



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

Université El Arbi Bin M'hidi à Oum El-Bouaghi

Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie  
Département de mathématiques et d'informatique

Order number: .....

Serial number: .....

## THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

En mathématiques

Option: Mathématiques appliquées

Intitulée

**Existence des solutions de certaines  
équations intégral-différentielles non  
linéaires**

*Présenté par: Bragdi Ahmed*

*Jury :*

President:	Zahrour Okba	Professeur	Univ. Oum El Bouaghi
Rapporteur:	Frioui Assia	MCA	Univ. Guelma
Examineur:	Saoudi Khaled	Professeur	Univ. Khenchela
Examineur:	Ahcene Merad	Professeur	Univ. Oum El Bouaghi

2020/2021

# Table des matières

0.1	<b>Introduction</b>	6
<b>1</b>	<b>Rappels et notions fondamentales</b>	<b>10</b>
1.1	Espaces fonctionnels	10
1.1.1	Espaces des fonctions P-intégrales	10
1.1.2	Espaces des fonctions absolument continues	11
1.2	Fonctions spéciales	12
1.2.1	La fonction Gamma	12
1.2.2	La fonction Bêta	14
1.3	Intégrales et dérivées fractionnaires	15
1.3.1	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	15
1.3.2	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	18
1.3.3	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	21
1.3.4	Interpretation physique	27
1.4	Quelques théorèmes du point fixe	29
1.4.1	Théorème du point fixe de Banach	30
1.4.2	Théorème du point fixe de type Schauder	30
1.4.3	Théorèmes du point fixe de Krasnoselskii	31
1.4.4	Théorème d'Ascoli-Arzela	33
<b>2</b>	<b>Positivité et unicité de la solution d'un problème non linéaire fractionnaire</b>	<b>35</b>

2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Lemme préliminaire . . . . .	37
2.3	Positivité de la solution . . . . .	41
2.4	Unicité de la solution . . . . .	45
2.5	Exemples . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Existence de solutions pour un problème aux limites aux dérivées frac-</b>	
	<b>tionnaires</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Préliminaires . . . . .	49
3.3	Existence de la solution . . . . .	51
3.4	Exemples . . . . .	56

## ملخص

الهدف من هذه الاطروحة هو دراسة وجود و وحدانية الحل لبعض المسائل الحديدية المعرفة بمعادلات تكاملية تفاضلية غير خطية من مراتب كسرية و بشروط حدية. في المرحلة الاولى اهتمينا بالبحث عن وجود حلول موجبة لمعادلات تفاضلية باستعمال بعض نظريات النقطة الصامدة و بالأخص نظرية كراسنوسيلسكي الخاصة بالقمع و كذلك نظرية باناك.

في المرحلة الثانية و باستعمال نظرية كراسنوسيلسكي الهجينة أثبتنا وجود حل لمعادلة تكاملية تفاضلية كسرية

## كلمات مفتاحية

المشتقات الكسرية, المسائل الحديدية, مبدأ باناك للتطبيقات المقلصة, نظرية غيو كراسنوسيلسكي الخاصة بالقمع.....

# Résumé

L'objectif de cette thèse s'inscrit dans l'étude de l'existence des solutions de quelques problèmes aux limites associés aux équations différentielles et intégral-différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire à conditions aux limites locales et de type intégrale. On s'intéresse dans un premier temps à établir la positivité, ainsi que l'unicité de la solution de l'équation différentielle fractionnaire en utilisant quelques théorèmes de points fixes notamment le théorème de Guo- Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône, et le principe de contraction de Banach puis dans un deuxième temps et via le théorème de Krasnoselskii hybride on établit l'existence de la solution de l'équation intégral-différentielle fractionnaire.

**Mots clés :** Dérivée fractionnaire, Problème aux limites, Principe de contraction de Banach, Théorème de Guo-Krasnoselskii dans un cône.

# Abstract

The objective of this thesis, is devoted to the study of the existence of solutions for some boundary value problem generated by nonlinear differential and integro-differential equations of fractional order with local and integral type boundary conditions.

We are interested in the first step to establish uniqueness and the existence of positive solutions of the fractional differential equation by using some fixed point theorems notably, Guo-Krasnoselskii theorem of expansion and compression of cones, and the Banach contraction principle, then in a second step and via the hybrid Krasnoselskii theorem we establish the existence of solution of the fractional integro-differential equation.

**Keywords :** Fractional Derivative, Boundary value Problems, Banach contraction principle, Guo-Krasnoselskii fixed point theorem in cone.

## 0.1 Introduction

C'est à Leibniz que revient la gloire d'avoir frayé une voie nouvelle qui est la théorie du calcul fractionnaire, cette théorie qui a étendue la dérivation et l'intégration d'ordre entier à un ordre non entier connaît actuellement une grande popularité.

En fait, l'histoire du calcul fractionnaire fût commencer par une question clé de Leibniz lorsque ce dernier introduisit le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$  pour désigner la dérivée  $n$ -ième d'une fonction  $f$  où  $n$  est un entier positif. Cette représentation symbolique poussa alors l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir  $n$  fractionnaire et il envoya une lettre à Leibniz en 1695 en se demandant si  $n = 1/2$ ? ; Leibnitz a répondu « qu'il s'agit là d'un paradoxe, dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences »[34].

Depuis, de nombreux mathématiciens se sont lancés sur cette question pour pallier cette difficulté et plusieurs contributions ont été développées et de nombreuses formes d'opérateurs différentiels fractionnaires ont été introduites, on peut citer les dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letnikov Weyl, Marchaud, Hadamard, Riesz (Hilfer 2000 ; Kilbas et al. 2006 ; Podlubny 1999 ; Samko et al.1993) et d'autres plus récentes de Klimek (2005), Kilbas et Saigo (2004), Cresson (2007), Katugampola (2011), où des opérateurs fractionnaires d'ordre variable introduits par Samko et Ross (1993). Pour plus de détails historiques, voir [38, 40, 42, 45, 48].

Cependant, la première réelle application du calcul fractionnaire semble être proposée par N. H. Abel en 1823 [2] qui montra que le problème de la Tautochrone généralisée s'écrivait à l'aide d'une équation différentielle d'ordre non entier dont il exprima la solution à l'aide d'une équation intégrale.

Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et de nombreux chercheurs se sont investis pour mettre en exergue les résultats déjà établis et les champs d'applications se sont diversifiés. A titre d'exemples, nous citerons quelques uns de ces champs d'applications

- Les dérivées fractionnaires ont été largement utilisées dans le modèle mathématique

du viscoélastique des matières. L'avantage de l'introduction des dérivées fractionnaires en théorie de la viscoélasticité est qu'elle offre des possibilités d'obtenir des équations constitutives pour le module complexe élastique des matériaux viscoélastiques avec seulement quelques paramètres déterminés expérimentalement. Les dérivées fractionnaires ont également été utilisées dans l'étude des modules complexes et des résistances voir [9, 46, 52].

- Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégral-différentielles fractionnaires [53].

- Dans la physicochimie, le courant est proportionnel aux dérivées fractionnaires du voltage quand l'interface fractale est mise entre un métal et un milieu ionique [29, 55].

- En électricité, dans les lignes de transmission électrique. En 1892, Heaviside a introduit l'idée de dérivées fractionnaires dans son étude des lignes de transmission électriques [7].

- En biologie, il s'avère que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire [21, 37].

- En économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire, des exemples sur cette dynamique peuvent être consultés dans la référence [41].

D'autres applications du calcul fractionnaire ont été décrites dans plusieurs domaines tels que : Le traitement d'image [29], le traitement du signal [54], la commande automatique et robotique [35], et analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaires.

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'étude de l'existence des solutions de quelques problèmes aux limites associés aux équations différentielles et intégral-différentielles non linéaires d'ordre fractionnaires à conditions aux limites locales et de type intégrale. Cependant, à cause de leur grande importance dans les applications, notamment dans la modélisation de nombreux phénomènes récemment on observe un intérêt grandissant pour ces types d'équations, ainsi qu'un développement rapide d'outils adaptés à leurs études. En revanche le succès de la théorie de point fixe a été l'une

des grandes avancées dans l'étude de ces équations. Cette théorie a fait en réalité l'objet des chapitres II et III et reposent essentiellement sur le principe de contraction de Banach [19], théorème de Krasnoselskii hybride [6] ainsi que le théorème bien connu de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône [27].

Terminons cette introduction par une analyse rapide du contenu de cette thèse. En clair on trouvera plus loin, en guise d'introduction aux différents chapitres, des données plus détaillées sur le développement des aspects particulièrement considérés dans ce travail. Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre correspond à une brève introduction des éléments essentiels permettant d'aborder la théorie du calcul fractionnaire. On commence par rappeler les fonctions auxiliaires Gamma et Beta, puis on introduira les deux plus importantes approches de dérivation et d'intégration fractionnaire on s'intéressera plus particulièrement à celles de Riemann-Liouville et de Caputo. Enfin nous rappelons les différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail en l'occurrence le principe de contraction de Banach et le deux théorèmes bien connu de Krasnoselskii.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u(t)) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, 0 < \alpha, \beta \leq 1 \\ u(0) = 0, u(1) = \int_0^1 u(s) ds \end{cases}$$

où  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  et  ${}^c D^\alpha ({}^c D^\beta)$  désigne les dérivées fractionnaires au sens de Caputo et  $f$  une fonction positive  $\in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ .

A cet effet, nous établissons via le théorème de Krasnoselskii dans un cône la positivité de la solution dans le cas où  $f$  est soit sur-linéaire ou sous-linéaire, puis nous prouvons moyennant le théorème de Banach l'unicité de la solution et enfin nous le terminons par deux exemples illustratifs. Les résultats de ce chapitre sont soumis pour publication.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence de la solution de l'équation integro-différentielle fractionnaire non linéaire suivante :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u)(t) = f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t)) & (0 < t < 1) \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta \leq 1$  et  ${}^c D^\alpha ({}^c D^\beta)$  désigne les dérivées fractionnaires au sens de Caputo et  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , avec

$$\varphi u(t) = \int_0^t \gamma(t, s) u(s) ds \quad \text{et} \quad \psi u(t) = \int_0^t \lambda(t, s) u(s) ds.$$

où  $\gamma, \lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  sont telles que

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left( \int_0^1 \lambda(t, s) ds \right) < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [0, 1]} \left( \int_0^1 \gamma(t, s) ds \right) < \infty.$$

L'existence de la solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe qui est somme d'un opérateur contractant et un opérateur compact sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction  $f$  dans un espace fonctionnel convenablement choisi. On termine ce chapitre avec deux exemples illustratifs. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication suivante :

[20] Bragdi, A., Frioui, A. and Guezane Lakoud, A. "Existence of solutions for nonlinear fractional integro-differential equations". Adv Differ Equ 2020, 418 (2020).

