

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE LARBI BEN MHIDI D'OUM EL BOUAGHI**  
**FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET**  
**DE LA VIE**  
**DEPARTEMENT SCIENCES DE LA MATIERE**

N° d'ordre :

Série :

**Thèse**  
**Présentée pour obtenir le diplôme de**  
**Doctorat En Sciences**  
**Option**  
**Physique Théorique**  
**Par**  
**Zeroual Farida**

**THEME**

**Etude Dynamique de Certains Problèmes Relativistes**  
**en Présence d'une Distance minimale**

Soutenu le : 17 / 01 /2013

Devant le Jury:

Président:	A. Ayadi	Prof.	Univ. Oum El Bouaghi
Rapporteur:	M. Merad	Prof.	Univ. Oum El Bouaghi
Examineur:	A. Boudine	Prof.	Univ. Oum El Bouaghi
	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel
	D. Boudjaadar	M.C.A	ENS. Skikda
	K. Khounfais	M.C.A	Univ. Skikda

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Outils et techniques</b>	<b>8</b>
2.1	Déformation formelle . . . . .	8
2.1.1	Généralités sur les Groupes et les Algèbres de Lie . . . . .	10
2.1.2	Variétés poissonienne, variétés symplectique, mécanique hamiltonienne	17
2.1.3	Principe D'incertitude Généralisé (GUP) . . . . .	30
2.1.4	Représentation théorique et conséquences de la relation d'incertitude généralisée . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Traitement de certains problèmes relativistes dans le cadre du principe d'incertitude généralisé</b>	<b>48</b>
3.1	L'équation de Klein-Gordon en interaction avec un mélange de potentiel linéaire scalaire et vectoriel . . . . .	48
3.1.1	Par la méthode analytique directe . . . . .	51
3.1.2	Par le formalisme des intégrales de chemins . . . . .	54
3.2	L'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique à $(3 + 1)$ dimensions . . . . .	61
3.3	Dynamique d'une particule de Dirac sous l'action d'un champ électromagnétique à $(3 + 1)$ dimensions . . . . .	66
3.3.1	Solution de l'équation de Dirac dans l'espace des moment . . . . .	66
3.3.2	Propriétés statistiques . . . . .	69
3.4	Etude de l'oscillateur relativiste dans un champ magnétique constant à $(2 + 1)$ dimensions . . . . .	73
3.4.1	Cas de l'oscillateur de Klein-Gordon . . . . .	74
3.4.2	Cas de l'oscillateur de Dirac . . . . .	77

3.4.3	Cas de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>86</b>

## Dédicaces

À toutes ma famille

3.828222

## Remerciements

je tiens à remercier en premier lieu ALLAH l'Unique le Clément, le Miséricordieux qui nous a guidé vers le droit chemin, le Tout-Puissant qui m'a armé de volonté, de patience et de courage pour élaborer ce travail.

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Monsieur M.MERAD Professeur à la Faculté des sciences exactes et des sciences de la vie à l'Université Larbi Ben M'hidi d'Oum El Bouaghi, je le remercie très sincèrement pour son soutien ainsi que la confiance qu'il a manifesté à mon égard, et pour la patience inouïe qu'il m'a témoigné tout au long de l'élaboration de ce travail. Je lui exprime particulièrement toute ma reconnaissance pour m'avoir fait bénéficier de ces compétences scientifiques, ses qualités humaines et sa constante disponibilité. Qu'il reçoive l'expression de ma très grande reconnaissance pour m'avoir fait l'honneur d'être mon encadreur.

Je remercie très sincèrement Monsieur A.AYADI, Professeur à la Faculté des sciences exactes et des sciences de la vie de l'Université Larbi Ben M'hidi d'Oum El Bouaghi d'avoir accepté de présider le Jury de cette thèse. Je lui témoigne toute ma gratitude pour sa collaboration.

Je suis très reconnaissant à Messieurs: A.Boudine, Professeur à l'Université Larbi Ben M'hidi d'Oum El bouaghi , à Messieurs K.khounfais et D.Boudjaadar Maitres de conférences à l'université 20 Août 1955 de Skikda et à Monsieur T.Boudjdaa Professeur à l'université Mohamed Seddik Ben yahia de Jijel d'avoir accepté et d'être associé pour leur compétence à ce Jury.

Je ne pourrais terminer sans remercier très chaleureusement Monsieur M.Falek Maitre de conférence à la Faculté des sciences exactes et des sciences de la vie de l'Université de Abbas Laghrour de kenchela qui m'a aidé de bon cœur, par ses conseils, idées et soutien moral . Je lui témoigne dans ces quelques aimables et sincères mots l'expression de ma profonde gratitude.

Enfin, j'exprime tout particulièrement ma reconnaissance à tous mes collègues, mes amis, et surtout tout le personnel de la bibliothèque qui ont fait de leur mieux pour réunir les meilleures conditions de travail, merci pour tous pour leur patience, leur motivation et leur soutien tout au long de l'élaboration de ce travail

3.ڤاڤاڤا

# 1

## Introduction générale

On distingue quatre interactions fondamentales dans la nature: l'interaction forte, faible, électromagnétique et la gravitation. La dernière mise à part, les trois autres sont regroupées au sein du Modèle Standard de la physique des particules. Pourtant, un problème demeure : comment unifier au sein d'une même théorie Modèle Standard et relativité générale? Alors que chacun de ces modèles a été largement vérifié expérimentalement dans ses domaines de validité, il n'existe toutefois aucune théorie quantique de la gravité.

Donc le problème fondamental de la physique moderne est le manque d'une théorie de la grande unification englobant la gravitation. La physique théorique propose plusieurs solutions qui répondent à cette question, la plupart d'entre elles reposent sur des extensions au Modèle Standard (modèles super symétriques, modèles avec dimensions supplémentaires, théorie des cordes, théorie  $\mathcal{M}$ ...), dans lesquelles le Modèle Standard constituerait une limite à basse énergie d'une théorie plus complète.

La gravitation fut la première à être reconnue comme une propriété fondamentale de la matière. Paradoxalement, de nos jours, c'est la gravitation qui soulève le plus d'interrogations puisqu'elle s'accorde mal avec la mécanique quantique. La constante gravitationnelle (en unités S.I.)

$$G_N = 6.7 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} S^{-2}, \quad (1.0.1)$$

détermine la force du couplage entre deux masses. Comparons la force du couplage entre deux protons telle que donnée par la théorie de Newton,

$$\alpha_G = \frac{G_N m_p^2}{4\pi\hbar c} \simeq 4.6 \times 10^{-40}, \quad (1.0.2)$$

où  $m_p$  est la masse du proton. la force gravitationnelle est donc comparable à la répulsion électrostatique seulement à de très courtes distances de l'ordre de:

$$l_p = \left( \frac{G_N \hbar}{4\pi c^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.6 \times 10^{-35} m, \quad (1.0.3)$$

où  $l_p$  est appelée la longueur de Planck. Pour sonder de telles distances, il faut des particules dont la longueur d'onde est d'au plus la longueur de Planck ce qui correspond à des énergies d'au moins la masse de Planck soit:

$$m_p \simeq 10^{19} MeV. \quad (1.0.4)$$

Mais si la gravité devient aussi importante à ces échelles d'énergie que les interactions forte, électromagnétique et faible dont le traitement est quantique, il convient de se demander s'il ne faut pas quantifier la gravité. La plupart des difficultés rencontrées lors de cette unification proviennent des suppositions différentes de ces théories sur le fonctionnement de l'univers. Une autre difficulté vient du succès de la mécanique quantique et de la théorie de la relativité générale. Toutes deux sont couronnées de succès et constituent les piliers de la physique moderne.

La mécanique quantique met fin à la notion de particule ponctuelle de la mécanique classique et se base sur les particules de médiation des différents forces utilisées dans l'espace-temps plat de la mécanique newtonienne ou de la relativité restreinte tandis que la théorie de la relativité générale dans laquelle on abandonne la notion de gravitation en tant que force mais on la modélise comme une courbure de l'espace-temps dont le rayon se modifie lorsque la matière se déplace. La simple quantification de la gravité pose problème: Le calcul de sections efficaces de diffusion mène à des divergences très sévères (on rencontre très souvent des intégrales du type  $\int d^4p f(p)$  dans le calcul des corrections radiative associées à une boucle dans un diagramme de Feynman, cette intégrale diverge). En fait, cette théorie de la gravité quantique n'est pas renormalisable. La région d'intégration qui génère la divergence est la région dite ultraviolette c'est-à-dire l'échelle d'énergie-impulsion arbitrairement grande ou de dimension spatiale arbitrairement petite.

Un certains nombre de propositions ont été avancées pour aborder le problème de divergences, citons quelques propositions [1, 2, 3] :

-La supergravité qui essaye de rajouter l'ingrédient de la super symétrie afin de relier le comportement du graviton à celui des autres particules de spin plus petit afin d'adoucir les divergences de la théorie.

-La théorie des super cordes qui est une tentative non seulement de description quantique de la gravité mais également des autres interactions fondamentales présentés dans le modèle

standard de la physique des particules. Cette théorie admet les théories de supergravité comme théories effectives à basse énergie.

-La géométrie non-commutative proposée par Alain Connes qui a comme but la généralisation de la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l'algèbre n'est plus commutative.

-La relativité restreinte déformée (DSR) [en anglais, deformed (doubly) special relativity]. Il a été affirmé que la relativité restreinte doit être modifiée, que la violation de la symétrie de Lorentz pourrait être observable dans certains essais expérimentaux dans un avenir proche comme dans les expériences cosmiques à haute énergie [4, 5, 6]. D'autre part, en plus de la violation de la symétrie de Lorentz, des corrections dans la relation de dispersion  $E^2 - p^2 = m^2$  ont été proposées à la place [6].

Toutes ces approches font intervenir ou donnent lieu à de nouveaux concepts ou outils. En outre, les modèles de la gravité quantique suggèrent qu'il pourrait être souhaitable de revoir les relations d'invariance de Lorentz et les théories des cordes envisage des modifications à la structure même de l'espace-temps à haute énergie.

Toutes ces théories prédisent l'existence d'une longueur minimale en dessous de laquelle la physique est inaccessible [7, 8, 9, 10], Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ( $l_p \approx 10^{-35}m$ ). Ainsi, la gravitation devrait mener à une coupure à la limite de cette région. Par conséquent, la structure de l'espace-temps va être perturbée. Cela conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d'espace et de symétrie et à adapter l'ensemble des outils mathématiques, dont le calcul infinitésimal et la cohomologie à ces nouveaux paradigmes. L'idée d'incorporer la longueur minimale en mécanique quantique, nécessite la modification du principe d'incertitude de Heisenberg à un principe d'incertitude généralisé prénommé (GUP) [11, 12, 13, 14] candidat de l'unification des interactions fondamentales. Dans cette théorie, une échelle minimale est naturelle puisque les particules, qui sont considérées comme des cordes, ne peuvent pas acquérir des distances plus petites que la dimension de la corde. Si l'énergie de la corde atteint une certaine échelle  $m_s$ , des excitations de la corde peuvent survenir et auront comme effet l'élargissement de l'extension spatiale de la corde. Des motivations plus rigoureuses pour l'occurrence d'une longueur minimale viennent de la théorie des cordes [15], la géométrie non-commutative [16, 17], la physique des trous noirs [18]...etc. Toutes ces théories proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg de la forme  $(\Delta X_i)(\Delta P_i) \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta (\Delta P_i)^2 + \dots]$ , ce nouveau concept a comme conséquence, la modification des relations de commutation canonique habituelle  $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta P^2 + \dots)$ . Les relations de

commutation modifiées ont également apparues dans les théories DSR. En fait, les théories de DSR indiquent également la présence d'une distance minimal [4, 5, 6].

Comme il est bien connu, dans le cas des particules ponctuelles, la physique à courte distance se traduit directement en physique à hautes énergies. Il s'agit d'une simple conséquence du principe d'incertitude de Heisenberg. En théories des champs quantique locale qui décrivent la dynamique des particules ponctuelles les degrés de liberté sont révélés à hautes énergies, ou à courte distances. Du point de vue groupe de renormalisation, il y a aussi une séparation claire entre la physique ultraviolette et infrarouge. Contrairement aux théories des champs quantique locales. Dans la théorie des cordes, il y a des preuves croissantes que la physique à courtes distances n'est pas clairement séparée de la physique à longues distances [15], la formulation fondamentale de ce soi-disant mélange UV-IR (mixing UV-IR), ainsi que ses conséquences observables, ne sont pas comprises à l'heure actuelle. Divers auteurs ont fait valoir que certains types du mélange UV-IR sont nécessaire pour comprendre quelques problèmes qui se posent en cosmologie à titre d'exemple: le problème de la constante cosmologique [19].

Motivés par ces questions, ils ont récemment étudiées divers conséquences du mixing UV-IR incorporé dans les relations de commutation déformées. L'introduction de cette idée a constitué le point de départ pour que beaucoup d'auteurs étudient l'effet du principe d'incertitude généralisé sur divers problèmes de la mécanique quantique. Dans ce formalisme, toutes les relations de commutation dans l'espace de Hilbert sont déformées et par conséquent tous les hamiltoniens devraient être modifiés [20]. En outre, cette longueur minimale peut être d'un grand intérêt en mécanique quantique non-relativiste. En effet, il a été supposé que la longueur minimale peut être déduite comme une échelle intrinsèque caractérisant la structure du système considérée [21]. En conséquence, le formalisme de la longueur minimale peut également fournir plus tard un modèle pour la description efficace des systèmes complexes comme les quasi-particules et les diverses excitations collectives dans les particules composées, telles que les molécules, les noyaux et les nucléons [13]. Dans le cas non-relativiste, divers problèmes ont été traités: l'équation de Schrödinger a été exactement résolue avec l'oscillateur [11, 12, 13, 14, 22], le cas du potentiel coulombien [23], le cas unidimensionnel d'une particule dans une boîte [24], potentiel linéaire dépendant du temps [25] ...etc Puisque les effets de la longueur minimale seront significatifs à hautes énergies où les particules élémentaires obéissent aux équations de mouvement relativistes, il est essentiel d'étudier les équations d'ondes relativistes dans le cadre de GUP. Dans le contexte de la mécanique quantique relativiste on peut citer une diversité de travaux tels que: le

spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène a été obtenu perturbativement dans l'espace des coordonnées par plusieurs auteurs [26, 26, 28], alors que son traitement dans l'espace des impulsions a été étudié dans la référence [29], l'oscillateur harmonique à une et à plusieurs dimensions a été résolu exactement [22] et perturbativement dans [13, 26]. Le rôle de GUP à la généralisation du champ électromagnétique est discuté dans [30]. L'oscillateur de Dirac en trois dimensions a été analysée dans [31], Le problème d'une particule chargée de spin  $1/2$  se mouvant dans un champ magnétique constant a été traité aussi dans ce formalisme, et les propriétés thermodynamiques du système à haute température ont été examinées [32], l'équation de la particule libre de Dirac dans le contexte de GUP a été résolu dans [33], l'effet nonperturbative de la longueur minimal sur la mécanique quantique relativiste[34] et la physique statistique dans le cadre de GUP [35, 36]. Plus récemment, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de l'effet de la longueur élémentaire sur la thermodynamique des trous noirs [37], Il a été montré en particulier que la longueur minimale, qui serait de l'ordre de la longueur de Planck, empêche les trous noirs de s'évaporer totalement, exactement comme le principe d'incertitude standard de Heisenberg empêche l'atome d'hydrogène de s'effondrer (existence d'un état fondamental), les spectres d'énergie de l'équation de Dirac à  $(1+1)$ dimension en présence d'un potentiel linéaire vecteur et scalaire [34, 38] et le potentiel linéaire dans [39] ont été résolus exactement.

Les systèmes dynamiques sont un domaine riche en applications, mais qui n'a été étudié dans le monde quantique que tout récemment ; et c'est pour cela que dans cette thèse, nous étudions une telle présence dans le cadre de GUP.

L'objectif essentiel de cette thèse est de traiter dans le cadre de la mécanique quantique relativiste via le formalisme de GUP, certains interactions fondamentales telles que: le cas de particule relativiste dans un mélange du potentiel linéaire, dans un champ électromagnétique et enfin l'oscillateur relativiste en présence d'un champ magnétique constant.

Notre thèse se compose essentiellement de quatre chapitres. Le premier est consacré à une introduction générale qui nous donne un bref historique sur les motivations de cette longueur minimale ces succès et ces applications.

Dans le deuxième chapitre, On expose les différents Outils et techniques utilisés dans la reformulation du principe d'incertitude généralisé. Dans un premier lieu, nous donnons un bref rappel sur la théorie de la déformation formelle des algèbres de Lie et de Poisson et par la suite, nous traitons un cas particulier de la déformation des structure de poisson, le GUP, via, la quantification par déformation qui consiste à décrire une algèbre permettant de retrouver la structure d'une algèbre de Poisson. En second lieu, nous présenterons le

formalisme nécessaire développé essentiellement par Kempf et ses collaborateurs pour décrire ce nouveau formalisme.

Dans le troisième chapitre on traite quelques systèmes relativistes tels que:

1- L'équation de Klein-Gordon en interaction avec un potentiel linéaire de la forme  $S(x) = S_0x$ ,  $qA(x) = (V_0x, 0, 0, 0)$ . L'étude de la particule relativiste sous l'action du potentiel proposé est d'un intérêt considérable pour de divers domaines de la physique afin de garantir l'existence des états liés, tels que le problème de confinement dans le modèle de sac [40] et des modèles de hadrons etc... Nous traitons l'hamiltonien déformé (GUP-corrected hamiltonien), en utilisant deux méthode: Pour une première méthode, en se sert de la représentation de Brau, comme représentation des opérateurs de position et d'impulsion satisfaisant les relations de commutation déformées, nous arriverons à une équation différentielle de l'ordre quatre dont le traitement analytique est compliqué, nous résolvant ce problème on se servant de la technique des perturbations et nous calculons les corrections du spectre d'énergie au premier ordre en  $\beta$ . Par la suite, nous passons à la deuxième méthode qui est les intégrales de chemins via le formalisme de Feynman qui consiste à construire la fonction de Green. La construction de la fonction de Green correspondante au système étudié, au moyen du l'intégrale de chemin, est adopté par la méthode standard où l'on discrétise l'intervalle de temps  $\tau$  à  $N + 1$  infinitésimale parties égales au  $\varepsilon = \frac{\tau}{N+1}$ , et on applique la formule du Trotter, le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes correspondantes sont déduits. Nous comparons les deux méthodes et nous montrons qu'elles donnent le même décalage des niveaux d'énergie qui dépendent du paramètre de déformation  $\beta$ . Le cas ordinaire est obtenu quand le paramètre de déformation tend vers zéro. Bien que les deux méthodes donnent les mêmes résultats, l'avantage de la formulation de Feynman est sa façon intuitive pour décrire la dynamique quantique via les trajectoires et par la même occasion d'en déduire la limite classique. En outre, pour des raisons pédagogiques, il est préférable de traiter ce problème au moyen de ces méthodes équivalentes.

2- L'équation de K-G en présence d'un champ électromagnétique à  $(3 + 1)$  dimensions. Nous proposons de résoudre l'équation analytiquement avec un principe d'incertitude généralisée, en examinant l'effet de la longueur minimale sur les systèmes relativistes sans spin.

3- La dynamique d'une particule de Dirac soumise à un champ électromagnétique à  $(3 + 1)$  dimensions. Par un calcul direct, la forme finale et explicite de la fonction d'onde ainsi que le spectre d'énergie est trouvée avec une dépendance du paramètre de déformation  $\beta$ .

4- L'oscillateur relativiste (Klein-Gordon, Dirac) dans un champ magnétique constant à  $(2 + 1)$  dimensions, sera étudié dans le cadre de cette nouvelle version de la mécanique quantique. En plus de l'oscillateur de K-G et Dirac, nous traitons un autre oscillateur bosonique relativiste intéressant, à savoir l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau. Ce dernier est considéré comme une extension de l'oscillateur de Dirac [134], il décrit les bosons du spin 0 et 1. Cette extension est réalisée en remplaçant l'algèbre des matrices gamma de Dirac par d'autres matrices beta vérifiant une algèbre plus complexe connu sous l'algèbre de DKP qui présente trois représentations irréductibles: une représentation unidimensionnelle triviale, une représentation à cinq dimensions associées aux bosons de spin 0 et représentation à dix dimensions associée aux bosons de spin 1. Cette dernière application est considérée comme étant un cas général de quelques travaux réalisés auparavant.

Le dernier chapitre sera consacré à un récapitulatif des principaux résultats et à nos conclusions générales.

Le travail sur l'interaction d'une particule sans spin avec un mélange de potentiel linéaire vecteur et scalaire en présence d'une longueur minimale a donné lieu à l'article:

"Spinless Relativistic Particle in the Presence of A Minimal Length" M. Merad, F. Zeroual, and H. Benzair. EJTP 7, No. 23 (2010) 1-16.

Le travail sur la dynamique d'une particule bosonique et fermionique soumise à un champ électromagnétique dans le contexte de GUP a fait l'objet de la publication et de la communication:

"Relativistic Particle in Electromagnetic Fields With A Generalized Uncertainty Principle". M. Merad, F. Zeroual and M. Falek Modern Physics Letters A. Vol. 27, No. 15 (2012) 1250080

et

"Spinorial Relativistic Particle in the Presence of a Minimal Length. F.Zeroual and M. Merad". F. Zeroual and M. Merad. AIP Conf. Proc. 1444, 453 (2012);

L'étude de l'oscillateur relativiste est en cours de finition et fera l'objet de l'article

"An exact solution of the two-dimensional relativistic oscillator in constant magnetic Field With Minimal Length Uncertainty Relations".

## 2

# Outils et techniques

### 2.1 Déformation formelle

La déformation des algèbres associatives fait maintenant partie du paysage classique de l'algèbre. On peut cependant raisonnablement imaginer de déformer toutes les structures algébriques en suivant les idées de Gerstenhaber, qui définit un cadre théorique pour la déformation des structures algébriques [41] en 1964. Cette définition est considéré comme étant la face algébrique des déformations analytiques réalisées par Frölicher, Kodaira, Nijenhuis et Spencer à la fin des années 1950 [42]. Selon Gerstenhaber, l'idée générale d'une déformation, consiste à définir une classe d'objets que l'on peut déformer de manière lisse et dont les déformations infinitésimales doivent pouvoir être naturellement interprétées en termes cohomologiques. La théorie algébrique des déformations a su trouver de nombreuses applications en mathématiques et l'un des succès culminants de cette théorie en est probablement le théorème de quantification par déformation. Depuis l'article fondateur de Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz et Sternheimer en 1978 [43] la quantification par déformation est devenu un domaine de recherche assez vaste qui couvre de divers domaines de la physique, on peut citer, la théorie des cordes et la théorie des jauges non-commutative et plusieurs domaines algébriques comme la théorie des déformations formelles des algèbres associatives et, plus récemment, le domaine des variétés de Poisson qui inclut celui des variétés symplectiques dû à Kontsevich publié en 1997 [44]. Son approche est entièrement différente de celles de ses prédécesseurs. Grâce à des idées classiques de la théorie des déformations formelles dues à Gerstenhaber [45], Schlessinger-Stasheff [46], Deligne [47]... Kontsevich déduit ses résultats d'un énoncé plus général qu'il avait lui-même formulée en 1996 dans [48]. À toute dg-algèbre de Lie est associé un problème de déformation.

La quantification des variétés de Poisson était un objectif majeur de la physique mathématique où les variétés de Poisson jouent le rôle de systèmes mécaniques classiques alors que leurs quantifications jouent le rôle de systèmes mécaniques quantiques. Donc la mécanique quantique et la théorie des groupes quantiques eu un grand impact sur la théorie de la déformation. pour des comptes rendus plus détaillés concernant l'historique du sujet, nous pouvons citer [49, 50, 51, 52].

Le passage de la description quantique à la description classique est immédiat. L'opération inverse, qui consiste donc à produire une description quantique à partir de la description classique, est naturellement beaucoup moins évidente. Deux approches ont été prédominantes:

- 1- la quantification géométrique,
- 2- la quantification par déformation.

La première version consiste à construire explicitement un espace de Hilbert muni de l'action d'une algèbre d'opérateurs. En fait, dans sa forme principale, elle s'applique aux espaces de phases. Dans ce domaine, la quantification géométrique a connu de nombreux succès. D'un autre côté, la quantification géométrique n'a pas élucidé la théorie des champs quantique et on n'a pas réussi à l'appliquer à la relativité générale pour obtenir une théorie adéquate de la gravité quantique. Le problème vient du fait que la quantification géométrique ne permet que la quantification d'un nombre assez petit d'observables classiques.

La quantification par déformation part de la même donnée que la quantification géométrique, à savoir une variété symplectique ou, plus généralement, une variété de Poisson. À l'opposé, le résultat de la quantification par déformation est une algèbre associative non commutative dont les éléments sont considérés comme les observables quantiques.

Le second chapitre, est composé de deux parties, la première se consacre aux définitions élémentaires relatives aux algèbres de Lie et les propriétés élémentaires et fondamentales des déformations des algèbres au sens de Gerstenhaber. Cette déformation la plus fréquemment employé est la déformation formelle présentée par Gerstenhaber pour des anneaux et les algèbres [41], elle emploie une série formelle, en introduisons des complexes, appelés complexes de Hochschild, dont la cohomologie de Hochschild encode des informations relatives aux déformations. Dans la même partie du chapitre nous rappelons quelques définitions sur la structure de Poisson, cohomologie de poisson. Dans ce passage nous discutons l'un des points culminants qui est le théorème de quantification par déformation des variétés de Poisson dû à Kontsevich notre études sera basée sur ces documents

[53, 54, 55, 56, 57, 58, 59]. Dans cette section nous traitons une application directe du théorème de quantification dans le domaine de la physique qui est le passage de la mécanique classique vers la mécanique quantique. En seconde partie du chapitre, nous exposons un cas particulier de la quantification par déformation qui est le principe d'incertitude généralisé. Ce principe qui inclue le concept de longueur élémentaire est apparu dans le contexte de la théorie des cordes [15], candidate à l'unification des interactions fondamentales et il nous proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg de la forme [11, 12, 13, 14] :  $(\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} 1 + \beta (\Delta P)^2 + \dots)$ . Cette correction a comme conséquence, la modification de la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui devient:  $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta \hat{P}^2 + \dots)$ , nous présentons de différentes représentations des opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  déformés et nous exposons la nouvelle image de l'espace de Hilbert, produit scalaire et relation de fermeture, fonctions propres de l'opérateur de position ....

### 2.1.1 Généralités sur les Groupes et les Algèbres de Lie

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du 19ème siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie. Elle a connu de nombreuses implications (géométries non euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques...) et reste encore très active. Par ailleurs ces objets interviennent aussi dans des branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres et en physique théorique, notamment dans la physique des particules ou la relativité générale.

#### Algèbre associative

En mathématiques, une algèbre associative est un espace vectoriel dans lequel est aussi définie une multiplication des vecteurs, qui possède les propriétés de distributivité et d'associativité [60].

**Définition 1** *une algèbre associative  $A$  sur un corps  $K$  est un espace vectoriel sur  $K$  muni d'une multiplication bilinéaire telle que pour tous  $x; y$  et  $z$  dans  $A$ , où l'image de  $(x; y)$  est notée:*

$$(xy)z = x(yz).$$

Si  $A$  contient une unité, i.e. un élément  $1$  tel que  $1x = x = x1$  pour tout  $x$  dans  $A$ , alors  $A$  est appelée algèbre associative unifère ou unitaire.

La dimension d'une algèbre associative  $A$  sur un corps  $K$  est sa dimension comme espace vectoriel sur  $K$ . On peut citer quelques exemples d'algèbre associative:

1-Les matrices carrées de taille  $n$  par  $n$ ; à coefficients dans un corps commutatif  $K$ , forment une algèbre associative unitaire sur  $K$ .

2-Les nombres complexes  $C$  forment une algèbre associative unitaire de dimension 2 sur le corps  $R$  des nombres réels.

### Groupe de Lie et algèbre de Lie

On appelle un groupe  $G$  de Lie (ou un groupe différentiable) si les applications suivantes sont différentiables:

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow ab, \quad (2.1.1)$$

$$G \rightarrow G, a \rightarrow a^{-1}. \quad (2.1.2)$$

on peut citer quelques exemples:

1- $R^* = R \setminus \{0\}$  est un groupe de Lie pour le produit ordinaire .

2-Tout espace vectoriel de dimension finie est un groupe de Lie pour l'addition.

3-Le cercle unitaire  $S^1$ :  $|z| = 1$  dont les points sont les nombres complexes  $z = \exp i\theta$  est un groupe de Lie pour la multiplication.

**Définition 2.1.1** Soient  $G$  et  $H$  des groupes de Lie. Une application  $G \rightarrow H$  est par définition un morphisme de groupe de Lie (ou un homomorphisme différentiable de ces groupes).

**Définition 2.1.2** Une algèbre de Lie est un couple  $(g, \mu)$  où  $g$  est un espace vectoriel complexe et  $\mu$  une application bilinéaire.

$$\mu : g \times g \rightarrow g,$$

satisfaisant :

$$\begin{aligned} \mu(X, Y) &= -\mu(Y, X), \forall X, Y \in g, \\ \mu(X, \mu(Y, Z)) + \mu(Y, \mu(Z, X)) + \mu(Z, \mu(X, Y)) &= 0, \forall X, Y, Z \in g. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Cette dernière identité est appelée l'identité de Jacobi. Si  $g$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on dira que  $(g, \mu)$  est une algèbre de Lie de dimension  $n$ . Sinon on dira que l'algèbre de Lie  $g$  est de dimension infinie. Par soucis de simplification de langage,

lorsque cela n'entraîne aucune conséquence, on parlera de  $g$  algèbre de Lie au lieu du couple  $(g, \mu)$ .

A toute algèbre de Lie  $g$ , on associe une  $K$ -algèbre associative  $Ug$  telle que toute  $g$ -représentation (à gauche) peut être vue comme une  $Ug$ -représentation (à gauche) et vice-versa.

**Définition 2.1.3** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie ou non. Si  $\mu = 0$ , alors  $g = (V, 0)$  est une algèbre de Lie appelée dans ce cas abélienne.

À titre d'exemples, on peut citer:

1- Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie ou non. Si  $\mu = 0$ , alors  $g = (V, 0)$  est une algèbre de Lie appelée dans ce cas abélienne.

2- Soit  $g$  un espace vectoriel de dimension 2. Alors, pour toute application bilinéaire antisymétrique  $\mu$  sur  $g$  à valeurs dans  $g$ , le couple  $g = (V, \mu)$  est une algèbre de Lie. En effet la condition de Jacobi est toujours, dans ce cas, satisfaite.

3- Soit  $sl(2, C)$  l'espace vectoriel des matrices d'ordre 2 de trace nulle. Le produit  $\mu(A, B) = AB - BA$  est bien défini sur  $sl(2, C)$  car  $tr(AB - BA) = 0$  dès que  $A, B \in sl(2, C)$ . Comme cette multiplication vérifie l'identité de Jacobi,  $sl(2, C)$  est une algèbre de Lie complexe de dimension 3.

**Définition 2.1.4** Une dérivation de l'algèbre de Lie  $g$  est un endomorphisme linéaire  $f$  satisfaisant:

$$\mu(f(X), Y) + \mu(X, f(Y)) = f(\mu(X, Y)), \quad (2.1.4)$$

pour tout  $X, Y \in g$ .

## Déformations et cohomologie de Hochschild et crochet de Gerstenhaber

La référence principalement utilisée pour ce chapitre est [61], qui concise les principaux résultats de l'article original de Gerstenhaber [41]. Notre section adopte aussi en grande partie le travail de Keller sur le théorème de quantification par déformation de Kontsevich [62].

**Définition 2.1.5** la déformation d'une algèbre  $A$  peut-être vue comme une famille  $\{A_t\}_t$  d'algèbres qui varie en fonction d'un paramètre  $t$  et qui spécialise à  $A$  en  $t = 0$ .

Soit  $A(V, \alpha)$  une  $k$ -algèbre. Une  $R$ -déformation de  $A$  est la donnée d'un couple  $(V_R; \alpha_R)$  où  $\alpha_R \in \text{Hom}_R(V_{R \otimes R} \times V_R, V_R)$ . On pose:

$$\alpha_R = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \in \text{Hom}_{k[[t]]}(A[[t]], A[[t]]), \quad (2.1.5)$$

avec  $k[[t]]$  une déformation associative de  $A$ .

