac{\omega^2\lambda^2\alpha_1^2}{(r + \omega\lambda)^2} + \frac{\varphi^2\lambda^2\beta_1^2}{(r + \varphi\lambda)^2} + \frac{\phi^2\lambda^2\gamma_1^2}{(r + \phi\lambda)^2} + \frac{\eta^2\lambda^2\theta_1^2}{(r + \eta\lambda)^2}. \quad (4.14)$$

Dans ce cas, il existe une famille des bornes du système (4.1) (paramétrisée par λ) données par (4.14).

(ii) Si $\lambda = \frac{-r}{\omega}$, ($\omega \neq \varphi$, $\omega \neq \phi$, $\omega \neq \eta$), $\lambda \neq \frac{-r}{\varphi}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\phi}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\eta}$, nous obtenons

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = \left(\pm \sqrt{\frac{r}{\omega} \left(1 - \frac{\xi_1}{\xi_2}\right)} + \alpha_1, \frac{-\varphi\beta_1}{\omega - \varphi}, \frac{-\phi\gamma_1}{\omega - \phi}, \frac{-\eta\theta_1}{\omega - \eta} \right), \quad (4.15)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \omega^2 [\varphi\beta_1^2 (\omega - \phi)^2 (\omega - \eta)^2 + \phi\gamma_1^2 (\omega - \varphi)^2 (\omega - \eta)^2 + \eta\theta_1^2 (\omega - \varphi)^2 (\omega - \phi)^2] \\ \xi_2 = r (\omega - \varphi)^2 (\omega - \phi)^2 (\omega - \eta)^2 \\ \xi_2 \geq \xi_1. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

La dernière condition de (4.16) confirme que la valeur x_0 dans (4.15) est bien définie et les conditions $\omega \neq \varphi$, $\omega \neq \phi$, $\omega \neq \eta$ sont formulées comme suit

$$\begin{aligned} b_2 - a_1 &\neq \alpha (a_6 - a_5) + \beta (b_6 - b_5) + \gamma (c_6 - c_5) + \theta (d_6 - d_5) \\ c_3 - a_1 &\neq \alpha (a_7 - a_5) + \beta (b_7 - b_5) + \gamma (c_7 - c_5) + \theta (d_7 - d_5) \\ d_4 - a_1 &\neq \alpha (a_8 - a_5) + \beta (b_8 - b_5) + \gamma (c_8 - c_5) + \theta (d_8 - d_5) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dans ce cas, on a

$$\max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} G = \left(\sqrt{\frac{r}{\omega} \left(1 - \frac{\xi_1}{\xi_2}\right)} + \alpha_1 \right)^2 + \frac{\varphi^2 \beta_1^2}{(\omega - \varphi)^2} + \frac{\phi^2 \gamma_1^2}{(\omega - \phi)^2} + \frac{\eta^2 \theta_1^2}{(\omega - \eta)^2} \quad (4.18)$$

(iii) Si $\lambda = \frac{-r}{\varphi}$, ($\varphi \neq \omega$, $\varphi \neq \phi$, $\varphi \neq \eta$), $\lambda \neq \frac{-r}{\omega}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\phi}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\eta}$, nous avons

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = \left(\frac{-\alpha_1 \omega}{\varphi - \omega}, \pm \sqrt{\frac{r}{\varphi} \left(1 - \frac{\xi_3}{\xi_4}\right)} + \beta_1, \frac{-\phi\gamma_1}{\varphi - \phi}, \frac{-\eta\theta_1}{\varphi - \eta} \right), \quad (4.19)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_3 = \varphi^2 [\omega\alpha_1^2 (\varphi - \phi)^2 (\varphi - \eta)^2 + \phi\gamma_1^2 (\varphi - \omega)^2 (\varphi - \eta)^2 + \eta\theta_1^2 (\varphi - \omega)^2 (\varphi - \phi)^2] \\ \xi_4 = r (\varphi - \omega)^2 (\varphi - \phi)^2 (\varphi - \eta)^2 \\ \xi_4 \geq \xi_3. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Par la dernière condition de (4.20), nous pouvons confirmer que la valeur y_0 dans (4.19) est bien définie et les conditions $\varphi \neq \omega$, $\varphi \neq \phi$, $\varphi \neq \eta$ sont formulés par la première

inéquation de (4.17) et

$$\begin{aligned} c_3 - b_2 &\neq \alpha(a_7 - a_6) + \beta(b_7 - b_6) + \gamma(c_7 - c_6) + \theta(d_7 - d_6) \\ d_4 - b_2 &\neq \alpha(a_8 - a_6) + \beta(b_8 - b_6) + \gamma(c_8 - c_6) + \theta(d_8 - d_6). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans ce cas, on a

$$\max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} G = \frac{\alpha_1^2 \omega^2}{(\varphi - \omega)^2} + \left(\sqrt{\frac{r}{\varphi} \left(1 - \frac{\xi_3}{\xi_4}\right)} + \beta_1 \right)^2 + \frac{\phi^2 \gamma_1^2}{(\varphi - \phi)^2} + \frac{\eta^2 \theta_1^2}{(\varphi - \eta)^2} \quad (4.22)$$