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

Ce premier chapitre est consacré aux outils mathématiques utilisés pour développer ces présentes études. On s'intéresse plus particulièrement à définir quelques notions fondamentales permettant d'aborder la théorie du calcul fractionnaire. On commence par rappeler les fonctions auxiliaires Gamma et Beta et les deux plus importantes approches de dérivation et d'intégration fractionnaire à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du point fixe, notamment le principe de contraction de **Banach**, le théorème de **Schauder**, et les théorèmes bien connu de **Krasnoselskii**, pour plus de détails voir [6, 19, 27, 58].

### 1.1 Espaces fonctionnels

On rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

#### 1.1.1 Espaces des fonctions P-intégrales

**Définition 1.1** [42] *Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) un intervalle fini ou infini de  $\mathbb{R}$  et  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace  $L^p(\Omega)$  est l'espace des fonctions (classes)  $f$  réelles sur  $\Omega$  telle*

que  $f$  est mesurable et

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

### 1.1.2 Espaces des fonctions absolument continues

On désigne par  $C^n(\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{N} = 0, 1, \dots$ , l'espace des fonctions  $f$  qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $n$  continues sur  $\Omega$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si  $n = 0$ ,  $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  continues sur  $\Omega$  muni de la norme

$$\|f\|_C := \max |f(x)|.$$

**Définition 1.2** On note par  $AC([a, b])$  l'espace des fonctions absolument continues sur un intervalle  $[a, b]$ , constitué des fonctions  $f$  qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables :

$$f \in AC([a, b]) \iff \exists \varphi \in L^1([a, b]) \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t) dt.$$

**Définition 1.3** On note par  $AC^n([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'espace des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$  constitué des fonctions  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui ont des dérivées conti-

nues sur  $[a, b]$  jusqu'à l'ordre  $(n - 1)$  et telle que  $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ , c'est à dire :

$$AC^n([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

**Remarque 1.1** En particulier  $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$ .

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 1.1** Une fonction  $f \in AC^n([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si elle est représentée sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

## 1.2 Fonctions spéciales

Dans cette partie, nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta qui seront utilisées ultérieurement. Ces fonctions jouent un rôle fondamental voire très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

### 1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$  qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

**Définition 1.4** [30] Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(\alpha) > 0$ . La fonction Gamma  $\Gamma(\alpha)$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (1.1)$$

avec  $\Gamma(1) = 1$  et  $\Gamma(0^+) = +\infty$ .

**Propriétés**

Une propriété importante de la fonction Gamma  $\Gamma(\alpha)$  est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\alpha dt = [-e^{-t} t^\alpha]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Il convient de noter que la propriété (1.2) nous permet d'établir que

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En effet, on a  $\Gamma(1) = 1$  et donc

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3! \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n(n - 1) = n! \end{aligned}$$

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0.$$

## 1.2.2 La fonction Bêta

Tout comme la fonction Gamma, la fonction Bêta fait aussi partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction fournit un outil fondamental quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

**Définition 1.5** [30] *La fonction **Bêta** ou intégrale eulerienne de première espèce est définie pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par l'équation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

### Propriétés

La fonction Bêta est symétrique i.e. :

1.

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

2.

$$\alpha B(\alpha, \beta + 1) = \beta B(\alpha + 1, \beta)$$

3.

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta).$$

4.

$$B(1, \beta) = \frac{1}{\beta}$$

5.

$$\frac{\partial}{\partial x} B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta) \left( \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right)$$

## 1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Le but de cette partie est de définir des notions fondamentales sur les dérivées et les intégrales fractionnaires, en l'occurrence nous introduisons les deux plus importantes approches à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

### 1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $b$  pouvant être fini ou infini.

Une primitive de  $f$  est donnée par :

$$If(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$I^2 f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$I^2 f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

Plus généralement, l'intégration successive de la fonction  $f(x)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction  $f(x)$  peut être définie en utilisant la fonction Gamma

$\Gamma(n) = (n - 1)!$  donc, on peut définir l'intégration fractionnaire comme suit :

**Définition 1.6** [30] Si  $f \in C[a, b]$ ,  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ),  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , les intégrales fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville  $I_{a+}^\alpha f$  et  $I_{b-}^\alpha f$  d'ordre  $\alpha$  sont définies respectivement par :

$$I_{a+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{(1-\alpha)}}, \quad (x > a), \quad (1.3)$$

$$I_{b-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{(1-\alpha)}}, \quad (x < b), \quad (1.4)$$

Lorsque  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , les définitions (1.3) et (1.4) coïncident avec les intégrales n-ième de la forme :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{(n)} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \\ I_{b-}^{(n)} f(x) &= \int_x^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^b f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \end{aligned}$$

**Théorème 1.1** Soit  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $f \in L^p([a, b])$ ,  $p \geq 1$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x). \quad (1.5)$$

**Proposition 1.1** [30] Soit  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$ . On a :

$$I_{a+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1},$$

et

$$I_{b^-}^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

**Exemple 1.1** *Considérons la fonction  $f(x) = (x-a)^\beta$ . Alors*

$$I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt,$$

*Pour évaluer cette intégrale on pose le changement  $t = a + (x-a)\tau$ , il s'ensuit que  $dt = (x-a)d\tau$ , d'où*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a - (x-a)\tau)^{\alpha-1} (a + (x-a)\tau - a)^{\beta-1} (x-a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^\alpha (x-a)^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

*En utilisant la fonction bêta on obtient :*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

*On voit bien que c'est une généralisation du cas où  $\alpha = 1$ , on a*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^1 (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)} (x-a)^\beta = \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{\beta\Gamma(\beta)} (x-a)^\beta \\ &= \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{(\beta-1)\beta\Gamma(\beta-1)} (x-a)^\beta = \frac{1}{\beta} (x-a)^\beta. \end{aligned}$$

*grâce à la relation bien connue (1.2).*

*De la même manière, on montre que*

$$I_{b^-}^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

### 1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Pour définir leurs dérivées, Riemann et Liouville adoptent une méthode simple, par exemple la dérivée d'ordre un demi au sens de R-L d'une fonction  $f$  est donnée par :

$$D^{\frac{1}{2}}f(x) = \frac{d}{dx} \left( I^{\frac{1}{2}}f \right) (x),$$

c'est à dire la dérivée (ordinaire) de l'intégrale fractionnaire d'ordre un demi.

**Définition 1.7** Soit  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville  $D_{a+}^{\alpha}f$  et  $D_{b-}^{\alpha}f$  d'ordre  $\alpha$  sont définies respectivement par :

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha}f(x) &= \left( \frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a, \end{aligned} \quad (1.6)$$

et

$$\begin{aligned} D_{b-}^{\alpha}f(x) &= \left( -\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En particulier, quand  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  alors

$$D_{a+}^0f(x) = D_{b-}^0f(x) = f(x),$$

et

$$D_{a+}^nf(x) = f^{(n)}(x), \quad D_{b-}^nf(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$$

où  $f^{(n)}(x)$  est la dérivée ordinaire de  $f(x)$ .

**Remarque 1.2** les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  en un point  $x$  est à caractère non local, elle dépend de toutes les valeurs de  $f(x)$  dans

l'intervalle  $(a, x)$ .

une

condition suffisante pour que l'intégrale fractionnaire d'une fonction  $f$  existe est que  $f \in AC^n([a, b])$ .

**Remarque 1.3** Si  $0 < \alpha < 1$  alors,

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt, \quad (x > a),$$

et

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t - x)^{n - \alpha - 1} f(t) dt, \quad (x < b).$$

**Exemple 1.2** Soient  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  calculons les dérivées fractionnaires à droite et à gauche de la fonction  $f(x) = (x - a)^{\beta}$ . On a par définition de la dérivée de R-L

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(x) &= D^{\alpha}(x - a)^{\beta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{\beta} dt \end{aligned}$$

Par le changement de variable  $t = a + (x - a)s$ , on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(x - a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{n + \beta - \alpha} \int_a^x (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(n + \beta - \alpha + 1) B(n - \alpha, \beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n + \beta - \alpha + 1) \Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - \alpha + 1) \Gamma(n + \beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \quad a < x < b. \end{aligned}$$

donc

$$D_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}$$

de la même façon on montre que

$$D_{b-}^{\alpha} (b - x)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (b - x)^{\beta - \alpha}$$

**Remarque 1.4** On voit bien que dans le cas où  $\beta = 0$ , les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'une constante ne sont pas nulles en generale

$$D_{a+}^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}; \quad D_{b-}^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha} \quad (0 < \alpha)$$

**Proposition 1.2** Soit  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , alors pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , on a

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

**Corollaire 1.1** 1) la relation  $D_{a+}^{\alpha}f(x) = 0$  est vraie si et seulement si

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

où  $c_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) sont des constantes arbitraires. Dans le cas particulier, où  $0 < \alpha < 1$ , la relation  $D_{a+}^{\alpha}f(x) = 0$  est vraie ssi

$$f(x) = c(x-a)^{\alpha-1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) la relation  $D_{b-}^{\alpha}f(x) = 0$  est vraie si et seulement si