**Obstruction** Soit  $R = k[[t]]$  l'anneau des séries formelles et soit  $\alpha = \sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i$  une  $R$ -déformation de  $\alpha$ ,

**Lemme 2.1.1**  $R$  est associative si et seulement si pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\alpha_{n-i} \otimes 1_V) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (1_V \otimes \alpha_{n-i}), \quad (2.1.6)$$

on notera  $\otimes$  désignera toujours le produit tensoriel au-dessus de l'anneau  $k$ .  $1_V$ , l'application identité.

**Définition 2.1.6** Soit  $n \geq 0$  et soient  $\alpha_0 \dots \alpha_{n-1} \in \text{Hom}_R(V \times V, V)$  tels que  $\alpha^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i$ , soit une  $k[[t]]$ -déformation associative de  $A$ . Alors le terme  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_{n-i} \otimes 1_V) - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (1_V \otimes \alpha_{n-i})$ , s'appelle l'obstruction de  $\alpha^i$ .

L'emploi de ce mot provient du fait que l'obstruction est le terme qu'il faut contrôler pour pouvoir prolonger une déformation formelle en une déformation formelle de degré plus grand. En effet, d'après le lemme (2.1.1), si on trouve un  $\alpha_n \in \text{Hom}_R(V \times V, V)$  tel que  $\alpha^{(n)} = \alpha^{(n-1)} + \alpha_n t^n$  est une déformation associative de  $\partial$ , alors nécessairement  $\partial \alpha_n$  est égal à l'obstruction, où  $\partial$  est l'opérateur bord qui sera défini dans la section qui vient.

Dans ce qui suit section, nous verrons comment la cohomologie de Hochschild d'une algèbre encode des informations sur les déformations de celle-ci [24]. La théorie des déformations est liée à la cohomologie de Hochschild dans le cas des algèbres associatives et à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg dans le cas des algèbres de Lie. Alors il est nécessaire de faire un bref rappel.

Dans toute cette section  $k$  désigne toujours un anneau commutatif et  $A = (V; \alpha)$  une  $k$ -algèbre. On note la lettre  $\alpha$  comme une simple multiplication, c'est à dire que l'on notera  $ab$  pour  $\alpha(a \otimes b)$ , pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$C^p(A) = \text{Hom}_k(V^{\otimes p}, V), \quad (2.1.7)$$

le n-ème  $k$  module des cochaines de Hochschild, on note  $C^0(A) = V$  avec  $C^0(A)$  le  $k$ -module  $N$  gradué et on pose  $C^\bullet(A)$  le  $k$ -module  $N$  gradué

$$C^\bullet(A) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(A). \quad (2.1.8)$$

on définit l'application bord

$$\partial \in \text{End}_k(C^\bullet(A)),$$

en posant pour tout  $n \geq 0$  et tout  $f \in C^n(A)$  on a:

$$(1-)^n \partial f = \alpha(1_V \otimes f) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(1_V^{\otimes i-1} \otimes \alpha \otimes 1^{\otimes n-i}) + (-1)^{n+1} \alpha(f \otimes 1_V) \in C^{n+1}(A). \quad (2.1.9)$$

alors  $\partial$  est une application  $k$ -linéaire et homogène de degré 1 au sens où:

$$\partial(C^n(A)) \subset C^{n+1}(A), \quad (2.1.10)$$

pour tout  $n \geq 0$ . De manière plus prosaïque, l'équation (2.1.10) peut se réécrire en disant que pour tout  $f \in C^n(A)$ ,  $\partial f \in C^{n+1}(A)$  est l'application définie par:

$$\begin{aligned} (-1)^n (\partial f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) - f(a_1 a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) + \dots \\ &+ (-1)^n f(a_1 \otimes \dots \otimes a_n a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) a_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

La propriété fondamentale de l'application  $\partial$  est que

$$\partial \circ \partial = 0. \quad (2.1.12)$$

Pour démontrer cette propriété, On pourra se référer à [63]. Ainsi,  $(C^\bullet(A); \alpha)$  est un complexe, appelé complexe de Hochschild de  $A$ . On définit alors la cohomologie de Hochschild de  $A$  comme la cohomologie du complexe de Hochschild associé à  $A$ . On pose:  $H^0(A) = \text{Ker} d^{(0)} = A$  et

$$H^n(A) = Z^n(A) / B^n(A), \quad (2.1.13)$$

avec,  $Z^n(A) = \text{Ker} \partial^{(n)}$  est le  $k$ -module des  $n$ -cocycles de Hochschild et  $B^n(A) = \text{Im} \partial^{(n-1)}$ , est  $k$ -module des  $n$ -cobords de Hochschild avec la convention que  $B^0(A) = 0$  et on a  $B^n(A) \subset Z^n(A)$ . En d'autres termes,  $(C^\bullet(A); \alpha)$  est un complexe de  $k$ -module, appelé complexe de Hochschild de  $A = (A; \alpha)$ , dont le  $n$ -ème module de cohomologie est noté  $H^n(A)$ . On remarque que:

$$\begin{aligned} Z^1[A] &= \{f \in \text{End}_k(V) / \partial f = 0\}, \\ &= \{f \in \text{End}_k(V) / f(ab) = af(b) + f(a)b \text{ pour tous } a, b \in V\}, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

est l'ensemble des dérivations  $k$ -linéaires de  $V$ .

L'ensemble  $B^1(A)$  est l'ensemble des dérivations intérieures de  $V$ , c'est à dire l'ensemble des endomorphismes  $k$ -linéaires de  $V$  de la forme:

$$b \rightarrow ab - ba, \quad (2.1.15)$$

où  $a \in V$ . Il s'ensuit que le premier  $k$ -module de cohomologie est le quotient des dérivations par les dérivations intérieures.

Puisque nous nous intéressons principalement aux multiplications sur  $V$ , c'est à dire à des éléments de  $Hom_k(V \otimes V; V) = C^2(A)$ , il peut être utile d'avoir une description explicite de l'ensemble des 2-cobords et des 2-cocycles. Il suit immédiatement des définitions:

$$B^2(A) = \{f \in Hom_k(V \otimes V, V) / \exists g \in End_k(V) \text{ tq } \partial f = 0\} = \{f \in Hom_k(V \otimes V, V) / \exists g \in End_k(V) \text{ tq } f(a \otimes b) = g(a)b - g(b)a\}$$

$$\text{et } Z^2(A) = \{f \in Hom_k(V \otimes V, V) / \partial f = 0\},$$

Anisi,  $f \in Hom_k(V \otimes V, V)$  est un 2-cocycle si et seulement si, pour tous  $a, b, c \in V$ , on a :

$$af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c = 0. \quad (2.1.16)$$

**Théorème 2.1.1** Soit  $R = k[[t]]$  et soit  $\alpha_R$  une déformation formelle de  $\alpha$ . Si  $\alpha_R$  est associative alors l'infinitésimal de  $\alpha_R$  est un 2-cocycle.

Il suffirait d'appliquer le lemme (2.1.1). Soit  $\alpha_R = \sum_{i \geq 0} \alpha_i t^i$  une déformation formelle de  $\alpha$  avec:  $\alpha_i \in C^2(A) = Hom_k(V \otimes V; V)$  pour tout  $i \geq 0$ . Si  $\alpha_R = \alpha$  alors son infinitésimal est nul par définition. Sinon, on note  $\alpha_k$  son infinitésimal. On peut donc écrire:

$$\alpha_R = \alpha + \alpha_k t^k + \left( \alpha_i \sum_{i > k} \alpha_i t^{i-k-1} \right) t^{k+1}. \quad (2.1.17)$$

Ainsi, si  $\alpha_R$  est associative, pour tous  $a, b, c \in V$ ,  $\alpha_R(ab \otimes c) = \alpha_R(a \otimes bc)$  et donc, en réduisant modulo  $(t^{k+1})$ , on a:

$$(ab)c + (\alpha_k(a \otimes b)c + \alpha_k(ab \otimes c))t^k = a(bc) + (a\alpha_k(b \otimes c) + \alpha_k(a \otimes bc))t^k, \quad (2.1.18)$$

mais  $\alpha_R$  est associative donc:

$$(\alpha_k(a \otimes b)c + \alpha_k(ab \otimes c))t^k = (a\alpha_k(b \otimes c) + \alpha_k(a \otimes bc))t^k, \quad (2.1.19)$$

c'est à dire:

$$\alpha_k(1_V \otimes \alpha_k) - \alpha_k(\alpha_k \otimes 1_V) + \alpha_k(1_V \otimes \alpha_k) - \alpha_k(1_V \otimes \alpha) = 0, \quad (2.1.20)$$

autrement dit,  $\partial\alpha_k = 0$  et donc  $\alpha_k \in \text{Ker}(\partial) \cap C^2(A) = Z^2(A)$ .

Dans ce paragraphe nous allons définir le crochet de Gerstenhaber et montrer que ce dernier étend naturellement la notion d'application bord  $\partial$ .

Soient  $p > 0, q > 0$  des entiers. Pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ , et  $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$ , on définit:

$$f \circ_i g \in C^{p+q-1}(A) = \text{Hom}_k(V^{\otimes p+q-1}, V), \quad (2.1.21)$$

en posant:

$$f \circ_i g = f(1_V^{\otimes i} \otimes g \otimes 1_V^{\otimes p+i-1}), \quad (2.1.22)$$

ou, pour tous  $a_1, \dots, a_{p+q-1} \in V$ , on a:

$$f \circ_i g(a_1, \dots, a_{p+q-1}) = f(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes g(a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{i+q}) \otimes a_{i+q+1} \otimes \dots \otimes a_{p+q-1}), \quad (2.1.23)$$

et on pose:  $f \circ g = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i(q+1)} (f \circ_i g) \in \text{Hom}_k(V^{\otimes p+q-1}, V)$ , en posant pour  $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$  le crochet de Gerstenhaber est défini comme ceci:

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(p-1)(q-1)} g \circ f. \quad (2.1.24)$$

**Lemme 2.1.2** Pour tout  $g \in C^q(A)$ , on a  $[\alpha; g] = -\partial g$ .

Le lemme suivant montre que le crochet de Gerstenhaber étend naturellement la notion d'application bord  $\partial$ . D'une manière plus générale on peut écrire:

$$d^{(p)}C = (-1)^{p+1} [\mu, C]_G. \quad (2.1.25)$$

**L'équation de déformation** Par définition, la donnée d'une telle déformation est celle d'une suite d'applications bilinéaires. qui s'étend en une multiplication associative sur l'espace  $C^\infty(M) [[t^n]]$  des séries formelles en  $t$

$$\forall x, y, z \in V \quad \alpha_t(x, \alpha_t(y, z)) - \alpha_t(\alpha_t(x, y), z) = 0. \quad (2.1.26)$$

Expriment  $\alpha_t$  en fonction de  $\alpha_i$ , on obtien un système infini d'équation:

$$\left\{ \sum_{i+j=k} \alpha_i(x, \alpha_j(y, z)) - \alpha_i(\alpha_j(x, y), z) = 0. \quad k = 0, 1, 2, \dots \right. \quad (2.1.27)$$

Ce système infini, appelée équation de déformation, donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\alpha_t$  soit associative:

$$\left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_i(x, \alpha_{k-i}(y, z)) - \alpha_i(\alpha_{k-i}(x, y), z) = 0. \quad k = 0, 1, 2, \dots \right. \quad (2.1.28)$$

1- $k = 0$  correspond à la condition d'associativité pour  $\alpha_0$ .

2-La seconde équation est:  $\alpha_0(x, \alpha_1(y, z)) - \alpha_0(\alpha_1(x, y), z) + \alpha_1(x, \alpha_0(y, z)) - \alpha_1(\alpha_0(x, y), z) = 0$ . Nous pouvons vérifier que  $\alpha_1$  est un 2-cocycle pour la cohomologie de Hochschild ( $\alpha_1 \in Z^2(A_0, A_0)$ ). En concluant que, le premier coefficient  $\alpha_p$  non nul après  $\alpha_0$  est un 2-cocycle et il détermine la partie infinitésimale de  $\alpha_t$  voir (2.1.18).

**Obstructions** Comme on l'a déjà indiqué dans les sections précédentes, l'équation (2.1.10) peut se réécrire en disant que pour tout  $f \in C^n(A)$ ,  $\partial f \in C^{n+1}(A)$  est l'application définie par (2.1.12). On considère (2.1.29), pour  $k$  arbitraire,  $k > 1$ , En rassemblant le premier et le dernier terme l'équation, on peut définir  $\partial^2 \mu_k$  qui est le deuxième opérateur cobord de la cohomologie de Hochschild appliqué:

$$\partial^2 \mu_k(x, y, z) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(\mu_{k-i}(x, y), z) - \mu_i(x, \mu_{k-i}(y, z)), \quad (2.1.29)$$

Supposons que la déformation tronquée  $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \dots + t^{m-1}\mu_{m-1}$  satisfait l'équation de déformation. La déformation tronquée est étendue à une déformation d'ordre  $m$ , c'est à dire  $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \dots + t^{m-1}\mu_{m-1} + t^m\mu_m$ .

$$\partial^2 \mu_m(x, y, z) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i(\mu_{m-i}(x, y), z) - \mu_i(x, \mu_{m-i}(y, z)). \quad (2.1.30)$$

En utilisant l'opération rond de Gerstenhaber défini par:

$$\mu_i \bullet \mu_j(x, y, z) = \mu_i(\mu_j(x, y), z) - \mu_i(x, \mu_j(y, z)), \quad (2.1.31)$$

l'obstruction s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \bullet \mu_{m-1} \text{ ou } \sum_{i+j=m} \mu_i \bullet \mu_j. \quad (2.1.32)$$

## 2.1.2 Variétés poissonienne, variétés symplectique, mécanique hamiltonienne

### Mécanique classique

En 1687, Newton publie dans ces 'Principia' les trois lois de la dynamique :

1. Dans un repère inertiel, les corps gardent leur état initial, ou bien le repos, ou bien la vitesse, en absence de forces externes

2. Dans un repère inertiel, la variation de quantité de mouvement est proportionnelle à la force qui agit sur le corps :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.1.33)$$

3. Principe d'action et réaction : quand un corps A produit une force sur un corps B, le corps B produit une force sur le corps A égale en direction et module, mais avec le sens inverse.

Le deuxième principe décrit le mouvement d'une particule de masse  $m \in \mathbb{R}$  strictement positive dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est décrit par le système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1.34)$$

$(x_1, \dots, x_n)$  désignent les  $n$  coordonnées de la particule et  $F_i(F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est une application de classe  $C^2$ . L'idée principale de la mécanique Hamiltonienne est la transformation du système d'ordre 2 (2.1.35) à  $n$  variables en un système d'ordre 1 à  $2n$  variables

$$(q, p) := (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = \left( x^1, \dots, x^n, m \frac{dx^1}{dt}, \dots, m \frac{dx^1}{dt} \right), \quad (2.1.35)$$

la fonction de Hamilton est défini comme suit:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + V(q), \quad (2.1.36)$$

avec:  $\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m}$  est l'énergie cinétique et  $V(q)$  est l'énergie potentielle. On peut récrire le système d'équation (2.1.36) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) =: X_{H_{q^i}}(q, p), \\ \frac{dp^i}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial q^i}(q) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q, p) =: X_{H_{p^i}}(q, p), \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

où  $X_H := (X_{H_q}, X_{H_p}) := (X_{H_{q^1}}, \dots, X_{H_{q^n}}) := (X_{H_{p_1}}, \dots, X_{H_{p_n}})$ , s'appelle le champ hamiltonien associé à la fonction  $H$ . Il est évident que la fonction hamiltonienne  $H$  est une intégrale première du système (2.1.38), c.-à-d.,  $H(q(t), p(t)) = H(q(0), p(0))$ , ce qui correspond bien à la conservation de l'énergie. On appelle les éléments  $(q, p)$  les états (purs) du système.

### Généralités sur la structure de Poisson et son application en mécanique hamiltonienne

Dans cette section nous essayons de faire le lien entre la mécanique classique, la géométrie symplectique, poissonienne et de la mécanique quantique usuelle. "Il ne semblait pas que cette importante théorie put encore être perfectionnée, lorsque les deux géomètres qui ont le

plus contribué à la rendre complète, en ont fait de nouveau le sujet de leurs méditations...". Par ces mots, Siméon Denis Poisson a annoncé en 1809 [64], qu'il avait trouvé une amélioration dans la théorie de la mécanique lagrangienne, qui a été mis au point par Joseph Louis Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans ce document pionnier, Poisson introduit la notion

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \right), \quad (2.1.38)$$

avec  $a, b$  deux fonctions de coordonnées  $q_i$  et de moment conjugué  $p_i = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}$ , avec  $f$  une fonction Lagrangienne d'un système mécanique. Il a prouvé que si  $a, b$  sont des intégrales premiers du systèmes, implique que  $(a, b)$  l'est aussi. Ce  $(a, b)$  est aujourd'hui désigné par  $\{a, b\}$  et appelé le crochet de Poisson. Lagrange et Poisson l'ont employé pour résoudre le problème de variation des constantes d'intégration.

Les mathématiciens du 19 ème siècle ont bien sésie l'importance de ce support. En particulier William Hamilton, en utilisant cette notion pour exprimer ces équations dans un essai en 1835 [65], c'est ce que nous appelons maintenant la dynamique hamiltonienne. Carl Jacobi autour de 1842 [66] a montré que le crochet de Poisson satisfait l'identité célèbre de Jacobi

$$\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0. \quad (2.1.39)$$

Cette même identité est satisfaite par les algèbres de Lie, étudié par Sophus Lie et ses collaborateurs à la fin du 19 ème siècle [67]. Ce n'est qu'au cours de la seconde moitié du XX-ème siècle que la notion de structure de Poisson, sous sa forme générale, a été identifiée et systématiquement étudiée. L'étude approfondie des structures de Poisson est due à André Lichnerowicz [68], Alexander Kirillov [69] et Alan Weinstein [70].

En mathématiques, une algèbre de Poisson est une algèbre associative avec un crochet de Lie qui satisfait également la loi de Leibniz, qui est, le crochet est aussi une dérivation. Algèbres de Poisson apparaissent naturellement dans la mécanique hamiltonienne, et sont aussi à l'étude des groupes quantiques.

**Définition 2.1.7** *Une structure de poisson sur une variété différentiable  $M$  est déterminée par la donnée d'une loi de composition sur l'espace  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ , appelée crochet,  $(f, g) \rightarrow \{f, g\}$ , vérifiant les propriétés suivantes:*

-Bilinéarité,

-Antisymétrie,  $\{f, g\} = -\{g, f\}$

-la règle de Leibniz ainsi, le crochet  $\{-, -\}$ , vérifie

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \quad f, g, h \in C^\infty(M). \quad (2.1.40)$$

-Identité de Jacobi,

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (2.1.41)$$

Les variétés de Poisson jouent un rôle fondamental dans la dynamique hamiltonienne, où ils servent d'espace de phase. Ils forment un pont entre le monde commutatif vers le monde noncommutatif. En des termes très vagues, le problème résolu par Kontsévitich consiste en un passage de structures commutatives à des structures non-commutatives, où les premières ont leurs origines historiques en mécanique hamiltonienne et les dernières en mécanique quantique. Dans cette section, nous décrivons brièvement les structures commutatives pertinentes. Elles sont associées à des systèmes hamiltoniens classiques.

**Définition 2.1.8** *Une variété symplectique est une variété lisse (c'est-à-dire  $C^\infty$ )  $M$  munie d'une 2-forme fermée non dégénérée  $\omega$ , sachant que:*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \quad (2.1.42)$$

Dans notre moderne langage, une structure de Poisson sur une variété  $M$  est un champ de 2-vecteur  $\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}$  (tenseur de poisson) sur  $M$ , de telle sorte que le crochet de Poisson dans l'espace des fonctions définis en  $M$  est donné par:

$$\{f, g\} := \langle df \wedge dg, \Pi \rangle. \quad (2.1.43)$$

Dans le langage hamiltonien, un système physique est alors donné par l'algèbre des fonctions régulières sur la variété symplectique  $M$  et par une fonction régulière  $H$  appelé le hamiltonien du système. Les points de  $M$  représentent les états du système. Les fonctions régulières sur  $M$  sont alors les observables (comme la position, le moment...). Si  $O$  est une observable, son évolution dans le temps est déterminée par les équations de Hamilton

$$\frac{\partial}{\partial t} O(t) = X_H(O). \quad (2.1.44)$$

si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction sur une variétés symplectiques  $(M, \omega)$ , et  $A \subset C^\infty(M)$  une algèbre de Poisson de fonctions différentiables réelles, i.e. si  $f, g \in A$  le produit  $fg \in A$  et le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\langle df, X_g \rangle = -X_g(f) = X_f(g), \quad (2.1.45)$$

avec  $\{f, g\} \in A$  ou  $X_f$  est le champ de vecteurs hamiltonien de  $f$ , i.e.

$$\omega(X_f, X_g) = -\langle df, X_g \rangle, \quad (2.1.46)$$

pour des fonctions régulières, nous pouvons récrire ces équations ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial t} O(t) = \{H, O\}. \quad (2.1.47)$$

l'opération bilinéaire

$$(f, g) \rightarrow \{f, g\}, f \text{ et } g \in C^\infty(M), \quad (2.1.48)$$

est alors antisymétrique. Du fait que  $\omega$  est fermée, cette opération vérifie l'identité de Jacobi, à savoir:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (2.1.49)$$

l'application  $g \mapsto \{f, g\}$  vérifie la règle de Leibniz:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. f, g, h \in C^\infty(M). \quad (2.1.50)$$

Au voisinage de tout point d'une variétés symplectiques  $(M, \omega)$ , il y a un système local de coordonnées  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ , où  $\dim M = 2n$ , nommé coordonnées canoniques, de telle sorte nous obtenons l'expression du crochet de Poisson et les champs de vecteurs hamiltoniens

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (2.1.51)$$

Celà implique

$$X_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}. \quad (2.1.52)$$

l'équations de Hamilton prends la forme suivante

$$\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}. \quad (2.1.53)$$

En effet, pour définir un champ de vecteurs hamiltonien d'une fonction, ce qui l'on a vraiment besoins n'est pas une structure symplectique, mais une structure de Poisson.

### De la mécanique hamiltonienne à la mécanique quantique

Le problème fondamental de la quantification consiste, partant d'un système dont les états classiques constituent une variété symplectique  $(M, \omega)$ , à lui à associer de manière la plus "canonique" possible un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  définissant l'espace des états quantiques de ce système. Une procédure de quantification doit aussi permettre d'associer a toute algèbre

de Lie d'observables classiques,  $A \in C^\infty(M)$  une algèbre d'opérateurs,  $A \in L(\mathcal{H})$ , de telle sorte que la correspondance  $A \rightarrow \mathcal{A}$  vérifie un certain nombre de règles algébriques, dont nous allons détailler certaines plus bas.

En mécanique hamiltonienne, les systèmes physiques sont décrits par des algèbres commutatives, à savoir des algèbres de fonctions régulières sur des variétés de Poisson. En mécanique quantique, à l'opposé, les systèmes physiques sont décrits par des algèbres non commutatives, à savoir des algèbres d'opérateurs (ce sont les observables) sur des espaces de Hilbert. La description quantique fournit toujours des prédictions plus précises de résultats d'expériences physiques. Néanmoins pour des systèmes à une échelle macroscopique, la description classique reste une très bonne approximation de la description quantique. On obtient une mesure quantitative pour la qualité de l'approximation en exprimant la constante de Planck dans un système d'unités caractéristiques de l'échelle du système : plus la constante de Planck apparaît petite, plus la description classique s'approchera de la description quantique. On dit souvent que la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique quand la constante de Planck tend vers zéro.

### Déformation des structures poissonienne, cohomologie de Poisson et crochet de Schouten-Nijenhuis.

La cohomologie de Poisson a été introduit par Lichnerowicz [68]. Son existence est basée sur le lemme suivant:

**Lemme 2.1.3** *Si  $\Pi$  est un tenseur de Poisson, alors pour tout champ multi-vecteur  $A$ , ( nous avons, Cette relation a été démontré dans [56])*

$$[\Pi, [\Pi, A]] = 0. \tag{2.1.54}$$

Soit  $(M, \Pi)$  une variété lisse de Poisson, désigné par  $\partial = \partial_\Pi : \xi^*(M) \rightarrow \xi^*(M)$ . Introduisons sur les tenseurs contravariants anti-symétrique, l'opérateur  $\partial$  qui, à tout  $i$ -tenseur  $A$  fait correspondre le  $(i + 1)$ -tenseur:

$$\partial_\Pi (A) = [\Pi, A]. \tag{2.1.55}$$

(2.1.55) exprime que  $\partial_\Pi$  est un opérateur différentiel dans la mesure où  $\partial_\Pi \cdot \partial_\Pi = 0$ . Le complexe différentiel correspondant  $(\xi^*(M), \partial)$  c.-à-d.:

$$\dots \rightarrow \xi^{p-1}(M) \xrightarrow{\partial} \xi^p(M) \xrightarrow{\partial} \xi^{p+1}(M) \xrightarrow{\partial} \dots, \tag{2.1.56}$$

sera appelé le complexe de Lichnerowicz et la cohomologie correspondante est appelé Cohomologie de Poisson.

Par définition, les groupes de cohomologie de Poisson de  $(M, \Pi)$ , c'est à dire la cohomologie des groupes de l'ensemble Lichnerowicz sont des groupes quotients:

$$H_{\Pi}^p(M) = \ker(\partial : \xi^p(M) \rightarrow \xi^{p+1}(M)) / \text{Im}(\partial : \xi^{p-1}(M) \rightarrow \xi^p(M)). \quad (2.1.57)$$

le zéroième groupe de cohomologie de Poisson  $H_{\Pi}^0(M)$  est le groupe de fonctions  $f \in C^{\infty}(M)$  telle que  $X_f = -[\Pi, f] = 0$ . Le premier groupe de cohomologie de Poisson  $H_{\Pi}^1(M)$  est le quotient de l'espace l'espace des champs de vecteurs de Poisson (c.-à-d. champs de vecteurs  $X$  tel que  $[\Pi, X] = 0$ ) par l'espace l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens (c.-à-champs de vecteurs du type  $[\Pi, f] = X_{-f}$ ).

On a vu que la différentielle de Hochschild peut s'écrire en fonction du crochet de Gerstenhaber. L'analogie pour la différentielle de Poisson est fourni par le crochet de Schouten

Soit  $M$  une variété différentiable. On rappelle que l'algèbre graduée  $A(M)$  des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur  $M$  est munie d'une loi de composition interne, le crochet de Schouten-Nijenhuis [71, 72], notée  $(P, Q) \rightarrow [P, Q]$ , dont la restriction à  $A^1(M)$  est le crochet usuel des champs de vecteurs.

Rappelons que, si  $A = a_i \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $B = b_i \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  sont deux champs de vecteur écrits dans un système de coordonnées local  $(x_1, \dots, x_n)$ . Alors le crochet de Lie s'écrit [16]

$$[A, B] = \sum_i a_i \left( \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - b_i \left( \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (2.1.58)$$

formellement nous dénotons  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  par  $\zeta_i$ , dans ce cas (2.1.59) peut s'écrire:

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial B}{\partial \zeta_i} \frac{\partial A}{\partial x_i}. \quad (2.1.59)$$

une généralisation de cette formule nous mène à définir le commutateur de  $A$  et  $B$  comme suit:

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial B}{\partial \zeta_i} \frac{\partial A}{\partial x_i}. \quad (2.1.60)$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis est caractérisé par les propriétés suivantes :

Propriété 1: Pour  $f$  et  $g \in A^0(M) = C^{\infty}(M, R)$ ,  $[f, g] = 0$ .

Propriété 2: Anti-commutativité, pour un champ de vecteurs  $P \in A^p(M)$  et  $Q \in A^q(M)$

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P]. \quad (2.1.61)$$

Propriété 4: règle de Leibniz:

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C]. \quad (2.1.62)$$

Propriété 5: identité de jacobini:

$$(-1)^{(a-1)(c-1)} [A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(a-1)} [B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)} [C, [A, B]] = 0. \quad (2.1.63)$$

Propriété 6: Pour un champ de vecteurs  $X \in A^1(M)$  et un champ de tenseurs  $Q \in A(M)$ ,  $[X, Q]$  est la dérivée de Lie,  $\mathcal{L}_X Q$  de  $Q$  relativement à  $X$ .

$$[X, Q] = \mathcal{L}_X Q. \quad (2.1.64)$$

En particulier, si  $X$  et  $Q$  sont deux champs de vecteurs, puis le crochet de Schouten de  $X$  et  $Q$  coïncide avec leur crochet de Lie. Si  $X = f$  est un champ de vecteurs et  $B = g$  est une fonction, nous aurons par la suite ceci

$$[f, g] = X(g) = \langle dg, X \rangle. \quad (2.1.65)$$

On a alors pour tout  $Q \in \xi^p(M)$

$$\partial^{(p)}(Q) = -[Q, \{-, -\}]_S. \quad (2.1.66)$$

La quantification par déformation est une algèbre associative non commutative dont les éléments sont considérés comme les observables quantiques [72]. Cette algèbre n'est pas donnée comme une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert mais comme une déformation formelle (formulée dans le cadre des séries formelles) à un paramètre de l'algèbre des fonctions régulières sur la variété de Poisson donnée.

En 1997, Un travail de M. Kontsevich eut un effet catalyseur pour un vaste champ de recherches mathématiques (théorie de Lie, groupes quantiques, déformations, opérades, liens avec la théorie des nombres, la théorie des nœuds et les motifs). Il démontre que toute variété de Poisson admet une quantification formelle, résolvant ainsi un problème ancien de physique mathématique. le problème résolu par Kontsevich consiste en un passage de structures commutatives à des structures non commutatives, où les premières ont leurs origines historiques en mécanique hamiltonienne et les dernières en mécanique quantique. Dans cette section, nous décrivons brièvement les structures commutatives pertinentes. Elles sont associées à des systèmes hamiltoniens classiques. Une variété symplectique est une variété lisse (c'est-à-dire  $C^\infty$ )  $M$  munie d'une 2-forme fermée non dégénérée  $\omega$ . Un exemple typique est la variété tangente  $M = TL$ .

On étudie dans cette section les déformations des algèbres associatives commutatives. On montre que la déformation d'ordre 1 induit une structure de Poisson.

Soit  $\mathcal{A}_t = (V, \mu_t)$  une déformation d'une algèbre associative commutative  $\mathcal{A}_0 = (V, \mu_0)$   
Supposons que:

$$\alpha_t(x, y) = \alpha_0(x, y) + \alpha_1(x, y)t + \alpha_2(x, y)t^2 + \dots, \quad \forall x, y \in V. \quad (2.1.67)$$

Alors

$$\frac{\alpha_t(x, y) - \alpha_t(y, x)}{t} = \alpha_1(x, y) - \alpha_1(y, x) + t \sum_{i \geq 2} (\alpha_i(x, y) - \alpha_i(y, x)) t^{i-2}. \quad (2.1.68)$$

La relation (2.1.69) implique que pour  $t$  tend vers zéro, alors la quantité  $\frac{\alpha_t(x, y) - \alpha_t(y, x)}{t}$   
définis le crochet  $\{x, y\} := \alpha_1(x, y) - \alpha_1(y, x)$ . Ce crochet définit une structure de Poisson  
sur l'algèbre commutative  $\mathcal{A}_0$ .

En terme physique, on peut considérer  $t$  comme un paramètre quantique telle la constante  
de Planck, donc on peut conclure cette section par ce résultat : l'algèbre de Poisson  $\mathcal{A}$  est  
la limite classique de l'algèbre de Poisson  $A[[t]]$  et l'algèbre  $A[[t]]$  est la quantification par  
déformation de l'algèbre de Poisson  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 2.1.2** Soit  $\mathcal{A}_0 = (V, \mu_0)$  une algèbre associative commutative et  $\mathcal{A}_t = (V, \mu_t)$   
une déformation formelle de  $\mathcal{A}_0$ . Considérons le crochet défini pour  $x, y \in V$  par  $\{x, y\}$   
:=  $\alpha_1(x, y) - \alpha_1(y, x)$  où  $\alpha_1$  est le premier terme de la déformation  $\alpha_t$ .

Alors  $(V, \mu_0, \{-, -\})$  est une algèbre de Poisson.

le problème de quantification par déformation est le problème inverse: étant donnée une  
algèbre de Poisson  $\mathcal{A}$ , il s'agit de trouver une déformation formelle de  $\mathcal{A}$  permettant de  
retrouver la structure d'algèbre de Poisson d'origine sur  $\mathcal{A}$ , en considerant la limite quasi-  
classique. la multiplication déformée est appelée star-produit.