(iv) Si $\lambda = \frac{-r}{\phi}$, ($\phi \neq \omega$, $\phi \neq \varphi$, $\phi \neq \eta$), $\lambda \neq \frac{-r}{\omega}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\varphi}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\eta}$, nous obtenons

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = \left(\frac{-\alpha_1 \omega}{\phi - \omega}, \frac{-\varphi \beta_1}{\phi - \varphi}, \pm \sqrt{\frac{r}{\phi} \left(1 - \frac{\xi_5}{\xi_6}\right)} + \gamma_1, \frac{-\eta \theta_1}{\phi - \eta} \right), \quad (4.23)$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_5 &= \phi^2 [\omega \alpha_1^2 (\phi - \varphi)^2 (\phi - \eta)^2 + \varphi \beta_1^2 (\phi - \omega)^2 (\phi - \eta)^2 + \eta \theta_1^2 (\phi - \omega)^2 (\phi - \varphi)^2] \\ \xi_6 &= r (\phi - \omega)^2 (\phi - \varphi)^2 (\phi - \eta)^2 \\ \xi_6 &\geq \xi_5. \end{aligned} \right. \quad (4.24)$$

En outre, la dernière condition de (4.24) confirme que la valeur z_0 dans (4.23) est bien définie et les conditions $\phi \neq \omega$, $\phi \neq \varphi$, $\phi \neq \eta$ sont formulées par la seconde inéquation de (4.17), la première inéquation de (4.21) et

$$d_4 - c_3 \neq \alpha(a_8 - a_7) + \beta(b_8 - b_7) + \gamma(c_8 - c_7) + \theta(d_8 - d_7). \quad (4.25)$$

Dans ce cas, nous avons

$$\max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} G = \frac{\alpha_1^2 \omega^2}{(\phi - \omega)^2} + \frac{\varphi^2 \beta_1^2}{(\phi - \varphi)^2} + \left(\sqrt{\frac{r}{\phi} \left(1 - \frac{\xi_5}{\xi_6}\right)} + \gamma_1 \right)^2 + \frac{\eta^2 \theta_1^2}{(\phi - \eta)^2} \quad (4.26)$$

(v) Si $\lambda = \frac{-r}{\eta}$, ($\eta \neq \omega$, $\eta \neq \varphi$, $\eta \neq \phi$), $\lambda \neq \frac{-r}{\omega}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\varphi}$, $\lambda \neq \frac{-r}{\phi}$, on a

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = \left(\frac{-\alpha_1 \omega}{\eta - \omega}, \frac{-\varphi \beta_1}{\eta - \varphi}, \frac{-\phi \gamma_1}{\eta - \phi}, \pm \sqrt{\frac{r}{\eta} \left(1 - \frac{\xi_7}{\xi_8}\right)} + \theta_1 \right), \quad (4.27)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_7 = \eta^2 [\omega \alpha_1^2 (\eta - \varphi)^2 (\eta - \phi)^2 + \varphi \beta_1^2 (\eta - \omega)^2 (\eta - \phi)^2 + \phi \gamma_1^2 (\eta - \omega)^2 (\eta - \varphi)^2] \\ \xi_8 = r (\eta - \omega)^2 (\eta - \varphi)^2 (\eta - \phi)^2 \\ \xi_8 \geq \xi_7. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

La dernière condition de (4.28) confirme que la valeur w_0 dans (4.27) est bien définie et les conditions $\eta \neq \omega$, $\eta \neq \varphi$, $\eta \neq \phi$ sont formulées par la troisième inéquation de (4.17), la seconde inéquation de (4.21) et l'inéquation (4.25) respectivement.

Dans ce cas, nous obtenons

$$\max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} G = \frac{\alpha_1^2 \omega^2}{(\eta - \omega)^2} + \frac{\varphi^2 \beta_1^2}{(\eta - \varphi)^2} + \frac{\phi^2 \gamma_1^2}{(\eta - \phi)^2} + \left(\sqrt{\frac{r}{\eta} \left(1 - \frac{\xi_7}{\xi_8} \right)} + \theta_1 \right)^2 \quad (4.29)$$

Enfin, les autres cas possibles peuvent être traités en utilisant la même technique.