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (b-x)^{\alpha-j},$$

où  $c_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) sont des constantes arbitraires. Dans le cas particulier, où  $0 < \alpha < 1$ , la relation  $D_{b-}^{\alpha}f(x) = 0$  est vraie ssi

$$f(x) = c(b-x)^{\alpha-1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

3) dans le cas particulier ou  $a = 0$ , l'équation différentielle fractionnaire

$$D_{0+}^{\alpha}f(t) = 0$$

admet la solution

$$f(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $n = [\alpha] + 1$

**Proposition 1.3** Soit  $\alpha > 0$  et  $f \in AC^n [a, b]$ . Alors

$$I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $n = [\alpha] + 1$

### 1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ait jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

En utilisant une approche différente de celle de R-L, Caputo a défini la dérivée fractionnaire à l'opposé de R-L en appliquant l'opérateur de la dérivation puis celui de l'intégrale (R-L font l'inverse, ils intègrent puis ils dérivent). c'est à dire la dérivée d'ordre un demi par exemple, au sens de Caputo sera donnée par :

$${}^C D^{\frac{1}{2}} f(x) = I^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} f(x)$$

Cependant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est toujours une généralisation de la dérivée ordinaire dans le sens  ${}^C D^n = \frac{d^n}{dx^n}$  si  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 1.8** soit  $\alpha > 0$  avec  $n = [\alpha] + 1$ , si  $f$  est une fonction telle que  $f \in AC^n([a, b])$ , alors les dérivées fractionnaires (à gauche et à droite) d'ordre  $\alpha$  de  $f$  au sens de Caputo existent sur  $[a, b]$  et sont définies par

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^\alpha f(x) &= I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^C D_{b-}^\alpha f(x) &= (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

En particulier quand  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in AC([a, b])$ ,

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^\alpha f(x) &= I_{a+}^{1-\alpha} Df(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^C D_{b-}^\alpha f(x) &= -I_{b-}^{1-\alpha} Df(x) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned}$$

**Remarque 1.5** Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ , alors  ${}^C D_{a+}^n f(x)$  et  ${}^C D_{b-}^n f(x)$  sont données par :

$${}^C D_{a+}^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad {}^C D_{b-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

En particulier

$${}^C D_{a+}^0 f(x) = {}^C D_{b-}^0 f(x) = f(x)$$

**Remarque 1.6** la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est aussi à caractère non local.

**Exemple 1.3** calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction  $f(x) = (x-a)^\beta$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que  $n-1 \leq \alpha < n$  et  $f(x) = (x-a)^\beta$  avec  $\beta > 0$ , alors on a

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt, \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable  $t = a + s(x-a)$  on obtient

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_a^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

De même on trouve

$${}^C D_{b-}^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-x)^{\beta-\alpha}.$$

En particulier on a

$${}^C D_{a+}^\alpha C^{te} = {}^C D_{b-}^\alpha C^{te} = 0$$

donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.

## Propriétés

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle  $[a, b]$  est décrite par le théorème suivant :

**Théorème 1.2** Soit  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f$  possède  $n - 1$  dérivées en  $a$  et si  $D_{a+}^\alpha f$ ,  $D_{b-}^\alpha f$  existent, alors

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right].$$

et

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right].$$

En particulier, quand  $0 < \alpha < 1$ , les relations précédentes prennent les formes suivantes :

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha [f(x) - f(a)],$$

et

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha [f(x) - f(b)].$$

**Remarque 1.7** En utilisant les dérivées fractionnaires de R-L calculées précédemment de  $(x-a)^k$  on trouve :

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, (n = [\alpha] + 1)$$

et

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}, (n = [\alpha] + 1).$$

En particulier, quand  $0 < \alpha < 1$ , on a :

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha},$$

et

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha}.$$

**Remarque 1.8** Si  $\alpha \notin \mathbb{N}^*$ , la dérivée de Caputo coïncide avec celle de R-L dans les cas suivants :

$$(1) \quad {}^C D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x) \text{ si } f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ (} n = [\alpha] + 1 \text{).}$$

$$(2) \quad {}^C D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x) \text{ si } f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0 \text{ (} n = [\alpha] + 1 \text{).}$$

En particulier, quand  $0 < \alpha < 1$ , nous avons

$$\text{si } f(a) = 0,$$

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x)$$

et

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x)$$

si  $f(b) = 0$ .

Les théorèmes suivants expriment certaines propriétés de l'opérateur de dérivation de Caputo.

**Théorème 1.3** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent. Alors pour tous  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  ${}^C D^\alpha (\lambda f + \gamma g)$  existe, et l'on a

$${}^C D^\alpha (\lambda f(x) + \gamma g(x)) = \lambda {}^C D^\alpha f(x) + \gamma {}^C D^\alpha g(x).$$

**Théorème 1.4** [30] Soient  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  et  $f \in C^n[a, b]$ . Alors les opérateurs fractionnaires de Caputo  ${}^C D_{a+}^\alpha$  et  ${}^C D_{b-}^\alpha$  sont continues sur  $[a, b]$  :  ${}^C D_{a+}^\alpha \in C[a, b]$  et  ${}^C D_{b-}^\alpha \in C[a, b]$ , de plus si  $\alpha$  n'est pas entier alors  ${}^C D_{a+}^\alpha$  et  ${}^C D_{b-}^\alpha$  sont bornés de  $C^n[a, b]$  dans  $C_a[a, b]$  et  $C_b[a, b]$  respectivement. De plus on a :

$$\|{}^C D_{a+}^\alpha f\|_{C_a} \leq k_\alpha \|f\|_{C^n}$$

et

$$\|{}^C D_{b-}^\alpha f\|_{C_b} \leq k_\alpha \|f\|_{C^n}$$

où

$$k_\alpha = \frac{(b-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha+1)}$$

**Théorème 1.5** Si  $\alpha > 0$ , tel que  $n = [\alpha] + 1$  et si  $f \in C[a, b]$ , alors.

$${}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = {}^C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha f(x) = f(x).$$

En d'autre terme la dérivée fractionnaire de Caputo est toujours l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire.

**Preuve.** Soit  $f \in C[a, b]$ , et  $\alpha > 0$ , et comme  $D^k I_{a+}^\alpha f(a) = 0$ , pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , alors on a pour :

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) &= D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

■

la dérivée fractionnaire de Caputo est-elle un inverse droit de l'intégrale fractionnaire ?

**Théorème 1.6** Soient  $\alpha > 0$ , et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n([a, b])$ , alors on a

$$I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

et

$$I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k.$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$  et  $f(x) \in AC[a, b]$ , alors on a :

$$I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha f(x) = f(x) - f(a),$$

et

$$I_{b-}^{\alpha} {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(b).$$

**Preuve.** On a par définition

$${}^C D^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(x),$$

en appliquant à gauche les opérateurs d'intégration  $I_{a+}^{\alpha}$ ,  $I_{b-}^{\alpha}$  on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) &= I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= I_{a+}^n D^n f(x) \\ &= I_{a+}^n D_{a+}^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{b-}^{\alpha} {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) &= I_{b-}^{\alpha} I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= I_{b-}^n D^n f(x) \\ &= I_{b-}^n D_{b-}^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k. \end{aligned}$$

■

### 1.3.4 Interpretation physique

La loi d'Ohm stipule que le courant circulant dans un conducteur entre deux points donnés est directement proportionnel à la différence de potentiel et inversement proportionnel à la résistance entre eux. La formule mathématique peut être écrite comme suit :

$$v(t) = Ri(t),$$

où  $i(t)$  est le courant traversant le conducteur mesuré en ampères ( $A$ ),  $v(t)$  est la différence de potentiel mesurée entre deux points du conducteur en unités de volts  $V$  et  $R$  est la résistance du conducteur mesurée en ohms. Le courant est un flux de charge électrique à travers un milieu conducteur.

Dans les circuits électriques, cette charge est souvent transportée en déplaçant des électrons dans un fil. Le changement de la charge  $q$  par rapport au temps  $t$  est,

$$i(t) = \frac{dq}{dt}.$$

En tenant compte de cela, la loi d'Ohm peut s'écrire en fonction de la charge  $q(t)$

$$v(t) = R \frac{dq}{dt}. \quad (1.8)$$

L'idée est de réécrire la loi d'Ohm en termes de dérivée fractionnaire (non entière). A cet effet, nous introduisons un fractionnaire opérateur dérivé du temps comme suit :

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}, 0 < \gamma \leq 1 \quad (1.9)$$

où  $\gamma$  est un paramètre arbitraire très proche de 1, qui représente l'ordre de la dérivée et dans le cas  $\gamma = 1$  devient un opérateur dérivé ordinaire (entier). cependant, l'opérateur de temps ordinaire a des dimensions de secondes inverses  $s^{-1}$ . Alors l'expression (1.9) donne la dimension suivante,

$$\left[ \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \right] = \frac{1}{s^\gamma}, 0 < \gamma \leq 1,$$

qui n'est pas une dérivée du temps ordinaire, en raison de la dimension  $\frac{1}{s^\gamma}$ . Pour être cohérent avec la dimensionnalité, nous introduisons un nouveau paramètre,  $\sigma$ , comme suit :

$$\left[ \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \right] = \frac{1}{s}, 0 < \gamma \leq 1, \quad (1.10)$$

tel que lorsque  $\gamma = 1$  l'expression (1.10) devient un dérivé ordinaire. Ceci est vrai si le paramètre  $\sigma$  a des dimensions de secondes,  $[\sigma] = s$ . Par conséquent, nous pouvons changer l'ordinaire opérateur dérivé du temps par le fractionnaire comme suit :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} n - 1 < \gamma \leq n, \quad (1.11)$$

où  $n$  est un entier. Ces deux expressions représentent le temps dérivés, puisque leurs dimensions sont des secondes inverses. le paramètre  $\sigma$  caractérise les structures fractionnaires (composants qui présentent un comportement intermédiaire entre un système conservateur (condensateur) et dissipatif (résistance)), de l'opérateur de temps fractionnaire. En utilisant l'expression (1.11), la loi d'Ohm (1.8) devient une loi d'Ohm fractionnaire

$$v(t) = \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma q}{dt^\gamma}, 0 < \gamma \leq 1,$$

## 1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Le développement de la théorie du point fixe a été un des plus important outils d'existence dans l'étude des problèmes aux limites. Il convient de rappeler que cette théorie consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe et dès lors les points fixes du problème transformé sont les solutions du problème donné.

Dans cette section nous rappelons quelques théorèmes célèbres du point fixe utilisés essentiellement dans cette thèse.