### Quantification par déformation de la structure de Poisson

Etant donnée une algèbre de Poisson  $\mathcal{A}$ , une quantification par déformation consiste à décrire  
une algèbre permettant de retrouver la structure d'algèbre de Poisson d'origine sur  $\mathcal{A}$ . Cette  
algèbre n'est pas donnée comme une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert mais  
comme une déformation formelle à un paramètre de l'algèbre des fonctions régulières sur la  
variété de Poisson donnée. Généralement et par définition, la donnée d'une telle déformation  
est celle d'une suite d'applications bilinéaires.

$$(f, g) \mapsto B_n(f, g), \quad f \text{ et } g \text{ régulières,} \quad (2.1.69)$$

telle que  $B_0(f, g) = fg$  et telle que la multiplication

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f, g) t^n. \quad (2.1.70)$$

s'étende en une multiplication associative sur l'espace  $C^\infty(M)[[t^n]]$  des séries formelles en  $t$ . Une quantification formelle ou quantification par déformation d'une variété de Poisson donnée  $M$  est alors un star-produit tel que, quand  $t$  tend vers zéro, le crochet de l'algèbre de Lie sous-jacente à l'algèbre associative déformée tend vers le crochet de Poisson des fonctions. Concrètement, cette dernière condition signifie que l'on a  $B_1\{f, g\} - B_1\{g, f\} = \{f, g\}$ .

Dans cette section on étudie les déformations formelles du crochet de Moyal définie sur l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique. en utilisant cette notation [74] :

$$\{f, g\}_t = t^n \sum_{k=0}^k \{f, g\}_k, \quad (2.1.71)$$

avec:

$$\{f, g\}_k = \sum_{i,j=1}^{2n} \mathbb{J}_{ij}^k(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.1.72)$$

Où les  $x_i = (x_1, \dots, x_{2n})$  sont les coordonnées dans l'espace des phases sur la variété de Poisson  $M$ . avec  $\mathbb{J}^0(x)$  est un tenseur définit comme:  $\mathbb{J}^0 = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$  et  $\{f, g\}_0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$  est le crochet de Poisson ordinaire. Comme on l'a indiqué auparavant on retrouve le cas ordinaire pour le premier terme  $k = 0$ , pour le  $k \neq 0$ , c.-à-d.  $\{f, g\}_k$  on définit une déformation formelle de l'algèbre associative  $M$ . Ces crochets doivent vérifier la compatibilité

$$\{f, gh\}_t = \{f, g\}_t h + g \{f, h\}_t, \quad (2.1.73)$$

et l'identité de Jacobi

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g, h\}_t\}_t = 0, \quad (2.1.74)$$

où  $\circlearrowleft_{f,g,h}$  est la somme sur les permutations circulaires de  $f, g$  et  $h$ . Les caractéristiques des matrices  $\mathbb{J}_{ij}^k(x)$  sont obtenues en développant toutes ces propriétés.

En utilisant la définition du crochet de Poisson, les équations (2.1.72) et (2.1.77) respectivement donnent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^k(x) \frac{\partial (gh)}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^k(x) \frac{\partial (g)}{\partial x_j} h + \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{i,j=1}^{2n} g \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^k(x) \frac{\partial (h)}{\partial x_j}. \quad (2.1.75)$$

et

$$\left\{ f, \{g, h\}_t \right\}_t = \left\{ f, \sum_{k=0}^{\infty} t^k \{f, g\}_k \right\}_k = \sum_{k,l=0}^{\infty} t^{l+k} \sum_{i,j=1}^{2n} \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbb{J}_{ij}^l(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbb{J}_{\mu\nu}^k(x) \frac{\partial g}{\partial x_\mu} \frac{\partial h}{\partial x_\nu} \right) \quad (2.1.76)$$

Par les propriétés de l'algèbre de Poisson déformée, nous pouvons trouver les caractéristiques des matrices  $\mathbb{J}_{ij}^k(x)$ .

Dans le paragraphe suivant essayons de discuter deux cas, le premier est l'indépendance des matrices  $\mathbb{J}_{ij}^k$  de l'espace et le second est la dépendance de l'espace.

1. Premier cas:  $\mathbb{J}_{ij}^k$  indépendant du  $x$ . Etand donné que l'algèbre de Poisson est antisymétrique  $\{f, g\}_t = -\{g, f\}_t$ , par une simple démonstration, on peut montrer que le tenseur  $\mathbb{J}_{ij}^k$  est antisymétrique

$$\mathbb{J}_{ij}^k = -\mathbb{J}_{ji}^k, \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots, n. \text{ et les composantes } \mathbb{J}_{ii}^k(x) = 0. \quad (2.1.77)$$

la propriété de l'antisymétrie des matrices  $\mathbb{J}_{ij}^k$  (2.1.78), peut être vérifié par une autre méthode en utilisant en utilisant l'identité de Jacobi (2.1.75).

2. deuxième cas ( $\mathbb{J}_{ij}^k(x)$ ): Pour ce cas injectons (2.1.72) dans l'équation (2.1.77), on obtient ceci

$$\circlearrowleft_{f,g,h} \sum_{k,l=0}^{\infty} t^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} [(\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_\nu \partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_j h) + (\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_\nu \partial_j h)] = 0. \quad (2.1.78)$$

Delà, on tire trois équations qui vérifie l'antisymétrique de la matrice  $\mathbb{J}_{ij}^k$

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} t^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} [(\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_\nu \partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_j h) + (\partial_\mu h) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_i f) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_\nu \partial_j g)] = 0, \quad (2.1.79)$$

et

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} t^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} [(\partial_\mu h) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_\nu \partial_i f) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_j g) + (\partial_\mu g) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_i h) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_\nu \partial_j f)] = 0, \quad (2.1.80)$$

et

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} t^{l+k} \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} [(\partial_\mu g) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_\nu \partial_i h) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_j f) + (\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^l (\partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_\nu \partial_j h)] = 0, \quad (2.1.81)$$

à l'ordre  $p$  en  $t$  l'éq. (2.1.82) peut s'écrire comme:

$$\sum_{p=0}^{\infty} t^p \sum_{k=0}^p \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} [(\partial_\mu f) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{p-k} (\partial_\nu \partial_i g) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_j h) + (\partial_\mu h) \mathbb{J}_{\mu\nu}^{p-k} (\partial_i f) \mathbb{J}_{ij}^k (\partial_\nu \partial_j g)] = 0 \quad (2.1.82)$$

avec une simple permutation d'indices, on trouve:

$$\sum_{i,j,\mu,\nu=1}^{2n} (\partial_i f) (\partial_\nu \partial_j g) (\partial_\mu h) \sum_{k=0}^p \left( -\mathbb{J}_{ij}^{p-k} \mathbb{J}_{\mu\nu}^k + \mathbb{J}_{\mu\nu}^{p-k} \mathbb{J}_{ij}^k \right) = 0. \quad (2.1.83)$$

On considère une déformations infinitesimales à l'ordre 1 et 2 ( $k = 0, 1$ ), on a respectivement

$$\{f, \{g, h\}_0\}_1 - \{f, \{g, h\}_1\}_0 = 0, \quad \circlearrowleft_{f,g,h} \{f, \{g, h\}_1\}_1 = 0. \quad (2.1.84)$$

L'identité de Jacobi pour les deux cas s'écrit explicitement:

$$\mathbb{J}_{\mu\nu}^0(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\alpha\beta}^1(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}_{\beta\nu}^0(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\alpha}^1(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}_{\alpha\nu}^0(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\beta\mu}^1(x)}{\partial x_\nu} = 0, \quad (2.1.85)$$

$$, \mathbb{J}_{\mu\nu}^1(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\alpha\beta}^1(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}_{\beta\nu}^1(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu\alpha}^1(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}_{\alpha\nu}^1(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{\beta\mu}^1(x)}{\partial x_\nu} = 0. \quad (2.1.86)$$

de la même manière on peut calculer les autres termes de la matrice  $\mathbb{J}_{ij}^k(x)$ . Nous allons passer à une petite application, soit  $V$  l'espace des phase à deux dimensions, les éléments de la matrice  $\mathbb{J}^k$  peuvent être calculer l'ordre 1 en  $t$ . Où le crochet de Poisson déformé est défini par:

$$\{x_i, x_j\} = (\mathbb{J}^0 + t\mathbb{J}^1(x))_{ij}. \quad (2.1.87)$$

par les relations (2.1.74), (2.1.75), (2.1.87), nous pouvons trouver les propriétés des matrices  $\mathbb{J}_{ij}^1(x)$  dans l'espace des phase à deux dimensions

$$\mathbb{J}_{ij}^1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{J}_{12}^1(x) \\ -\mathbb{J}_{12}^1(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.88)$$

### **Cas particulier :**

#### **1-le crochet de Poisson dans le cas d'une longueur minimale à une dimension**

[74] est donné par:

$$\{x_i, p_j\} = 1 + \beta p^2, \quad (2.1.89)$$

de (2.1.87), nous pouvons aussi conclure les matrices  $\mathbb{J}^0$  et  $\mathbb{J}^1$  :

$$\mathbb{J}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{J}^1 = \begin{pmatrix} 0 & p^2 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.90)$$

En utilisons la relation (2.1.72). On peut facilement vérifier que la matrice  $\mathbb{J}_{ij}^1(p)$  vérifie la règle de Leibniz, ainsi (2.1.85) et (2.1.86) sont satisfaites par les matrices  $\mathbb{J}_{ij}^1$  et  $\mathbb{J}_{\mu\nu}^0$ .

Si  $\mu, \alpha, \beta = 1 \rightarrow \mathbb{J}_{11}^{1,0} = 0$  et si  $\mu, \alpha, \beta = 2 \rightarrow \mathbb{J}_{22}^{1,0} = 0$ , donc il faut prendre les indices  $\mu, \alpha = 1$  et  $\beta = 2$ , utilisant la relation (2.1.87), nous aurons:

$$\mathbb{J}_{1\nu}^1(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{12}^1(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}_{1\nu}^1(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{21}^1(x)}{\partial x_\nu} = 0, \quad (2.1.91)$$

$$\mathbb{J}_{1\nu}^0(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{12}^1(x)}{\partial x_\nu} + \mathbb{J}_{1\nu}^0(x) \frac{\partial \mathbb{J}_{21}^1(x)}{\partial x_\nu} = 0. \quad (2.1.92)$$

On peut aussi vérifier que,  $\mathbb{J}_{12}^1(x) = -\mathbb{J}_{21}^1(x)$ . Tout ces résultats obtenus vérifient le choix de nos matrices  $\mathbb{J}^0$  et  $\mathbb{J}^1$ . Par conséquent on peut conclure que la déformation formelle dans le cas de la longueur minimale à une dimension vérifie les conditions de l'algèbre de poisson associative.

### 2-La longueur minimale dans le cas classique:

Avec ces résultats, laissez-nous examiner comment modifier les structure classiques. Nous définissons la limite classique en remplaçant les commutateurs par les crochets correspondants de Poisson. Si  $x$  est une observable, son évolution dans le temps est déterminée dans le cas déformé par:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \{H, x\}_t \quad (2.1.93)$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions  $H$  et  $x = (q_i, p_i)$  sur l'espace de phase déformé est:

$$\{H, x\}_t = \{H, x\}_0 + t \{H, x\}_1. \quad (2.1.94)$$

Donc les équations canoniques de Hamilton se réécrivent comme suit:

$$\dot{x}_i = (\mathbb{J}^0 + t\mathbb{J}^1(x))_{ij} \frac{\partial H(x)}{\partial x_j}. \quad (2.1.95)$$

avec  $x_i^T = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , à une dimension nous pouvons écrire les équations du hamiltonien en présence d'une longueur minimale comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (1 + \beta p^2) \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= - (1 + \beta p^2) \frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.1.96)$$

Dans le cas libre, les équations du mouvement s'écrivent:

$$\dot{p} = 0 \implies p = cte; \text{ et } \dot{q} = (1 + \beta p^2) p/m \implies q = (1 + \beta p^2) \frac{p}{m} t. \quad (2.1.97)$$

et dans le cas d'un oscillateur harmonique, par:

$$\dot{q} = (1 + \beta p^2) p/m \text{ et } \dot{p} = - (1 + \beta p^2) m\omega^2 q. \quad (2.1.98)$$

Dans ce qui suit, nous aurons recours à un formalisme introduites par [11, 12, 13, 14], afin d'étudier la déformation spécifique induite par le modèle de déformation formelle en mécanique quantique.

### 2.1.3 Principe D'incertitude Généralisé (GUP)

L'hypothèse de la continuité de l'espace est l'une des importantes requêtes en physique théorique et expérimentale, qui peuvent être brisées à la limite des hautes énergies. Il y a beaucoup d'années, Snyder [75] a proposé d'abandonner l'idée de la continuité de l'espace-temps. l'existence d'une échelle de longueur minimal l'ont obligés à laisser tomber l'hypothèse habituelle des coordonnées qui commutent. En effet, comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'existence d'une longueur minimal est l'un des aspects communs des différents candidats de la gravitation quantique, tel que la théorie des cordes (string theory) [15], Le principe holographique [76], trous noirs (black hole) [18], la géométrie non-commutative [16, 17] et la relativité restreinte déformée (doubly special relativity: DSR) [4, 5, 6]. Récemment, la construction d'une théorie GUP perturbative qui est conformé aux théories de DSR est également discuté. En outre, certains preuves phénoménologique implique qu'une longueur minimale de l'ordre de la longueur de Planck  $l_P \sim 10^{-35}m$  découle naturellement de toute théorie de la gravitation quantique.

Comme il est bien connu, l'une des théories contenant une longueur fondamentale de l'ordre de  $l_P$  (qui peut être liée à l'extension des particules) est la théorie des cordes. elle fournit une théorie cohérente de la gravité quantique et permet d'éviter les difficultés mentionnées antérieurement (dans l'introduction). En fait, contrairement à des théories des particules ponctuelles, l'existence d'une longueur fondamentale joue le rôle d'un cut-off naturel. Par conséquent, les divergences ultraviolettes sont évitées sans faire appel ni à la renormalisation ni à la régularisation.

la réalisation de cet effet de la gravité quantique dans les expériences en cours ou à venir peuvent faire une influence intense sur notre point de vue sur l'univers dans lequel nous vivons. En outre, il pourrait résoudre certains problèmes tels que le mécanisme pour éviter l'espace-temps du trou noir, la constante cosmologique...etc.

Récemment, il y a eu un intérêt croissant en étudiant l'impact de la non-commutativité des coordonnées sur les propriétés des systèmes quantiques et afin d'intégrer l'idée de la longueur minimale avec les lois de la mécanique quantique, nous avons besoin de modifier le principe d'incertitude de Heisenberg à ce qu'on appelle Principe d'incertitude Généralisé (GUP). L'introduction de cette idée a attiré beaucoup d'attention ces dernières années et de nombreux documents ont été apparus dans la littérature pour répondre aux effets de la GUP sur divers systèmes quantiques [10, 21, 22, 27, 28, 33, 35]. Dans ce formalisme, les relations de commutations dans l'espace de Hilbert sont modifiées et par conséquent les hamiltoniens des systèmes devraient être modifiés.

Étant donné que les effets de la longueur minimale seront importants à l'échelle des hautes énergies et à cette limite les particules élémentaires obéissent aux équations du mouvement relativistes, il est essentiel d'investir dans ce domaine en incluant le Principe d'incertitude Généralisé.

Pour mettre en œuvre la notion d'une longueur minimale; Nous allons commencer par une esquisse des principes de base de la mécanique quantique. Le principe d'incertitude (ou principe d'indétermination) énonce que, pour une particule massive donnée, on ne peut pas connaître simultanément sa position et sa vitesse. Ce principe fut énoncé au printemps 1927 par Heisenberg. Les travaux de Planck, Einstein et De Broglie avaient mis au jour que la nature quantique de la matière entraînait l'équivalence entre des propriétés ondulatoires (fréquence et vecteur d'onde) et corpusculaires (énergie et impulsion) selon les lois:

$$p_i = \hbar k_i, E = \hbar \omega. \quad (2.1.99)$$

Dans le contexte actuel, il important d'étudier cette relation avec soin. En utilisant les relations de commutation habituelles.

$$[x_i, k_j] = i\delta_{ij}, \quad (2.1.100)$$

la quantification dans la représentation des positions  $\hat{x}_i = x_i$  mène à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{k}_i = -i\partial_i, \hat{p}_i = \hbar k_i = -i\hbar\partial_i, \\ \hat{\omega} = i\partial_t, E = \hbar\omega = i\hbar\partial_t. \end{array} \right. \quad (2.1.101)$$

On définit la valeur moyenne d'un opérateur (d'une observable)  $\hat{A}$  dans l'état  $\Psi$  par :  $\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ . De façon analogue à l'écart-type d'une variable aléatoire, on peut définir "l'écart-type" de cet opérateur dans l'état  $\Psi$  par:

$$\Delta \hat{A}_{|\Psi\rangle} = \sqrt{\langle \Psi | \hat{A}^2 | \Psi \rangle - \left( \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \right)^2}. \quad (2.1.102)$$

Deux opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  satisfont la relation d'incertitude:

$$\Delta \hat{A}_{|\Psi\rangle} \Delta \hat{B}_{|\Psi\rangle} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{|\Psi\rangle} \right|, \quad (2.1.103)$$

où  $|\Psi\rangle$  est le vecteur d'état du système. Ceci nous mène vers l'inégalité de Heisenberg donné par:

$$\Delta \hat{x}_i \Delta \hat{p}_i \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (2.1.104)$$

En mécanique quantique, l'opérateur d'évolution est l'opérateur  $\hat{U}(t - t_0)$  qui transforme l'état quantique au temps  $t_0$  en l'état quantique au temps  $t$  résultant de l'évolution du système sous l'effet de l'opérateur hamiltonien

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \\ \hat{U}(t - t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{E}(t - t_0)\right) \Rightarrow i\hbar \partial_t |\Psi\rangle = \hat{E} |\Psi\rangle, \quad (2.1.105)$$

alors qu'une observable satisfait l'équation d'évolution

$$\frac{d}{dt} \hat{A} = [\hat{A}, \hat{E}]. \quad (2.1.106)$$

Afin d'incorporer l'hypothèse d'une longueur minimale  $l_m$  en mécanique quantique, plusieurs approches ont été proposées, on peut citer: le principe d'incertitude généralisé [11, 12, 13, 14], géométrie non-commutative [16, 17], une relativité restreinte déformée avec une nouvelle sorte de Lorentz -transformations sont probablement les approches les plus étudiées [4, 5, 6]. Dans notre thèse, nous allons suivre l'approche de GUP. Dans ce contexte, nous supposons maintenant que l'on peut augmenter arbitrairement l'impulsion  $p$  de la particule, mais le vecteur d'onde  $k$  ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de  $\frac{1}{l_m}$  [77]. Par conséquent et en tenant compte de la relation (2.2.1), on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire indiquée dans la relation:  $p_i = \hbar k_i$ , lorsque  $p$  approche la valeur  $\frac{\hbar}{l_m}$ . Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  arbitrairement petites, et que des échelles de distances arbitrairement petites ne peuvent plus être explorées.

Le papier de Kempf, Mangano, Mann (KMM) nous propose un principe d'incertitude généralisé qui réponds à la discontinuité de l'espace et qui vérifie la relation de commutation suivante:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar f(P), \quad (2.1.107)$$

avec  $f(P)$  une fonction positive, qui peut tendre vers la valeur de 1 quand  $P \rightarrow 0$  (dans le but de récupérer les relations de commutations usuelles).

On suppose que cette fonction a une forme générale et le développement au premier ordre nous donne cette relation:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta P^2), \quad (2.1.108)$$

$\beta$  est un petit paramètre de déformation positive, relié à la longueur élémentaire à travers la relation  $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$ , par exemple dans le cadre de la théorie des cordes, ce paramètre de

déformation est déterminée comme étant la constante fondamentale associée à la tension des cordes  $l_s \sim (10^{-32}cm)^2$  et vérifie ceci  $\beta = \beta_0/(M_p c)^2 = \beta_0 (l_p/\hbar)^2$ , avec  $M_{pl} \sim 10^{19}GeV$  et  $l_p \sim 10^{-33}cm$  sont respectivement la masse et la longueur de Planck,  $l_p$  peut être écrite en fonction de La constante gravitationnelle de Newton  $G_N$  comme  $l_p = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{4\pi c^3}}$  and  $\beta_0$  est de l'ordre de l'unité [78].

Sous ces hypothèses, le développement de Taylor de  $f$  au voisinage de  $P = 0$  est de la forme:

$$f(P) = 1 + \beta P^2 + O(P^4), \quad (2.1.109)$$

ainsi (2.2.10) décrira la classe la plus normale des modifications possibles des relations de commutation usuelles.

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule (2.1.103). À une dimension la relation d'incertitude généralisée la plus simple qui implique une incertitude minimale non nulle en position a la forme suivante:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left( 1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle \right), \quad (2.1.110)$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen (2.1.102), on peut démontrer que la relation d'incertitude généralisée à une dimension a la la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma) \\ \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2), \end{array} \right. \quad (2.1.111)$$

avec  $\gamma = \beta \langle P \rangle^2$ . Nous pouvons voir que pour les petites valeurs de  $\Delta P \sim \langle P \rangle \sim 0$ , les termes en  $\beta$  et  $\gamma$  seront négligés, ce qui implique que la relation (2.1.111) retrouve le comportement habituel d'une relation d'incertitude

$$\Delta X \gtrsim \frac{\hbar}{2\Delta P}. \quad (2.1.112)$$

on observe que pour les petites valeurs de  $\Delta P$ , la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grand  $\Delta P$ . Dans cette région où les valeurs de  $\Delta P$  sont suffisamment grandes, l'incertitude en position  $\Delta X$  satisfera la relation suivant

$$\Delta X \gtrsim \frac{\hbar\beta}{2}\Delta P. \quad (2.1.113)$$

Comme il est bien connu, la physique des particules, à l'échelle de petites distances est reliée à un niveau d'énergie très élevé. Ceci est l'une des conséquences du principe d'incertitude de Heisenberg. Idem pour les théories des champs quantiques locales, qui décrivent la dynamique des particules élémentaires, les degrés de liberté fondamentaux sont définis à hautes énergies, ou d'une manière équivalente, à petites distances. Il est clair, qu'il y a une séparation entre la physique ultraviolette et infrarouge du point de vue du groupe de renormalisation. Contrairement à ce qu'on distingue dans la relation (2.1.113) les deux domaines sont liés c'est ce qu'on appelle le UV-IR mixing.

Aussi bien que cette conséquence, n'est pas comprise actuellement. De divers auteurs pensent que ce type de mélange peut être nécessaire pour comprendre le problème de la constante cosmologique [19], ou celui de l'inflation cosmologique [33].

La présence du terme  $\beta(\Delta P)^2$  dans la relation (2.1.110) indique que même pour de grandes valeurs de  $\Delta P$ ,  $\Delta X$  est toujours supérieur à une valeur minimale  $(\Delta X)_{\min}$  non nulle. D'ailleurs, elle nous propose une incertitude minimale en position, cette quantité joue le rôle d'un cutoff qui a comme effet de régulariser les divergences ultraviolettes [34]

$$\Delta X \geq \hbar\sqrt{\beta} \left(1 + \beta\langle \hat{P}^2 \rangle\right),$$

et une incertitude minimal absolue de  $\Delta X \geq (\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ .

Comme on peut le distinguer la relation de commutation (2.1.108) présente quelques inconvénients, elle détruit la symétrie entre la position et le moment dans le formalisme hamiltonien. En effet, il est possible que la nature ne possède pas seulement une longueur minimale, mais également un moment minimal. Dans ce cas là et plus généralement, la relation GUP se présente sous cette forme [12] :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \alpha(\Delta X)^2 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma\right), \quad (2.1.114)$$

avec:  $\gamma = \alpha\langle X \rangle^2 + \beta\langle P \rangle^2$ , cette relation nous mène vers une incertitude minimale non nulle sur la position et sur le moment ( $(\Delta X)_{\min} \neq 0$  et  $(\Delta P)_{\min} \neq 0$ ). La relation (2.1.114) implique une nouvelle relation de commutation entre les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$ .

$$\left[ \hat{X}_i, \hat{P}_j \right] = i\hbar\delta_{ij} \left( 1 + \alpha\hat{X}^2 + \beta\hat{P}^2 \right), \quad (2.1.115)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux petits paramètres, respectivement de dimension de l'inverse de la longueur carrée, et de l'inverse du moment carré.

Pour le cas général à  $N$  dimensions, la relation d'incertitude généralisée contient des corrections particulières qui pourraient survenir comme un effet de la gravitation à l'ultraviolet, ou comme un effet de corde. Donc ici considérons les petites limites de correction d'une forme générale.

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (2.1.108), préservant la symétrie rotationnelle, s'écrit sous cette forme [13, 22, 26, 29] :

$$\left[ \hat{X}_i, \hat{P}_j \right] = i\hbar\delta_{ij} \left( 1 + \beta\hat{P}^2 + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j \right), \quad (2.1.116)$$

avec:  $\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^N P_i^2$ , Le paramètre additionnel  $\beta'$  est assumé un paramètre petit et positif  $[\beta'] = \left[ \frac{1}{P^2} \right]$ .

Sachant que cette relation n'est pas introduite pour avoir une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  soient auto-adjoints [13].

Dans une algèbre de Heisenberg généralisée non seulement les positions et les moments ne commutent pas, maintenant même les positions et les moments ne commutent pas, entre elles-mêmes. Bien que la quantification abandonne l'espace des phases classique, cela abandonne également l'espace de configuration et des moments ordinaire. Dans ce cas là nous nous concentrons au situation avec des incertitudes minimales non nulles sur les positions seulement ( $(\Delta X)_{\min} \neq 0$ ) et nous exigeons:

$$\left[ \hat{P}_i, \hat{P}_j \right] = 0, \quad (2.1.117)$$

on peut extraire les relations de commutation des opérateurs de position

$$\left[ \hat{X}_i, \hat{X}_j \right] = \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2} \left( \hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i \right). \quad (2.1.118)$$

Cela peut être justifier par le faite que les opérateurs de positions et des moments doivent satisfaire l'identité de Jacobi:

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0 \quad \forall A, B, C \in \{X_i, P_j\}_{i,j}, \quad (2.1.119)$$

de (2.1.116), on peut déduire la relation d'incertitude à  $N$  dimension

$$\Delta X_i \Delta P_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} (1 + (N\beta + \beta') (\Delta P_j)^2 + \gamma), \quad (2.1.120)$$

avec:  $\gamma = \beta \sum_{i=1}^N \langle P_k \rangle^2 + \beta' \langle P_i \rangle^2$ . La minimisation de cette dernière relation par rapport à  $\Delta P_j$  donne:

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar \sqrt{(N\beta + \beta')}, \quad \forall i \quad (2.1.121)$$

Les relations de commutations modifiées, signalées antérieurement ne brise pas la symétrie par rapport aux rotations. Plus exactement, les générateurs du groupes de rotation peuvent être exprimé en fonction des opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  comme ceci:

$$\hat{L}_{ij} = \frac{1}{1 + \beta P^2} (\hat{X}_i \hat{P}_j - \hat{X}_j \hat{P}_i), \quad (2.1.122)$$

celà vérifie les relations de commutation suivante (démonstration voir appendix A):

$$[\hat{P}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} \hat{P}_j - \delta_{ij} \hat{P}_k), \quad [\hat{X}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} \hat{X}_j - \delta_{ij} \hat{X}_k), \quad [\hat{L}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} \hat{L}_j - \delta_{ij} \hat{L}_k), \quad (2.1.123)$$

à trois dimensions on écrit:

$$\hat{L}_i = \frac{1}{1 + \beta \hat{P}^2} \epsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k, \quad (2.1.124)$$

sont des générateurs de rotation. Autrement dit, ils répondent. C'est-à-dire, ils satisfont l'algèbre usuelle:

$$[\hat{P}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{P}_k, \quad [\hat{X}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{X}_k, \quad [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k. \quad (2.1.125)$$

La relation de commutation (2.1.116) peut s'écrire en fonction des composantes du moment angulaire :

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar (2\beta - \beta' + \beta (2\beta + \beta') \hat{P}^2) \epsilon_{ijk} \hat{L}_k. \quad (2.1.126)$$

Celà peut être utile pour l'étude des systèmes à symétrie sphérique.

## 2.1.4 Représentation théorique et conséquences de la relation d'incertitude généralisée

Ultérieurement nous proposons les différentes représentations en termes d'opérateurs différentiels des relations de commutation

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \delta_{ij} (1 + \beta \hat{P}^2 + \beta' \hat{P}_i \hat{P}_j),$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (2.1.127)$$

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2} (\hat{P}_i \hat{X}_j - \hat{P}_j \hat{X}_i).$$

Alors que les problèmes de la mécanique quantique déformés, peuvent parfois être résolu par une approche algébrique élégante, par exemple en introduisant des opérateurs d'échelle dans le cas de l'oscillateur harmonique [12], ou par la factorisation SUSYQM [81], cette théorie qui a été initiée par Witten [82] qui a introduit pour la première fois en mécanique quantique non relativiste les concepts de symétrie relatifs à la théorie des champs, ses travaux seront ensuite repris et développés par d'autres physiciens [83].

Dans notre cas La méthode qui paraît évidente, c'est de trouver une représentation des opérateurs  $\hat{X}_i, \hat{P}_j$  en termes d'opérateurs différentiels auto-adjoints agissant sur un espace de Hilbert. Divers documents, traitent des systèmes de la mécanique quantique soit analytiquement, soit perturbativement, en utilisant un certains nombres de représentations différentes. La représentation peut être trouvée par un processus en deux étapes. Tout d'abord, exprimer les opérateurs  $\hat{X}_i, \hat{P}_j$  en termes de certains opérateurs  $\hat{x}_i, \hat{p}_j$  qui satisfont les relations de commutation de l'algèbre de Heisenberg canonique,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.1.128)$$

par la suite, on peut utiliser soit la représentation des moments

$$\hat{x}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}, \hat{p}_i = p_i, \quad (2.1.129)$$

soit la représentation des positions

$$\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.1.130)$$

Nous appellerons d'une manière particulière le passage d'opérateurs noncommutative  $(\hat{X}_i, \hat{P}_j)$  en termes d'opérateurs commutative une "réduction". Dans la littérature, plusieurs représentations des opérateurs  $\hat{X}_i, \hat{P}_j$  ont été utilisées.

### La réduction de Kempf et de la représentation des moments

La réduction original, est défini par Kempf et ces collaborateurs [12], ils ont introduit la forme des opérateurs de position et de moment considérées ici:

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \beta \frac{\hat{p}^2 \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}^2}{2} + \beta' \frac{\hat{p}_i \hat{p}_j \hat{x}_j + \hat{x}_j \hat{p}_i \hat{p}_j}{2}, \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i, \quad (2.1.131)$$

dans la représentations des moments, on aura ceci:

$$\hat{X}_i = i\hbar \left[ (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_j} + \beta' \hat{p}_i \hat{p}_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \left( \beta + \frac{N+1}{2} \beta' \right) p_i \right], \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i. \quad (2.1.132)$$

Ici, nous travaillons dans la représentation des moment, où l'opérateur de position est explicitement symétrique et ainsi formellement auto-adjoint.

Refs [22] ont également utilisé une représentation similaire à celle si, en introduisant un paramètre arbitraire  $\tilde{\gamma}$  :

$$\hat{X}_i = [(1 + \beta \hat{p}^2) \hat{x} + \beta' \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{x} + \tilde{\gamma} \hat{p}_i], \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i, \quad (2.1.133)$$

soit

$$\hat{X}_i = i\hbar \left[ (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_j} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \tilde{\gamma} p_i \right], \quad \hat{P}_i = p_i. \quad (2.1.134)$$

ici  $\tilde{\gamma}$  est une constante positif arbitraire, ce qui n'apparaît pas dans les relations de commutation (2.1.127) et affecte seulement la fonction de poids dans le produit scalaire dans l'espace des impulsions (son choix assure l'herméticité de l'opérateur de position par rapport au produit scalaire modifié) [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44]

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int \frac{d^N p}{(1 + (\beta + \beta') p^2)^{1-\theta}}, \quad (2.1.135)$$

avec:

$$\theta = \frac{\tilde{\gamma} - \beta' \left( \frac{N-1}{2} \right)}{\beta + \beta'}. \quad (2.1.136)$$

Comme on peut le réaliser la représentation (2.1.132) correspond à  $\theta = 1$ . Dans le traitement d'un système de la mécanique quantique on peut constater que les deux représentations précédentes avec un  $\tilde{\gamma}$  arbitraire, sont équivalente en effectuant un simple changement de variables [80, 84].

$$\Psi(p) = (1 + (\beta + \beta') p^2)^{\frac{1-\theta}{2}} \tilde{\Psi}(p). \quad (2.1.137)$$

Celà signifie que si, on veut résoudre l'équation de Schrödinger, un tel changement de variable élimine toute dépendance en  $\tilde{\gamma}$  [22]. Jusqu'ici nous avons considéré la représentation des moments de la réduction de Kempf (2.1.131), son principal avantage est que le moment n'est pas modifié et par conséquent l'énergie cinétique sont les mêmes qu'en mécanique quantique ordinaire. Les fonctions propres obtenues  $\Psi(p)$  sont dans la représentation des moments et la variable  $p$  peut être identifiée avec le moment du système. En outre, la solution est exacte, contrairement à certaine représentation, que nous verrons plus tard.