Théorème 4.2.1 *Supposons que les conditions (4.5), (4.6) et (4.8) sont vérifiées, alors le système 4-D quadratique généralisé à temps continu (4.1) est borné, c-à-d, il est contenu dans l'ellipsoïde (4.9) de dimension quatre.*

4.3 Application

Exemple 4.3.1 *Dans cette partie, nous montrons que l'ensemble des systèmes qui vérifient les conditions du Théorème 4.2.1 n'est pas vide. En effet, considérons le système de Lorenz-Stenflo étudié dans [35] et donné par*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ay - ax + dw \\ y' = cx - xz - y \\ z' = xy - bz \\ w' = -x - aw \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Choisissons la fonction de Lyapunov $V(x, y, z, w) = \lambda x^2 + y^2 + (z - \lambda a - c)^2 + \lambda dw^2$ comme dans [35]. Supposons que λ et d sont strictement positives et notons $\sqrt{\lambda}x = \tilde{x}$, $\sqrt{\lambda}dw = \tilde{w}$, alors on a $V(\tilde{x}, y, z, \tilde{w}) = \tilde{x}^2 + y^2 + (z - \lambda a - c)^2 + \tilde{w}^2$ c-à-d, $\alpha = \beta = \theta = 0$,

$\gamma = \lambda a + c$ et le système (4.30) devient

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -a\tilde{x} + \sqrt{\lambda}ay + \sqrt{d}\tilde{w} \\ y' = \frac{c}{\sqrt{\lambda}}\tilde{x} - y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tilde{x}z \\ z' = -bz + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tilde{x}y \\ \tilde{w}' = -\sqrt{d}\tilde{x} - a\tilde{w} \end{cases} \quad (4.31)$$

c-à-d, $a_1 = -a$, $a_2 = \sqrt{\lambda}a$, $a_4 = \sqrt{d}$, $a_i = 0$, $i = 0, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$, $b_1 = \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, $b_2 = -1$, $b_{10} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $b_i = 0$, $i = 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14$, $c_3 = -b$, $c_9 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $c_i = 0$, $i = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14$, $d_1 = -\sqrt{d}$, $d_4 = -a$, $d_i = 0$, $i = 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. Alors, d'après (4.5), on a $\omega = a$, $\varphi = 1$, $\phi = b$, $\eta = a$, $\alpha_1 = \beta_1 = \theta_1 = 0$, $\gamma_1 = \frac{\lambda a + c}{2}$ et $r = b \left(\frac{\lambda a + c}{2}\right)^2$. De plus, en utilisant (4.4), on a $\frac{dV}{dt} = -a\tilde{x}^2 - y^2 - b \left(z - \frac{\lambda a + c}{2}\right)^2 - a\tilde{w}^2 + b \left(\frac{\lambda a + c}{2}\right)^2$, *c-à-d*, $\frac{dV}{dt} = -a\lambda x^2 - y^2 - bz^2 - a\lambda dw^2 + (\lambda a + c)bz$ qui est la même que dans [35]. Par conséquent, il est facile de vérifier que toutes les conditions du théorème 4.2.1 sont vérifiées pour a, b, c, d et λ strictement positives. D'après (4.9) l'ellipsoïde Γ de dimension 4 est donné par

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \frac{\tilde{x}^2}{\frac{b}{a} \left(\frac{\lambda a + c}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{b \left(\frac{\lambda a + c}{2}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{\lambda a + c}{2}\right)^2}{\left(\frac{\lambda a + c}{2}\right)^2} + \frac{\tilde{w}^2}{\frac{b}{a} \left(\frac{\lambda a + c}{2}\right)^2} = 1, \\ a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, \lambda > 0 \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

c-à-d,

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \lambda a x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{\lambda a + c}{2}\right)^2 + \lambda a d w^2 = \frac{b(\lambda a + c)^2}{4}, \\ a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, \lambda > 0 \end{array} \right\} \quad (4.33)$$

qui est aussi le même que dans [35]. Enfin, nous avons le résultat montré dans [35] qui confirme que si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $\lambda > 0$, alors le système de Lorenz-Stenflo est contenu dans l'ensemble suivant :

$$\Omega_\lambda = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \lambda x^2 + y^2 + (z - \lambda a - c)^2 + \lambda d w^2 \leq R^2\} \quad (4.34)$$

où

$$R^2 = \begin{cases} \frac{(\lambda a + c)^2 b^2}{4(b-1)}, & \text{si } a \geq 1, b \geq 2 \\ (\lambda a + c)^2, & \text{si } a > \frac{b}{2}, b < 2 \\ \frac{(\lambda a + c)^2 b^2}{4a(b-a)}, & \text{si } 0 < a < 1, b \geq 2 \end{cases} \quad (4.35)$$

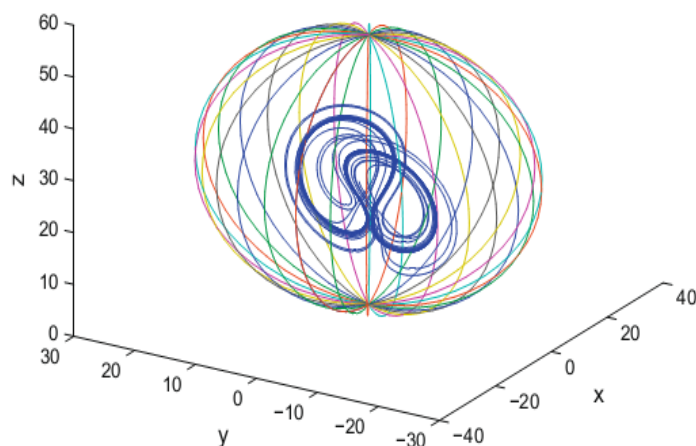


Figure 4.1 : Les projections des bornes estimées dans le théorème 4.2.1 dans l'espace (x,y,z) pour :
 $a = 1, b = 0.7, c = 26, d = 1,5$ et $\lambda = 1$.