### 1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème connu aussi sous le nom de l'application contractante se trouve à la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

**Définition 1.9** (*Point fixe*) Soit  $T$  une application d'un ensemble  $X$  dans lui même. On appelle point fixe tout point  $x \in X$  tel que  $T(x) = x$ .

**Théorème 1.7** [6] (*Principe de contraction de Banach*). Soit  $(M, d)$  un espace métrique complet et soit  $T : M \rightarrow M$  une application contractante i.e qu'il existe  $0 < k < 1$  telle que  $d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y) ; \forall x, y \in M$ , alors  $T$  admet un unique point fixe  $x^* \in M$ , de plus pour tout  $x \in M$  on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x^*$  et,

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)).$$

**Preuve.** La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie inductivement par  $x_{n+1} = T(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  converge vers  $x^* = T(x^*)$ . En ce qui concerne l'unicité en effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts  $x_1^*$  et  $x_2^*$  pour une contraction  $T$

$d(x_1^*, x_2^*) = d(T(x_1^*), T(x_2^*)) \leq k d(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_2^*)$ , c'est à dire,  $k \geq 1$  d'où la contradiction. ■

### 1.4.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est aussi l'un des résultats les plus célèbres de la théorie du point fixe et il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

**Théorème 1.8** [58] (*Théorème du point fixe de Schauder*). Soit  $K$  un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach  $E$  et supposons  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Alors  $T$  admet un point fixe.

**Théorème 1.9** [58] (*Théorème du point fixe de Schauder généralisé*) Soit  $F$  un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach  $X$  et soit  $T : F \rightarrow F$  une application continue telle que  $T(F)$  soit un sous-ensemble relativement compact de  $F$ . Alors  $T$  admet un point fixe.

### 1.4.3 Théorèmes du point fixe de Krasnoselskii

#### Théorème du point fixe de Krasnoselskii hybride

En 1955 Krasnoselskii combina le théorème de point fixe géométrique de Banach et le théorème de point fixe topologique de Schauder en un théorème hybride qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui s'écrit sous forme d'une somme de deux applications dont l'une est une contraction et l'autre est compacte admet au moins un point fixe. Depuis et jusqu'à l'heure actuelle ce théorème hybride qui porte d'ailleurs son nom est devenu extrêmement utile et il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de très nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

**Théorème 1.10** [6] (*Théorème du point fixe de Krasnoselskii*). Soit  $M$  un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ . Supposons que  $A$  et  $B$  sont deux applications de  $M$  dans  $X$  telles que

*i.*  $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$ .

*ii.*  $A$  est continue et  $AM$  est contenu dans un ensemble compact.

*iii.*  $B$  est une contraction de constante  $\alpha < 1$ .

Alors, il existe  $x \in M$ , avec  $Ax + Bx = x$

**Preuve.** Soit  $y$  fixé dans  $M$ , comme  $B$  est une contraction, l'équation  $Bx + Ay = x$  admet une solution unique  $x$  dans  $M$ . On définit l'application

$$\begin{aligned} L & : M \rightarrow M \\ Ly & = x \\ Ly & = BLy + Ay \quad (y \in M). \end{aligned}$$

Il est clair que  $LM \subset M$ . On va montrer que  $L$  est compact et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe  $x \in M$  tel que  $Ly = y$ , d'où  $Ay + By = y$ .

Soit  $y_n$  une suite de point de  $M$ , alors d'après la définition de  $L$  :

$$Ly_n = BLy_n + Ay_n$$

et

$$Ly - Ly_n = BLy - BLy_n + Ay - Ay_n$$

alors

$$\|Ly - Ly_n\| \leq \|BLy - BLy_n\| + \|Ay - Ay_n\|$$

et puisque  $B$  est une contraction on a :

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k \|Ly - Ly_n\| + \|Ay - Ay_n\| \\ &\leq \frac{1}{1-k} \|Ay - Ay_n\| \end{aligned}$$

d'où la continuité de  $L$ . Reste à montrer que  $LM$  est relativement compact. En effet, comme  $AM$  est relativement compact, alors  $\forall \epsilon > 0, \exists (1-k)\epsilon$  réseau  $By_1, \dots, By_n$ , c'est-à-dire les boules  $\mathbb{B}(By_k, (1-k)\epsilon)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) telles que

$$BM \subset \cup_{k=1}^n \mathbb{B}(By_k, (1-k)\epsilon).$$

Alors de

$$\|Ly - Ly_n\| \leq \frac{1}{1-k} \|Ay - Ay_n\|$$

on en déduit que  $Ly_1, \dots, Ly_n$  est un réseau de  $LM$ , ce qui achève la démonstration. ■

Notons, que si  $A = 0$ , le théorème se résume au théorème de Banach. Si  $B = 0$ , alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

## **Théorème de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône**

Notons que l'un des théorèmes le plus utilisé lorsqu'il s'agit de la recherche du point fixe positif est le théorème Guo-Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône. Ce théorème généralise celui des valeurs intermédiaires connu sur  $\mathbb{R}$  à un espace de Banach quelconque, une généralisation qui assure l'existence d'un point fixe positif bien sûr si on prend un cône positif pour un opérateur complètement continu sous certaines conditions imposées uniquement sur la frontière des certains ouverts du cône  $K$ .

**Théorème 1.11** [27] (*Théorème de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône*) Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts bornés d'un espace de Banach  $E$  tels que  $0 \in \Omega_1$ ,  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$  et  $K$  un cône de  $E$ .

$$\mathcal{A} : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$$

un opérateur complètement continu, tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

i)  $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , et  $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ ,

ii)  $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , et  $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ .

Alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  admet au moins un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ .

**Définition 1.10** (*Opérateur complètement continu*).

Soient  $E$  un espace de Banach et  $\Omega$  une partie de  $E$ . On dit que l'opérateur  $T : \Omega \rightarrow E$  est complètement continu s'il est continu et si pour toute partie bornée  $B$  de  $\Omega$ ,  $T(B)$  est relativement compact dans  $E$ .

### **1.4.4 Théorème d'Ascoli-Arzelà**

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

**Théorème 1.12** [6] (*Théorème d'Ascoli-Arzelà*) Soit  $X = C([a, b])$  muni de la norme  $\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . Si  $M$  est un sous ensemble de  $X$  tel que :

(i)  $M$  est uniformément borné, i.e.  $\exists r > 0, \forall u \in M : \|u\| < r$

(ii)  $M$  est équicontinu, i.e.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in M, \forall t_1, t_2 \in [a, b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow$

$|u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$

Alors

$M$  est relativement compact.

# Chapitre 2

## Positivité et unicité de la solution d'un problème non linéaire fractionnaire

### 2.1 Introduction

Au cours des dernières années, les équations différentielles fractionnaires ont été d'un grand intérêt pour de nombreux mathématiciens en raison du développement de la théorie du calcul fractionnaire et ses applications interdisciplinaires. Cependant une vaste littérature a été développée et une attention plus particulière a été attribuée aux questions liées à l'existence, l'unicité, la positivité et la stabilité de la solution. On peut citer par exemple et la liste est non exhaustive les travaux [4], [16], [33], [51].

Ahmed. B. et Alsaedi, A dans [3] ont établi en utilisant les théorèmes du point fixe l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites fractionnaire suivant :

$${}^c D^\alpha ({}^c D^\beta x(t)) + \chi x(t) = f(t, x(t), I_{a^+}^\rho x(t)), t \in [0, 1],$$

$$x(0) = \sum_{j=1}^m \nu_j x(\sigma_j), x'(0) = 0, a_1 x(1) + a_2 x'(1) = \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{\eta_i}^{\zeta_i} x(s) ds,$$

où  ${}^c D^\alpha$ , désigne la dérivé fractionnaire de Caputo ,  $0 < \beta \leq 1, 1 < \alpha \leq 2, p, \chi > 0$ ,  $a_1, a_2, \nu_j, \rho_i \in \mathbb{R}, 0 < \sigma_i < \zeta_i < \eta_i < 1, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ , et  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Dans [26] A. Guezane-Lakoud et R. Khaldi ont étudié en appliquant la méthode des sous et sur solutions l'équation fractionnaire non linéaire d'Euler–Lagrange impliquant à la fois les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et de Caputo à droite

$$\begin{aligned} {}^c D_{-1}^\alpha \left( {}^c D_{0+}^\beta u(t) + u(t) \right) + ({}^c D_{0+}^\beta u(t) + u(t)) + f(t, u(t)) &= 0, 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = 0, {}^c D_{0+}^\beta u(1) + u(1) &= 0 \end{aligned}$$

où  $0 < p, q < 1, {}^c D_{-1}^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo and  ${}^c D_{0+}^\beta$  est la dérivée fractionnaire à gauche au sens d Riemann-Liouville.

Dans ce même contexte notre contribution consiste à étudier le problème aux limites fractionnaire  $(P_1)$  suivant :

$$(P_1) \begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u(t)) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = \int_0^1 u(s) ds \end{cases}$$

où  ${}^c D^\alpha ({}^c D^\beta)$  sont des dérivées fractionnaire au sens de Caputo,  $0 < \alpha, \beta \leq 1$

et  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue et positive. Au fait, nous nous proposons d'établir la positivité et l'unicité de la solution du problème  $(P_1)$  via le théorème de Krasnoselskii dans un cône et le principe de contraction de Banach.

Rappelons que l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\theta > 0$  sur  $[a, b]$  d'une fonction  $y$  est définie par :

$$I_{a+}^\theta y(t) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_a^t (t-s)^{\theta-1} y(s) ds, t > a$$

et la dérivée de Caputo  ${}^C D^\alpha$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , sur  $[a, b]$  d'une fonction  $y \in AC^n[a, b]$ , est définie par

$${}^C D^\theta y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\theta)} \int_a^t (t-s)^{n-\theta-1} y^{(n)}(s) ds, t > a$$

où  $n = [\theta] + 1$ ,  $[\theta]$  est la partie entière de  $\theta$ .