Nous avons parlé de l'avantage de la représentation (2.1.131), par contre la représentation (2.1.134) dont l'utilisation pour résoudre quelques systèmes de la mécanique quantique est

rarement simple, son principal inconvénient est que toute la complexité résultant de la longueur minimale contenue dans l'expression des opérateurs de position et par conséquent le terme du potentiel  $V(x)$  contenu dans l'équation de Schrödinger. Cela peut conduire à des difficultés lorsque le potentiel dépend des opérateurs de position d'une manière un peu compliquée. Dans ce cas là, on peut citer le cas du potentiel Coulombien, des potentiels singuliers du type  $\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_D^2}}$  et dans le cas du potentiel gravitationnel. tout ces potentiels qui nécessite un traitement particulier en mécanique quantique.

### Quasi-représentation de position

Dans cette section on propose la quasi-représentation de position, qui peut être utile pour les difficultés signalées auparavant. Cette représentation n'est que la réduction de Kempf (2.1.131), où la complexités qui figure dans l'opérateur de position (énergie potentielle) sera décalée à l'opérateur moment (énergie cinétique). où l'opérateur fondamental de position est diagonal

$$\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.1.138)$$

l'opérateur position devient diagonal Seulement dans le cas limite ou le paramètre  $\beta + \beta'$  s'annule, à ce moment là, ça serai commode de l'employer par exemple dans les problèmes qui se prêtent à la représentation de position dans la mécanique quantique régulière.

Semblablement à la représentation des moments, il existe une possibilité de trouver une représentation générale, contenant un extra paramètre  $\bar{\gamma}$ . L'opérateur  $\hat{X}_i$  prends la forme suivante:

$$\hat{X}_i = [\hat{x}_i (1 + \beta \hat{p}^2) + \beta' \hat{x}_j \hat{p}_j \hat{p}_i + \bar{\gamma} \hat{p}_i], \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i. \quad (2.1.139)$$

là où les  $\hat{x}_i$  sont diagonal. Une telle représentation a été employée dans la référence [85].

### La representation de Brau

Notons que la représentation KMM n'est pas unique. Dans la littérature on peut distinguer deux cas, le premier est  $\beta = 2\beta'$  le second est  $\beta \neq 2\beta'$ . Dans la référence [26], l'auteur discute le cas  $\beta = 2\beta'$  dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position s'annulent au premier ordre de  $\beta$ . Ce choix présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotationnelle, le formalisme devient invariant par rapport aux translations:  $X_i \rightarrow X_i + \alpha_i$ , en ce sens qu'il simplifie la façon dont un opérateur de translation peut être définie [12]. Considérons la représentation suivante:

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad \hat{P} = \frac{\tan \sqrt{\beta} \hat{p}}{\sqrt{\beta}}, \quad (2.1.140)$$

où  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  obéissent à la relation de commutation canonique  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . Notons que, contrairement à la représentation KMM, cette représentation préserve la nature ordinaire de l'opérateur de position et définit un opérateur de position  $X$  et un opérateur de moment  $P$  symétriques [86, 87]. En outre, cette définition satisfait exactement la condition  $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2)$  et elle est connue sous le nom de représentation de Brau

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p} \left( 1 + \frac{\beta}{3}\hat{p}^2 \right),$$

au premier ordre du paramètre GUP. En effet, les deux représentations sont équivalentes et elles sont liées par la transformation canonique suivante [34] :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \left( 1 + \arctan^2 \sqrt{\beta}\hat{p} \right) \hat{X}, \\ \hat{P} &= \arctan \frac{\sqrt{\beta}\hat{p}}{\sqrt{\beta}}, \end{aligned} \quad (2.1.141)$$

ce qui transforme les Eqs. (2.1.140) aux Eqs. précédentes proposées par Kempf et ses collaborateurs et qui obéissent à l'Eq. (2.1.108)

La réduction de Brau définis pour la première fois dans [36], peut être utile pour l'étude perturbative des systèmes quantiques, cette représentation est utilisée dans le premier sujet traité dans le chapitre application où nous traitons l'équation de K-G dans un potentiel linéaire.

Stetsko et Tkatchuk ont introduit une représentation plus générale que celle de Brau c'est à dire  $\beta = 2\beta'$ , elle est représentée par ces relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_i = \hat{x}_i + \frac{2\beta - \beta'}{4} (\hat{p}^2 \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}^2), \\ \hat{P}_i = \hat{p}_i (1 + \beta' \hat{p}^2). \end{array} \right. \quad (2.1.142)$$

Généralement, on peut englober toutes les représentations discutées auparavant sous une même représentation, en introduisant un paramètre  $\gamma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_i = \hat{x}_i + (\beta - \gamma) \frac{\hat{p}^2 \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}^2}{2} + (\beta' - 2\gamma) \frac{\hat{p}_i \hat{p}_j \hat{x}_j + \hat{x}_j \hat{p}_i \hat{p}_j}{2}, \\ \hat{P}_i = \hat{p}_i (1 + \gamma \hat{p}^2). \end{array} \right. \quad (2.1.143)$$

cette famille de représentations, est valable au premier ordre en  $\beta$  et  $\beta'$  et elle comprend

toutes les représentations présentées précédemment. En effet, elle se réduit à :

- 1- la réduction de Kempf (2.1.131) pour,  $\gamma = 0$ ;
- 2- la réduction de Stetsko-Tkatchuk (2.1.142) pour,  $\gamma = \frac{\beta'}{2}$ ;
- 3- la réduction de Brau (2.1.140), pour  $\gamma = \beta = \frac{\beta'}{2}$ .

La relation d'incertitude étudiée auparavant n'est pas unique, mais il existe d'autres formes dans la littérature.

*Espace de Sitter*

Dans [75], Snyder a décrit un espace de Sitter, avec des coordonnées  $(\eta_0, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  satisfaisant :

$$-\eta^2 = -\eta_0 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4. \quad (2.1.144)$$

les opérateurs position et moment sont définis comme ceci:

$$X_i = ia \left( \eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right), P_i = \frac{\hbar \eta_i}{a \eta_4}, \quad (2.1.145)$$

des relations de commutations découlant de ces définitions

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_i] = i\hbar \left( 1 + \frac{a^2}{\hbar^2} \hat{P}_i^2 \right), [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \left( \frac{a^2}{\hbar^2} \hat{P}_i \hat{P}_j \right). \quad (2.1.146)$$

cette algèbre décrite par Snyder correspond à notre relation de commutation déformée avec une correspondance:  $\beta = 0$  et  $\beta' = \frac{a^2}{\hbar^2}$ .

*Relation de Broglie modifiée*

Pour incorporer une longueur minimale  $L_f$  dans leur théorie Hossenfelder, S et collaborateurs [88], commencent par donner une relation entre  $k$  vecteur d'onde et impulsion  $p$  ( $k = k(p)$ ). Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre  $M_f = \frac{1}{L_f}$  lorsque  $p$  tend vers l'infini. Une telle fonction aura le développement suivant:

$$k(p) = p - \gamma \frac{p^3}{M_f^2}, \quad (2.1.147)$$

avec  $\gamma$  est un coefficient de l'ordre un qui dépend de l'exact forme de la fonction  $k(p)$ . Les relations de commutation canoniques entre  $x$  et  $k$  peut être définit comme ceci

$$[\hat{x}, \hat{k}(p)] = i \frac{\partial k}{\partial p} = i\hbar \left( 1 + \gamma \frac{\hat{p}^2}{M_f^2} \right), \quad (2.1.148)$$

l'algèbre des commutateurs modifiés s'écrit sous cette forme:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \frac{\partial p}{\partial k}, \quad (2.1.149)$$

ceci mène à une relation d'incertitude de la forme:

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{\partial p}{\partial k} \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left( 1 + \gamma \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{M_f^2} \right), \quad (2.1.150)$$

la relation (2.1.150) est conforme avec (2.1.110), en admettons que  $\beta = \frac{\gamma}{M_f^2}$ .

## Représentation de l'espace de Hilbert

L'algèbre de Heisenberg, générée par les observables  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ , obéissant à la relation de commutation suivante  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , est représentée par l'espace des états dans lesquels on choisit une base de vecteurs propres  $|x\rangle$  et  $|p\rangle$ ,  $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$   $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ , qui ne sont pas normalisables et donc n'appartiennent pas à l'espace de Hilbert. Le passage entre l'espace des positions vers l'espace des moments se fait par la transformée de Fourier  $\langle p|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle x|\Psi\rangle$ , avec  $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp -ipx/\hbar$ . Où  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sont représentés par des opérateurs de multiplication  $x$ ,  $-i\hbar\partial_x$  ou de dérivations  $p$ ,  $i\hbar\partial_p$  agissant sur les fonctions d'ondes  $\Psi_x(x) := \langle x|\Psi\rangle$  (espace des positions) ou  $\Psi_p(x) := \langle p|\Psi\rangle$  (espace des moment).

Cependant, les opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sont auto-adjoints leurs états propres sont exprimés comme des fonctions d'ondes, qui peuvent être approchés, avec une précision arbitrairement grande, par une séquence d'états physiques  $|\Psi_n\rangle$ , ayant une localisation croissante dans l'espace des coordonnées ou des impulsions [12], c'est-à-dire :

Dans le cas des relations de commutation ordinaires et des relations d'incertitude sous-jacentes, les états de la localisation maximale sont les états propres de position  $|x\rangle$  et, pour lesquels l'incertitude en position disparaît

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)_{|\Psi_n\rangle} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta p)_{|\Psi_n\rangle} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.151)$$

Fondamentalement, ces états de localisation maximales sont nonnormalizable. Par conséquent, leur produit scalaire n'est pas une fonction mais une distribution de Dirac  $\delta$

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'),$$

Le principe d'incertitude généralisé peut être écrit comme:

$$\Delta\hat{X} \Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \left( 1 + \beta (\Delta\hat{P})^2 + \gamma \right), \quad \gamma = \beta \langle \hat{p} \rangle^2. \quad (2.1.152)$$

une incertitude minimale rapportera une normalizable aux états de localisation maximales et régularise la divergence ultraviolette, en apportant des corrections aux relations de commutations habituelles

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \left( 1 + \beta \hat{P}^2 + \dots \right). \quad (2.1.153)$$

$\beta$  est choisi tels que les relations d'incertitude correspondantes impliquent une incertitude minimale finie  $\Delta X_{\min} \succ 0$   $\left( (\Delta X)_{|\Psi\rangle} = \langle \Psi | \left( \hat{X} - \langle \Psi | \hat{X} | \Psi \rangle \right)^2 | \Psi \rangle \geq \Delta X_{\min} \right)$ . Pour la simplicité nous supposons  $[P_i, P_j] = 0$  et  $[X_i, X_j] \neq 0$ . Ceci, implique l'inexistence d'états

propres physiques, de l'opérateur  $\hat{X}$  (puisque un état propre de  $\hat{X}$  devrait avoir une incertitude nulle sur la position). Techniquement, nous verrons, que l'incertitude minimale en position signifiera que l'opérateur de position n'est plus essentiellement auto-adjoint mais seulement symétrique. Alors que la préservation de la symétrie assure que toutes les valeurs propres sont réelles, que l'opérateur  $\hat{X}$  n'est pas auto-adjoint ouvre la voie à l'introduction d'une incertitude minimales.

Nous verrons que les états de localisation maximale seront les états physiques appropriés. Que nous pouvons les employer pour définir une représentation "quasi-position". Cette représentation a une interprétation directe en termes de mesures de position, bien qu'elle ne soit pas diagonale en  $x$ . Cependant, il est plus simple de travailler dans l'espace des impulsions, en choisissant une représentation adéquate satisfaisant la relation de commutation déformée (2.1.108).

Revenons à (2.2.56), pour un  $(\Delta X)$  fixe, cette inégalité est satisfaite dans l'intervalle  $[\Delta P_-, \Delta P_+]$ , tel que:

$$\Delta P_{\pm} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{\beta}}. \quad (2.1.154)$$

la petite valeur de  $\Delta X$  correspond à une racine double,  $(\Delta P_+ = \Delta P_-)$  c.-à-d.,  $\left(\left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{\beta} = 0\right)$ , donc

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta}(\gamma+1)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1.155)$$

de telle sorte que la valeur la plus petite de l'incertitude en positions  $(\Delta X)_{\min}$  est donnée par:

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}. \quad (2.1.156)$$

Kempf et ses collaborateurs ont indiqué dans leur document précurseur, on proposé cette représentation:

$$\hat{X} = i\hbar(1 + \beta P^2)\hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p}. \quad (2.1.157)$$

il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.2.10). En fait l'algèbre de Heisenberg peuvent être représentés sur les fonctions d'onde de l'espace des moment

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}\psi(p) = p\psi(p), \\ \hat{X}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta P^2)\partial_p\psi(p). \end{array} \right. \quad (2.1.158)$$

En outre,  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  sont symétriques dans le domaine  $S_{\infty}$  (démonstration voir appendix B)

$$\left(\langle\Psi|\hat{X}\right)|\Phi\rangle = \left(\langle\Psi|\hat{X}\right)|\Phi\rangle, \quad \left(\langle\Psi|\hat{P}\right)|\Phi\rangle = \left(\langle\Psi|\hat{P}\right)|\Phi\rangle. \quad (2.1.159)$$

pour vérifier la propriété si dessus la définition du produit scalaire doit être redéfini

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta P^2} \psi^*(p) \Phi(p), \quad (2.1.160)$$

le facteur  $(1 + \beta P^2)^{-1}$ , sert à éliminé le facteur correspondant de l'opérateur  $\hat{X}$ . La nouvelle définition du produit scalaire, nous conduit à redéfinir la relation de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta P^2} |p\rangle \langle p| = 1, \quad (2.1.161)$$

et le produit scalaire d'états propres d'impulsion est donc:

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta P^2) \delta(p - p'). \quad (2.1.162)$$

### Fonction propre de l'opérateur position

L'équation à valeur propre de l'opérateur de position, sur l'espace des moments est exprimée en forme d'équation différentielle

$$i\hbar (1 + \beta P^2) \frac{\partial}{\partial p} \Psi_x(p) = x \Psi_x(p), \quad (2.1.163)$$

la solution de l'équation (2.2.67) est donnée en fonction du paramètre de déformation  $\beta$  par:

$$\Psi_x(p) = c \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\beta} \arctan \sqrt{\beta} p\right), \quad (2.1.164)$$

$c$  est la constante de normalisation qui peut être calculée en utilisant la relation (2.2.64)

$$1 = cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta P^2} = \frac{cc^* \pi}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}. \quad (2.1.165)$$

Finalement la solution normalisée prends la forme suivante:

$$\Psi_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\beta} \arctan \sqrt{\beta} p\right), \quad (2.1.166)$$

$\Psi_x(p) = \langle p | x \rangle$  ne représente pas un état physique car la relation d'incertitude généralisée ne permet pas l'existence de tel état. Ceci s'explique par le fait que  $|x\rangle$  étant un vecteur propre de  $\hat{X}$  ayant une localisation infinie  $(\Delta \hat{X})_{|x\rangle} = 0$ . Les fonctions  $\Psi_x(p)$  seront considérées alors comme des "fonctions propres formelles" de l'opérateur de position. La relation (2.1.162), (2.1.164) implique une nouvelles relations de fermeture des vecteurs formels  $|x\rangle$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp |x\rangle \langle x| = 1. \quad (2.1.167)$$

par un simple calcul, on peut calculer le produit scalaire entre deux états formels  $|x\rangle$  et  $|x'\rangle$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x|x'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \Psi_x^*(p) \Psi_x(p), \\ = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi} \sin\left(\frac{(x-x')}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right). \end{array} \right. \quad (2.1.168)$$

Comme, on peut le distinguer les états propres formelles de l'opérateur de position ne sont pas, en général, orthogonaux. De l'équation (2.1.168) nous pouvons construire une base complète et orthogonale, on essayons de trouver une famille de paramètres qui peut diagonaliser l'opérateur  $\hat{X}$ . Cependant si, les ensembles de vecteurs propres paramétrisés par  $x \in [-1, 1[$

$$|\Psi_{(2n+x)\hbar\sqrt{\beta}}\rangle \dots\dots\dots \quad (2.1.169)$$

On peut vérifier que Les vecteurs propres  $|\Psi_{(2n+x)\hbar\sqrt{\beta}}\rangle$ , constituent, alors, un ensemble complet et orthogonal

$$\langle \Psi_{(2n+x)\hbar\sqrt{\beta}} | \Psi_{(2n'+x)\hbar\sqrt{\beta}} \rangle = \delta_{n,n'}. \quad (2.1.170)$$

Comme nous l'avons déjà signalé les états propres formelles ne sont pas physique, c'est parce qu'ils ne sont pas dans le domaine de  $P$ , qui signifie phisiquement qu'ils ont une incertitude infinie dans les moments et par conséquent, la valeur moyenne de l'énergie dans les états formels  $|x\rangle$  est infinie

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_x \left| \frac{P^2}{2m} \right| \Psi_x \right\rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p^2}{1+\beta p^2} \\ &= \frac{1}{2\pi m} \left[ \frac{p}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\beta} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right], \end{aligned}$$

ce résultat a une conséquence très importante, à savoir: tout état  $|\Psi\rangle$  pour lequel l'incertitude sur la position  $(\Delta X)$  se trouve à l'intérieur de l'intervalle interdit  $0 \leq (\Delta X) \leq (\Delta X)_{\min}$  ne peut pas avoir une énergie finie.

Ainsi, contrairement à la mécanique quantique ordinaire, les états formels  $|\Psi\rangle$  ayant une incertitude nulle sur la position, ne peuvent plus maintenant être approchés par une série d'états physiques où l'incertitude décroît vers zéro, car il y a maintenant une limite à la localisabilité. Pour ceci, il est plus utile d'introduire ce que l'on appelle "les états à localisation maximale" et définir une "quasi-représentation de configuration".

### Quasi-représentation de configuration: États à localisation maximale

Essayon explicitement de calculer les états à localisation maximale autour de la position  $x$ , c'est à dire les états qui obéissent aux propriétés suivantes:

$$\langle \Psi_x^{lm} | \hat{X} | \Psi_x^{lm} \rangle = \hat{x} \text{ et } (\Delta X)_{|\Psi_x^{lm}\rangle} = (\Delta X)_{\min}. \quad (2.1.171)$$

sachant que  $(\Delta X)_{\min}$  est à la plus petite valeur de l'incertitude minimale correspond à  $\langle P \rangle = 0$ , à partir de cette expression  $\left\| \left( \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} + (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) |\Psi \rangle \right) \right\| \geq 0$ , on peut établir la relation d'incertitude;  $[\hat{X}, \hat{P}]$  étant imaginaire, alors:

$$\langle \Psi | \left( \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle \right)^2 + \left( \frac{|\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|}{2(\Delta P)^2} \right)^2 \left( \hat{P} - \langle \hat{P} \rangle \right)^2 | \Psi \rangle \geq 0, \quad (2.1.172)$$

qui implique immédiatement la relation d'incertitude :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|. \quad (2.1.173)$$

donc on peut dire que l'état  $|\Psi\rangle$  vérifie  $\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|$ , si et seulement si il satisfait:

$$\left( \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} \left( \hat{P} - \langle \hat{P} \rangle \right) \right) |\Psi\rangle = 0. \quad (2.1.174)$$

En injectant cette expression dans l'espace des phase on obtient:

$$\left[ i\hbar(1 + \beta P^2) \partial_p - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2)}{2(\Delta P)^2} \left( \hat{P} - \langle \hat{P} \rangle \right) \right] \Psi(p) = 0, \quad (2.1.175)$$

dont la solution est exprimée par:

$$\Psi(p) = N \frac{\left[ \left( \frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} - \frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta P)^2\sqrt{\beta}} \right) \right]}{(1 + \beta P^2)^{\frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle \hat{P} \rangle^2}{2\beta(\Delta P)^2}}}. \quad (2.1.176)$$

les états à localisation maximale correspondent au cas  $\langle \hat{P} \rangle = 0$  ou  $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ . La relation (2.1.152) implique que  $\Delta P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ . Par conséquent on peut obtenir les états à localisation maximaux:

$$\Psi_x^{lm}(p) = N (1 + \beta P^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -i \frac{x}{\hbar\beta} \arctan \sqrt{\beta} p \right) \text{ avec } N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \quad (2.1.177)$$

les états (2.1.177) est une généralisation des états à localisation maximale en mécanique quantique ordinaire. maintenant, les états  $\Psi_x^{lm}(p)$  sont des états physiques ; et on peut vérifier que la divergence de la valeur moyenne de l'énergie est absorbée. En effet :

$$\langle \Psi_x^{lm} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \Psi_x^{lm} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta P^2} \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m\beta}. \quad (2.1.178)$$

Le produit scalaire des états à localisation maximale  $\langle \Psi_x^{lm} | \Psi_x^{lm} \rangle$  en fonction de  $(x - x')$  est donné par:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Psi_x^{lm} | \Psi_x^{lm} \rangle &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+\beta P^2)^2} \exp\left(-i \frac{(x-x')}{\hbar\beta} \arctan \sqrt{\beta} p\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(x-x')}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{(x-x')}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)^3 \right]^{-1} \sin\left(\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right) \end{aligned} \right. \quad (2.1.179)$$

Les états à localisation maximale ne sont pas en général orthogonaux et celà est d'origine de la nouvelle structure de notre espace modifié.

## 3

# Traitement de certains problèmes relativistes dans le cadre du principe d'incertitude généralisé

### 3.1 L'équation de Klein-Gordon en interaction avec un mélange de potentiel linéaire scalaire et vectoriel

L'étude de la particule relativiste sous l'action des potentiels vecteur et scalaire ainsi suscité un intérêt considérable dans divers domaines de la physique afin de garantir l'existence d' tats liés, tels que le problème de confinement dans le modèle de sac (the bag model) [40]. On peut faire un bref rappel sur le confinement, la vérification directe de l'existence des quarks n'est toutefois pas simple et demande beaucoup d'analyse et de déduction. Le problème est le suivant : il n'est pas possible de les isoler pour en faire une analyse directe. Les quarks sont dits confinés, Différentes théories ont été élaborées afin d'expliquer le phénomène de confinement, notamment le modèle du sac du MIT. Ce modèle permet de fournir une analogie d'une simplicité remarquable pour expliquer le confinement des quarks dans les hadrons. En plus de prédire les propriétés fondamentales comme l'absence de quarks libres et de hadrons ayant une charge colorée, il prédit avec un formalisme mathématique accessible la masse de plusieurs hadrons et ce, avec une précision plus que satisfaisante. Il est tout de même possible de décrire le phénomène de façon plus naïve; pour ce faire, certains ont postulé une force de « couleur » agissant entre les quarks et augmentant avec la distance à un taux de  $1\text{GeV}$  par fermi. Conséquemment, et dans la mesure où les modèles théoriques sont bons, il ne nous sera pas possible d'observer de quark à l'état libre. En

effet, à partir du moment où la séparation entre deux quarks devient perceptible, l'énergie du système est déjà bien au-dessus de l'énergie de production de paires de quark-antiquark. Par exemple, les quarks up et down ayant des masses de l'ordre de quelques centaines de MeV, la production de ce type de paire peut se faire à des distances inférieures à un fermi. On peut donc s'attendre à avoir un taux de production de mésons très élevé, qui sont des états liés de quark et d'antiquark, lors d'expériences de collision à très haute énergie.

En outre, le potentiel traité dans cette section peut être considéré comme un terme de masse efficace en physique des solides pour décrire les impuretés dans les cristaux, dans le puits quantique et les points quantiques [89]. Toutefois, pour son application pratique, l'étude quantique de ce problème nécessite quelques précautions relatives à l'ordre des opérateurs [90, 91]. Par conséquent, l'application d'un mélange de plusieurs potentiels vecteurs et scalaires pour une particule sans spin (boson) a été développée dans plusieurs travaux. Par exemple, l'équation de Klein-Gordon est exactement résolue, en présence d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire du type Hulthén [92, 93], avec un potentiel Coulombien [94], avec des potentiels vecteurs et scalaires de type exponentielle [95], avec potentiel de type Rosen-Morse [96], avec le potentiel généralisé de Hulthén [97], avec des potentiels linéaires et exponentielles [98]...etc.

Toutefois, nous notons que ces problèmes sont traités dans la mécanique quantique habituelle, où les opérateurs position et moment agissant sur l'espace de Hilbert des états vérifient l'algèbre de Heisenberg. En revanche, si l'on prend en compte les effets des fluctuations quantiques du champ gravitationnel dans le but de l'intégrer en mécanique quantique, une conséquence importante déduite de cette unification est l'existence d'une distance minimale de l'ordre de la longueur de Planck [11, 12, 13, 14]. Ce qui pourrait être obtenu par le biais de petites corrections quadratiques aux relations de commutation canoniques.

. Dans la première nous considérons la représentation de Brau où l'opérateur impulsion comprend des dérivées d'ordre supérieur et nous l'injectons dans l'équation de Klein-Gordon. Nous obtenons par la suite une équation différentielle du quatrième ordre, dont sa solution analytique est compliquée en présence de champs extérieurs. La méthode d'approximation la plus populaire et qui est largement utilisée en mécanique quantique est la théorie des perturbations, qui permet de résoudre approximativement des problèmes complexes ou compliqués. Elle nous offre une méthode efficace pour calculer les solutions approchées de nombreux problèmes qui ne peuvent pas être résolus de façon exacte. Avec une technique d'approximation appropriée d'une mécanique quantique non-relativiste, on retrouve les déplacements des niveaux d'énergie relativistes à l'ordre 1 du paramètre de déformation. Dans

la deuxième, nous avons introduit formalisme de Feynman des intégrales de chemin dans l'espace des impulsions, qui est une autre formulation de la mécanique quantique donnée par R. Feynman [99], dans sa thèse portant sur la formulation de la mécanique quantique à partir du Lagrangien du système, et c'est là où il fait introduire des intégrales de chemin pour la première fois; Cet outil mathématique s'est rapidement imposé en physique théorique avec sa généralisation à la théorie quantique des champs, permettant notamment une quantification des théories de jauge non-abéliennes plus simple que la procédure de quantification canonique. Feynman a essayé de trouver une méthode de quantification basée sur le Lagrangien pour décrire un système qui n'a pas d'hamiltonien, et cela en utilisant l'idée de Dirac; qui stipule que l'amplitude de transition élémentaire est proportionnelle à  $\exp\left(\frac{iS_\Gamma}{\hbar}\right)$  où  $S_\Gamma$  est l'action classique évaluée le long du chemin classique, c.-à-d.  $S_\Gamma = \int_\Gamma L(\dot{x}, x, t)$  et  $L(\dot{x}, x, t)$  est le Lagrangien du système. Dans cette partie on calcule la fonction de Green correspondante à notre système et on détermine le spectre d'énergie, les fonctions d'onde normalisées sont déduites et coïncident exactement avec ceux de la littérature [100]. En outre, les cas limites sont également déduits pour un petit paramètre de déformation. Les résultats des deux méthodes sont comparés. En conclusion, pour un petit paramètre de déformation les deux méthodes donnent le même décalage des niveaux d'énergie.

Avant d'entamer l'analyse du système proposé, je trouve que c'est nécessaire de faire un bref rappel sur quelques relations importantes que j'utiliserai par la suite.

En une dimension, la relation de commutation déformée est donnée par:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = (1 + \beta \hat{P}^2), \quad (3.1.1)$$

avec  $\hat{X}, \hat{P}$  sont respectivement l'opérateur position et moment à une dimension, pour  $\beta = 0$  on retrouve la relation de commutation bien connue en mécanique quantique ordinaire. KMM ont proposé dans leur article séminal, dans la représentation de l'espace des moment:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= i\hbar \left(1 + \beta \hat{P}^2 + \gamma \hat{P}\right) \partial_p, \\ \hat{P} &= \hat{p}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

où  $\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^N P_i^2$

La relation de fermeture déformée et le produit scalaire de  $\hat{P}$  et  $\hat{P}_0$  en données par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dP}{(1+\beta P^2)^{1-\alpha}} |P\rangle \langle P| = 1 \\ \int dP_0 |P_0\rangle \langle P_0| = 1 \end{array} \right. , \quad (3.1.3)$$

Le produit scalaire est exprimé dans cette expression:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle P_j | P_{j-1} \rangle = (1 + \beta P_j^2)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + \beta P_{j-1}^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \delta \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} P_j - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = (1 + \beta P_j^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} (1 + \beta P_{j-1}^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} \delta (P_j - P_{j-1}) \\ \langle P_{0j} | P_{0j-1} \rangle = \delta (P_{0j} - P_{0j-1}) \end{array} \right. , \quad (3.1.4)$$

où il a été supposé que la déformation n'affecte pas la composante temporelle  $P_0$ .

### 3.1.1 Par la méthode analytique directe

L'équation de Klein-Gordon sous l'action du potentiels vecteur et scalaire à  $(1+1)$ dimension est donnée par:

$$[(P_\mu - eA_\mu)(P^\mu - eA^\mu) - (S + M)^2] \Psi(x, t) = 0, \quad (3.1.5)$$

avec  $eA_\mu = (V(x), 0)$  est le quadrivecteur potentiel et  $S(x)$  désigne le potentiel scalaire avec le tenseur de Minkowski est  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ .

En unidimensionnelle, l'équation de Klein-Gordon stationnaire décrivant une particule de masse  $M$  en présence d'un potentiel vecteur  $V(x)$  et un potentiel scalaire  $S(x)$  est ainsi

$$[P^2 + (E - V(x))^2 - (M + S(x))^2] \Phi(x) = 0, \quad (3.1.6)$$

avec  $\Psi(x, t) = \exp(-iEt) \Phi(x)$

En employant la représentation (3.1.2) des operateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  dans l'espace des moments et nous proposons que les effets des fluctuations quantiques du champ de gravitation sont à l'ordre 1 en  $\beta$ . Alors, l'équation de Klein-Gordon modifiée est donnée par

$$\left[ -\frac{2}{3} \beta \partial_x^4 + \partial_x^2 + (E - V(x))^2 - (M + S(x))^2 \right] \Phi(x) = 0, \quad (3.1.7)$$

qui est une équation différentielle du quatrième ordre, dont la solution est très compliquée en présence d'un potentiel dépendant de  $x$ .

Nous prenons maintenant les potentiels vecteur et scalaire de la forme:  $S(x) = S_0 x$  et  $V(x) = V_0 x$  avec  $S_0$  et  $V_0$  deux constantes arbitraires caractérisant la résistance des potentiels. En outre, nous supposons que  $|S_0| \succ |V_0|$ , afin d'éviter valeurs propres complexe [38, 101].

En substituant dans le système (3.1.7) l'expression du potentiel choisi (3.1.8), nous obtenons pour la fonction  $\Phi(x)$ , l'équation différentielle suivante:

$$\left[ -\frac{2}{3} \beta \partial_x^4 + \partial_x^2 - (S_0^2 - V_0^2) x^2 - 2(MS_0 + EV_0) x + (E^2 - M^2) \right] \Phi(x) = 0. \quad (3.1.8)$$

Avant d'appliquer la méthode d'approximation pour cette équation, afin de déterminer la correction d'énergie, nous proposons d'étudier le cas particulier:  $V(x) = 0$  et  $S(x) = 0$ , Dans ce cas là l'équation (3.1.9) présente quatre solutions indépendantes de la forme

$$\Phi(x)_{1,2} = C_{\pm}^{\pm} \exp(\pm k^{\pm} x), \quad (3.1.9)$$

où  $C_{\pm}^{\pm}$  sont des constantes de normalisation, et

$$k^{\pm} = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3}\beta(E^2 - M^2)}}}{2\sqrt{\frac{\beta}{3}}}. \quad (3.1.10)$$

On remarque que les quantités  $k^-$  est un nombre imaginaire pur qui est égal à  $i\sqrt{(E^2 - M^2)}$  quand  $\beta \rightarrow 0$  et  $k^+$  est un réel qui diverge lorsque  $\beta \rightarrow 0$ . En résolvant l'identité ci-dessus pour  $(E^2 - M^2)$ , on constate que

$$(E^2 - M^2) = \pm (k^{\pm})^2 + \frac{3}{2}\beta (k^{\pm})^4, \quad (3.1.11)$$

qui n'est autre que la relation de dispersion modifiée en présence de la longueur minimale [102].