4.4 Conclusion

L'utilisation de l'analyse des fonctions multivariées, donne l'estimation de la borne supérieure d'un système 4-D quadratique généralisé à temps continu. Spécialement, nous présentons les conditions suffisantes pour que ce système soit contenu dans un ensemble ellipsoïdal à quatre dimensions. Nous prouvons également que l'ensemble des systèmes qui vérifient ces conditions n'est pas vide car le système de **Lorenz-Stenflo** appartient à cette classe.

Chapitre 5

La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, en utilisant une technique combinant la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée et l'optimisation, nous étudions la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre à temps continu. En particulier, nous rapportons des conditions suffisantes pour que ce système soit contenu dans un ensemble ellipsoïdal de dimension quatre.

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale : [28]

Considérons le système dynamique le plus général de dimension quatre à temps continu suivant :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, w, \delta) \\ y' = g(x, y, z, w, \delta) \\ z' = h(x, y, z, w, \delta) \\ w' = k(x, y, z, w, \delta) \end{cases}, \quad (5.1)$$

où f , g , h et k sont des fonctions réelles et $\delta \in \mathbb{R}^m$ est le paramètre de bifurcation. Supposons que le système (5.1) a au moins un point d'équilibre, alors les orbites bornés sont possibles. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que l'origine est un point d'équilibre, c-à-d, $f(0, 0, 0, 0, \delta) = g(0, 0, 0, 0, \delta) = h(0, 0, 0, 0, \delta) = k(0, 0, 0, 0, \delta) = 0$.

5.2 La borne extrême et l'ensemble positivement invariant

Soit le système :

$$\dot{X} = f(X), \quad (5.2)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $t_0 \geq 0$ est le temps initial, et $X(t, t_0, X_0)$ est une solution de système (4.1) vérifiant $X(t_0, t_0, X_0) = X_0$, pour plus de simplicité est notée $X(t)$. Supposons $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact. On définit la distance entre la solution $X(t, t_0, X_0)$ et l'ensemble Ω par $\rho(X(t, t_0, X_0), \Omega) = \inf_{Y \in \Omega} \|X(t, t_0, X_0) - Y\|$, et on note $\Omega_\varepsilon = \{X/\rho(X, \Omega) < \varepsilon\}$, il est clair que $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$.

Définition 5.2.1 *Supposons qu'il existe un ensemble compact $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si pour chaque $X_0 \in \mathbb{R}^n/\Omega$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(X(t), \Omega) = 0$, c'est-à-dire, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $T > t_0$, tel que pour $t \geq T$, $X(t, t_0, X_0) \subset \Omega_\varepsilon$, alors l'ensemble Ω est appelé une borne extrême pour (5.2). Si pour chaque $X_0 \in \Omega$ et pour $t \geq t_0$, $X(t, t_0, X_0) \subset \Omega$, alors Ω est appelé l'ensemble positivement invariant pour le système (5.2).*

5.3 Estimation de la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre

Théorème 5.3.1 *Supposons que les conditions (5.10), (5.11) et (5.12) sont vérifiées, alors il existe un nombre positif l tel que l'ensemble (5.14) est la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système (5.1).*

Preuve. Pour estimer la borne extrême et l'ensemble positivement invariant de système (5.1), nous définissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x, y, z, w) = \frac{(x - \alpha(X))^2 + (y - \beta(X))^2 + (z - \gamma(X))^2 + (w - \theta(X))^2}{2}, \quad (5.3)$$

avec $X = (x, y, z, w)$, $(\alpha(X), \beta(X), \gamma(X), \theta(X)) \in \mathbb{R}^4$ sont des fonctions réelles, pour lesquelles la dérivée de (5.3) le long des orbites de système (5.1) est donnée par

$$\frac{dV}{dt} = (x - \alpha)(x' - \alpha') + (y - \beta)(y' - \beta') + (z - \gamma)(z' - \gamma') + (w - \theta)(w' - \theta'), \quad (5.4)$$