Soit  $y \in C^n[a, b]$ , alors

$$I_{0+}^{\theta C} D^\theta y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{n-1}, a_i \in \mathbb{R}$$

## 2.2 Lemme préliminaire

Dans cette section, en se servant de la fonction de Green et ses propriétés on établira la positivité de la solution du problème  $(P_1)$ , pour cela nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant

**Lemme 2.1** *Soit  $y \in L^1(0, 1)$ . L'unique solution du problème linéaire fractionnaire*

$$(PL) \begin{cases} {}^C D^\alpha ({}^C D^\beta u)(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1, 0 < \alpha, \beta \leq 1 \\ u(0) = 0, u(1) = \int_0^1 u(s) ds \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(t-s)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)} + \frac{(\beta+1)(1-s)^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^\beta (\beta + \alpha - 1 + s), & s \leq t \\ \frac{(\beta+1)(1-s)^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^\beta (\beta + \alpha - 1 + s), & s \geq t \end{cases}$$

**Preuve.** En appliquant successivement les opérateurs  $I_{0+}^\alpha$  puis  $I_{0+}^\beta$  à l'équation différentielle (PL), on obtient

$$u(t) = -I_{0+}^{\beta+\alpha}y(t) + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}c_0 + c_1,$$

la condition initiale  $u(0) = 0$  implique  $c_1 = 0$ , alors

$$u(t) = -I_{0+}^{\beta+\alpha}y(t) + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}c_0.$$

En intégrant sur  $(0, 1)$ , on obtient

$$\int_0^1 u(s) ds = -I_{0+}^{\beta+\alpha+1}y(1) + \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}c_0$$

de la condition intégrale  $u(1) = \int_0^1 u(s) ds$  il vient que

$$-I_{0+}^{\beta+\alpha}y(1) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}c_0 = -I_{0+}^{\beta+\alpha+1}y(1) + \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}c_0$$

ce qui implique

$$c_0 = \frac{\Gamma(\beta+2)}{\beta} \left( I_{0+}^{\beta+\alpha}y(1) - I_{0+}^{\beta+\alpha+1}y(1) \right)$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} u(t) &= -I_{0+}^{\beta+\alpha}y(t) + \frac{(\beta+1)}{\beta}t^\beta \left( I_{0+}^{\beta+\alpha}y(1) - I_{0+}^{\beta+\alpha+1}y(1) \right) \\ &= \int_0^1 G(t,s)y(s) ds \end{aligned}$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{-(t-s)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)} + \frac{(\beta+1)(1-s)^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha+1)}t^\beta(\beta+\alpha-1+s), & s \leq t \\ \frac{(\beta+1)(1-s)^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha+1)}t^\beta(\beta+\alpha-1+s), & s \geq t \end{cases}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

**Lemme 2.2** *Supposons que  $1 < \beta+\alpha \leq 2$ , alors la fonction de Green  $G(t,s)$  est positive,*

continue et satisfait les propriétés suivantes :

$$G(t, s) \leq \frac{(\beta + 1)(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha)}, \text{ pour tout } s, t \in [0, 1] \quad (2.1)$$

$$G(t, s) \geq \zeta (1 - s)^{\beta + \alpha - 1}, \text{ pour tout } s, t \in [\tau, 1] \quad (2.2)$$

où  $\tau \in (0, 1)$  et

$$\zeta = \frac{\tau^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} (-\beta(\beta + \alpha) + \tau(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1 + \tau)).$$

**Preuve.** Pour tout  $s \leq t$  nous avons

$$\begin{aligned} G(t, s) &\leq \frac{(\beta + 1)(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha)}, \\ G(t, s) &\geq \frac{-(t - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\Gamma(\beta + \alpha)} + \frac{(\beta + 1)(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} t^\beta (\beta + \alpha - 1 + s) \\ &\geq \frac{t^{\beta + \alpha - 1}(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} (-\beta(\beta + \alpha) + t^{1 - \alpha}(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1 + s)) \\ &\geq \frac{t^{\beta + \alpha - 1}(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} (-\beta(\beta + \alpha) + t(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1 + s)) \\ &\geq \frac{t^{\beta + \alpha - 1}(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} (-\beta(\beta + \alpha) + s(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1 + s)) \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} &-\beta(\beta + \alpha) + s(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1 + s) \\ &= (\beta + 1)s^2 + s(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1) - \beta(\beta + \alpha) \end{aligned}$$

a deux racines

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1) + \sqrt{(\beta + 1)^2(\beta + \alpha - 1)^2 + 4(\beta + 1)\beta(\beta + \alpha)}}{2(\beta + 1)} > 0 \\ s_2 &= \frac{-(\beta + 1)(\beta + \alpha - 1) - \sqrt{(\beta + 1)^2(\beta + \alpha - 1)^2 + 4(\beta + 1)\beta(\beta + \alpha)}}{2(\beta + 1)} < 0 \end{aligned}$$

Nous avons  $0 < s_1 < 1$ , en effet

$$\begin{aligned}
s_1 - 1 &= \frac{-(\beta+1)(\beta+\alpha-1) + \sqrt{(\beta+1)^2(\beta+\alpha-1)^2 + 4(\beta+1)\beta(\beta+\alpha)} - 2(\beta+1)}{2(\beta+1)} \\
&= \frac{\sqrt{(\beta+1)^2(\beta+\alpha-1)^2 + 4(\beta+1)\beta(\beta+\alpha)} - (\beta+1)(\beta+\alpha+1)}{2(\beta+1)} \\
&= \frac{(\beta+1)^2(\beta+\alpha-1)^2 + 4(\beta+1)\beta(\beta+\alpha) - (\beta+1)^2(\beta+\alpha+1)^2}{2(\beta+1)\left(\sqrt{(\beta+1)^2(\beta+\alpha-1)^2 + 4(\beta+1)\beta(\beta+\alpha)} + (\beta+1)(\beta+\alpha+1)\right)} \\
&= \frac{-4(\beta+1)(\beta+\alpha)}{2(\beta+1)\left(\sqrt{(\beta+1)^2(\beta+\alpha-1)^2 + 4(\beta+1)\beta(\beta+\alpha)} + ((\beta+1)(\beta+\alpha-1) + 2(\beta+1))\right)} < 0.
\end{aligned}$$

Soit  $\tau \in ]s_1, 1[$ , alors pour  $s, t \in [\tau, 1]$

$$\begin{aligned}
G(t, s) &\geq \frac{\tau^{\beta+\alpha-1} (1-s)^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha+1)} (-\beta(\beta+\alpha) + \tau(\beta+1)(\beta+\alpha-1+\tau)) \\
&= \zeta (1-s)^{\beta+\alpha-1}
\end{aligned}$$

où

$$\zeta = \frac{\tau^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha+1)} (-\beta(\beta+\alpha) + \tau(\beta+1)(\beta+\alpha-1+\tau))$$

par conséquent

$$G(t, s) \leq \frac{(\beta+1)(1-s)^{\beta+\alpha-1}}{\beta\Gamma(\beta+\alpha)}, \text{ pour tout } s, t \in [0, 1]$$

$$G(t, s) \geq \zeta (1-s)^{\beta+\alpha-1}, \text{ pour tout } s, t \in [\tau, 1]$$

Ce qui termine la preuve. ■

## 2.3 Positivité de la solution

Soit  $E$  l'espace des fonctions réelles continues définies sur  $I = [0, 1]$  muni de la norme  $\|u\| = \max_{t \in I} |u(t)|$ . Définissons l'opérateur  $T : E \longrightarrow E$  par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, 1].$$

La fonction  $u \in E$  est solution du problème  $(P_1)$  si et seulement si  $Tu(t) = u(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

**Lemme 2.3** *Supposons que  $1 < \beta + \alpha \leq 2$ . Si  $u \in E$  une solution du problème fractionnaire  $(P_1)$  alors elle satisfait*

$$\min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \frac{\zeta \beta \Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)} \|u\|. \quad (2.3)$$

**Preuve.** Comme  $u$  est solution du problème  $(P_1)$ , alors en vertu du lemme 2.2, nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= Tu(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds \\ &\leq \frac{(\beta + 1)}{\beta \Gamma(\beta + \alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} f(s, u(s)) ds \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\|u\| \leq \frac{(\beta + 1)}{\beta \Gamma(\beta + \alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} f(s, u(s)) ds. \quad (2.4)$$

D'autre part, nous avons par (2.2) pour  $t \in [\tau, 1]$

$$u(t) \geq \zeta \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} f(s, u(s)) ds \geq \zeta \frac{\beta \Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)} \|u\| \quad (2.5)$$

d'où

$$\min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \frac{\zeta \beta \Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)} \|u\|.$$

Ceci termine la preuve. ■

Définissons le cône  $K$  par

$$K = \left\{ u \in C[0, 1], u(t) \geq 0, t \in [0, 1], \min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \frac{\zeta \beta \Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)} \|u\| \right\}$$

$K$  est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de  $E$ .

Introduisons les notations suivantes :  $f_0 = \lim_{|u| \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t, u)}{|u|}$ ,  $f_\infty = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t, u)}{|u|}$ . On dit que  $f$  est sur-linéaire respectivement sous-linéaire lorsque  $f_0 = 0$  et  $f_\infty = \infty$  respectivement  $f_0 = \infty$  et  $f_\infty = 0$ .

Nous énonçons à présent le théorème principal soit celui de l'existence de la solution positive du problème  $(P_1)$ .

**Théorème 2.1** *Le problème aux limites  $(P_1)$  admet au moins une solution positive dans les deux cas sur-linéaire ainsi que sous-linéaire.*

La preuve de ce théorème se base essentiellement sur le théorème de Guo-Krasnoselskii dans un cône que nous rappelons ici et pour ce faire nous avons encore besoin du lemme suivant

**Définition 2.1** *Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $K \subset E$  un sous ensemble non vide fermé de  $E$ .  $K$  est dit un cône s'il satisfait les conditions :*

1.  $(\alpha u + \beta v) \in K$  pour tout  $u, v \in K$  et pour  $\alpha, \beta > 0$ .
2.  $u \in K$  et  $-u \in K$  implique  $u = 0$ .

**Théorème 2.2** *Soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts bornés d'un espace de Banach  $E$  tels que  $0 \in \Omega_1$ ,  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$  et  $K$  un cône de  $E$ .*

$$\mathcal{A} : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$$

un opérateur complètement continu, tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

$$i) \|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1, \text{ et } \|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2,$$

$$ii) \|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1, \text{ et } \|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

Alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  admet au moins un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ .

**Lemme 2.4** *L'opérateur  $T$  est complètement continue sur  $K$  et  $TK \subset K$ .*

**Preuve.** Comme  $G$  et  $f$  sont continues alors  $T$  est continu. Soient  $\Omega = \{u \in K, \|u\| \leq r\}$ ,  $u \in \Omega$ , et  $M = \max \{f(t, u), 0 \leq t \leq 1, \|u\| \leq r\}$ . Alors en vue du lemme 2.2, on a

$$Tu(t) \leq \frac{(\beta + 1)}{\beta \Gamma(\beta + \alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} f(s, u(s)) ds \leq \frac{(\beta + 1) M}{\beta (\beta + \alpha) \Gamma(\beta + \alpha)}$$

donc

$$\|Tu\| \leq \frac{(\beta + 1) M}{\beta (\beta + \alpha) \Gamma(\beta + \alpha)}, \quad (2.6)$$

ce qui implique que  $T$  est uniformément borné.

Prouvons maintenant que  $T(\Omega)$  est équicontinu. Soit  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $t_1 \leq t_2$  et  $u \in \Omega$ , alors,

$$\begin{aligned} |T(u(t_1)) - T(u(t_2))| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| f(s, u(s)) ds \\ &\leq Mr \left[ \int_0^{t_1} \left| \frac{-(t_1 - s)^{\beta + \alpha - 1} + (t_2 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\Gamma(\beta + \alpha)} \right| ds \right. \\ &\quad + (t_2^\beta - t_1^\beta) \int_0^1 \frac{(\beta + 1)(1 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} (\beta + \alpha - 1 + s) ds \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\beta + \alpha - 1}}{\Gamma(\beta + \alpha)} ds \right] \\ &\leq Mr \left[ \frac{t_2^{\beta + \alpha} - t_1^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + (t_2^\beta - t_1^\beta) \frac{(\beta + 1)(\beta + \alpha)}{\beta \Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{(t_2 - t_1)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} \right] \\ &\rightarrow 0, \text{ quand } t_1 \rightarrow t_2, \end{aligned}$$

par consequent  $T(\Omega)$  est équicontinu. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, il s'ensuit que  $T$  est complètement continu. Enfin, en procédant comme dans la démonstration du lemme, nous prouvons que  $TK \subset K$ . ■

Démontrons à présent le resultat principal de cette section.

**Preuve.** Examinons le cas où  $f$  est sur-linéaire. Comme  $f_0 = 0$ , alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que si  $\|u\| \leq \delta$  alors  $f(t, u) \leq \varepsilon |u|$ . Soit  $\Omega_1 = \{u \in C[0, 1], \|u\| \leq \delta\}$ , alors pour  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , nous avons

$$Tu \leq \frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} f(s, u(s)) ds \leq \frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha + 1)} \varepsilon \|u\|$$

donc

$$\|Tu\| \leq \frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha + 1)} \varepsilon \|u\|, \quad (2.7)$$

en prenant  $\varepsilon = \left(\frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha + 1)}\right)^{-1}$ , il vient que

$$\|Tu\| \leq \frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha + 1)} \varepsilon \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1,$$

Maintenant si  $f_\infty = \infty$ , alors pour tout  $A > 0$ , il existe  $C > 0$  telle que  $f(t, u) \geq A|u|$  pour  $|u| \geq C$ . Choisissons  $R = \max\left(\left(\frac{\zeta\beta\Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)}\right)^{-1} C, 2\delta\right)$ , et notons par  $\Omega_2$  l'ensemble ouvert défini par  $\Omega_2 = \{z \in X, \|z\| < R\}$ . Il est clair que  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ . soit  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ , on a

$$Tu \geq \zeta \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} f(s, u(s)) ds \geq \frac{\zeta}{\beta + \alpha} A \|u\| \quad (2.8)$$

donc pour  $A = \left(\frac{\zeta}{\beta + \alpha}\right)^{-1}$  on obtient

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad \text{pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_2 \quad (2.9)$$

D'où suite à la première assertion du théorème 2.2, il en résulte que  $T$  a point fixe dans  $u \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$  tel que  $C \leq \|u\| \leq R$ . Enfin en ce qui concerne la souslinéarité la preuve est analogue à celle du cas où  $f$  est superlinéaire. ■

## 2.4 Unicité de la solution

Dans la présente section nous nous établissons via le principe de contraction de Banach l'unicité de la solution

**Théorème 2.3** *Supposons que  $1 < \beta + \alpha \leq 2$  et qu'il existe une fonction positive  $g \in L^1(0, 1)$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ , on ait*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq g(t) |u - v|, \quad (3.10)$$

$$\|g\|_{L^1} < \frac{\beta\Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)} \quad (3.11)$$

Alors le problème  $(P_1)$  a une solution unique.

**Preuve.** Prouvons que  $T$  est une contraction. Soient  $t \in [0, 1]$ , et  $u, v \in E$ , alors en accord avec le lemme 2.2 et en tenant compte de (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \int_0^1 G(t, s) |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq \frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha)} \left( \int_0^1 (1 - s)^{\beta + \alpha - 1} g(s) ds \right) \|u - v\| \\ &\leq \frac{(\beta + 1)}{\beta\Gamma(\beta + \alpha)} \left( \int_0^1 g(s) ds \right) \|u - v\| = \frac{(\beta + 1) \|g\|_{L^1}}{\beta\Gamma(\beta + \alpha)} \|u - v\| \end{aligned}$$

en vertu (3.11), il s'ensuit que  $T$  est une contraction dès lors, elle admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème  $(P_1)$ . ■

## 2.5 Exemples

Comme illustration des resultat obtenus, considérons les deux exemples suivants :

**Exemple 2.1** *Considérons le problème  $(P_1)$  avec*

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 0.7, \quad f(t, u) = (1 + t) (1 + u^2),$$

Il est facile de vérifier que  $f_0 = 0$ ,  $f_\infty = \infty$ , et c'est donc la surlinéarité, alors en vue du théorème 2.1, il en résulte que le problème a au moins une solution positive  $u \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ .

**Exemple 2.2** *Egalement considérons le problème  $(P_1)$  avec*

$$\alpha = 0.8, \beta = 0.6, f(t, u) = \frac{1}{3+t} \left( 1 + \frac{|u|}{1+|u|} \right),$$

*donc (3.10) et (3.11) sont satisfaites*

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &\leq g(t) |u - v|, \\ g(t) &= \frac{1}{3+t}, \\ \|g\|_{L^1} &= 0.28768 < \frac{\beta \Gamma(\beta + \alpha)}{(\beta + 1)} = 0.33272, \end{aligned}$$

*donc en vertu du théorème 2.3, il en découle que le problème admet une solution unique.*

# Chapitre 3

## Existence de solutions pour un problème aux limites aux dérivées fractionnaires

### 3.1 Introduction

Durant ces dernières années les équations différentielles fractionnaires ont connu un essor considérable et sont devenues un important sujet de recherche. Cependant, et à cause de leur grande importance dans les applications, notamment dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines tels que la physique, la biophysique, la chimie, la biologie, la théorie du contrôle, l'économie, etc, voir [22, 29, 30, 49, 59], l'étude de ce type d'équations a fait alors l'objet de plusieurs travaux où différents concepts de solutions sont apparus et une vaste littérature s'est développée pour plus de détails voir [4, 13, 24, 25, 32 – 33, 36, 39, 51, 57]. Tout comme les équations différentielles fractionnaires, les équations intégro-différentielles fractionnaires ont à leurs tours suscité un intérêt grandissant et ont été intensivement étudiées et de nombreux résultats ont été obtenus voir [1, 5, 8, 12, 13, 26, 31, 43, 49] et les références s'y rattachant.

Dans [18] Baleanu et al. établissent en utilisant les théorèmes du point fixe l'existence

et l'unicité de la solution du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t)) & (0 < t < 1), \\ u(0) + au(1) = 0 \text{ et } u'(0) - bu'(1) = 0. \end{cases}$$

où  $1 < \alpha < 2$ ,  $0 < \beta_i < 1$ ,  $\alpha - \beta_i \geq 1$ ,  $a, b \neq -1$ ,  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $\gamma, \lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  sont deux applications telles que

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left( \int_0^t \gamma(t, s) ds \right) < \infty \text{ et } \sup_{t \in [0, 1]} \left( \int_0^t \lambda(t, s) ds \right) < \infty,$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont définies par  $(\varphi u)(t) = \int_0^t \gamma(t, s) ds$   $(\psi u)(t) = \int_0^t \lambda(t, s) ds$ .

De leurs côtés, Wang et al [56] prouvent l'existence, l'unicité ainsi que la positivité de la solution de l'équation intégréo-différentielles fractionnaire

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha u(t) + f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t)) = 0 & (0 < t < 1) \\ u(0) = b_0, u'(0) = b_1, \dots, u^{(n-3)}(0) = b_{n-3}, \\ u^{(n-1)}(0) = b_{n-1}, u(1) = \mu \int_0^1 u(s) ds \end{cases}$$

où  $n - 1 < \alpha \leq n$ ,  $-1, n \geq 3$ ,  $b_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 3, n - 1$ ),  ${}^c D^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo.  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue avec  $(\varphi u)(t) = \int_0^t K(t, s) u(s) ds$  et  $(\psi u)(t) = \int_0^t H(t, s) u(s) ds$

Motivé par les travaux précédents, nous nous proposons d'établir dans ce chapitre moyennant le théorème de Krasnoselskii l'existence de la solution du problème fractionnaire suivant :

$$(P) \begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u)(t) = f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t)) & (0 < t < 1) \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où  ${}^c D^\alpha ({}^c D^\beta)$  désigne une suite de dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  et  $\beta$  de Caputo,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta \leq 1$  et  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

## 3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes que nous utiliserons pour la preuve du résultat principal.

**Lemme 3.1** [30] *Si  $\alpha > 0$ , alors l'équation différentielle*

$${}^c D^\alpha u(t) = 0$$

*admet une solution*

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

*où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , ( $n$  est le plus petit entier tel que  $n \geq \alpha$ ).*

**Lemme 3.2** [30] *Pour  $\alpha > 0$ , et  $u \in C^n [0, 1]$ , alors*

$$I^\alpha ({}^c D u)(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}.$$

*où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  ( $n$  est le plus petit entier tel que  $n \geq \alpha$ ).*

Pour l'étude de l'existence de la solution commençons d'abord par résoudre un problème auxiliaire donné par le lemme préliminaire suivant.