Maintenant, retournons à l'équation (3.1.9), comme, on l'a déjà mentionné auparavant pour décrire un système quantique complexe de façon simplifiée, nous essayons d'appliquer la méthode des perturbations usuelles de la mécanique quantique, pour pouvoir calculer la correction première d'énergie à l'ordre 1 en  $\beta$  et voir comment l'introduction de l'algèbre de Heisenberg modifiée affecte les résultats physiques. Dans un premier temps, on suppose que  $(S^2 - V^2) > 0$  afin d'éviter les valeurs propres complexes et nous écrivons l'équation (3.1.9) en une somme de deux termes, un hamiltonien non perturbé+la perturbation,

$$[H^0(z, \partial_z) + H^{pert}(\partial_z)] \Phi(z) = 0, \quad (3.1.12)$$

en utilisant ce changement de variable:

$$z = \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)} \left( x + \frac{(MS_0 + EV_0)}{(S_0^2 - V_0^2)} \right), \quad (3.1.13)$$

on aura:

$$H^0 = \partial_z^2 - z^2 + z_1, \quad (3.1.14)$$

$$H^{pert} = -\frac{2}{3}\beta \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)} \partial_z^4, \quad (3.1.15)$$

avec:

$$z_1 = \frac{(MS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(E^2 - M^2)}{\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}}. \quad (3.1.16)$$

Dans le cas, où  $H^{pert}(\partial_z)$  s'annule, (otherwise when  $\beta \rightarrow 0$ ), l'équation (3.1.15) devient le problème de l'oscillateur harmonique dont la solution est connue,

$$\Phi(z) = C \exp -\frac{1}{2}z^2 H_n(z), \quad (3.1.17)$$

avec  $z_1$  vérifie

$$z_1 = 2n + 1. \quad (3.1.18)$$

En injectant l'équations. (3.1.18) dans (3.1.16), il est facile de montrer que le spectre d'énergie  $E_{n,\pm}^{\beta=0}$  est

$$E_{n,\pm}^{\beta=0} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{(2n+1)}(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}{S_0}. \quad (3.1.19)$$

Notons que l'existence des deux signes  $\pm$  en (3.1.19) est une propriété caractéristique des énergies de la mécanique quantique relativiste.

Maintenant, pour trouver la première correction des niveaux d'énergie, nous utilisons la valeur moyenne de l'opérateur de perturbation

$$\Delta z_{n1} = \frac{\langle \Phi(z) | H^{pert} | \Phi(z) \rangle}{\langle \Phi(z) | \Phi(z) \rangle}, \quad (3.1.20)$$

on obtient ce résultat:

$$\begin{aligned} \Delta z_{n1} &= \frac{-\frac{2}{3}\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)} \int \exp(-\frac{1}{2}z^2) H_n(z) \partial_z^4 \exp(-\frac{1}{2}z^2) H_n(z) dz}{\int \exp(-\frac{1}{2}z^2) H_n(z) \exp(-\frac{1}{2}z^2) H_n(z) dz}, \\ &= -\frac{\beta\sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}}{2} (2n^2 + 2n + 1), \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

où nous avons utilisé certaines propriétés des polynômes d'Hermite (voir annex).

De la relation (3.1.17), nous obtenons l'expression de  $\Delta E_{n1}$  en fonction de  $\Delta z_{n1}$  :

$$\Delta E_{n1} = \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}}{2(MS_0V_0 + E_{n,\pm}^{\beta=0}S_0^2)} \Delta z_{n1}, \quad (3.1.22)$$

En injectant l'équation (3.1.19) et (3.1.21), dans (3.1.22) on trouve:

$$\Delta E_{n1} = \pm \frac{\beta}{4S_0} \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{5/4} (2n^2 + 2n + 1)}{\sqrt{(2n+1)}}. \quad (3.1.23)$$

Le spectre d'énergie du système à l'ordre 1 en  $\beta$  peut être écrit comme:

$$E_{n,\pm}^{\beta} = E_{n,\pm}^{\beta=0} + \Delta E_{n1} + O(\beta^2), \quad (3.1.24)$$

qui est égale à:

$$E_n^{\beta\pm} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{(2n+1)}(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}{S_0} \pm \frac{\beta}{4S_0} \frac{(S_0^2 - V_0^2)^{5/4}(2n^2 + 2n + 1)}{\sqrt{(2n+1)}} + O(\beta^2). \quad (3.1.25)$$

### 3.1.2 Par le formalisme des intégrales de chemins

Dans cette partie, nous proposons d'utiliser le formalisme d'intégrale de chemin pour calculer la fonction de Green du même système étudié dans la dernière section en présence du formalisme GUP et dans l'espace des moment.

Considérons la fonction formelle de Green correspondante à l'équation de Klein-Gordon pour une particule sans spin de masse  $m$  au repos et de charge  $e$ ,

$$G = -\frac{I}{(P_\mu - eA_\mu)(P^\mu - eA^\mu) - (M + S)^2}. \quad (3.1.26)$$

Selon la méthode de Schwinger du temps propre, la représentation globale de la causalité de la fonction de Green dans l'espace du bivecteur énergie-impulsion  $(p_0; p)$  est écrite comme:

$$G(P_b, P_a, P_{0b}, P_{0a}) = i \int_0^\infty d\tau \langle P_a, P_{0a} | \exp(-i\tau H) | P_b, P_{0b} \rangle, \quad (3.1.27)$$

avec:

$$\tau H = -\tau [P_0^2 - P^2 - M^2 + V^2(x) - S^2(x) - 2P_0V(x) - 2MS(x)]. \quad (3.1.28)$$

Afin de dériver une représentation intégrale de chemin pour  $G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1})$ , la méthode standard est adopté où l'on discrétise l'intervalle de temps  $\tau$  à  $N+1$  infinitésimales parties égales à  $\varepsilon = \frac{\tau}{N+1}$  et appliquer la formule de Trotter:

$$\langle P_f, P_{0f} | \exp(-iH(\tau)) | P_i, P_{0i} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle P_f, P_{0f} | [e^{-i\varepsilon H}]^{N+1} | P_i, P_{0i} \rangle. \quad (3.1.29)$$

Les relations de fermeture (3.1.3) par rapport à  $P$  et  $P_0$  sont insérés  $N$  fois entre chaque paire d'opérateur d'évolution infinitésimale nous obtenons par la suite l'expression suivante:

$$G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}) = i \int_0^\infty d\tau \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int \frac{dP_j}{(1 + \beta P_j^2)^{1-\alpha}} dP_{0j} \prod_{j=1}^{N+1} \langle P_j, P_{0j} | \exp \left\{ -i\varepsilon \left[ \hat{P}_0^2 - \hat{P}^2 - M^2 + V^2(\hat{x}) - S^2(\hat{x}) - 2\hat{P}_{0j}V(\hat{x}) - 2MS(\hat{x}) \right] \right\} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle, \quad (3.1.30)$$

ou sous cette forme:

$$G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}) = i \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\tau \prod_{j=1}^N \int \frac{dP_j}{(1 + \beta P_j^2)^{1-\alpha}} dP_{0j} \prod_{j=1}^{N+1} \exp(-i\varepsilon [P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2])$$

$$\langle P_j, P_{0j} | \exp \left\{ -i\varepsilon \left[ (-S^2(\hat{x}) + V^2(\hat{x})) - 2 \left( MS(\hat{x}) + \hat{P}_{0j} V(\hat{x}) \right) \right] \right\} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle. \quad (3.1.31)$$

Maintenant, nous utilisons la forme des potentiels proposée dans (3.1.8), l'expression de la fonction de Green (3.1.32) devient:

$$G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}) = i \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\tau \prod_{j=1}^N \int \frac{dP_j}{(1 + \beta P_j^2)^{1-\alpha}} dP_{0j}$$

$$\prod_{j=1}^{N+1} \exp(-i\varepsilon [P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2]) \langle P_j, P_{0j} | \exp \left\{ -i\varepsilon \left[ (V_0^2 - S_0^2) \hat{x}_j^2 - 2(MS_0 + P_{0j}V_0) \hat{x}_j \right] \right\} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle, \quad (3.1.32)$$

l'équation (3.1.33) peut être exprimé explicitement en utilisant la relation (3.1.2) comme suit:

$$G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}) = i \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\tau \prod_{j=1}^N \int \frac{dP_j}{(1 + \beta P_j^2)^{1-\alpha}} dP_{0j} \prod_{j=1}^{N+1} \exp(-i\varepsilon [P_{0j}^2 - P_j^2 - M^2])$$

$$\langle P_j, P_{0j} | \exp -i\varepsilon \left( (V_0^2 - S_0^2) \left[ i \left( (1 + \beta P_j^2) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right) \right]^2 - \right.$$

$$\left. -2i(MS_0 + P_{0j}V_0) \left[ (1 + \beta P_j^2) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right] \right) | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle, \quad (3.1.33)$$

c'est-facile de démontrer que l'évolution du dernier terme en (3.1.34) à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  peut être écrit:

$$\langle P_j, P_{0j} | \exp \left\{ -i\varepsilon \left( (V_0^2 - S_0^2) \left[ i \left( (1 + \beta P_j^2) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right) \right]^2 - \right.$$

$$\left. -2i(MS_0 + P_{0j}V_0) \left[ (1 + \beta P_j^2) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right] \right) \right\} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle$$

$$\simeq \langle P_j, P_{0j} | \left\{ 1 - i\varepsilon \left( (V_0^2 - S_0^2) \left[ i \left( (1 + \beta P_j^2) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right) \right]^2 - \right.$$

$$\left. -2i(MS_0 + P_{0j}V_0) \left[ (1 + \beta P_j^2) \frac{\partial}{\partial P_j} + \gamma P \right] \right) \right\} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle, \quad (3.1.34)$$

et introduisant la représentation intégrale de  $\langle P_j, P_{0j} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle$  donnée par:

$$\langle P_j, P_{0j} | P_{j-1}, P_{0j-1} \rangle = \int \int \frac{dt_j}{2\pi} \frac{d\rho_j}{2\pi} \frac{\exp it_j (P_{0j} - P_{0j-1})}{(1 + \beta P_j^2)^{\frac{\alpha}{2}} (1 + \beta P_{j-1}^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \exp i\rho_j \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} P_j - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1} \right) \quad (3.1.35)$$

l'expression (3.1.34) devient la suivante:

$$G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}) = i \int_0^\infty d\tau \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \int \frac{dP_j dP_{0j}}{(1+\beta P_j^2)^{1-\alpha}} \prod_{n=1}^{N+1} \int \int \frac{dt_j d\rho_j}{2\pi} \frac{\exp it_j (P_{0j} - P_{0j-1})}{(1+\beta P_j^2)^{\frac{\alpha}{2}} (1+\beta P_{j-1}^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \exp \left\{ -i\varepsilon (P_{0j}^2 + [(S_0^2 - V_0^2) (\beta\gamma + \gamma^2) - 1] P_j^2 - 2i\gamma (MS_0 + P_{0j}V_0) P_j - M^2 + (S_0^2 - V_0^2) \gamma) \right\} \exp i \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta}} (\arctg \sqrt{\beta} P_j - \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1}) + 2\varepsilon\gamma (S_0^2 - V_0^2) P_j - 2\varepsilon (MS_0 + P_{0j}V_0) \right] \rho_j + \varepsilon (S_0^2 - V_0^2) \rho_j^2 \right\}$$

ce qui revient à un simple calcul de la limite sur des intégrales Gaussiennes,  $\int dx \exp(-ax^2 + bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \frac{b^2}{4a}$ , sur les  $\rho_j$  de la forme:

$$\int \frac{d\rho_j}{2\pi} \exp \left[ i \left( \Delta \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} P_j + 2\varepsilon\gamma (S_0^2 - V_0^2) P_j + 2\varepsilon (mS_0 + P_{0j}V_0) \right) \rho_j - \varepsilon (S_0^2 - V_0^2) \rho_j^2 \right] = \sqrt{\frac{\pi}{i\varepsilon (S_0^2 - V_0^2)}} \exp i \left[ \frac{(\arctg \sqrt{\beta} P_j - \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1})^2}{4\varepsilon\beta (S_0^2 - V_0^2)} + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} (\arctg \sqrt{\beta} P_j - \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1}) P_j \right] \quad (3.1.36)$$

et l'intégration sur les  $t_j$  donne une fonction de delta. Cette fonction  $\delta$  limite les valeurs possibles de  $p_{0j}$  pour les valeurs possibles dans l'intégration. Enfin, nous obtenons ce nouveau résultat

$$G(P_j, P_{j-1}, P_{0j}, P_{0j-1}) = i (1 + \beta P_j^2)^{\frac{\alpha}{2}} (1 + \beta P_{j-1}^2)^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty d\tau \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \int \frac{dP_j}{(1 + \beta P_j^2)} dP_{0j} \prod_{n=1}^{N+1} \frac{\delta(P_{0j} - P_{0j-1})}{\sqrt{4\pi i\varepsilon (S_0^2 - V_0^2)}} \exp -i\varepsilon \left\{ P_{0j}^2 + (S_0^2 - V_0^2) \gamma + [(S_0^2 - V_0^2) \beta\gamma - 1] P_j^2 - M^2 + \frac{(MS_0 + P_{0j}V_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} \right\} \exp i \left[ \frac{(\arctg \sqrt{\beta} P_j - \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1})^2}{4\varepsilon\beta (S_0^2 - V_0^2)} + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} (\arctg \sqrt{\beta} P_j - \arctg \sqrt{\beta} P_{j-1}) P_j \right], \quad (3.1.37)$$

en utilisons le changement de variables suivant:

$$k_j = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} P_j, \quad k_{0j} = P_{0j}, \quad (3.1.38)$$

la valeur de  $k$  change dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, +\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}[$  selon les valeurs de  $p$  dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , On trouve alors le résultat suivant :

$$G(k_j, k_{j-1}, k_{0j}, k_{0j-1}) = i \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} k_f \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} k_i \right)^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty d\tau \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \int dk_{0j} \prod_{n=1}^{N+1} \delta(k_{0j} - k_{0j-1}) \exp -i\varepsilon \left\{ k_{0j}^2 - M^2 + (S_0^2 - V_0^2) \gamma + \frac{(mS_0 + k_{0j}V_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} \right\} \tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau), \quad (3.1.39)$$

avec:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau) &= \prod_{n=1}^N \int dk_j \prod_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{4\pi i \varepsilon (S_0^2 - V_0^2)}} \\ \exp i &\left[ \frac{(\Delta k_j)^2}{4\varepsilon (S_0^2 - V_0^2)} - \frac{(MS_0 + k_{0j}V_0)}{(S_0^2 - V_0^2)} \Delta k_j + \frac{\gamma \Delta k_j}{\sqrt{\beta}} \tan \sqrt{\beta} k_j + \varepsilon [\beta \gamma (S_0^2 - V_0^2) - 1] \frac{\tan^2 \sqrt{\beta} k_j}{\beta} \right], \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

et  $\Delta k_j = k_j - k_{j-1}$ .

Maintenant, nous développons les termes de l'action infinitésimale de  $\tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau)$  à l'ordre  $\varepsilon$  dans les environs du mid-point

$$\Delta k_j \tan \sqrt{\beta} k_j \simeq \Delta k_j \tan \sqrt{\beta} (\bar{k}_j) + \frac{(\Delta k_j)^2 \sqrt{\beta}}{2} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} \bar{k}_j \right), \quad (3.1.41)$$

où  $\bar{k}_j = \frac{k_j + k_{j+1}}{2}$  et on ne retient que les termes qui contribuent [103]

$$\langle (\Delta k_j)^2 \rangle = 2i\varepsilon (S_0^2 - V_0^2), \quad (3.1.42)$$

équation (3.1.41) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} G(k_j, k_{j-1}, k_{0j}, k_{0j-1}) &= i \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} k_f \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} k_i \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ \int_0^\infty d\tau \lim_{N \rightarrow \infty} &\prod_{n=1}^N \int dk_{0j} \prod_{n=1}^{N+1} \delta(k_{0j} - k_{0j-1}) \exp -i\varepsilon \left\{ k_{0j}^2 - M^2 + \frac{(MS_0 + k_{0j}V_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} \right\} \tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau), \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

avec:

$$\tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau) = \prod_{n=1}^N \int dk_j \prod_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{4\pi i \varepsilon (S_0^2 - V_0^2)}} \exp i \left\{ \frac{(\Delta k_j)^2}{4\varepsilon (S_0^2 - V_0^2)} - \varepsilon \frac{\tan^2 \sqrt{\beta} k_j}{\beta} \right\}. \quad (3.1.44)$$

Cette expression (3.1.46) est formellement identique à celle du potentiel la Poschl-Teller étudié [104]

$$\tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau) = \prod_{n=1}^N \int dk_j \prod_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{4\pi i \varepsilon (S_0^2 - V_0^2)}} \exp i \left\{ \frac{(\Delta k_j)^2}{4\varepsilon (S_0^2 - V_0^2)} - \varepsilon \beta (S_0^2 - V_0^2) \lambda (\lambda - 1) \tan^2 \sqrt{\beta} k_j \right\} \quad (3.1.45)$$

avec:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 (S_0^2 - V_0^2)}} \right). \quad (3.1.46)$$

La solution de cette intégrale de chemin peut s'écrire sous la forme:

$$\tilde{G}(k_j, k_{j-1}, \tau) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n \exp [i\tau\beta (S_0^2 - V_0^2) (n^2 + (2n + 1)\lambda)] \left( \cos \sqrt{\beta}k_i \cos \sqrt{\beta}k_i \right)^\lambda C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_f \right) C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_f \right), \quad (3.1.47)$$

où  $C_n^\lambda$  sont des polynômes de Gegenbauer avec la constante de normalisation  $N_n$  donnée par:

$$N_n = \Gamma(\lambda)^2 \left[ \frac{2^{2\lambda-1} n! (n + \lambda) \sqrt{\beta}}{\pi \Gamma(n + 2\lambda)} \right]. \quad (3.1.48)$$

Après avoir effectuer des intégrations sur les  $\{P_{0j}\}$  et  $\{\rho_j\}$ , par la suite, on effectuera une integration sur les  $k_{0j}$ , la fonction de Green (3.1.45) se réduit à:

$$G(k_b, k_a, k_{0b}, k_{0a}) = i \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta}k_f \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta}k_i \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N_n \int_0^\infty d\tau \delta(k_{0b} - k_{0a}) \exp -i\tau \left\{ k_{0b}^2 - M^2 + \frac{(MS_0 + k_{0b}V_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - \beta (S_0^2 - V_0^2) (n^2 + (2n + 1)\lambda) \right\} \left( \cos \sqrt{\beta}k_f \cos \sqrt{\beta}k_i \right)^\lambda C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_f \right) C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_i \right), \quad (3.1.49)$$

après intégration sur  $\tau$

$$G(k_f, k_i, k_{0f}, k_{0i}) = i \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta}k_f \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta}k_i \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N_n \frac{\delta(k_{0b} - k_{0a}) \left( \cos \sqrt{\beta}k_f \cos \sqrt{\beta}k_i \right)^\lambda C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_b \right) C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_i \right)}{k_{0b}^2 - M^2 + \frac{(MS_0 + k_{0b}V_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - \beta (S_0^2 - V_0^2) (n^2 + (2n + 1)\lambda)}, \quad (3.1.50)$$

nous notons que la présence de  $\delta$  reflète la conservation de l'énergie.

Afin d'évaluer exactement l'expression propagateur, il est commode d'écrire la transformation de Fourier (3.1.50) pour les variables  $\{k_{0b}\}$  et  $\{k_{0a}\}$ . La première intégrale sur le delta est immédiate, on obtient:

$$G(k_f, k_i, t_f, t_i) = i \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta}k_f \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta}k_i \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N_n \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_f - t_i)} \frac{\left( \cos \sqrt{\beta}k_f \cos \sqrt{\beta}k_i \right)^\lambda C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_f \right) C_n^\lambda \left( \sin \sqrt{\beta}k_i \right)}{E^2 - M^2 + \frac{(MS_0 + EV_0)^2}{(S_0^2 - V_0^2)} - \beta (S_0^2 - V_0^2) (n^2 + (2n + 1)\lambda)}. \quad (3.1.51)$$

On peut tirer le spectre d'énergie discret, en calculant les pôles de la fonction de Green  $G(k_b, k_a, t_b, t_a)$

$$E_n^\pm = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \omega_n^\beta, \quad (3.1.52)$$

avec  $\omega_n^\beta$  définie comme ceci:

$$\omega_n^\beta = \frac{(S_0^2 - V_0^2)}{S_0} \sqrt{\beta \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right) + \beta \left( n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 (S_0^2 - V_0^2)}}, \quad (3.1.53)$$

nous notons que ce résultat coïncide exactement avec celui obtenus par Roy.

Nous obtenons finalement la décomposition spectrale de l'amplitude de transition:

$$G(k_j, k_{j-1}, k_{0j}, k_{0j-1}) = i \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} k_f \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \tan^2 \sqrt{\beta} k_i \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N_n \int \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t_f-t_i)} \frac{(\cos \sqrt{\beta} k_f \cos \sqrt{\beta} k_i)^\lambda C_n^\lambda(\sin \sqrt{\beta} k_f) C_n^\lambda(\sin \sqrt{\beta} k_i)}{\left( E + \frac{MV_0}{S_0} - \omega_n^\beta \right) \left( E + \frac{MV_0}{S_0} + \omega_n^\beta \right)}, \quad (3.1.54)$$

Pour évaluer les fonctions d'ondes et le spectre d'énergie, intégrons sur la variable  $E$ . Ce qui peut être converti en une intégration complexe le long du contour  $C$ , puis en utilisant le théorème des résidus:

$$\oint \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t_f-t_i)}}{\left( E + \frac{MV_0}{S_0} - \omega_n^\beta \right) \left( E + \frac{MV_0}{S_0} + \omega_n^\beta \right)} = \frac{-i}{2\omega_n^\beta} \left[ \theta(t_f - t_i) e^{-i\left(\omega_n^\beta - \frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)} + \theta(t_i - t_f) e^{i\left(\omega_n^\beta + \frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)} \right]. \quad (3.1.55)$$

Enfin, nous obtenons la décomposition spectrale du propagateur de la particule (1 + 1)dimension de Klein-Gordon sous l'action des potentiels linéaires vecteurs et scalaires en présence d'une longueur minimale

$$G(P_f, P_i, t_f, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \theta(t_f - t_i) \frac{N_n}{2\omega_n^\beta} (1 + \beta P_f^2)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} (1 + \beta P_i^2)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} C_n^\lambda \left( \frac{\sqrt{\beta} P_f}{\sqrt{1 + \beta P_f^2}} \right) C_n^\lambda \left( \frac{\sqrt{\beta} P_i}{\sqrt{1 + \beta P_i^2}} \right) e^{-i\left(\omega_n^\beta - \frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)} + \theta(t_i - t_f) \frac{N_n}{2\omega_n^\beta} (1 + \beta P_f^2)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} (1 + \beta P_i^2)^{\frac{\alpha-\lambda}{2}} C_n^\lambda \left( \frac{\sqrt{\beta} P_f}{\sqrt{1 + \beta P_f^2}} \right) C_n^\lambda \left( \frac{\sqrt{\beta} P_i}{\sqrt{1 + \beta P_i^2}} \right) e^{i\left(\omega_n^\beta + \frac{MV_0}{S_0}\right)(t_f-t_i)} \right], \quad (3.1.56)$$

où nous avons utilisé les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{\beta} k &= \frac{1}{\sqrt{1 + \beta P^2}}, \\ \sin \sqrt{\beta} k &= \frac{\sqrt{\beta} P}{\sqrt{1 + \beta P^2}}. \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

Enfin, nous obtenons la décomposition spectrale du propagateur de la particule (1 + 1)dimension de K-G sous l'action d'un potentiel linéaire vecteur et scalaire en présence d'un principe d'incertitude généralisé

$$G(P_f, P_i, t_f, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \theta(t_f - t_i) \xi(P_f)_n \xi(P_i)_n^* e^{-i(\omega_n^\beta - \frac{MV_0}{S_0})(t_f - t_i)} + \theta(t_i - t_f) \xi(P_f)_n^* \xi(P_i)_n e^{i(\omega_n^\beta + \frac{MV_0}{S_0})(t_f - t_i)} \right], \quad (3.1.58)$$

en utilisant l'ancienne variable  $p$ ,  $\xi(P)_n$  sont données par:

$$\xi(P)_n = \sqrt{\frac{2^{2\lambda-1} n! (n + \lambda) \Gamma(\lambda)^2 \sqrt{\beta}}{2\pi \Gamma(n + 2\lambda) (1 + \beta P^2)^{\lambda-\alpha} \omega_n^\beta}} C_n^\lambda \left( \frac{\sqrt{\beta} P}{\sqrt{1 + \beta P^2}} \right). \quad (3.1.59)$$

Dans l'Eq.(3.1.57), nous avons deux types de propagations, l'une avec l'énergie positive  $E_n^{\beta+} = + \left( \omega_n^\beta - \frac{MV_0}{S_0} \right)$ , se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative  $E_n^{\beta-} = - \left( \omega_n^\beta + \frac{MV_0}{S_0} \right)$ , se propageant vers le passé.

il est remarquable si l'on considère un  $\beta \ll 1$ , (3.1.55) peut facilement s'écrire comme:

$$\omega_n^{\beta \ll 1} = \frac{\sqrt{(2n+1)(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}}{S_0} + \frac{\beta (S_0^2 - V_0^2)^{5/4} (2n^2 + 2n + 1)}{4S_0 \sqrt{(2n+1)}} + O(\beta^2), \quad (3.1.60)$$

Enfin, nous obtenons:

$$E_n^{\beta \pm} = -\frac{MV_0}{S_0} \pm \frac{\sqrt{(2n+1)(S_0^2 - V_0^2)^{3/4}}}{S_0} \pm \frac{\beta (S_0^2 - V_0^2)^{5/4} (2n^2 + 2n + 1)}{4S_0 \sqrt{(2n+1)}} + O(\beta^2). \quad (3.1.61)$$

Nous pouvons maintenant comparer ce résultat avec celui obtenu dans la section précédente (3.1.25) de la théorie des perturbations, quoique les deux méthodes donnent le même décalage des niveaux d'énergie.

Dans cette section nous avons évalué la particule de Klein-Gordon à (1 + 1) dimension, soumise à l'action de plus les potentiels vecteur scalaire linéaires dans le cadre du principe d'incertitude généralisé via deux méthodes: 1/ une méthode directe, dans laquelle on a traité le problème dans la représentation de position, en utilisant la réduction de Brau. Notre système a été converti vers une équation de Klein-Gordon modifiée, une équation différentielle d'ordre quatre se présente dont sa solution analytique est compliquée. En utilisant une technique d'approximation d'une mécanique quantique usuelle, nous obtenons les niveaux d'énergie relativiste à l'ordre 1 en paramètre de déformation  $\beta$ .

En revanche, la deuxième méthode, par le formalisme de Feynman dans l'espace des moments. La fonction de Green est obtenue, le spectre d'énergie ainsi que les fonctions

d'onde normalisées des états liés sont déduites et dépendent du paramètre  $\beta$  de la déformation comme dans le cas de la théorie non commutative. Le cas limite est alors déterminé et comparée à celui obtenue à partir de la théorie des perturbations, les deux méthodes donnent le même décalage des niveaux d'énergie. Le mérite de la formulation de Feynman est sa façon intuitive d'interpréter les équations fondamentales de la mécanique quantique ordinaire en utilisant des trajectoires classiques. En outre, pour des raisons pédagogiques, il convient de traiter ce problème par le biais de ces méthodes équivalentes.

Le présent travail peut trouver quelques applications intéressantes dans la phénoménologie de confinement des quarks, dont le potentiel linéaire est un modèle de mécanique quantique important [105].

Le potentiel linéaire permet donc d'avoir un tetraquark stable qui serait un moyen d'expliquer les états récemment observés dans les collisionneurs et il décrit un mouvement dans un champ gravitationnel uniforme ou électrique [106].

## 3.2 L'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique à (3 + 1) dimensions

La mécanique quantique avec des champs externes a été continuellement développée et plusieurs propriétés des différents états de la matière ont été étudiées. En particulier, le cas du champ électromagnétique qui a joué un rôle majeur pour la liaison des électrons aux noyaux, l'interaction entre les molécules, les réactions photonucléaires qui se traduisent par la production de mésons, des liaisons chimiques qui se posent des interactions entre les électrons des atomes voisins ... et parmi les phénomènes bien connus causés sont appelés l'effet Zeeman, effet Stark et effet Aharonov-Bohm ... Pour tenir compte de cette interaction. Pour une charge en présence d'un champ électromagnétique externe donné, représenté par le quadri-potentiel  $\mathbf{A}^\mu$ , la prescription de couplage minimal de Fock conduit à substituer à la quadri-impulsion la quantité suivante :  $\mathbf{p}^\mu \rightarrow \mathbf{p}^\mu - e\mathbf{A}^\mu$ , avec  $\mathbf{A}^\mu = (A_0, \mathbf{A})$ .

A cet effet, certains problèmes ont été résolus dans ce cadre. Par exemple, la solution de l'équation de Dirac dans des champs électriques et magnétiques orthogonales [107, 108], le cas des champs électriques et magnétiques obliques par [109], Klein-Gordon et de Dirac équations pour une particule dans un champ électrique constant [110], le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique [111, 5], Équation de Dirac, en présence d'un champ magnétique spatialement périodique [112], Création de spin 1/2 particules par un champ électrique dans l'espace de Sitter [113], Création de particules de Dirac, en présence

d'un champ électrique constant dans un univers anisotrope Bianchi I [114], Particules de Dirac dans un champ magnétique tournant [115], les fonctions de Green de l'équation de Dirac avec champ magnétique solénoïde [116]. Mécanique quantique des champs de Klein-Gordon II: des états cohérents relativiste [117], Des électrons dans des champs électromagnétiques croisés constants et un champ d'ondes planes [118] et les ensembles équivalents de solutions de l'équation de Klein-Gordon avec un champ électrique constant [119].

Ces dernières années, beaucoup d'efforts ont été déployés pour résoudre ces équations d'ondes relativistes pour différents potentiels en utilisant des méthodes différentes dans la mécanique quantique habituelles, où les opérateurs position et moment agissant sur l'espace de Hilbert des états vérifie l'algèbre de Heisenberg standard . Toute approche visant à une formulation cohérente d'une théorie quantique de la gravitation semble impliquer l'existence d'une échelle de longueur minimale dans la nature de l'ordre de la longueur de Planck [11, 12, 13, 14]. Comme on l'a déjà mentionnée dans le chapitre précédent, Cette caractéristique conduit à une modification du principe d'incertitude de Heisenberg (GUP). Pour préparer la construction d'une mécanique quantique totalement relativiste dans l'espace déformé, nous essayant de construire une théorie d'une particule. Certains exemples ont été pris en compte dans la littérature, l'oscillateur harmonique qui a été récemment considéré [31, 32, 120, 121], la construction de l'équation de Dirac généralisée [38], traitement de l'équation de Dirac dans un potentiel linéaire à (1 + 1)-dimensions [122], diffusion des particules [123], l'équation de Klein-Gordon à (1 + 1) dimensions soumise à un potentiel vecteur et scalaire linéaires en [124, 125], l'oscillateur de Klein-Gordon à D-dimension [126], l'équation de Dirac dans un potentiel linéaire scalaire [39] et un champ magnétique statique [127]...etc.

Le but principal de cette partie est de résoudre exactement les équations e Klein-Gordon et de Dirac à (3 + 1) dimensions, en présence d'une longueur minimale, où la particule est soumise à un champ électromagnétique externe.

L'algèbre de Heisenberg déformée à trois dimensions qui considère la longueur minimale comme une incertitude supplémentaire dans la mesure de position [12], est définie par les relations de commutations suivante:

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta P^2), \quad [X_i, X_j] = -2\beta i\hbar [1 + \beta P^2] \epsilon_{ijk} L_k, \quad \text{and} \quad [P_i, P_j] = 0, \quad (3.2.1)$$

avec  $\beta$  est un paramètre positif très faible déformation et  $L_k$  est la composante du moment cinétique qui peut être exprimé comme suit:

$$L_k = \frac{1}{1 + \beta P^2} \epsilon_{ijk} X_i P_j, \quad (3.2.2)$$

qui satisfait l'algèbre usuelle :

$$[P_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k, \quad [X_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}X_k, \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad (3.2.3)$$

Sous l'influence de (GUP), les opérateurs position et moment agissent comme:

$$X_i = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad P_i = p_i, \quad (3.2.4)$$

Dans ce qui suit nous obtenons les relations nécessaires pour notre calcul en tenant compte du fait que nous devons récupérer la mécanique quantique habituelles dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ .

Dans cette partie, nous allons résoudre l'équation de Klein-Gordon à trois dimensions dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé, qui a été développé au début. En employant la substitution  $\mathbf{p}^\mu \rightarrow \mathbf{p}^\mu - e\mathbf{A}^\mu$ . l'équation stationnaire de Klein-Gordon décrivant une particule scalaire, de masse  $m$  soumise à l'action d'un champ électromagnétique uniforme  $A_\mu$ , nous travaillons dans le système ( $\hbar = c = 1$ ), est donnée par:

$$((\mathbf{p} - e\mathbf{A}(y))^2 + m^2 - (\varepsilon - eA_0)^2) \psi = 0, \quad (3.2.5)$$

$\varepsilon$  est l'énergie.

En supposant que la direction de champ magnétique  $H$  le long de l'axe  $z$ , du champ électrique  $E$  le long de l'axe  $y$  et la jauge est fixée comme suit:

$$A_\mu = -y(\delta_{\mu 0}E + \delta_{\mu 1}H), \quad (3.2.6)$$

où  $\delta_{\mu\nu}$  est le symbole de Kronecker.

En remplaçant le champ  $A_\mu$  par (3.2.6), l'Eq. (3.2.5) se transforment comme:

$$[e^2(H^2 - E^2)y^2 + 2e(p_xH - \varepsilon E)y + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 - \varepsilon^2] \psi(y) = 0, \quad (3.2.7)$$

où en exprimant les opérateurs  $X_i$  et  $P_j$  en termes des opérateurs de coordonnées commutatives et leurs opérateurs du moments (3.2.4), l'Eq. (3.2.7) peut s'écrire:

$$\left[ -e^2H^2\gamma^2 \left( \frac{\beta}{\alpha} (1 + \alpha p_y^2) \frac{\partial}{\partial p_y} \right)^2 + 2ieH \left( p_x - (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon \right) \left( \frac{\beta}{\alpha} (1 + \alpha p_y^2) \frac{\partial}{\partial p_y} \right) + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 - \varepsilon^2 \right] \psi(p_y) = 0, \quad (3.2.8)$$

où il a été choisi  $|H| \succ |E|$  avec  $\alpha = \frac{\beta}{1 + \beta(p_x^2 + p_z^2)}$  et  $\gamma^2 = \left( 1 - \frac{E^2}{H^2} \right)$ . Nous notons que dans le cas particulier si:  $|H| = |E|$ , Eq.(3.2.8) se convertira à une équation différentielle du premier ordre.

Maintenant, afin de résoudre cette dernière Eq., nous utilisons la transformation suivante:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha} p_y), \quad (3.2.9)$$

la valeur de  $\rho$  change dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}, +\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}[$  selon les valeurs de  $p_y$  dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , on obtient:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - 2i\eta\sqrt{\alpha} \frac{d}{d\rho} - \alpha\delta \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho) - \alpha\sigma \right\} \psi = 0, \quad (3.2.10)$$

avec:

$$\sigma = \frac{\alpha(p_x^2 + p_z^2 + m^2 - \varepsilon^2)}{\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{\alpha}(p_x - (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon)}{\beta e H \gamma^2} \quad \text{and} \quad \delta = \frac{1}{\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2}, \quad (3.2.11)$$

Pour simplifier l'équation (3.2.10), Nous utilisons l'ansatz suivant:

$$\psi(\rho) = \exp(i\eta\sqrt{\alpha}\rho)\varphi(\rho), \quad (3.2.12)$$

nous obtenons

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \alpha\delta \tan^2 \sqrt{\alpha}\rho + \alpha(\eta^2 - \sigma) \right\} \varphi(\rho) = 0, \quad (3.2.13)$$

Pour réduire cette équation à une classe d'équations différentielles connues, on utilise la transformation suivante:

$$\varphi(\rho) = (1 - u^2)^{\frac{\lambda}{2}} f(u), \quad (3.2.14)$$

où  $\lambda$  est une constante à déterminer et  $u = \sin(\sqrt{\alpha}\rho)$ .

Au moyen de cette substitution (3.2.14), l'équation différentielle (3.2.13) se réduisent au type de Gegenbauer

$$\left[ (1 - u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (2\lambda + 1) u \frac{\partial}{\partial u} + n(n + 2\lambda) \right] f(u) = 0, \quad (3.2.15)$$

où  $\lambda$  et  $n$ , des entier non négatifs, qui vérifient ces conditions:

$$\begin{cases} \lambda(\lambda - 1) - \delta = 0 \\ \eta^2 - \sigma - \lambda = n(n + 2\lambda) \end{cases}, \quad (3.2.16)$$

où la première relation de (3.2.16) détermine la valeur de  $\lambda$ :

$$\lambda^\pm = 1/2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4\delta} \right), \quad (3.2.17)$$

et pour éviter la singularité de  $\varphi(u)$  à  $u = \pm 1$ . Dans la suite du calcul nous choisissons cette valeur:

$$\lambda = \lambda^+ = 1/2 \left( 1 + \sqrt{1 + 4\delta} \right). \quad (3.2.18)$$

Finalement, la solution exacte de l'équation (3.2.15) peut être exprimée par le polynôme de Gegenbauer comme:

$$f(u) = NC_n^{\lambda^+}(u), \quad (3.2.19)$$

avec  $N$  est une constante de normalisation.

Par conséquent, l'expression de  $\psi(\rho)$  peut être écrite comme:

$$\psi_n(\rho) = N \cos^{\lambda^+}(\sqrt{\alpha}\rho) \exp(i\eta\sqrt{\alpha}\rho) C_n^{\lambda^+}(\sin(\sqrt{\alpha}\rho)), \quad (3.2.20)$$

ou avec l'ancienne variable  $p_y$  comme:

$$\psi_n(p_y) = N (1 + \alpha p_y^2)^{-\frac{\lambda^+}{2}} \exp(i\eta \arctan(\sqrt{\alpha}p_y)) C_n^{\lambda^+}\left(\frac{\sqrt{\alpha}p_y}{\sqrt{1 + \alpha p_y^2}}\right). \quad (3.2.21)$$

Pour extraire le spectre d'énergie, on substitue les expressions (3.2.11) et (3.2.18) dans la deuxième relation de (3.2.16), il est facile de montrer que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,\pm}^\beta &= (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma [(p_z^2 + m^2) + eH\gamma(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2))] \\ &\times \left[ (2n + 1) \sqrt{1 + \frac{1}{4}\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2 + \beta e H \gamma \left( n(n + 1) + \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Il est remarquable que l'expression ci-dessus de spectre d'énergie contient une correction supplémentaire, qui dépend du paramètre de déformation  $\alpha$  et sa déviation augmente rapidement avec  $n^2$ . Cet effet est dû essentiellement à la modification de l'algèbre de Heisenberg standard. Nous notons également que, ce résultat explique le confinement au secteur de haute énergie. In addition, Cependant, la forme de spectre énergétique peut être testée; en utilisant la limite  $\beta \rightarrow 0$ , nous obtenons le résultat obtenue dans le cas ordinaire.

Dans le cas d'un champ magnétique pur, c'est à dire, où  $E = 0$ , l'Eq.(3.2.22) se présente sous forme:

$$\varepsilon_{n,\pm}^\beta = \sqrt{(p_z^2 + m^2) + eH(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2)) \left[ (2n + 1) \sqrt{1 + \frac{1}{4}\beta^2 e^2 H^2 + eH\beta \left[ n(n + 1) + \frac{1}{2} \right]} \right]}. \quad (3.2.23)$$

Afin de séparer la contribution en  $\beta$ , nous étendons au premier ordre en  $\beta$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,\pm}^{\beta \ll} &= (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma \left[ \sqrt{(p_z^2 + m^2) + (2n + 1)eH\gamma} \right. \\ &\left. + \frac{\beta}{2} eH\gamma \left( (p_x^2 + p_z^2)(2n + 1) + eH\gamma \left( n(n + 1) + \frac{1}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Le premier terme de (3.2.24) est le spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon ordinaire en présence d'un champ électromagnétique et le second terme représente la correction due à la présence de la longueur minimale. Ici, nous notons la dépendance à  $n^2$  qui est une caractéristique du confinement difficile comme dans le cas du problème de l'oscillateur [27, 28], qui est la similitude entre les deux problèmes. Dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ , on obtient le résultat suivant ordinaire.

### 3.3 Dynamique d'une particule de Dirac sous l'action d'un champ électromagnétique à (3 + 1) dimensions

#### 3.3.1 Solution de l'équation de Dirac dans l'espace des moment

Dans cette section, nous considérons des particules relativistes de spin un demi décrites par l'équation de Dirac stationnaire dans un champ de jauge électromagnétique  $A_\mu$ , (3.2.6)

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m - (\epsilon - eA_0)] \Psi(y) = 0, \quad (3.3.1)$$

avec:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}, \quad (3.3.2)$$

$$(\Pi^2 + e(1 + \beta p^2)\overline{M}) \chi(y) = 0, \quad (3.3.3)$$

et  $\boldsymbol{\sigma} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  sont les matrices de Pauli et  $I_2$  est la matrice unité  $2 \times 2$ .

La quadrature de cette équation est nécessaire pour résoudre (3.3.1) dans un champ externe, donc il est commode de multiplier par cet ansatz:

$$\Psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + (\epsilon - eA_0)] \chi, \quad (3.3.4)$$

la fonction  $\chi$  à quatre composants vérifie l'équation: où  $\Pi^2$  est l'opérateur de Klein Gordon:  $\Pi^2 = ((\mathbf{p} - e\mathbf{A}(y))^2 + m^2 - (\epsilon - eA_0)^2)$  et la matrice  $\overline{M}$  est donnée par:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} -H & 0 & 0 & -H \\ 0 & H & E & 0 \\ 0 & -E & -H & 0 \\ E & 0 & 0 & H \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre (3.3.4), nous diagonalisons la matrice  $\overline{M}$  dont les valeurs propres sont  $\tau_i^\pm = \pm H\gamma$ . D'où les solutions peuvent être construites comme suit  $\chi(p) = U_\tau \xi_\tau(p)$  avec  $U$  est la

matrice de transfert donnée par:

$$U_\tau = -\frac{H}{E} \begin{pmatrix} 0 & (1-\gamma) & (1+\gamma) & 0 \\ (1+\gamma) & 0 & 0 & (1-\gamma) \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Eq.(3.3.4) devient:

$$\left[ \Pi^2 + e(1 + \beta p^2) \widetilde{M} \right] \xi_\tau(p) = 0, \quad (3.3.6)$$

où

$$\widetilde{M} = U_\tau^{-1} \bar{M} U_\tau. \quad (3.3.7)$$

En utilisant l'expression du champ en (3.2.6) et (3.1.3) la forme explicite de (3.3.6) peut s'écrire sous la forme:

$$\left[ -e^2 H^2 \gamma^2 \left( \frac{\beta}{\alpha} (1 + \alpha p_y^2) \frac{\partial}{\partial p_y} \right)^2 + 2ieH \left( p_x - \epsilon (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right) \left( \frac{\beta}{\alpha} (1 + \alpha p_y^2) \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \right. \\ \left. + (1 \pm e\beta H \gamma) p_y^2 + p_x^2 + p_z^2 + m^2 - \epsilon^2 \pm e \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) H \gamma \right] \xi_\tau^\pm(p_y) = 0, \quad (3.3.8)$$

avec:

$$\xi_\tau(p_y) = \begin{pmatrix} \xi_\tau^+ \\ \xi_\tau^- \end{pmatrix} \otimes \mathbf{V}, \quad (3.3.9)$$

où  $\mathbf{V}$  est un vecteur constant de dimension  $(2 \times 1)$ .

en utilisant le changement de variable (3.2.9), Eq. (3.3.8) se simplifie en:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - 2i\eta\sqrt{\alpha} \frac{d}{d\rho} - \alpha\delta \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho) - \alpha\sigma \right\} \xi_\tau^\pm(\rho) = 0, \quad (3.3.10)$$

où

$$\sigma = \frac{\alpha (p_x^2 + p_z^2 + m^2 - \epsilon^2 \pm e \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) H \gamma)}{\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2}, \quad \delta = \frac{(1 \pm e\beta H \gamma)}{\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2}, \quad (3.3.11)$$

Procédons de la même manière que dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, en tenant compte des mêmes transformations. (3.2.14)

$$\xi_\tau^\pm(\rho) = \exp(i\eta\sqrt{\alpha}\rho) \zeta^\pm(\rho), \quad \text{et} \quad \zeta_\tau^\pm(\rho) = (1 - u^2)^{\frac{\lambda^\pm}{2}} g_\tau^\pm(u), \quad (3.3.12)$$

où  $\lambda$  et  $n$ , un entier non négatif, vérifie ces conditions:

$$\begin{cases} \lambda(\lambda - 1) - \delta = 0 \\ \eta^2 - \sigma - \lambda = n(n + 2\lambda) \end{cases}. \quad (3.3.13)$$

Par conséquent, la solution exacte de l'équation (3.3.6) est donnée en fonction de l'ancienne variable  $p_y$  comme:

$$\xi_{\tau,n}^{\pm}(p_y) = \Lambda^{\pm} (1 + \alpha p_y^2)^{-\frac{\lambda^{\pm}}{2}} \exp(i\eta \arctan(\sqrt{\alpha} p_y)) C_n^{\lambda^{\pm}} \left( \frac{\sqrt{\alpha} p_y}{\sqrt{1 + \alpha p_y^2}} \right), \quad (3.3.14)$$

avec  $\Lambda^{\pm}$  est la constante de normalisation, et par le même raisonnement que dans le cas précédent, la valeur acceptée de  $\lambda^{\pm}$  sont:

$$\lambda^+ = 1 + \frac{1}{e\beta H\gamma}, \quad \lambda^- = \frac{1}{e\beta H\gamma}. \quad (3.3.15)$$

Le spectre d'énergie correspondante peut être déduit de la condition (3.3.13)

$$\epsilon_n^+ = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma [(p_z^2 + m^2) + (n + 1) eH\gamma (1 + \beta (p_x^2 + p_z^2)) (\beta (n + 1) eH\gamma + 2)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.16)$$

$$\epsilon_n^- = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma [(p_z^2 + m^2) + neH\gamma (1 + \beta (p_x^2 + p_z^2)) (\beta neH\gamma + 2)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.17)$$

La dépendance en  $n^2$  serait une signature unique des relations de commutation modifiée. Contrairement au cas ordinaire, les niveaux d'énergie se comportent comme les niveaux d'énergie d'une particule confinée dans un puits de potentiel. C'est une caractéristique du confinement difficile qui rend le modèle considéré dans une position plus adaptée à la description de confinement des quarks. Avant de finaliser cette section, il est préférable de traiter quelques cas particuliers.

Le cas d'un champ magnétique pur, c'est à dire, où  $E = 0$ , l'Eq. (3.3.16) et (3.3.17) prennent la forme:

$$\epsilon_n^+ = \pm \sqrt{(p_z^2 + m^2) + (n + 1) eH (1 + \beta (p_x^2 + p_z^2)) [\beta (n + 1) eH + 2]}, \quad (3.3.18)$$

$$\epsilon_n^- = \pm [(p_z^2 + m^2) + neH (1 + \beta (p_x^2 + p_z^2)) (\beta neH + 2)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.19)$$

Afin de séparer la contribution en  $\beta$ , nous étendons au premier ordre en  $\beta$  (3.3.16) et (3.3.17), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,\beta \ll}^+ &= (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \\ &\gamma \left[ \sqrt{(p_z^2 + m^2) + 2(n + 1) eH\gamma} + \frac{\beta}{2} (n + 1) eH\gamma [(n + 1) eH\gamma + 2 (p_x^2 + p_z^2)] + O(\beta^2) \right], \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\epsilon_{n,\beta \ll}^- = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma \left[ \sqrt{(p_z^2 + m^2) + 2neH\gamma} + \frac{\beta}{2} neH\gamma (neH\gamma + 2 (p_x^2 + p_z^2)) + O(\beta^2) \right], \quad (3.3.21)$$

Ces résultats sont en accord avec ceux de la mécanique quantique ordinaire, si nous prenons  $\beta = 0$  dans (3.3.18) et (3.3.19)

$$\epsilon_n^+ = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma [(p_z^2 + m^2) + 2(n + 1)eH\gamma]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.22)$$

$$\epsilon_n^- = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x \pm \gamma [(p_z^2 + m^2) + 2neH\gamma]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.23)$$

nous obtenons les spectre d'énergies de l'équation de Dirac ordinaire, qui coïncide exactement avec ceux obtenus par [107] dans le cas où la longueur minimale est absente.

Avant de conclure cette discussion, par un calcul direct, la détermination des autres composantes est simple, nous devons prendre en compte la propriété du polynôme de Gegenbauer suivante.

$$\frac{d}{du} C_n^\lambda(u) = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(u). \quad (3.3.24)$$

La solution finale est donnée par:

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{H}{E} \exp(i\eta \arctan(\sqrt{\alpha} p_y)) \left( A_+ C_n^{\lambda^+} \left( \frac{\sqrt{\alpha} p_y}{\sqrt{1 + \alpha p_y^2}} \right) + A_- C_n^{\lambda^-} \left( \frac{\sqrt{\alpha} p_y}{\sqrt{1 + \alpha p_y^2}} \right) \right. \\ & \left. + B_+ C_{n-1}^{\lambda^++1} \left( \frac{\sqrt{\alpha} p_y}{\sqrt{1 + \alpha p_y^2}} \right) + B_- C_{n-1}^{\lambda^-+1} \left( \frac{\sqrt{\alpha} p_y}{\sqrt{1 + \alpha p_y^2}} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

avec  $A_\pm$  et  $B_\pm$  sont des vecteurs ( $4 \times 1$ ) définis comme:

$$A_\pm = \left[ P - ie\beta \left( p_y \lambda^\pm - \frac{i\eta}{\sqrt{\alpha}} \right) Q \right] N_\pm, \quad B_\pm = \frac{2ie\beta \lambda^\pm}{\sqrt{\alpha} (1 + \alpha p_y^2)^{\frac{1}{2}}} N_\pm, \quad (3.3.26)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} (p_z + m + \epsilon) & 0 & 0 & (p_x - ip_y) \\ 0 & (-p_z + m + \epsilon) & (p_x + ip_y) & 0 \\ 0 & (p_x - ip_y) & (p_z - m + \epsilon) & 0 \\ (p_x + ip_y) & 0 & 0 & (-p_z - m + \epsilon) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & H \\ 0 & E & H & 0 \\ 0 & H & E & 0 \\ H & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad (3.3.27)$$

et

$$N_\pm^T = \Lambda^\pm (1 + \alpha p_y^2)^{-\frac{\lambda^\pm}{2}} ((1 \mp \gamma), (1 \pm \gamma), 1, 1). \quad (3.3.28)$$

### 3.3.2 Propriétés statistiques

La fonction de partition de l'oscillateur de Dirac, à une température  $T$ , en présence d'une longueur minimale est donnée par:

$$Z_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \exp -\beta E_n, \quad (3.3.29)$$

avec  $\beta = 1/kT$ . Le calcul de la fonction de partition est évaluée en utilisant les équations d'Euler-Maclaurin formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2p!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0), \quad (3.3.30)$$

où  $B_{2p}$  sont les nombres de Bernoulli et  $f^{(2p-1)}$  sont des dérivés de la fonction  $f(x)$  en  $x = 0$ .

On posons:  $y = \sqrt{(p_x^2 + m^2) + eH\gamma(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2))(\beta eH\gamma n^2 + (\beta eH\gamma + 1)n)}$ . À l'aide de quelques manipulations  $y^2$  peut se mettre sous cette forme condensée:

$$y^2 = C(A'n^2 + A''n + 1), \quad (3.3.31)$$

avec:

$$C = eH\gamma(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2)) \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{4}\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2} + \frac{\beta eH\gamma}{2} + \frac{(p_z^2 + m^2)}{eH\gamma(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2))} \right],$$

$$A' = \frac{(\beta eH\gamma)}{\left[ \sqrt{1 + \frac{1}{4}\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2} + \frac{\beta eH\gamma}{2} + \frac{(p_z^2 + m^2)}{eH\gamma(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2))} \right]},$$

$$A'' = \frac{\left[ 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2} + \beta eH\gamma \right]}{\left[ \sqrt{1 + \frac{1}{4}\beta^2 e^2 H^2 \gamma^2} + \frac{\beta eH\gamma}{2} + \frac{(p_z^2 + m^2)}{eH\gamma(1 + \beta(p_x^2 + p_z^2))} \right]}.$$

En utilisant ce changement de variable:

$$X^2 = \frac{y^2}{C} = (A'n^2 + A''n + 1), \quad (3.3.32)$$

l'intégrale sur  $x$  dans (3.3.30) prendra cette forme:

$$J = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} f(X) dX = \frac{1}{\sqrt{A''}} \int_1^{\infty} dX X \left[ \frac{A'X^2 - A' + A''2}{A'} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp -\beta\gamma\sqrt{C}X \quad (3.3.33)$$

En utilisant le développement en série de la racine carrée, l'intégrale peut être évaluée avec le résultat:

$$J = \frac{\exp -\beta(1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x}{\sqrt{A''^2 - A'}} \int_1^{\infty} X \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{A'}{A''^2 - A'} \right)^n (X)^{2n} \right] dX \exp -\beta\gamma\sqrt{C}X, \quad (3.3.34)$$

en intégrant sur les  $X$ , on aura:

$$J = \frac{\exp \Omega}{\sqrt{A'^2 - A''}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)}{(2n)} \left( \frac{A'}{A'^2 - A'} \right)^n \left[ \frac{\Gamma(2n+2)}{\Lambda^{2n+2}} - \frac{e^{-\Lambda}}{2n+2} \Phi(1, 2n+3; \Lambda) \right] \quad (3.3.35)$$

avec:

$$\Lambda = \beta \gamma \sqrt{C} \quad \text{and} \quad \Omega = -\beta (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} p_x. \quad (3.3.36)$$

pour  $\Lambda \ll 1$  (à haute température) les contributions du premier et troisième termes dans (3.3.30) et du deuxième terme en (3.3.35) sont négligeable en les comparant au premier terme contenant  $\frac{1}{\Lambda^{2n+2}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{\exp \Omega}{\sqrt{A'^2 - A'}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{A'}{A'^2 - A'} \right)^n \frac{\Gamma(2n+2)}{\Lambda^{2n+2}}, \quad (3.3.37)$$

Par conséquent, on obtient:

$$Z_{\beta} = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\exp \Omega}{\sqrt{A'^2 - A'}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \alpha^n \Gamma(2n+2), \quad (3.3.38)$$

où

$$\alpha = \left( \frac{1}{\Lambda^2} \frac{A'}{A'^2 - A'} \right). \quad (3.3.39)$$

À ce stade, on peut distinguer que pour l'extension à hautes températures  $\alpha$  est un petit paramètre:

$$\alpha \simeq \left( \frac{(\Delta x)_{\min}}{l_{th}} \right)^2, \quad (3.3.40)$$

où  $l_{th} = \hbar c / kT$ , avec ( $\hbar = c = 1$ ) représente la longueur d'onde thermique obtenue à des températures élevées. Cette longueur d'onde est une longueur caractéristique du système et ne pourra pas être accessible expérimentalement, elle doit être supérieure à la longueur minimale, en vertu du principe d'incertitude généralisé. Finalement, en conservant seulement les termes de premier ordre en paramètre de déformation  $\beta$ , on obtient finalement l'extension à haute température de la fonction de partition:

$$Z_{\beta} \simeq \frac{\exp \Omega}{2} \left[ \frac{(KT)^2}{eH\gamma^3} - \beta \frac{3(KT)^4}{2\gamma^4} \right]. \quad (3.3.41)$$

Le premier terme est la fonction de partition d'une particule de Dirac soumise à un champ électromagnétique en absence d'une longueur minimale, tandis que le second terme est la contribution venant de la perturbation de l'espace par la présence de la longueur minimale.

L'énergie moyenne définie par:  $U = KT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$  est donné par:

$$\begin{aligned} U &= \exp \Omega KT [1 - 2eH\beta (KT)^2], \\ &= \exp \Omega KT \left[ 1 - 2eH \left( \frac{\Delta x_{\min}}{l_{th}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

tandis que la capacité thermique  $C = \frac{\partial U}{\partial T}$  est donnée par:

$$\begin{aligned} C &= \exp \Omega K [1 - 6eH\beta (KT)^2], \\ &= \exp \Omega K \left[ 1 - 6eH \left( \frac{\Delta x_{\min}}{l_{th}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Dans la limite  $\beta = 0$ , (3.3.42) et (3.3.43) se réduisent à l'énergie et la capacité thermique d'une particule de Dirac soumise à un champ électromagnétique dans cas ordinaire

Le problème du potentiel électromagnétique à 3 dimensions spatiales a été développé dans le formalisme de la mécanique quantique avec une longueur minimale [128]. Considérons le cas relativiste était important pour de nombreuses raisons. les particules relativistes sont des candidats naturels pour l'étude de la nature de l'espace-temps à proximité de l'échelle de Planck. En outre, il est plus facile de déterminer si la discontinuité de l'espace existe en deux et trois dimensions en étudiant les équations de Klein-Gordon et de Dirac dans le cadre de GUP. Dans les deux cas, la solution exacte est obtenue, où les fonctions d'onde sont exprimées en polynômes de Gegenbauer. Le spectre d'énergie est déduit exactement et il contient une correction supplémentaire, qui dépend du paramètre de déformation  $\beta$ , et sa déviation croît rapidement avec  $n^2$  qui est un signe de confinement dur. Ceci est une conséquence naturelle depuis notre problème original est associé à un mouvement d'une particule ponctuelle près de la surface d'une sphère. Le cas limite est alors déduit pour  $\beta \rightarrow 0$ . À haute température les propriétés thermiques sont dérivées.

Dans le régime de hautes températures, le champ électromagnétique extérieur joue un rôle important dans la mécanique quantique relativiste avec le GUP, notamment dans la description du confinement des quarks en physique des particules. En outre, les résultats de cette étude pourraient être utiles pour l'étude des spectres de méson.

Il est intéressant d'étudier ce problème avec le champ électromagnétique quantifié dans le cadre de la théorie quantique des champs, afin de déterminer le taux de création des particules par exemple. Ce problème sera une autre étude détaillée est en phase de préparation.

### 3.4 Etude de l'oscillateur relativiste dans un champ magnétique constant à $(2 + 1)$ dimensions

Le problème de l'oscillateur harmonique est l'un de nombreux sujets, qui ont été récemment étudiés dans le contexte de la longueur minimale. Ce problème a été étudié par Kempf et ces collaborateurs [13], qui ont obtenu la déviation exacte des niveaux d'énergie du système causée par la longueur minimale dans le cas unidimensionnel. Plus tard, Chang et ces collaborateurs généralisent l'étude exacte à des dimensions arbitraires [22]. Le modèle de l'oscillateur harmonique peut parfaitement décrire le mouvement cyclotron d'un électron dans un piège de Penning [129]. Ce fait a été exploité par les auteurs de Réf [22] pour examiner la contrainte qui peut être placée sur le paramètre de déformation à l'aide des mesures de précision des niveaux d'énergie de l'électron. Toutefois, lorsque le champ magnétique est suffisamment fort, ainsi les effets relativistes deviennent importants et doivent être pris en considération. Dans ce cas là, la mécanique quantique relativiste est nécessaire afin d'obtenir un résultat plus précis. L'oscillateur relativiste peut être considéré comme le partenaire relativiste de l'oscillateur harmonique car il se réduit à celui-ci dans la limite non relativiste. Vu l'intérêt majeur de ce sujet, de nombreux travaux lui ont été consacrés, par exemple, la solution exacte de l'oscillateur de Klein-Gordon à 2-dimensions [130], l'oscillateur de Dirac dans la Réf [131], l'oscillateur Bosonic (spin 0 and 1) à une dimension par [120] ça généralisation à  $(1 + 3)$  dimensions dans la Réf [121]...etc.

Pour commencer notre étude, choisissons la direction de champ magnétique suivant l'axe- $z$ , d'où la gauge est fixé comme suit:

$$\mathbb{A} = \frac{\mathcal{B}}{2} (-y, x, 0), \quad (3.4.1)$$

$\mathcal{B}$  est l'intensité du champ magnétique  $\mathbb{A}$  qui est exprimé en fonction du paramètre de déformation  $\alpha$  sous la forme:

$$\mathbb{A} \rightarrow (1 + \alpha p^2) \mathbb{A}, \quad (3.4.2)$$

en employant une forme générale de l'opérateur de position avec une substitution non-minimale donnée par:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbb{A} - im\omega \mathbf{r} \right). \quad (3.4.3)$$

### 3.4.1 Cas de l'oscillateur de Klein-Gordon

L'équation stationnaire décrivant l'oscillateur de Klein-Gordon en présence d'un potentiel  $\mathbb{A}$  est donné par:

$$c^2 \left( p - \frac{e}{c} \mathbb{A} + im\omega r \right) \left( p - \frac{e}{c} \mathbb{A} - im\omega r \right) \phi = (E^2 - m^2 c^4) \phi. \quad (3.4.4)$$

Dans cette section nous illustrons l'effet de la longueur minimale sur le spectre d'énergie et les fonctions propres d'une particule scalaire chargée dans un champ magnétique constant. Considérons le potentiel vecteur dans la mesure symétrique:

$$\mathbb{A} = \frac{\mathcal{B} \times r}{2}, \quad (3.4.5)$$

on peut définir  $\bar{\omega}$  comme:

$$\bar{\omega} = e \frac{\mathcal{B}}{2mc}, \quad (3.4.6)$$

En ce moment, et, dans le cas ordinaire, à deux dimensions avec une certaine remise en ordre en utilisant les relations de commutations ordinaire entre les opérateurs de position et de moment, nous obtenons:

$$c^2 [p^2 + m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) r^2 - 2m\bar{\omega} L_z] \phi = (E^2 - m^2 c^4 + 2m\omega\hbar) \phi, \quad (3.4.7)$$

En substituant l'expression (3.4.3), l'équation. (3.4.4) s'écrit:

$$c^2 \left[ \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbb{A} - im\omega \mathbf{r} \right) \right] \cdot \left[ \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbb{A} + im\omega \mathbf{r} \right) \right] \phi = (E^2 - m^2 c^4) \phi, \quad (3.4.8)$$

à l'aide des relations de commutation proposées dans (2.2.18), avec  $\alpha' = 0$ , on obtient:

$$c^2 \left[ (1 - 2\alpha m\omega\hbar) p^2 + m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) (1 + \alpha p^2)^2 r^2 + 2i\hbar\alpha m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) (1 + \alpha p^2) (\vec{p} \cdot \vec{r}) - 2m\bar{\omega} (1 - 2\alpha m\omega\hbar) (1 + \alpha p^2) L_z \right] \phi = [E^2 - m^2 c^4 + 2m\omega\hbar c^2] \phi, \quad (3.4.9)$$

en utilisant la représentation des moment, on aura:

$$\left[ (1 + \alpha p^2)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 p_x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 p_y} \right) + 2\alpha (1 + \alpha p^2) \left( p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} \right) + \frac{2\bar{\omega} (1 - 2\alpha m\omega\hbar) (1 + \alpha p^2)}{m (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2} L_z - \frac{(1 - 2\alpha m\omega\hbar) p^2}{m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2} + \epsilon \right] \phi(p_x, p_y) = 0, \quad (3.4.10)$$

avec:

$$\epsilon = \frac{1}{m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2} \left( \frac{(E^2 - m^2 c^4)}{c^2} + 2m\omega\hbar \right). \quad (3.4.11)$$

pour résoudre cette équation il est préférable d'utiliser les coordonnées polaires  $(p, \varphi)$  dans l'espace des moments et qui sont reliées aux coordonnées cartésiennes par ces relations:

$$p_x = p \cos \varphi, \quad p_y = p \sin \varphi. \quad (3.4.12)$$

on coordonnée polaire l'équation (3.4.10) devient:

$$\left[ \left( (1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left( \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{2\bar{\omega} (1 - 2\alpha m \omega \hbar) (1 + \alpha p^2) \hbar}{m (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2} \frac{\partial}{i \partial \varphi} - \frac{(1 - 2\alpha m \omega \hbar) p^2}{m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2} + \epsilon \right] \phi(p, \varphi) = 0 \quad (3.4.13)$$

Pour résoudre cette équation, nous employons la forme séparée suivante:

$$\phi(p, \varphi) = \mathcal{N} e^{i|m_l|\varphi} R(p), \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3... \quad (3.4.14)$$

en utilisant la représentation bidimensionnelle des opérateurs de position, on obtient l'équation différentielle suivante pour la partie radiale de la fonction d'onde:

$$\left[ \left( (1 + \alpha p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 + \alpha p^2)^2 \left( \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{m_l^2}{p^2} \right) + \frac{2|m_l|\bar{\omega} (1 - 2\alpha m \omega \hbar) (1 + \alpha p^2)}{m (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar} - \frac{(1 - 2\alpha m \omega \hbar) p^2}{m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2} + \epsilon \right] R(p) = 0. \quad (3.4.15)$$

Pour simplifier cette équation nous introduisons la variable  $\rho$  définie:

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(p\sqrt{\alpha}), \quad (3.4.16)$$

la valeur de  $\rho$  change dans l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, +\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \right[$  selon les valeurs de  $p$  dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ ,

Alors, nous obtenons:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\tan(\sqrt{\alpha}\rho)} (1 + \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)) \frac{d}{d\rho} - \frac{m_l^2 \alpha}{\tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)} (1 + \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho))^2 + \left( \eta - \frac{\alpha}{\kappa} \right) \tan^2(\sqrt{\alpha}\rho) + (\epsilon + \eta) \right] R(\rho) = 0, \quad (3.4.17)$$

avec:

$$\eta = \frac{2|m_l|\bar{\omega} (1 - 2\alpha m \omega \hbar)}{m (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar}, \quad \kappa = \frac{(\alpha m)^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \hbar^2}{(1 - 2\alpha m \omega \hbar)}. \quad (3.4.18)$$

Nous simplifions l'Eq. (3.4.17), en utilisons l'ansatz suivant:

$$R(\rho) = (1 - q^2)^{\frac{\lambda}{2}} q^{|m_l|} f(q), \quad (3.4.19)$$

où  $\lambda$  est une constante à déterminer et  $q = \sin(\sqrt{\alpha}\rho)$ .