où

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial x} x' + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y' + \frac{\partial \alpha}{\partial z} z' + \frac{\partial \alpha}{\partial w} w' = \psi_1 f + \psi_2 g + \psi_3 h + \psi_4 k \\ \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial x} x' + \frac{\partial \beta}{\partial y} y' + \frac{\partial \beta}{\partial z} z' + \frac{\partial \beta}{\partial w} w' = \mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h + \mu_4 k \\ \gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial x} x' + \frac{\partial \gamma}{\partial y} y' + \frac{\partial \gamma}{\partial z} z' + \frac{\partial \gamma}{\partial w} w' = \xi_1 f + \xi_2 g + \mu \xi_3 h + \xi_4 k \\ \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial x} x' + \frac{\partial \theta}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial z} z' + \frac{\partial \theta}{\partial w} w' = \zeta_1 f + \zeta_2 g + \zeta_3 h + \zeta_4 k \end{cases} \quad (5.5)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & c_1(x, y, z, w) x - \omega x^2 + c_2(x, y, z, w) y - \varphi y^2 + c_3(x, y, z, w) z - \phi z^2 + \\ & c_4(x, y, z, w) w - \eta w^2 + c_5(x, y, z, w), \end{aligned} \quad (5.6)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(x, y, z, w) = f - \psi_1 f - \psi_2 g - \psi_3 h - \psi_4 k + \omega x \\ c_2(x, y, z, w) = g - \mu_1 f - \mu_2 g - \mu_3 h - \mu_4 k + \varphi y \\ c_3(x, y, z, w) = h - \xi_1 f - \xi_2 g - \xi_3 h - \xi_4 k + \phi z \\ c_4(x, y, z, w) = k - \zeta_1 f - \zeta_2 g - \zeta_3 h - \zeta_4 k + \eta w \\ c_5(x, y, z, w) = c_6(x, y, z, w) + c_7(x, y, z, w) \\ c_6(x, y, z, w) = -\alpha f - \beta g - \gamma h - \theta k + \alpha(\psi_1 f + \psi_2 g + \psi_3 h + \psi_4 k) \\ c_7(x, y, z, w) = \beta(\mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h + \mu_4 k) + \\ \gamma(\xi_1 f + \xi_2 g + \xi_3 h + \xi_4 k) + \theta(\zeta_1 f + \zeta_2 g + \zeta_3 h + \zeta_4 k) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Supposons que l'équation (5.6) a la forme

$$\frac{dV}{dt} = -\omega(x - \alpha_1)^2 - \varphi(y - \beta_1)^2 - \phi(z - \gamma_1)^2 - \eta(w - \theta_1)^2 + r, \quad (5.8)$$

où $\omega, \varphi, \phi, \eta$ et r sont des constantes strictement positives, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_1$ sont des constantes inconnus et doivent être déterminées dans lequel l'équation $\frac{dV}{dt} = 0$ détermine un ellipsoïde dans \mathbb{R}^4 . L'équation (5.8) est équivalente à

$$\frac{dV}{dt} = -\omega x^2 + 2\omega\alpha_1 x - \varphi y^2 + 2\varphi\beta_1 y - \phi z^2 + 2\phi\gamma_1 z - \eta w^2 + 2\eta\theta_1 w - \omega\alpha_1^2 - \varphi\beta_1^2 - \phi\gamma_1^2 - \eta\theta_1^2 + r \quad (5.9)$$

Par identification avec (5.6) nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{c_1(x, y, z, w)}{2\omega} \\ \beta_1 = \frac{c_2(x, y, z, w)}{2\varphi} \\ \gamma_1 = \frac{c_3(x, y, z, w)}{2\phi} \\ \theta_1 = \frac{c_4(x, y, z, w)}{2\eta} \\ r = \omega\alpha_1^2 + \varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2 + \eta\theta_1^2 + c_5(x, y, z, w) \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Puisque $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_1$ et r sont des constantes réelles, alors les fonctions $\{c_i(x, y, z, w), i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ sont aussi des constantes, c-à-d,

$$\frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial x} = \frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial y} = \frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial z} = \frac{\partial c_i(x, y, z, w)}{\partial w} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (5.11)$$

Maintenant, pour prouver que le système (5.1) est borné, nous supposons que ω , φ , ϕ , η et r sont strictement positives, c-à-d,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_5(x, y, z, w) + \omega\alpha_1^2 + \varphi\beta_1^2 + \phi\gamma_1^2 + \eta\theta_1^2 > 0 \\ \omega > 0, \varphi > 0, \phi > 0, \eta > 0 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

donc, l'équation $\frac{dV}{dt} = 0$, signifie que la surface

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \frac{(x - \alpha_1)^2}{\frac{r}{\omega}} + \frac{(y - \beta_1)^2}{\frac{r}{\varphi}} + \frac{(z - \gamma_1)^2}{\frac{r}{\phi}} + \frac{(w - \theta_1)^2}{\frac{r}{\eta}} = 1, \omega, \varphi, \phi, \eta, r > 0 \right\} \quad (5.13)$$

est un ellipsoïde dans l'espace à quatre dimensions. En dehors de Γ , c-à-d, lorsque $\omega(x - \alpha_1)^2 + \varphi(y - \beta_1)^2 + \phi(z - \gamma_1)^2 + \eta(w - \theta_1)^2 > r$, on a $\frac{dV}{dt} < 0$, ce qui implique que la surface $V = \text{const}$ est monotone décroissante.