**Lemme 3.3** *Pour  $y \in C [0, 1]$ , alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u)(t) = y(t), & 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2 \text{ and } 0 < \beta \leq 1 \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

admet une solution unique donnée par

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds \\
&+ \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta)} (-\beta - 1 + \beta t) \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds \\
&+ \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds
\end{aligned} \tag{3.2}$$

**Preuve.** Par application du lemme 3.2, le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds + \frac{t^\beta}{\beta\Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)} c_1 + c_2. \tag{3.3}$$

Par dérivation des deux membres de (3.3) on obtient

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^\beta}{\beta\Gamma(\beta)} c_1.$$

En utilisant les conditions  $u(1) = u(0) = u'(1) = 0$ , on trouve

$$\begin{aligned}
c_0 &= - \left( \frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds + \frac{\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds, \\
c_1 &= \frac{\beta^2(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds - \frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds, \\
c_2 &= 0.
\end{aligned}$$

En Substituant les valeurs  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  dans (3.3) on obtient (3.2). Ce qui achève la démonstration. ■

### 3.3 Existence de la solution

Nous donnons à présent le théorème principal de ce chapitre, soit celui d'existence de la solution du problème  $(P)$  basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Soit  $X = C(I)$  l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur  $I = [0, 1]$  muni de la norme  $\|u\| = \max_{t \in I} |u(t)|$ .

**Théorème 3.1** *Supposons que  $\alpha + \beta - 2 \geq 0$  et qu'il existe une fonction positive  $\theta(t) \in L^1(0, 1)$  telle que*

$$|f(t, x, y, z) - f(t, x', y', z')| \leq \theta(t) (|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|) \quad (3.4)$$

*pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$ . Alors le problème  $(P)$  admet au moins une solution dans  $X$  quand*

$$\frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + 2\beta + 1)\theta^*}{\Gamma(\alpha + \beta)} < 1. \quad (3.5)$$

où  $\gamma_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \gamma(t, s) ds \right|$ ,  $\lambda_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \lambda(t, s) ds \right|$  et  $\theta^* = \int_0^1 \theta(s) ds$ .

**Preuve.** Choisissons

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)},$$

et soit  $\varpi = \max \{f(t, 0, 0, 0) : t \in I\}$ . Considérons l'ensemble  $B_R = \{u \in X : \|u\| \leq R\}$ , alors  $B_R$  est un ensemble fermé, borné et convexe de  $X$ . Définissons deux opérateurs  $A$

et  $B$  sur  $X$  comme suit :

$$\begin{aligned}
Au(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds. \\
Bu(t) &= \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta)} (-\beta - 1 + \beta t) \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds \\
&\quad + \frac{t^\beta (\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds.
\end{aligned}$$

Pour tout  $u \in B_R$  et  $t \in I$ , en utilisant l'inégalité (3.4) on obtient

$$\begin{aligned}
|Au(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) - f(s, 0, 0, 0)| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, 0, 0, 0)| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} \theta(s) (|u(s)| + |\varphi u(s)| + |\psi u(s)|) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, 0, 0, 0)| ds \\
&\leq \frac{(1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|u\|}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 \theta(s) ds + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|Au\| \leq \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (3.6)$$

Estimons de même  $\|Bv\|$ , soit  $v \in B_R$  et  $t \in I$ , alors

$$\begin{aligned} |Bv(t)| &\leq \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta)} (\beta + 1 - \beta t) \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\ &\quad + \frac{t^\beta (\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\ &\leq \frac{\beta + 1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} \theta(s) (|v(s)| + |\varphi v(s)| + |\psi v(s)|) ds \\ &\quad + \frac{\beta + 1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} |f(t, 0, 0, 0)| ds \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} \theta(s) (|v(s)| + |\varphi v(s)| + |\psi v(s)|) ds \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(t, 0, 0, 0)| ds \\ &\leq \theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) \frac{(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|v\| + \frac{\varpi (\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \frac{\varpi (\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) (\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|v\| + \frac{\varpi (\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{(\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \varpi) \end{aligned}$$

Conséquemment

$$\|Bv\| \leq \frac{(\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \varpi). \quad (3.7)$$

En tenant compte des estimations (3.6) et (3.7) on obtient pour tout  $u, v \in B_R$  et  $t \in I$  :

$$\begin{aligned}
\|Au + Bv\| &\leq \|Au\| + \|Bv\| \\
&\leq \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} \\
&\quad + \frac{(\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \varpi) \\
&\leq R \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) (\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \\
&\quad + \frac{\varpi (\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)},
\end{aligned}$$

comme

$$R \geq \frac{\varpi (\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) (\alpha + 2\beta + 1)}$$

alors  $\|Au + Bv\| \leq R$ , donc  $Au + Bv \in B_R$ .

Prouvons maintenant que  $B$  est une contraction. Soient  $v, u \in B_R$  et  $t \in I$ , compte tenu de la condition (3.4) il en resulte que

$$\begin{aligned}
|Bu(t) - Bv(t)| &\leq \frac{t^\beta (\beta + 1 - \beta t)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \times \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) \\
&\quad - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\
&\quad + \frac{t^\beta (1-t)}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) \\
&\quad - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\
&\leq \frac{\beta + 1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} \theta(s) (|u(s) - v(s)| \\
&\quad + |\varphi u(s) - \varphi v(s)| + |\psi u(s) - \psi v(s)|) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} \theta(s) (|u(s) - v(s)| \\
& + |\varphi u(s) - \varphi v(s)| + |\psi u(s) - \psi v(s)|) ds \\
\leq & \frac{(\beta + 1)(1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\|}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 \theta(s) ds \\
& + \frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + \beta - 1) \|u - v\|}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 \theta(s) ds \\
\leq & \frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + 2\beta) \theta^*}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u - v\|
\end{aligned}$$

dés lors

$$\|Bu - Bv\| \leq \frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + 2\beta) \theta^*}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u - v\|,$$

En vertu de la condition (3.5), on en déduit que  $B$  est une contraction.

Prouvons maintenant que  $A$  est compact et continu. D'après la définition de l'opérateur  $A$ , on déduit que la continuité de  $f$  implique celle de  $A$ . De plus et en vu de (3.6) on a

$$\begin{aligned}
\|Au\| & \leq \frac{\theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} \\
& \leq \frac{\theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} R + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)}.
\end{aligned}$$

ce qui implique que  $A$  est uniformément borné sur  $B_R$ .

Soit  $L = \max_{0 \leq s \leq 1} \{|f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))|, u \in B_R\}$ . Soient  $t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2$  et  $u \in B_R$ . On a

$$\begin{aligned}
|Au(t_2) - Au(t_1)| & = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\beta+\alpha-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta+\alpha-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_1} \left( (t_2 - s)^{\beta + \alpha - 1} - (t_1 - s)^{\beta + \alpha - 1} \right) |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta + \alpha - 1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| ds \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_1} \left( (t_2 - s)^{\beta + \alpha - 1} - (t_1 - s)^{\beta + \alpha - 1} \right) ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta + \alpha - 1} ds \\
&= \frac{L}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left( t_2^{\beta + \alpha} - t_1^{\beta + \alpha} \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent si  $t_2 \rightarrow t_1$ , alors  $|Au(t_2) - Au(t_1)| \rightarrow 0$ . Alors  $A$  est équicontinu. En vue du théorème d'Ascoli-Arzelà on déduit que  $A$  est compact dans  $B_R$  et donc l'opérateur  $A$  est complètement continu. Ainsi toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaites, par conséquent le problème  $(P)$  possède au moins une solution dans  $X$ . ■

### 3.4 Exemples

Comme applications, nous considérons deux exemples permettant d'illustrer nos résultats obtenus.

**Exemple 3.1** *Considérons le problème aux limites fractionnaire  $(P)$  avec  $f(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1+x_i^2(t)}$ ,  $\alpha = \frac{9}{5}$ ,  $\beta = \frac{3}{5}$ . Nous avons  $f(t, 0, 0, 0) = \frac{3t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{4}$  donc  $\varpi = 0.31$ . Posons  $\lambda(t, s) = \gamma(t, s) = ts$ , alors on a  $\gamma_0 = \lambda_0 = \frac{1}{2}$ .*

*De plus, nous pouvons vérifier que les conditions (3.4) et (3.5) sont bien satisfaites.*

En effet,

$$\begin{aligned}
& |f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| \\
& \leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 \left( \left| \frac{1}{1+x_i^2} - \frac{1}{1+y_i^2} \right| \right) \\
& \leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 \frac{|x_i - y_i| |x_i + y_i|}{(1+x_i^2)(1+y_i^2)} \\
& \leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|
\end{aligned}$$

donc  $\theta(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4}$  et  $\theta^* = \frac{0.37894}{4}$  et

$$\frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + 2\beta + 1)\theta^*}{\Gamma(\alpha + \beta)} = 0.61013 < 1.$$

Par conséquent, et en vertu du théorème 3.1, nous concluons que le problème a au moins une solution dans  $B_R$  avec

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)} = 5.1214$$

**Exemple 3.2** Considérons le problème aux limites fractionnaire (P) avec

$$f(t, x, y, z) = 10^{-2} \left( t \sin x + e^t \sin 2y + \frac{1+t^2}{1+z^2} \right),$$

$\alpha = 1.3$ ,  $\beta = 0.4$ . Alors  $f(t, 0, 0, 0) = 10^{-2}(1+t^2)$ , donc  $\varpi = 0.02$ . Soit  $\lambda(t, s) = e^{t+s}$ ,  $\gamma(t, s) = (t-s)^\beta$ , donc  $\gamma_0 = 1.7183$ ,  $\lambda_0 = 0.71429$ . La condition (3.4) est satisfaite, en effet

$$|f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| \leq 0.02e^t \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|$$

Prenons  $\theta(t) = 0.02e^t$  donc  $\theta^* = 3.4366 \times 10^{-2}$ . La condition (3.5) est vérifiée, en effet

$$\frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + 2\beta + 1)\theta^*}{\Gamma(\alpha + \beta)} = 0.40246 < 1.$$

Par conséquent, nous concluons via le théorème 3.1, que le problème a au moins une solution dans  $B_R$  avec

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)} = 9.7744 \times 10^{-2}.$$

## Conclusions et perspectives

Cette thèse s'inscrit dans l'étude de l'existence des solutions de quelques problèmes aux limites associés aux équations différentielles et intégral-différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire à conditions aux limites locales et de type intégrale. On s'est intéressé à établir l'existence, l'unicité ainsi que la positivité des solutions en utilisant quelques théorèmes du points fixes notamment le principe de contraction de Banach, le théorème de Guo- Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône et de Krasnoselskii hybride.