Un simple calcul nous mène vers une equation différentielle du type

$$\left[ (1 - q^2) \frac{d^2}{dq^2} + \left( \frac{2|m_l| + 1}{q} - (2(\lambda + |m_l|) + 1)q \right) \frac{d}{dq} + \left( \frac{\epsilon + \eta}{\alpha} - 2m_l^2 - 2\lambda(|m_l| + 1) \right) \right] f(q) = 0, \quad (3.4.20)$$

avec  $\lambda$  verifie:

$$\lambda(\lambda - 2) - m_l^2 + \frac{\eta}{\alpha} - \frac{1}{\kappa} = 0. \quad (3.4.21)$$

dont la solution est donnée par:

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 + m_l^2 - \frac{\eta}{\alpha} + \frac{1}{\kappa}}. \quad (3.4.22)$$

il est remarquable de noter que la fonction  $f(q)$  doit être non singulière à  $q = \pm 1$ , ce qui implique alors que la valeur acceptée de  $\lambda$  est:

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + m_l^2 - \frac{\eta}{\alpha} + \frac{1}{\kappa}}. \quad (3.4.23)$$

Pour réduire l'équation (3.4.20) à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale, nous utilisons un nouveau changement de variable  $z = 2q^2 - 1$  et imposons la condition suivante:

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\epsilon + \eta}{\alpha} - 2m_l^2 - 2\lambda(|m_l| + 1) \right) = n(n + a + b + 1), \quad (3.4.24)$$

où  $n$  est un entier non négatif et  $a, b$  sont définis par:

$$a = \lambda - 1 \text{ and } b = |m_l|$$

Injectons  $a$  et  $b$  dans l'équation (3.4.20), pour obtenir la forme suivante:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} + [(b - a) - (a + b + 2)z] \frac{df}{dz} + n(n + a + b + 1) f(z) = 0. \quad (3.4.25)$$

où la solution exacte est donnée par le polynôme de Jacobi

$$f(z) = P_n^{(a,b)}(z), \quad (3.4.26)$$

En retournant à l'ancienne variable  $p$ , la fonction d'onde s'écrit:

$$\phi_{n,m_l}(p, \varphi) = \mathcal{N} e^{i|m_l|\varphi} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda + |m_l|}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{|m_l|}{2}} P_n^{(\lambda-1, |m_l|)}\left(\frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1}\right), \quad (3.4.27)$$

avec  $\mathcal{N}$  est la constante de normalisation qui peut être calculer en utilisant la condition de normalisation:  $\int \frac{pdpd\varphi}{(1+\alpha p^2)} \phi^*(p, \varphi)\phi(p, \varphi) = 1$  et l'identité suivante:

$$\int_{-1}^{+1} dy (1-y)^a (1+y)^b [P_n^{(a,b)}(y)]^2 = \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+n+1) \Gamma(b+n+1)}{n! (a+b+1+2n) \Gamma(a+b+n+1)}, \quad (3.4.28)$$

la fonction d'onde se réduit alors à l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \phi_{n,m_l}(p, \varphi) = & \sqrt{\alpha} \left[ \left[ \frac{n! (2n + \lambda + |m_l|) \Gamma(n + \lambda + |m_l|)}{\pi \Gamma(n + \lambda) \Gamma(n + |m_l| + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. e^{i|m_l|\varphi} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda+|m_l|}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{|m_l|}{2}} P_n^{(\lambda-1, |m_l|)}\left(\frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1}\right) \right], \quad (3.4.29) \end{aligned}$$

en insérant (3.4.22) dans (3.4.24), nous obtenons en représentation de l'espace des moment le spectre le l'oscillateur de Klein-Gordon avec un champ magnétique uniforme

$$\begin{aligned} E_{N,m_l}^2 = & m^2 c^4 + m \hbar c^2 \\ & \left[ 2(N+1) \sqrt{(\bar{\omega}^2 + \omega^2) [(1 - 2\alpha m \omega \hbar) (1 - 2\alpha m \bar{\omega} |m_l| \hbar) + (\alpha m \hbar)^2 (m_l^2 + 1) (\bar{\omega}^2 + \omega^2)]} \right. \\ & \left. + \alpha m (\bar{\omega}^2 + \omega^2) ((N+1)^2 + m_l^2 + 1) \hbar - 2|m_l| \bar{\omega} (1 - 2\alpha m \omega \hbar) - 2\omega \right]. \quad (3.4.30) \end{aligned}$$

avec  $N = 2n + |m_l|$  et  $n$  est le nombre quantique principal.

Comme dans le cas ordinaire  $E = mc^2 + E_{nr}$ , la limite non-relativiste est obtenue, dans l'hypothèse où  $mc^2 \ll E_{nr}$ , l'approximation de premier ordre est donnée par:

$$\begin{aligned} E_{Nr} = & \hbar m \sqrt{(\bar{\omega}^2 + \omega^2)} \\ & \left[ (N+1) \sqrt{1 + (\alpha \hbar m)^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) (m_l^2 + 1) + 2\hbar m \alpha (\bar{\omega} |m_l| (1 - 2m\omega \hbar \alpha) - \omega)} \right. \\ & \left. + \alpha \hbar m \sqrt{(\bar{\omega}^2 + \omega^2)} \frac{[(N+1)^2 + m_l^2 + 1]}{2} \right] + \hbar (\bar{\omega} |m_l| (1 - 2m\omega \hbar \alpha) - \omega). \quad (3.4.31) \end{aligned}$$

Il est clair que sans compter l'énergie au repos de la particule, le deuxième et troisième termes représentent, respectivement, l'énergie de l'oscillateur non-relativiste et la correction relativiste toutes les deux en présence de la longueur minimale.

### 3.4.2 Cas de l'oscillateur de Dirac

Dans cette section nous considérons l'équation stationnaire décrivant l'oscillateur de Dirac en présence d'un potentiel  $\mathbb{A}$  à D-dimensions [132]

$$\left[ c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbb{A} - im\omega \gamma^0 \mathbf{r} \right) + \gamma^0 mc^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.4.32)$$

où  $m$  et  $\omega$ , sont respectivement la masse et la fréquence de l'oscillateur and là où les états stationnaires  $\Psi(\mathbf{r})$  et les matrices de Dirac  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\gamma^0$  de dimensions (4 × 4) sont donnés par:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (3.4.33)$$

avec  $\sigma$  sont les matrices standard de Pauli et  $I$  représente une matrice (2 × 2) unitaire.

Après avoir effectuer un calcul simple, nous pouvons arriver à ces équations couplés:

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbf{A} - im\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \right) \right) \chi(\mathbf{r}) = (E - mc^2) \phi(\mathbf{r}), \quad (3.4.34)$$

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( i\frac{e}{c} \mathbf{A} + m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} \right) \right) \phi(\mathbf{r}) = (E + mc^2) \chi(\mathbf{r}), \quad (3.4.35)$$

Exprimons  $\chi(\mathbf{r})$  en fonction de  $\phi(\mathbf{r})$  dans (3.4.35) et on le remplaçons dans (3.4.34) et en utilisant la relation  $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ , nous obtenons:

$$c^2 \Pi_{KG}^2 + (1 + \alpha p^2) \{ 2\alpha\hbar m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) L_z - 2m\omega L_z + 2m^2\bar{\omega}\omega (1 + \alpha p^2) r^2 + 4i\hbar\alpha m^2\bar{\omega}\omega (\vec{p} \cdot \vec{r}) - 2m\hbar\bar{\omega} \sigma_z \} \phi = (E^2 - m^2c^4) \phi \quad (3.4.36)$$

où la fonction d'onde est un spineur à deux composants noté:  $\phi(\mathbf{r})^T = (\phi_1, \phi_2)$ , et  $\Pi_{KG}^2$  est le propagateur de K-G:

$$\Pi_{KG}^2 = \left[ p^2 - 2m\bar{\omega} (1 + \alpha p^2) (1 - 2\alpha m\hbar\omega) L_z + m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) (1 + \alpha p^2)^2 r^2 + 2i\hbar m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) \alpha (1 + \alpha p^2) (\vec{p} \cdot \vec{r}) - 2m\omega\hbar (1 + \alpha p^2) \right] \quad (3.4.37)$$

par un calcul direct, l'Eq.(3.4.36) peut être réécrite comme:

$$c^2 \left[ (1 - 2\alpha m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar) p^2 + m^2 (\omega \pm \bar{\omega})^2 (1 + \alpha p^2)^2 r^2 + 2i\hbar\alpha m^2 (\omega \pm \bar{\omega})^2 (1 + \alpha p^2) (\vec{p} \cdot \vec{r}) \mp 2m (\omega \pm \bar{\omega}) (1 - \alpha m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar) (1 + \alpha p^2) L_z \right] \phi_{1,2} = [E^2 - m^2c^4 + 2m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar c^2] \phi_{1,2} \quad (3.4.38)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons le formule séparé ci-dessous:

$$\phi_{1,2}(p, \varphi) = e^{i|m_l|\varphi} R_{1,2}(p), \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3... \quad (3.4.39)$$

nous obtenons l'équation radiale suivante:

$$\left[ (1 + \alpha p^2)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 p_x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 p_y} \right) + 2\alpha (1 + \alpha p^2) \left( p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \pm \frac{2(1 + \alpha p^2)}{m(\omega \pm \bar{\omega})\hbar^2} [1 - \alpha m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar] L_z - \frac{(1 - 2\alpha m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar) p^2}{m^2 (\omega \pm \bar{\omega})^2 \hbar^2} + \epsilon_{\pm} \right] R_{1,2}(p) = 0, \quad (3.4.40)$$

où

$$\dot{\epsilon}_{\pm} = \frac{1}{m^2 (\omega \pm \bar{\omega})^2 \hbar^2} \left( \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} + 2m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar \right) \quad (3.4.41)$$

A ce stade, on résout l'équation. (3.4.40) Exactement de la même manière que l'Eq. De K-G, en tenant compte des mêmes transformations (3.4.16) et (3.4.19). Les spineurs  $R_1$  et  $R_2$  sont exprimés par le polynôme de Jacobi:

$$R_{1,2}(p) = C_{1,2} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda_{1,2} + |m_l|}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{|m_l|}{2}} P_n^{(\lambda_{1,2}-1, |m_l|)} \left( \frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1} \right) \quad (3.4.42)$$

avec:

$$\lambda_{1,2} (\lambda_{1,2} - 2) - m_l^2 + \frac{\dot{\eta}_{\pm}}{\alpha} - \frac{1}{\dot{\kappa}_{\pm}} = 0. \quad (3.4.43)$$

Analysons de la même manière que dans le cas de K-G. Les valeurs admises de  $\lambda_{1,2}$  pour l'équation sont:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \sqrt{1 + m_l^2 - \frac{\dot{\eta}_{\pm}}{\alpha} + \frac{1}{\dot{\kappa}_{\pm}}}, \quad (3.4.44)$$

où nous avons utilisé:

$$\dot{\eta}_{\pm} = \pm \frac{2|m_l|(1 - \alpha m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar)}{m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar}, \quad \dot{\kappa}_{\pm} = \frac{(\alpha m)^2 (\omega \pm \bar{\omega})^2 \hbar^2}{(1 - 2\alpha m (\omega \pm \bar{\omega}) \hbar)}, \quad (3.4.45)$$

et  $C_1, C_2$  sont les constantes de normalisation.

Maintenant nous utilisons la propriétés du polynôme de jacobi dans le but de déterminer les autres composantes de  $\Psi(\mathbf{p})$ :

$$\frac{dP_n^{(a,b)}(y)}{dy} = \frac{1}{2} (n + a + b + 1) P_{n-1}^{(a+1, b+1)}(y). \quad (3.4.46)$$

Finalement la fonction d'onde s'écrit :

$$\Psi_{nm_l}(p, \varphi) \equiv \Lambda_1 \left[ \begin{pmatrix} \frac{E + mc^2}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_1 e^{i\varphi} \end{pmatrix} P_n^{(\lambda_1-1, |m_l|)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Gamma_1 e^{i\varphi} \end{pmatrix} P_{n-1}^{(\lambda_1, |m_l|+1)} \right] + \Lambda_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E + mc^2}{c} \\ \Omega_2 e^{-i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} P_n^{(\lambda_2-1, |m_l|)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_2 e^{-i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} P_{n-1}^{(\lambda_2, |m_l|+1)} \right] \quad (3.4.47)$$

avec:

$$\Lambda_{1,2}(p) = C_{1,2} \left( \frac{c}{E + mc^2} \right) (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda_{1,2} + |m_l|}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{|m_l|}{2}}, \quad \Gamma_{1,2}(p) = \frac{2im(\bar{\omega} - \omega)(n + m_l + \lambda_{1,2})\alpha p}{1 + \alpha p^2}$$

and  $\Omega_1 = p + im(\bar{\omega} - \omega) \left[ (m_l - \lambda_2)\alpha p + \frac{2m_l}{p} \right], \quad \Omega_2 = p + im(\bar{\omega} - \omega)(m_l + \lambda_1)\alpha p$

(3.4.48)

Enfin, selon la condition de quantification et les Eqs. (3.4.24), (3.4.44), On obtient le spectre d'énergie relativiste  $E_1$  et  $E_2$  qui correspond aux spineurs  $R_1$  et  $R_2$

$$E_{(1,2)N,m_l}^2 = m^2 c^4 + m(\omega \pm \bar{\omega}) \hbar c^2 [\pm 2(N + 1) \sqrt{(1 - 2\alpha m(\omega \pm \bar{\omega}) \hbar)(1 \mp \alpha m(\omega \pm \bar{\omega}) |m_l| \hbar) + \alpha m(\omega \pm \bar{\omega}) \hbar [\alpha m(\omega \pm \bar{\omega})(m_l^2 + 1) \hbar \pm m_l] + \alpha m(\omega \pm \bar{\omega}) ((N + 1)^2 + m_l^2 + 1) \hbar \mp 2|m_l|(1 - \alpha m(\omega \pm \bar{\omega}) \hbar) - 2}]. \quad (3.4.49)$$

Dans ce cas, nous observons que  $E_{2N,m_l}^2 = m^2 c^4$  pour les valeurs  $(\omega = \bar{\omega} = \frac{e\mathcal{B}}{2mc})$ , qui peut être interprété comme point de résonance. Le cas ordinaire est obtenu en posons  $\alpha = 0$ .

L'étude de la limite non relativiste de l'équation de Dirac est une méthode utile pour comprendre certains effets sur les fermions couplés à des champs externes.  $(E^2 - m^2 c^4) = 2mc^2 E_{nr}$

$$E_{nr} = \pm \hbar(\omega \pm \varpi) [(N + 1) \left( \sqrt{1 \pm 2\hbar m \alpha (\omega \pm \varpi) [\mp 1 + |m_l| - \alpha \hbar m |m_l| (\omega \pm \bar{\omega})] + (\alpha \hbar m)^2 (\omega \pm \varpi)^2 (m_l^2 + 1)} \right) \pm \frac{m \hbar (\omega \pm \varpi) \alpha}{2} (N^2 + m_l^2 + 2N + 2) \pm \frac{\hbar m (\omega \pm \bar{\omega})}{2} (\mp 1 + |m_l| - \alpha \hbar m |m_l| (\omega \pm \bar{\omega}))]$$

Là, on confirme le résultat obtenu par nouicer [32]

### 3.4.3 Cas de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

#### Bref rappel sur l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) décrit la dynamique des particules scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1. Elle est covariante, du premier degré par rapport au temps et similaire à celle de Dirac. Elle obéit à une algèbre plus compliquée possédant trois représentations irréductibles respectivement, une représentation triviale à une dimension, cinq dimensions associées au spin 0 et à 10 dimensions associées au spin 1.

En plus, cette équation de DKP contient toute information sur le système des particules scalaires de spin 0 mais elle n'est pas complètement équivalente à celle de Klein-Gordon (K-G) sauf dans le cas où l'interaction est absente. Autrement, sa forme quadratique contient un terme supplémentaire non physique peut être dû aux mélanges des secteurs de spin 0 et 1 contrairement à celle de Dirac. Peut être à cause de ce défaut majeur cette équation est restée pendant des années sans aucune importance. Maintenant l'équivalence est établie en montrant que cette contradiction est seulement apparente et peut être élucidée par une interprétation correcte de la théorie DKP.

En mécanique quantique relativiste, cette équation de DKP ayant déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux, nous nous proposons dans cette section de donner des éléments et des représentations essentiels relatifs au boson scalaire ou vectoriel de DKP qui nous seront utiles par la suite, en partant de l'équation de DKP:

$$[i\beta^\mu D_\mu - m]\psi(r) = 0 \quad (3.4.51)$$

où  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  et les  $\beta^\mu$  sont des matrices singulières vérifiant les relations de commutation suivantes

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu. \quad (3.4.52)$$

L'équation adjointe de (3.4.51) est donnée par:

$$[i(\partial_\mu - ieA_\mu)]\bar{\psi}(x, t)\beta^\mu + m\bar{\psi}(x, t) = 0, \quad (3.4.53)$$

avec:  $\bar{\psi} = \psi^+(2\beta_0^2 - \mathbf{1})$ .

De (3.4.51) et (3.4.53), il est facile d'obtenir l'équation de continuité suivante:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \text{où } J^\mu \equiv \bar{\psi}\beta^\mu\psi.$$

1) Pour le cas du spin 0, la représentation associée est à 5 dimensions, dont les matrices sont données explicitement par:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \text{et } \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \rho^i \\ -\rho_T^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.54)$$

avec,  $\mathbf{0}$ ,  $\tilde{\mathbf{0}}$  sont respectivement des matrices nulles de dimensions  $2 \times 2$ ,  $2 \times 3$  et

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.55)$$

2) Dans le deuxième cas d'une particule de spin 1, la représentation associée est à 10 dimensions et les matrices  $\beta^\mu$ , sont données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ et } \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.56)$$

où les matrices  $s_i$  sont les matrices usuelles (3 × 3) du spin 1, qui sont définies comme suit:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.57)$$

et  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$ , sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de dimensions (3 × 3) et les matrices  $\bar{0}$  et  $e_i$  sont définies comme suit:

$$\bar{0} = (000), e_1 = (100), e_2 = (010), e_3 = (001). \quad (3.4.58)$$

Avant de commencer l'étude de l'effet de la longueur minimale sur les fonctions d'ondes et le spectre d'un oscillateur DKP avec un champ magnétique uniforme, nous exposons quelques formules utiles. L'équation stationnaire décrivant le modèle d'oscillateur DKP de spin 0 et de spin 1 avec une masse  $m$  non nulle dans un champ magnétique constant est donnée par:

$$\left[ c\beta \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbb{A} - im\omega\eta^0 \mathbf{r} \right) + mc^2 \right] \Psi = E\beta^0 \Psi, \quad (3.4.59)$$

on a employé la substitution non-minimale  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\eta^0 \mathbf{r}$  avec  $\omega$  est la fréquence de l'oscillateur,  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$  and  $(\beta, \beta^0)$  sont les matrices de DKP [133].

en tenant compte de l'expression (3.4.3), l'équation d'oscillateur DKP dans un champ magnétique constant dans le formalisme de GUP dans le formalisme de GUP est donnée par cette expression:

$$\left[ c\beta \left( \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbb{A} + im\omega\eta^0 \mathbf{r} \right) \right) + mc^2 \right] \Psi = E\beta^0 \Psi. \quad (3.4.60)$$

### Cas du spin 0

Dans le cas spin-0, la fonction d'onde prend la forme suivante:

$$\Psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \Phi \\ i\psi \end{pmatrix}, \text{ with } \Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \text{ and } \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4.61)$$

Injectons (3.4.61) dans l'équation (3.4.60), nous obtenons le système couplé suivant:

$$mc^2\Phi_1 = E\Phi_2 + ic \left[ \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbb{A} - im\omega \mathbf{r} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (3.4.62)$$

$$mc^2\Phi_2 = E\Phi_1 \quad (3.4.63)$$

$$mc^2\boldsymbol{\psi} = ic \left[ \mathbf{p} - (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbb{A} + im\omega \mathbf{r} \right) \right] \Phi_1 \quad (3.4.64)$$

éliminant par substitution  $\Phi_2$  et  $\boldsymbol{\psi}$  en faveur de  $\Phi_1$ , nous aurons:

$$c^2 \left[ (1 - 2\alpha m\omega\hbar) p^2 + m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) (1 + \alpha p^2)^2 r^2 + 2i\hbar\alpha m^2 (\bar{\omega}^2 + \omega^2) (1 + \alpha p^2) (\vec{p} \cdot \vec{r}) - 2m\bar{\omega} (1 - 2\alpha m\omega\hbar) (1 + \alpha p^2) L_z \right] \Phi_1 = [E^2 - m^2c^4 + 2m\omega\hbar c^2] \Phi_1, \quad (3.4.65)$$

avec:

$$\bar{\omega} = \frac{e\mathcal{B}}{2mc}, \quad (3.4.66)$$

le problème peut être convertie directement à l'oscillateur de K-G pour une particule soumise à l'action d'un champ magnétique constant, en présence d'une longueur minimale, et la solution exacte de l'équation (3.4.64) peut être écrite directement dans l'espace des impulsions comme suit:

$$\Phi_{1nm_l}(p, \varphi) = \mathcal{N}_1 e^{i|m_l|\varphi} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda + |m_l|}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{|m_l|}{2}} P_n^{(\lambda-1, |m_l|)} \left( \frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1} \right), \quad (3.4.67)$$

avec  $\mathcal{N}_1$  est la constante de normalisation.

et le spectre d'énergie relativiste  $E$  qui correspond aux fonctions d'onde spinorielles  $\Phi_1$  est:

$$E_{N, m_l}^2 = m^2c^4 + m\hbar c^2 \left[ 2(N+1) \sqrt{(\bar{\omega}^2 + \omega^2) [(1 - 2\alpha m\omega\hbar) (1 - 2\alpha m\bar{\omega} |m_l| \hbar) + (\alpha m\hbar)^2 (m_l^2 + 1) (\bar{\omega}^2 + \omega^2)]} + \alpha m (\bar{\omega}^2 + \omega^2) ((N+1)^2 + m_l^2 + 1) \hbar - 2|m_l| \bar{\omega} (1 - 2\alpha m\omega\hbar) - 2\omega \right]. \quad (3.4.68)$$

Nous notons que le spectre d'énergie pour le premier cas spin 0 explique le confinement de la particule à haute énergie. En revanche, cette expression est connue en théorie non commutative, où la déformation spatiale affecte les résultats de physique.

Maintenant nous utilisons la propriétés du polynôme de Jacobi (3.4.46) on extraire les autres composantes de la fonction d'onde  $\Psi_{nm_l}(\mathbf{p})$ .

On obtient finalement:

$$\Psi_{nm_l}(p, \varphi) \equiv \Lambda \left[ \begin{pmatrix} mc^2 \\ E \\ (A_+ - B_+) e^{i\varphi} + (A_+ + B_+) e^{-i\varphi} \\ i(B_- - A_-) e^{i\varphi} + i(B_- + A_-) e^{-i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} P_n^{(\lambda-1, |m_l|)} \left( \frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1} \right) - C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\bar{\omega} + \omega) e^{i\varphi} - (\bar{\omega} - \omega) e^{-i\varphi} \\ (\bar{\omega} + \omega) e^{i\varphi} + (\bar{\omega} - \omega) e^{-i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} P_{n-1}^{(\lambda, |m_l|+1)} \left( \frac{\alpha p^2 - 1}{\alpha p^2 + 1} \right) \right], \quad (3.4.69)$$

on définit les paramètres  $\Lambda$ ,  $A_{\pm}$ ,  $B_{\pm}$ ,  $C$  par:

$$\Lambda = \frac{\mathcal{N}}{mc^2} e^{i|m_l|\varphi} (1 + \alpha p^2)^{-\left(\frac{\lambda+|m_l|}{2}\right)} (\alpha p^2)^{\frac{|m_l|}{2}}. \quad (3.4.70)$$

$$A_{\pm} = \pm \frac{ipc}{2} - \frac{mc}{2p} [(\bar{\omega} \mp \omega) |m_l| + (\bar{\omega} |m_l| \pm \omega \lambda) \alpha p^2] \quad (3.4.71)$$

$$B_{\pm} = \pm \frac{mc}{2p} [(\bar{\omega} \mp \omega) |m_l| + (\omega |m_l| \pm \bar{\omega} \lambda) \alpha p^2] \quad (3.4.72)$$

$$C = \frac{imc(n + \lambda + |m_l|) \alpha p}{(1 + \alpha p^2)}. \quad (3.4.73)$$

Avant de terminer cette section, nous déterminons la constante de normalisation  $\mathcal{N}$  par la condition de normalisation suivante:

$$\int \frac{pdpd\varphi}{(1 + \alpha p^2)} \bar{\Psi}(p, \varphi) \beta^0 \Psi(p, \varphi) = 1. \quad (3.4.74)$$

qui peut aussi s'écrire en fonction des composantes du spineur  $\Psi$ ,

$$\int \frac{pdpd\varphi}{(1 + \alpha p^2)} \Re[\Phi_1^* \Phi_2] = \frac{1}{2}. \quad (3.4.75)$$

Un simple calcul nous donne:

$$\mathcal{N}_1 = \sqrt{\alpha} \left[ \frac{mc^2 n! (2n + \lambda + |m_l|) \Gamma(n + \lambda + |m_l|)}{E 2\pi \Gamma(n + \lambda) \Gamma(n + |m_l| + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.76)$$

### Cas du spin 1

Passons de la même manière que dans le cas de spin 0, la fonction d'onde dans le cas de spin 1 est un vecteur à dix éléments exprimés par  $\tilde{\Psi}(r)^T = (i\varphi, \mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r), \mathbf{C}(r))$ , avec  $A_i, B_i$

and  $C_i$   $i = 1, 2, 3$  sont respectivement les composantes des vecteurs  $\mathbf{A}(r)$ ,  $\mathbf{B}(r)$  et  $\mathbf{C}(r)$ . L'équation (3.4.60) est réduite au système suivant:

$$mc^2\varphi = -c\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{B} \quad (3.4.77)$$

$$mc^2\mathbf{A} = E\mathbf{B} - c\mathbf{p}^+ \times \mathbf{C} \quad (3.4.78)$$

$$mc^2\mathbf{B} = E\mathbf{A} + c\mathbf{p}^+\varphi \quad (3.4.79)$$

$$mc^2\mathbf{C} = -c\mathbf{p}^- \times \mathbf{A} \quad (3.4.80)$$

avec:

$$\mathbf{p}^+ = \left[ \mathbf{p}^- (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbf{A} - im\omega \mathbf{r} \right) \right] \text{ et } \mathbf{p}^- = \left[ \mathbf{p}^- (1 + \alpha p^2) \left( \frac{e}{c} \mathbf{A} + im\omega \mathbf{r} \right) \right] \quad (3.4.81)$$

Eliminant par substitution respective  $\varphi$ ,  $B$  et  $C$  en fonction de  $\mathbf{A}$ , nous aurons cette équation:

$$(E^2 - m^2c^4) \mathbf{A} = -c^2\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A}) + c^2\mathbf{p}^+ (\mathbf{p}^- \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{m^2}\mathbf{p}^+ [\mathbf{p}^- \cdot [\mathbf{p}^+ \times (\mathbf{p}^- \times \mathbf{A})]]$$

à cette égard le calcul n'est pas vraiment évident pour traiter pour traiter ce système d'équations

on conclusion de ce chapitre les expression des fonctions d'ondes et les spectres énergétiques correspondents contiennent des nouveaux termes complémentaires qui n'apparaissent pas dans le cas ordinaire, ce qui explique la richesse de la structure de l'espace à cette échelle.

Ce travail coïncide avec plusieurs travaux traités en introduisant une longueur minimal. Citons [134] et [36] pour le premier cas de l'oscillateur de K-G si on pose respectivement  $\alpha = 0$  et  $\mathcal{B} = 0$ . pour le deuxième cas, de l'oscillateur de Dirac on retombe sur les résultats de Nouicer [32] pour le cas non-relativiste pour  $\omega = 0$ .

## 4

# Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons développé les outils et techniques nécessaires pour la théorie quantique relativiste qui comprend une longueur minimale absolue. Dans un premier temps nous avons introduit du point de vue mathématique la théorie des déformations formelles des structures algébriques qui joue un rôle fondamentale en physique. Nous avons exposé quelques étapes nécessaires pour construire ce formalisme avant de passer à un cas particulier qui est le principe d'incertitude généralisé (GUP), en postulant une relation de commutation modifiées de la forme:

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij} \left(1 + \beta\hat{P}^2 + \dots\right)$$

Les nouveaux opérateurs de position et d'impulsion sont en général considérés comme des fonctions des anciens opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  satisfaisant aux relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

Les relations de commutation entre les opérateurs de position sont déterminées par l'identité de Jacobi. Les représentations différentielles des opérateurs de positions et de moments ont été présentées explicitement au deuxième chapitre. Il a été montré que les représentations les plus utilisées dans la littérature n'ont aucun effet sur les observables physiques, quoique l'espace des impulsions soit le plus approprié pour résoudre n'importe quel problème aux valeurs propres, un important aspect de ces théories est que les états propres de l'opérateur de position ne sont plus des états physiques, et donc on est forcé à introduire la représentation dite quasi-position, qui consiste à projeter les états sur l'ensemble des états à localisation maximales, au lieu d'utiliser la représentation standard de position obtenue en projetant les vecteurs d'état sur les états propres de l'opérateur position. Ainsi les états du moment qui sont normalement représentés par des ondes planes  $(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp(i\hbar(p \cdot x)) = \langle x|p\rangle$ . sont désormais remplacés par l'ensemble des fonctions

$\Psi_p^{ML}(x) = \langle \Psi_x^{ML} | p \rangle$ , avec  $\Psi_x^{ML}$  sont les états de localisation maximal autour d'une position moyenne  $x$ .