Puisque Γ est un ensemble fermé et V est continue sur Γ , alors, les valeurs extrêmes de V peuvent être atteints sur Γ . Notons la valeur maximale de V par l , c-à-d $l = \max_{(x,y,z,w) \in \Gamma} V$.

Soit

$$\Omega = \left\{ X : \frac{(x - \alpha(X))^2 + (y - \beta(X))^2 + (z - \gamma(X))^2 + (w - \theta(X))^2}{2} \leq l \right\} \quad (5.14)$$

Nous avons $\Gamma \subset \Omega$. Ensuite, nous allons montrer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(X(t), \Omega) = 0 \quad (5.15)$$

en utilisant la démonstration par l'absurde, où $X(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$. Supposons que (5.15) n'est pas réalisée, alors nous pouvons conclure que les orbites de système (5.1) sont en dehors de Ω de façon permanent, donc $\dot{V} < 0$. C-à-d, la fonction V est décroissante en dehors de Ω , ce qui conduit au résultat suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t)) = v^* > l$$

Soit

$$s = \inf_{X \in D} (-\dot{V}(X(t)))$$

où $D = \{X(t)/V^* \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0))\}$, et t_0 est le temps initial. Par conséquent, nous avons que s, V^* sont des constantes positives, et

$$\frac{dV(X(t))}{dt} \leq -s$$

Comme $t \rightarrow \infty$, nous avons

$$0 \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0)) - s(t - t_0) \rightarrow -\infty$$

cela est une contradiction. Par conséquent (5.15) est vraie, c-à-d Ω est la borne extrême de système (5.1).

Enfin, pour voir que Ω est aussi l'ensemble positivement invariant, supposons que V atteint sa valeur maximale sur la surface Γ au point $P_0(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{w}_0)$. Puisque $\Gamma \subset \Omega$, alors pour tout point $X(t)$ sur Ω et $X(t) \neq P_0$, on a $\dot{V}(X) < 0$, donc toute orbite $X(t)$ ($X(t) \neq P_0$) de système (5.1) ira à l'intérieure de Ω . Quand $X(t) = P_0$, par le théorème de continuation [17], $X(t)$ ira aussi dans Ω . En résumant ce qui précède, nous concluons que Ω est l'ensemble positivement invariant de système (5.1). Ceci termine la preuve. ■

Remarque 5.3.1 *le lecteur peut aussi vérifier que le système quadratique 4-D étudié dans le chapitre précédent satisfait toutes les conditions du théorème 5.3.1 pour certaines valeurs des paramètres de bifurcation.*

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée, nous avons estimé la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système le plus général de dimension quatre à temps continu. En particulier, nous avons établi des conditions suffisantes pour que ce système soit inclus dans un ensemble ellipsoïdal de dimension quatre.

Conclusion générale

Les systèmes hyperchaotiques existent largement dans divers domaines tels que l'électronique de puissance, la communication laser, l'hydrocinétique, la chimie, et les circuits non-linéaires.

Comme les systèmes hyperchaotiques disposent des caractéristiques de haute capacité, haute sécurité et de haute efficacité, l'étude de ce comportement dynamique complexe devient un sujet de recherche très important au cours des dernières années. L'idée développée dans cette thèse réside dans la généralisation de tous les résultats existants dans la littérature actuelle pour la borne supérieure d'un système hyperchaotique quadratique en quatre dimensions. En particulier, en utilisant une analyse rigoureuse des fonctions multivariées, les grandes régions dans l'espace des paramètres de bifurcation de ce système où il est borné sont déterminées. À l'aide de la théorie de la fonction de Lyapunov généralisée, nous avons développé en plus la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système hyperchaotique le plus général de dimension quatre à temps continu. Plus particulièrement, nous avons présenté les conditions suffisantes pour que ce système soit contenu dans un ensemble ellipsoïdal à quatre dimensions. Nous avons prouvé également que l'ensemble des systèmes qui vérifient ces conditions n'est pas vide car le système de **Lorenz-Stenflo** appartient à cette classe.

Par conséquent, les résultats obtenus donnent une importance cruciale pour la recherche des sciences non linéaires, en général, et pour l'étude du comportement qualitatif d'un système hyperchaotique de dimension quatre, en particulier.

La stratégie présentée dans ce travail est suffisamment générale, il serait donc possible d'appliquer la méthode actuelle à d'autres systèmes non linéaires, de haut ordre

Conclusion générale

et plus compliqués, qui sera le sujet de nos futurs travaux.

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, en utilisant une analyse rigoureuse des fonctions multivariées, nous généralisons tous les résultats existants dans la littérature actuelle pour la borne supérieure d'un système 4-D quadratique généralisé à temps continu. En particulier, nous trouvons les grandes régions dans l'espace des paramètres de bifurcation de ce système où il est borné.