Actuellement, ce travail soulève un certain nombre de questions qui méritent d'être approfondies par la suite. Par exemple, il serait judicieux de penser à l'application de la dérivée de Riemman-Liouville à la place de la dérivée de Caputo pour la résolution de ces problèmes fractionnaires, et il serait plus intéressant d'étudier la stabilité de la solution.

# Bibliographie

- [1] Ahmad, B, Ntouyas, SK, Agarwal, R, Alsaedi, A : Existence results for sequential fractional integro-differential equations with nonlocal multi-point and strip conditions, Bound. Value Probl, (2016)
- [2] Abel NH. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Ouvres complètes. 1, pp. 11-27, 1881.
- [3] Ahmad, B., Alsaedi, A. & Salem, S. On a nonlocal integral boundary value problem of nonlinear Langevin equation with different fractional orders. Adv Differ Equ 2019, 57 (2019).
- [4] Ahmad, B, Ntouyas, SK : Existence results for a coupled system of Caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions. Appl. Math. Comput. 266, 615-622 (2015)
- [5] Ahmad, B, Ntouyas, SK : Integro-differential equations of fractional order with nonlocal fractional boundary conditions associated with financial asset model, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013, No. 60, pp. 1-10 (2013)
- [6] R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He : Existence of fractional neutral functional differential equations, Comput.Math. Appl. 59 (3) (2010), 1095-1100.
- [7] W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou : A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems, Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems., V 5 (1999), 573-578.

- [8] Alsaedi, A, Ahmad, B : Existence of solutions for nonlinear fractional integro-differential equations with three-point nonlocal fractional boundary conditions, *Adv. Differ. Equ* (2010), 1-10.
- [9] R. L. Bagley, R. A. Calico : Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures, *J. Guidance Control Dyn*, 14; pp : 304 - 311 ; (1991).
- [10] Baleanu, D., Mohammadi, H., Rezapour, S. : Analysis of the model of HIV-1 infection of CD4 + T-cell with a new approach of fractional derivative. *Adv. Differ. Equ.* 2020, 71 (2020)
- [11] Baleanu, D., Jajarmi, A., Mohammadi, H., Rezapour, S. : A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo–Fabrizio fractional derivative. *Chaos, Solitons and Fractals* (2020); 134 :109705
- [12] Baleanu, D., Khadijeh, G., Shahram, R., Mehdi, S. : On the existence of solutions of a three steps crisis integro- differential, equation. *Adv. Differ. Equ.* 2018(1),135 (2018)
- [13] Baleanu, D., Ghafarnezhad, K., Rezapour, S. : On a three step crisis integro-differential equation. *Adv. Differ. Equ.* 2019(1), 153 (2019)
- [14] Baleanu, D., Rezapour, S., Mohammadi, H. : Some existence results on nonlinear fractional differential equation *Phil Trans R Soc A* 371 : 20120144.
- [15] Baleanu, D., Rezapour, S., Saberpour, Z. : On fractional integro-differential inclusions via the extended fractional, Caputo–Fabrizio derivation. *Bound. Value Probl.* 2019, 79 (2019)
- [16] Baleanu, D., Etemad, S., Rezapour, S. : A hybrid Caputo fractional modeling for thermostat with hybrid boundary value conditions. *Bound. Value Probl.* 2020, 64 (2020)
- [17] Baleanu, D., Mohammadi, H., Rezapour, S. : A mathematical theoretical study of a particular system of Caputo–Fabrizio fractional differential equations for the Rubella disease model. *Adv. Differ. Equ.* 2020, 184 (2020)

- [18] Baleanu, D., Sayyedeh Zahra Nazemi and Shahram Rezapour : Existence and uniqueness of solutions for multi-term nonlinear fractional integro-differential equations, *Adv. Differ. Equ*, 2013, Springer.
- [19] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, *Fundamenta Math.*, 3 (1922), pp. 133–181.
- [20] Bragdi, A., Frioui, A. & Guezane Lakoud, A. Existence of solutions for nonlinear fractional integro-differential equations. *Adv Differ Equ* 2020, 418 (2020)
- [21] G. Chen, G. Friedman : An RLC interconnect model based on Fourier analysis, *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.* 24 (2) (2005) 170-183.
- [22] Debnath, L :Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *Int. J. Math. Math. Sci.* 54, 3413-3442 (2003).
- [23] N. Engheta, On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, *IEEE Trans. Antennas Propag.* 44(4) : 554 - 566 ; (1996).
- [24] A. Guezane-Lakoud, R. Rodríguez-López, On a fractional boundary value problem in a weighted space, *SeMA* (2018) Volume 75, Issue 3, pp 435–443.
- [25] A. Guezane Lakoud, R. Khaldi, A. Kılıçman, Solvability of a boundary value problem at resonance, *SpringerPlus* (2016) 5 :1504.
- [26] A. Guezane-Lakoud and R. Khaldi, Solutions for a nonlinear fractional Euler-Lagrange type equation, *SeMA* (2019) 76 : 195. <https://doi.org/10.1007/s40324-018-0170-4>.
- [27] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear problems in abstract cones*. Academic Press, San Diego. 1988.
- [28] Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Chelsea, New York, (1971).
- [29] Hilfer, R : *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore (2000)
- [30] Kilbas, AA, Srivastava, HM, Trujillo, JJ : *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Boston, 2006.

- [31] R. Khaldi, A. Guezane-Lakoud, On a generalized Lyapunov inequality for a mixed fractional boundary value problem. *AIMS Mathematics*, 2019, 4(3) :506-515. Doi : 10.3934/math.2018.3.506.
- [32] R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud, On generalized nonlinear Euler-Bernoulli Beam type equations, *Acta Univ. Sapientiae Mathematica*, 10, 1 (2018), 90-100.
- [33] R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud, Upper and Lower Solutions, method for fractional oscillation equations, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, Volume 43, Number 2, (2017), Pages 214–220
- [34] Leibniz GW, L'Hopital G. Leibniz ensgesammelte Werke, Lebinizens mathematische Schriften, Erste Abtheilung, Band II. Pertz G. H. et Gerhardt C. J. ; 1849.
- [35] H. Linares, Ch. Baillot, A. Oustaloup and Ch. Ceyral : Generation of a fractal ground : Application in robotics, in : International Congress in IEEE-SMC CESA'96 IMACS Multiconf., Lille, July (1996).
- [36] Liu, L, Zhang, X, Jiang, J, Wu, Y : The unique solution of a class of sum mixed monotone operator equations and its application to fractional boundary value problems. *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9, 2943-2958 (2016)
- [37] R. L. Magin : Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus *Journal of Vibration and Control*, Vol. 14, No. 9-10, 1431-1442 (2008)
- [38] Miller, KS, Ross, B : An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York (1993).
- [39] Momani, SM, Hadid, SB : Some comparison results for integro-fractional differential inequalities. *J. Fract. Calc.* 24, 379-387 (2003)
- [40] K. B. Oldam, J. Spanier : The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).
- [41] A. Oustaloup, from fractality to non integer derivation through recursivity. Paris July 1988, vol 3. pp. 203-208.
- [42] Podlubny, I : Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, San Diego (1999)

- [43] Rezapour, S., Samei, M.E. :On the existence of solutions for a multi-singular point-wise defined fractional q-integro-differential equation. Bound.Value Probl. 2020, 38 (2020)
- [44] Rui A. C. Ferreira, Gama Pinto, : Lyapunov-Type Inequalities for some sequential fractional boundary value problems, in Advances in dynamical systems and applications, volume11, number 1, pp. 33-43 (2016)
- [45] B. Ross : Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, vol 457 ; pp. 1 - 36. Springer-Verlag, New York, (1975).
- [46] Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova : Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system, Acta Mech, (1997).
- [47] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Gordon and Breach (1993)
- [48] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev : Intégrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their application, Nouka,Technika, Minsk, (1987).
- [49] Shahram, A., Baleanu, D., Shahram, R. :Analyzing transient response of the parallel RCL circuit by using the Caputo–Fabrizio fractional derivative. Adv. Differ. Equ. 2020, 55 (2020).
- [50] Smart, DR : Fixed Point Theorems. Cambridge University Press, Cambridge (1980)
- [51] Su, X, Zhang, S : Solutions to boundary value problems for nonlinear differential equations of fractional order. Electron. J. Differ. Equ. 2009, 26 (2009).
- [52] E. Soczkiewicz, Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity Molecular and Quantum Acoustics Vol.23,397-404(2002).
- [53] V. E Tarasov : Fractional integro-differential equation for electromagnetic waves in dielectric media; Theoretical and Mathematical Physics 158 Number 3 (2009).

- [54] J. C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup : A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, 91 ;pp. 437 - 445 ; (2011).
- [55] V. V. Uchaikin : *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers : Volume I Background and Theory Volume II Applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [56] Wang, Y, Liu, L : Uniqueness and existence of positive solutions for the fractional integro-differential equation, Wang and Liu *Boundary Value Problems* (2017)
- [57] Xinwei, S, Landong, L : Existence of solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. *Appl. Math. J. Chin. Univ. Ser. B* 22(3), 291-298 (2007)
- [58] E. Zeidler : *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.
- [59] Zhou, H. Alzabut, J. Rezapour, S. and Samei, M.E. : Uniform persistence and almost periodic solutions of a nonautonomous patch occupancy model. *Adv. Differ. Equ.* 2020,143 (2020)

# Summary of Annotations