L'existence d'une longueur minimale dans la nature est une proposition intéressante de la théorie des cordes et gravité quantique. Pour cette raison, et aussi à cause de leur intérêt intrinsèque, l'étude des théories quantiques caractérisées par une longueur minimale est devenue une zone active dans la physique théorique. Dans le troisième chapitre nous traitons trois systèmes relativistes commençons, par le potentiel vecteur et scalaire de la forme  $qA(x) = (V_0x, 0, 0, 0)$ , avec un masse variable,  $S(x) = S_0x$ . Nous traitons l'équation de Klein-Gordon à  $(1 + 1)$  dimension en présence d'une longueur minimale, où une particule est soumise à un mélange de potentiels vecteur et scalaire linéaire en utilisant deux approches. Dans la première nous considérons la représentation de Brau où l'opérateur impulsion comprend des dérivées d'ordre supérieur et nous l'injectons dans l'équation de Klein-Gordon. Nous obtenons par la suite une équation différentielle du quatrième ordre, dont sa solution analytique est compliquée en présence de champs extérieurs. ....En utilisant la méthode d'approximation, nous avons calculé les décalages des niveaux d'énergie relativiste en fonction du paramètre de déformation  $\beta$ . Dans la deuxième approche, nous avons introduit le formalisme des intégrales de chemins de Feynman dans l'espace des moments. La forme exacte de la fonction de Green est bien déterminée, le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes normalisées de l'état lié sont déduits. Les deux méthodes sont comparées, et donnent les mêmes résultats de décalage de niveaux d'énergie. Le cas limite est également déduit et les résultats de la mécanique quantique habituelle sont vérifiés. L'étude de la dynamique d'une particule relativiste sous l'action des potentiels vecteurs ainsi scalaires suscité un intérêt considérable dans divers domaines de la physique afin de garantir l'existence d'états liés, tels que le problème de confinement dans le modèle de sac.

Dans le même chapitre les équations de K-G et Dirac en présence d'un champ électromagnétique ont été résolu exactement dans ce nouveau formalisme de la mécanique quantique déformée. Les fonctions d'ondes des deux équations dans l'espace des impulsions sont exprimées en polynômes de Gegenbauer et les niveaux d'énergie, dépendent explicitement de  $n^2$  La raison de ce comportement peut être compris comme suit: Le changement de variable de  $p$  vers  $\rho$  change le terme cinétique  $p^2$  à un terme potentiel  $\tan^2 \sqrt{\beta} \rho$  qui est limitée à  $\rho = \pm \pi / 2 \sqrt{\beta}$ . Donc on peut conclure que pour le spectre d'énergie à haute température, les potentiels sont des puits carrés (square wells), ce qui conduit à la dépendance  $n^2$  de l'énergie. La fonction de partition de l'oscillateur de Dirac, à une température  $T$ , en présence d'une longueur minimale est calculée et exprimée en fonction de la longueur d'onde thermique

obtenue à des températures élevées. Pour que cette longueur d'onde qui caractérise le système soit accessible expérimentalement, elle doit être supérieure à la longueur minimale, en vertu du principe d'incertitude généralisé.

La quatrième section du troisième chapitre est consacrée à la résolution du problème de l'oscillateur relativiste à  $(2 + 1)$  dimensions le cadre de la mécanique quantique déformée dans l'espace des moments ou, nous avons obtenu les fonctions d'ondes normalisées associées ainsi que le spectre d'énergie qui dépendent aussi de  $n^2$  et cela est justifié auparavant. Une autre conséquence intéressante, de la modification des relations commutation est la dépendance supplémentaire des niveaux d'énergie en  $m_l$  qui n'existait pas dans le cas ordinaire. Cela conduit à une réduction de la dégénérescence des valeurs propres de l'énergie qui peut être interprété comme une rupture de la super symétrie de ce système relativiste. Le modèle de l'oscillateur harmonique peut parfaitement décrire le mouvement cyclotron d'un électron piégé dans un champ magnétique fort.

### Démonstration des relations

$$\left[ \hat{P}_i, \hat{L}_{jk} \right] = i\hbar (\delta_{ik} P_j - \delta_{ij} P_k), \quad (0.0.1)$$

Les relations (2.2.25) peuvent être obtenus facilement, car les opérateurs moment commutent.  $\left[ \hat{X}_i, \hat{L}_{jk} \right]$  est loin d'être évidente. elle peut être prouvée à partir de la définition de  $L_{ij}$  écrite comme:

$$(1 + \beta p^2) \hat{L}_{ij} = (X_i P_j - X_j P_i), \quad (0.0.2)$$

en construisons le commutateur avec  $X_k$ , ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} & - [X_k, X_i] P_j - X_i [X_k, P_j] + [X_k, X_j] P_i + X_j [X_k, P_i] \\ & + \beta [X_k, P^2] L_{ij} + (1 + \beta p^2) [X_k, L_{ij}] = 0 \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

Calculons le second terme de cette dernière relation, en utilisant l'identité de Jacobi:

$$\begin{aligned} & -X_i [X_k, P_j] = -[X_i, [X_k, P_j]] - [X_k, P_j] X_i, \\ & = [X_k, [P_j, X_i]] + [P_j, [X_i, X_k]] - [X_k, P_j] X_i, \\ & = [X_k, [P_j, X_i]] - P_j [X_i, X_k] + [X_i, X_k] P_j - [X_k, P_j] X_i. \end{aligned} \quad (0.0.4)$$

On refait le même calcul pour le quatrième terme de l'équation (0.0.3)

$$X_j [X_k, P_i] = [X_k, [P_i, X_j]] - P_i [X_j, X_k] + [X_j, X_k] P_i - [X_k, P_i] X_j,$$

En remplaçant les deux dernières relations dans (0.0.5), le résultat souhaité est obtenu,

$$\left[ \hat{X}_k, \hat{L}_{ij} \right] = i\hbar (\delta_{jk} P_i - \delta_{ik} P_j), \quad (0.0.5)$$

**La symétrie de l'opérateur  $\hat{X}$  (2.2.60)**

l'algèbre de Heisenberg peuvent être représentés sur les fonctions d'onde de l'espace des moment:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}\psi(p) = p\psi(p), \\ \hat{X}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta P^2)\partial_p\psi(p). \end{array} \right. \quad (0.0.6)$$

La symétrie de  $\hat{P}$  est évidente ( $\langle\Psi|\hat{P}|\Phi\rangle = \langle\Psi|\hat{P}|\Phi\rangle$ ). La symétrie de  $\hat{X}$  peut être vu en effectuant une intégration partielle

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{X}|\Phi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta P^2} \psi^*(p) (i\hbar(1 + \beta P^2)\partial_p\Phi(p)), \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \partial_p\Phi(p), \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp (\partial_p\psi^*(p)) \Phi(p). \end{aligned} \quad (0.0.7)$$

$$\begin{aligned} (\langle\Psi|\hat{X}|\Phi\rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta P^2} (i\hbar(1 + \beta P^2)\partial_p\psi(p))^* \Phi(p), \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp (\partial_p\psi(p))^* \Phi(p), \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp (\partial_p\psi^*(p)) \Phi(p). \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

### Calcul de l'expectation $\Delta z_{n1}$

La fonction  $\phi(z)$  qui est définie dans l'équation (3.1.23), satisfait les conditions d'orthogonalité:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(z) \phi_n(z) dz = \delta_{mn}, \quad (0.0.9)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(z) z \phi_n(z) dz = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{2}} & m = n + 1 \\ \sqrt{\frac{n}{2}} & m = n - 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (0.0.10)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(z) z^2 \phi_n(z) dz = \begin{cases} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}, & m = n - 2 \\ \frac{2n+1}{2}, & m = n \\ \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}, & m = n + 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (0.0.11)$$

d'une manière plus générale, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(z) z^r \phi_m(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } r - m - n \text{ est impair} \\ \frac{r!}{2^r} \sqrt{\frac{2^{m+n}}{m!n!}} \sum_{p=\max(0,-s)}^{\min(m,n)} \binom{n}{p} \binom{m}{p} \frac{p!}{2^{p(s+p)!}} & \text{autrement} \end{cases}, \quad (0.0.12)$$

où  $s = (r - n - m)/2$  et  $\binom{n}{p}$  est un coefficient binomial.

En utilisant ces intégrales, nous pouvons calculer l'expectation  $\Delta z_{n1}$  de l'ordre  $\beta$ ,

$$\Delta z_{n1} = \frac{\langle \phi(z) | H^{pert} | \phi(z) \rangle}{\langle \phi(z) | \phi(z) \rangle}. \quad (0.0.13)$$

avec le  $H^{pert} = \beta\alpha \left[ -\frac{2}{3} \partial_z^4 + \lambda \partial_z^2 \right]$ , nous utilisons l'équivalence de l'équation oscillateur harmonique à une dimension (à savoir,  $\partial_z^2 \phi_n(z) = (z^2 - z_1) \phi_n(z)$ ). on aura:

$$\begin{aligned} \Delta z_{n1} &= \frac{\beta\alpha \int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z) \left[-\frac{2}{3} \partial_z^4 + \lambda \partial_z^2\right] \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z) dz}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z) \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) H_n(z) dz} \\ &= -\frac{\beta \sqrt{(S_0^2 - V_0^2)}}{2} (2n^2 + 2n + 1), \end{aligned} \quad (0.0.14)$$

### Intégral de Riemann

Intégral de Riemann du type  $\int_0^{+\infty} t^r \exp st \quad (r \in R, s \in R) :$

On pose  $f(x) = x^r \exp sx$  et  $I(r, s) = \int_0^1 f(t) dt$ ,  $J(r, s) = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ . La fonction  $f$  est positive sur tout l'intervalle d'intégration.

- Étude de l'intégrale  $I(r, s)$

On a, quand  $x$  tend vers 0,  $f(x) \sim x^r$ . L'intégrale est convergente si et seulement si  $r > -1$ .

- Étude de l'intégrale  $J(r, s)$

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a :

- si  $s > 0$ , la fonction  $f(x) \sim x^r \exp sx$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $J(r, s)$  est divergente,

- si  $s = 0$ , alors  $f(x) = x^r$  et  $J(r, s)$  est convergente si et seulement si  $r < -1$ ,

- si  $s < 0$ , alors  $\forall r \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2+r} \exp sx$  et  $J(r, s)$  est convergente.

Les intégrales  $\int_0^{+\infty} t^r \exp st \quad (r \in R, s \in R)$  sont convergentes si et seulement si  $s < 0$  et  $r > -1$ .

Nous allons maintenant vérifier que les fonctions d'onde donnés par ( ) sont physiquement acceptable. Cette dernière propriété exige que les fonctions d'onde doivent appartenir au domaine de  $p$ , Cela signifie que la fonction d'onde radiale doit satisfaire la condition (avoir une incertitude fini dans le moment):

$$\langle p^2 \rangle = \int \frac{dp}{(1 + \alpha p^2)} p^2 [\phi^2(p, \varphi)] < \infty \quad (0.0.15)$$

Il est facile de vérifier que cette intégrale se comporte pour  $p \rightarrow \infty$  comme  $p^{-2\lambda}$ . Étant donné que pour  $p \rightarrow 0$  l'intégrale se comporte comme  $p^2$ , la convergence de cette intégrale sera assurée à condition que  $\lambda > 1/2$ . Cette condition n'est pas satisfaite par la deuxième solution de l'équation. (3.2.17) elle est donc été rejetée.

# Bibliographie

- [1] Introduction to high energy physics, 3ème édition, P.H. Perkins, Addison-Wesley (1987).
- [2] A modern introduction to particle physics, Fayyazuddin et Razuddin, World-Scientific (1992).
- [3] Modern physics, K. Krane, Wiley. 2nd Edition.
- [4] G. Amelino-Camelia and Tsvi Piran, Phys. Rev.D 64 036005 (2001). [arXiv:astro-ph/0008107]. G. Amelino-Camelia, Int. J. Mod. Phys. D 11, 35–60 (2002). arXiv:gr-qc/0012051. G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B 510, 255 (2001). [arXiv:hep-th/0012238]. G. Amelino-Camelia, Nature 418, 34 (2002). [arXiv:gr-qc/0207049]. J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. D 67, 044017 (2003). [arXiv:gr-qc/0207085].
- [5] F.W. Stecker and S.T. Scully, arXiv:astro-ph/0412495.
- [6] Sabine. Hossenfelder, Class. Quantum Grav. 23, 1815 (2006).
- [7] D.J. Gross, P.F. Mende, Nucl. Phys. B 303 407 (1988).
- [8] F. Girelli, E.R. Livine, D. Oriti, Nucl. Phys. B 708 411 (2005).
- [9] X. Calmet, M. Graesser and S. D. H. Hsu, Phys. Rev. Lett. 93, 211101 (2004).
- [10] K. Nozari and T. Azizi, Gen. Relativ. Gravit. 38, 735 (2006).
- [11] Kempf A J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).
- [12] Kempf A, Mangano G and Mann R B. Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).
- [13] Kempf A. J. Phys. A: Math. Gen. 30, 2093 (1997).
- [14] Hinrichsen H and Kempf. A J. Math. Phys. 37, 2121 (1996).

- 
- [15] G. Veneziano, *Europhys. Lett.* 2, 199 (1986); D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, *Phys. Lett. B* 197,81 (1987); D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, *Int. J. Mod. Phys. A* 3, 1615 (1988); D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, *Phys. Lett. B* 216, 41 (1989); D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, *Nucl. Phys. B* 347, 530 (1990); D.J. Gross, P.F. Mende, *Phys. Lett. B* 197, 129 (1987); D.J. Gross, P.F. Mende, *Nucl. Phys. B* 303, 407 (1988); K. Konishi, G. Paffuti, P. Provero, *Phys. Lett. B* 234, 276 (1990); R. Guida, K. Konishi, P. Provero, *Mod. Phys. Lett. A* 6, 1487 (1991).
- [16] S. Capozziello, G. Lambiase and G. Scarpetta, *Int. J. Theor. Phys.* 39, 15 (2000).
- [17] F. Scardigli, *Phys. Lett. B* 452, 39 (1999).
- [18] F. Scardigli and R. Casadio, *Class. Quantum Grav.* 20, 3915 (2003).
- [19] T. Banks, *Int. J. Mod. Phys. A* 16, 910 (2001); T. Banks, hep-th/0007146; for other closely related attempts to understand the cosmological constant problem consult, for example, T. Banks, hep-th/9601151; A.G. Cohen, D.B. Kaplan, and A.E. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* 82, 4971 (1999); P. Horava and D. Minic, *ibid.* 85, 1610 (2000); N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper, and R. Sundrum, *Phys. Lett. B* 480, 193 (2000); S. Kachru, M. Schulz, and E. Silverstein, *Phys. Rev. D* 62, 045021 (2000); P. Berglund, T. Hubsch, and D. Minic, hep-th/0112079; P. Berglund, T. Hubsch, and D. Minic, hep-th/0201187.
- [20] S. Das, E.C. Vagenas, *Phys. Rev. Lett.* 101, 221301 (2008).
- [21] D. Bouaziz and M. Bawin, *Phys. Rev. A* 76, 032112 (2007).
- [22] L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125027 (2002); L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125028 (2002); S. Benczik, L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 66, 026003 (2002).
- [23] J. Slawny, *J. Math. Phys.* 48 (2007)053515; F. Brau, *J. Phys. A*32, 7691 (1999);
- [24] R. Akhoury and Y-P Yao, *Phys. Lett.B*.37,572 (2003); S.Benczik, L. N. Chang, D. Minic and T. Takeuchi, *Phys. Rev. A*72, 012104 (2005).
- [25] M. Merad and M. Falek, *Phys. Scr.* 79, 015010 (2009).
- [26] F. Brau, *J. Phys. A : Math. Gen.* 32, 7691 (1999).

- 
- [27] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, *Phys. Rev. A* 74, 012101 (2006).
- [28] M. M. Stetsko, *Phys. Rev. A* 74, 062105 (2006).
- [29] R. Akhoury and Y.-P. Yao, *Phys. Lett. B* 572, 37-42 (2003).
- [30] Camacho A *Gen. Relativ. Gravit.* 35 1153 (2003).
- [31] Quesne C and Tkachuk V M J. *Phys. A: Math. Gen.* 38 1747 (2005).
- [32] Kh. Nouicer, *J. Math. Phys.* 47, 122102 (2006).
- [33] Nozari K *Chaos Solitons Fractals* 32 302 (2007).
- [34] P. Pedram. *Physics Letters B*, Volume 710, Issue 3, 12 April 2012, Pages 478-48.
- [35] Nozari K and Fazlpour B *Gen. Rel. Grav.* 38 1661 (2006).
- [36] T.V. Fityo. *Physics Letters A* 372, 5872–5877 (2008).
- [37] K. Nouicer, *Phys. Lett. B* 646, 63 (2007) ; Y-W. Kim and Y-J Park, *Phys. Lett. B* 655, 172 (2007) ; K. Nouicer, *Class. Quantum. Grav.* 25, 075010 (2008) ; Y-W. Kim and Y-J Park, *Phys. Rev. D* 77, 067501 (2008).
- [38] Chargui Y, Trabelsi A and Chetouani L. *Phys. Lett. A.* 374 531–4 (2010)
- [39] Ara M, Moniruzzaman Md and Faruque S B. *Phys. Scr.* 82 035005 (2010).
- [40] Chodos A, Jaffe R L. Johnson K, Thorn C B and Weisskopf V F. *Phys. Rev. D* 9 3471 (1974).
- [41] Murray Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.* (2), 79 :59 103, (1964). M. Gerstenhaber, “On the deformation of rings and algebras—II,” *Annals of Mathematics*, vol. 84, pp. 1–19, (1966). M. Gerstenhaber, “On the deformation of rings and algebras—III,” *Annals of Mathematics*, vol. 88, pp. 1–34, (1968).
- [42] Kunihiko Kodaira et Donald Spencer. On deformations of complex analytic structures. I, II. *Ann. of Math.* (2), 67 :328 466, (1958).
- [43] François Bayen, Moshé Flato, Christian Frønsdal, André Lichnerowicz, et Daniel Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. *Ann. Physics*, 111(1) :61 110, (1978).

- 
- [44] M. Kontsevich. Preprint IHÉS, arXiv : q-alg/9709040, Oct. (1997).
- [45] M. Gerstenhaber - « The cohomology structure of an associative ring », *Ann.of Math.* (2) 78 , p. 267-288 (1963).
- [46] M. Schlessinger & J. Stasheff. *J. Pure Appl. Algebra* 38, no. 2-3, p. 313-322 (1985).
- [47] W.M. Goldman & J.J. Millson. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 67, p. 43-96 (1988).
- [48] M. Kontsevich, *Math. Phys. Stud*, vol. 20, Kluwer Acad. Publ, Dordrecht,, p. 139-156 (1997).
- [49] G. Dito & D. Sternheimer. *IRMA Lect. Math. Theor. Phys*, vol. 1, de Gruyter, Berlin,, p. 9-54 (2002).
- [50] A. Weinstein - « Déformation quantization », in *Séminaire Bourbaki 1993-94*, *Astérisque*, vol. 227. Société Mathématique de France, Paris, Exp. n° 789, p. 389-409 1995.
- [51] homepage. M. Flato & D. Sternheimer - « Closedness of star products and cohomologies », in *Lie theory and geometry*, *Progress in Math*, vol. 123, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, p. 241-259.
- [52] Alberto Cattaneo, Bernhard Keller, Charles Torossian, Alain Bruguières. *Déformation, Quantification, Théorie De Lie*. Société Mathématique de France (2005).
- [53] Grégoire Dupont. "Éléments de déformations algébriques". Rapport rédigé d'après les notes d'exposés de Juan Carlos Bustamante, Grégoire Dupont et Ndoune Ndoune au Groupe de Travail Déformations ayant eu lieu entre février et juin 2010 à l'Université de Sherbrooke.
- [54] M. Bordemann, A. Makhlouf, T. Petit. arXiv:math/0211416v1 [math.RA] 26 Nov 2002.
- [55] Benjamin Cahen. "Déformation éformations formelles de certains représentationa de l'algèbre de Lie d'un groupe de Poincaré généralisé". *Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 8, n°1 (2001), p. 17-37.
- [56] Jean-Paul Dufour. Nguyen Tien Zung. "Poisson Structures and Their Normal Forms". *Progress in Mathematics*. Volume 242.

- 
- [57] Andre Lichnerowicz. "Les varietes de Poisson et leurs algèbres de Lie associées". *J. Differential Geommetry* 12, 253-300 (1977).
- [58] Maxim Kontsevich. I. arXiv:q-alg/9709040v1 29 Sep (1997).
- [59] Charles-Michel Marle. "Algèbre et Géométrie dans le monde symplectique III. Structures de Poisson". Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. 10 juin (2008).
- [60] Michel Goze. "Algebres de Lie: classifications, déformations et rigidité, géométrie différentielle". Ecole de Géométrie différentielle et Systèmes Dynamiques.
- [61] Thomas Fox. An introduction to algebraic deformation theory. *J. Pure Appl. Algebra*, 84(1):17-41, (1993).
- [62] Bernhard Keller. Notes for an introduction to Kontsevich's quantization theorem. <http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/omalca.pdf>, (2003).
- [63] María Julia Redondo. Hochschild cohomology : some methods for computations. *Resenhas*, 5(2) :113-137, (2001).
- [64] S. D. Poisson, Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.
- [65] William R. Hamilton, Second essay on a general method in dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society I*, 95-144 (1835).
- [66] C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik (1842-1843). *Gesammelte Werke. Bande I-VIII*, Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Zweite Ausgabe, Chelsea Publishing Co., New York, (1969).
- [67] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Teubner, Leipzig, (1890).
- [68] A. Lichnerowicz. *J. Differential geometry* 12, 253-300, (1977).
- [69] A. Kirillov, Local Lie algebras, *Russian Math Surveys* 31 (1976), 55-75.
- [70] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Di. Geom.* 18 (1983), 523-557.
- [71] Schouten, J. A., Über Differentialkoncomitanten zweier kontravarianter Größen. *Indag. Math.* 2, 449-452 (1940).

- 
- [72] Schouten, J. A., On the differential operators of the first order in tensor calculus. In *Convegno Int. Geom. Diff. Italia*, (1953). Ed. Cremonese, Roma, (1954), 1-7.
- [73] A. Makhlouf, *Theoretical Computer Science*, vol. 187, no. 1-2, pp. 123–145, (1997).
- [74] B. Hadjira, thèse intitulée: "Intégrale de Chemin Supersymétrique dans la Théorie de la Déformation Formelle: Applications sur les Systèmes Relativistes". Université de Jijel 2011-2012.
- [75] H.S. Snyder, *Phys. Rev.* 71, 38 (1947).
- [76] Susskind L J. *Math. Phys.* 36 6377 (1955).
- [77] U. Harbach, S. Hossenfelder, M. Bleicher and H. Stoecker, *Proceedings of the Nuclear Physics, Winter Meeting 2004, Bormio, Italy* ; e-print arXiv :hep-ph/0404205.
- [78] Pouria Pedram. arXiv:1112.2327v2 [hep-th] 13 Jan (2012).
- [79] K. Nozari and A. Etemadi *PHYSICAL REVIEW D* 85, 104029 (2012).
- [80] S. Z. Benczik, *Investigations on the minimal-length uncertainty relation*, PhD Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University (2007).
- [81] C. Quesne, V.M. Tkachuk. *J. Phys. A* 36, 10373-10389 (2003).
- [82] E. Witten *Nucl. Phys. B* 188 (1981) 513.
- [83] F. Cooper, B. Freedman, "Aspects of symmetric quantum mechanics", *Ann. Phys (NY)* 146, 262 (1983). L. Gendenshtein, *JETP. Lett.*38, 356 (1983). D. Lancaster, *Nuovo Cimento A* 79, 28 (1984). L. Gendenshtein, I.V. Krive, *Sov. Phys. Usp.* 28, 654 (1985). G. Stedman, *Euro. Jour. Phys.* 6, 163 (1985). C. V. Sukmar, *J. Phys. A* 18, L57 (1985). R. Hamaker and A. R. P. Rau, *Am. Jour. Phys.* 54, 928 (1986).
- [84] Djamil Bouaziz. Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en sciences, Juin (2009).
- [85] Benczik, S., Chang, L. N., Minic, D., and Takeuchi, T. *Phys. Rev. A* 72, 012104 (2005).
- [86] K. Nozari and P. Pedram, *Europhys. Lett.* 92 (2010) 50013, arXiv:1011.5673.

- [87] P. Pedram, *Int. J. Mod. Phys. D* 19 (2010) 2003, arXiv:1103.3805.
- [88] Hossenfelder, S, et al. Collider signatures in the planck regime. *Phys. Lett. B* 575, 85-99 (2003).
- [89] G. H. Wannier, *Phys. Rev.* 52, 191 (1937).
- [90] A de Souza Dutra, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, (2006)203. A. de Souza Dutra and C. A. S. de Almeida , *Phys. Lett. A* 275, (2000)25;  
I. O.Vakarchuk *J. Phys. A: Math. Gen.* 38,) 4727 ( 2005; S. K. Moayedi and F. Darabi, *Phys. Lett. A* 322, 173 (2004); A. de Souza Dutra , M. B. Hott and C. A. S. de Almeida, *Europhys. Lett.* 62,8 (2003).
- [91] Einevoll, G. T. and Hemmer, P. C. (1988). *Journal of Physics C (Solid State Physics)* 21, L1193.; L´evy-Leblond, J.-M.. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* 52, 1845 (1995).
- [92] F. Dominguez-Adame, *Phys. Lett. A* 136 (1989).
- [93] L. Chetouani , L. Guechi , A. Lecheheb, T.F. Hammann and A. Messouber, *Physica A* 234, 529 (1996).
- [94] C. Y.Chen, D. S. Sun, and F. L Lu, *Phys.Lett A* 330, (2004)424.
- [95] Y. F. Diao, L. Z.Yi and C. S.Jia,.,*Phys. Lett A* 332, (2004)157.
- [96] Yi, L. Z., Diao, Y. F., Liu, J. Y., and Jia, C. S. *Phys.Lett A* 333, (2004)212.
- [97] G. Chen, Z. D Chen,, and Z. D.Louy, *Phys. Lett A* 331, (2004)374.0.
- [98] G.Chen ,Z.D.Chen and P.C.Xuan, *Phys. Lett A* 352 (2006) 317.
- [99] R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* 20 (1948) 367. R.P. Feynman, *Phys. Rev.* 84 (1951) 108.
- [100] T.K. Jana, P. Roy, *Phys. Lett A*, 373, (2009)1239.
- [101] R.K. Su, Z. Yuhong, *J. Phys. A* 17 (1984) 851.[30] H. Gali'c, *Am. J. Phys.* 56, 312 (1988).
- [102] M. Rinaldi, *phys. Rev. D*76, 104027 ( 2007).

- 
- [103] D.W. Mc Laughlin, L.S. Schulman, *J. Math. Phys.* 12,2520 (1971).
- [104] D.C. Khandekar and S.V. Lawande, *Phys.Rep*137, 115 (1986).
- [105] J. S. Kang. H. J. Schnitzer, *Phys. Rev. D* 12, 841 (1979).
- [106] R. W. Robinett, *Am. J. Phys.* 64, 805 (1996). S. R.keng and Z.Yuhong, *Phys. A: Math. Gen.* 17 (1984) 851. A. del Campo and J. G. Muga, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 (2006 )5897.
- [107] V. Canuto and C. Chiuderi, *Lett. Nuovo Cimento*, II, 6, 223 (1969).
- [108] L. Lam, *Lett. Nuovo Cimento*, III, 9, 292 (1970).
- [109] A. Holz, *Lett. Nuovo Cimento*, IV, 1, 26 (1970).
- [110] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, *Theor. Math. Phys.* 126, 16 (1975).
- [111] V. G. Bagrov, D. M. Gitman and A. V. Jushin, *Phys. Rev. D* 12, 3200 (1975).
- [112] V. M. Villalba, *Acta. Phys. Hungarica. NS Heavy Ion Physics* 1, 345 (1995).
- [113] V. M. Villalba, *Phys. Rev. D* 52, 3742 (1995).
- [114] V. M. Villalba and W. Greiner, *Mod. Phys. Lett. A* 17, 1883 (2002).
- [115] Q. G. Lin, *J. Phys. A* 34, 1903 (2001).
- [116] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman and A. A. Smirnov, *J. Math. Phys.* 45, 1873 (2004).
- [117] A. Mostafazadeh and F. Zamani, *Ann. Phys.* 321, 2210 (2006).
- [118] V. G. Bagrov, D. M. Gitman and P. M. Lavrov, *Russ. Phys. J.* 17, 806, DOI: 1007/BF00890215, Translated from *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika*, No. 6, pp. 6874, June 1974.
- [119] A. I. Nikishov, *Theor. Math. Phys.* 136, 958 (2003).
- [120] M. Falek and M. Merad, *J. Math. Phys.* 50, 023508 (2009).
- [121] M. Falek and M. Merad, *J. Math. Phys.* 51, 033516 (2010).
- [122] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, *Phys. Rev.* 1 A 76, 012707 (2007).

- [123] B. S. Lakshmi, *Apeiron* 4, 485 (2009).
- [124] T. K. Jana and P. Roy, *Phys. Lett. A* 373, 1239 (2009).
- [125] M. Merad, F. Zeroual and H. Benzair, *Electronic J. Theor. Phys.* 7(23), 41 (2010).
- [126] Y. Chargui, L. Chetouani and A. Trabelsi, *Commun. Theor. Phys.* 53, 231 (2010).
- [127] Md. Moniruzzaman and S. B. Faruque, *Phys. Scripta* 85, 035006 (2012).
- [128] M. Merad, F. Zeroual and M. Faek. *Modern Physics Letters A.* 2 Vol. 27, No. 15 (2012) 1250080.
- [129] L.S. Brown and G. Gabrielse, *Rev. Mod. Phys.* 58 (1986) 233; R.K. Mittleman, I.I. Ioannou, H.G. Dehmelt, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 2116; H. Dehmelt, R. Mittleman, R.S. van Dyck, and P. Schwinberg, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 4694.
- [130] Chargui Y, Trabelsi A and Chetouani. *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) 53 (2010) pp. 231–236.
- [131] K. Nouicer *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 (2006) 5125–5134.
- [132] Moshinsky, M., Szczepaniak, A.: *J. Phys. A, Math. Gen.* 22, L817 (1989).
- [133] Y Nedjadi and R C Barrett *J. Phys. A: Math. Gen.* 27 4301 (1994).
- [134] Yongjun Xiao, Zhengwen Long, Shaohong Cai *International Journal of Theoretical Physics* Volume 50, Number 10, 3105-3111 (2011)

## ملخص

لقد ناقشنا في هذه الأطروحة الأدوات الأساسية لميكانيك الكم النسبية في مبدأ الارتياح المعمم. هذا النموذج هو متوافق مع مختلف نظريات الجاذبية الكوانتية مثل نظرية الأوتار، حلقة خطورة الكم وفيزياء الثقب الأسود .

هذه النظرية تتضمن حداً أدنى للقياس، يتناسب مع طول بلانك (  $l_p = 10^{-35} \text{m}$  )، خليط فوق البنفسجي/ تحت الأحمر والفضاء غير تبديلي .

نقدم مختلف الأدوات والتقنيات التي تفسر هذه الشكلية، ونبدأ مع وصف نهج رياضي: وهو التكميم بالتشوه والتي تنطبق على مجموعة متنوعة لبوا سون، والنتيجة هي جبر غير تبادلي تجميعي. في وقت لاحق أن نظهر حالة خاصة من هذا النهج وهي مبدأ الارتياح المعمم.

نطبق هذه الشكلية على عدة أنظمة نسبية: معادلة كلاين-غوردون ذات البعد الواحد تحت تأثير خليط من كمون شعاعي وسلمي باستخدام طريقتين: طريقة مباشرة في الفضاء الموضع و طريقة تكامل المسار في فضاء طاقة-دفع. تتم مقارنة نتائج كل من الطريقتين ونجد نفس الكميات المهيمنة على الترتيب 1 في معامل التشوه. نحل معادلتين نسبيتين: معادلة كلاين-غوردون و ديراك خاضعتين لتأثير حقل كهرومغناطيسي منتظم في فضاء الدفع. في كلتا الحالتين، يتم الحصول على الطاقة ودالة الموجة المقابلة. يتم تحديد النهاية الغير نسبية من اجل معامل تشوه صغير.

ندرس الهزاز النسبي ذوا لبعدين تحت تأثير حقل مغناطيسي منتظم. الحل التحليلي هو متعدد الحدود لجاكوبي في تمثيل الفضاء الديناميكي وكما يتم الحصول على طيف الطاقة. النتائج هي تعميم بعض الأعمال درست في نفس الشكلية.

ومن خلال هذه الدراسة تأكدنا أن كل النتائج التي تحصلنا عليها باستعمال الجبر المشوه فرضاً أن معامل التشوه معدوم تتطابق مع ميكانيكا الكم العادي. في هذا السياق، نلاحظ أيضاً أن إدخال مفهوم طول أساسي الأدنى في ميكانيكا الكم ونظرية الحقول الكمية هو ما يعادل ارتياح إضافي على قياس الموضع. بحيث الارتياح الأدنى لا يمكن أبداً أن يكون معدوماً. في الواقع، إدخال مفهوم الحد الأدنى للطول يستند أساساً على تعديل جبر هايزنبرغ القياسي.

الكلمات الدالة: الأساليب الرياضية للفيزياء، معادلات الموجة النسبية: كلاين-غوردون، ديراك ومعادلة DKP ، والطول الأدنى