Dans la deuxième partie, nous estimons la borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système hyperchaotique le plus général de dimension quatre à temps continu. Spécialement, nous rapportons des conditions suffisantes pour que ce système soit contenu dans une surface ellipsoïdale à quatre dimensions. Nous prouvons également que l'ensemble des systèmes qui vérifient ces conditions n'est pas vide car le système de **Lorenz-Stenflo** appartient à cette classe.

Mots clés : Système hyperchaotique de dimension 4, bornes supérieures.

MSC [2010] : 65P20, 65P30, 65P40.

Abstract

In the first part of this thesis, using multivariable function analysis, we generalize all the existing results in the current literature for the upper bound of a general 4-D quadratic continuous-time system. In particular, we find large regions in the bifurcation parameters space of this system where it is bounded.

In the second part, we estimate the ultimate bound and positively invariant set for the most general 4-D hyperchaotic continuous-time system. Especially, we report sufficient conditions for this system to be contained in a four-dimensional ellipsoidal surface. We prove also that the set of systems which verify these conditions is not empty because the **Lorenz-Stenflo** system belongs to this class.

Keywords : 4-D hyperchaotic system, upper bounds.

MSC [2010] : 65P20, 65P30, 65P40.



Bibliographie

- [1] Boichenko, V. A. , Leonov, G. A. and Reitmann, V. "Dimension theory for ordinary differential equations". B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart (2005).
- [2] Cafagna, D. and Grassi, G. "New 3D-scroll attractors in hyperchaotic Chua's circuits forming a ring," *Int. J. of Bifur. & Chaos* 13 (10), 2889-2903 (2003).
- [3] Celikovskiy, S. and Chen G. "On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(8), 1789–1812 (2002).
- [4] Cenys, A. Tamasevicius, A. Baziliauskas, A. Krivickas, R. and Lindberg, E. "Hyperchaos in coupled colpitts oscillator," *Chaos Solitons and Fractals*, 17 (2-3), 349-353 (2003).
- [5] Chen, G. "Controlling chaos and bifurcations in engineering systems," CRC Press, Boca Raton, FL, United States (1999).
- [6] Chen, G. and Lu, J. "Dynamics of the Lorenz System Family," *Analysis, Control and Synchronization*, Science Press, Beijing (2003).
- [7] Chen, A. Lu, J. Lü, J. and Yu, S. "generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control," *Phys. A.* 364, 103- 110 (2006).
- [8] Chen, G. and Ueta, T. "Yet another chaotic attractor," *Int. J. of Bifur. & Chaos* 9, 1465-1466 (1999).
- [9] Elaiw, A.M., "Global properties of a class of HIV models," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 2253-2263 (2010).

- [10] Elhadj, Z. "Analysis of a new three-dimensional quadratic chaotic system," *Radio Engineering* 17 (1), 9–13 (2008).
- [11] Elhadj, Z. and Sprott, J.C. "About the boundedness of 3D continuous time quadratic systems," *Nonlinear Oscillations*, 13 (2-3), 550-557 (2010).
- [12] Guittard, J.G. "Techniques d'analyse d'oscillateurs chaotiques : application au télécommunications par synchronisation du chaos," Thèse de doctorat, université de limoges, novembre (2000).
- [13] Guo, R. "A simple adaptive controller for chaos and hyperchaos synchronization," *Phys. Lett. A.* 372, 5593-5597 (2008).
- [14] Jia, Q. "Hyperchaos generated from Lorenz chaotic system and its control," *Phys*, in press (2007).
- [15] Kapitaniak, T. and Steeb, W. H. "Transition to hyperchaos in coupled generalized van der pol equations," *Phys. Lett. A.* 152, 33-36 (1991).
- [16] Keller, S. "In the wake of chaos," Chicago and London : The University of Chicago Press (1993).
- [17] Lefchetz S. "Differential equations: geometric theory," New York: Interscience Publishers (1963).
- [18] Leonov, G. Bunin, A. and Kokschi, N. "Attractor localisation of the Lorenz system," *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 67, 649-656 (1987).
- [19] Letellier, C. "Introduction. Le chaos dans la nature," Paris : Vuibert, 1-5 (2006).
- [20] Li, D. Lu, J. A. Wu, X. and Chen, G. "Estimating the bounds for the Lorenz family of chaotic systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, 23, 529-534 (2005).
- [21] Li, D. Wu, X. and Lu, J. "Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the hyperchaotic Lorenz-Haken system," *Chaos, Solitons & Fractals*, 39, 1290-1296 (2009).

- [22] Lorenz, E. N. "Deterministic non-periodic flow". *J. Atmos. Sci* 20, 130–141 (1963).
- [23] Lu, J. H., Chen, G. and Zhou, T. "A unified Lorenz-type system and its canonical form," *Int. J. of Bifur. & Chaos* 16 (10), 2855-2871 (2006).
- [24] Nagashima, H. and Baba, R. "Introduction to chaos, physics and Mathematics of chaotic phenomena, " Institute of physics publishing, London (1999).
- [25] Ning, C. Z. and Haken, H. "Detuned lasers and the complex Lorenz equation: subcritical and subcritical Hopf bifurcations," *Phys Rev A* 41 (7), 326 (1999).
- [26] Perez, G. and Cerderia, H. "Extracting message masked by chaos," *Phys. Rev. Lett.* 74, 1970-1973 (1995).
- [27] Pogromsky, A. Y. Santoboni, G. and Nijmeijer, H. "An ultimate bound on the trajectories of the Lorenz systems and its applications," *Non-linearity*, 16, 1597-1605 (2003).
- [28] Rezzag, S. Zehrou, O. and Aliouche, A. "Estimating the bounds for the general 4-D continuous-time autonomous system," *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 15 (3), 313–320 (2015).
- [29] Rezzag, S. Zehrou, O. and Aliouche, A. "Estimating the bounds for the general 4-D hyperchaotic system," *Nonlinear studies* 22 (1), 41-48 (2015).
- [30] Rössler, O. E. "An equation for continuous chaos," *Phys Lett A* 57, 397-398 (1976).
- [31] Rössler, O. E. "An equation for the hyperchaos," *Phys Lett A* 71 (2-3) 155-157 (1979).
- [32] Ruelle, D and Takens, F. "On the nature of turbulence," *Commun Math Phys*, 20, 167-192 (1971).
- [33] Stenflo, L. "Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere," *Phys Scr* 53, 83–84 (1996).

- [34] Wang, G. Zhang, X. Zheng, Y. and Li, Y. "A new modified hyperchaotic Lü system," Phys. A. 371, 260- 272 (2006).
- [35] Wang, P. Li, D. and Hu, Q. "Bounds of the hyperchotic Lorenz-Stenflo system," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 15, 2514-2520 (2010).
- [36] Wolf, A. Swift, J.B. Swinney, H.L. and Vastano, J.A. "Determining Lyapunov exponents from a time series," Physica,D. 16, 285- 317 (1985).
- [37] Wu, X. J. Wang, H. and Lu, H. T. "Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization," Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12, (2), 1288-1299 (2011).
- [38] www.scholarpedia.org/article/Hyperchaos.
- [39] Xavier, J. C. and Rech, P. C. "Regular and chaotic dynamics of the Lorenz-Stenflo system," Int. J. of Bifur. & Chaos 20, 145-152 (2010).
- [40] Yu, M. Y. "Some chaotic aspects of the Lorenz-Stenflo equations," Phys Scr 82, 10-11 (1999).
- [41] Yujun, N. Xingyuan, W. Mingjun, W. and Huaguang, Z. "A new hyperchaotic system and its circuit implementation," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15 (11), 3518-3524 (2010).
- [42] Zehrour, O. and Zeraoulia, E. "Boundedness of the generalized 4-D hyperchaotic model containing Lorenz-Stenflo and Lorenz-Haken systems," Nonlinear studies, 19 (4), 1-7 (2012).
- [43] Zehrour, O. and Zeraoulia, E. "Ellipsoidal chaos," Nonlinear studies, 19 (1), 71-77 (2012).
- [44] Zhang, F., Li, Y. and Mu, C. "Bounds of Solutions of a Kind of Hyper-Chaotic Systems and Application," Journal of Mathematical Research with Applications 33 (3), 345-352 (2013).

Bibliographie

- [45] Zhou, T. and Chen, G. "Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems-I. Basic framework and methods," *Int. J. of Bifur. & Chaos* 16 (9), 2459-2479 (2006).
- [46] Zhou, T., Chen, G. and Yang, Q. "Constructing a new chaotic system based on the Si'lnikov criterion," *Chaos, Solitons & Fractals* 19, 985–993 (2004).

ملخص

في الجزء الأول من هذه الرسالة، باستخدام تحليل دقيق للدوال متعددة المتغيرات، نعمم كل النتائج الموجودة في الأدب الحالي بالنسبة للحد الأعلى لجملة مستمرة، تربيعية، معممة ذات أربعة أبعاد. على وجه الخصوص، نجد المناطق الرئيسية في فضاء معلمات التشعب لهذه الجملة أين تكون محدودة.

في الجزء الثاني، نقيم الحد الأقصى و المجموعة اللا متغيرة بشكل ايجابي لجملة مستمرة شديدة الفوضى، أكثر تعميم، ذات أربعة أبعاد. بشكل خاص، نقدم الشروط الكافية حتى تكون هذه الجملة محتواة في سطح ببيضاوي رباعي الأبعاد. نثبت أيضا أن مجموعة الجمل التي تلي هذه الشروط ليست فارغة لأن جملة لورنز ستانفلو تنتمي لهذه الفئة.

كلمات البحث

جملة شديدة الفوضى ذات أربعة أبعاد، الحدود العليا.